



UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS

“Carlos Rafael Rodríguez”

FACULTAD DE INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MÁSTER EN
MATEMÁTICA APLICADA

“SISTEMA INFORMÁTICO PARA LA TEORÍA DE
REPOSICIÓN Y EL MANTENIMIENTO”

Autor: Lic. Yoandry Vázquez Figueroa

Tutor: Dr. Manuel E. Cortés Cortés

2011



Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad de Cienfuegos: “Carlos Rafael Rodríguez” como parte de la culminación de los estudios de la Maestría Matemática Aplicada, autorizo a que el mismo sea utilizado por la institución para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la aprobación del autor.

Nombre y apellidos del autor: _____ Firma _____

Los abajo firmantes, certificamos que el presente trabajo ha sido realizado según acuerdos de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura, referido a la temática señalada.

Firma del Tutor

Información Científico Técnica

Para contar no sólo hacen falta objetos contables, sino también la capacidad de prescindir, a la vista de esos objetos, de todas las otras cualidades menos la de su número, capacidad que es el fruto de un largo desarrollo histórico, empírico.

Federico Engels.

Agradecimientos

Mis agradecimientos a todas las personas que colaboraron de forma científica, material y emocional a realizar este trabajo. A Dios porque sin él nada hubiese sido posible. A mis padres por su apoyo e incentivo. A mi familia que siempre estuvo presente. A mi tutor el Dr. Manuel Cortés por su asesoría.

Dedicatoria

A mi hijo, que está por nacer, mis padres y mi esposa

Resumen

La reposición y el mantenimiento constituyen la tarea principal de los sistemas de producción ante la ocurrencia de los deterioros o fallas de los equipos; por tal motivo la directiva de producción debe prevenir este suceso, manteniendo altos niveles de producción y conservando el buen estado técnico de los equipos. En una primera etapa de este trabajo se realiza un análisis minucioso del tema objeto de estudio, y se realiza una breve caracterización de las técnicas de solución empleadas por los modelos matemáticos existentes. Luego en un segundo momento se seleccionan los modelos matemáticos a emplear sobre la base de las características de vida de los equipos (los que se deterioran con el tiempo, producto del desgaste o uso, y los que fallan o mueren de súbito) y el factor económico utilizado en la obtención de la solución (costo mínimo o ganancia máxima). También se seleccionan los métodos numéricos a emplear en la obtención de la función continua lineal o no lineal que mejor represente a un conjunto de datos de un equipo.

En este sentido se propone desarrollar un sistema informático que determine la política óptima de reemplazo de equipo, partiendo de sus valores de costo, reventa e ingreso, y la tasa de interés del dinero.

Índice

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. TEORÍA DE REPOSICIÓN Y MANTENIMIENTO.	5
1.1 Breve reseña histórica de la teoría de reemplazo.	5
1.2 Reemplazo de equipo. Importancia.	10
1.3 Reemplazo con costo mínimo.....	17
1.4 Reemplazo con costo mínimo y valor de reventa.....	18
1.5 Reemplazo con costo mínimo y actualización del dinero.	19
1.6 Reemplazo de componente con costo mínimo.....	21
1.7 Reemplazo de grupo con costo mínimo	22
1.8 Reemplazo con utilidad máxima y actualización del dinero.	24
1.9 Reemplazo con utilidad máxima y programación lineal.	25
1.10 Reemplazo en funciones continuas	27
CAPÍTULO 2. SISTEMA INFORMÁTICO PARA LA REPOSICIÓN Y MANTENIMIENTO.	29
2.1 Análisis para un equipo con costo mínimo.....	29
2.2 Análisis para un equipo con reventa y costo mínimo	30
2.3 Análisis para un equipo con actualización y costo mínimo.....	31
2.4 Análisis de componente con costo mínimo	34
2.5 Análisis para un grupo de equipos con costo mínimo	35
2.6 Análisis para un equipo con utilidad máxima	41
2.7 Análisis para un equipo con utilidad máxima y programación lineal	45
2.8 Análisis para un equipo con funciones continuas y costo mínimo	46
2.9 Análisis para un equipo con funciones continuas y utilidad máxima.....	48
2.10 Métodos numéricos.....	52
2.10.1 Ajuste por Mínimos Cuadrados	52
2.10.2 Método de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales	57
CAPÍTULO 3. RESULTADOS DEL SISTEMA INFORMÁTICO MoRM.	61
3.1 Características e interfaz de usuario.....	61

Índice

3.2 Resultados de la encuesta	64
3.3 Comparación de los resultados de MoRM.	66
CONCLUSIONES.....	¡Error! Marcador no definido.
RECOMENDACIONES.....	86
ANEXOS	87
BIBLIOGRAFÍA.	94

INTRODUCCIÓN

En muchos países en desarrollo, el tema de analizar y decidir cuándo comprar o construir un equipo y establecer un programa de operaciones para el mismo, está basado en conjeturas intuitivas, antecedentes rutinarios, la experiencia de años, o en suposiciones más o menos fundadas en consideraciones puramente cualitativas e intuitivas (Poveda, 2002).

La tendencia general de los funcionarios o propietarios de las empresas es hacer los reemplazos en circunstancias tales como la iniciación de nuevos trabajos, las oportunidades de mercado y el tener un capital extra disponible para inversión sin antes realizar un análisis detallado de los aspectos técnicos y económicos de los equipos.

En la medida en que los equipos son operados estos envejecen, fallan por diversas causas y generan paros de tal forma que estos deben ser sometidos a ciertas actividades de mantenimiento, de modo que a los costos usuales de operación se suman los costos de mantenimiento disminuyendo los beneficios (Gómez, 2002).

De lo anterior se deduce que los equipos deben retirarse del servicio por causas que pueden agruparse en dos grandes grupos, a saber:

1- Razones Técnicas

- Destrucción Física.
- Imposibilidad de seguir prestando un nivel de servicio adecuado.

2- Razones Económicas: Éstas comprometen la competitividad del equipo. Con el tiempo se produce una degradación del rendimiento económico por necesidad de más mantenimiento, aumento de consumo de energía, incremento en productos defectuosos, llamándose a esto envejecimiento.

Envejecimiento: Se evidencia cuando es preciso gastar cada vez más, obteniendo una disponibilidad y calidad cada vez menores.

Obsolescencia: Se evidencia por la evolución del contexto socioeconómico y especialmente el progreso tecnológico en el cual se desarrollan las actividades de la

empresa. Un equipo industrial se debe retirar del servicio por obsolescencia cuando se agotan las materias primas que procesa o aparecen otras a partir de las cuales se pueden obtener mejores condiciones; cuando los productos que manufactura caen en desuso o cuando aparecen mejores equipos (Figuera & Figuera, 1979).

Los fabricantes siempre sugieren valores para la vida útil de los equipos, los cuales constituyen resultados de estudios estadísticos desarrollados para condiciones ideales con estándares norteamericanos o europeos; sin embargo las condiciones medios ambientales y locales en la que se implanta el equipo, conjuntamente con su empleo o explotación, que implica un mayor o menor desgaste, son los factores que en realidad determinan su vida útil.

Por lo expresado hasta aquí, es de vital importancia para las finanzas de las empresas acercarse al momento más idóneo de su reemplazo, para lo cual muchos profesionales han venido desarrollando modelos matemáticos que ayudan a facilitar esta toma de decisión; pero no se ha desarrollado una herramienta informática con tal finalidad, lo que permite plantear la siguiente situación problemática.

Situación problemática

En la actualidad, el desarrollo tecnológico ha sido de vital importancia en las empresas y compañías, al existir equipos tecnológicos destinados a la producción que necesitan del análisis de cuándo repararse o reponerse, pero no se cuenta con un sistema informático, que resuelva dicho problema automáticamente.

Problema científico

Necesidad de un sistema informático, que utilice modelos matemáticos para determinar una política económica óptima de reemplazo de equipos.

Objeto de estudio

Los modelos matemáticos para la reposición y el mantenimiento.

Campo de acción

Los sistemas informáticos de Reposición y Mantenimiento.

Objetivo general

Elaborar un Sistema Informático basado en los Modelos Matemáticos de Reposición y Mantenimiento, para funciones discretas y continuas, que resuelva el problema de cuándo reponer o seguir reparando un equipo con costos mínimos.

Objetivos específicos

- ✓ Analizar los Modelos Matemáticos existentes para funciones discretas y continuas.
- ✓ Elaborar el Sistema Informático para la Reposición y el Mantenimiento.
- ✓ Verificar los resultados obtenidos por el Sistema Informático.

Tareas

- ✓ Resumir los aspectos teóricos referentes al tema objeto de estudio utilizando la bibliografía existente.
- ✓ Seleccionar los modelos matemáticos a utilizar.
- ✓ Seleccionar la plataforma y las tecnologías a emplear en el Sistema Informático.
- ✓ Confeccionar la Encuesta a Aplicar a los profesionales.
- ✓ Aplicar métodos estadísticos a los resultados de las encuestas.
- ✓ Confeccionar los resultados obtenidos.

Idea a defender

La implementación de un Sistema Informático para el cálculo de los modelos de reposición y mantenimiento, permitirá al usuario obtener resultados del tiempo en que debe terminar la reparación o el mantenimiento y emprender una reposición de los equipos con valores económicos mínimos.

Metodología aplicada**✓ Métodos del nivel teórico**

Análisis histórico – lógico: Para analizar el desarrollo de la Teoría de Reposición y el Mantenimiento en su decurso histórico.

Análisis – Síntesis: Para procesar toda la información relacionada con los aspectos abordados y poder realizar el sistema informático.

Hipotético – Deductivo: Para realizar las generalizaciones y obtener los desarrollos de los modelos matemáticos.

Modelación Matemática: Para desarrollar los modelos matemáticos discretos, continuos y los ajustes de curvas.

✓ **Métodos empíricos**

Para la aplicación y el procesamiento de las encuestas.

✓ **Métodos estadísticos**

Utilización de paquetes de programas: Microsoft Office Excel 2007 y Wolfram Mathematica 7.

Análisis por capítulos

Capítulo 1. Teoría de Reposición y Mantenimiento.

En el capítulo se realiza una revisión bibliográfica sobre la teoría matemática de Reposición y Mantenimiento, y una descripción resumida de los modelos matemáticos de funciones discretas y continuas correspondientes a esta teoría.

Capítulo 2. Sistema informático para la Reposición y Mantenimiento.

En el capítulo se determinan los modelos matemáticos para la reposición y el mantenimiento, con funciones discretas y continuas, que serán implementados en el Sistema Informático; y se brinda las demostraciones matemáticas que fundamentan sus principales resultados. También se determinan los métodos numéricos a utilizar con sus respectivos fundamentos matemáticos.

Capítulo 3. Resultados del sistema informático MoRM.

En el capítulo se verifica la utilidad y la efectividad del sistema informático, tomando como entrada, los datos de ejemplos ilustrativos en la literatura estudiada. Se realiza un análisis estadístico a las encuestas realizadas a profesionales que tienen relación con el tema de reposición y mantenimiento. También se determina el tipo de aplicación y las tecnologías a emplear en el desarrollo del sistema informático; y se realiza una breve descripción de las características y la interfaz de usuario.

CAPÍTULO 1. TEORÍA DE REPOSICIÓN Y MANTENIMIENTO.

En el capítulo se realiza una revisión bibliográfica sobre la teoría matemática de Reposición y Mantenimiento, y una descripción resumida de los modelos matemáticos de funciones discretas y continuas correspondientes a esta teoría.

1.1 Breve reseña histórica de la teoría de reemplazo.

Un modelo es una representación de un objeto, sistema o idea, de forma diferente al de la entidad misma. El propósito de los modelos es ayudar a explicar, entender o mejorar un sistema. Un modelo de un objeto es una réplica exacta de éste o una abstracción de las propiedades dominantes del objeto (Mladosich, Polanco, & Peña, 2007).

Los modelos matemáticos discretos en la teoría de reemplazo, se caracterizan por considerar el tiempo discreto; realizan su análisis a partir de una cantidad finita de periodos de tiempo de igual longitud; mientras que los modelos matemáticos continuos se caracterizan por considerar el tiempo continuo; realizan su análisis a partir de funciones continuas representando un conjunto de datos dados en algún periodo de tiempo.

La teoría de reemplazo de equipo tiene su origen en dos artículos publicados por Taylor en 1923 y Hotelling en 1925. Taylor desarrolló por medios de un análisis de periodo discreto, una fórmula que relaciona el costo unidad promedio de la cantidad producida de un equipo en t periodos con el costo de un equipo nuevo, el valor devaluado o de reventa del equipo después de t periodos de servicio, el costo de operación del equipo en cada periodo de servicio, la cantidad producida del equipo en cada uno de los periodos y la tasa de interés del dinero. Luego procede a demostrar como determinar los periodos de vida del equipo de modo que el costo unidad de producción sea mínimo.

Dos años más tarde, Hotelling da una idea diferente a la proposición de Taylor al emitir la siguiente pregunta:

¿Desea el fabricante hacer de su costo unidad un mínimo? O puede ser que consideraciones en cuanto al beneficio lo guíen a descartar el equipo en algún punto en el tiempo diferente a ese en el cual se alcanza el costo unidad mínimo. Luego propone un punto de vista en que el dueño del equipo desea maximizar el valor presente de la cantidad producida del equipo menos su costo de operación (Hotelling, 1925; Taylor, 1923).

Posteriormente Preinreich en 1940 demostró que la vida económica de un equipo no puede ser determinada aisladamente de la vida económica de cada equipo en la cadena de reemplazos futuros, prolongándose tan lejos en el futuro como el horizonte de beneficio de la firma. Por ende, el sostiene la opinión que la firma debe maximizar el valor presente de la “buena voluntad juntada” de todos los reemplazos, donde la “buena voluntad juntada” es el valor presente de las ganancias del equipo futuro, reemplazos menos el valor presente de los costos de tales equipos (Preinreich, 1940).

Las contribuciones anteriores le proporcionaron a la teoría de reemplazo una forma moderadamente completa, puesto que los modelos matemáticos obtenidos, no tuvieron en cuenta los efectos de los cambios tecnológicos u obsolescencia, es decir, asumen una tecnología estacionaria en que los equipos son reemplazados por una réplica exacta; el único factor que hace el reemplazo económicamente justificable es el efecto de la edad causando la disminución de las ganancias neta del equipo.

Terborgh en 1949 fue el primero en extender la teoría de reemplazo a tener en cuenta la obsolescencia del equipo. Su modelo tiene como objetivo la correcta valoración de sustituir o no un equipo, comparando la suma de los costos totales de la inferioridad operativa y el capital para la máquina actual y aquellos correspondientes a un equipo nuevo, haciendo referencia, con inferioridad operativa, a la diferencia de prestación de servicio de un equipo con respecto a otro (Terborgh, 1949).

Desde entonces, han sido muchos los modelos matemáticos que se han desarrollado pretendiendo resolver la incógnita del momento óptimo de reemplazo, abordando el

problema desde diferentes perspectivas y bajo diferentes ambientes, algunos con un rigor teórico-práctico mayor que otros.

Los estudios de reemplazo pueden ser clasificados según sus características en tres grandes grupos: Los que realizan comparaciones antiguo-nuevas, los modelos de optimización y por último los modelos de límite (Viveros, González, & Rodríguez, 2004).

Modelos que utilizan comparaciones antiguo-nuevas

Estos modelos determinan el momento óptimo de reemplazo de un equipo a través de un balance entre el equipo en uso y el equipo nuevo que lo reemplazaría, basados en las ventajas económicas de operar uno u otro. La comparación se realiza sobre datos a priori estimados por el decisor.

Ésta técnica consiste en comparar el equipo actualmente en uso con las ventajas que se tendrían si este fuera reemplazado por un equipo nuevo. Tomando en cuenta el valor de salvamento, valor comercial y vida útil del equipo (Luza, 2007).

Churchman en 1971 plantea el cálculo del período que representa la vida útil óptima de un equipo nuevo, donde se minimiza el valor presente neto de sus costos de manutención. Este valor representa un parámetro para determinar el momento de reemplazo del equipo en uso, lo cual sucede cuando sus costos de operación y mantenimiento superan el valor presente neto calculado. Esta propuesta es escogida por Prawda en 1980 y por Sasieni en 1982 quienes formulan un modelo de valor presente del gasto que utiliza el mismo principio, diferenciándose en su formulación matemática y la información utilizada o dejada de usar (Churchman, Ackoff, & Arnoff, 1971; Prawda, 1981; Sasieni, Yaspan, & Friedman, 1982).

Baca en el 2000 formula dos métodos a través de ingeniería económica:

- 1- Calcular el costo anual uniforme equivalente del equipo y seleccionar el número de años en los cuales el costo es mínimo y por ende el período óptimo de reemplazo.
- 2- Calcular el costo anual uniforme equivalente del equipo en uso y nuevo, y se escoge el de menor costo anual uniforme, tomándose la decisión de reemplazo (Baca, 2000).

Estos métodos son aplicados por Gómez en 2002.

Los métodos de comparación antiguo-nuevo presentan ventajas cuando hay escasez de información y la decisión de reemplazo debe tomarse bajo análisis de costos supuestos y datos determinados según la experiencia del decisor, sin embargo la comparación de la máquina actual con una máquina nueva representa una falencia en este tipo de modelos, ya que, en primer lugar la selección del equipo nuevo debería estar sometida a un proceso de gestión tecnológica adecuado, lo cual implica disponer de los procesos de gestión para su identificación, evaluación y selección (PAT, 2003). Lo cual implica inversión de tiempo y dinero que no se tienen en cuenta. Una segunda desventaja de estos modelos, radica en que los costos de operación del nuevo equipo deben ser predichos a partir de datos ofrecidos por el fabricante, el cual supone condiciones ideales para el funcionamiento del equipo, o comportamientos de equipos similares, ignorándose los posibles errores en las predicciones.

Modelos de optimización

Estos modelos determinan el valor óptimo de una función predeterminada, siendo mínimo para funciones de costos de operación del equipo y máximo para funciones de utilidad del equipo.

Un primer modelo es presentado por Selivanov en 1972 proponiendo una solución analítica general para determinar los plazos de servicio de los equipos, hallando un equivalente monetario a los indicios técnicos y tecnológicos, con los cuales se agrupa toda inversión o pérdida de oportunidad que se genera al utilizar un equipo, a partir de lo cual se decide reemplazar en el momento que se minimice el valor de los gastos y

perdidas específicas ligados con la utilización del equipo y referidos a la unidad de trabajo cumplido (Selivanov, 1972).

Un siguiente modelo es presentado por Espinoza en 1990. El cual expresa que el reemplazo de un equipo debe surgir del cruce histórico de la mantención excesiva y del valor decreciente del equipo, considerando factores de ocurrencia propia de la situación específica del equipo, agrupados en obsolescencia, inadecuación e ineficiencia (Espinoza, 1990).

Mira en 1994 propone un criterio de optimización para determinar a priori la vida de un equipo, basándose en el cálculo del número de años de uso que conduce a un costo anual equivalente mínimo del equipo, buscando tomar decisiones en un horizonte de planeación amplio, para el que se requiere más de una renovación para obtener una política de reposición global si no óptima, pues se desconocen las opciones futuras, sí razonable, u óptima en relación con la información disponible (Mira, 1994).

Cantillo en 1998 propone un modelo de costos promedios acumulados consistiendo en registrar anualmente los costos fijos, variables y por equipo parado realizando el reemplazo cuando el costo medio anual acumulado sea mínimo (Cantillo, 1998).

Abarca y Alvarado en el 2000 proponen un método de cálculo de vida útil técnica del equipo; entiéndase como el período de tiempo durante el cual un determinado bien presta el servicio para el cual fue diseñado. El mismo consiste en efectuar una inspección del bien en estudio, determinar las cargas de servicio que actúan sobre éste identificando el régimen de trabajo y posteriormente efectuando cálculos y determinaciones sobre el proceso de envejecimiento controlado por algún fenómeno cuya evolución temporal es conocida (Abarca & Alvarado, 2000).

Modelos de límite

Estos modelos plantean encontrar el instante de tiempo en el cual se alcanza un parámetro previamente establecido, estos son: modelo de renovación de equipos en grupo y modelo de los costos acumulados de mantenimiento, los cuales son resueltos a través de programación dinámica.

De este recorrido bibliográfico se puede concluir que los modelos existentes plantean la decisión de reemplazo en términos de variables netamente económicas, ya sea porque no se reconoce la importancia de la inclusión de otro tipo de variables, por la imposibilidad de establecer escalas comparativas entre ellas o porque se terminan expresando en términos económicos que aumentan la incertidumbre del modelo y por ende de la decisión final (Viveros, et al., 2004).

1.2 Reemplazo de equipo. Importancia.

El análisis de reemplazo sirve para averiguar si un equipo está operando de manera económica o si los costos de operación pueden disminuirse, adquiriendo un nuevo equipo. Además, mediante este análisis se puede averiguar si el equipo actual debe ser reemplazado de inmediato o es mejor esperar unos años, antes de cambiarlo (Gómez, 2002).

Los equipos durante los períodos de utilización, sufren desgastes en sus diversas partes y mecanismos, por lo cual es necesario repararlos o sustituirlos para que el equipo pueda seguir trabajando. Sin embargo, con el transcurso del tiempo es tal el deterioro de una máquina, que en vez de constituir para el propietario un bien de producción, se convierte en un gravamen. Por otra parte, las cada vez más frecuentes averías aumentan los tiempos muertos o improductivos, y llegan incluso a afectar la productividad de otros equipos que trabajan conjuntamente con ellos. Además, con el tiempo el equipo se va volviendo obsoleto, por lo cual su propietario queda en desventaja frente a otros competidores que poseen equipos más modernos y eficientes (Cantillo, 1998).

Es preciso destacar que llega siempre un momento en que es técnica y tecnológicamente necesario, o económicamente preferible, no prolongar más el funcionamiento de un equipo sino desecharlo definitivamente, para no caer en un costo que puede ser exagerado si se mantiene excesivamente, tratando de lograr el funcionamiento indefinido de un equipo (Figuera & Figuera, 1979; Selivanov, 1972).

La alternativa al incremento del costo de operación de los equipos es el costo de reemplazar a un equipo viejo por uno nuevo. Existen determinados períodos de tiempo en los cuales reemplazar a un equipo viejo es más económico que continuar incrementando los costos de operación del equipo viejo. En estos períodos de tiempo el aseguramiento de un equipo nuevo resulta en extremo mucho más rentable (Álvarez, 1987; Kaufmann, 1977).

Existen dos razones por las cuales es necesario llevar a cabo un reemplazo de equipo; las cuales son razones técnicas y razones económicas. Las razones técnicas son aquellas que imposibilitan seguir prestando un nivel de servicio adecuado o ya sea por destrucción física; y las razones económicas, éstas comprometen la competitividad del equipo. Con el tiempo se produce una degradación del rendimiento económico por necesidad de más mantenimiento, aumento de consumo de energía, incremento en productos defectuosos, llamándose a esto envejecimiento (Viveros, et al., 2004).

¿Qué problemas pueden presentarse en virtud de lo esclarecido aquí?

Primero: Equipos que se deterioran con el tiempo y se les asocian tiempos y costos de operación y el problema se reduce a investigar hasta donde será mejor reemplazar que mantener.

Segundo: Equipos que fallan de súbito y el problema consiste en determinar cuál es la política de reemplazo a seguir (Álvarez, 1987; Kaufmann, 1977).

De ahí que la teoría de reposición y mantenimiento de equipos está muy ligada a los costos de los mismos, a sus características técnicas y fundamentalmente a la predicción del momento óptimo de su reemplazo.

El reemplazo de un equipo debe surgir del cruce histórico de la mantención excesiva y del valor decreciente del equipo (Espinoza, 1990).

Para realizar un análisis económico serio y adecuado que permita decidir el momento óptimo de reemplazo, es fundamental establecer un sistema de información de costos. Debe llevarse una base de datos, preferiblemente informatizada atinente al equipo: utilización, trabajos, reparaciones, horas en uso, horas cesantes, costos. Sólo un banco de datos confiable y completo permitirá un análisis adecuado.

Es conveniente clasificar los costos de la siguiente manera:

Costos fijos o de propiedad que incluyen:

- ✓ Depreciación – es la pérdida debida a la baja del valor de la máquina causada por el uso y la antigüedad. Es la diferencia entre el valor de compra y el de reventa, el cual es determinado por las condiciones del mercado.
- ✓ Costo de capital, intereses – los intereses y seguros se calculan según la prima anual que debe pagarse por esos conceptos. El costo capital es el cargo equivalente a los intereses que ocasiona el capital invertido en la compra del equipo. Se calcula como el valor medio de éste multiplicado por la tasa de interés considerada.
- ✓ Costos de almacenamiento y bodegaje.

Costos variables o de operación que incluyen:

- ✓ Combustible
- ✓ Lubricantes
- ✓ Operador
- ✓ Llantas

- ✓ Mantenimiento – corresponden a las erogaciones que deben efectuarse para mantener la máquina en condiciones de trabajo. Se puede cuantificar llevando un registro de los costos.

Los costos que a nivel empresarial implican tener la máquina parada y la obsolescencia de ésta pueden evaluarse con el equivalente al costo-horario de alquiler de una máquina que sustituya a la dañada (Cantillo, 1998).

Desde la perspectiva de los usuarios resulta muy importante estimar o calcular la vida útil de los servicios; por tanto los sistemas pueden ser reemplazados antes o después de su vida útil. Los usuarios generalmente lo pueden hacer por multitud de razones. Aunque hay circunstancias en las que después de estimado el tiempo de vida útil de un sistema, el mismo puede continuar operándose.

Desde luego y en primer lugar debemos reconocer que el equipo tiene una vida útil específica, en el curso de la cual y prestando servicio, el equipo envejece y va paulatinamente perdiendo su valor inicial hasta llegar al fin de la vida útil, a tener sólo un valor residual muy menguado y casi de desecho (Espinoza, 1990).

La curva de la bañera es un gráfico que refleja el comportamiento de sistemas, equipos o máquinas, relacionando su tasa de fallos respecto a su tiempo de trabajo.

Sobre la curva de bañera se denota claramente tres zonas, debido al manejo y desempeño de los equipos o sistema, estas son:

- ✓ Fallos iniciales o infantiles (Tasa de fallos decrece)
- ✓ Fallos normales o vida útil (Tasa de fallos constantes)
- ✓ Fallos de desgaste (Tasa constante)

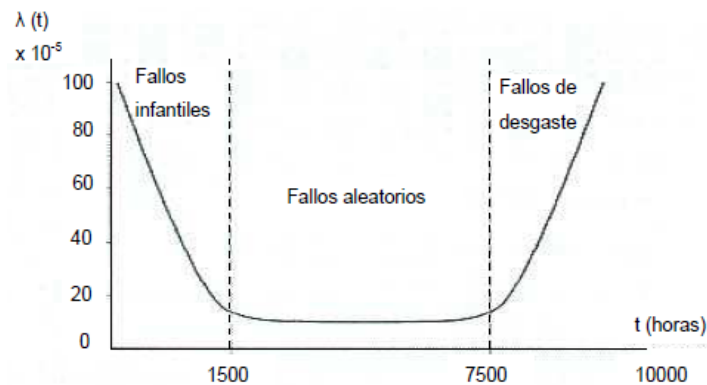


Figura 1.1 – Curva de bañera

donde $\lambda(t)$ es la tasa de fallos o averías, donde la probabilidad condicional de que se produzca una avería entre el momento t y dt puede escribirse como $\lambda(t)dt$ (Garzón, Edwin, & Aguinada, 2007).

Es por tanto la depreciación, el primer factor que afecta el valor del equipo. Este proceso paulatino puede ser representado bien por funciones parabólicas de pendiente decreciente hasta el fin de la vida útil.

Pero no cesa allí la pérdida de valor del equipo, pues la depreciación no considera factores de ocurrencia exógena o privada de la situación específica de dicho bien de capital: desajustes, cambios en el entorno, ambiente corrosivo, desgastes activos y cambios en la tecnología.

La obsolescencia afecta al equipo por influencia del progreso tecnológico que tiende a producir equipos más baratos, de menor volumen, más silenciosos y contruidos con materiales de mayor resistencia específica.

La consecuencia práctica es que será difícil y caro adquirir repuestos, los manuales de mantenimiento no los consultarán, la capacitación será anacrónica.

El proceso de obsolescencia puede ser representado por funciones exponenciales que tienden a cero a través de pendientes crecientes. Ello es así, porque teniendo en cuenta una propensión inicial a la obsolescencia, definida en el momento mismo de la inversión inicial, con el transcurrir de la vida del equipo el efecto negativo inicial va perdiendo fuerza al crearse los mecanismos internos de defensa en el medio de mantención.

La inadecuación afecta al equipo por influencia de los cambios en el entorno físico productivo. Efectivamente cada cierto tiempo el rigor de la demanda creciente o las necesidades de economías en el proceso precipitan cambios de capacidades productivas en los equipos o instalaciones que rodean al equipo: mayores temperaturas, flujos más veloces, materiales de diferente acidez y granulometría o agresividad mecánica.

El proceso de inadecuación puede ser representado por funciones de tipo escalón decrecientes que parten de uno y bajan por escalones discontinuos cada vez que el entorno afecta la funcionalidad.

La ineficiencia afecta al equipo por influencia del desgaste prematuro de sus componentes esenciales y consecuente pérdida de sus juegos, tolerancias y acabado cumplimiento del papel pre-asignado.

La consecuencia práctica de ello es la incapacidad creciente del equipo. No negamos que esto puede ser revertido en algunos casos por tratamientos y reparaciones de recuperación, pero es precisamente este un punto esencial en el debate sobre reemplazos: ¿A qué costo relativo?

El proceso de declinación de la eficiencia puede ser representado por funciones exponenciales decrecientes y de pendientes también decrecientes. Esto se debe a que por naturaleza la ineficiencia inicial es baja, mas a medida que transcurre la vida del equipo

los enemigos de la eficiencia van realizando su labor y el efecto es acumulativo (Espinoza, 1990).

Los procesos de reemplazo caen dentro de dos clases dependiendo del patrón de vida del equipo implicado; por ejemplo, si el equipo se deteriora o se convierte obsoleto (se convierte menos eficiente) a causa del uso o la introducción de nuevos desarrollos, o no se deteriora pero está sujeto a fallo o muerte.

Para los elementos que se deterioran, el problema consiste en balancear el costo del nuevo equipo contra el costo de mantener la eficiencia en el viejo.

En el caso de reemplazo de elementos que fallan, el problema es determinar cuáles elementos reemplazar y con qué frecuencia reemplazarlos de modo que se minimicen los costos siguientes:

- 1- El costo del equipo implicado (costo de producción o compra)
- 2- El costo de reemplazar la unidad, y
- 3- El costo asociado con el fallo de la unidad (pérdida en ganancias o beneficios debido a un equipo inutilizable).

En un extremo una política pudiese ser reemplazar los elementos solo cuando fallan. Tal política minimiza el costo del equipo (dado que maximiza la utilidad), pero el costo de reemplazo individual y fallo puede ser alto. En el otro extremo todas las unidades pudiesen ser reemplazadas cuando (o antes que) el primero falle. Esto guía a un costo en equipo alto pero a un costo bajo de falla. La política óptima usualmente cae entre estos extremos (Churchman, et al., 1971).

Establecer una política de reemplazo o mantenimiento de equipo es una cuestión muy delicada; en ocasiones la intuición y la experiencia de años conlleva a resultados aceptables, pero a veces, a estimaciones incorrectas también.

1.3 Reemplazo con costo mínimo.

El modelo calcula el costo total del equipo después de un número de reemplazos y cuando es reemplazado sistemáticamente al expirar una cantidad finita de períodos de tiempo. Este cálculo se realiza a partir de los valores de compra y gastos de instalación, mantenimiento y reparación en que se incurren al principio de un primer período, segundo, tercero, n-ésimo período. Estos períodos se consideran iguales, por ejemplo, años, meses, etc. El precio de adquisición del equipo, así como los gastos que se realizan, pueden variar sus valores durante los períodos de tiempo que enmarcan los reemplazos (Kaufmann, 1977).

Los costos de reparación, por ejemplo, según el equipo en estudio, incluyen fuerza de trabajo, combustible, electricidad, supervisión, aseguramiento, etc. Los costos de mantenimiento típicamente consisten de fuerza de trabajo, piezas de repuesto y costos asociados con terceros, por ejemplo, personal de mantenimiento contratado y servicios de compañía. Los costos de mantenimiento y reparación pueden ser divididos en tres partes: costos directos, indirectos y administrativos. Los costos de mantenimiento y reparación crecen con el tiempo (Galisky, Guzmán, & Insulán, 2008).

Si se considera que el valor de compra del equipo así como los costos incurridos son constantes para cualquier reemplazo, entonces es suficiente analizar solamente un reemplazo (Álvarez, 1987). En este caso se asume que no existen mejoras tecnológicas en el tiempo de vida económico del equipo; o dicho de otra forma, que la mejor opción de reemplazo es siempre un equipo con características idénticas (Galisky, et al., 2008).

Los valores de costo total por período describen una función monótona, estrictamente creciente con el cursar del tiempo, por lo que se utiliza una expresión cuyos valores describan una función convexa garantizando de esta forma, determinar el momento en que el costo es mínimo: el costo medio (promedio) por período. De esta expresión se determina la política óptima de reemplazo de cada cuántos períodos de tiempo se debe reemplazar un equipo con un costo promedio mínimo, como se describe a continuación:

reemplazar el equipo en un período n^* , cuando el costo medio en este período es menor que los costos promedios del período anterior y el siguiente.

1.4 Reemplazo con costo mínimo y valor de reventa

El modelo calcula el costo total de un equipo transcurrido un número de períodos de tiempo, a partir de los valores de su precio de compra, costos de reparación y reventa (desecho). De manera general, los valores de reventa y costos de operación tienen los siguientes comportamientos.

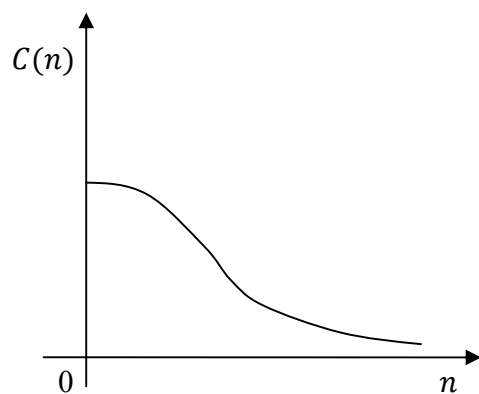


Figura 1.2 - Función valor de desecho (reventa).

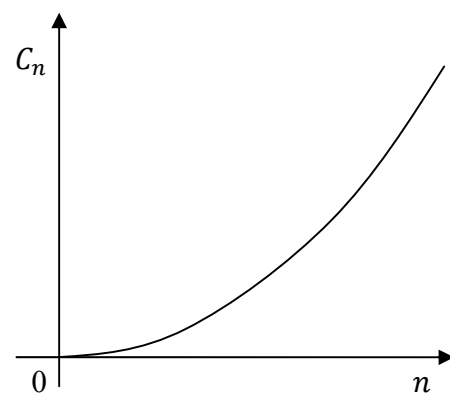


Figura 1.3 - Función valor de costo.

En las figuras se aprecia que los valores de reventa decrecen de forma exponencial a medida que transcurre el tiempo, pues el equipo va envejeciendo y perdiendo cualidades, mientras que los costos acumulados de operación se incrementan, puesto que los valores de costo de mantenimiento o reparación son mayores cuando el equipo es más viejo y, además, se acumulan como gastos que ha ocasionado desde que fue adquirido.

La relación entre estas funciones provoca que los valores de costo total por período describan una función monótona, estrictamente creciente, por lo que se hace necesario emplear una expresión cuyos valores describan una función convexa: el costo medio (promedio) por período. A partir de la cual se emite el siguiente criterio de reemplazo: reemplazar el equipo en un período n^* , cuando el costo medio en este período es menor que los costos promedios del período anterior y el siguiente (Álvarez, 1987).

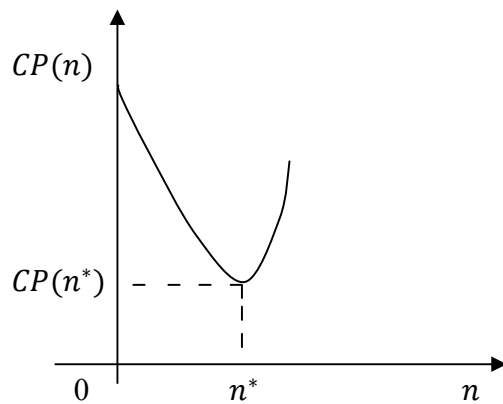


Figura 1.4 – Función valor de costo medio

El modelo no asume mejoras tecnológicas al considerar el tiempo de vida económico del equipo durante un solo reemplazo.

1.5 Reemplazo con costo mínimo y actualización del dinero.

Si existe una tasa de interés del dinero que se invierte en la operación de un equipo, durante un tiempo ilimitado, es posible considerar, bajo ciertas condiciones, cuál es el período óptimo en que el equipo debe ser reemplazado siguiendo un criterio económico en función de la comparación de costos (Álvarez, 1987).

El modelo calcula el valor descontado de todos los costos futuros asociados con una política de reemplazo de equipo después de un número de períodos de tiempo, a partir de los valores de precio de adquisición, costo de instalación, mantenimiento y reparación, pagado al comienzo del período en el cual fue incurrido, y la tasa de interés. El valor descontado de todos los costos futuros representa la cantidad de dinero que se requiere hoy para pagar todos los costos futuros de adquirir y operar el equipo cuando es renovado cada cierto tiempo (Churchman, et al., 1971). La fórmula del valor descontado asume una cadena infinita de compras del equipo y un valor de reventa insignificante al final de los períodos. En la determinación de su expresión se trabaja con una serie geométrica convergente, donde la razón de la serie representa el factor de actualización,

que a su vez es función de la tasa de interés. El factor de actualización representa el valor presente de una unidad monetaria que se gasta al cabo de un tiempo determinado.

El modelo compara políticas de reemplazo alternativas sobre la base del valor descontado de todos los costos futuros asociado con cada una de las políticas. La política óptima de reemplazo se determina hallando el período de tiempo en que el valor descontado de todos los costos futuros es mínimo. A continuación se brinda una interpretación gráfica de las reglas que conllevan a este resultado.

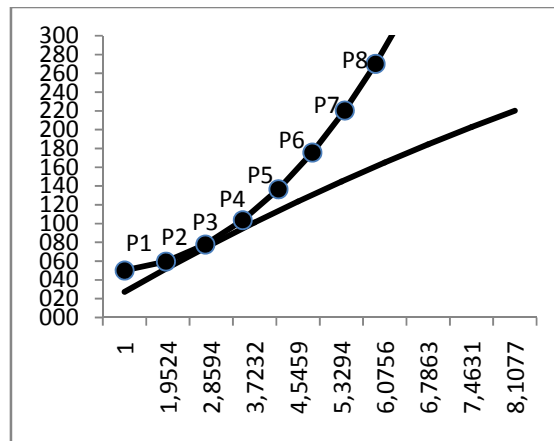


Figura 1.5 - Relación de los costos descontados con los factores de descuento

Si se considera $r = \frac{1}{1+a}$, donde a es la tasa de interés empleada, entonces el eje de las ordenadas representa la suma de los costos descontados ($A + \sum C_i r^{i-1}$) donde A es el precio de adquisición del equipo y el eje de las abscisas la suma de los factores de descuento ($\sum r^{i-1}$). La pendiente de la línea trazada desde el origen a cualquier punto representa el costo promedio ponderado.

Considere dos puntos sucesivos en el gráfico, P_n y P_{n+1} ; la diferencia en altura vertical entre los puntos es $C_{n+1}r^n$ y la distancia horizontal r^n . Por consiguiente, la pendiente de

la línea entre P_n y P_{n+1} es $C_{n+1}r^n/r^n = C_{n+1}$. Si C_{n+1} es menor que la pendiente a P_n , luego la pendiente a P_{n+1} será menor que la pendiente a P_n . (En la figura esto es verdadero para $n = 1$). Por ende no se debe reemplazar. Al contrario, si C_{n+1} es mayor que la pendiente desde el origen a P_n , luego la pendiente desde el origen a P_{n+1} será mayor que la pendiente a P_n . (En la figura esto es verdadero para $n = 6$). Por ende se debe reemplazar.

En la figura 1.5 se ilustra que la pendiente mínima de cualquier línea desde el origen a cualquier punto $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ ocurre en P_3 . De forma general, la pendiente de la línea desde el origen a cualquier punto P_d es expresada como sigue:

$$\frac{A + \sum_{i=1}^d C_i r^{i-1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{d-1}} = \frac{(1-r)(A + \sum_{i=1}^d C_i r^{i-1})}{(1-r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{d-1})} = (1-r) \Gamma_d$$

Además, dado que $(1-r)$ es una constante positiva para un valor de a dado, la pendiente mínima también dará a conocer el Γ_d (valor descontado de todos los costos futuros) mínimo y, por consiguiente, la política que minimiza el costo (Churchman, et al., 1971).

1.6 Reemplazo de componente con costo mínimo

El modelo calcula el costo total de operar un equipo, siempre que se pueda analizar este o alguna de sus componentes en cierto período de tiempo, a partir de los valores de precio de adquisición, costo producido por la falla y la probabilidad de fallo acumulado. La función costo total no siempre tiene un mínimo único, esto depende de los valores de compra y probabilidad de fallo, por lo que se halla el costo promedio por período. La probabilidad de fallo en cada período se determina como el cociente de la sustracción del número de componentes vivas en el período anterior con el analizado y la cantidad de componentes consideradas inicialmente; lo que permite también hallar el tiempo medio de vida antes de la aparición de un fallo, su varianza y desviación típica.

El modelo concierne a componentes que al fallar implican un determinado costo a causa del fallo. Ejemplo de esta situación son los neumáticos de los aviones, los ejes, engranajes y poleas de un mecanismo, etc. También se puede considerar un equipo que forma parte de un conjunto y que, por supuesto, falle de forma súbita y completa en el tiempo.

La política óptima de reemplazo se determina hallando el período de tiempo en que el costo promedio es mínimo; es decir, aplicando el siguiente criterio: reemplazar el equipo en el período n^* cuando su costo promedio es menor que el costo promedio del período anterior y el siguiente (Álvarez, 1987).

1.7 Reemplazo de grupo con costo mínimo

Es una situación usual el que un sistema contenga un gran número de componentes de bajo costo, que cumplan una función determinada, con un costo por reemplazo que es independiente del número de componentes reemplazadas. Ejemplo de esto puede ser el sistema de alumbrado de una fábrica. En la situación planteada puede ser ventajoso reemplazar todos los componentes a intervalos fijos de tiempo, aunque no hayan fallado. Tal política es llamada reemplazo en grupos y resulta particularmente atractiva cuando el costo de un componente es tan pequeño, que no se justifica mantener el control sobre su edad (Álvarez, 1987).

Es decir, se utiliza políticas de reemplazo de grupo cuando el costo de reemplazo individual después de una falla es alto y la probabilidad de que ocurra dicha falla se incrementa con el tiempo

El modelo calcula el costo total de un grupo de equipos cuando es reemplazado cada cierto tiempo, a partir de los valores de cantidad de equipos en el grupo, los costos de unidad de reemplazo de un grupo y reemplazo individual, y el número de fallos en cada período. El número de fallos se determina a través del número de equipos en la instalación y la probabilidad de fallo en cierto período. La probabilidad de fallo en un

período es el cociente de la sustracción del número de equipos sobrevivientes en un instante de tiempo anterior y el analizado, sobre la cantidad de equipos en el grupo.

Dado que el costo de reemplazo en grupo decrece con el tiempo y el costo de reemplazo individual crece, se calcula el costo total promedio por período, con el propósito de resolver esta problemática (Churchman, et al., 1971).

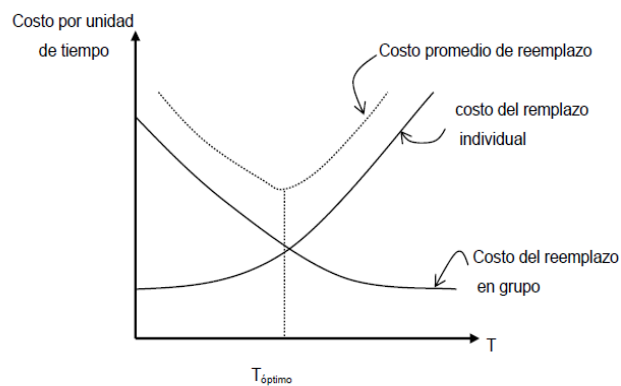


Figura 1.6 – Curvas de costo.

El modelo asume que todos los equipos se sustituyen al cabo de cierto tiempo y que, además, los equipos que falla en ese intervalo se van sustituyendo de forma individual.

La política óptima de reemplazo de grupo determina el momento en que el coto total promedio es mínimo. A continuación se brinda una interpretación gráfica de las reglas que conllevan a este resultado.

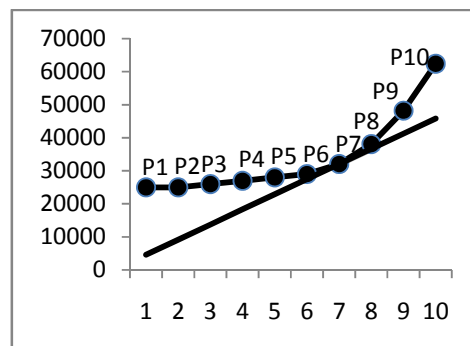


Figura 1.7 - Costos totales

El eje de las ordenadas representa los costos totales $K(t) = NC_1 + C_2 \sum_{x=1}^{t-1} f(X)$, donde N es la cantidad de equipos en el grupo, C_1 costo unidad de reemplazo de grupo, C_2 costo unidad de reemplazo individual y $f(X)$ número de fallos en el x -ésimo período, y el eje de las abscisas el número de períodos entre reemplazos de grupo.

En la figura 1-7, los costos totales son graficados contra t , el número de períodos entre reemplazos de grupo. El costo promedio es igual al costo total dividido por t , el cual representa la pendiente de una línea desde el origen a cada punto de la curva. La política óptima de reemplazo con costo mínimo puede ser determinada visualmente desde la figura, de manera similar a la interpretación hecha de la gráfica correspondiente a la figura 1-5, excepto que los descuentos de los costos futuros no se tienen en cuenta (Churchman, et al., 1971).

1.8 Reemplazo con utilidad máxima y actualización del dinero.

Smith en 1957 propuso un modelo de reemplazo económico de equipo que está basado en maximizar el valor presente de todos los ingresos futuros para una política de reemplazo óptimo aplicado a un tipo importante de equipo industrial, las unidades mecánicas de tractor. Los puntos sobresalientes en este trabajo fueron:

- ✓ El trabajo empírico hecho a un nivel industrial con obsolescencia.
- ✓ La inclusión de un factor en el modelo general de reemplazo de equipo para tomar en cuenta las diferencias en rendimiento de miembros sucesivos de la cadena de máquinas, y el fundamento y la justificación estadística para este factor.
- ✓ El reemplazo retardado como un recurso barato de capital para una firma ampliada.

El consideró los siguientes factores:

- ✓ Costo inicial del equipo
- ✓ Valor de reventa del equipo después de n años.
- ✓ Porcentaje de interés de la inversión de capital.

- ✓ Porcentaje anual de utilidades como una función del tiempo de compra y la edad.

a partir de los cuales definió la fórmula del valor presente de las utilidades netas.

Él ha considerado también el efecto de obsolescencia al pronosticar porcentajes de obsolescencias futuras desde los valores históricos en cargas más grandes y mejoras de motor.

Manuel Cortés y Domingo Curbeira en 2002 desarrollan un modelo matemático discreto más general, que calcula el valor descontado de todas las utilidades actuales cuando el equipo es reemplazado un número de veces cada cierto período de tiempo, a partir del precio de adquisición del equipo, los valores de costo, reventa e ingreso por período y una tasa de interés. El valor descontado de todas las utilidades actuales representa la utilidad que se obtendría hoy al cabo de un cierto período de tiempo. Su fórmula asume una cadena infinita de compras del equipo. En la obtención de su expresión se trabaja con una serie geométrica convergente y la operación financiera de actualización, al tomar en cuenta un factor de actualización en función de una tasa de interés conocida (Cortés & Curbeira, 2002).

El modelo no contempla avances tecnológicos, al asumir que el equipo es reemplazado por otro con características idénticas. La política óptima de reemplazo determina reemplazar el equipo cuando en el próximo período la utilidad actual sea inferior a su precio de compra.

1.9 Reemplazo con utilidad máxima y programación lineal.

La programación matemática es un conjunto de métodos que permite tomar decisiones óptimas, sobre la base de determinar el óptimo de una función de varias variables, seleccionando, entre las posibles, las que se obtienen al considerar las restricciones funcionales correspondientes. Esta comprende entre otras a la programación lineal (Artemenko & Portela, 1998).

La programación lineal concierne a la solución de un tipo de problema especial, en el cual todas las relaciones entre las variables son lineales o en la función a ser optimizada. Un modelo de programación lineal puede incluir restricciones de los tipos $\leq$, $=$ y $\geq$. Las variables además pueden ser no negativas o irrestrictas (no restringidas) su signo. Para desarrollar un método de solución general, el problema de programación lineal debe formularse en formato común y debe cumplir las siguientes propiedades:

- ✓ Todas las restricciones son ecuaciones con segundo miembro no negativo.
- ✓ Todas las variables son no negativas.
- ✓ La función objetivo puede ser la maximización o la minimización.

(Kaufmann, 1977; Taha, 1998)

La programación lineal aplicada a los problemas de Reposición y el mantenimiento presenta las siguientes ventajas:

- ✓ Facilidades en la realización del trabajo.
- ✓ Reducción de cálculos tediosos (trabajo con las series, los gráficos, etc.).
- ✓ Posibilidades de incluir nuevas restricciones (presupuesto, metas de planificación, etc.).
- ✓ Uso de las nuevas tecnologías (paquetes de programas de la Investigación de Operaciones).
- ✓ Facilidad de modificaciones de la información (entiéndase parámetros).
- ✓ Permite realizar análisis técnico – económicos más profundos de los resultados.
- ✓ Permite profundizar el problema.

También posee la desventaja de no lograr un acercamiento adecuado a la realidad mediante la formulación del modelo ya que los supuestos que deben ser cumplidos esencialmente el de linealidad impiden realizar una formulación con la que se describa la realidad en la que se desenvuelve el equipo estudiado.

Manuel Cortés y Domingo Curbeira en 2002 desarrollan un modelo de programación lineal referente a un problema de reemplazo, tomando como partida el precio de compra del equipo, los valores de costo, reventa e ingreso por período, una tasa de interés, una

cantidad de dinero destinada a gastos de operación o mantenimiento, el cual los costos no deben superar y una meta de ingreso a alcanzar o superar. Las variables del modelo son booleanas, toman valores de cero o uno; un valor de uno significa reemplazar el equipo en el período que la variable representa. Las restricciones del modelo definen las metas a alcanzar o cumplir en cuanto a los gastos e ingresos. La función objetivo es expresada en función de las utilidades por período. En fin, el modelo determina el período en que la función objetivo maximiza las utilidades y el reemplazo del equipo debe llevarse a cabo, sujeto al conjunto de restricciones que rigen la meta de ingreso y la cuota máxima de gastos (Cortés & Curbeira, 2002).

1.10 Reemplazo en funciones continuas

Los modelos que a continuación se describen son continuos, pues se caracterizan por considerar el tiempo continuo; realizan su análisis a partir de funciones continuas representando un conjunto de datos dado en algún período de tiempo.

Kaufmann en 1977 plantea el problema de reemplazo de un equipo teniendo en cuenta lo siguiente:

- ✓ Precio de compra del equipo
- ✓ Función de reventa continua, monótona y decreciente.
- ✓ Función costo de las reparaciones y del mantenimiento continua, monótona y creciente.

con lo cual define la fórmula de costo total del equipo y costo medio por período. Luego a través del estudio de los diferentes comportamientos de las funciones continuas costo y reventa, determina que ambas funciones no pueden ser lineales, pues el costo promedio sería una constante; lo que significa que el tiempo de reemplazo es casi indiferente y el equipo puede seguir funcionando el mayor tiempo posible, resultado que no concuerda con lo que ocurre en la práctica, pues los equipos van perdiendo sus condiciones de trabajo a medida que transcurre el tiempo. Lo mismo ocurre cuando la función costo es lineal y la función reventa exponencial, pues la primera derivada de la función costo

promedio nunca se anula y como consecuencia no se puede determinar un posible punto de máximo o mínimo; y la función costo promedio decrece con el cursar del tiempo. La política óptima de reemplazo se determina a través de cálculo diferencial aplicado a la función costo promedio, para hallar el punto en que se hace mínimo y se debe emprender la tarea de reemplazo (Kaufmann, 1977).

Manuel Cortés y Domingo Curbeira en 2002 plantean el problema de reemplazo a partir de las siguientes funciones:

- ✓ Función ingreso continua, monótono y decreciente.
- ✓ Función costo continua, monótona y creciente

con las cuales definen la función utilidad o ganancia. Luego a través de un estudio analítico de los comportamientos de las funciones costo e ingreso, determinan que ambas funciones no pueden tener un carácter exponencial, pues no se puede hallar un período de tiempo en que la función ganancia alcanza su máximo valor. Lo mismo sucede cuando la función ingreso es exponencial y la función costo lineal. La política óptima de reemplazo se determina hallando el punto en donde la función ingreso se iguala a la función costo (Cortés & Curbeira, 2002).

CAPÍTULO 2. SISTEMA INFORMÁTICO PARA LA REPOSICIÓN Y MANTENIMIENTO.

En el capítulo se determinan los modelos matemáticos para la reposición y el mantenimiento, con funciones discretas y continuas, que serán implementados en el Sistema Informático; y se brinda las demostraciones matemáticas que fundamentan sus principales resultados. También se determinan los métodos numéricos a utilizar con sus respectivos fundamentos matemáticos.

2.1 Análisis para un equipo con costo mínimo

Sean

C_0 : Costo inicial del equipo

C_i : Costo por mantenimiento y reparación del equipo en función del desgaste para el período i

n : Período en que se repara (años, meses, etcétera)

s : Cantidad de reemplazos

Si el equipo es reemplazado sistemáticamente, al cabo de n período, se tendrá que:

$$CT(n)_s = (C_0 + C_1 + \dots + C_n)_1 + (C_0 + C_1 + \dots + C_n)_2 + \dots \\ + (C_0 + C_1 + \dots + C_n)_s$$

donde

$CT(n)_s$: Costo total hasta el período n para s reemplazos.

Si C_0 y C_j con $j = 1..n$, no son constantes, sino que varían con el tiempo, se tiene la expresión general del costo total para s reemplazos:

$$CT(n)_s = \sum_{i=1}^s \left[C_{0i} + \sum_{j=1}^n C_{ij} \right]$$

donde

C_{0i} : Costo inicial para el reemplazo i ($i = 1, 2, \dots, s$)

C_{ij} : Costo de la reparación o mantenimiento del reemplazo i en el período j ($C_{11} \neq C_{12} \neq C_{13} \neq \dots, etc$)

Como $CT(n)_s$ es una función monótona, estrictamente creciente a medida que aumenta el valor de n , se necesita una función convexa para determinar en qué momento se alcanza el costo total mínimo, por lo que se utiliza la siguiente expresión:

$$CP(n) = \frac{1}{ns} CT(n)_s = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^s \left[C_{0i} + \sum_{j=1}^n C_{ij} \right]$$

siendo

$CP(n)$: Costo medio por período.

Como resultado se enuncia la siguiente regla para minimizar el costo

$$CP(n-1) > CP(n^*) < CP(n+1)$$

donde

n^* : Período óptimo de reemplazo

siendo $CP(n^*)$ el costo medio por período mínimo.

Si se considera que C_0 y C_j con $j = 1..n$ son constantes para cualquier reemplazo, entonces es suficiente analizar tan solo un reemplazo, es decir, $s = 1$, obteniéndose:

$$CT(n)_1 = C_0 + \sum_{j=1}^n C_j$$

y

$$CP(n) = \frac{1}{n} CT(n)_1 = \frac{1}{n} \left[C_0 + \sum_{j=1}^n C_j \right]$$

Luego la política óptima de reemplazo es determinada a través de la regla que minimiza el costo medio por período enunciada con anterioridad (Álvarez, 1987).

2.2 Análisis para un equipo con reventa y costo mínimo

Sean

C_0 : Costo inicial del equipo

$C(n)$: Valor de desecho o reventa en el período n . Consiste en el valor del equipo cuando este ha envejecido n unidades de tiempo

C_n : Costo acumulado de operación del equipo, hasta el período n ; puede incluir los costos de mantenimiento o reparación y se obtiene como $C_n = \sum_{j=1}^n C_j$

luego el costo total al transcurrir n períodos de operación del equipo $CT(n)$ es:

$$CT(n) = C_0 - C(n) + C_n$$

Las relaciones entre estas funciones provocan que $CT(n)$ sea una función monótona, estrictamente creciente, por lo que se hace necesario hallar una función convexa para determinar un costo mínimo único, utilizando para esto la siguiente expresión:

$$CP(n) = \frac{CT(n)}{n} = \frac{1}{n} [C_0 - C(n) + \sum_{j=1}^n C_j]$$

siendo

$CP(n)$: Costo medio por período

Por lo tanto, el criterio de selección será evaluar $CP(n^*)$ y verificar que se cumple la siguiente relación:

$$CP(n-1) > CP(n^*) < CP(n+1)$$

donde

n^* : Período óptimo de reemplazo

siendo $CP(n^*)$ el costo medio por período mínimo (Álvarez, 1987).

2.3 Análisis para un equipo con actualización y costo mínimo

Sean

C_i : Costo incurrido y pagado al comienzo del período i

A : Costo inicial del nuevo equipo

α : Tasa de interés del dinero

Luego el valor descontado Γ_n (Costo Total) de todos los costos futuros asociados a una política de reemplazo de equipo cada n períodos de tiempo es

$$\begin{aligned} \Gamma_n = & \left(A + C_1 + \frac{C_2}{1+a} + \dots + \frac{C_n}{(1+a)^{n-1}} \right)_{1^{\text{er}} \text{ año}} + \left(\frac{A+C_1}{(1+a)^n} + \frac{C_2}{(1+a)^{n+1}} + \dots + \frac{C_n}{(1+a)^{2n-1}} \right)_{2^{\text{do}} \text{ año}} \\ & + \left(\frac{A+C_1}{(1+a)^{2n}} + \frac{C_2}{(1+a)^{2n+1}} + \dots + \frac{C_n}{(1+a)^{3n-1}} \right)_{3^{\text{er}} \text{ año}} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

la cual puede ser escrita también de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma_n = & \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}} \right) + \frac{1}{(1+a)^n} \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}} \right) \\ & + \frac{1}{(1+a)^{2n}} \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Gamma_n = \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}} \right) \left[1 + \frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+a)^{2n}} + \dots \right]$$

En la expresión anterior se obtiene la serie geométrica

$$\left[1 + \frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+a)^{2n}} + \dots \right]$$

con razón $r = \frac{1}{(1+a)^n} < 1$ convergente a $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+a)^n}}$

Por consiguiente Γ_n puede ser escrita como

$$\Gamma_n = \frac{A + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}}{1 - \left[\frac{1}{1+a} \right]^n} \quad (3)$$

donde la expresión $\left[\frac{1}{1+a} \right]^n$ es el factor de actualización en función de la tasa de interés a para n períodos ($n > 1$). El factor de actualización representa el valor actual de una unidad monetaria al cabo de n años.

Γ_n representa la cantidad de dinero requerida hoy para pagar todos los costos futuros de adquirir y operar el equipo cuando es renovado cada n años.

Si $\Gamma_n < \Gamma_{n+1}$, luego reemplazar el equipo cada n años es mejor que reemplazarlo cada $n+1$ años. Además, si la mejor política es reemplazar cada n años, entonces debe cumplirse las relaciones expresadas a través de las siguientes inecuaciones

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n > 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_{n-1} - \Gamma_n > 0$$

Analizando $\Gamma_{n+1} - \Gamma_n > 0$ y haciendo $r = \frac{1}{1+a}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1} &= \frac{A + \sum_{i=1}^{n+1} C_i r^{i-1}}{1 - r^{n+1}} = \frac{A + \sum_{i=1}^n C_i r^{i-1} + C_{n+1} r^n}{1 - r^{n+1}} = \frac{(1 - r^n) \Gamma_n + r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}} \\ &= \frac{(1 - r^n) \Gamma_n}{1 - r^{n+1}} + \frac{r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}} \end{aligned}$$

Por ende

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1} - \Gamma_n &= \frac{(1 - r^n) \Gamma_n}{1 - r^{n+1}} + \frac{r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}} - \Gamma_n = \Gamma_n \left(\frac{1 - r^n}{1 - r^{n+1}} - 1 \right) + \frac{r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}} \\ &= \frac{\Gamma_n (r^{n+1} - r^n) + r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}} \end{aligned}$$

Ahora, si $\Gamma_{n+1} - \Gamma_n > 0$, entonces $\Gamma_n (r^{n+1} - r^n) + r^n C_{n+1} > 0$ dado que $r < 1$

Dividiendo por r^n se obtiene que $\Gamma_n (r - 1) + C_{n+1} > 0$, por consiguiente $C_{n+1} > \Gamma_n (1 - r)$ o equivalente a

$$\frac{C_{n+1}}{(1 - r)} > \Gamma_n \quad (4)$$

Para analizar $\Gamma_{n-1} - \Gamma_n > 0$ se parte de la siguiente observación referente al análisis anterior

$$\Gamma_n - \Gamma_{n+1} = \frac{\Gamma_n (r^n - r^{n+1}) - r^n C_{n+1}}{1 - r^{n+1}}$$

de modo que al reemplazar n por $n - 1$ se obtiene

$$\Gamma_{n-1} - \Gamma_n = \frac{\Gamma_{n-1} (r^{n-1} - r^n) - r^{n-1} C_n}{1 - r^n}$$

Luego si $\Gamma_{n-1} - \Gamma_n > 0$, se tiene que $\Gamma_{n-1} (r^{n-1} - r^n) - r^{n-1} C_n > 0$ dado que $r < 1$.

1. Dividiendo por r^{n-1} , se obtiene que $\Gamma_{n-1} (1 - r) - C_n > 0$, equivalente a

$$\frac{C_n}{(1 - r)} < \Gamma_{n-1} \quad (5)$$

Las inecuaciones (4) y (5) son condiciones necesarias, también se puede demostrar que son condiciones suficientes para el caso donde C_n es creciente, es decir, cuando $C_n < C_{n+1}$ para todo n .

A partir de (4) se tiene que

$$C_{n+1} > \frac{A + C_1 + C_2 r + \dots + C_n r^{n-1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}} = \frac{A + \sum_{i=1}^n C_i r^{i-1}}{\sum_{i=1}^n r^{i-1}}$$

y de (5)

$$C_n < \frac{A + C_1 + C_2 r + \dots + C_{n-1} r^{n-2}}{1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2}} = \frac{A + \sum_{i=2}^{n-1} C_{i-1} r^{i-2}}{\sum_{i=2}^n r^{i-2}}$$

Las interpretaciones referentes a estas dos inecuaciones, se enuncian a través de las siguientes reglas que minimizan el costo:

- ✓ No reemplazar si el costo del próximo período es menor que el promedio de los costos ponderados en el período anterior.
- ✓ Reemplazar si el costo del período próximo es mayor que el promedio de los costos ponderados en el período anterior (Churchman, et al., 1971).

Se puede resumir las dos reglas anteriores al enunciar:

- ✓ No reemplazar el equipo hasta que el costo del período que sigue sea mayor que la suma ponderada de los gastos ya efectuados (Kaufmann, 1977).

2.4 Análisis de componente con costo mínimo

Sean

C_0 : Costo del componente, o del equipo que falla

Cf : Costo de fallo

$\sum p(i)$: Probabilidad de fallo acumulado hasta el período i ($i = 1, 2, \dots, t$)

luego la función costo total es

$$CT(t) = C_0 + \left[\sum_{i=1}^t p(i) \right] Cf$$

donde

$$p(t) = p[(t-1) \leq T < t] = \frac{n(t-1) - n(t)}{n(0)}$$

siendo

$n(0)$: Número inicial de componentes

$n(t)$: Número de componentes vivas en el instante t

T : Variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un componente.

El tiempo medio de vida antes de la aparición de un fallo puede ser calculado por la siguiente expresión:

$$\bar{T} = \sum_{t=1}^{\infty} t * p(t)$$

y la varianza de la variable $\bar{T}$ es:

$$S_T^2 = \sum_{t=1}^{\infty} t^2 * p(t) - (\bar{T})^2$$

La función $CT(t)$ no siempre tiene un mínimo único. Para determinar el período de reemplazo se determina el costo promedio como

$$CP(t) = \frac{CT(t)}{t}$$

y si

$$CP(t-1) > CP(t^*) < CP(t+1)$$

Entonces el período óptimo de reemplazo es t^* (Álvarez, 1987).

2.5 Análisis para un grupo de equipos con costo mínimo

Sean

C_1 : Costo unidad de reemplazo en un grupo

C_2 : Costo unidad de reemplazo individual después del fallo

$f(X)$: Número de fallos en el X-ésimo período

N : Número de equipos en el grupo

Luego el costo total $K(t)$ desde el momento de la instalación del grupo hasta el final de t períodos es

$$K(t) = NC_1 + C_2 \sum_{x=1}^{t-1} f(X)$$

en el cual NC_1 es el costo de reemplazar todos los equipos como un grupo y $C_2 \sum_{x=1}^{t-1} f(X)$ es el costo de reemplazar los fallos individuales al final de cada $t - 1$ periodos antes que el grupo sea reemplazado una vez más. Por ende el costo promedio por período es

$$\frac{K(t)}{t} = \frac{NC_1}{t} + \frac{C_2}{t} \sum_{x=1}^{t-1} f(x) \quad (6)$$

La expresión de $f(X)$ es determinada a partir de las características de vida del equipo, la cual es mostrada a través de una curva de mortalidad. Un grupo de equipos es instalado y al final de t intervalos de tiempo de igual duración, el número de equipos sobrevivientes se iguala a alguna función de t , es decir, $S(t)$. A partir de lo anterior se utiliza una tabla de mortalidad como la siguiente

(1) Unidades de Tiempo Transcurridas t	(2) Número de Sobrevivientes $S(t)$	(3) Reducción en Sobrevivientes $S(t-1) - S(t)$	(4) Probabilidad de Fallo $p(t)$	(5) Probabilidad Condicional de Fallo $v_{t,0}$
t_0	$S(t_0)$			
t_1	$S(t_1)$	$S(t_0) - S(t_1)$	$p(t_1)$	$v_{t_1,0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_n	$S(t_n)$	$S(t_{n-1}) - S(t_n)$	$p(t_n)$	$v_{t_n,0}$

donde las columnas

- 1: Número de períodos transcurridos
- 2: Sobrevivientes al final del período
- 3: Cambios en la columna 2
- 4: Columna 3 dividida por la cantidad de equipos en el conjunto
- 5: Columna 3 dividida por la columna 2 para períodos anteriores.

La columna 2 representa la curva de mortalidad, número de equipos sobrevivientes en función de unidades de tiempo transcurridos.

La columna 4 es la distribución de probabilidad de tiempo de vida de un grupo de equipos.

Luego la expresión de $f(X)$ es

$$f(t) = N \left\{ p(t) + \sum_{x=1}^{t-1} p(x)p(t-x) + \sum_{b=2}^{t-1} \left[\sum_{x=1}^{b-1} p(x)p(b-x) \right] p(t-b) + \dots \right\} \quad (7)$$

donde $p(x)$ es la probabilidad de fallo a la edad x .

La expresión contiene términos para la probabilidad de un primer fallo, la probabilidad de un segundo fallo, un tercer fallo, etc., en ese orden, para cualquiera de los equipos en el período de tiempo t .

Los costos son minimizados por una política de reemplazo de grupo después de $\hat{t}$ períodos si

$$\frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} < \frac{K(\hat{t}+1)}{\hat{t}+1} \text{ equivalente a } \frac{K(\hat{t}+1)}{\hat{t}+1} - \frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} > 0 \quad (8)$$

y

$$\frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} < \frac{K(\hat{t}-1)}{\hat{t}-1} \text{ equivalente a } \frac{K(\hat{t}-1)}{\hat{t}-1} - \frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} > 0 \quad (9)$$

Haciendo $t = \hat{t} + 1$, y sustituyendo en (6) se obtiene

$$\frac{K(\hat{t}+1)}{\hat{t}+1} = \frac{NC_1}{\hat{t}+1} + \frac{C_2}{\hat{t}+1} \sum_{x=1}^{\hat{t}} f(x) \quad (10)$$

y $t = \hat{t}$ se obtiene

$$\frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} = \frac{NC_1}{\hat{t}} + \frac{C_2}{\hat{t}} \sum_{x=1}^{\hat{t}-1} f(x) \quad (11)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{K(\hat{t}+1)}{\hat{t}+1} - \frac{K(\hat{t})}{\hat{t}} &= NC_1 \left(\frac{1}{\hat{t}+1} - \frac{1}{\hat{t}} \right) + C_2 \sum_{x=1}^{\hat{t}-1} f(x) \left(\frac{1}{\hat{t}+1} - \frac{1}{\hat{t}} \right) + \frac{C_2}{\hat{t}+1} f(\hat{t}) \\ &= \frac{-NC_1 - C_2 \sum_{x=1}^{\hat{t}-1} f(x) + C_2 \hat{t} f(\hat{t})}{(\hat{t}+1)\hat{t}} \end{aligned} \quad (12)$$

Para que la expresión del lado izquierdo de la ecuación (12) sea positiva, es necesario que

$$C_2 \hat{t} f(\hat{t}) > NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X) \quad (13)$$

o

$$C_2 f(\hat{t}) > \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}}$$

A través de un análisis similar, se puede encontrar que

$$\frac{K(\hat{t} - 1)}{\hat{t} - 1} > \frac{K(\hat{t})}{\hat{t}}$$

Implica

$$C_2 f(\hat{t} - 1) < \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-2} f(X)}{\hat{t} - 1} \quad (14)$$

Las inecuaciones (13) y (14) describen las condiciones necesarias para el reemplazo óptimo de grupo y se puede interpretar de la siguiente forma.

$\left[NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X) \right] / \hat{t}$ es el costo promedio por período si todos los equipos son reemplazados al final de t períodos.

$C_2 f(\hat{t})$ es el costo para el $\hat{t}$ -ésimo período si el reemplazo de grupo no es hecho al final del $\hat{t}$ -ésimo período. Es decir, los fallos individuales $f(\hat{t})$ son reemplazados a un costo de C_2 cada uno, si y solo si el grupo no es reemplazado en ese tiempo.

De esta manera, la inecuación (13) demuestra que se debe reemplazar el grupo de equipos al final del $\hat{t}$ -ésimo período si el costo de los reemplazos individuales para el $\hat{t}$ -ésimo período es mayor que el costo promedio por período hasta el final de t períodos.

Similarmente, la inecuación (14) demuestra que no se debe reemplazar el grupo de equipos al final del $\hat{t}$ -ésimo período si el costo de los reemplazos individuales al final del $\hat{t}$ -ésimo período es menor que el costo promedio por período hasta el final de t períodos.

Luego se determina el t óptimo, es decir, el $\hat{t}$ para el cual el reemplazo del grupo es económico. Los valores numéricos de los costos individuales son irrelevantes, como se demuestra al dividir las inecuaciones (13) y (14) por C_2 , obteniéndose

$$f(\hat{t}) > \frac{N(C_1/C_2) + \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}} \quad (15)$$

y

$$f(\hat{t} - 1) < \frac{N(C_1/C_2) + \sum_{X=1}^{\hat{t}-2} f(X)}{\hat{t} - 1} \quad (16)$$

Por ende, se desea encontrar el $\hat{t}$, de modo que

$$\hat{t}f(\hat{t}) - \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X) > N(C_1/C_2)$$

y

$$(\hat{t} - 1)f(\hat{t} - 1) - \sum_{X=1}^{\hat{t}-2} f(X) < N(C_1/C_2) \quad (17)$$

Dividiendo las ecuaciones (17) por N , se obtienen valores los cuales deben asignarse a C_1/C_2 con la finalidad de que t sea óptimo.

También se puede considerar la política alternativa de solo reemplazar los fallos individuales, es decir, de nunca reemplazar el grupo.

Si la cantidad de fallos por período $f(t)$ converge a $\bar{f}(t)$ (la cantidad límite de fallos, igual al número de equipos en la instalación entre la media del tiempo de vida del equipo), y ningún grupo es reemplazado, el costo por período convergerá a $C_2\bar{f}(t)$.

Si $\hat{t}$ es el valor óptimo de t , entonces

$$C_2f(\hat{t}) > \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}}$$

si $\bar{f}(t) > f(\hat{t})$, luego, obviamente

$$C_2\bar{f}(t) > C_2f(\hat{t})$$

por ende

$$C_2\bar{f}(t) > \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}}$$

y el reemplazo de grupo es económico.

Para presentar una condición necesaria para la cual el reemplazo de grupo no es económico, se puede notar de la ecuación (14) que

$$C_2 f(\hat{t} - 1) < \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}}$$

luego, si $\bar{f}(t) > f(\hat{t} - 1)$

$$C_2 \bar{f}(t) < C_2 f(\hat{t} - 1) < \frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}}$$

y el reemplazo de grupo no es económico. Es decir, la pérdida en la que se incurriría en el descarte de equipos funcionando es nunca compensada por el número reducido de fallos.

Finalmente, si $\bar{f}(t) < f(\hat{t})$ y $f(\hat{t} - 1) < \bar{f}(t)$, luego la comparación es menos obvia y la economía de reemplazo de grupo debe ser examinada más de cerca. Específicamente, t es determinado por la curva de sobrevivencia y por los costos C_1 y C_2 . Por ende $f(\hat{t})$ puede ser menor que $\bar{f}(t)$ para algunos valores de C_1 y C_2 , y mayores que $\bar{f}(t)$ para otros. Sin embargo se puede encontrar el mayor valor de C_1/C_2 para el cual el reemplazo de grupo es económico.

Igualando el costo de reemplazo óptimo de grupo y el costo de reemplazo individual, se obtiene

$$\frac{NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{\hat{t}} = C_2 \bar{f}(t)$$

Luego

$$\begin{aligned} NC_1 + C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X) &= \hat{t} C_2 \bar{f}(t) \\ NC_1 &= \hat{t} C_2 \bar{f}(t) - C_2 \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X) \\ \frac{C_1}{C_2} &= \frac{\hat{t} \bar{f}(t) - \sum_{X=1}^{\hat{t}-1} f(X)}{N} \end{aligned} \tag{18}$$

A partir del valor de $\bar{f}(t)$ se busca el valor de t para el cual se cumple las siguientes condiciones

$$\bar{f}(t) < f(\hat{t}) \quad \text{y} \quad f(\hat{t} - 1) < \bar{f}(t)$$

Una vez determinado el valor de $\hat{t}$, se sustituyen los valores numéricos en la ecuación (18) obteniéndose un valor para $\frac{C_1}{C_2}$. Por ende, para valores mayores que el valor de $\frac{C_1}{C_2}$, el reemplazo de grupo nunca es económico (Churchman, et al., 1971).

2.6 Análisis para un equipo con utilidad máxima

Sean

A_0 : Precio de compra del equipo

P_i : Precio de la reventa en el período i

I_i : Ingreso en el período i

C_i : Costos asociados al período i

y m reemplazos, con n períodos de vida útil y una tasa de interés del dinero a . Luego se obtiene la ecuación de utilidad total como sigue

✓ Primer reemplazo.

La utilidad total está dada por la expresión siguiente

$$- A_o + \sum_{i=1}^n [(P_i + I_i) - C_i] \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

✓ Segundo reemplazo.

La utilidad total está dada por la expresión siguiente

$$- A_o \left(\frac{1}{1+a} \right)^n + \sum_{i=1}^n [(P_i + I_i) - C_i] \left(\frac{1}{1+a} \right)^n \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

✓ Tercer reemplazo.

La utilidad total está dada por la expresión siguiente

$$- A_o \left(\frac{1}{1+a} \right)^{2n} + \sum_{i=1}^n [(P_i + I_i) - C_i] \left(\frac{1}{1+a} \right)^{2n} \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

De lo obtenido aquí se infiere que

$$U_T = \sum_{j=1}^m -A_o \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} \left[\sum_{i=1}^n [(P_i + I_i) - C_i] \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1} \right]$$

o también

$$U_T = -A_o \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} \left[\sum_{i=1}^n [(P_i + I_i) - C_i] \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1} \right]$$

Pero de aquí resulta que

$$U_T = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} \left[-A_o + \sum_{i=1}^n \frac{[(P_i + I_i) - C_i]}{(1+a)^{i-1}} \right]$$

Analicemos a la suma parcial obtenida, es decir

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(j-1)} = 1 + \frac{1}{1+a} + \left(\frac{1}{1+a} \right)^n + \left(\frac{1}{1+a} \right)^{2n} + \left(\frac{1}{1+a} \right)^{3n} + \cdots + \left(\frac{1}{1+a} \right)^{n(m-1)}$$

En este caso podemos decir que se trata de una serie geométrica (suma parcial) finita,

decreciente con razón $p = \frac{1}{1+a} < 1$.

Determinemos el término general de la suma parcial.

Como estamos en presencia de una serie geométrica (suma parcial) finita, el término

general de esta es de la forma: $\frac{u - u^k}{1 - p}$, donde u es el primer término de la suma, u^k

es el último y r la razón. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)}}{1 - \frac{1}{1+a}} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)}}{\frac{a}{1+a}} = \frac{1}{\frac{a}{1+a}} - \frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)}}{\frac{a}{1+a}} = \frac{1+a}{a} - \frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)}}{a\left(\frac{1}{1+a}\right)} = \\
&= \frac{1+a}{a} - \frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)-1}}{a} = \frac{1}{a} \left[(1+a) - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)-1} \right]
\end{aligned}$$

Con lo obtenido hasta aquí podemos concluir que la utilidad está dada por la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
U_{nr} &= K_o \left[-A_o + \sum_{i=1}^n \frac{[(P_i + I_i) - C_i]}{(1+a)^{i-1}} \right] \text{ donde} \\
K_o &= \frac{1}{a} \left[(1+a) - \left(\frac{1}{1+a}\right)^{nm-n-1} \right]
\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de encontrar el valor del período óptimo para realizar el reemplazo de forma que la utilidad sea máxima.

Como n es el período óptimo, entonces se cumple que:

$$U_{n-1} < U_n > U_{n+1}$$

De donde resulta que:

$$U_n > U_{n-1} \quad \text{y} \quad U_n > U_{n+1}$$

Analizando $U_n > U_{n+1}$ se obtiene

$$U_n > U_n + K_o \left(-A_o + \frac{[(P_{n+1} + I_{n+1}) - C_{n+1}]}{(1+a)^n} \right)$$

$$K_o A_o > K_o \frac{[(P_{n+1} + I_{n+1}) - C_{n+1}]}{(1+a)^n}$$

De donde resulta que

$$A_o > \frac{[(P_{n+1} + I_{n+1}) - C_{n+1}]}{(1+a)^n} \quad (19)$$

Analizando $U_n > U_{n-1}$ se obtiene

$$U_n > U_n - K_o \left[-A_o + \frac{[(P_{n-1} + I_{n-1}) - C_{n-1}]}{(1+a)^{n-2}} \right]$$

$$-K_o A_o > -K_o \frac{[(P_{n-1} + I_{n-1}) - C_{n-1}]}{(1+a)^{n-2}}$$

De aquí resulta que

$$A_o < \frac{[(P_{n-1} + I_{n-1}) - C_{n-1}]}{(1+a)^{n-2}} \quad (20)$$

Luego de (19) y (20) resulta que

$$\frac{[(P_{n+1} + I_{n+1}) - C_{n+1}]}{(1+a)^n} < A_o < \frac{[(P_{n-1} + I_{n-1}) - C_{n-1}]}{(1+a)^{n-2}}$$

Como resultado del análisis realizado podemos llegar a la siguiente conclusión

- ✓ No reemplazar el equipo si la utilidad máxima del período anterior es mayor que el precio de compra.

- ✓ Reemplazar el equipo si la utilidad máxima del próximo período es menor que el precio de compra.

Resumidamente podemos decir que:

- ✓ Reemplazar el equipo cuando en el próximo período la utilidad actual sea inferior al precio de compra del mismo (Cortés & Curbeira, 2002).

2.7 Análisis para un equipo con utilidad máxima y programación lineal

Sean

P_i : Precio de la reventa en el período i

A_0 : Precio de compra del equipo

C_i : Costos incurridos en el período i

I_i : Ingresos en el período i

P_{costo} : Presupuesto para los gastos

P_{ingre} : Planificación de los ingresos

a : Tasa de interés

u_i : Utilidades en el período i con $u_i = [P_i + \sum_{j=1}^i I_j - A_0 - \sum_{j=1}^i C_j] \left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}$

Luego se plantea el modelo de programación lineal para un equipo con n períodos de vida útil como se muestra a continuación

Variables

- ✓ b_i : Variable booleana del período i donde

$b_i = 0$ Si no se reemplaza el equipo en el período i

$b_i = 1$ Si se reemplaza el equipo en el período i

Restricciones

- ✓ Variable booleana excluyente $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ donde n representa los períodos

de vida útil del equipo.

- ✓ Gastos

$$\sum_{i=1}^k C_i b_i \left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1} \leq P_{costo} \quad k \leq n$$

✓ Ingresos

$$\sum_{i=1}^k I_i b_i \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1} \geq P_{ingre} \quad k \leq n$$

Función Objetivo

$$Max Z = \sum_{i=1}^n b_i u_i \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

El modelo tiene todas las ventajas de un modelo de Programación Lineal, específicamente, permitiendo la facilidad de modificar los parámetros e incluir nuevas restricciones de acuerdo a las necesidades de la entidad que lo aplique (Cortés & Curbeira, 2002).

2.8 Análisis para un equipo con funciones continuas y costo mínimo

Sean

A_0 : Precio de compra del equipo

$\varphi(t)$: Función de reventa

Características

- ✓ Continua
- ✓ Monótona decreciente
- ✓ $\varphi(0) = 1$

$A_0\varphi(t)$: Precio de la reventa transcurrido un tiempo t

$\Psi(t)$: Función Costo de Reparaciones y Mantenimientos

Características

- ✓ Continua
- ✓ Monótona creciente
- ✓ $\Psi(0) = 0$

Luego el costo del equipo para un período t es

$$\Gamma(t) = A_0 - A_0\varphi(t) + \Psi(t)$$

y el costo medio de utilización

$$Y(t) = \frac{\Gamma(t)}{t} = \frac{1}{t} [A_0 - A_0\varphi(t) + \Psi(t)]$$

El mínimo de $Y(t)$ tiene lugar para

$$Y'(t) = \frac{t\Gamma'(t) - \Gamma(t)}{t^2} \quad (21)$$

Haciendo $Y'(t) = 0$ se obtiene

$$\Gamma'(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}$$

La ecuación (21) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{t[A_0 - A_0\varphi(t) + \Psi(t)]' - [A_0 - A_0\varphi(t) + \Psi(t)]}{t^2} = 0$$

$$\frac{t[-A_0\varphi'(t) + \Psi'(t)] - [A_0 - A_0\varphi(t) + \Psi(t)]}{t^2} = 0$$

$$t\Psi'(t) - tA_0\varphi'(t) - A_0 + A_0\varphi(t) - \Psi(t) = 0$$

$$A_0 + tA_0\varphi'(t) - A_0\varphi(t) - t\Psi'(t) + \Psi(t) = 0$$

Generalmente las funciones $\varphi(t)$ y $\Psi(t)$ están dadas en valores numéricos, por lo que la búsqueda del valor óptimo de $\Gamma(t)$ se hace directamente mediante cálculo numérico, pero es de interés realizar un estudio analítico de los comportamientos de las funciones de reventa $\varphi(t)$ y costos de reparaciones y mantenimientos $\Psi(t)$.

Análisis de comportamiento de las funciones reventa y costo

1) Sean

Función Reventa: $\varphi(t) = \varepsilon^{-\lambda t}$

Función Costo: $\psi(t) = k_0(\varepsilon^{ut} - 1)$

luego la función costo medio de utilización es

$$Y(t) = \frac{1}{t} [A_0(1 - \varepsilon^{-\lambda t}) + k_0(\varepsilon^{ut} - 1)]$$

la cual posee un t mínimo en el intervalo de $[0; \infty]$, como se demuestra a continuación.

Derivando la función costo promedio se obtiene

$$Y'(t) = \left\{ \frac{1}{t} [A_0(1 - \varepsilon^{-\lambda t}) + k_0(\varepsilon^{ut} - 1)] \right\}'$$

$$Y'(t) = \frac{(A_0 \lambda \varepsilon^{-\lambda t} + k_0 u \varepsilon^{ut})t - [A_0(1 - \varepsilon^{-\lambda t}) + k_0(\varepsilon^{ut} - 1)]}{t^2}$$

$Y'(t)$ se anula cuando

$$A_0 \lambda t \varepsilon^{-\lambda t} + A_0 \varepsilon^{-\lambda t} - A_0 + k_0 u t \varepsilon^{ut} - k_0 \varepsilon^{ut} + k_0 = 0$$

$$A_0(\lambda t \varepsilon^{-\lambda t} + \varepsilon^{-\lambda t} - 1) = k_0(-u t \varepsilon^{ut} + \varepsilon^{ut} - 1)$$

$$\frac{k_0}{A_0} = \frac{(\lambda t \varepsilon^{-\lambda t} + \varepsilon^{-\lambda t} - 1)}{(-u t \varepsilon^{ut} + \varepsilon^{ut} - 1)}$$

Introduciendo una nueva función $\Phi(x) = 1 - \varepsilon^{-x}(1 + x)$ luego la expresión anterior puede ser escrita como sigue

$$\frac{k_0}{A_0} = \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(-u t)}$$

A partir de la relación inversa de la expresión anterior, se crea una tabla de doble entrada y se determina el costo medio de utilización mínimo $Y(t)$.

2.9 Análisis para un equipo con funciones continuas y utilidad máxima

Sean

b : Función ingreso continua y monótona decreciente

c : Función costo continua y monótona creciente

Luego la función ganancia g es $g(t) = b(t) - c(t)$

Análisis de comportamiento de las funciones ingreso y costo

1) En el caso que las funciones ingreso y costo estén definidas como sigue

$$\text{Función Ingreso: } b(t) = b_1 - b_2 t \text{ con } b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ y } b_2 > 0$$

$$\text{Función Costo: } c(t) = c_1 + c_2 t \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ y } c_2 > 0$$

Luego la función ganancia es $g(t) = (b_1 - c_1) - (b_2 + c_2)t$. La zona de ganancias está formada por los puntos que satisfacen la condición $b_1 - b_2 t > c_1 + c_2 t$. El punto de equilibrio es el punto que satisface la siguiente igualdad

$$b_1 - b_2 t_o = c_1 + c_2 t_o. \text{ Despejando a } t_o \text{ se obtiene que } t_o = \frac{b_1 - c_1}{b_2 + c_2},$$

donde $b_2 > 0$ y $c_2 > 0$

De donde resulta que

✓ Si $0 < t < t_o$, entonces hay ganancias.

✓ Si $t > t_o$, entonces hay pérdidas.

2) Sean

Función Ingreso: $b(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2$ con $b_1, b_2, b_3 \in IR$, decreciente para todo

$$t_v > -\frac{b_2}{2b_3} \text{ y } b_3 < 0 \text{ y } b_1 = c_1 = A_0$$

Función Costo: $c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ con $c_1, c_2, c_3 \in IR$, creciente para todo

$$t_v > -\frac{c_2}{2c_3} \text{ y } c_3 > 0$$

A_0 : Precio de compra del equipo

Luego la función ganancia es $g(t) = (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t + (b_3 - c_3)t^2$.

Para determinar el período de ganancia máxima se determina la primera derivada de la función ganancia igualándola a cero, cuyo resultado nos da un posible punto de extremo

$$g(t)' = (b_1 - c_1)' + [(b_2 - c_2)t]' + [(b_3 - c_3)t^2]' = (b_2 - c_2) + 2(b_3 - c_3)t$$

$$g(t)' = (b_2 - c_2) + 2(b_3 - c_3)t = 0$$

$$(b_2 - c_2) + 2(b_3 - c_3)t = 0$$

$$t = \frac{-(b_2 - c_2)}{2(b_3 - c_3)}$$

Hasta aquí t es un punto estacionario, puede ser un punto de máximo o mínimo; y tiene sentido real para $(b_2 - c_2) > 0$, puesto que $(b_3 - c_3) < 0$ con $b_3 < 0$ y $c_3 > 0$. A través del criterio de la segunda derivada se determina si t es un punto de máximo o mínimo; es punto de máximo cuando $g(t)'' < 0$ y mínimo cuando $g(t)'' > 0$. Determinando la segunda derivada de la función ganancia se obtiene

$$g(t)'' = [g(t)']' = [(b_2 - c_2) + 2(b_3 - c_3)t]' = 2(b_3 - c_3)$$

Luego como $c_3 > 0$ y $b_3 < 0$, la segunda derivada de la función ganancia es siempre negativa para cualquier valor de t , por lo que se concluye que el t hallado es un punto de máximo.

Para determinar el punto de equilibrio t_0 se igualan las funciones ingreso y costo

$$b_1 + b_2t + b_3t^2 = c_1 + c_2t + c_3t^2$$

$$(b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t + (b_3 - c_3)t^2 = 0$$

Para determinar las raíces del polinomio resultante, se aplica el cálculo del determinante

$$D = (b_2 - c_2)^2 - 4(b_1 - c_1)(b_3 - c_3)$$

Luego se prosigue a determinar las raíces como sigue $t_1 = \frac{-(b_2 - c_2) + \sqrt{D}}{2(b_3 - c_3)}$ y

$t_2 = \frac{-(b_2 - c_2) - \sqrt{D}}{2(b_3 - c_3)}$, de las cuales se escoge la positiva mayor que el punto de

máxima ganancia como el punto de equilibrio.

3) Sean

Función Ingreso: $b(t) = b_1 + b_2t + b_3t^2$ con $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}, b_3 < 0, b_2 > 0$,

decreciente para todo $t_v > -\frac{b_2}{2b_3}$

Función Costo: $c(t) = c_1 + c_2t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $c_2 > 0$

Luego la función ganancia es $g(t) = (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t + b_3t^2$

Haciendo un análisis similar al anterior se calcula el período de ganancia máxima

$$g(t)' = (b_1 - c_1)' + [(b_2 - c_2)t]' + [b_3t^2]' = (b_2 - c_2) + 2b_3t$$

$$g(t)' = (b_2 - c_2) + 2b_3t = 0$$

$$t = \frac{-(b_2 - c_2)}{2b_3}$$

Luego t tiene sentido real para $(b_2 - c_2) > 0$ dado que $b_3 < 0$. Para determinar si t es un punto de máximo o mínimo, se calcula la segunda derivada de la función ganancia evaluándola en t .

$$g(t)'' = [g(t)']' = [(b_2 - c_2) + 2b_3t]' = 2b_3$$

Luego como $b_3 < 0$, la segunda derivada de la función ganancia es siempre negativa para cualquier valor de t , por lo que el t que anula la primera derivada es un punto de ganancia máxima.

Igualando las funciones ingreso y costo se obtiene el punto de equilibrio

$$b_1 + b_2t + b_3t^2 = c_1 + c_2t$$

$$(b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t + b_3t^2 = 0$$

Para determinar las raíces del polinomio, se aplica el método del determinante

$$D = (b_2 - c_2)^2 - 4(b_1 - c_1)b_3$$

Luego las posibles raíces son $t_1 = \frac{-(b_2 - c_2) + \sqrt{D}}{2b_3}$ y $t_2 = \frac{-(b_2 - c_2) - \sqrt{D}}{2b_3}$; de las cuales se escoge la raíz positiva mayor que el punto de máxima ganancia como punto de equilibrio.

4) Sean

Función Ingreso: $b(t) = b_1 + b_2t$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $b_2 < 0$

Función Costo: $c(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_2 < 0$, $c_3 > 0$, creciente

$$\text{para todo } t_v > -\frac{c_2}{2c_3}$$

Luego la función ganancia es $g(t) = (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t - c_3t^2$

Determinando la primera derivada e igualándola a cero se obtiene

$$g(t)' = (b_1 - c_1)' + [(b_2 - c_2)t]' - [c_3t^2]' = (b_2 - c_2) - 2c_3t$$

$$g(t)' = (b_2 - c_2) - 2c_3t = 0$$

$$t = \frac{(b_2 - c_2)}{2c_3}$$

Luego t tiene sentido real para $(b_2 - c_2) > 0$. Determinando la segunda derivada y evaluándola en el t hallado, se obtiene

$$g(t)'' = [g(t)']' = [(b_2 - c_2) - 2c_3t]' = -2c_3$$

Luego como $c_3 > 0$, la segunda derivada de la función ganancia es siempre negativa para cualquier valor de t , por lo que el t que anula la primera derivada es un punto de ganancia máxima.

Para determinar el punto de equilibrio se igualan las funciones de ingreso y costo

$$b_1 + b_2 t = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$

$$(b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)t - c_3 t^2 = 0$$

A través del cálculo del determinante se determinan las raíces del polinomio

$$D = (b_2 - c_2)^2 + 4(b_1 - c_1)c_3$$

$$t_1 = \frac{-(b_2 - c_2) + \sqrt{D}}{-2c_3} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{-(b_2 - c_2) - \sqrt{D}}{-2c_3}$$

de las cuales se escoge la raíz positiva mayor que el punto de máxima ganancia como punto de equilibrio (Cortés & Curbeira, 2002).

2.10 Métodos numéricos

Al momento de aplicar las Matemáticas a situaciones del mundo real nos encontramos a menudo con problemas que no pueden ser resueltos analíticamente o de manera exacta y cuya solución debe ser abordada con ayuda de algún procedimiento numérico (Asmar, 2005).

A continuación se explican los métodos numéricos implementados en el sistema informático en la determinación de la solución de los modelos matemáticos de reposición y mantenimiento.

2.10.1 Ajuste por Mínimos Cuadrados

Un procedimiento matemático para determinar la curva que mejor se ajuste a un conjunto de puntos dados al minimizar la suma de los cuadrados de los desplazamientos (los residuos) de los puntos observados con respecto a la curva. La suma de los cuadrados de los desplazamientos es usado en lugar de los valores absolutos de desplazamiento, puesto que esto permite que los residuos sean tratados como una cantidad diferenciable continua. Sin embargo, puesto que los cuadrados de los desplazamientos son usados, puntos distantes pueden tener un efecto desproporcionado en el ajuste, una propiedad la cual puede o no ser deseable en dependencia del problema a mano.

1) Mínimos cuadrados lineal

El mínimo cuadrado lineal utiliza una línea recta

$$y = a + bx$$

para aproximar el conjunto de datos dado, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, donde $n \geq$

2. La curva de mejor ajuste $f(x)$ tiene el siguiente error mínimo cuadrado

$$\Pi = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min$$

donde a y b son coeficientes desconocidos mientras que todos los valores de x_i y y_i son dados. Para obtener el error mínimo cuadrado, los valores de los coeficientes desconocidos a y b deben hacer cero las primeras derivadas.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)] = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (a + bx_i)] = 0 \end{cases}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

despejando se obtienen los coeficientes a y b

$$\begin{cases} a = \frac{n(\sum_{i=1}^n y_i)(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases}$$

2) Mínimos cuadrados parábola

El mínimo cuadrado parábola utiliza una curva de segundo grado

$$y = a + bx + cx^2$$

para aproximar el conjunto de datos dado, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, donde $n \geq$

3. La curva de mejor ajuste $f(x)$ tiene el siguiente error mínimo cuadrado

$$\Pi = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)]^2 = \min$$

derivando con respecto a los parámetros a, b y c se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)] = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)] = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)] = 0 \end{cases}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{cases}$$

Por ende los coeficientes a, b y c se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales anterior; para lo cual se emplea el método de Gauss que se explica en el epígrafe 2.10.2 (Weisstein, 2011).

3) Mínimos cuadrados no lineal

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m \geq n$ una función vector con componentes no lineales, se desea minimizar $\|f(x)\|^2$, o equivalente determinar $x^* = \operatorname{argmin}_x \{f(x)\}$ donde

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2 = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} f(x)^T f(x)$$

Es decir, un problema de mínimos cuadrados es una variante especial del problema más general: dado una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar un argumento de F que brinde el mínimo valor de esta función, así llamada función objetivo o costo.

Asumiendo que f tiene segunda derivadas parciales, se puede escribir su expansión de Taylor como ¹

¹ $\| \cdot \|$ denota la norma 2, $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$

$$f(x + h) = f(x) + J(x)h + O(\|h\|^2)$$

donde $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz Jacobiana. Esta es una matriz conteniendo las primeras derivadas de la función de componentes, $(J(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

Para determinar una solución para el problema anterior, se utiliza el método de optimización no lineal Levenberg-Marquardt.

En cada iteración del método, un vector de parámetro x es reemplazado por uno nuevo estimado $x + h_{lm}$. Para determinar h_{lm} , la función vector $f(x + h_{lm})$ es aproximada por su forma lineal $f(x + h_{lm}) \approx f(x) + J(x)h_{lm}$.

En su mínimo, la suma de cuadrados $F(x)$, el gradiente de F con respecto a h_{lm} será cero.

La aproximación de primer orden de $f(x + h_{lm})$ da

$$F(x + h_{lm}) \approx \sum_{i=1}^m (f(x) + J h_{lm})^2$$

equivalente en notación de vector a, $F(x + h_{lm}) \approx \|f(x) + J h_{lm}\|^2$.

Determinando la primera derivada con respecto a h_{lm} e igualándola a cero se obtiene $(J^T J)h_{lm} = J^T [f(x)]$. Esta expresión representa un conjunto de ecuaciones lineales las cuales pueden ser resueltas para obtener h_{lm} . Levenberg en 1944 y más tarde Marquardt en 1963 modificaron la expresión anterior obteniendo

$$(J^T J + \mu I)h_{lm} = -g = -J^T f(x) \text{ y } \mu \geq 0$$

El parámetro μ tiene varios efectos:

- Para todo $\mu > 0$ la matriz de coeficiente es definida positiva y esto asegura que h_{lm} es una dirección descendiente.
- Para valores grandes de μ , se obtiene $h_{lm} \simeq -\frac{1}{\mu} g = -\frac{1}{\mu} J^T f(x)$, un paso corto en la dirección descendiente. Esto es bueno si la iteración actual está lejos de la solución.
- Si μ es muy pequeño, luego $h_{lm} \simeq h_{gn}$, el cual es un buen paso en la etapa final de la iteración, cuando x está cerca de x^* . Si $F(x^*) = 0$ (o muy pequeño), luego

se puede obtener (casi) convergencia cuadrática final. (h_{gn} : Paso del método de Gauss-Newton).

El valor inicial de μ debe de estar relacionado con el tamaño de los elementos en $A_0 = J(x_0)^T J(x_0)$, es decir $\mu_0 = \tau * \max_i \{a_{ii}^{(0)}\}$, donde τ es entrado como dato².

Durante la iteración el tamaño de μ es actualizado y controlado por el radio de ganancia

$$\varrho = \frac{F(x) - F(x + h_{lm})}{L(0) - L(h_{lm})} \quad \text{donde} \quad L(0) - L(h_{lm}) = -h_{lm}^T J^T f - \frac{1}{2} h_{lm}^T J^T J h_{lm} = \frac{1}{2} h_{lm}^T (\mu h_{lm} - g)$$

Un valor grande de ϱ indica que $L(h_{lm})$ es una buena aproximación a $F(x + h_{lm})$, y se puede disminuir μ de modo que el próximo paso de Levenberg-Marquardt este más cerca al paso de Gauss-Newton. Si ϱ es pequeño (incluso, quizás negativo), luego $L(h_{lm})$ es una aproximación pobre, y se debe incrementar μ con la meta doble de acercarse al paso del método Steepest-Descent y reducir la longitud del paso. Note que

$$F(x + h) \simeq L(h) = F(x) + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h.$$

El criterio de parada del algoritmo debe reflejar que en un mínimo global se obtiene $F'(x^*) = g(x^*) = 0$, de esta forma se utiliza $\|g\|_{\infty} \leq \varepsilon_1$, donde ε_1 es un número positivo pequeño, entrado como dato.

Otro relevante criterio es parar cuando el cambio en x es pequeño, $\|x_{new} - x\| \leq \varepsilon_2 (\|x\| + \varepsilon_2)$. Esta expresión da un cambio gradual desde el tamaño del paso relativo ε_2 cuando $\|x\|$ es grande, a un tamaño de paso absoluto ε_2^2 si x está próximo a cero. Finalmente, como en todos los procesos iterativos se necesita una seguridad contra un ciclo infinito, $k \geq k_{max}$. También ε_2 y k_{max} son introducidos como datos.

En el Anexo I se encuentra el algoritmo en pseudo-código.

² El algoritmo no es muy sensitivo a la selección de τ , pero se debe usar un valor pequeño, por ejemplo $\tau = 10^{-6}$ si se cree que x_0 es una buena aproximación a x^* . De lo contrario usar $\tau = 10^{-3}$ o inclusive $\tau = 1$.

Bondad de ajuste de la ecuación estimada

Una medida de la bondad de ajuste de la ecuación obtenida es determinada a través del coeficiente de determinación, el cual representa una medida estadística de cuán bien la ecuación estimada se aproxima a los puntos de datos reales.

El coeficiente de determinación mide o interpreta la cantidad relativa de la variación que ha sido explicada por la recta de regresión, es decir, la proporción de cambio en y explicado por un cambio en la variable x .

La variabilidad del conjunto de datos es medida a través de diferentes sumas de cuadrados:

$$SS_{tot} = \sum (y^o - \bar{y})^2 \quad \text{Variación total}$$

$$SS_{err} = \sum (y^o - \hat{y})^2 \quad \text{Variación no explicada}$$

$$SS_{reg} = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 \quad \text{Variación explicada}$$

Luego la definición más general del coeficiente de determinación es $r^2 = 1 - \frac{SS_{err}}{SS_{tot}}$, con valor en el rango de 0 a 1.

A modo de guía, se presenta una tabla con posibles interpretaciones del coeficiente de determinación

Rango	Interpretación
0.0 a 0.2	Muy débil, despreciable
0.2 a 0.4	Débil. Bajo
0.4 a 0.7	Moderada
0.7 a 0.9	Fuerte, alto, importante
0.9 a 1.0	Muy fuerte, muy alto

2.10.2 Método de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales

El método de Gauss resuelve sistemas de ecuaciones lineales de cualquier orden, que sean cuadrados, es decir, con el mismo número de ecuaciones e incógnitas; y determinados, con una solución única, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

donde todos los coeficientes a_{ij} son números reales conocidos, al igual que los términos independientes b_i .

Partiendo del sistema de ecuaciones lineales anterior se construye la matriz ampliada del sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

A la cual se le aplica las transformaciones correspondientes a las dos etapas bien diferenciadas con que consta el algoritmo de Gauss: el proceso directo y proceso inverso.

El proceso directo consiste en realizar sobre el sistema de ecuaciones transformaciones elementales de dos tipos:

- ✓ Intercambiar dos ecuaciones del sistema
- ✓ Sumar a una ecuación, miembro a miembro, otra ecuación (pivote) del sistema multiplicada por un número real cualquiera.

Estas transformaciones elementales se realizan con el objetivo de transformar el sistema a la forma triangular

$$\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
\vdots & \\
c_{nn}x_n &= d_n
\end{aligned} \tag{22}$$

equivalente a la siguiente forma escalonada

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

En el paso número i del proceso directo, en el cual la fila i –ésima actúa como pivote, la fila k ($k > i$) se cambia de acuerdo con la fórmula:

$$\text{fila } k := \text{fila } k - \frac{a'_{ki}}{a'_{ii}} (\text{fila } i) \quad k = i + 1, i + 2, \dots, n$$

donde los coeficientes con un apóstrofe indican que no son necesariamente los coeficientes originales.

Una vez calculado el sistema triangular (22) o su forma compacta (23) se puede calcular x_n de la última ecuación, después x_{n-1} a partir de la penúltima ecuación y así sucesivamente hasta encontrar x_1 de la primera ecuación. La forma de obtener la solución, de abajo hacia arriba, constituye el proceso inverso del algoritmo.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{c_{nn}} d_n \\ x_{n-1} &= \frac{1}{c_{n-1,n-1}} (d_{n-1} - c_{n-1,n} x_n) \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{c_{11}} (d_1 - c_{12} x_2 - c_{13} x_3 - \cdots c_{1n} x_n) \end{aligned}$$

La estrategia de pivote es el criterio que se utiliza para seleccionar la fila que se ha de utilizar como pivote en cada paso del proceso directo. En la estrategia parcial de pivote, al realizar el paso i del proceso directo, se analizan todas las filas desde la i –ésima hasta la última para seleccionar aquella que posea el elemento en la posición i con el mayor valor absoluto (no todos pueden ser cero) y esta fila se intercambia con la i –ésima fila. El algoritmo que a continuación se presenta utiliza una estrategia de pivote parcial, por ser fácil de implementar y garantizar que el factor que se utiliza para

multiplicar a la fila pivote sea siempre menor que uno, con lo cual los errores acumulados en la fila i –ésima, lejos de ampliarse, se disminuyen.

La cantidad de multiplicaciones y divisiones que requiere el método de Gauss para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es de orden de $\frac{1}{3}n^3$.

En el Anexo II se encuentra el algoritmo en pseudo-código.

CAPÍTULO 3. RESULTADOS DEL SISTEMA INFORMÁTICO MoRM.

En el capítulo se verifica la utilidad y la efectividad del sistema informático, tomando como entrada, los datos de ejercicios ilustrativos en la literatura estudiada. Se realiza un análisis estadístico a las encuestas realizadas a profesionales que tienen relación con el tema de reposición y mantenimiento. También se determina el tipo de aplicación y las tecnologías a emplear en el desarrollo del sistema informático; y se realiza una breve descripción de las características y la interfaz de usuario.

3.1 Características e interfaz de usuario

El objetivo principal del sistema informático MoRM (Modelos de Reposición y Mantenimiento) es determinar a partir de datos históricos referentes a un equipo en estudio, el período de tiempo en que se hace indispensable y económicamente para una entidad o empresa reemplazarlo; para lo cual posee implementado doce métodos matemáticos correspondientes a la teoría de reposición y el mantenimiento, cuyos fundamentos matemáticos se explican en los epígrafes 2.1 – 2.9.

MoRM está dirigido a usuarios que posean un mínimo de conocimientos de la teoría de reposición y el mantenimiento y estadísticas.

MoRM agrupa estos métodos en tres categorías de modelos: el discreto, el continuo y el de ajuste. El discreto se caracteriza principalmente por tomar como entrada de datos una cantidad finita de información referente al equipo, durante una serie de períodos de tiempo de igual longitud. El continuo, al contrario, comprende como entrada de datos, funciones continuas que caracterizan el comportamiento del equipo, determinadas a partir de informaciones representativas durante un período de tiempo; mientras que el de ajuste utiliza la técnica de mínimos cuadrados y un método iterativo de optimización para estimar los parámetros de las funciones continuas correspondientes a los métodos

del modelo continuo, tomando como entrada de datos, información histórica del equipo.

Los métodos correspondientes a la categoría de modelo discreto que realizan su análisis en función del costo promedio del equipo por período, muestran como solución el período de tiempo de reemplazo con su costo promedio mínimo y una representación gráfica del comportamiento de los valores de costo promedio por período; mientras que los que realizan el análisis a partir de las utilidades, muestran como resultado el período de tiempo de reemplazo con la utilidad máxima alcanzada. En el caso de los métodos correspondientes a la categoría de modelo continuo, que realizan su análisis a partir del valor de costo promedio por período, brindan como resultado el período de reemplazo con su costo promedio mínimo y una representación gráfica de estos valores; mientras que los que realizan su análisis a partir de las utilidades, muestran como resultado el período de tiempo de utilidad máxima con su valor, el período de tiempo de reemplazo y las representaciones gráficas del comportamiento de las funciones continuas introducidas como datos.

Los métodos correspondientes a la categoría de modelo de ajuste, utilizan los mismos métodos de la categoría de modelo continuo, pero a diferencia de estos, los parámetros de las funciones continuas de entrada son estimadas partiendo de informaciones históricas y representativas del equipo, dadas como datos. Los resultados que se muestran son los mismos, con la diferencia que se grafican las funciones estimadas y los datos históricos; y como una medida de bondad de ajuste se muestra el coeficiente de determinación para determinar cuán representativa puede ser la función estimada con relación a los datos.

MoRM permite realizar un análisis de sensibilidad, al poderse introducir cambios en los datos de entrada y determinar los efectos que estos tienen en la decisión tomada.

MoRM fue diseñado para ejecutarse en la plataforma de sistemas operativos Windows; y desarrollado empleando tecnologías del entorno de desarrollo .NET Framework 3.5.

Cuando se ejecuta el programa se muestra la siguiente ventana principal

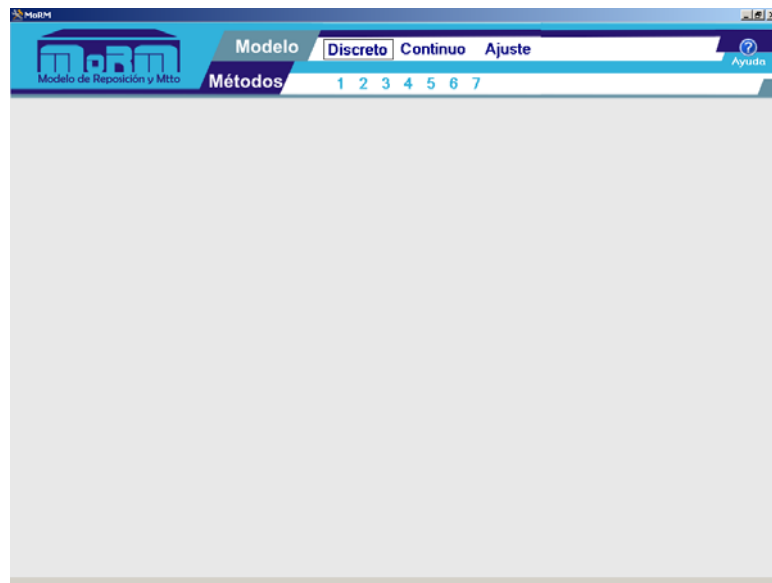


Figura 3.1 – Ventana principal

donde cada modelo es identificado por un nombre y sus métodos por un número. Los métodos correspondientes a un modelo, son organizados a través de un factor (costo promedio mínimo o utilidad máxima) que calculan para determinar el período de reemplazo y el parámetro de entrada de datos que los diferencian de los demás; en el caso del modelo discreto, se enumeran como primeros, a los que tienen en cuenta el costo promedio mínimo, y en los demás modelos, a los que tienen en cuenta la utilidad máxima; a partir de los cuales se conforma también el título de los métodos.

El modelo discreto es seleccionado por defecto al ejecutarse el programa. El modelo seleccionado aparece con el nombre encerrado en un cuadrado; mientras que el método seleccionado, con un subrayado del número que lo identifica y su título en la barra de título de la ventana principal, seguido de la palabra MoRM y un guión, como se muestra a continuación.



Figura 3.2 – Modelo y método seleccionados

Al mover el puntero del mouse por encima del nombre de un modelo, el mismo es subrayado y se muestra una descripción. En el caso de un método, el número que lo identifica es subrayado y se muestra el título, los parámetros de la entrada de datos y los resultados que brinda.

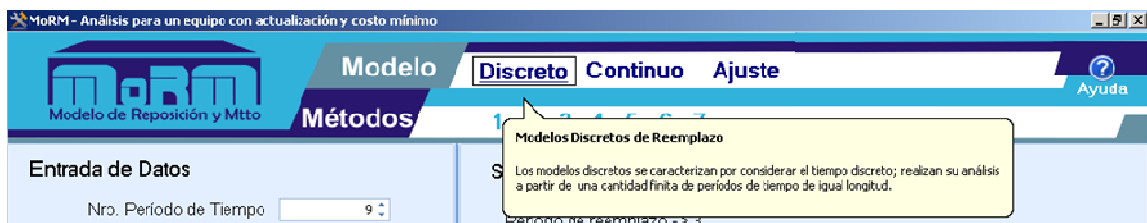


Figura 3.3 – Ventana de descripción

Una información más detallada de cómo operar el sistema informático se encuentra en la ayuda.

3.2 Resultados de la encuesta

Para valorar la aceptación de MoRM se realizó una encuesta a los profesores del departamento de matemática de la Universidad de Cienfuegos y a los trabajadores que dirigen la planificación de mantenimiento en la Central Termoeléctrica “Carlos Manuel de Céspedes”; luego de conocer el funcionamiento del sistema informático. La encuesta permite evaluar la redacción, la comunicación con el usuario, la vigencia científica, la pertinencia, la presentación, la secuencia lógica (navegación) y la flexibilidad de MoRM, además de darle una evaluación final.

La respuesta de los encuestados referentes a las siete primeras preguntas fueron “de acuerdo”, “total acuerdo” y “NA” (no tiene elementos para emitir un criterio), a las

cuales se les hizo un análisis de frecuencias en el programa estadístico SPSS versión 15.0.

Los resultados para estas primeras siete preguntas muestran una tabla de frecuencia con cada una de las categorías de las variables (preguntas) y sus respectivos estimadores: Frecuencias, Porcentajes, Porcentajes válidos (el porcentaje válido representa el resultado de dividir la frecuencia de la categoría sobre el número total de valores válidos) y el Porcentaje acumulado (es el resultado de la suma del porcentaje válido de las diferentes categorías de la variable. En todas las modas es 4 (valor que más se repite), es decir, la respuesta “total acuerdo” fue la más que se emitió.

En cuanto a la comunicación con el usuario y la flexibilidad, el 66.7% de los encuestados están en total acuerdo y un 33.3% de acuerdo. Por otra parte el 88.9% de los encuestados están en total acuerdo con la pertinencia y la presentación de MoRM, mientras que un 11.1% están solamente de acuerdo. El 72.2% de ellos están en total acuerdo con el lenguaje y un 27.8% en acuerdo; el 77.8% están en total de acuerdo con la vigencia de los métodos utilizados, un 11.1% de acuerdo y un 11.1% no emitieron criterio; el 77.8% están en total acuerdo con la secuencia lógica (navegación), un 16.7% en acuerdo y un 5.6% no emitieron criterio.

Los resultados arrojados demuestran que el mayor por ciento de los encuestados están en total acuerdo con los primeros siete parámetros medidos, pero que se debe mejorar especialmente el lenguaje, la comunicación con el usuario y la flexibilidad de MoRM.

En una última pregunta de la encuesta se le pide al encuestado evaluar a MoRM en base a cien puntos. Luego de analizar esta última variable en el SPSS, se obtuvo que el menor valor de las evaluaciones es 90 puntos y el máximo 100 puntos; la media de 96 puntos aproximadamente y la moda de 100 puntos. Todo lo cual corrobora la aceptación de MoRM por parte de los encuestados.

La encuesta se encuentra en el Anexo III y las tablas de resultados y gráficos emitidos en el análisis con SPSS se encuentran en los Anexos IV-VII.

3.3 Comparación de los resultados de MoRM.

Los ejercicios a los que se hace referencia en el epígrafe son organizados de acuerdo a la estructura de la interfaz de usuario de MoRM; empezando con los ejercicios correspondientes a los métodos del modelo discreto, a continuación con los correspondientes al modelo continuo y por último al de ajuste. En cuanto a la definición de las variables de los modelos se utiliza la siguiente notación:

A : Precio de adquisición α : Tasa de interés R : Reventa C : Costo I : Ingreso
 U : Utilidad

Análisis para un equipo con costo mínimo

El siguiente ejercicio pertenece al libro “Modelos económicos matemáticos II” de Mercedes Álvarez.

- 1- Considere un equipo cuyo costo inicial es de \$9000.00 mientras que los costos de operación y mantenimiento son de \$200.00 para el primer año y se producen incrementos de \$2000.00 cada año; si se conoce que estos costos permanecen constantes, determine cada cuánto tiempo debe ser reemplazado el equipo.

Datos del problema

$$A = \$9000.00$$

$$C_1 = \$200.00$$

$$C_j = C_1 + \$2000.00(j - 1) \text{ para } j = 2, 3, \dots, n$$

Tabla de costos

Año	1	2	3	4	5
C_j	200	2200	4200	6200	8200

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo cada tres años con un costo promedio mínimo de \$5200.00.

Solución MoRM

Se introduce como número de reemplazos uno, puesto que los valores de precio de adquisición y costos de operación y mantenimiento permanecen constantes por reemplazos. A continuación se ilustra la salida de MoRM, donde se visualiza que la solución obtenida coincide con la brindada por el libro: reemplazar el equipo cada tres años con un costo promedio mínimo de \$5200.00, ya que a partir del tercer año los costos de operación y mantenimiento tienden a crecer ilimitadamente en el tiempo como se muestra en la gráfica de valores de costo promedio por período.

Solución

Período de reemplazo -> 3
Costo Promedio Mínimo -> 5200

Figura 3.4 – Solución



Figura 3.5 - Gráfica de costos promedios

Análisis para un equipo con reventa y costo mínimo

El ejercicio se encuentra en el sitio Web “Modelos de Reemplazo. Investigación Operativa I” de la facultad de ciencias exactas – UNCPBA de Argentina.

- 2- Se desea determinar el período en el que debe reemplazarse un equipo cuya inversión inicial es de \$13000 y se tienen los siguientes costos y valores de reventa por período:

Tabla de datos

Período	1	2	3	4	5	6	7
R_j	6000	4000	3000	2600	2600	2400	2400
C_j	5000	5800	6800	7800	9000	10800	13000

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo cada cuatro períodos con un costo promedio mínimo de \$8950.00.

Solución MoRM

El sistema informático obtiene la misma solución que la literatura, reemplazar el equipo en el cuarto período con un costo promedio mínimo de \$8950.00.

Solución

Periodo de reemplazo -> 4

Costo Promedio Mínimo -> 8950

Figura 3.6 – Solución

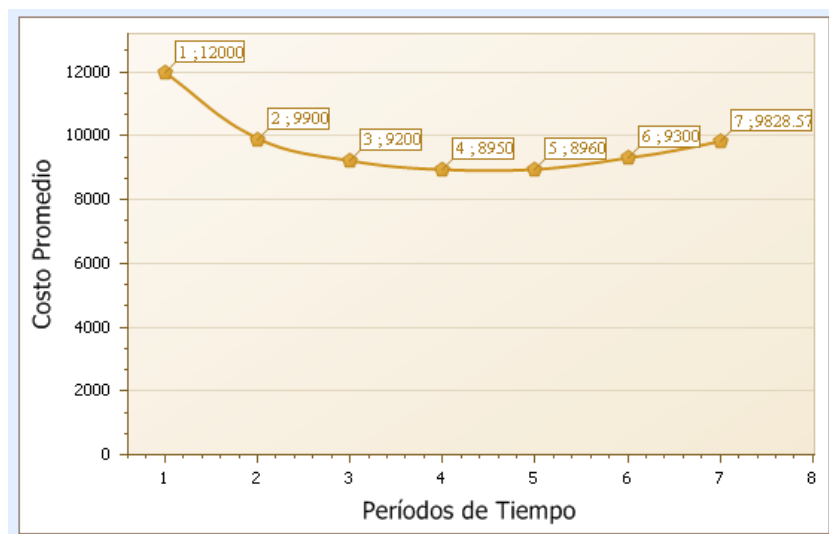


Figura 3.7 – Gráfica de costos promedios

Análisis para un equipo con actualización y costo mínimo

El ejercicio es del libro “Métodos y modelos de la investigación de operaciones I” de Arnold Kaufmann.

- 3- Se desea determinar cada qué tiempo se debe reemplazar un equipo cuyo valor de adquisición es \$1000.00 y cuyos costos de operación y mantenimiento vienen dados en la siguiente tabla. Se ha tomado una tasa de interés de un 6%.

Datos del problema

$$A = \$1000.00$$

$$a = 0.06$$

Tabla de costos

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_j	50	60	70	90	120	150	180	210	240	300	400	500

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo cada nueve años con un costo promedio mínimo de \$259.00 aproximadamente.

Solución MoRM

El sistema obtiene una solución idéntica como se muestra a continuación

Solución

Período de reemplazo -> 9

Costo promedio mínimo -> 259.1951

Figura 3.8 – Solución

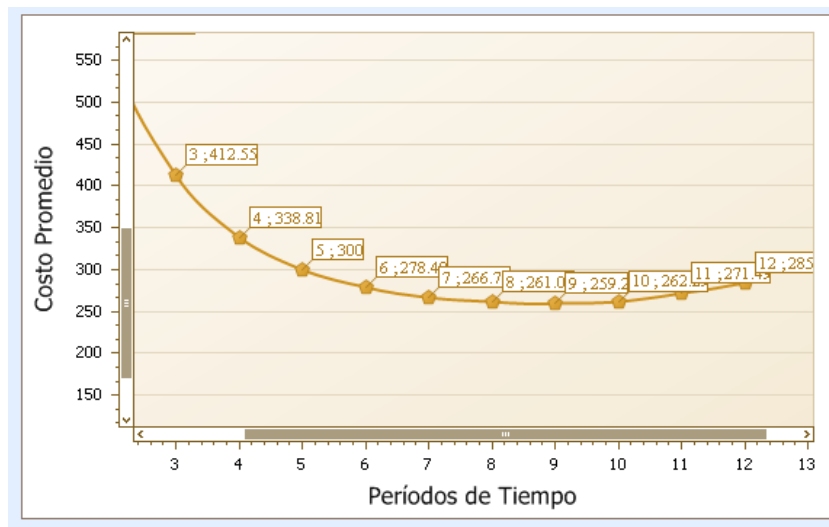


Figura 3.9 – Gráfica de costos promedios

Análisis de componente con costo mínimo

El ejercicio aparece en el texto “Modelos económicos matemáticos II” de Mercedes Álvarez.

- 4- Se tiene la información que aparece en la siguiente tabla sobre un tipo de válvula electrónica. Suponga que las válvulas electrónicas tienen un costo de \$100.00, mientras que el fallo de una de ellas produce una pérdida de \$500.00. Determine el tiempo óptimo de reemplazo de dichas válvulas, tiempo de vida promedio y varianza si se cuenta con una cantidad de 100.

Tabla de datos

Tiempo(mes)	1	2	3	5
Vivos	90	75	50	20

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo en dos meses con un costo promedio \$112.5. El tiempo promedio de vida es 2.35 meses con una varianza de 2.23 meses y una desviación típica de 1.49 meses.

Solución MoRM

La solución brindada por MoRM es la siguiente

Solución

Periodo de reemplazo -> 2

Costo Promedio Mínimo -> 112.5

Figura 3.10 – Solución

Estadísticas Tiempo de Vida

Varianza -> 2.23

Desviación Típica -> 1.49

Tiempo de Vida Promedio -> 2.35

Figura 3.11 – Estadísticas

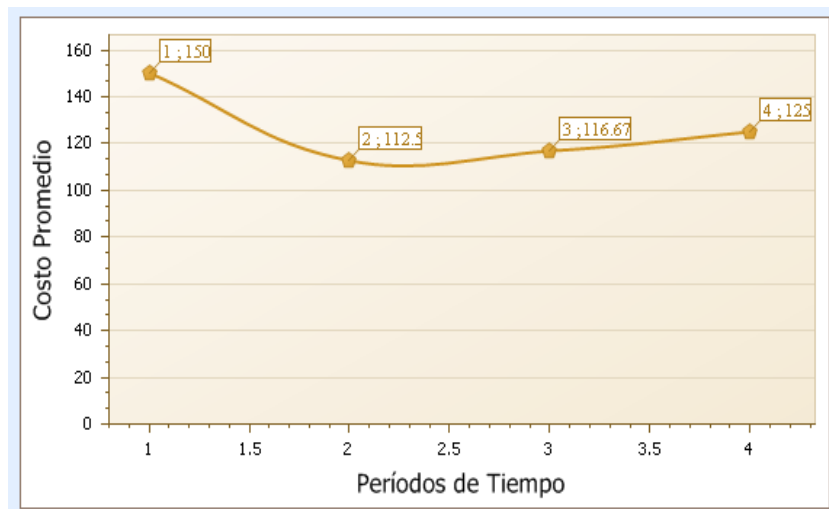


Figura 3.12 – Gráfica de costos promedios

Análisis para un grupo de equipos con costo mínimo

5- Considere una instalación con 100000 bombillos de luz. Se conoce que el costo por reemplazar un bombillo cuando falla es \$5.00. Si se reemplaza el grupo completo, el costo de reemplazo de un bombillo es \$0.25. Conociendo el número de bombillos sin fallar durante un número de diez periodos de tiempo, como se muestra en la siguiente

tabla, y que las probabilidades de fallas se incrementan a medida que pasa el tiempo, determine el tiempo óptimo en que se debe reemplazar el grupo de bombillos.

Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vivos	100000	99000	98000	97000	96000	93000	87000	77000	63000	48000

Solución de la literatura

Reemplazar el grupo de bombillos cada siete años con un costo de \$4580.00.

Solución MoRM

Solución

Periodo de reemplazo -> 7

Costo Promedio Mínimo -> 4580.0143

Figura 3.13 – Solución

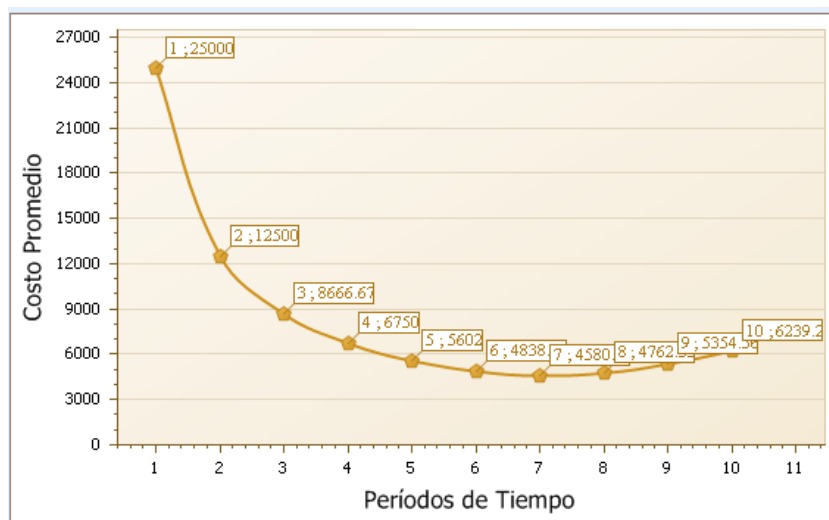


Figura 3.14 – Gráfica de costos promedios

Análisis para un equipo con utilidad máxima

El ejercicio es tomado de la tesis de maestría “Nueva dimensión de la teoría de la reposición y el mantenimiento” de Domingo Curbeira.

- 6- Considere la siguiente información referente a un equipo. Los datos brindados pueden ser interpretados de la siguiente manera: una entrada de 50 equivale a 50 000.

Datos del problema

$$A = \$1000000.00$$

$$a = 0.06$$

Tabla de datos

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_j	50	60	70	90	120	150	180	210	240	300	400	600
R_j	990	950	910	860	810	760	680	600	520	420	320	200
I_j	1500	1300	1100	1090	1080	1050	1010	1000	990	950	700	300

Se desea determinar el tiempo óptimo de reemplazo del equipo con la utilidad alcanzada hasta ese momento.

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo en el octavo año con una utilidad máxima de \$1 126 460.00.

Solución MoRM

El período de reemplazo ofrecido por la literatura difiere de la obtenida por el sistema informático, debido a cálculos de redondeo utilizados en la literatura. En la misma se redondean resultados intermedios a tres cifras decimales. El sistema informático sugiere reemplazar el equipo en el séptimo año con una utilidad máxima de \$1 240 448.567.

Solución

Período de reemplazo -> 7

Utilidad -> 1240448.567

Figura 3.15 - Solución

Análisis para un equipo con utilidad máxima y programación lineal

El ejercicio pertenece a la tesis “Nueva dimensión de la teoría de la reposición y el mantenimiento” de Domingo Curbeira.

- 7- Una empresa de transporte utiliza un tipo de camión cuyo costo inicial es de \$6000.00 pesos, se conoce por datos históricos, la información sobre el costo de operación anual, la reventa y los ingresos como lo muestra la siguiente tabla

Tabla de datos

Año	1	2	3	4	5	6	7	8
C_j	1000	1200	1400	1800	2300	2800	3400	4000
R_j	4000	3500	2000	1500	1000	500	250	100
I_j	5000	3330	2350	1575	900	400	-200	-800

Además se conoce que la utilidad anual esperada es de \$3000.00 y los costos deben estar por debajo de los \$4000.00. Considere que la tasa de interés es de un 10%. ¿En qué período de tiempo se hace necesario reemplazar el camión? ¿Cuál es la utilidad alcanzada hasta ese instante de tiempo?

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo en el segundo año con una utilidad máxima de \$3000.00.

Solución MoRM

El resultado del sistema informático es igual al brindado por la literatura.

Solución

Período de reemplazo -> 2

Utilidad -> 3000

Figura 3.16 – Solución

Análisis para un equipo con funciones continuas y utilidad máxima

8- Considere un equipo cuyas funciones de ingreso y costo se comportan como sigue:

Caso	Ingreso	Costo
1	$b(t) = 300 - 9t$	$c(t) = 11 + 2t$
2	$b(t) = 3355 + 2000t - 20t^2$	$c(t) = 3355 + 12t + t^2$
3	$b(t) = 4500 - 3t$	$c(t) = 4500 - 28t + 0.05t^2$
4	$b(t) = 5000 + 1100t - 67t^2$	$c(t) = 5000 + 67t$

En cada caso determine la utilidad máxima, el período en que se alcanza y el período en que se hace indispensable reemplazar el equipo.

Solución MoRM**Caso 1****Solución**

Períodos de utilidades -> $0 < \text{Período} < 26.2727$

Período de reemplazo -> 26.2727

Figura 3.17 – Solución

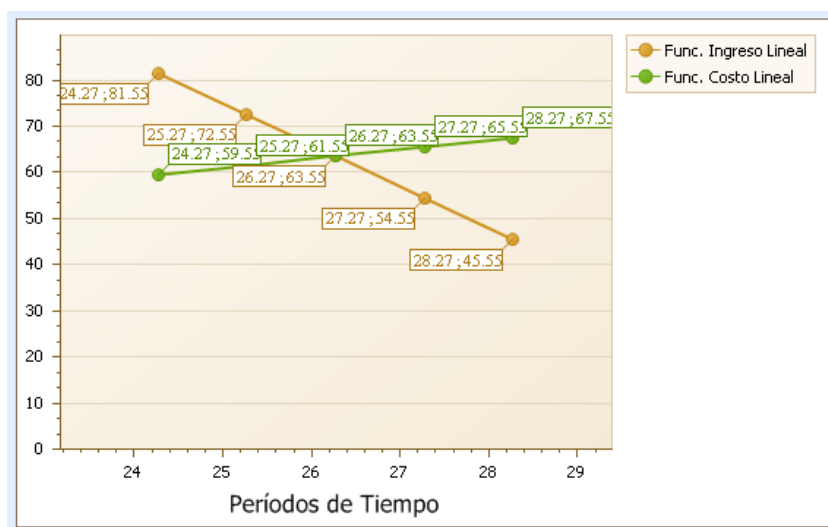


Figura 3.18 – Gráfica de funciones ingreso y costo

Caso 2**Solución**

Utilidad máxima -> 47049.3333

Período de utilidad máxima -> 47.3333

Período de reemplazo -> 94.6667

Figura 3.19 – Solución

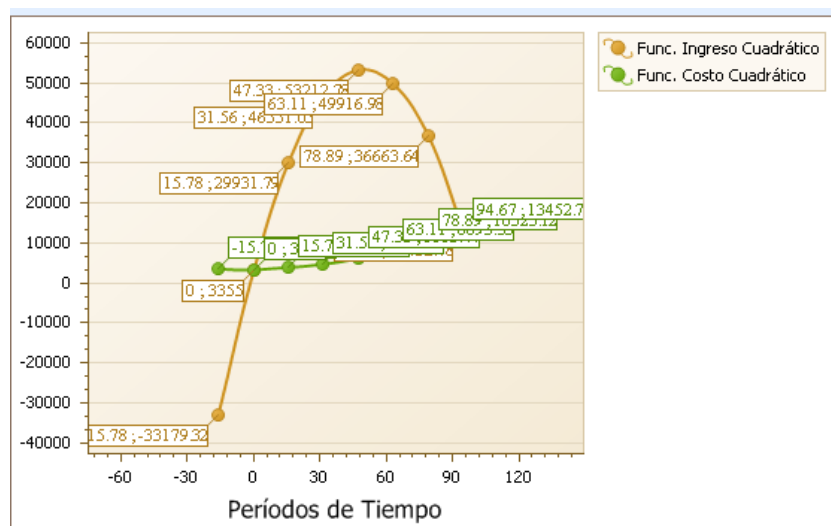


Figura 3.20 – Gráfica de funciones ingreso y costo

Caso 3

Solución

Utilidad máxima -> 3125

Período de utilidad máxima -> 250

Período de reemplazo -> 500

Figura 3.21 – Solución

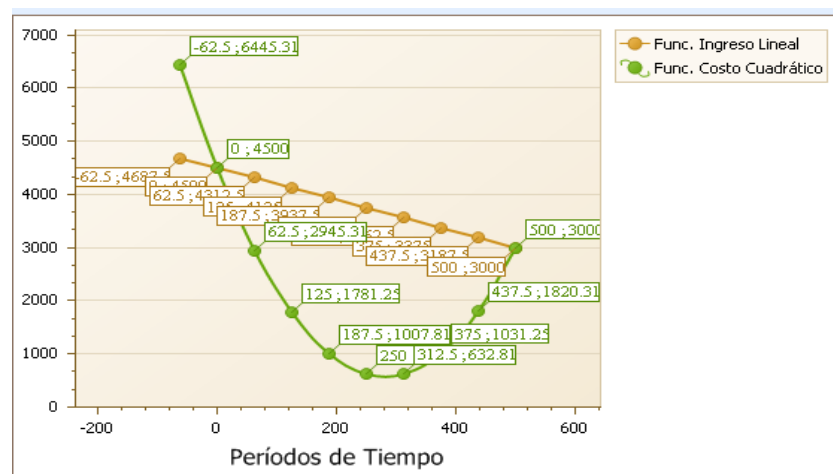


Figura 3.22 – Gráfica de funciones ingreso y costo

Caso 4

Solución

Utilidad máxima -> 3981.6754

Período de utilidad máxima -> 7.709

Período de reemplazo -> 15.4179

Figura 3.23 – Solución

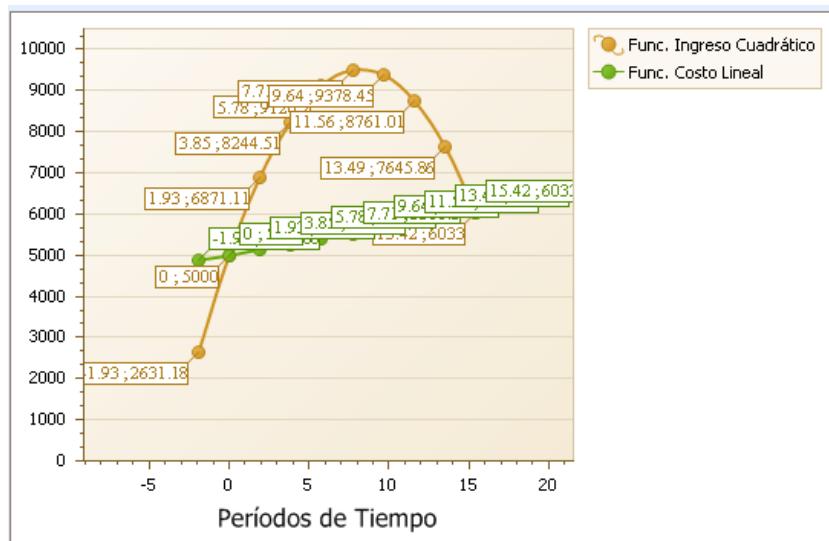


Figura 3.24 – Gráfica de funciones ingreso y costo

Análisis para un equipo con funciones continuas y costo mínimo

El ejercicio que a continuación se presenta, pertenece al libro “Métodos y modelos de la investigación de operaciones Tomo I” de Arnold Kaufmann.

- 9- Supongamos que se tiene un automóvil cuyo precio de compra es de 700 000 F. Supongamos también que su cotización en el periódico especializado en estos asuntos sea de 350 000 F dos años después, y que la variación de su valor sea exponencial. Por otra parte, expondremos la hipótesis de que los gastos de reparación y mantenimiento son de 30 000 F para el primer año y de 90 000 para los dos siguientes reunidos y que su variación es exponencial.

Con estas hipótesis, resulta:

$$R(t) = e^{-0.34658t}$$

$$C(t) = 30\,000(e^{0.69315t} - 1)$$

Solución de la literatura

Reemplazar el equipo a los 2.5 meses con un costo mínimo de 218 150 F.

Solución MoRM

La solución brindada por MoRM difiere con respecto a la solución de la literatura debido a cálculos de redondeo.

Solución

Período de Reemplazo -> 2.51

Costo Promedio Mínimo -> 218165.918

Figura 3.25 – Solución

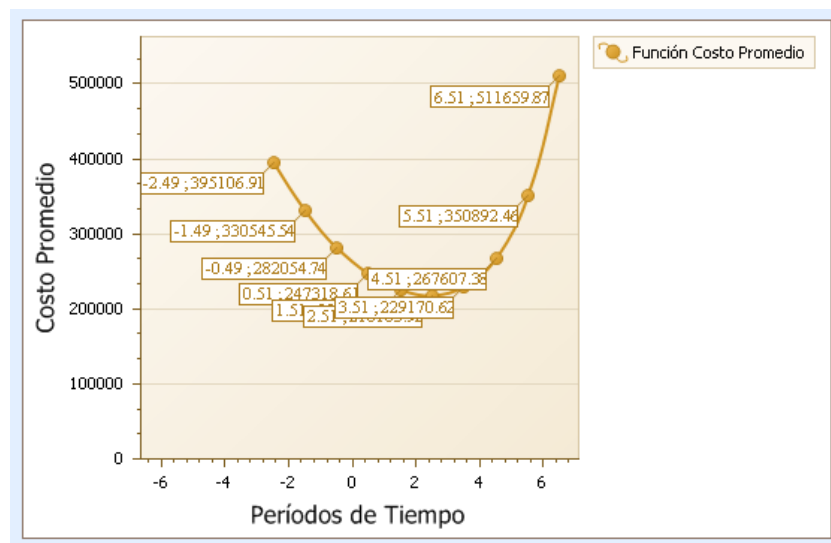


Figura 3.26 – Gráfica de funciones ingreso y costo

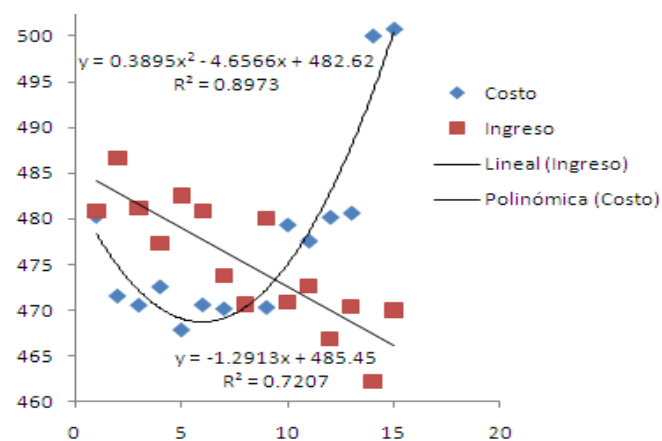
Ajuste de modelo Lineal - Cuadrático con utilidad máxima

10- Sea un equipo con información referente a los ingresos del bien producido y los costos de operación y mantenimiento mostrados en la siguiente tabla; se desea determinar la funciones continuas que mejor se ajusten a los datos, el coeficiente de determinación, como una medida de bondad de ajuste, la utilidad máxima, el período óptimo de reemplazo del equipo y de utilidad máxima.

Período	C_j	I_j
1	480.3	480.9
2	471.6	486.6
3	470.6	481.18

4	472.6	477.35
5	467.9	482.52
6	470.63	480.8
7	470.2	473.75
8	470.75	470.62
9	470.35	480.1
10	479.36	470.93
11	477.6	472.6
12	480.2	466.9
13	480.65	470.4
14	500	462.2
15	500.75	470

Solución de ajuste software “Excel 2007”



Solución MoRM

$$c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$

Coeficientes

$$c_1 = 482.6238$$

$$c_2 = -4.6566$$

$$c_3 = 0.3895$$

Coeficiente de Determinación

$$R^2 = 0.8973$$

Figura 3.27 – Función costo estimada

$$b(t) = b_1 + b_2 t$$

Coeficientes

$$b_1 = 485.4533$$

$$b_2 = -1.2912$$

Coeficiente de Determinación

$$R^2 = 0.7207$$

Figura 3.28 – Función ingreso estimada

Solución

Utilidad máxima -> 10.0996

Período de utilidad máxima -> 4.3206

Período de reemplazo -> 9.413

Figura 3.29 - Solución

La solución dada por el sistema informático coincide con la emitida por Microsoft Office Excel 2007.

Ajuste de modelo Exponencial - Exponencial con costo mínimo

11- Considere un equipo con precio de adquisición \$700000.00 pesos y con datos pertenecientes a los costos y reventas dados en la siguiente tabla. Se desea determinar el momento óptimo de reemplazo del equipo con el costo mínimo correspondiente a través de un método de solución perteneciente a la categoría de modelo continuo.

Período	C_j	R_j
1	30011.1692	0.9
2	80010.6767	0.067
3	310022.03	0.056

4	550095.413	0.048
5	830093.533	0.037
6	2890082.48	0.026
7	4810075.79	0.019
8	6650173.23	0.02
9	25330389.8	0.017
10	90690866.1	0.061
11	11411905.5	0.019
12	922854158	0.021
13	245739008	0.031
14	491509402	0.014
15	983051575	0.025
16	3966138694	0.018

Solución de ajuste software “Wolfram Mathematica 7”

```

data = {{1, 30 011.1692}, {2, 80 010.6767}, {3, 310 022.03},
        {4, 550 095.413}, {5, 830 093.533}, {6, 2 890 082.48},
        {7, 4 810 075.79}, {8, 6 650 173.23}, {9, 25 330 389.8},
        {10, 90 690 866.1}, {11, 114 119 05.5}, {12, 922 854 158},
        {13, 245 739 008}, {14, 491 509 402}, {15, 983 051 575},
        {16, 3 966 138 694}};

In[17]:= model = b * (Exp[c * x] - 1);

In[19]:= fit = FindFit[data, model, {b, c}, x, Method -> "LevenbergMarquardt"]

Out[20]= {b -> 23.0269, c -> 1.18459}

In[27]:= fit["RSquared"]

Out[28]= 0.950727

```

Figura 3.30 – Función costo estimada

```

In[36]:= data = {{1, 0.9}, {2, 0.067}, {3, 0.056}, {4, 0.048}, {5, 0.037},
                {6, 0.026}, {7, 0.019}, {8, 0.02}, {9, 0.017}, {10, 0.061},
                {11, 0.019}, {12, 0.021}, {13, 0.031}, {14, 0.014}, {15, 0.025},
                {16, 0.018}};

In[37]:= model = Exp[b * x];

In[38]:= fit = FindFit[data, model, {b}, x, Method -> "LevenbergMarquardt"]

Out[38]= {b -> -0.612696}

In[40]:= fit["RSquared"]

Out[40]= 0.760841

```

Figura 3.31 – Función reventa estimada

Solución MoRM

$$\psi(t) = \kappa_0(\varepsilon^{\mu t} - 1)$$

Coeficientes

$$\kappa_0 = 23.0269$$

$$\mu = 1.1846$$

Coeficiente de Determinación

$$R^2 = 0.9414$$

$$\varphi(t) = \varepsilon^{\lambda t}$$

Coeficientes

$$\lambda = -0.6127$$

Coeficiente de Determinación

$$R^2 = 0.7209$$

Figura 3.32 – Función costo estimada

Figura 3.33 – Función reventa estimada

Solución

Período de Reemplazo -> 7.01

Costo Promedio Mínimo -> 111763.1745

Figura 3.32 – Solución

Los coeficientes de determinación determinados por MoRM difieren de los calculados por “Wolfram Mathematica 7” debido a la diferencia de precisión con que trabaja uno con respecto al otro.

CONCLUSIONES.

El desarrollo del proyecto arribó a las siguientes conclusiones:

- ✓ Los modelos de reemplazo estudiados toman la decisión sobre una base netamente económica sin incluir variables de tipo técnico y tecnológico que describan el comportamiento del equipo.
- ✓ La mayoría de los modelos matemáticos tratados en la literatura realizan su análisis a través del costo promedio mínimo y no tienen en cuenta la obsolescencia del equipo.
- ✓ Los modelos que trabajan con valores discretos y costo promedio mínimo consideran reemplazar el equipo si el costo promedio del período próximo es mayor que el promedio de los costos ponderados en el período anterior.
- ✓ El modelo matemático que trabaja con valores discretos, el interés del dinero y ganancia máxima considera reemplazar el equipo cuando en el próximo período la utilidad actual sea inferior a su precio de adquisición.
- ✓ Cuando las funciones continuas de costo y reventa tienen un comportamiento exponencial, es posible determinar el momento en que el costo es mínimo y se hace indispensable reemplazar el equipo.
- ✓ Si la función continua ingreso es una parábola y la función continua costo una recta, entonces se pueden determinar los momentos en que la utilidad es máxima y se debe reemplazar el equipo respectivamente; lo mismo sucede cuando ambas funciones tienen un comportamiento lineal y parabólico, y cuando la función ingreso es lineal y la función costo una parábola.
- ✓ MoRM determina el momento de reemplazo de equipos que se deterioran con el tiempo, que fallan o mueren de súbito, y grupos de equipos con un costo de reemplazo individual alto y una probabilidad de fallo que se incrementa con el tiempo.
- ✓ MoRM permite realizar un análisis de sensibilidad, al poderse introducir cambios en los datos de entrada y determinar los efectos que estos tienen en la decisión tomada.

RECOMENDACIONES.

- ✓ Realizar un nuevo proyecto investigativo con la finalidad de continuar profundizando en el estudio de los problemas de reposición y mantenimiento de los equipos y de esta forma obtener nuevos modelos matemáticos que utilicen técnicas de la investigación de operaciones no tratadas antes.
- ✓ Proponer la puesta en práctica del sistema informático MoRM en las empresas del territorio.

ANEXOS

Anexo I

Algoritmo Levenberg-Marquardt

begin

$k := 0; \quad v := 2; \quad x := x_0;$

$A := J(x)^T J(x); \quad g := J(x)^T f(x);$

$found := (\|g\|_\infty \leq \varepsilon_1); \quad \mu_0 := \tau * \max\{a_{ii}\};$

while (not *found*) and ($k < k_{max}$)

$k := k + 1; \quad \text{Resolver } (A + \mu I)h_{lm} = -g$

if $\|h_{lm}\| \leq \varepsilon_2(\|x\| + \varepsilon_2)$

$found := \text{true}$

else

$x_{new} := x + h_{lm}$

$\varrho := (F(x) - F(x_{new})) / (L(0) - L(h_{lm}))$

if $\varrho > 0$

$x := x_{new}$

$A := J(x)^T J(x); \quad g := J(x)^T f(x);$

$found := (\|g\|_\infty \leq \varepsilon_1);$

$\mu := \mu * \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\varrho - 1)^3\right\}; \quad v := 2;$

else

$u := u * v; \quad v := 2 * v;$

end

Anexo II

Algoritmo Gauss

$\mathbf{C} := [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ {Se forma la matriz ampliada $\mathbf{C}$, de n filas y $n + 1$ columnas}

{Proceso Directo}

for $i = 1$ to $n - 1$

 Seleccionar la fila pivote i — *sim*a {Estrategia de pivote parcial}

 for $k = i + 1$ to n

$$m := \frac{c_{ki}}{c_{ii}} \quad \text{fila}(k) := \text{fila}(k) - m \text{fila}(i)$$

 end

end

{Proceso Inverso}

$i := n$

repeat

$$x_i := c_{i,n+1}$$

 for $j = i + 1$ to n {Cuando $i = n$ este lazo no se ejecuta}

$$x_i := x_i - c_{ij}x_j \quad \text{end}$$

$$x_i := \frac{x_i}{c_{ii}} \quad i := i - 1$$

until $i = 0$

La solución es $\mathbf{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T$

Estrategia parcial de pivote

if $c_{ii} = 0$ then

$$k := i$$

 repeat

$$k := k + 1$$

 until $c_{ki} \neq 0$ or $k > n$ {Si se llega a $k > n$ y todos los c_{ki} han sido cero es porque

la matriz del sistema es singular}

 if $k > n$ then Terminar

 else Intercambiar $\text{fila}(k)$ con $\text{fila}(i)$ end

end

Anexo III

Encuesta para validación del software MoRM.

Marque con una (X) en la escala de evaluación que se adjunta a cada variable utilizando la siguiente leyenda

(1) Total desacuerdo.

(2) En desacuerdo.

(3) De acuerdo.

(4) Total acuerdo.

NA.: Cuando no se tiene elementos suficientes para emitir un criterio de valor sobre el ítem.

Lenguaje

• Redacción 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

• Comunicación con el Usuario 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

Contenido.

• Vigencia Científica (Métodos utilizados) 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

• Pertinencia (Aplicabilidad) 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

El Software

• Presentación 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

• Secuencia Lógica 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

• Flexibilidad 1___ 2___ 3___ 4___ NA___

Observaciones:

Valoración Final

Evaluación que usted le daría al software sobre 100: _____

Anexo IV**Lenguaje****Estadísticos**

Lenguaje		
N	Válidos	18
	Perdidos	0
Moda		4

Tabla 1.1 – Estadísticos lenguaje.

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	5	27.8	27.8	27.8
	Total acuerdo	13	72.2	72.2	100.0
	Total	18	100.0	100.0	

Tabla 1.2 – Frecuencias lenguaje.

Comunicación con el usuario**Estadísticos**

Comunicación con el usuario		
N	Válidos	18
	Perdidos	0
Moda		4

Tabla 1.3 – Estadísticos comunicación con el usuario.

Comunicación con el usuario

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	6	33.3	33.3	33.3
	Total acuerdo	12	66.7	66.7	100.0
	Total	18	100.0	100.0	

Tabla 1.4 – Frecuencias comunicación con el usuario.

Vigencia científica**Estadísticos**

Vigencia Científica

N	Válidos	16
	Perdidos	2
Moda		4

Tabla 1.5 – Estadísticos vigencia científica.

Vigencia Científica

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	2	11.1	12.5	12.5
	Total acuerdo	14	77.8	87.5	100.0
	Total	16	88.9	100.0	
Perdidos	NA	2	11.1		
Total		18	100.0		

Tabla 1.6 – Frecuencias vigencia científica.

Pertinencia**Estadísticos**

Pertinencia

N	Válidos	18
	Perdidos	0
Moda		4

Tabla 1.7 – Estadísticos pertinencia.

Pertinencia

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	2	11.1	11.1	11.1
	Total acuerdo	16	88.9	88.9	100.0
	Total	18	100.0	100.0	

Tabla 1.8 – Frecuencias pertinencia.

Presentación**Estadísticos**

Presentación

N	Válidos	18
	Perdidos	0
Moda		4

Tabla 1.9 – Estadísticos presentación.

Presentación

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	2	11.1	11.1	11.1
	Total acuerdo	16	88.9	88.9	100.0
	Total	18	100.0	100.0	

Tabla 1.10 – Frecuencias presentación.

Secuencia lógica**Estadísticos**

Secuencia Lógica

N	Válidos	17
	Perdidos	1
Moda		4

Tabla 1.11 – Estadísticos secuencia lógica.

Secuencia Lógica

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	3	16.7	17.6	17.6
	Total acuerdo	14	77.8	82.4	100.0
	Total	17	94.4	100.0	
Perdidos	NA	1	5.6		
Total		18	100.0		

Tabla 1.12 – Frecuencias secuencia lógica.

Flexibilidad

Estadísticos

Flexibilidad		
N	Válidos	18
	Perdidos	0
Moda		4

Tabla 1.13 – Estadísticos flexibilidad.

Flexibilidad

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	6	33.3	33.3	33.3
	Total acuerdo	12	66.7	66.7	100.0
	Total	18	100.0	100.0	

Tabla 1.14 – Frecuencias flexibilidad.

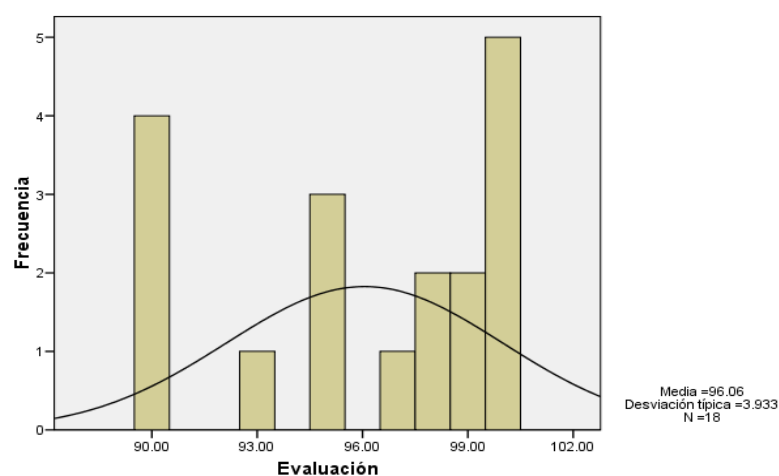
Evaluación final

Estadísticos

Evaluación		
N	Válidos	18
	Perdidos	0
Media		96.0556
Mediana		97.5000
Moda		100.00
Desv. típ.		3.93285
Varianza		15.467
Mínimo		90.00
Máximo		100.00

Tabla 1.15 – Estadísticos evaluación.

Histograma



BIBLIOGRAFÍA.

- Abarca, R., & Alvarado, M. (2000). Análisis de vida útil de equipos y bienes de capital.
- Álvarez, M. (1987). *Modelos Económicos matemáticos II* (Vol. Tomo I). Ciudad de la Habana: Editorial IPJAE.
- Artemenko, V. K., & Portela, M. (1998). *Modelos Matemáticos I* La Habana Ed. Pueblo y Educación.
- Asmar, I. F. (2005). *Métodos Numéricos*.
- Baca, G. (2000). *Ingeniería económica*. Bogotá: Fondo Educativo Panamericano.
- Cantillo, V. (1998). *Reemplazo económico de los equipos*.
- Churchman, W., Ackoff, R., & Arnoff, L. (1971). *Introducción a la investigación operativa*. Madrid: Aguilar S.A. Ediciones.
- Cortés, M., & Curbeira, D. (2002). *Nuevas Concepciones de la Teoría de la Reposición y el Mantenimiento*. Tesis de Maestría, UCF Carlos Rafael Rodríguez Cienfuegos.
- Espinoza, J. (1990). Reemplazo de equipos: un enfoque de mantenimiento. *Revista Mantenimiento, N° 1 CIUDAD*.
- Figuera, J., & Figuera, J. R. (1979). *Renovación de equipos industriales*. Barcelona: editorial Hispanoeuropea.
- Galisky, R., Guzmán, J. I., & Insulán, M. (2008). *Optimal Replacement intervals for mining equipment: A cru model to improve mining equipment management*. Las Condes, Santiago, Chile.
- Garzón, R., Edwin, R., & Aguinada, Á. (2007). *Sistema automatizado de mantenimiento centrado en confiabilidad para pequeñas y medianas empresas*. Quito.
- Gómez, G. (2002). Análisis de reemplazo de activos físicos. *Revista de ingeniería de planta. Chile, N° 41*.
- Hotelling, H. (1925). A general mathematical theory of depreciation. *Journal of the American Statistical Association, XX*.

- Kaufmann, A. (1977). *Métodos y modelos de la investigación económica*. La Habana: Editorial revolución.
- Luza, J. (2007). Análisis de reemplazo: Universidad Arturo Prat del Estado de Chile.
- Mira, L. (1994). *Tiempo óptimo de reposición por obsolescencia del equipo*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Pládosich, C., Polanco, D., & Peña, L. (2007). *Sector porcícola: selección del modelo de evaluación de la productividad que mejor se adapte a sus variables productivas*. Unpublished Tesis de licenciatura no publicada, ITSON.
- PAT. (2003). Gestión de la tecnología. Retrieved from <http://www.getec.etsit.upm.es/docencia/gtecnologia/gtecnologia.htm>
- Poveda, G. (2002). Óptimo económico de máquinas y equipos *Revista facultad de ingeniería. Universidad de Antioquia. Medellín, N° 27*.
- Prawda, J. (1981). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (Vol. Vol. 1/2). México D.F.: Editorial Limusa.
- Preinreich, G. A. D. (1940). The economic life of industrial equipment. *Econometrica*, VIII.
- Sasieni, M., Yaspan, A., & Friedman, L. (1982). *Investigación de operaciones: métodos y problemas*. México D.F.: Editorial Limusa.
- Selivanov, I. A. (1972). *Fundamentos de la teoría del envejecimiento de los equipos*. Moscú: Editorial Mir.
- Taha, H. A. (1998). *Investigación de Operaciones* (Sexta Edición ed.). México: Editorial Prentice Hall.
- Taylor, J. S. (1923). A statistical theory of depreciation. *Journal of the American Statistical Association*, XIX.
- Terborgh, G. (1949). *m Dynamic Equipment Policy*. New York: McGraw-Hill Book Company.

- Viveros, A. F., González, G. A. V., & Rodríguez, R. B. (2004). Aproximación al reemplazo de equipo industrial. *Scientia Et Technica*, Vol. X(Núm. 25), pp. 163-168.
- Weisstein, E. W. (2011). Least Squares Fitting. from <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html>