

UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS "CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ"
FACULTAD DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
MATEMÁTICA BÁSICA Y APLICADA

**MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA PARA LA DIETA DEL
GANADO BUFALINO**

Tesis presentada en opción al Título Académico
de Master en Matemática Aplicada

Autor: Ing. REINIER BELLO SUÁREZ DEL VILLAR

Tutores: Prof. Aux., TERESITA SÁNCHEZ NAVARRO, MsC.

Prof. Tit., MANUEL CORTÉS CORTÉS, Dr.

Cienfuegos

2008

*A mi familia
y amigos
Gracias a todos
y cada uno de ustedes*

RESUMEN

El presente trabajo forma parte de un proyecto CITMA territorial que pretende suministrar herramientas matemáticas para la toma de decisiones. La Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo del municipio Aguada de Pasajeros resulta la locación donde se ejecuta esta investigación. Centrándose la misma en la elaboración e implementación de un Modelo Matemático basado en la Programación Lineal Difusa (PLD) que permita obtener parámetros óptimos para la alimentación del Ganado Bufalino. Se emplea la PLD y en especial los métodos de Verdegay, Zimmermann y Werners dentro de una Algoritmo Interactivo, posibilitando el intercambio con el decisor en la fase de solución del modelo matemático. Se establecen los requerimientos nutricionales mínimos del búfalo como un número difuso y se determinan las cantidades óptimas de pastos a sembrar para alimentar a la masa ganadera de una Granja Tipo, que minimizan el costo total por concepto de fomento de cultivos.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN	III
ÍNDICE	IV
INTRODUCCIÓN	1
1. Generalidades sobre Programación Difusa	7
1.1. Introducción	7
1.2. El modelo de Dieta Clásico. La Programación Lineal	7
1.3. Programación Lineal Paramétrica	8
1.4. Programación Borrosa	9
1.4.1. Conjuntos Borrosos	10
1.4.2. Números Borrosos	12
1.4.3. Operaciones con Subconjuntos Borrosos	14
1.5. Programación Lineal Difusa	15
1.5.1. Métodos de Solución para problemas de PLD	17
1.6. Conclusiones parciales	21
2. Solución de un Problema Difuso de Dieta Animal	22
2.1. Introducción	22
2.2. Planteamiento de un modelo de PL para la dieta animal	22
2.3. Modelo de Dieta para el Ganado Bufalino	23
2.4. Determinación de los Coeficientes del modelo	24
2.4.1. Determinación de los coeficientes económicos	24

2.4.2.	Determinación de los coeficientes tecnológicos	24
2.4.3.	Determinación de los (b_i) Términos Independientes	25
2.5.	Adecuaciones a los métodos de solución	27
2.5.1.	Región Factible de un problema PLD	27
2.5.2.	Adecuaciones para números difusos triangulares, trapezoidales y de Rama Izquierda Ascendente	28
2.5.3.	Adecuaciones para números cuasidifusos de tipo LR	38
2.6.	Algoritmo Interactivo	40
2.7.	Implementación en MATLAB®	42
2.8.	Conclusiones parciales	43
3.	Caso Práctico: Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo	44
3.1.	Introducción	44
3.2.	Empresa Pecuaria 1 ^{ra} de Mayo. Situación Actual	44
3.2.1.	Definición de los Coeficientes Económicos del Modelo	46
3.2.2.	Definición de los Coeficientes Tecnológicos del Modelo	46
3.2.3.	Definición de los Términos Independientes de las Restricciones	48
3.2.4.	Otros aspectos a considerar en el Modelo	52
3.3.	Modelo de PLD para la dieta del Ganado Bufalino en 1 ^{ra} de Mayo	53
3.4.	Solución del modelo de PLD para la dieta del búfalo mediante la Metodología Interactiva	55
3.5.	Conclusiones Parciales	59
	CONCLUSIONES	60
	RECOMENDACIONES	62
	BIBLIOGRAFÍA	63
	ANEXOS	66

INTRODUCCIÓN

En la segunda mitad del siglo XX la optimización encontró un un amplio campo de aplicaciones en sistemas físicos, químicos, planeación y programación de sistemas de producción, problemas de transporte y localización, problemas financieros y diseño ingenieril. Desde el mismo comienzo de la aplicación en estos problemas se reconoció que el análisis de estos sistemas está casi siempre confrontando la incertidumbre. Comenzando con los trabajos de Beale (1955), Bellman (1957), Bellman y Zadeh (1970), Charnes y Cooper (1959), Dantzig (1955) y Tintner (1955) la Optimización bajo Incertidumbre ha experimentado un rápido desarrollo tanto en la teoría como en los algoritmos. En la actualidad, se considera todavía la Planeación bajo Incertidumbre como uno de los problemas abiertos más importantes en optimización (Horner, 1999). La optimización bajo incertidumbre ha transitado por variedades de filosofías de modelación, incluyendo minimización de la expectación, minimización de la desviación de las metas, minimización del costo máximo y optimización sobre restricciones suaves. Entre los enfoques principales para abordar la incertidumbre, se encuentran: la Programación Estocástica (Modelos de Recursos, Programación Estocástica Robusta y Modelos Probabilísticos), Programación Difusa (Programación Flexible y Posibilista) y la Programación Estocástica Dinámica. En este trabajo se utiliza la Programación Difusa, en una de sus variedades: la Programación Flexible y en particular la Programación Lineal Difusa (PLD) para la solución de problemas de planeación de la dieta óptima.

En 1945, Stiegler plantea por primera vez un problema de dieta optimal desde la perspectiva de la certeza en todos los coeficientes del modelo. Entonces comienzan las aplicaciones de estos modelos de dietas sobre todo en animales de cría intensiva. Uno de los grandes retos en la elaboración de estos problemas matemáticos es contar con datos veraces para cada uno de los componentes del modelo. En muchos casos esta información se desconoce o se conoce con un cierto grado de

incertidumbre. Cuando se presentaba la situación anterior se asumían estos elementos conocidos determinísticamente y luego se trataba mediante el Análisis de Sensibilidad de determinar variantes de solución con diferentes valores de los coeficientes desconocidos. Aquí también juega un papel importante la Programación Lineal Paramétrica, como una variante; teniendo en cuenta que esta tiene como función, estudiar el comportamiento de las soluciones de un problema de Programación Lineal (PL), cuando los coeficientes del modelo varían. Poco después de darse los primeros pasos en la Programación Difusa, comienzan las aplicaciones a los diferentes problemas clásicos de PL, y dentro de estos, a los modelos de dieta. Es entonces que los investigadores emplean a los números difusos para describir los coeficientes del modelo con naturaleza incierta. Las aplicaciones de los modelos de dieta animal comienzan entonces a transitar por caminos que van desde conocer a todos los elementos de forma determinística hasta considerarlos todos, difusos.

En la provincia se han desarrollado modelos de dieta animal para el ganado vacuno, ejemplo resulta el confeccionado para la Empresa Pecuaria El Tablón del municipio Cumanayagua, por el Grupo de Investigación de Matemática Aplicada (GIMA), de la Universidad de Cienfuegos. A este mismo colectivo se la ha dado la tarea de establecer un modelo para la alimentación del Búfalo, que en la provincia ha comenzado a concentrarse en la región de Aguada de Pasajeros. La Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo es la encargada de reunir y desarrollar la cría del Búfalo en el territorio. Debido al relativo poco tiempo que lleva introducido el Búfalo en Cuba, existe poca información sobre buenas prácticas de cría. Por lo tanto elementos importantes como los requerimientos nutricionales del animal son materia de investigaciones, todavía. Aún no existe consenso entre los expertos en lo que concierne a las cantidades mínimas y máximas de estos en el ganado bufalino. La determinación de estos valores requiere un estudio exhaustivo de las cuantías de nutrientes necesarios para mantener la vida animal. Esto determina que no haya sido posible encontrar los mismos, de forma determinística, para el Búfalo en Cuba. Sin lugar a dudas la dieta del ganado es una de las variables más importantes para el rendimiento en las producciones. Dada la necesidad que existe en la Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo de programar la dieta óptima para la alimentación del Ganado Bufalino teniendo en cuenta la incertidumbre en algunos de los datos, los

pastos y pastos para forraje a sembrar, los requerimientos nutricionales mínimos y otros recursos económicos existentes en la granja, se plantea entonces:

Problema Científico

Necesidad de un Modelo de Programación Lineal Difusa (PLD) para la obtención de la dieta óptima del Ganado Bufalino adecuado a las particularidades de la empresa pecuaria.

Campo de acción

La Modelación Matemática Difusa para el establecimiento de dietas óptimas para el Ganado Bufalino.

Objetivo General

La elaboración e implementación de un Modelo Matemático basado en la Programación Lineal Difusa que permita obtener parámetros óptimos para la alimentación del Ganado Bufalino.

Objetivos específicos

- Clasificación y establecimiento de Requerimientos Nutricionales para el Ganado Bufalino.
- Modelación Matemática mediante Programación Lineal Difusa para el problema de dieta, abordando diferentes métodos.
- Determinación de los coeficientes económicos y tecnológicos del modelo.
- Implementación de un algoritmo interactivo a través de la programación de este en un paquete matemático (MATLAB®).

Idea a defender

Un modelo de Programación Lineal Difusa para la Dieta del Ganado Bufalino permitirá modelar de forma más adecuada la incertidumbre en los requerimientos nutricionales del Búfalo. Así como establecer los parámetros óptimos de alimentación del mismo.

Novedad Científica

Por primera vez se asume la Programación Matemática Difusa como una herramienta para el establecimiento del Modelo Matemático para la dieta del Ganado Bufalino.

Aportes Científicos

- La definición de los requerimientos mínimos de los nutrientes presentes en la dieta animal, así como otros recursos o coeficientes con grado de incertidumbre, como un número difuso.
- Redimensionamiento de un Algoritmo Interactivo para la Programación Lineal Difusa.
- Modelo de Programación Lineal Difusa para la dieta del Ganado Bufalino.
- Obtención de resultados prácticos en cuanto a las variables planteadas asumiendo diversas técnicas de la Programación Matemática Difusa.

Metodología a Emplear

En cuanto a métodos teóricos se utilizó el análisis histórico-lógico para resumir y precisar la información recopilada sobre la teoría de los números difusos y el problema clásico de la dieta en el área de la investigación de operaciones. El método de análisis y síntesis para conocer el tratamiento de la teoría de los números difusos en los modelos matemáticos. El método de inducción-deducción para garantizar un resultado de calidad en el procedimiento a proponer.

En cuanto a los métodos empíricos se utilizaron la entrevista individual y grupal para recopilar información de los expertos.

Modelación Matemática para la diseño del Modelo de Dieta. Y la Programación Matemática Difusa en la determinación de los números difusos que representan los requerimientos nutricionales y otros parámetros del modelo de dieta.

Entre las herramientas empleadas se encuentran MATLAB® R2007a y WINQSB v1.0

La tesis está estructurada en Síntesis, Introducción, tres Capítulos, Conclusiones y Recomendaciones, Bibliografía y Anexos.

Capítulo 1: GENERALIDADES SOBRE PROGRAMACIÓN DIFUSA

En este Capítulo se realiza una revisión bibliográfica sobre Programación Lineal, Programación Flexible y Programación Lineal Difusa. Se plantean las nociones teóricas fundamentales de la Lógica Difusa. Tres métodos para abordar un problema de Programación Lineal Difuso (PLD) son tratados. Se establece el modelo de PLD para la dieta animal.

Capítulo 2: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DIFUSO DE DIETA ANIMAL

El algoritmo interactivo para un problema de PLD de Dieta Animal queda establecida. Son dadas las funciones de pertenencia generales para los números difusos que son considerados en lugar de los términos independientes inciertos. Se plantean el modelo general de PLD para la dieta animal con términos independientes difusos. Los métodos principales abordados en el Capítulo I son adaptados para resolver problemas de PLD de términos independientes difusos con funciones de pertenencia distintas a las de su diseño. Una implementación en MATLAB[®] es presentada para automatizar el algoritmo interactivo.

Capítulo 3: CASO PRÁCTICO: EMPRESA PECUARIA 1^{RO} DE MAYO

Se construye el modelo de PLD según las características de la empresa 1^{ro} de Mayo. Quedan establecidos los valores difusos, así como las funciones de pertenencia de los requerimientos nutricionales; se resuelve el problema. Los resultados son presentados en una serie de tablas y gráficos ilustrativos desarrollados en MATLAB[®].

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las Conclusiones brindan el análisis del alcance de los resultados de este trabajo y se comparan con lo propuesto anteriormente, haciendo énfasis en el cumplimiento de los objetivos planteados.

Las Recomendaciones se centran en futuras consideraciones sobre la naturaleza de otros coeficientes del modelo y resultados que pudieran aplicarse en modelos de dieta para otros tipos de ganado.

Capítulo 1

Generalidades sobre Programación Difusa

1.1. Introducción

La alimentación óptima es uno de los temas más estudiados por los investigadores que trabajan en el área de la cría intensiva de animales. Resulta de importancia vital la selección apropiada de los alimentos y de sus nutrientes, que garanticen un crecimiento adecuado del animal y por supuesto que tengan en cuenta el menor costo posible.

En este capítulo se hace un análisis bibliográfico sobre el problema clásico de dieta y la Programación Lineal Paramétrica. Se presentan tres métodos de solución que se han empleado para el tratamiento de la vaguedad en la información, empleando la Lógica Difusa y la Programación Lineal Difusa.

1.2. El modelo de Dieta Clásico. La Programación Lineal

El modelo de dieta clásico que permite encontrar la combinación de alimentos óptima asegurando el cumplimiento de los requerimientos nutricionales mínimos y minimizando los costos se presenta como un modelo de Programación Lineal (PL) como sigue:

c_j : costo del alimento j , $j \in J = \{1, \dots, n\}$

x_j : cantidad de alimento j a comprar, $j \in J = \{1, \dots, n\}$

a_{ij} : cantidad del nutriente i en el alimento j , $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$

b_i : cantidad mínima del nutriente i requerido, $i \in I = \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Los valores c_j , a_{ij} y b_i se consideran conocidos determinísticamente.

Un modelo general de PL como este fue presentado por primera vez en 1945 por Stiegler. Resultando un paso de avance en la aplicación práctica de la PL, formalizada anteriormente por Leonid Vitaliéovich Kantoróvich y luego por George Dantzig. A partir de ese momento comienzan los investigadores del mundo a emplearlo en sus trabajos. Fue entonces que comienzan a presentarse problemas con los supuestos de la PL y en especial con la determinación inequívoca de los coeficientes. Es por esta razón que el mismo puede resultar inapropiado cuando existe vaguedad en el conocimiento de los componentes del modelo. En la vida real es común encontrarse con que estos valores sean difíciles de establecer como un valor único, determinístico. Sería entonces interesante, una vez obtenida la solución particular a un modelo lineal investigar la fiabilidad de la solución en el caso de variaciones en los coeficientes. Resulta necesario considerar herramientas alternativas como es el caso del Análisis de Sensibilidad en la PL o la Programación Lineal Paramétrica cuando los cambios, más que valores constantes, son funciones lineales de ciertos parámetros.

1.3. Programación Lineal Paramétrica

La principal tarea en el desarrollo de modelos reales de PL, es la recopilación de valores numéricos precisos y fidedignos para los coeficientes. Así pues, es importante estudiar el comportamiento de las soluciones de un problema de PL, cuando los coeficientes del modelo varían. Este tipo de investigación resulta ser la función de la Programación Lineal Paramétrica (PLP) que se encarga de tres perturbaciones en el modelo:

- perturbación en el vector de los coeficientes de la función objetivo
- perturbación en la matriz de los coeficientes de las restricciones

- perturbación en el vector de los términos independientes de las restricciones (recursos)

Esta técnica es capaz de analizar el efecto de estas variaciones y establecer los límites dentro de los cuales la solución óptima permanece estable.

La siguiente familia de problemas, función del parámetro θ permite considerar cómo afectan a la función objetivo perturbaciones en el vector de los costos.

$$\begin{aligned} \min Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n [c_j + \theta d] x_j \quad ; \bar{\theta} \leq \theta \leq \underline{\theta}; \quad d = [d_1, d_2, \dots, d_n] \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad ; i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad ; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

donde d es el vector de las perturbaciones.

Para estudiar el margen de los valores del vector de los términos independientes frente a cambios, se considera el problema:

$$\begin{aligned} \min Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i + \theta d \quad ; i = 1, 2, \dots, m; \quad \bar{\theta} \leq \theta \leq \underline{\theta}; \quad d = [d_1, d_2, \dots, d_n] \\ x_j &\geq 0 \quad ; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

donde d es el vector de perturbaciones.

Queda claro que la Programación Lineal Paramétrica permite realizar análisis de sensibilidad a problemas de PL basados en cambios más que puntuales. ¿Pero qué hacer si la vaguedad de la información se presenta cuando se trata de conformar el modelo de PL y de establecer sus coeficientes? Una alternativa utilizada cada vez con más fuerza es la Programación Lineal Difusa o Borrosa¹ (PLD). Para entender mejor lo que plantea la PLD es necesario tratar la Programación Borrosa y dentro de ella los Conjuntos y Números Borrosos, así como algunas operaciones con estos. Se presenta entonces el siguiente epígrafe.

1.4. Programación Borrosa

Existe una paradoja antigua, atribuida a Euclides que puede ser parafraseada de la siguiente manera. Un montículo que contiene un grano de arena es pequeño. Si se agrega un grano a un montículo

¹El término *difuso* o *borroso* se utiliza indistintamente en la literatura

pequeño de arena, éste sigue siendo pequeño. Se puede entonces concluir, por inducción, que todo montículo de arena es pequeño. Sin embargo; muchas personas estarán de acuerdo que existe un valor entero n tal que un montículo que contiene n granos no puede ser descrito como pequeño. ¿Qué podemos entonces concluir? La paradoja surge debido a que suponemos que “pequeño” es un concepto exacto, es decir, un montículo de arena es pequeño o no lo es. Otra idea sería pensar que un montículo de arena se puede considerar pequeño en “cierto grado”. Esta interpretación no solamente nos ayudaría en el caso de la paradoja de Euclides, sino que posiblemente se encuentre más cerca de nuestra concepción de montículo pequeño que el enfoque de “todo o nada” que sugiere la Teoría Clásica de Conjuntos. Teniendo en cuenta que existe una gran cantidad de conceptos y categorías que se caracterizan por presentar límites no bien definidos en cuanto a su significado, la motivación para la Teoría de los Conjuntos Difusos es obvia.

1.4.1. Conjuntos Borrosos

Desde que en 1965 Lotfi A. Zadeh introdujera el concepto de conjunto difuso permitiendo la pertenencia de un elemento a un conjunto de forma gradual, y no de manera absoluta como establece la teoría conjuntista clásica, es decir, admitiendo pertenencias valoradas en el intervalo $[0; 1]$ en lugar de en el conjunto $\{0, 1\}$, las aplicaciones y desarrollos basados en este sencillo concepto han evolucionado de forma extraordinaria en todas las ramas del saber (Verdegay, 2007). La interpretación de conjunto difuso se obtiene a partir de una generalización del concepto clásico de subconjunto, incluyendo la descripción de nociones o conceptos imprecisos y vagos (Zadeh, 1965a). Esta generalización contempla los siguientes aspectos:

- La pertenencia de un elemento a un conjunto se convierte en un concepto difuso
- La pertenencia se cuantifica mediante un grado al que se le denomina grado de pertenencia y toma valores en el intervalo $[0, 1]$

De forma más precisa el concepto de conjunto difuso se puede definir de la siguiente manera.

Definición 1. Un conjunto difuso A sobre un universo de discurso U se define como un conjunto de pares.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \quad (1.4.1)$$

donde $\mu_A(x)$ determina el grado de pertenencia de x a A para cada elemento $x \in U$. En general, $\mu_A : U \rightarrow M$ donde M se llama Espacio de Pertenencia. Cuando $M = \{0, 1\}$ entonces A es un

conjunto clásico y μ_A coincide con su función característica.

Notación alternativa para el concepto de conjunto difuso es la siguiente:

Para un universo de discurso finito U

$U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto difuso se puede denotar como

$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n$ donde μ_i representa el grado de pertenencia de x_i para $i = 1, 2, \dots, n$ y el símbolo $/$ se interpreta como unión. Normalmente los elementos con grado de pertenencia cero no se incluyen.

Definición 2. Sea A un subconjunto difuso de U . El soporte del conjunto A es un subconjunto clásico de U cuyos elementos tienen grados de pertenencia en A diferentes de cero.

$$supp(A) = \{x \in U / \mu_A(x) > 0\}$$

Definición 3. El núcleo de un subconjunto difuso A de U se define como el subconjunto clásico de U cuyos elementos tienen grado de pertenencia uno en A .

$$kern(A) = \{x \in U / \mu_A(x) = 1\}$$

Definición 4. La altura de un subconjunto difuso A de U se define por:

$$hgt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x)$$

Definición 5. Se dice que un subconjunto difuso es normal o normalizado si existe $x \in U$ tal que $\mu_A(x) = 1$. En otro caso es subnormal.

Definición 6. Un conjunto de nivel α ó α – corte de un subconjunto difuso A de U es un subconjunto no difuso de U que se denota por $[A]^\alpha$ y se define por:

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U / \mu_A(x) \geq \alpha\} & ; si \ \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & ; si \ \alpha = 0 \end{cases}$$

donde $cl(supp(A))$ denota el cierre del soporte de A .

Definición 7. Un subconjunto A de U se denomina convexo si $[A]^\alpha$ es un subconjunto convexo clásico de U , $\forall \alpha \in [0, 1]$

Para el caso que el universo U sea conjunto de los números reales, la definición anterior es equivalente a plantear que la función de pertenencia $\mu_A(x)$ satisface la condición:

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \text{ para cualesquiera } x \text{ e } y \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1$$

1.4.2. Números Borrosos

El concepto de número difuso o borroso fue introducido por primera vez por Zadeh con el fin de analizar y manipular valores aproximados (Zadeh, 1975). Este concepto ha sido tratado y desarrollado por diversos autores (Dubois & Prade, 1978) y (Zimmermann, 1991). Los números difusos se representan como subconjuntos difusos del conjunto de números reales $\mathbb{R}$. En este trabajo se utiliza la siguiente definición.

Definición 8. Un número difuso A es un subconjunto difuso del conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con una función de pertenencia continua, normal, convexa en el sentido difuso y con soporte acotado. Esta definición es equivalente a decir que:

1. $\mu_A(x)$ es continua
2. $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_A(x) = 1$, es decir, $hgt(A) = 1$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [x, y]$ se cumple que $\mu_A(t) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$
4. $supp(A)$ es acotado

Algunos autores (Dubois & Prade, 1978) no incluyen la condición de normalidad

Si A es un número difuso, entonces $[A]^\alpha$ es un subconjunto cerrado y convexo (compacto) de $\mathbb{R}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Definición 9. Un subconjunto difuso A se denomina número triangular difuso con pico o centro en a y holguras izquierda y derecha $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, respectivamente si su función de pertenencia tiene la forma siguiente (Ver Anexo C):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(a-x)}{\alpha} & ; si \ (a - \alpha) \leq x \leq a \\ 1 - \frac{(x-a)}{\beta} & ; si \ a < x \leq (a + \beta) \\ 0 & ; en \ otro \ caso \end{cases}$$

Definición 10. Un subconjunto difuso A se denomina número difuso trapezoidal con intervalo de tolerancia $[a, b]$ y holguras izquierda y derecha $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, respectivamente, si su función de pertenencia tiene la forma (Ver Anexo C):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(a-x)}{\alpha} & ; \text{si } (a - \alpha) \leq x \leq a \\ 1 & ; \text{si } a < x \leq b \\ 1 - \frac{(x-b)}{\beta} & ; \text{si } b < x \leq (b + \beta) \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 11 (Representación LR). Cualquier número difuso A puede ser representado mediante la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\frac{(a-x)}{\alpha} & ; \text{si } (a - \alpha) \leq x < a \\ 1 & ; \text{si } a \leq x \leq b \\ R\frac{(x-b)}{\beta} & ; \text{si } b < x \leq (b + \beta) \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde el intervalo $[a, b]$ es el pico o núcleo de A y además las funciones:

$L : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ y $R : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ son funciones de forma continuas y no crecientes con las siguientes propiedades:

$$L(0) = R(0) = 1$$

$$L(1) = R(1) = 0$$

Se llama a este número difuso A intervalo difuso $[a, b]$ y se denota como: $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$.

El soporte de A es el intervalo abierto $(a - \alpha, b + \beta)$.

Definición 12 (Número cuasidifuso de tipo LR). Cualquier número cuasidifuso puede ser representado mediante la función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\frac{(a-x)}{\alpha} & ; \text{si } (a - \alpha) \leq x < a \\ 1 & ; \text{si } a \leq x \leq b \\ R\frac{(x-b)}{\beta} & ; \text{si } b < x \leq (b + \beta) \end{cases}$$

donde el intervalo $[a, b]$ es el pico o núcleo de A y además las funciones: $L : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ y $R : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ son funciones de forma continuas y no crecientes con las siguientes propiedades:

$$L(0) = R(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$$

Si A es un número difuso de tipo LR y $a = b$ entonces se escribe simplemente $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ y se dice que A es un número difuso cuasitriangular. En particular si $L(x) = R(x) = 1 - x$ en lugar de escribir $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$, simplemente se escribe $A = (a, b, \alpha, \beta)$.

Definición 13. Sea A un número difuso. Si el soporte de A , $supp(A) = \{x_0\}$, entonces A se denomina punto difuso y se denota por $A = x_0$

Si A es un punto difuso, entonces $[A]^\alpha = [x_0, x_0] = \{x_0\}, \forall \alpha \in [0, 1]$

(Ver Anexo C)

1.4.3. Operaciones con Subconjuntos Borrosos

Se exponen a continuación de forma resumida algunas operaciones sobre conjuntos difusos o borrosos.

Definición 14. Sean A y B subconjuntos difusos de un universo U . Se dice que A es un subconjunto de B en el sentido difuso y se denota $A \subseteq B$ si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. (Ver Anexo C)

Definición 15. El conjunto difuso vacío de un universo U se define como el subconjunto difuso $\emptyset$ de U , tal que $\emptyset(x) = 0 \quad \forall x \in U$

Definición 16. El mayor conjunto difuso en U , llamado conjunto universal difuso de U y denotado por 1_U , se define por $1_U(x) = 1 \quad \forall x \in U$. (Ver Anexo C)

Definición 17. La función de pertenencia de la intersección de A y B se define como:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \forall x \in U$$

(Ver Anexo C)

Definición 18. La función de pertenencia de la unión de A y B se define como:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \forall x \in U$$

(Ver Anexo C)

Definición 19. El complemento de A , denotado como $\bar{A}$ se define por:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U$$

Se satisfacen también las Leyes de Morgan

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Las operaciones presentadas se han definido siguiendo las propuestas de Zadeh. (Dubois & Prade, 1985) sugieren que existe consenso en cuanto al uso de las normas y conormas triangulares para representar los operadores lógicos difusos “and” y “or”.

1.5. Programación Lineal Difusa

La Programación Bajo Incertidumbre aparece en los trabajos pioneros de (Beale, 1955), (Bellman, 1957), (Zadeh, 1965b) (Bellman & Zadeh, 1970), (Charnes & Cooper, 1959), (Dantzig, 1955) y (Tintner, 1955). Su desarrollo ha sido vertiginoso, no obstante estos esfuerzos, a las puertas del siglo XXI Dantzig consideraba a la Programación Bajo Incertidumbre como uno de los principales problemas abiertos de la optimización (Horner, 1999). Algunas variantes de filosofías de modelación dentro de este campo incluyen: minimización de la expectación, minimización de la desviación de las metas, minimización del costo máximo y optimización sobre restricciones suaves. Entre los enfoques principales para abordar la incertidumbre, se encuentran: la Programación Estocástica (Modelos de Recursos, Programación Estocástica Robusta y Modelos Probabilísticos), Programación Difusa (Programación Flexible y Posibilista) y la Programación Estocástica Dinámica.

Un interés de la investigación de operaciones está en el problema de la programación lineal con incertidumbre, lo cual fue probablemente iniciado por (Dantzig, 1955). Desde ese momento, han existido muchos artículos sobre el problema de la programación lineal difusa. Varios enfoques de la programación lineal difusa, que pueden encontrarse en la literatura, pudieran caracterizarse con un rasgo común: el uso de los conjuntos difusos. Se parte de un problema de programación lineal difusa, el cual es entonces transformado a un problema especial de la programación lineal, y es estudiado y resuelto con las herramientas y la tecnología de la programación lineal clásica (Cemerkova & Ramik, 2001).

El Modelo General de Programación Lineal Difusa (PLD) se escribiría como:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{min} \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\
 & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \lesssim \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

donde $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ representan los coeficientes económicos, los coeficientes de las restricciones y los términos independientes respectivamente, todos con naturaleza difusa. El término $\tilde{min}$ refiere que el objetivo del modelo es borroso, al igual que $\lesssim$ caracteriza a una relación difusa.

Rescribiendo 3.2.1 en función de 1.5.1 se tiene el modelo general de PLD para un problema de dieta.

$\tilde{c}_j$: costo borroso del alimento $j, j \in J = \{1, \dots, n\}$

x_j : cantidad de alimento j a comprar, $j \in J = \{1, \dots, n\}$

$\tilde{a}_{ij}$: cantidad borrosa del nutriente i en el alimento $j, i \in I = \{1, \dots, m\}, j \in J = \{1, \dots, n\}$

$\tilde{b}_i$: cantidad mínima borrosa del nutriente i requerida, $i \in I = \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{min} \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\
 & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \gtrsim \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

En la práctica la mayoría de los problemas de dieta donde existe mayor incertidumbre o vaguedad en los datos es en los términos independientes, o sea, los requerimientos mínimos. Según (Niquín, Vergara, & Verdegay, 2006) de manera general casi nunca los expertos coinciden en establecer los requerimientos mínimos de los nutrientes. Para poder desarrollar toda la teoría que continúa, en lo adelante se trabajará el siguiente tipo de problema de PLD:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

1.5.1. Métodos de Solución para problemas de PLD

Método de Verdegay

Según Verdegay (Cadenas, Pelta, Pelta, & Verdegay, 2004), (Niquín *et al.*, 2006) y (Lai & Hwang, 1993a) se debe considerar el problema 1.5.3 con una función de pertenencia lineal para los números difusos como sigue:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & ; si (Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \frac{[(Ax)_i - b_i]}{t_i} & ; si b_i < (Ax)_i < b_i + t_i \\ 0 & ; si (Ax)_i \geq b_i + t_i \end{cases}$$

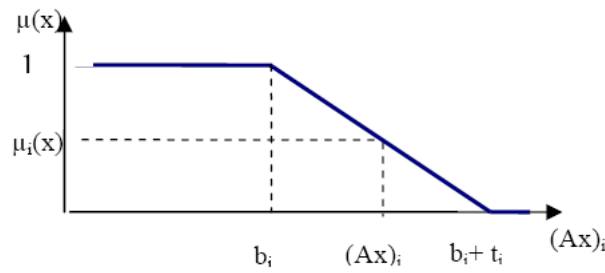


Figura 1.1: Función de Pertenencia Seccionalmente Lineal.

Empleando el concepto de α -cortes, demuestra que el problema 1.5.3 es equivalente a 1.5.4

$$\begin{aligned} &Max \quad cx \\ &s.a : x \in [A]^\alpha \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

donde $[A]^\alpha = \{x \in R^n / \mu_i(x) \geq \alpha, \forall i, x \geq 0\}$, $\alpha = \min\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, m}$, con α_i grados de aceptación permisibles fijados a priori con $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, m$.

Entonces 1.5.4 se transforma en un problema de programación lineal paramétrica:

$$\begin{aligned} &Max \quad cx \\ &s.a : (Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)t_i, \forall i \\ &\quad x \geq 0, \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Si $x(\alpha)$ es la solución paramétrica óptima de 1.5.5, la solución difusa para 1.5.4 estaría dada por el conjunto difuso denotado por $\{x(\alpha), \alpha\}$.

Los resultados se pueden mostrar en la Tabla 1.1.

α	$Z^*(\alpha)$	Recursos Utilizados			
		b_1	b_i	$\dots$	b_m
0.1					
0.2					
...					
0.9					
1.0					

Tabla 1.1: Resultados

Método de Zimmermann

En este caso Zimmermann (Zimmermann, 1978) (Lai & Hwang, 1993a)(Cadenas & Verdegay, 1999) considera la función objetivo como una meta difusa, con meta b_0 y tolerancia t_0 que son dadas por el decisor. Luego 1.5.3 se convierte en:

Hallar x

$$s.a : \quad cx \gtrsim b_0 \quad (1.5.6)$$

$$(Ax)_i \lesssim b_i \quad \forall i$$

$$x \geq 0$$

donde las restricciones difusas están definidas por las funciones de pertenencia μ_0 (ver figura 1.2) y μ_i (ver figura 1.1) respectivamente.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; si \quad cx \geq b_0 \\ 1 - \frac{(b_0 - cx)}{t_0} & ; si \quad b_0 - t_0 < cx < b_0 \\ 0 & ; si \quad cx \leq b_0 - t_0 \end{cases}$$

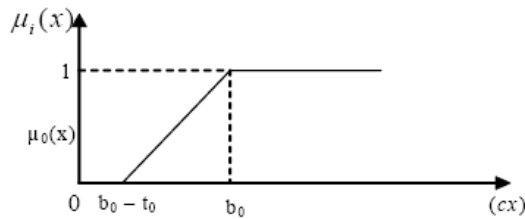


Figura 1.2: Función de Pertenencia de la Meta Difusa.

Utilizando el operador $\max - \min$ de Bellman y Zadeh, la solución para 1.5.6 se puede obtener maximizando μ_D , es decir, resolviendo: $\text{Max}\{\min[\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]\}$ donde μ_D es la función de pertenencia del espacio decisión D, dado por: $\mu_D = \min(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$. Si $\mu_D = \alpha$, entonces el modelo 1.5.6 vía 1.5.7 es equivalente a:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.a :} \quad & \mu_0(x) = 1 - \frac{(b_0 - cx)}{t_0} \geq \alpha \\ & \mu_i(x) = 1 - \frac{[(Ax)_i - b_i]}{t_i} \geq \alpha \quad i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0 \quad , \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.a :} \quad & cx \geq b_0 - (1 - \alpha)t_0 \\ & (Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)t_i \quad \forall i \\ & x \geq 0 \quad , \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Método de Werners

Werners (Werners, 1987) (Cadenas & Verdegay, 1999), propuso que la función objetivo del modelo 1.5.3, se considere difuso, como efecto de las restricciones difusas. Se asume que las tolerancias $t_i \forall i$ son dadas. Entonces para resolver el problema con restricciones difusas, propone primero definir la meta como $b_0 = Z^1$ y la tolerancia como $t_0 = Z^0 - Z^1$, donde Z^0 y Z^1 se determinan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} z^0 = \max \quad & cx \\ \text{s.a :} \quad & (Ax)_i \leq b_i \quad \forall i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

$$\begin{aligned} z^1 = \max \quad & cx \\ \text{s.a :} \quad & (Ax)_i \leq b_i + t_i \quad \forall i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Con estos valores se puede construir la siguiente función de pertenencia lineal, continua y no decreciente para la función objetivo de 1.5.3. Las restricciones difusas se mantienen como en el método de Verdegay.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; si \ cx \geq Z^1 \\ 1 - \frac{(Z^1 - cx)}{(Z^1 - Z^0)} & ; si \ Z^0 < cx < Z^1 \\ 0 & ; si \ cx \leq Z^0 \end{cases}$$

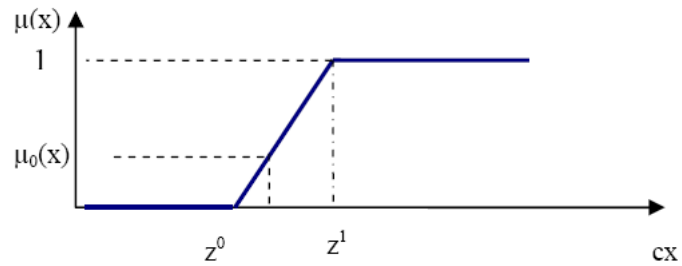


Figura 1.3: Función de Pertenencia de la Función Objetivo según Werners.

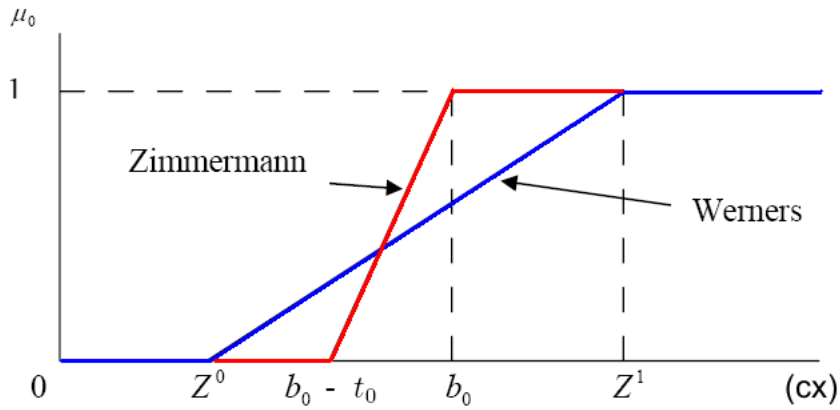


Figura 1.4: Función de Pertenencia de la Función Objetivo según Werners y Zimmermann.

Al igual que Zimmermann Werners utiliza el operador $\max - \min$, para obtener la decisión óptima, lo cual conduce al siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \alpha \\
 & s.a : \quad \mu_0 \geq \alpha \\
 & \quad \mu_i \leq \alpha \quad \forall i \\
 & \quad x \geq 0 \quad , \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \alpha \\
 & s.a : \quad cx \geq b_0 - (1 - \alpha)t_0 \\
 & \quad (Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)t_i \quad \forall i \\
 & \quad x \geq 0 \quad , \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

1.6. Conclusiones parciales

El problema de Dieta desde su variante clásica 3.2.1 resulta inadecuado cuando existe vaguedad en el valor de algunos de los coeficientes. Es preciso entonces emplear la PLD como una alternativa (1.5.1). Los métodos de solución presentados en el epígrafe 1.5.1 son la base para la solución de problemas de PLD, ya que proporcionan por sus características, un abanico de soluciones.

Capítulo 2

Solución de un Problema Difuso de Dieta Animal

2.1. Introducción

Para determinar la dieta óptima en presencia de vaguedad, es necesario primeramente definir de forma general un modelo de PLD acorde y luego, modificar en caso necesario, los métodos de solución para que tengan en cuenta una mayor variedad de situaciones que en la práctica se le pueden presentar al investigador.

Este capítulo resume los aspectos necesarios para la solución de problemas de dieta animal desde el punto de vista teórico. Se presentan las adecuaciones necesarias a los métodos de Verdegay, Zimmermann y Werners para considerar números difusos y cuasidifusos de tipo LR.

2.2. Planteamiento de un modelo de PL para la dieta animal

El problema clásico de PL para un problema de dieta, se puede resumir como: determinar las cantidades óptimas de raciones de alimentos que se deben adquirir para satisfacer una cantidad mínima de nutrientes y minimizando los costos de adquisición.

x_j : cantidad de alimento j a incluir en la dieta

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde c_j : costo unitario por la adquisición de la ración del alimento “j”, a_{ij} : aporte del nutriente “i” contenido en una ración, b_i : requerimiento mínimo del nutriente “i”

Este modelo debe ser redefinido para el caso donde se trate cría intensiva de ganado bufalino, donde la dieta principal del animal resultan los pastos y forrajes. Para el caso que se estudia en esta investigación se da a continuación ese modelo general.

2.3. Modelo de Dieta para el Ganado Bufalino

El Problema de Dieta para el Ganado Bufalino (PDB) consiste en determinar la combinación más económica de pastos a sembrar para utilizarlos en la alimentación del ganado bufalino. De forma tal que se satisfagan las necesidades nutricionales, el mismo puede ser escrito como:

Consideremos a $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ como el conjunto de los Pastos y a $\Gamma = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ como el conjunto de los Nutrientes, las variables serían:

c_j : costo de siembra de una *ha* del pasto j , $j \in J = \{1, \dots, n\}$

x_j : cantidad de *ha* pasto j a sembrar, $j \in J = \{1, \dots, n\}$

a_{ij} : cantidad del nutriente i contenido en una *ha* de pasto j , $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$

b_i^- : cantidad mínima del nutriente i requerido, $i \in I = \{1, \dots, m\}$

b_i^+ : cantidad máxima del nutriente i requerido, $i \in I = \{1, \dots, m\}$

A : Área máxima en *ha* disponible para la siembra de pastos.

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
& b_i^- \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i^+ \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_j \leq A \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

2.4. Determinación de los Coeficientes del modelo

Los coeficientes del modelo se dividen en tres grupos: económicos, tecnológicos y términos independientes. La representatividad del modelo con la realidad depende en gran medida de cuan fiables (adecuados) sean estos coeficientes.

2.4.1. Determinación de los coeficientes económicos

Para el cálculo del coeficiente económico se parte del análisis por partida de los costos predeterminados para el fomento de cada uno de los pastos. Específicamente en la ficha de costos se consideran:

- Materia prima y Materiales. Incluye semillas, preparación del suelo, combustible y lubricante
- Gastos de la Fuerza de Trabajo. Se consideran los salarios, la contribución a la seguridad social y la seguridad social a corto plazo.
- Otros Gastos Directos.

2.4.2. Determinación de los coeficientes tecnológicos

Para calcular cada a_{ij} se tienen en cuenta:

- La cantidad¹ de nutriente i presente en 1 kg de Materia Seca de cada tipo de Pasto j
- El rendimiento por ha de cada tipo de pasto j de acuerdo a sus características y según la temporada del año, el riego y la fertilización.

Así en a_{11} donde $i = 1$ representa el Nutriente “Proteína Bruta”(PB) por ha de caña $j = 1$, se obtiene:

$$\left(\frac{kg \text{ de } PB}{kg \text{ de Materia Seca de caña}} \right) \left(\frac{Rendimiento \text{ en } kg \text{ de Materia Seca de caña}}{ha \text{ de caña}} \right) = \frac{kg \text{ de } PB}{ha \text{ de caña}}$$

¹En gramos, kilogramos o megacalorías según sea la unidad de medida del nutriente

2.4.3. Determinación de los (b_i) Términos Independientes

Los valores de requerimientos mínimos de cada nutriente i deben ser determinados con la ayuda de expertos. En el modelo se considera que b_i^- , b_i^+ están bien definidos por expertos, pero casi nunca coinciden al establecer los requerimientos mínimos y máximos de los nutrientes.

Si se considera que b_i^- es la cantidad mínima y b_i^+ es su correspondiente valor máximo, pues la ganancia en peso corporal aumenta a medida que la dosis del nutriente se incrementa, pero existe un límite b_i (nutritivo) en la dosificación a partir del cual si se incrementa entonces el peso decrece hasta que si se sobrepasa b_i^+ , la dosis tiene un efecto perjudicial en el animal.

Teniendo en cuenta esto se puede establecer niveles de aceptación para la dosis del nutriente, siendo el de mayor aceptación b_i . Este comportamiento se refleja en la figura siguiente: De lo

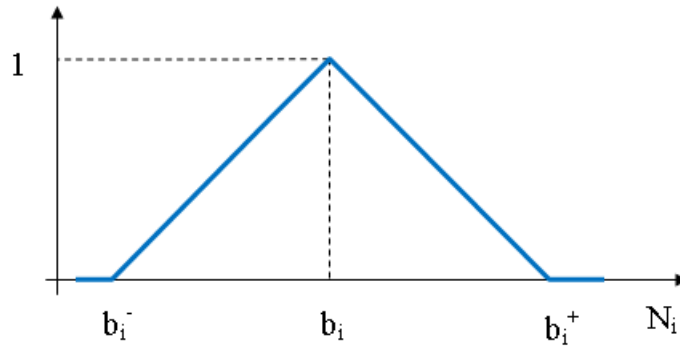


Figura 2.1: Comportamiento del peso corporal respecto al suministro del Nutriente n_i

anterior resulta claro que la utilización de un número triangular difuso o trapezoidal difuso se considere acorde. Luego el requerimiento nutricional n_i se puede expresar como un número difuso triangular $\tilde{B}_{Ti} = (b_i^-, b_i, b_i^+)$ con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu(n_i) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - n_i]}{t_i^-} & ; \text{si } b_i - t_i^- \leq n_i \leq b_i \\ 1 - \frac{[n_i - b_i]}{t_i^+} & ; \text{si } b_i < n_i \leq b_i + t_i^+ \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde b_i es el valor deseado del nutriente, $t_i^- = b_i - b_i^-$ y $t_i^+ = b_i^+ - b_i$ son los valores de tolerancias mínima y máxima permisibles para el nutriente i

O también para el nutriente n_i emplear un número trapezoidal difuso $\tilde{B}_{Zi} = (b_i^-, b_{iA}, b_{iB}, b_i^+)$ con

función:

$$\mu(n_i) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_{iA} - n_i]}{t_i^-} & ; \text{si } b_{iA} - t_i^- \leq n_i \leq b_{iA} \\ 1 & ; \text{si } b_{iA} < n_i \leq b_{iB} \\ 1 - \frac{[n_i - b_{iB}]}{t_i^+} & ; \text{si } b_{iB} < n_i \leq b_{iB} + t_i^+ \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde b_{iA} y b_{iB} representan los límites del rango de valores deseados, $t_i^- = b_{iA} - b_i^-$ y $t_i^+ = b_i^+ - b_{iB}$ son los valores de tolerancias mínima y máxima permisibles para el nutriente i

Por lo tanto cualquier número difuso o cuasidifuso de tipo LR, de los cuales los anteriormente mencionados son casos particulares pueden ser empleados. Téngase en cuenta que un número difuso o cuasidifuso LR se caracteriza por tener una función de pertenencia con rama izquierda ascendente y una rama derecha descendente.

Caso aparte merece que en la práctica puede ser frecuente que sea muy difícil para los expertos establecer el valor de b_i^+ , por lo tanto la posibilidad de emplear números LR deja de considerarse. No obstante un número difuso con Rama Izquierda Ascendente (RIA) $\tilde{B}_{RIAi} = (b_i^-, b_i)$ (ver Figura 2.2) puede ser empleado satisfactoriamente y su función de pertenencia sería:

$$\mu(n_i) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - n_i]}{t_i^-} & ; \text{si } b_i - t_i^- \leq n_i < b_i \\ 1 & ; \text{si } n_i \geq b_i \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

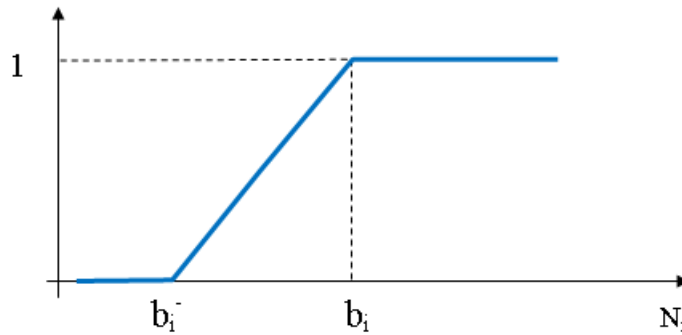


Figura 2.2: Comportamiento del peso corporal respecto al suministro del Nutriente n_i

donde b_i es el valor deseado del nutriente y $t_i^- = b_i - b_i^-$ es el valor de tolerancia mínima

permisible para el nutriente i .

Para resolver el PDB tenemos los tres métodos presentados en el capítulo anterior. Los cuales permiten optimizar problemas de PLD con términos independientes difusos. Como ya se dijo cualquier número difuso o cuasidifuso de tipo LR o uno de Rama Izquierda Ascendente puede ser empleado para caracterizar a estos “lados derechos”. Esta resulta la razón por la cual es necesario antes de emplear los métodos, adecuarlos a las nuevas situaciones.

2.5. Adecuaciones a los métodos de solución

Los métodos de Verdegay, Zimmermann y Werners deben ser modificados para poder emplear números difusos con funciones de pertenencia distintas a las que presentan sus autores. Cada uno de estos métodos emplean en la solución del problema de PLD una desfusificación para así poder utilizar finalmente PLP o PL. Por lo tanto el concepto de Región Factible resulta vital para cada uno de ellos. ¿Cómo queda entonces una Region Factible para un problema de PLD ?

2.5.1. Región Factible de un problema PLD

Un problema de Programación Lineal Difusa con restricciones difusas se tiene que la región factible es un conjunto difuso, definido por una función de pertenencia. Este conjunto se puede considerar como una extensión de la región factible del problema clásico de PL.

Como la región factible en PL es la intersección de los planos o hiperplanos que representan las restricciones, cada uno de estos conjuntos puede extenderse hacia un conjunto borroso y la intersección de estos determina la región factible difusa, cuya función de pertenencia puede ser obtenida mediante la intersección de conjuntos difusos.

Considere a b_i como el término independiente de una de las restricciones de tipo $\leq$ del problema, b_i es la cantidad deseable, no obstante se acepta que el lado izquierdo sea mayor que este valor hasta un máximo de $b_i + t_i$, donde t_i es la tolerancia. Por lo tanto la desigualdad anterior representa a un conjunto difuso con función de pertenencia $\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, $i \in M = \{1, \dots, m\}$. Se tiene entonces que para cada restricción i , dado la tolerancia t_i , a cada punto x que es un vector n dimensional, se le asocia un número $\mu_i \in [0, 1]$ que se denomina grado de cumplimiento de la

restricción i definida por:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & ; si \ (Ax)_i < b_i \\ f_i((Ax)_i) & ; si \ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i \\ 0 & ; si \ (Ax)_i > b_i + t_i \end{cases}$$

donde $(Ax)_i$ es el lado izquierdo de la restricción i , $f_i((Ax)_i) \in [0, 1]$, es una función continua y monótona no creciente. Luego la función de pertenencia del conjunto factible difuso para un problema como el 1.5.3 del Capítulo I sería:

$$\mu(x) = \min_{i=1, \dots, m} \{\mu_i(x)\}$$

2.5.2. Adecuaciones para números difusos triangulares, trapezoidales y de Rama Izquierda Ascendente

Método de Verdegay

Si retomamos el problema 1.5.4 del Capítulo I dado por Verdegay.

$$\begin{aligned} &Max \ cx \\ &s.a : x \in [X]^\alpha \end{aligned}$$

donde $[X]^\alpha = \{x \in R^n / \mu_i(x) \geq \alpha, \forall i, x \geq 0, \alpha = \min\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, m}, \text{ con } \alpha_i \text{ grados de aceptación permisibles fijados a priori con } 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, m.$

Este modelo permite encontrar la solución al problema con términos independientes difusos. Luego el conjunto de soluciones factibles estará formado por la intersección de varios conjuntos difusos representados por los α_i – cortes, es decir, $\alpha = \min\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, m}$. Está claro que si la función de pertenencia seccionalmente lineal que caracteriza los términos independientes que se consideran números difusos varía, con respecto a la propuesta por Verdegay, entonces se debe verificar como queda el conjunto difuso de soluciones factibles. Si se tomaran números difusos triangulares, la función de pertenencia para el problema sería:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - (Ax)_i]}{t_i^-} & ; si \ b_i - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \frac{[(Ax)_i - b_i]}{t_i^+} & ; si \ b_i < (Ax)_i \leq b_i + t_i^+ \\ 0 & ; en \ otro \ caso \end{cases}$$

y se tendría la siguiente situación (ver figura 2.3) en los α – cortes:

$$b_i - t_i^-(1 - \alpha) \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i^+(1 - \alpha)$$

Si entonces consideramos a α como un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, que significa el grado de aceptación.

Se puede escribir como un problema de Programación Lineal Paramétrica (PLP) como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sa : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i + t_i^+(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i - t_i^-(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

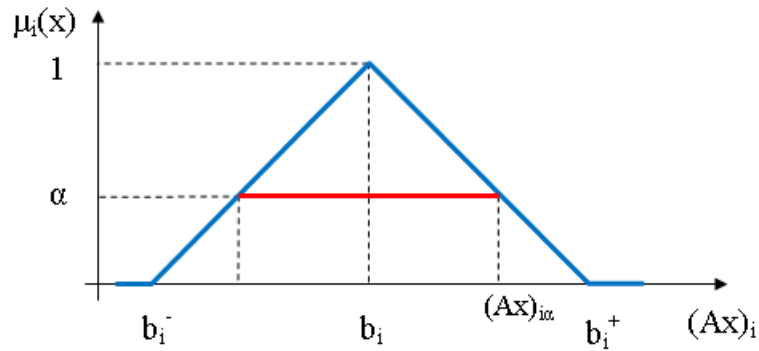


Figura 2.3: Función de Pertenencia para la restricción y su α – corte.

Para el caso de emplear un número trapezoidal difuso (ver figura 2.4) se tendrá la siguiente función de pertenencia para el problema:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - (Ax)_i]}{t_i^-} & ; \text{si } b_i - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \frac{[(Ax)_i - b_i]}{t_i^+} & ; \text{si } b_i < (Ax)_i \leq b_i + t_i^+ \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los α – cortes quedarían:

$$b_{iA} - t_i^-(1 - \alpha) \leq (Ax)_i \leq b_{iB} + t_i^+(1 - \alpha)$$

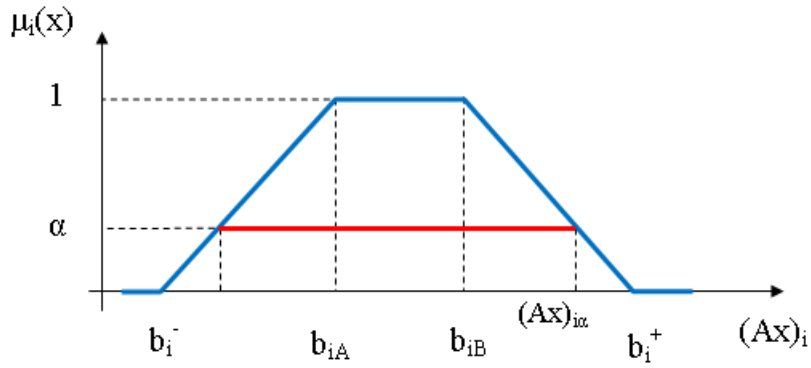


Figura 2.4: Función de Pertenencia para la restricción y su α - corte.

Y el problema de PLP a resolver sería:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{sa : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_{iB} + t_i^+ (1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_{iA} - t_i^- (1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Para el caso de emplear un número difuso tipo RIA (ver figura 2.5) la función de pertenencia para el problema se expresa como:

$$\mu(n_i) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - (Ax)_i]}{t_i^-} & ; \text{ si } b_i - t_i^- \leq (Ax)_i < b_i \\ 1 & ; \text{ si } (Ax)_i \geq b_i \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Los α - cortes quedarían:

$$b_i - t_i^- (1 - \alpha) \leq (Ax)_i$$

Y el problema de PLP a resolver sería:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{sa : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i - t_i^- (1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

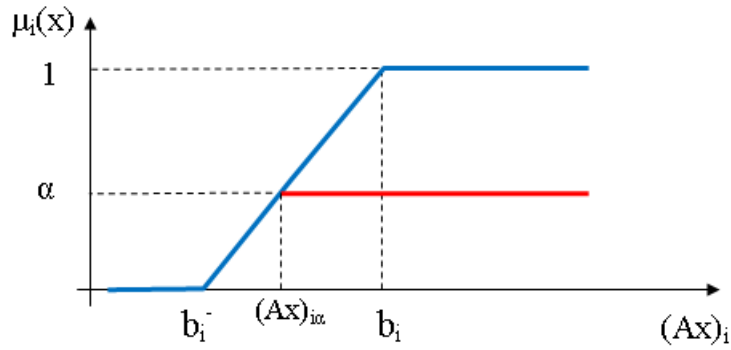


Figura 2.5: Función de Pertenencia para la restricción y su α – corte.

Método de Zimmermann

Recordando que Zimmermann considera la función objetivo como una meta difusa b_0 y tolerancia t_0 que son dadas por el decisor. Realizando las adecuaciones para números triangulares difusos, se tiene que el modelo 1.5.6 del Capítulo I se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & \text{Hallar } x_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & s.a : \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 \\
 & \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

El modelo original ha sufrido una variación en la primera restricción donde el signo $\geq$ ha sido cambiado por $\leq$ dado que el problema de dieta trata de minimizar su función objetivo. Por lo tanto la función de pertenencia propuesta por Zimmermann para el la meta difusa en el problema se sustituye por (ver Figura 2.6):

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; si \ c_j x_j \leq b_0 \\ 1 - \frac{[cx-b_0]}{t_0} & ; si \ b_0 < cx \leq b_0 + t_0 \\ 0 & ; en \ otro \ caso \end{cases}$$

El resto de las restricciones tienen la misma función de pertenencia que las del problema de Verdegay. Utilizando el operador $max - min$ de Bellman y Zadeh, Zimmermann plantea que el

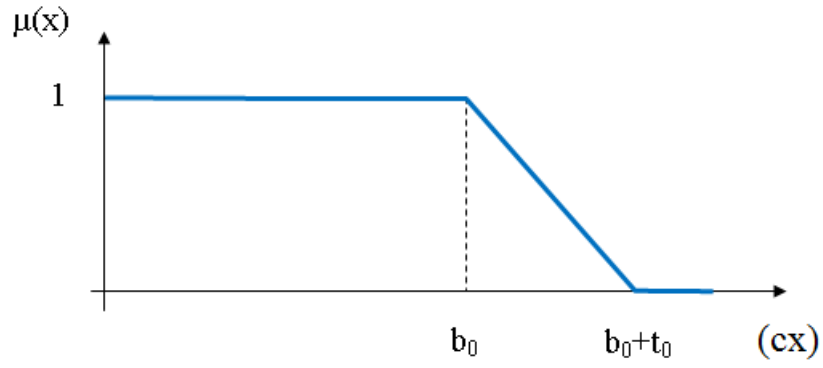


Figura 2.6: Función de Pertenencia para la la meta difusa.

problema se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 & \text{s.a : } \mu_0 \geq \alpha \\
 & \mu(n_i) \geq \alpha \quad i = 1, \dots, m \\
 & \forall i \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Formalizando con la notación empleada en el método de Verdegay se obtiene un modelo de Programación Lineal (PL):

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 & \text{s.a : } \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + t_i(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - t_i(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1] \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

La resolución del problema anterior proporciona una solución única dada por un valor de α máximo

Si se empleara un número trapezoidal difuso para los términos independientes en las restricciones,

el modelo matemático de PL a resolver sería:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 \text{s.a : } & \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_{iB} + t_i(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_{iA} - t_i(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1] \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

En el caso de un número tipo RIA el modelo de PL es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 \text{s.a : } & \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - t_i(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1] \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Metodo de Werners

Como ya se dijo Werners propone que la función del modelo se considere difusa como efecto de las restricciones difusas. Asume que las tolerancias $t_i \quad \forall i$ son dadas y propone determinar la meta b_0 a partir de Z^1 y la tolerancia t_0 mediante $Z^0 - Z^1$.

El modelo para Z^0 toma un problema de PL donde el valor del término independiente de las restricciones b_i no tiene un rango de tolerancia. Mas en el caso de Z^1 el modelo de PL tiene en cuenta que b_i puede experimentar una variación.

Si se utiliza $\mu(x) \geq \alpha$ tendríamos entonces en los α - cortes de cada restricción i (considerando números triangulares difusos) la siguiente situación:

$$b_i - t_i^-(1 - \alpha) \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i^+(1 - \alpha)$$

Para obtener aquí cada uno de los modelos de PL, Z^0 y Z^1 , el parámetro α no podría estar presente.

Luego si $\alpha = 1$, se tiene que:

$$b_i \leq (Ax)_i \leq b_i$$

o sea $(Ax)_i = b_i$. Entonces si $\alpha = 0$ se tiene:

$$b_i - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i^+$$

Adaptando cada situación a su modelo ² se llega a:

$$\begin{aligned}
 Z^0 &= \text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.a. : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

y

$$\begin{aligned}
 Z^1 &= \text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.a. : } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i + t_i^+ \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i - t_i^- \quad i = 1, \dots, m \\
 x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

La función de pertenencia (ver Figura 2.7) de la meta difusa asociada a la función objetivo sería:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{si } cx \leq Z^1 \\ 1 - \frac{[cx - Z^1]}{[Z^0 - Z^1]} & ; \text{si } Z^1 < cx < Z^0 \\ 0 & ; \text{si } cx \geq Z^0 \end{cases}$$

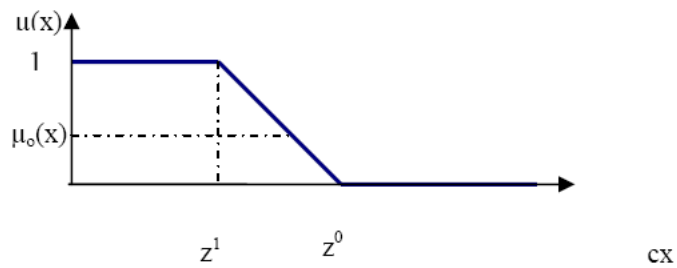


Figura 2.7: Función de Pertenencia para la la meta difusa

Si tenemos en cuenta que $Z^1 = b_0$ y $t_0 = Z^0 - Z^1$, se reescribe la función de pertenencia anterior

²Si se analizan estos modelos se puede observar que en el método de Werners es posible encontrarse con problemas no factibles

como (ver figura: 2.8):

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; si \ cx \leq b_0 \\ 1 - \frac{[cx-b_0]}{[t_0]} & ; si \ b_0 < cx < b_0 + t_0 \\ 0 & ; si \ cx \geq b_0 + t_0 \end{cases}$$

Quedando la misma función de pertenencia de la función objetivo que en el método de Zimmermann.

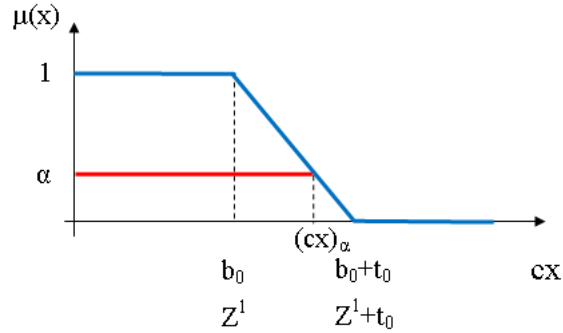


Figura 2.8: Función de Pertenencia para la la meta difusa y su α – corte

Para las restricciones las funciones de pertenencia son las mismas que en los métodos anteriores. Luego el problema a resolver según Werners sería:

$$\begin{aligned} &Max \ \alpha \\ &s.a : \ \mu_0(x) \geq \alpha \\ &\quad \mu_i(x) \geq \alpha \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \alpha \in [0, 1], \ x \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Empleando los α – cortes se puede llegar al modelo de PL siguiente:

$$\begin{aligned} &Max \ \alpha \\ &sa : \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\ &\quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + t_i^+(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - t_i^-(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Si se empleara un número trapezoidal difuso para los términos independientes en las restricciones se tiene que:

$$b_{iA} - t_i^-(1 - \alpha) \leq (Ax)_i \leq b_{iB} + t_i^+(1 - \alpha)$$

Luego si $\alpha = 1$, se tiene que:

$$b_{iA} \leq (Ax)_i \leq b_{iB}$$

Entonces si $\alpha = 0$ se tiene:

$$b_{iA} - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_{iB} + t_i^+$$

Adaptando cada situación a su modelo se llega a:

$$\begin{aligned} Z^0 = \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a :} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_{iB} \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_{iA} \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

y

$$\begin{aligned} Z^1 = \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a :} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_{iB} + t_i^+ \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_{iA} - t_i^- \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Finalmente el modelo de PL a resolver sería:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 & \text{s.a : } \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_{iB} + t_i^+(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_{iA} - t_i^-(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Empleando un número difuso tipo RIA para los términos independientes en las restricciones se tiene que:

$$b_i - t_i^-(1 - \alpha) \leq (Ax)_i$$

Luego si $\alpha = 1$ queda:

$$b_i \leq (Ax)_i$$

Entonces si $\alpha = 0$ se obtiene:

$$b_i - t_i^- \leq (Ax)_i$$

Adaptando cada situación a su modelo se llega a:

$$\begin{aligned}
 Z^0 &= \text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.a : } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

y

$$\begin{aligned}
 Z^1 &= \text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.a : } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - t_i^- \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Finalmente el modelo de PL a resolver sería:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \alpha \\
 \text{sa : } & \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq b_0 + t_0(1 - \alpha) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - t_i^-(1 - \alpha) \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0 \quad \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

2.5.3. Adecuaciones para números cuasidifusos de tipo LR

Números LR con forma Gaussiana

En algunas situaciones reales es posible encontrarse con el caso de que para caracterizar algún término independiente del modelo de dieta se emplee un número difuso de tipo LR. En (Hanss & Willner, 199?) se plantea una aproximación si se tiene valores de mediciones del valor de un parámetro, cuya función de pertenencia tenga forma gaussiana:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.5.19}$$

Un número difuso con forma gaussiana, es realmente un número cuasidifuso, ya que su función de pertenencia es continua y cumple la condición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

Por esa razón es importante que los valores de la variable $x \in \mathbb{R}^+$. Ya que los mismos tendrán un significado práctico para el cual los valores negativos serían inapropiados. Entonces puede ser aproximado mediante un número triangular difuso con función de pertenencia $\mu_t(x)$ postulando

$$\mu_t(m) = \mu(m) = 1$$

luego $\mu_t(x)$ se puede escribir como sigue:

$$\mu_t(x) = \begin{cases} 1 - \frac{[m-x]}{\delta} & ; \text{si } m - \delta \leq x \leq m \\ 1 - \frac{[x-m]}{\delta} & ; \text{si } m < x \leq m + \delta \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\delta = \sqrt{2\pi}\sigma$

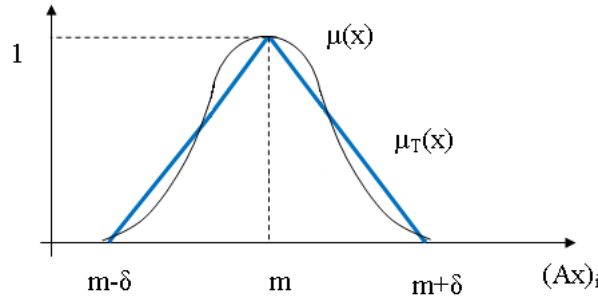


Figura 2.9: Función de pertenencia $\mu(x)$ del número cuasidifuso de forma gaussiana y su aproximación lineal mediante el número triangular difuso con función de pertenencia $\mu_t(x)$

Números LR con forma “ceranos a”

También se pueden tener números cuasidifusos LR *cercanos a m*, con función de pertenencia:

$$\mu(x) = e^{-\beta(x-m)^2} \quad (2.5.20)$$

donde m es el valor central y $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ es un factor de forma. De igual manera que en el número LR de forma gaussiana:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\beta(x-m)^2} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\beta(x-m)^2} = 0$$

Para realizar la aproximación a un número triangular difuso, bastaría con encontrar los interceptos con el eje de las abscisas. Está claro que esta función encuentra una asíntota en este eje. No obstante empleando el concepto de límite podemos obtener valores de x donde $\mu(x)$ sea muy pequeño. Para esto pasamos a despejar x en la función de pertenencia 2.5.20. Como se garantizan valores mayores que cero en ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln \mu(x) &= -\beta(x-m)^2 \\ (x-m)^2 &= -\frac{\ln \mu(x)}{\beta} \\ (x-m)^2 &= \frac{-\ln \mu(x)}{\beta} \\ x-m &= \pm \sqrt{\frac{-\ln \mu(x)}{\beta}} \\ x &= m \pm \sqrt{\frac{-\ln \mu(x)}{\beta}} \end{aligned}$$

$$x_1 = m + \sqrt{\frac{-\ln \mu(x)}{\beta}} \quad y \quad x_2 = m - \sqrt{\frac{-\ln \mu(x)}{\beta}}$$

Como $0 < \mu(x) \leq 1$, entonces $\ln \mu(x) < 0$.

Para el caso de $\mu(x) = 1$ tenemos:

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{\frac{-\ln 1}{\beta}} = m$$

Entonces la aproximación empleando un número triangular difuso sería:

Postulando

$$\mu_t(m) = \mu(m) = 1$$

Se tiene:

$$\mu_t(x) = \begin{cases} 1 - \frac{[m-x]}{\delta} & ; si \ m - \delta \leq x \leq m \\ 1 - \frac{[x-m]}{\delta} & ; si \ m < x \leq m + \delta \\ 0 & ; en \ otro \ caso \end{cases}$$

donde $\delta = \sqrt{\frac{-\ln \mu(x)}{\beta}}$, dado que como se conoce, la función es simétrica con respecto al eje x. La figura 2.9 ilustra gráficamente de igual manera que en el caso anterior la aproximación del número cuasidifuso mediante el número triangular difuso.

Luego de realizar la aproximación se puede entonces proceder a resolver el problema por cualquiera de los métodos con adecuaciones, anteriormente relacionados.

2.6. Algoritmo Interactivo

Un Algoritmo Interactivo donde se empleen los métodos anteriores puede resultar una herramienta importante para vincular al decisor con el proceso de solución del problema. (Cadenas & Jiménez, 1994) propone un algoritmo interactivo para problemas de PLD Multiobjetivos. Otros trabajos, con algoritmos y algunos de ellos con desarrollo de programas computacionales son (Chanas,

D.Kuchta, & Nowak, 1991), (Cadenas, 1993), (Rommelfanger, 1991),(Lai & Hwang, 1993b), (Czyzak & Slowinski, 1991), (Cadenas & Verdegay, 1995) y (Jimémenez, Arenas, Bilbao, & Rodríguez, 2007). La serie de pasos que se expone a continuación es una adaptación al algoritmo propuesto por Avello (Martínez, 2005).

Paso 1. Resolver el problema de programación lineal tradicional con el uso del método simplex y la solución óptima es presentada al decisor.

Paso 1.1. ¿Satisface la solución al decisor? Considerar los siguientes casos:

1. Si le satisface la solución, imprimir resultados y terminar.
2. Si existe algún recurso i que esté subutilizado, modificar el recurso b_i y volver al Paso 1.
3. Si existen términos independientes no precisos determinar el tipo de número difuso que lo caracterice e ir al Paso 2.
4. Si el objetivo pudiera ser considerado como impreciso, pasar al Paso 3.

Paso 2. Resolver mediante el Método de Verdegay. Presentar los resultados del análisis paramétrico al decisor.

Paso 2.1. ¿Satisface la solución al decisor? Considerar los siguientes casos:

1. Si le satisface la solución, imprimir resultados y terminar.
2. Si existe algún recurso i que esté subutilizado, modificar el recurso b_i y volver al Paso 2.
3. Si la tolerancia para algún recurso t_i pudiera mejorarse, entonces cambiar tolerancias al valor que desee y regresar al Paso 2.
4. Si el objetivo pudiera ser considerado como impreciso, pasar al Paso 3.

Paso 3. El decisor es consultado para asignar un objetivo (nivel de aspiración) b_0 y su tolerancia t_0 , para resolver el problema. Lo anterior se puede realizar también después de ver la Tabla de resultados del Paso 2. Si el decisor no esta en condiciones de brindar un objetivo b_0 y/o una tolerancia t_0 , ir al Paso 5, de lo contrario, si asigna b_0 y t_0 , ir al Paso 4

Paso 4. Resolver mediante el Método de Zimmermann. Presentar el resultado al decisor.

Paso 4.1. ¿Satisface la solución al decisor? Considerar los siguientes casos:

1. Si le satisface la solución, imprimir resultados y terminar.
2. Si el usuario ha reconocido mejor su objetivo y/o su tolerancia entonces pudiera cambiar el objetivo b_0 y/o la tolerancia t_0 y pasar al Paso 4.
3. Si es decisor desea que el algoritmo le proporcione un valor para b_0 y t_0 , ir al Paso 5.

Paso 5. Emplear el Método de Werners, presentar los resultados al decisor.

Paso 5.1. ¿Satisface la solución al decisor? Considerar los siguientes casos:

1. Si le satisface la solución, imprimir resultados y terminar.
2. Si el usuario ha reconocido mejor su objetivo y su tolerancia entonces pudiera cambiar ambos e ir al Paso 4.

2.7. Implementación en MATLAB®

El algoritmo interactivo planteado anteriormente resulta más útil al decisor si se implementa en una serie de instrucciones que automaticen el proceso de cálculo por cualquiera de los tres métodos que se han venido desarrollando. MATLAB resulta un paquete con grandes ventajas para lograr este objetivo. Resulta esta la razón principal por la cual se crean los ficheros de extensión .m, cuyo código se muestra completamente en el Anexo A. En términos generales se trata de pequeñas aplicaciones sobre MATLAB: Verde.m, Zimmer.m, Wern.m, Metodos.m y Menu.m. Esta última le permite al usuario seleccionar de una lista desplegable cual de los tres métodos estudiados (Verdegay, Zimmermann o Werners) desea emplear para solucionar el problema de PLD (ver Anexo B). En cada caso es necesario antes definir en el fichero data.mat los datos necesarios para los coeficientes del modelo.

Cuando se selecciona el método de Verdegay aparece una ventana que solicita al decisor el paso que desea emplear para realizar los α – cortes, que permite determinar cuántas iteraciones tendrá el cálculo, de forma tal que el parámetro α varíe en el intervalo $[0,1]$ (ver Anexo B). Otra figura del Anexo B muestra la ventana emergente cuando se opta por Zimmermann, preguntando al usuario cuáles valores tendrán la meta difusa, b_0 y t_0 , su tolerancia. Finalmente la última figura

resulta un “pantallazo” de la solución mediante Werners.

2.8. Conclusiones parciales

Queda formulado un PDB donde los términos independientes son considerados números difusos. Debido a la vaguedad que resulta cuando los expertos tratan de establecer los requerimientos mínimos de nutrientes para el Búfalo. De forma general queda planteado como determinar los diferentes coeficientes del PDB. Los métodos de Werdegay, Zimmermann y Werners fueron preparados para emplear números difusos triangulares, trapezoidales y RIA. Además se plantean aproximaciones mediante un número triangular difuso a dos números cuasidifusos de tipo LR para poder ser utilizados en los métodos anteriores. El Algoritmo Interactivo resume en una forma lógica una serie de pasos a seguir para resolver el Problema de Dieta Difuso, intercambiando constantemente con el decisor para refinar las soluciones. La implementación en MATLAB del algoritmo interactivo permite la automatización de la solución de un problema de PLD mediante los tres métodos desarrollados.

Capítulo 3

Caso Práctico: Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo

3.1. Introducción

La Empresa Pecuaria caso de estudio posee una serie de características propias que debe ser consideradas a la hora de definir un modelo matemático para la dieta. Este Capítulo se dedica a la aplicación, en un caso real, del Modelo de Dieta Difuso desarrollado en los capítulos anteriores. Se construye el modelo de PLD y se resuelve empleando MATLAB[®]. Una serie de gráficos explicativos resumen los resultados más importantes obtenidos por los diferentes métodos de solución. La Metodología Interactiva guía finalmente, el proceso de solución del problema de dieta para la empresa 1^{ra} de Mayo donde el decisor puede adecuar a su caso particular las soluciones encontradas.

3.2. Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo. Situación Actual

La Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo del municipio Aguada de Pasajeros de la Provincia Cienfuegos es desde hace varios años la encargada de concentrar la cría de Búfalos en el territorio cienfueguero. Con anterioridad la cría extensiva de Búfalos se encontraba diseminada en distintos emplazamientos a lo largo de la geografía de la provincia. Es por esta razón que el Ministerio de la Agricultura decide que la 1^{ra} de Mayo reunirá los animales e incrementará su población. Para

esto la dirección de la entidad se traza un plan a mediano plazo. El crecimiento planificado de 1^{ro} de Mayo se realizará mediante la creación de nuevas granjas. Por lo tanto los resultados de esta investigación se resumen a una Granja Tipo que luego podrá generalizarse al resto.

Debido al relativo poco tiempo que lleva desarrollándose en el país la cría extensiva de ganado bufalino, surgen una gran cantidad de dificultades a la hora de comenzar a desarrollar de forma satisfactoria la tarea. Entre los principales obstáculos se encuentra la dieta óptima para los animales que resulta incierta dada la escasez de estudios científicos que validen una selección y cantidad de alimentos a incluir.

El modelo de PLD para la dieta óptima del búfalo en la empresa queda como sigue:

x_{ij} : cantidad de pasto o forraje de tipo i a sembrar para alimentar a los búfalos de categoría j

$i \in I = \{\text{caña de azúcar, kingrass, guinea, pasto estrella, leucaena, morera}\}$

$j \in J = \{\text{bucarro, buñojo, bubilla, búfala, semental}\}$

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 c_i x_{ij} \quad (\text{Costo Total por la siembra}) \\
 & \sum_{i=1}^6 a_{ki} x_{ij} \geq b_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, 4; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\
 & \sum_{j=1}^5 x_{hj} \geq \frac{1}{a} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \quad \text{para } h \in I \\
 & \sum_{j=1}^5 x_{hj} \leq \frac{1}{b} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \quad \text{para } h \in I \\
 & \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq A \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad j = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde: b_{kj} : cantidad mínima del nutriente k requerido para animales de categoría j ;
 $k \in K = \{\text{Proteína Bruta(PB), Energía Metabolizable (EM), Calcio (Ca), Fósforo (P)}\}$

h : Tipo de Cultivo al cual se le desea establecer cotas mínimas ($\frac{1}{a}$) y/o máximas ($\frac{1}{b}$) de partes del área a sembrar.

A : Área máxima en ha disponible para la siembra de pastos.

3.2.1. Definición de los Coeficientes Económicos del Modelo

Los coeficientes económicos del modelo reflejan los costos por hectárea de cada pasto a sembrar, los mismos se recogen en la Tabla 3.1. En el caso de la planta arbórea Morera (*Morus Alba*) se toma el costo determinado por (Casanovas, Carrazana, Caballero, Novoa, & Varela, 2004), el cual considera el período de establecimiento de 18 meses.

Tabla 3.1: Costo de siembra por hectárea de cada tipo de Pasto

TIPO DE PASTO	COSTO (\$/ha)
Caña de Azúcar	314.87
King Grass	446.95
Guinea	334.96
Pasto Estrella	284.44
Leucaena	248.31
Morera	4843.37

Fuente: (Rodríguez, 2004)

3.2.2. Definición de los Coeficientes Tecnológicos del Modelo

Para la determinación de estos coeficientes se empleo la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{kg \text{ de nutriente}_i}{kg \text{ de Materia Seca de cultivo}_j} \right) \left(\frac{Rendimiento \text{ kg Materia Seca de cultivo}_j}{ha \text{ de cultivo}_j} \right) = \frac{kg \text{ de nutriente}_i}{ha \text{ de cultivo}_j}$$

La Tabla 3.2 contiene los valores dados en la literatura sobre las cantidades en kg de los distintos tipos de nutrientes (PB, EM, Ca, P) por kg de MS. Los datos de los rendimientos de los cultivos (Tabla 3.3) se toman en el período de seca¹ (noviembre - abril), sin riego ni fertilización². Luego

¹Con fines prácticos la cantidad de días del período de seca que se toman es 205 días, no obstante en este trabajo los rendimientos se tomaron en un período de 182.5 días, o sea, 6 meses

²Solamente la Morera por su poder de extracción de nutrientes del suelo requiere fertilización, no obstante, la misma responde positivamente a los abonos orgánicos

Tabla 3.2: Norma Técnica que indica el aporte en Nutrientes de cada cultivo

CULTIVOS	PB (kg/kg MS)	ENERGÍA (Mcal/kg MS)	CALCIO (kg/kg MS)	FÓSFORO (kg/kg MS)
Caña	0.025	2	0.0031	0.003
King Grass	0.063	2.06	0.0043	0.0017
Guinea	0.051	1.9	0.0063	0.0021
Pasto Estrella	0.066	1.87	0.0053	0.0018
Leucaena	0.0205	2.25	0.0023	0.0025
Morera	0.26	2.92	0.0017	0.002

Fuente: CALRAC

Tabla 3.3: Rendimientos de los cultivos en época de seca

RENDIMIENTOS ton MS/ha	CULTIVOS					
	CAÑA	KING GRASS	GUINEA	PASTO ESTRELLA	LEUCAENA	MORERA
	18.5	9.1	8.2	10.3	12	12.4

Fuente: (Camero, 2003)

empleando la fórmula anteriormente planteada con la información de las Tablas 3.2 y 3.3 se obtiene para el caso del King Grass y la PB:

$$\left(\frac{\text{kg de PB}}{\text{kg de MS de KingGrass}} \right) \left(\frac{\text{Rendimiento kg MS de KingGrass}}{\text{ha de KingGrass}} \right) \frac{1}{182,5}$$

$$= \frac{\text{kg de PB}}{\text{ha de KingGrass}}$$

$$(0,063 \text{ kgPB/kgMS}) (9100 \text{ kgMS/ha}) \frac{1}{182,5}$$

$$= 3,1414 \text{ kgPB/ha}$$

Finalmente la Tabla 3.4 reúne los resultados de los cálculos para el resto de las combinaciones de cultivos y nutrientes.

Tabla 3.4: Norma Técnica que indica el aporte en Nutrientes de cada cultivo por ha diariamente

CULTIVOS Aporte diario	PB (kg/ha)	ENERGÍA (Mcal/ha)	CALCIO (kg/ha)	FÓSFORO (kg/ha)
Caña	2.5342	202.7398	0.3142	0.3041
King Grass	3.1414	102.7178	0.2144	0.0848
Guinea	2.2915	85.3699	0.2831	0.0944
Pasto Estrella	3.7343	105.8046	0.3	0.1018
Leucaena	1.3479	147.9452	0.1512	0.1644
Morera	17.7084	199.9908	0.1164	0.1370

Fuente: Elaboración Propia

3.2.3. Definición de los Términos Independientes de las Restricciones

Dada la importancia de la correcta comprensión de los lados derechos de las restricciones del modelo, entiéndase los requerimientos mínimos de los nutrientes de la dieta del búfalo, a continuación se presenta un preámbulo con algunas consideraciones de corte teórico.

Nutrientes: Son sustancias químicas componentes de los alimentos y que son necesarias para el mantenimiento, la producción (carne, leche, huevos, lana etc), y la salud de los animales. Se clasifican convencionalmente para su aplicación práctica y estudio en: energía, proteína, minerales y vitaminas. La energía es la forma de expresión práctica del contenido de carbohidratos y grasa, fundamentalmente, pero expresa también el contenido de todo el resto de los compuestos orgánicos de los alimentos, susceptibles de oxidación biológica. La proteína expresa el contenido en aminoácidos, fundamentalmente, que es la forma de utilización predilecta de los componentes nitrogenados por los animales superiores. Los minerales expresan el contenido de macro y micro elementos; y las vitaminas, todo el conjunto de compuestos orgánicos activos y necesarios en pequeñas cantidades para el funcionamiento normal del metabolismo. Actúan preferentemente como catalizadores biológicos.

Ofrecimientos: Consiste en el consumo diario de nutrientes o ración idónea para una buena nutrición y salud; comprende márgenes de seguridad que se ofrecen sobre los requerimientos. Estos márgenes están concebidos para corregir variaciones en la composición de alimentos, ambiente, “stress” y particularidades individuales. La concepción de una buena ración implica así mismo los estudios de consumo voluntario, bioquímica, análisis clínico de deficiencias, balance

de nutrientes, y reproducción experimental de deficiencias.

Racionamiento: Es el resultado de la aplicación en la práctica de la concepción de una ración. Se expresa también como Balance Alimentario y su objetivo es predecir la producción a obtener a partir de una ración, o a la inversa, diseñar una ración para obtener una producción deseada.

Las metodologías para la determinación de los requerimientos son complejas, laboriosas y caras. Requieren de instalaciones experimentales adecuadas para el trabajo con los animales, y de facilidades de laboratorio para el análisis de alimentos y muestras procedentes de los animales (excretas, sangre y tejidos). Normalmente, la determinación del requerimiento se realiza separadamente para cada uno de ellos (energía, proteína, minerales y vitaminas). Esto es, el estudio de cada grupo es un campo aparte, al cual se dedican grupos de investigadores y laboratorios especializados en diversas partes del mundo y durante largos años.

Requerimientos: Es la cantidad de nutrientes necesaria para satisfacer las necesidades mínimas de un animal saludable en producción. No incluye los márgenes de seguridad.

Son establecidos en la mayoría de los estudios de nutrición animal los requerimientos mínimos en cuanto a requerimientos de proteína: Proteína Bruta (PB), requerimientos de energía: Energía Metabolizable (EM) y entre los requerimientos minerales (Macroelementos): Calcio (Ca) y Fósforo (P).

Se conoce de forma determinística cuales son los valores de cada uno de estos requerimientos según la categoría de los animales para el Ganado Vacuno, los mismos aparecen en la Tabla 3.5

Plantea (Angulo, Noguera, & Berdugo, 2005) que por muchas épocas los búfalos han sido alimentados con productos fibrosos y de baja calidad, con niveles muy bajos de proteína y energía. Inicialmente estos animales han sido explotados bajo sistemas de pastoreo extensivo donde predominan los pastos naturales, razón por la cual estos pudieran haber desarrollado adaptaciones del sistema digestivo que les permite utilizar eficientemente los forrajes fibrosos, obteniendo así la energía necesaria para sobrevivir. Según (V.Cruz *et al.*, 2001) y (López, Fundora, & Elias, 2005) en experimentos bajo confinamiento realizado por estos autores en Brasil y Cuba respectivamente concluyen que el búfalo es más eficiente que el vacuno en cuanto se refiere a la ganancia en peso diaria (+40,16 %), menor tiempo medio de retención del alimento (−17,72 %), utilización y asimilación de la proteína, provocado por el empleo más eficiente del nitrógeno, la menor

Tabla 3.5: Necesidades diarias mínimas de nutrientes por categorías para el Ganado Vacuno

CATEGORÍAS	PB (kg)	ENERGÍA (Mcal)	CALCIO (kg)	FÓSFORO (kg)
Ternero	0.311	4.6	0.0756	0.00567
Tenera	0.311	4.6	0.0756	0.00567
Añojo	0.37	9.3	0.01378	0.01171
Añoja	0.37	9.0	0.011	0.0094
Novilla	0.52	12.3	0.02389	0.01779
Torete	0.5	12.1	0.022	0.0172
Vaca	0.34	14.4	0.0167	0.01504
Toro	0.77	18.2	0.0183	0.0137
Buey	0.68	19.6	0.0234	0.01756
Semental	0.5	12.1	0.01678	0.0137

Fuente: (Camero, 2003)

concentración de amoníaco ($-21,22\%$) y la mayor cantidad de proteína microbiana ($+4,12\%$).

El mayor tamaño del complejo retículo-rumen de los búfalos comparado con el del vacuno les permite una mayor capacidad de alimento en esta cavidad gastrointestinal y las más desarrolladas papilas rumiales que incrementan la superficie de absorción de los productos de la fermentación rumial. (V.Cruz *et al.*, 2001) determinó en su experimento el porciento de más en el consumo de (Masa Seca) MS kg/día, $+16,77\%$; (Fibra Detergente Neutra) FDN kg/día, $+18,18\%$ y (Proteína Bruta) PB kg/día, $+15,94\%$

Todo lo anterior llevó a considerar que se puede decir que los requerimientos mínimos para el Búfalo pueden ser hasta un 10% más bajos que los del Vacuno. Queda entonces determinada la tolerancia inferior (t_i^-) de los requerimientos. Dada la falta de coincidencia entre los expertos en establecer una cantidad máxima de cada requerimiento, a partir de la cual, el consumo por encima se vuelva dañino para el búfalo; además de que en la empresa los animales se encuentran en un régimen de pastoreo, donde la cantidad de alimentos que come cada animal diariamente puede ser muy difícil de establecer. La posibilidad de emplear números difusos triangulares, queda desechada.

Es por esto que se decide emplear números difusos de tipo RIA ver Figura 3.1. Los valores de $b_i^- = bv_i - 0,1bv_i$ y $b_i = bv_i + 0,1bv_i$ se establecen inicialmente como el 10% por encima y por debajo del requerimiento mínimo (bv_i) del nutriente n_i dado para cada categoría del vacuno.

El valor b_i^- se establece a teniendo en cuenta lo referido en el párrafo anterior sobre la mayor eficiencia del búfalo y el b_i a partir de que la literatura y los especialistas de la empresa establecen un margen de seguridad del 10 % por encima del valor ideal, de esta manera se pueden manejar los cambios en el movimiento del rebaño.

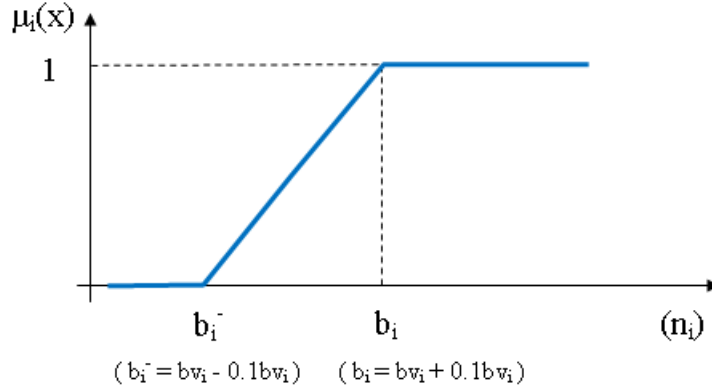


Figura 3.1: Número Difuso tipo RIA establecido para cada nutriente n_i

Luego la función de pertenencia para las restricciones basado en los anteriores números difusos de tipo RIA queda como:

$$\mu(n_i) = \begin{cases} 1 - \frac{[b_i - (Ax)_i]}{t_i^-} & ; \text{si } b_i - t_i^- \leq (Ax)_i < b_i \\ 1 & ; \text{si } (Ax)_i \geq b_i \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $t_i^- = b_i - b_i^-$ la figura 3.2 representa gráficamente la función anterior y su α - corte.

La Tabla 3.5 proporciona los valores de requerimientos de nutrientes mínimos para cada animal (vacuno) según su categoría. Para determinar la cantidad mínima de kilogramos por día de cada nutriente para los búfalos, hay que considerar los números difusos RIA que anteriormente se definían y la cantidad de animales por categoría en una Granja Tipo (Tabla 3.6). Luego los valores recogidos en la Tabla 3.7 son las cantidades de kilogramos mínimas de nutrientes que deben consumir diariamente la totalidad de los animales según su categoría en una Granja Tipo y sus correspondientes valores de tolerancia $t_i^- = b_i - b_i^-$.

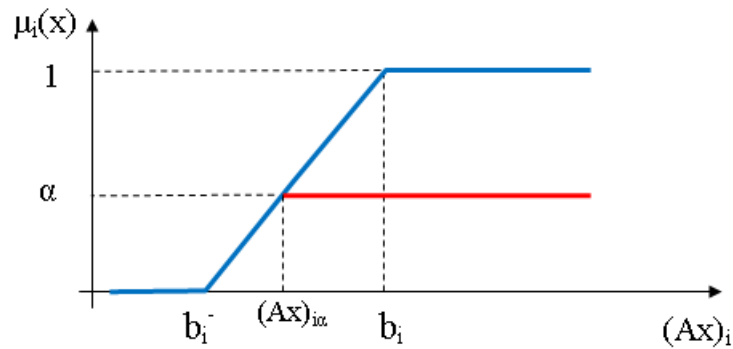


Figura 3.2: Función de Pertenencia para la restricción y su α – corte.

Tabla 3.6: Cantidad de animales por categoría en una Granja Tipo

CATEGORÍA	CANTIDAD
Bucerros	24
Bucerras	24
Buñojo	5
Buñoja	5
Bubilla	10
Búfala	60
Semental	3
TOTAL MASA	131

Fuente: Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo

3.2.4. Otros aspectos a considerar en el Modelo

Existen otros datos y aspectos que deben ser considerados por el Modelo, algunos de ellos proporcionados por la empresa y otros propuestos por la investigación.

En la empresa no se establecen cantidades mínimas a sembrar de ningún cultivo (Pasto o Pasto para Forraje), no obstante la literatura especializada en Cuba recomienda la creación de Bancos de Proteínas (Milera *et al.*, 2001), (Lamela, Matías, Fung, & Valdés, 2001) y el Silvopastoreo (Hernández, Simón, & Duquesne, 2001) como alternativas sostenibles en la cría extensiva de ganado. Por esta razón se establece una restricción para permitir la creación de un Banco de Proteínas en el 20 % del área que se decida sembrar. Este Banco estará compuesto por una especie forrajera *Leucaena* y una gramínea, preferentemente Guinea, la cual se sembrará intercalada, para permitir el silvopastoreo. La siembra de 2 ha de Morera, de forma experimental, se basa en su

Tabla 3.7: Necesidades diarias mínimas de nutrientes para la cantidad total de animales por categoría en una Granja Tipo y su tolerancia (t_i^-)

Categoría	Ctd anim	PB kg/día	t_i^-	EM Mcal/día	t_i^-	Ca kg/día	t_i^-	P kg/día	t_i^-
Bucerros	48	16.4208	2.9856	242.88	44.16	3.9917	0.7258	2.9937	0.5443
Buñojos	10	4.07	0.74	102.3	18.6	0.1518	0.0276	0.1287	0.0234
Buvillas	10	5.72	1.04	135.3	24.6	0.2629	0.0478	0.1969	0.0358
Búfalas	60	22.44	4.08	950.4	172.8	1.1022	0.2	0.9966	0.1812
Sementales	3	1.65	0.3	39.93	7.26	0.0554	0.0101	0.0452	0.0082

Fuente: Elaboración Propia

elevado valor en proteínas (26 % de la Masa Seca) y en los trabajos de (Casanovas *et al.*, 2004), (Domínguez, Tellas, & Revilla, 2001) así como en la creciente cantidad de investigaciones sobre el uso de esta planta arbórea en la alimentación de ganado vacuno y su efecto en el incremento de las producciones de leche. Estas 2 ha resultan suficientes para alimentar a cerca del 80 %³ de las 60 búfalas. La Morera deberá ser suministrada, preferentemente en la mañana, después del ordeño, en cantidades iguales al 0.2 % en base seca del peso vivo del animal. La misma debe ser cortada y acarreada al lugar de alimentación como propone (Casanovas *et al.*, 2004). Por lo tanto no será incluida en el modelo aunque si se presenta en los resultados como una adición a las cantidades de hectáreas a sembrar y a los costos totales mínimos alcanzados por el modelo.

3.3. Modelo de PLD para la dieta del Ganado Bufalino en 1^{ra} de Mayo

El modelo de PLD teniendo en cuenta lo planteado en el epígrafe anterior contiene 25 variables esenciales y un parámetro (α), 23 restricciones 20 de ellas establecidas para garantizar que se cumplan con al menos las cantidades mínimas de nutrientes (PB, EM, Ca y P) para cada categoría de Búfalos. Las 3 restantes limitan: la cantidad de ha de pastos a sembrar a menos de 96 ha; que el 20 % del área que se decida sembrar debe contener Leucaena y que de esta cantidad de ha anterior el 65 % será sembrada de Guinea, como variante de silvopastoreo (ver el modelo completo en el

³Se considera que ese porcentaje sea de búfalas en lactancia

Anexo D):

x_{ij} : cantidad de pasto o forraje de tipo i a sembrar para alimentar a los búfalos de categoría j

$i \in I = \{\text{caña de azúcar, kingrass, guinea, pasto estrella, leucaena}\}$

$j \in J = \{\text{bucarro, buñojo, bubilla, búfala, semental}\}$

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Costo Total por la siembra}) \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i1} \geq 16,4208 - 2,9856(1 - \alpha) \quad (PB \text{ bucerros}) \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i1} \geq 2,9937 - 0,5443(1 - \alpha) \quad (P \text{ bucerros}) \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i2} \geq 4,07 - 0,74(1 - \alpha) \quad (PB \text{ buñojos}) \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i2} \geq 0,1287 - 0,0234(1 - \alpha) \quad (P \text{ buñojos}) \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i3} \geq 5,72 - 1,04(1 - \alpha) \quad (PB \text{ bubillas}) \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i3} \geq 0,1969 - 0,0358(1 - \alpha) \quad (P \text{ bubillas}) \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i4} \geq 22,44 - 4,08(1 - \alpha) \quad (PB \text{ búfalas}) \quad (3.3.1) \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i4} \geq 0,9966 - 0,1812(1 - \alpha) \quad (P \text{ búfalas}) \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i5} \geq 1,65 - 0,3(1 - \alpha) \quad (PB \text{ sementales}) \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i5} \geq 0,0452 - 0,0082(1 - \alpha) \quad (P \text{ sementales})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^5 x_{5j} &\geq 0,20 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_{ij} && (\text{Banco de Proteína (Leucaena)}) \\
\sum_{j=1}^5 x_{3j} &\geq 0,65 \sum_{j=1}^5 x_{5j} && (\text{El 65 \% del Banco de Proteína contiene Guinea}) \\
\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_{ij} &\leq 96 && (\text{Total de ha disponibles}) \\
x_{ij} &\geq 0 && i = 1, 2, \dots, 5; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\
\alpha &\in [0, 1]
\end{aligned}$$

3.4. Solución del modelo de PLD para la dieta del búfalo mediante la Metodología Interactiva

Se resuelve a continuación el modelo de PLD de dieta del ganado bufalino para la Empresa Pecuaria 1^{ra} de Mayo aplicando la metodología interactiva propuesta en el capítulo anterior.

Paso 1: Resolver el problema mediante PL. El problema de PLD es considerado ahora como un problema de PL, es decir, los términos independientes dejan de ser tratados como números difusos de tipo RIA. Resultan para este paso valores determinísticos. La Tabla 3.8 muestra los resultados de la aplicación del método Simplex. La Tabla Resumen del paquete WINQSB se recoge en el Anexo E.

Tabla 3.8: Resultados del problema mediante PL

Cultivo	Resultado
Caña	2.65
King Grass	
Guinea	4.59 ha
Pasto Estrella	21.01 ha
Leucaena	7.06 ha
Total	37.32
Costo Total Mínimo	10 104.67

Fuente: Elaboración Propia

Como los requerimientos mínimos de nutrientes no pueden ser considerados determinísticos dada la vaguedad de los mismos a la hora de ser establecidos, se continúa con el Paso 2.

Paso 2: Emplear el Método de Verdegay. Según el epígrafe 3.2.3 los términos independientes serían números difusos de tipo RIA. Resolviendo se obtiene la Tabla 3.9 y la Figura 3.3. Esta última permite ver gráficamente el comportamiento de las variables en base y de la función objetivo durante las iteraciones del método, es decir, mientras α varía entre el intervalo [0,1].

Tabla 3.9: Solución mediante el Método de Verdegay

α	Caña	King Grass	Guinea	Pasto Estrella	Leucaena	Morera (opc)	Total	Costo Mínimo	Total + Morera	Costo Mínimo + Morera
0	2,17		3,76	17,19	5,78	2,00	28,90	8267,58	30,90	17954,32
0,025	2,18		3,78	17,29	5,81	2,00	29,06	8313,51	31,06	18000,25
0,05	2,20		3,80	17,38	5,84	2,00	29,22	8359,44	31,22	18046,18
0,075	2,21		3,82	17,48	5,88	2,00	29,38	8405,37	31,38	18092,11
0,1	2,22		3,84	17,57	5,91	2,00	29,54	8451,30	31,54	18138,04
0,125	2,23		3,86	17,67	5,94	2,00	29,70	8497,23	31,70	18183,97
0,15	2,24		3,88	17,77	5,97	2,00	29,86	8543,16	31,86	18229,90
0,175	2,26		3,90	17,86	6,00	2,00	30,02	8589,09	32,02	18275,83
0,2	2,27		3,92	17,96	6,04	2,00	30,19	8635,02	32,19	18321,76
0,225	2,28		3,95	18,05	6,07	2,00	30,35	8680,95	32,35	18367,69
0,25	2,29		3,97	18,15	6,10	2,00	30,51	8726,88	32,51	18413,62
0,275	2,30		3,99	18,24	6,13	2,00	30,67	8772,81	32,67	18459,55
0,3	2,32		4,01	18,34	6,17	2,00	30,83	8818,73	32,83	18505,47
0,325	2,33		4,03	18,43	6,20	2,00	30,99	8864,66	32,99	18551,40
0,35	2,34		4,05	18,53	6,23	2,00	31,15	8910,59	33,15	18597,33
0,375	2,35		4,07	18,63	6,26	2,00	31,31	8956,52	33,31	18643,26
0,4	2,36		4,09	18,72	6,29	2,00	31,47	9002,45	33,47	18689,19
0,425	2,38		4,11	18,82	6,33	2,00	31,63	9048,38	33,63	18735,12
0,45	2,39		4,13	18,91	6,36	2,00	31,79	9094,31	33,79	18781,05
0,475	2,40		4,15	19,01	6,39	2,00	31,95	9140,24	33,95	18826,98
0,5	2,41		4,17	19,10	6,42	2,00	32,11	9186,17	34,11	18872,91
0,525	2,42		4,20	19,20	6,45	2,00	32,27	9232,10	34,27	18918,84
0,55	2,44		4,22	19,29	6,49	2,00	32,43	9278,03	34,43	18964,77
0,575	2,45		4,24	19,39	6,52	2,00	32,59	9323,96	34,59	19010,70
0,6	2,46		4,26	19,48	6,55	2,00	32,75	9369,89	34,75	19056,63
0,625	2,47		4,28	19,58	6,58	2,00	32,91	9415,82	34,91	19102,56
0,65	2,48		4,30	19,68	6,62	2,00	33,08	9461,75	35,08	19148,49
0,675	2,50		4,32	19,77	6,65	2,00	33,24	9507,68	35,24	19194,42
0,7	2,51		4,34	19,87	6,68	2,00	33,40	9553,61	35,40	19240,35
0,725	2,52		4,36	19,96	6,71	2,00	33,56	9599,54	35,56	19286,28
0,75	2,53		4,38	20,06	6,74	2,00	33,72	9645,47	35,72	19332,21
0,775	2,54		4,40	20,15	6,78	2,00	33,88	9691,40	35,88	19378,14
0,8	2,56		4,43	20,25	6,81	2,00	34,04	9737,32	36,04	19424,06
0,825	2,57		4,45	20,34	6,84	2,00	34,20	9783,25	36,20	19469,99
0,85	2,58		4,47	20,44	6,87	2,00	34,36	9829,18	36,36	19515,92
0,875	2,59		4,49	20,54	6,90	2,00	34,52	9875,11	36,52	19561,85
0,9	2,61		4,51	20,63	6,94	2,00	34,68	9921,04	36,68	19607,78
0,925	2,62		4,53	20,73	6,97	2,00	34,84	9966,97	36,84	19653,71
0,95	2,63		4,55	20,82	7,00	2,00	35,00	10012,90	37,00	19699,64
0,975	2,64		4,57	20,92	7,03	2,00	35,16	10058,83	37,16	19745,57
1	2,65		4,59	21,01	7,06	2,00	35,32	10104,76	37,32	19791,50

Fuente: Elaboración Propia

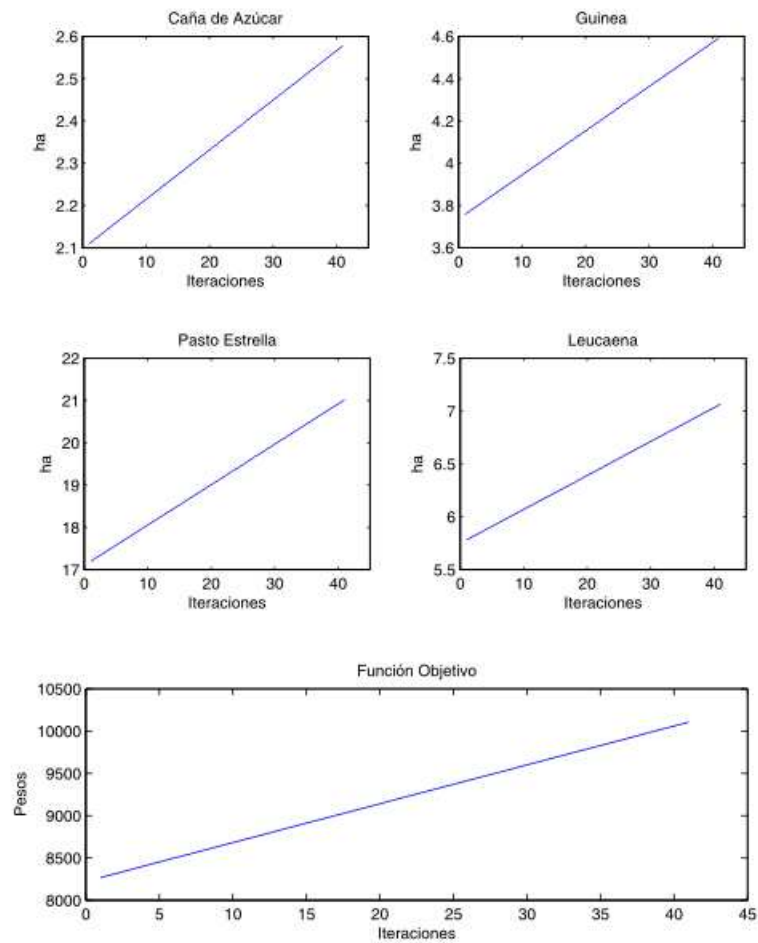


Figura 3.3: Gráfico de las soluciones del Método de Verdegay

La empresa después de analizar los resultados anteriores desea establecer un rango en el cual se puede mover el presupuesto para la siembra de los cultivos. Es decir establecer límites para la función objetivo del problema. Esto provoca que se deba considerar como impreciso el objetivo. Se procede al Paso 3.

Paso 3: El decisor es consultado para asignar un objetivo (nivel de aspiración) b_0 y su tolerancia t_0 . La empresa propone para el presupuesto de la siembra, el rango [\$ 8000.00; \$ 9500.00]. Sin considerar las 2 ha de Morera cuyo costo asciende a \$ 9 686.74, las cuales son opcionales y se adicionan a los costos fuera del modelo de dieta. Se establece para el problema $b_0 = \$ 8000.00$ y $t_0 = \$ 1500.00$. Por lo tanto se continúa con el Paso 4.

Paso 4: Emplear el Método de Zimmermann. Resolviendo se llega a la Tabla 3.10.

Tabla 3.10: Solución mediante el Método de Zimmermann

Cultivo	Resultado
Caña	2.35
King Grass	
Guinea	4.07
Pasto Estrella	18.60
Leucaena	6.25
Morera (opc)	2.00
b_0	8000.00
t_0	1500.00
α	0.369
Total	31.27
Costo Total Mínimo	8946.10
Total (+ Morera)	33.27
Costo Total Mínimo (+ Morera)	18632.84

Fuente: Elaboración Propia

Como alternativa a la solución anterior se realiza el cálculo mediante el Método de Werners el cual no requiere valores de b_0 y t_0 , si no que son determinados en uno de los pasos del algoritmo. Esto proporciona a la empresa otra perspectiva, la cual puede conllevar a que el decisor reconozca mejor el valor preestablecido de la meta y la tolerancia del objetivo. Se procede al Paso 5.

Paso 5: Emplear el Método de Werners.

Como el valor de la función objetivo para Werners no sobrepasa al límite⁴ establecido por la Empresa de \$ 9500.00 se le propone a la entidad como solución de su problema de PLD para la dieta del ganado bufalino, las cantidades de ha de cultivos a sembrar que determina Werners. Ya que en cuanto al valor de α este último método se acerca más que el de Zimmermann a la cantidad ideal ($\alpha = 1$). Por lo tanto la Tabla 3.11 resume los resultados que debe considerar la entidad.

⁴Este valor no considera como se ha dicho la siembra de las 2 ha opcionales de Morera

Tabla 3.11: Solución mediante el Método de Werners

Cultivo	Resultado
Caña	2.41
King Grass	
Guinea	4.17
Pasto Estrella	19.10
Leucaena	6.42
Morera	2.00
b_0	8267.60
t_0	1837.30
α	0.5
Total	32.11
Costo Total Mínimo	9186.20
Total (+ Morera)	34.11
Costo Total Mínimo (+ Morera)	18872.94

Fuente: Elaboración Propia

3.5. Conclusiones Parciales

La aplicación práctica llevó a considerar los términos independientes de las restricciones, correspondientes a los requerimientos nutricionales mínimos como números difusos tipo RIA. La metodología interactiva permitió que la empresa pudiese contar con una serie de variantes de acción además de intervenir en el proceso de solución estableciendo o corrigiendo sus necesidades. La solución mediante el método de Werners es propuesta como la respuesta óptima al problema de PLD para la dieta del búfalo en la empresa 1^{ra} de Mayo.

CONCLUSIONES

Como resultado de las investigaciones teóricas y experimentales de este trabajo se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1. La PL, por su supuesto teórico del carácter determinístico de los coeficientes, resulta insuficiente para su aplicación en modelos con vaguedad en la información.
2. Es posible aplicar la PLD para resolver problemas de dieta óptima en el ganado bufalino.
3. Los requerimientos mínimos de nutrientes para la dieta bufalina, pueden ser caracterizados mediante números difusos, ya sea de tipo LR u otros.
4. La complementación de los tres métodos de solución considerados en la investigación permite la creación de variantes de solución que responden a diferentes perspectivas.
5. Resulta necesario, desde el punto de vista práctico, integrar en una metodología interactiva los métodos teóricos de forma que le permita al decisor contar con alternativas de solución de acuerdo a sus necesidades.
6. Quedan establecidos, para una Granja Tipo de cría de búfalos, las cantidades a sembrar de los diferentes tipos de pastos los que proporcionan nutrientes como PB, EM, Ca y P.
7. La inclusión en el modelo de un Banco de Proteínas a base de *Leucaena* y *Guinea* permite no solo el suplemento alimenticio y el silvopastoreo, sino que constituye una vía de cría extensiva de ganado sostenible.
8. El método de Verdegay ofrece un abanico de soluciones, permitiendo a la dirección de la empresa identificar su solución óptima en dependencia del presupuesto con que cuenta.

9. El método de Zimmermann le establece al decisor una única solución óptima, basado en los valores para la meta y tolerancia de la función objetivo establecidos previamente por la empresa.
10. El método de Werners al igual que el de Zimmermann calcula una solución óptima, pero el mismo establece valores ideales para la meta y tolerancia del objetivo difuso.
11. Las pequeñas implementaciones realizadas en MATLAB[®] permiten realizar de forma automatizada los cálculos para encontrar la solución de un problema de PLD, empleando los tres métodos que agrupa el Algoritmo Interactivo y permitiendo que el decisor pueda determinar nuevas soluciones óptimas en caso que necesite adecuar su modelo teórico.

RECOMENDACIONES

- Profundizar en la PLD donde se trabaje considerando los coeficientes de la función objetivo como números difusos.
- Continuar sistematizando el estudio sobre números difusos y cuasidifusos de tipo LR que puedan caracterizar conjuntos de datos experimentales.
- Considerar la posibilidad de incorporar en el modelo de PLD para la dieta del búfalo, restricciones sobre el agua necesaria en una Granja Tipo.
- Para una mejor refinación de los resultados en la práctica se propone trabajar la proyección de escenarios, que basados en el movimiento del rebaño en los próximos años, permita determinar la carga global óptima de animales por Granja Tipo.
- Tomar en consideración la propuesta de sembrar 2 ha de *Morus Alba* para ser suministrada como complemento nutricional para búfalas en lactancia por su beneficio en la producción de leche reportada en el ganado vacuno.
- Valorar la posibilidad de crear una aplicación *stand-alone* a partir de los métodos programados en MATLAB®.

BIBLIOGRAFÍA

- Angulo, R., Noguera, R., & Berdugo, J. (2005). El búfalo de agua (*bubalus bubalis*) un eficiente utilizador de nutrientes: aspectos sobre fermentación y digestión rumial. *Livestock Research for Rural Development*, 17(Artículo 67).
- Beale, E. (1955). On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society, B*(17), 173-174.
- Bellman, R. (1957). *Dynamic programming*. Princenton University Press.
- Bellman, R., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in fuzzy environment. *Management Science*, 17, 141-146.
- Cadenas, J. (1993). *Diseño e implemantación de un sistema interactivo para resolver problemas de optimización difusa*. Unpublished doctoral dissertation, Universidad de Granada.
- Cadenas, J., & Jiménez, F. (1994). Interactive decision-making in multiobjective fuzzy programming. *Mathware and Soft Computing*, 3, 219–230.
- Cadenas, J., Pelta, D., Pelta, H., & Verdegay, J. (2004). Application on fuzzy optimization to diet problems in argentineam farms. *European Journal of Operation Research*, 158, 218–228.
- Cadenas, J., & Verdegay, J. (1995). Probo: An interactive system in fuzzy linear programming. *Fuzzy Set and Systems*, 76, 319-332.
- Cadenas, J., & Verdegay, J. (1999). Modelos de optimización con datos imprecisos. *Universidad de Murcia*.
- Camero, Y. C. (2003). *Modelo de dieta con financiamiento para el ganado vacuno: caso de estudio en la granja: “paredones” de la empresa pecuaria “el tablón”*. Unpublished master’s thesis, Universidad de Cienfuegos. (Tutores: Manuel Cortés y Teresita Sánchez)
- Casanovas, E., Carrazana, A., Caballero, C., Novoa, R., & Varela, R. (2004). Efecto de la inclusión de dos niveles de morera (*morus alba*) en la producción de vacas lecheras. *Pastos y Forrajes*, 27(2), 147-151.
- Cemerkova, S., & Ramik, J. (2001). Fuzzy linear programming: Application in investment planning. *Silesian University*.
- Chanas, S., D.Kuchta, & Nowak, Z. (1991). Fplp: A package for fuzzy and parametric linear programming problems. En M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, & M. Roubens (Eds.), (p. 188-201). *Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming*. (Springer Verlag)

- Charnes, A., & Cooper, W. (1959). Chance-constrained programming. *Management Science*, 6, 73–79.
- Czyzak, P., & Slowinski, R. (1991). Fplip: Multiobjective fuzzy linear programming software with grafical facilities. En M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, & M. Roubens (Eds.), (p. 168-187). *Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming*. (Springer Verlag)
- Dantzig, G. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1, 197–206.
- Domínguez, A., Tellas, E., & Revilla, J. (2001). Comportamiento de dos especies de morera en fase de establecimiento. *Pastos y Forrajes*, 24(3), 203-208.
- Dubois, D., & Prade, H. (1978). Operation on fuzzy number. *International Journal of System Sciences*, 9, 613–626.
- Dubois, D., & Prade, H. (1985). *Fuzzy number: An overview*. CRC Press.
- Hanss, M., & Willner, K. (199?). *On using fuzzy arithmetic to solve problems with uncertain model parameters*. (citeseer.ist.psu.edu/344581.html)
- Hernández, J., Simón, L., & Duquesne, P. (2001). Evaluación de las arbóreas albizia lebbeck, bauhinia puporea y leucaena leucocephala en asociación con pasto bajo condiciones de pastoreo. *Pastos y Forrajes*, 24(3), 241-258.
- Horner, P. (1999). Planning under uncertainty. questions and answers with george dantzig. *OR/MS Today*, 26, 26–30.
- Jimémenez, M., Arenas, M., Bilbao, A., & Rodríguez, M. (2007). Linear programming with fuzzy parameters: An interactive method resolution. *European Journal of Operational Research*, 177, 1599-1609.
- Lai, Y., & Hwang, C. (1993a). *Fuzzy mathematical programming: Methods and aplicaciones*. Springer-Verlang.
- Lai, Y., & Hwang, C. (1993b). Iflp-ii: A decision support system. *Fuzzy Set and Systems*, 54, 47–56.
- Lamela, L., Matías, C., Fung, C., & Valdés, R. (2001). Efecto del banco de proteínas de leucaena en la producción de leche. *Pastos y Forrajes*, 24(3), 259-264.
- López, J. R., Fundora, O., & Elias, A. (2005). ¿ por qué el búfalo de agua presenta mayor eficiencia productiva que los vacunos? *Revista Electrónica de Veterinaria REDVET®*.
- Martínez, R. A. (2005). *Metodología interactiva para la solución de problemas de programación lineal en presencia de incertidumbre*. Unpublished master's thesis, Universidad de Cienfuegos. (Tutores: Eduardo Concepción y Manuel Cortés)
- Milera, M., Lamela, L., Hernández, D., Hernández, M., Sánchez, S., Pentón, G., & Soca, M. (2001). Sistemas intensivos con bajos insumos para la producción de leche bovina. *Pastos y Forrajes*, 24(1), 49-60.

- Niquín, E., Vergara, E., & Verdegay, J. (2006). Modelos de programación lineal difusa para la fertilización óptima de tierras de cultivo. *Segundo Taller Europeo-Latinoamericano en Ingeniería de Sistemas*.
- Rodríguez, M. (2004). *Un modelo económico-matemático de programación lineal para la inversión en el fomento de pastos y forrajes en la u.e.b. "granja paredones"*. Facultad de Economía Universidad de Cienfuegos. (Trabajo de Diploma)
- Rommelfanger, H. (1991). A pc-suported procedure for solving multicriteria linear programming problems with fuzzy data. En M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, & M. Roubens (Eds.), (p. 154-167). *Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming*. (Springer Verlag)
- Tintner, G. (1955). Stochastic linear programming with applications to agricultural economics. *Second Symposium in Linear Programming*.
- V.Cruz, I.Francisco, Morales, T. de, Dias, J., A.Inácio, Pereira, C., Aguiar, P. de, & Nasciento, V. D. (2001). Desempenho comparativo de bubalinos e bovinos em confinamento. *Ciências Agrotecnicas*, 25(2), 396-407.
- Verdegay, J. L. (2007, Noviembre). *Luces y sombras de la optimización difusa*. COMPUMAT.
- Werners, B. (1987). An interactive fuzzy programming system. *Fuzzy Set and Systems*, 23, 131-147.
- Zadeh, L. (1965a). *Fuzzy set*. Academic Press Inc.
- Zadeh, L. (1965b, April). *A new view of system theory*. (Presented at the Symposium on System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn)
- Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, 8, 199–249.
- Zimmermann, H. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Set and Systems*, 1, 45-55.
- Zimmermann, H. (1991). *Fuzzy set theory and its application* (2nd ed.). Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

Anexo A: Código Matlab de los métodos programados

%Método de Verdegay

```
load data
load menudata
prompt = {'Entre paso para \alpha:'};
dlg_title = 'Entrada para Verdegay';
num_lines = 1;
def = {'0.005'};
options.Interpreter='tex';
paso = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def,options);
h = waitbar(0,'Espere por favor...');
p=cell2mat(paso);
paso=str2num(p);
alpha=1/paso;
[x, fval]= linprog(fo,A,b,[],[],LB,UB);
X0=x;
F0=fval;
for i=1:alpha
    waitbar(i/alpha)
    n = length(LB);
    n1 = eye(n);
    n2 = n1(n,1:n);
    p0 = paso*i;
    LB=p0*n2;
    [x,fval]=linprog(fo,A,b,[],[],LB,UB);
    clc
    x1=x;
    f1=fval;
    v=horzcat(X0,x1);
    o=horzcat(F0,f1);
    X0=v;
    F0=o;
end
close(h)
for i=1:n
    s = genvarname('E',who);
    eval([s ' = v(i,1:alpha+1)']);
    clc
    figure
    plot(eval(s))
end
disp('%%Solución según Verdegay%%')
disp('%%Los valores de las xj de todas las iteraciones'...
    'están en E,E1,...,En%%')
disp('%%El valor MinZ de todas las iteraciones está en F0%%')
disp('%%Finalizado el Método de Verdegay%%')
disp('%%Datos salvados en: solverde.mat%%')
save solverde.mat
return
```

%Método de Zimmermann

```
load data;
load menudata;
prompt = {'Entre valor de la Meta b_0:',...
          'Entre el valor de la Tolerancia t_o:'};
dlg_title = 'Entrada para Zimmermann';
num_lines = 1;
def = {'',''};
options.Interpreter='tex';
zim = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def,options);
h = waitbar(0,'Espere por favor...');
n = length(zim);
fot = fo';
z = fot(1,1:n-1);
z1 = str2num(cell2mat(zim(1,1)));
z2 = str2num(cell2mat(zim(2,1)));
b0 = horzcat(z,z2);
AZ = vertcat(b0,A);
bZ = vertcat(z1+z2,b);
n1 = eye(n);
fZ = n1(n,1:n);
waitbar(0.5)
[x,fval]=linprog(-fZ,AZ,bZ,[],[],LB,UB);
disp('%%Solución según Zimmermann%%')
x
alpha = -fval
Zmax = fo'*x
waitbar(1)
close(h)
disp('%%Finalizado el Método de Zimmermann%%')
disp('%%Datos salvados en: solzimmer.mat%%')
save solzimmer.mat
return
```

%Método de Werners

```
load menudata;
load data;
n = length(LB);
wLB = LB(1,1:n-1);
wUB = UB(1,1:n-1);
wfo = fo(1:n-1,1);
prompt = {'>Hay restricciones de igualdad en su modelo? Entre 1 si existen'};
dlg_title = 'Igualdades';
num_lines = 1;
def = {'0'};
eq = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def);
p=cell2mat(eq);
if p == '0'
    [x,fval]=linprog(wfo,wA0,wb0,[],[],wLB,wUB);
else
    [x,fval]=linprog(wfo,[],[],wA0,wb0,wLB,wUB);
end
h = waitbar(0,'Espere por favor...');
```

```

Z0 = fval
waitbar(0.3)
m = length(b);
wA = A(1:m,1:n-1);
[x,fval]=linprog(wfo,wA,b,[],[],wLB,wUB);
Z1 = fval
b0 = Z1
t0 = Z0-Z1
waitbar(0.6)
n1 = eye(n);
wf = n1(n,1:n);
fot = fo';
z = fot(1,1:n-1);
wb0 = horzcat(z,t0);
wA = vertcat(wb0,A);
wb = vertcat(Z0,b);
[x,fval]=linprog(-wf,wA,wb,[],[],LB,UB);
disp('%%Solución según Werners%%')
x
alpha = -fval
Zmax = fo'*x
waitbar(1)
close(h)
disp('%%Finalizado el Método de Werners%%')
disp('%%Datos salvados en: solwern.mat%%')
save solwern.mat
return

```

%Menu de selección de Métodos

```

fig = figure('color','white','units','inches','position',[1 1 3 4]);
str2(1) = {'>Desea emplear algún otro método ?'};
str2(2) = {'selecciónelo de la lista desplegable '};
str2(4) = {'De lo contrario cierre esta ventana'};
plot(1)
axis off
text(1,1.5,str2,'HorizontalAlignment','center')
hpop = uicontrol('Style','popup',...
    'String','Verdegay|Zimmermann|Werners',...
    'Position',[20 320 100 50],...
    'Callback','metodos');
save menudata.mat

```

%M-file relacionado con el objeto hpop para la selección del Método de
%Solución

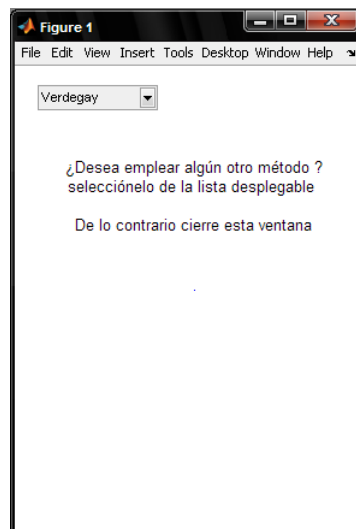
```

val = get(hpop,'Value');
if val == 1
    clear all;
    clc;
    disp('%%Comenzando el Método de Verdegay%%')
    Verde;
elseif val == 2
    clear all;

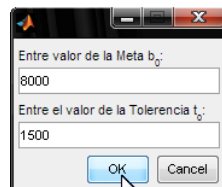
```

```
        clc;
        disp('%%%%Comenzando el Método de Zimmermann%%%%')
        Zimmer;
elseif val == 3
    clear all;
    clc;
    disp('%%%%Comenzando el Método de Werners%%%%')
    Wern;
end
```

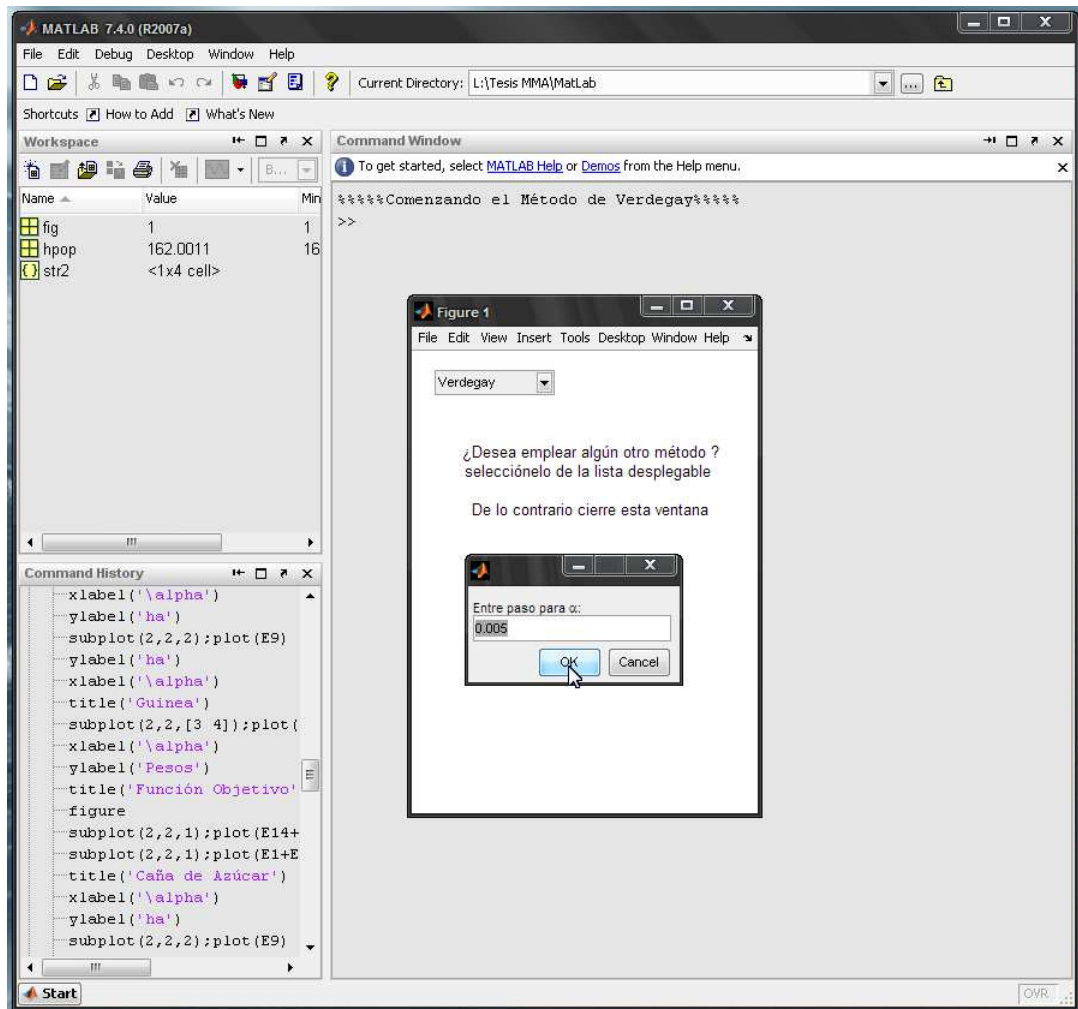
Anexo B: Pantallas de la implementación del Algoritmo Interactivo en MATLAB



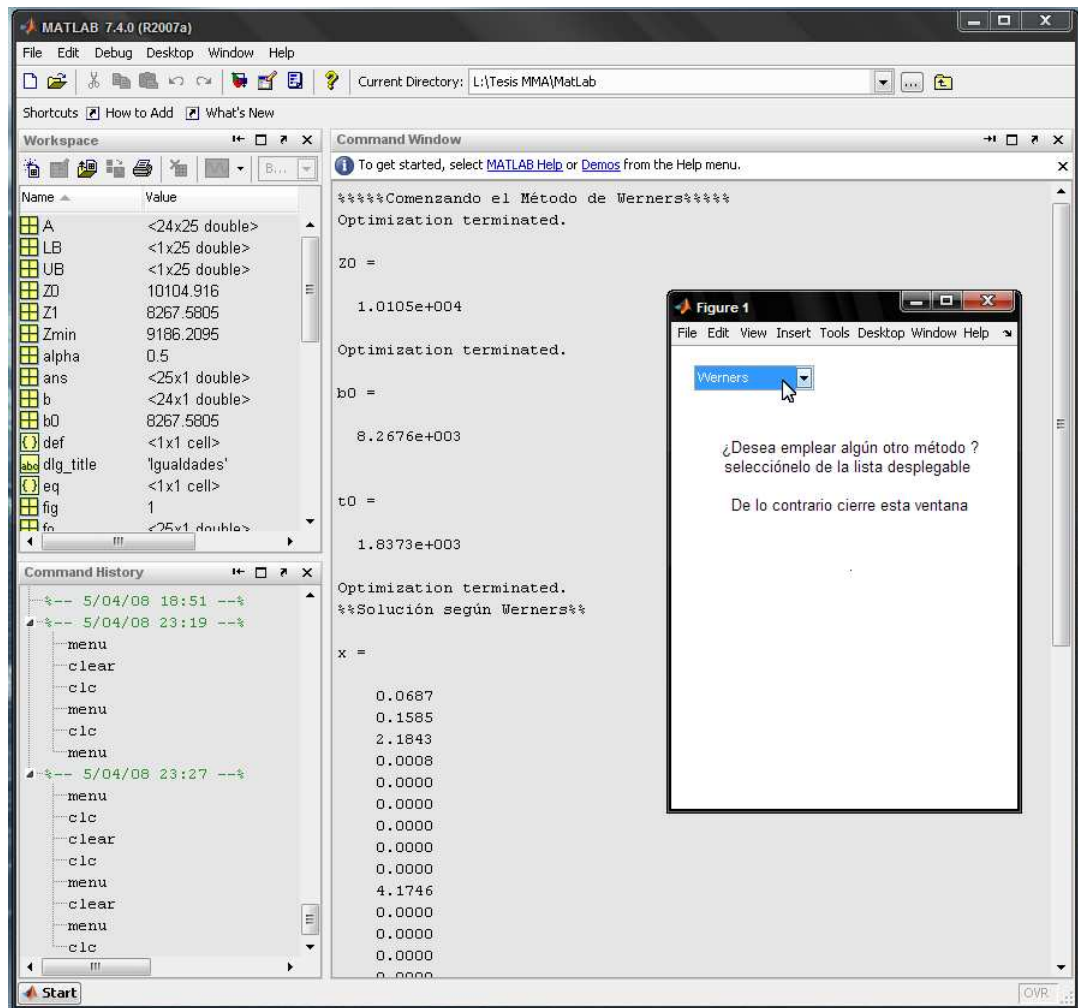
Ventana Menu



Ventana del método de Zimmermann para ingresar los valores de la meta y la tolerancia

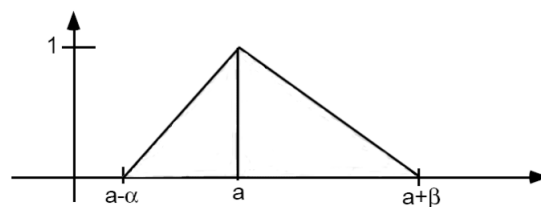


Método de Verdegay y ventana para ingresar el valor de α

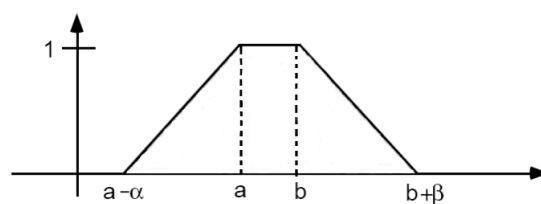


Pantalla del método de Werners

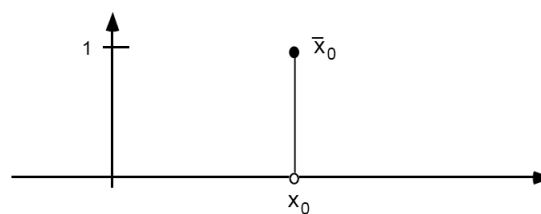
Anexo C: Figuras del Capítulo I



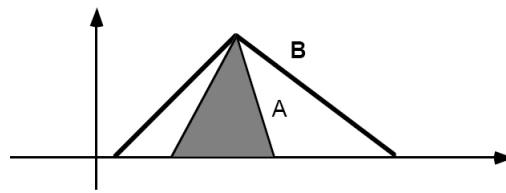
Número Difuso Triangular



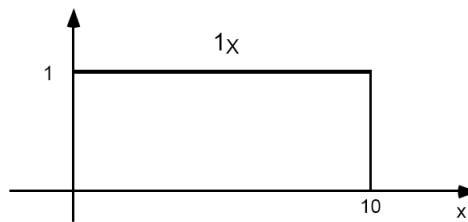
Número Difuso Trapezoidal



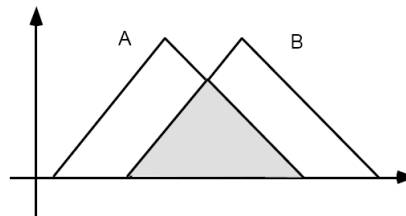
Punto Difuso



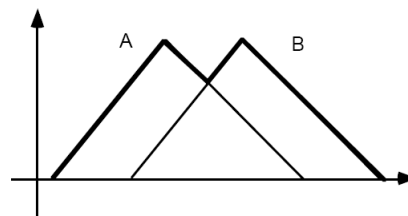
Subconjunto Difuso



Conjunto Universal Difuso



Intersección de Números Difusos



Unión de Números Difusos

Anexo D: Modelo de PLD para la dieta bufalina en 1^{ro} de Mayo

x_{ij} : cantidad de pasto o forraje de tipo i a sembrar para alimentar a los búfalos de categoría j
 $i \in I = \{\text{caña de azúcar, kingrass, guinea, pasto estrella, leucaena}\}$
 $j \in J = \{\text{bucarro, buñojo, bubilla, búfala, semental}\}$

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Costo Total por la siembra})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i1} \geq 16,4208 - 2,9856(1 - \alpha) \quad (PB \text{ bucerros})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{2i} x_{i1} \geq 242,88 - 44,16(1 - \alpha) \quad (EM \text{ bucerros})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{3i} x_{i1} \geq 3,9917 - 0,7258(1 - \alpha) \quad (Ca \text{ bucerros})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i1} \geq 2,9937 - 0,5443(1 - \alpha) \quad (P \text{ bucerros})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i2} \geq 4,07 - 0,74(1 - \alpha) \quad (PB \text{ buñojos})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{2i} x_{i2} \geq 102,3 - 18,6(1 - \alpha) \quad (EN \text{ buñojos})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{3i} x_{i2} \geq 0,1518 - 0,0276(1 - \alpha) \quad (Ca \text{ buñojos})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{4i} x_{i2} \geq 0,1287 - 0,0234(1 - \alpha) \quad (P \text{ buñojos})$$

$$\sum_{i=1}^5 a_{1i} x_{i3} \geq 5,72 - 1,04(1 - \alpha) \quad (PB \text{ bubillas})$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^5 a_{2i}x_{i3} &\geq 135,3 - 24,6(1 - \alpha) && (EM \text{ bubillas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{3i}x_{i3} &\geq 0,2629 - 0,0478(1 - \alpha) && (Ca \text{ bubillas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{4i}x_{i3} &\geq 0,1969 - 0,0358(1 - \alpha) && (P \text{ bubillas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{1i}x_{i4} &\geq 22,44 - 4,08(1 - \alpha) && (PB \text{ búfalas}) \quad (.0.1) \\
\sum_{i=1}^5 a_{2i}x_{i4} &\geq 950,4 - 172,8(1 - \alpha) && (EM \text{ búfalas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{3i}x_{i4} &\geq 1,1022 - 0,2(1 - \alpha) && (Ca \text{ búfalas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{4i}x_{i4} &\geq 0,9966 - 0,1812(1 - \alpha) && (P \text{ búfalas}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{1i}x_{i5} &\geq 1,65 - 0,3(1 - \alpha) && (PB \text{ sementales}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{2i}x_{i5} &\geq 39,93 - 7,26(1 - \alpha) && (EM \text{ sementales}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{3i}x_{i5} &\geq 0,0554 - 0,0101(1 - \alpha) && (Ca \text{ sementales}) \\
\sum_{i=1}^5 a_{4i}x_{i5} &\geq 0,0452 - 0,0082(1 - \alpha) && (P \text{ sementales}) \\
\sum_{j=1}^5 x_{5j} &\geq 0,20 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_{ij} && (Banco de Proteína (Leucaena)) \\
\sum_{j=1}^5 x_{3j} &\geq 0,65 \sum_{j=1}^5 x_{5j} && (El 65 \% del Banco de Proteína contiene Guinea) \\
\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_{ij} &\leq 96 && (Total de ha disponibles) \\
x_{ij} &\geq 0 && i = 1, 2, \dots, 5; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\
\alpha &\in [0, 1]
\end{aligned}$$

Anexo E: Tabla Resumen del paquete WINQSB

Resultados detallados de PL mediante WINQSB

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	0,0755	314,87	23,7792	0	basic	202,5392	790,8799
X2	0,1743	314,87	54,8885	0	basic	202,5392	790,8799
X3	2,4027	314,87	756,5357	0	basic	202,5392	517,9238
X4	0,0009	314,87	0,2943	0	basic	202,5392	790,8799
X5	0	446,95	0	205,068	at bound	241,882	M
X6	0	446,95	0	203,3725	at bound	243,5775	M
X7	0	446,95	0	203,3725	at bound	243,5775	M
X8	0	446,95	0	191,2091	at bound	255,741	M
X9	0	446,95	0	203,3725	at bound	243,5775	M
X10	4,5919	334,96	1.538,12	0	basic	266,4958	399,3399
X11	0	334,96	0	64,6761	at bound	270,2839	M
X12	0	334,96	0	64,6761	at bound	270,2839	M
X13	0	334,96	0	62,3995	at bound	272,5605	M
X14	0	334,96	0	64,6761	at bound	270,2839	M
X15	13,7408	284,44	3.908,43	0	basic	208,561	356,6432
X16	1,0386	284,44	295,4325	0	basic	125,0917	408,476
X17	1,4134	284,44	402,0409	0	basic	125,0917	408,476
X18	4,3786	284,44	1.245,46	0	basic	178,4715	407,352
X19	0,4412	284,44	125,4994	0	basic	125,0917	408,476
X20	7,0645	248,31	1.754,19	0	basic	-985,6714	522,1519
X21	0	248,31	0	258,5577	at bound	-10,2478	M
X22	0	248,31	0	258,5577	at bound	-10,2478	M
X23	0	248,31	0	225,4152	at bound	22,8948	M
X24	0	248,31	0	258,5577	at bound	-10,2478	M

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	71,3569	>	16,4208	54,9361	0	-M	71,3569
C2	2,891,02	>	242,88	2.648,14	0,00	-M	2,891,02
C3	6,4904	>	3,9916	2,4988	0	-M	6,4904
C4	2,9937	>	2,99	0	2.503,41	1,9369	9,872
C5	4,07	>	4,07	0	55,2151	2,3275	4,7211
C6	125,2046	>	102,3	22,9046	0	-M	125,2046
C7	0,3353	>	0,1518	0,1835	0	-M	0,3353
C8	0,1287	>	0,1287	0	477,9714	0,111	0,4884
C9	5,72	>	5,72	0	55,2151	2,5217	7,2228
C10	184,8911	>	135,3	49,591	0	-M	184,8911
C11	0,4788	>	0,2629	0,2159	0	-M	0,4788
C12	0,1969	>	0,1969	0	477,9714	0,1559	0,6864
C13	22,44	>	22,44	0	43,9381	11,8798	30,0609
C14	950,4	>	950,4	0	0,8579	850,2238	1.795,23
C15	2,0685	>	1,1022	0,9663	0	-M	2,0685
C16	1,1764	>	0,9966	0,1798	0	-M	1,1764
C17	1,65	>	1,65	0	55,2151	1,1219	1,6581
C18	46,8721	>	39,93	6,9421	0	-M	46,8721
C19	0,1327	>	0,0554	0,0773	0	-M	0,1327
C20	0,0452	>	0,0452	0	477,9714	0,045	0,198
C21	0	=	0	0	-147,9641	-7,8666	6,8995
C22	35,3227	>	96	60,6773	0	35,3227	M
C23	0	>	0	0	-69,0452	-4,5533	14,3693

Fuente: Salida WINQSB