**UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS ”CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ”**
**FACULTAD DE INGENIERÍA INFORMÁTICA**
**MATEMÁTICA BÁSICA Y APLICADA**

# MÉTODO ITERATIVO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES E IMÁGENES

Tesis presentada en opción al Título Académico
de Master en Matemática Aplicada

Autor: Ing. MIGUEL SANTANA JUSTIZ
Prof. Asist., ROBERTO H. HERRERA MARRERO, Dr.

**Cienfuegos**
**2008**

# RESUMEN

En este trabajo se presenta una aplicación del procesamiento digital de señales, al campo específico de la deconvolución de señales e imágenes.

El objetivo se orienta a brindar técnicas de procesamiento digital, sobre la base de un método iterativo que permita mejorar la estimación de la señal e imagen atendiendo a los indicadores fundamentales que miden su calidad, como la relación señal a ruido, su incremento y el error cuadrático medio. El análisis de los métodos reportados en la literatura especializada conduce a la propuesta realizada en contraste con los métodos clásicos de deconvolución y restauración. Se experimenta con señales e imágenes simuladas y se prueba el método propuesto contrastando sus resultados con los métodos clásicos en PDS. Se propone una transformación asociada al precondicionamiento del problema inverso para casos de kernel no simétrico y se realizan pruebas que validan la propuesta en señales e imágenes reales afectadas por varias efectos de ruido y desenfoque.

El método de deconvolución propuesto mejora la relación señal a ruido y demás indicadores. Estos resultados sientan las bases para una nueva perspectiva en la deconvolución de señales e imágenes desde el campo de aplicación de los métodos numéricos, a partir de los recursos de hardware actuales que disminuyen el tiempo de ejecución de los algoritmos iterativos.

# ÍNDICE


Pág.

**RESUMEN** **II**

**ÍNDICE** **III**

**GLOSARIO** **VIII**

0.1. Acrónimos y Terminología . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . VIII

0.2. Operadores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . IX

0.3. Símbolos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . IX

**INTRODUCCIÓN** **1**

**1. DESARROLLO DEL MÉTODO DE DECONVOLUCIÓN.** **5**

1.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2. Método de Deconvolución . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2.1. La descomposición en valores singulares . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.3. Métodos de Regularización . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

1.3.1. Truncamiento de los valores singulares, TSVD . . . . . . . . . . . . . . 12

1.3.2. Método de Tikhonov . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.3.3. Filtro de Wiener, estimador óptimo en el sentido MSE . . . . . . . . . . 15

1.4. Deconvolución en el Dominio de la Frecuencia . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

1.4.1. El filtro Pseudo Inverso en el Dominio de la Frecuencia . . . . . . . . . . 18

1.4.2. El filtro de Tikhonov en el Dominio de la Frecuencia . . . . . . . . . . . 18

1.4.3. El filtro de Wiener en el Dominio de la Frecuencia . . . . . . . . . . . . 18

1.5. El caso bidimensional . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

1.5.1. El $kernel$ o PSF . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.5.2. Desenfoque uniforme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.5.3. Desenfoque por turbulencia atmosférica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.5.4. Desenfoque Gaussiano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.5.5. Desenfoque por dispersión . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.6. Conclusiones parciales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**2. ALGORITMOS DE DECONVOLUCIÓN EN SIMULACIONES 26**

2.1. Método iterativo propuesto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
2.1.1. El filtro de Landweber en el Dominio de la Frecuencia . . . . . . . . . . . 29
2.2. Situación experimental, Materiales y Métodos . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.3. Deconvolución de señales simuladas, caso 1D . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.4. Precondicionamiento de la Matriz de Convolución . . . . . . . . . . . . . . 36
2.5. Deconvolución de Imágenes. Simulaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
2.6. Conclusiones parciales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

**3. DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES ULTRASÓNICAS E IMÁGENES REALES 44**

3.1. Deconvolución de señales de ultrasonido en END . . . . . . . . . . . . . . 44
3.2. Deconvolución de Imágenes. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
3.3. Conclusiones parciales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

**CONCLUSIONES 59**

**RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS 60**

**BIBLIOGRAFÍA 61**

**ANEXOS 65**

**A. Descomposición en valores singulares del método de Tikhonov 66**

**B. Demostración del filtro de Wiener 67**

# LISTA DE TABLAS


2.1. Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB. . . . . . . 34
2.2. Tiempo consumido por cada método. Función en Matlab cputime. . . . . . . . . . 35
2.3. Pseudo-código para el precondicionamiento de la Matriz de Convolución. . . . . . 38
2.4. Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB. . . . . . . 41
2.5. Tiempo de procesamiento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

3.1. Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB. . . . . . . 48
3.2. Resultados obtenidos para la Imagen *Lenna*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
3.3. Resultados obtenidos para la Imagen *Cameraman*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
3.4. Resultados obtenidos para la Imagen *Mandril*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

# LISTA DE FIGURAS


1.1. Esquema del proceso de degradación de una señal. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2. Sistema Lineal de forma $Hx + \eta = y$, con $\eta$ en el orden de $10^{-3}$. Se muestra la señal observada $y$ solo afectada por el operador y con ruido. . . . . . . . . . . . . 10

1.3. Comportamiento de los componentes SVD. a) Caída de los valores singulares $\sigma_j$ y los componentes $u_j^T b$ y $u_j^T b/\sigma_j$. En b) se muestran los mismos indicadores más un ruido en el Sistema Lineal de forma $Hx + \eta = y$, con $\eta$ en el orden de $10^{-3}$. . . . . 11

1.4. Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización TSVD. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.5. Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización de Tikhonov. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

1.6. Auto-vectores de la SVD de la Matriz de Convolución. . . . . . . . . . . . . . . . 17

1.7. Sistema Lineal de forma $Hx+\eta = y$. Se muestra la imagen original $x$ afectada por el operador $H$, y con ruido $\eta$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

1.8. (a)Imagen *cameraman* original. (b) PSF de Desenfoque por movimiento lineal de 9 píxeles. (c) Imagen Borrosa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.1. Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización de Landweber. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

2.2. Señales del sistema convolucional. En (a), la señal original; en (b), el $kernel$ Gaussiano; en (c), el ruido aditivo y en (d), la señal observada. . . . . . . . . . . . . . 32

2.3. Deconvolución usando TSVD . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

2.4. Curva del MSE con respecto al parámetro $\alpha$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

2.5. Deconvolución usando Tikhonov . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

2.6. Deconvolución usando Landweber . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

2.7. Matrices de Deconvolución . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

2.8. Precondicionamiento en la Matriz de Convolución. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

2.9. Función de Dispersión Puntual para desenfoque por turbulencia atmosférica. . . . . 40

2.10. Solución de los métodos Wiener y Landweber en Imágenes . . . . . . . . . . . . . 40

2.11. Restauración de una Imagen con BSNR=25dB . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

2.12. Restauración de una Imagen con BSNR=15dB . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

3.1. Señal de entrada que representa el patrón de defectos en materiales . . . . . . . . . . 45
3.2. Observaciones del END por ultrasonido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
3.3. Señal duplicada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
3.4. Amplificación del ruido en la señal en la solución usando Landweber . . . . . . . . 47
3.5. Progresión de los valores singulares. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
3.6. Solución usando el método TSVD con BSNR=40$dB$. . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
3.7. Solución usando el método Tikhonov con BSNR=40$dB$. . . . . . . . . . . . . . . . 50
3.8. Solución usando el método propuesto Landweber con BSNR=40$dB$. . . . . . . . . . 51
3.9. Imágenes de prueba . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
3.10. (a)Muestra de la Imagen $Lenna$ desenfocada por movimiento lineal y contaminada con ruido gaussiano a BSNR=40$dB$. (b) Con desenfoque Gaussiano. . . . . . . . 53
3.11. Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=40$dB$ . . . . 53
3.12. Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=25$dB$ . . . . 54
3.13. Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=15$dB$ . . . . 55
3.14. Solución de los métodos Wiener y Landweber en Imágenes . . . . . . . . . . . . . . 56
3.15. Solución de los métodos Wiener y Landweber para $Mandril$ con desenfoque por movimiento lineal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

# GLOSARIO

## 0.1. Acrónimos y Terminología

1D – Unidimensional.

2D – Bidimensional.

BSNR – Relación señal a ruido desenfocada.

BTTB – Matriz de bloques de Toeplitz.

END – Ensayo no destructivo.

FFT – Transformada rápida de Fourier.

ISNR – Incremento en la Relación señal a ruido.

LIP – Problema lineal inverso.

LTI – Lineal e invariante en el tiempo.

KKT – condiciones de Karush–Kuhn–Tucker.

MSE – Error cuadrático medio.

PDS – Procesamiento Digital de Señales.

PSF – Point spread function; *kernel* de la convolución.

SNR – Relación señal a ruido.

SVD – Descomposición en valores singulares.

TSVD – Descomposición en valores singulares truncada.

WSS – Estacionaria en sentido amplio.

## 0.2. Operadores

$*$ – Convolución; $*$ centrado.

$|\cdot|$ – Valor absoluto.

$\|\cdot\|$– Norma.

$H^*$ – Conjugada de la variable $a$.

$\mathbf{F}(\cdot)$ – Transformada de Fourier.

$\mathbf{F}^{-1}(\cdot)$ – Transformada de Fourier inversa.

## 0.3. Símbolos

$\sigma$ – Desviación estándar.

$\sigma^2$ – Varianza.

$f(t)$ – Función en el tiempo continuo, $t$.

$f(n)$ – Función en el tiempo discreto, $n$.

$\widehat{x}$ – Estimado de la variable $x$.

# INTRODUCCIÓN

La restauración de imágenes, afectadas por los dispositivos de adquisición o por el ruido aditivo, inherente a la electrónica y a los sistemas físicos reales, es un problema inverso de recurrente análisis en los estudios actuales (Chen, 2003; Starck & Pantin, 2002). La solución de este problema inverso tiene aplicaciones en numerosos campos, tales como, la astronomía, medicina, biología, ensayos no destructivos, etc. (Byrne, 1998; Mignotte & Meunier, 1999; Hanke, Nagy, & Vogel, 2000; Ng, Plemmons, & Pimentel, 2000). Como los algoritmos desarrollados para el caso de señales unidimensionales pueden extenderse a la señales bidimensionales, (Hillery & Chin, 1991; Mignotte, 2007; Vonesch & Unser, 2007). Se presentarán los algoritmos en señales y después se extienden a imágenes, regla que se cumple a lo largo de este trabajo. El mismo término aplicado a señales de más de 2 dimensiones se referirá como objeto.

Una señal degradada se genera por la convolución entre el objeto real y una función de dispersión puntual (PSF). La PSF es el objeto obtenido a partir de una fuente puntual en el marco del proceso de degradación. En aplicaciones reales puede ocurrir que la PSF es desconocida. En este caso se realiza una deconvolución ciega (Ng, Plemmons, & Qiao, 1997; Chan & Wong, 1996), caso que no será tratado en este trabajo y que puede constituir una línea futura de trabajo. Aquí se asume que el proceso de degradación es de alguna manera conocido: más concretamente, su conocimiento es por lo general aproximado, puesto que se obtiene a partir de la fuente o de la observación. Por otra parte, se asume un sistema invariante en el espacio, es decir, el efecto de degradación es independiente de su posición (un objeto degradado se verá igual independientemente de su posición en la imagen).

En el caso variable , es posible un enfoque simplemente aproximado por uno espacialmente invariante, que se puede hacer por un promedio de varios PSF.

La imagen observada usualmente está afectada por ruido, que puede tener origen en diversas fuentes (por ejemplo, mediciones, registros, transmisión, etc.). Si el ruido proveniente de diversas fuentes se tiene en consideración, se puede formalizar con diferentes distribuciones estadísticas de probabilidad (Gaussiana, Poisson, etc.). De hecho, se han desarrollado algoritmos para clases especiales de ruido (por ejemplo, el método de Richardson-Lucy se usa extensivamente en Astronomía en presencia de ruido Poisson, (Starck, Pantin, & Murtagh, 2002; Starck & Pantin, 2002)). También otra información *a priori* tal como la no negatividad del valor de los pixels a reconstruir en una imagen (provenientes de una imagen astronómica) puede afectar la selección de la técnica de regularización (e.g, la no negatividad puede ser incorporada como una restricción convexa o mediante una función de máxima entropía) (Engl, Hanke, & Neubauer, 1996).

Independientemente de si se trata la deconvolución de una señal o de restaurar una imagen, se está en presencia de un problema inverso. Los problemas inversos en general son mal condicionados, para la mayoría de las aplicaciones físicas mal condicionados en el sentido de Hardamard (Vogel, 2002; Donatelli, 2005). Comúnmente se intenta resolver el problema del mal-condicionamiento a través de añadir información sobre la solución o sobre la señal de entrada. Algunas técnicas de regularización propuestas en la literatura, incluyen el método de Tikhonov, (A.N.Tikhonov & Arsenin, 1977) y sus generalizaciones; descomposición en valores singulares truncada (TSVD)(Hansen, 2002); y algunos métodos iterativos como el método Landweber (Byrne, 1998) o el Gradiente Conjugado (Golub & Ye, 2000).

Abordar la temática de la estimación de la señal o imagen a partir de una contaminada con ruido, es la tarea propuesta al realizar este trabajo.

Para desarrollar el proceso condujo a plantear como:

**Problema Científico**

¿Cómo mejorar el proceso de deconvolución de señales e imágenes?

El uso de métodos clásicos en la solución ha sido el enfoque preferido teniendo en cuenta la comodidad de encontrar una solución analítica si es posible pero con el desarrollo de poderosos procesadores que revitalizan los métodos numéricos como una potente herramienta matemática, se plantea como **Idea a defender** que si se retoma el análisis mediante algoritmos iterativos frente a los métodos comunes en el procesamiento de señales, se puede mejorar el proceso de deconvolución.

El **Objetivo General** es mejorar el proceso de deconvolución de señales e imágenes.

**Objeto de Investigación**: Solución de problemas inversos.

**Campo de acción**: La deconvolución de señales e imágenes.

Para el logro del objetivo planteado se desarrollan las siguientes **Tareas**,

- Análisis del proceso de deconvolución de señales.
- Preparación teórica y revisión bibliográfica sobre la temática.
- Caracterización de los métodos matemáticos de acuerdo a la situación analizada.
- Realización del procesamiento computacional del modelo.
- Análisis de los resultados obtenidos y caracterizar la señal estimada.
- Elaborar los algoritmos para la conformación de imágenes.
- Elaboración el algoritmo de deconvolución sobre señales unidimensionales y en imágenes acústicas.
- Preparación del informe del trabajo realizado.

La metodología utilizada en este trabajo es la siguiente:

Del nivel teórico: Los métodos de análisis, síntesis, inducción, deducción e histórico para resumir y sintetizar lo estudiado sobre la deconvolución de señales e imágenes.

El método de modelación, específicamente el modelo teórico sobre el fenómeno de degradación de una señal y su asociación a las técnicas de computación. El método de tránsito de lo abstracto a lo concreto que permitió establecer relación y comparación entre la interpretación de los resultados del procesamiento y la realidad objetiva.

Para el exitoso desarrollo de esta investigación se hizo necesario una amplia revisión bibliográfica que unido a técnicas de búsqueda, procesamiento y análisis de la información arrojó resultados valiosos.

La tesis está estructurada en Síntesis, Introducción, tres Capítulos, Conclusiones y Recomendaciones, Referencias Bibliográficas y Anexos.

**Capítulo 1: DISCUSIÓN DE LOS MÉTODOS DE DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES**

En este Capítulo se exponen los temas actuales en la deconvolución de señales bajo diversos enfoques matemáticos, así como, los elementos teóricos que fundamentan los métodos que se expondrán por el autor para el problema en cuestión

**Capítulo 2: DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES SIMULADAS**

El Capítulo 2 se aplican los métodos discutidos en señales e imágenes simuladas y se evalúa el desempeño de cada uno ante distintas PSF. También se presenta una observación general sobre un análisis comparativo entre los resultados obtenidos Los resultados obtenidos. Se compara, además, con lo reportado en la literatura.

**Capítulo 3: DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES REALES**

En el Capítulo 3, se realiza la descripción del procesamiento realizado. Los resultados obtenidos se comparan con los reportes actuales en la literatura especializada.

**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

Las Conclusiones brindan el análisis del alcance de los resultados de este trabajo y se compara con lo propuesto anteriormente, haciendo énfasis en el cumplimiento de los objetivos planteados.

Las Recomendaciones se centran en futuras líneas de trabajo y resultados que pudieran aplicarse en otros campos de la ciencia.

# Capítulo 1

# DESARROLLO DEL MÉTODO DE DECONVOLUCIÓN.

El Capítulo 1 se dedica al estudio del estado del arte sobre la deconvolución de señales e imágenes, Partiendo de los enfoques más comunes, se realiza un análisis crítico de los métodos de deconvolución de señales en el dominio temporal y frecuencial, para el caso 1D. Y se trata el proceso de restauración (caso 2D), con la extensión de los métodos previamente discutidos. Finalmente se exponen algunas consideraciones a modo de conclusión, útiles para los capítulos posteriores.

## 1.1. Introducción

En el procesamiento digital de señales, el fin último de las técnicas de restauración es, en cierto modo, el de mejorar una señal o imagen. Con el fin de introducir una diferenciación, consideraremos la restauración como un proceso que trata de reconstruir o de recuperar una imagen degradada basándose en algún tipo de conocimiento *a priori* sobre el proceso de degradación. Así las técnicas de simulación se orientan hacia la introducción de modelos de degradación, que luego se aplican en sentido inverso para recuperar la señal original. Esta forma de proceder frecuentemente implica la formulación de un criterio de bondad que dará una estimación óptima del resultado deseado. Por el contrario, las técnicas de mejora son básicamente procedimientos heurísticos diseñados para manipular una imagen aprovechando los aspectos psicofísicos inherentes al sistema visual humano.

Las primeras técnicas de restauración digital procedían básicamente de conceptos del dominio de la frecuencia. Sin embargo, este capítulo se centra en una aproximación algebraica, a partir de los mismos principios.

El proceso de degradación de una señal se puede representar como un operador (o un sistema) $h(t)$ que junto a un término aditivo de ruido $\eta(t)$ actúa sobre una señal de entrada $x(t)$ para producir una señal degradada $y(t)$ como se muestra en la Fig.1.1. La restauración puede entenderse como el proceso de obtener de forma aproximada $x(t)$, a partir de la observación $y(t)$ y del conocimiento de la degradación en la forma del operador $h(t)$. Se supone que el conocimiento del ruido $\eta(t)$ se limita a una información de naturaleza estadística.

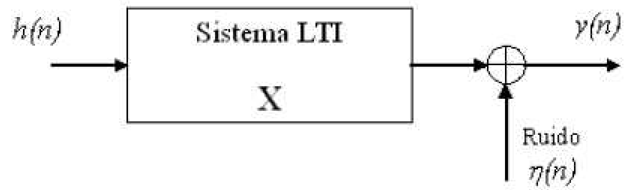


Figura 1.1: Esquema del proceso de degradación de una señal.

El modelo matemático que representa este fenómeno físico es,

$$y(t) = x(t) * h(t) + \eta(t). \tag{1.1.1}$$

El interés de un problema inverso es conocer la señal real $x(t)$, de forma que el residuo $\eta(t)$, sea mínimo, donde $x(t) * h(t)$, representa el producto de convolución discreto de cada punto $x_t$, con el pulso $h(t)$.

## 1.2. Método de Deconvolución

Dada la señal observada $y(t)$ y una estimación para el pulso o PSF $h(t)$, se desea extraer la función de reflexividad $x(t)$ . La solución del problema inverso que se enuncia previamente en (1.1.1) conduce a que la relación entre estas señales se encuentra minimizando la función convexa,(Vogel, 2002).

$$\|\eta\|^2 = \frac{1}{2} \min \|y(t) - x(t) * h(t)\|^2. \tag{1.2.1}$$

De lo anterior se desprende el análisis bajo cualquier método numérico.
Sin embargo la diferencia de cuadrados existentes en el argumento de la expresión, conduce a pensar particularmente en el enfoque de mínimos cuadrados como criterio de optimización. Existen diversos enfoques para la solución del problema inverso que encierra el fenómeno de la deconvolución de señales unidimensionales o de la restauración en el caso de señales

bidimensionales (al que en lo adelante se llamará, imágenes). Estos se refieren a distintos criterios de optimización que intentan solucionar el problema directamente sobre la señal en el dominio temporal y otros que lo hacen sobre la señal en un dominio transformado. En el análisis que se realizará en las secciones posteriores del trabajo, sobre el dominio temporal se presentarán las matrices con letras mayúsculas y los vectores con letras minúsculas; bajo esta convención la ecuación (1.1.1) se enuncia como $y = Hx + \eta$.

### 1.2.1. La descomposición en valores singulares

En el trabajo con matrices es común la descomposición de estas por alguna vía que facilite y acelere los cálculos. El problema matemático que encierra la descomposición en valores singulares se ha tratado por varios autores (Highan, 1996; Nash, 1990). Sin embargo, con un propósito computacional, un punto de vista es más útil. Se considera la posibilidad de encontrar una matriz ortogonal $V_{n\times n}$, que transforme la matriz real $H_{m\times n}$ en otra matriz $B_{m\times n}$, cuyas columnas sean ortogonales.

De forma general se puede decir que cualquier matriz A$\in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene descomposición en valores singulares (SVD)[1] ver (Nash, 1990), tomando cualesquiera valores positivos arbitrarios tales que:$B = U\Sigma$ donde $U^T U = I$, entonces para la matriz $A_{m\times n}$ existe una descomposición SVD.

$$A = U\Sigma V^T, \tag{1.2.2}$$

donde $\Sigma$ es una matriz diagonal que contiene los valores singulares tales que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k \geq 0 \,,$$

para $k = \overline{1,n}$ y $U$ y $V$ son los vectores singulares izquierdos y derechos respectivamente. Si la matriz $A$ es cuadrada de orden $n$ entonces también lo serán $U, \Sigma$ y $V$. Pero en el caso general de una matriz de $m \times n$ se obtiene, como se mencionó anteriormente, la descomposición SVD, en la que $\Sigma$ será una matriz diagonal del mismo orden de $A$, mientras que $U$ y $V$ serán matrices cuadradas de orden $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente.

Los valores singulares de $A$, son la raíz cuadrada de los valores propios de la matriz $A^T A$, $U$ representa los vectores propios de la derecha y $V$ los de la izquierda de $A^T A$. De ahí que sea práctica común extraer los valores propios y los de vectores propios de una matriz cualquiera cuyas propiedades son conocidas.

[1]SVD: del inglés, singular value decomposition

Si $A$ es simétrica, $A = A^T$, entonces la SVD de $A$ está relacionada con la descomposición en valores propios $A = W\Lambda W^T$,

$$(U, \Sigma, V^T) = \begin{cases} (W, \Lambda, W^T) & ; \lambda_i \geq 0 \\ (W, \Lambda, -W^T) & ; \lambda_i < 0 \end{cases}$$

Los autovalores y los vectores singulares satisfacen la relación $Av_i = \sigma u_i$ y $\|Av_i\| = \sigma_i$ $\forall i$. Una matriz es no singular si todos sus valores singulares son no nulos, este es un elemento que garantiza la inversión de la misma. Propiedades de los valores singulares:

- Los valores singulares de $H$ decaen gradualmente,
- Típicamente, los valores singulares siguen una progresión armónica $\sigma_j \simeq i^{-n}$ o geométrica $\sigma_j \simeq e^{-ni}$.

Para un sistema de ecuaciones $Hx = y$, una primera aproximación, asumiendo $H$ inversible, sería:

$$\begin{aligned} x_{est} &= H^{-1}y \\ &= (U\Sigma V^T)^{-1}y && \text{aplicando la SVD según 1.2.2} \\ &= (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1}y && \text{como } VV^T = UU^T = I \Rightarrow (V^T)^{-1}1 = V; U^{-1} = U^T \\ &= V\Sigma^{-1}U^Ty && \Sigma = \{\sigma_i\} \text{ Matriz diagonal } \Sigma^{-1} = \{\tfrac{1}{\sigma_i}\}; \forall i = j \end{aligned}$$

expresando la solución del Sistema Lineal mediante la SVD,

$$x_{est} = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^T y}{\sigma_j} v_j \qquad \forall \sigma_j > 0. \tag{1.2.3}$$

Este sistema es bien-definido (*well-posed*) si se satisface la condición de Picard (Hansen, 2002):

$$||x_{est}||^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{|u_j^T y|^2}{\sigma_j^2} < \infty. \tag{1.2.4}$$

Esta condición fallará si $\sigma_j \to 0$ porque no se puede garantizar una dependencia continua entre la estimación y la observación, esto se conoce como problema mal-definido (*ill-posed*).

Esta es sólo una de las tres codiciones de Hadamard para un sistema bien-definido.

**Definición 1.2.1** (Well-posed, Hadamard (Donatelli, 2005))**.** *Un problema es bien-definido si su solución:*

*(i) existe*

*(ii) es única*

*(iii) depende continuamente de los datos*

De esta forma se puede resumir que el sistema $y = Hx$ es mal-definido si se cumplen las siguientes condiciones:

1. No existencia de solución: Hay observaciones $y$ que no corresponden a ninguna solución $x$.
2. No unicidad: Hay observaciones $y$ que conducen a diferentes soluciones $x$.
3. Inestabilidad: Ciertos cambios pequeños en los datos $Hx$ conducen a grandes cambios en la solución $x$.

De lo anterior se deduce que sería mal-condicionado el sistema cuyo operador $H$, tenga valores singulares que decaen gradualmente a cero y la razón de su valores extremos sea grande. Por ejemplo, partiendo de la Definición 1.2.1*(iii)*, si al miembro derecho se le adiciona algún ruido (perturbación), como es común en los sistemas físicos reales, cuando $\sigma_j \to 0$, la amplificación del ruido altera la estimación. Esto se conoce como mal- condicionamiento (*ill-conditioned*), y el valor de esta amplificación está dado por la razón anteriormente citada, conocida como el número de condición de la matriz:

$$cond(H) = \frac{max\{\sigma_j\}}{min\{\sigma_j\}}; \sigma_j > 0. \tag{1.2.5}$$

Este parámetro representa el valor por el cual se multiplicaría cualquier alteración en la entrada del sistema.

Partiendo del problema de convolución en (1.1.1), es conocido que el producto de convolución se puede sustituir por la multiplicación de $x$ por un operador de convolución $H$ (Vogel, 2002). De esta forma tendríamos el Sistema Lineal objeto de discusión $y = Hx + \eta$.

La solución en (1.2.3) para un ruido $\eta$ presente en el sistema quedaría (Lavarello, Kamalabadi, & O'Brien, 2006):

$$x_{est} = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^T y}{\sigma_j} v_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^T \eta}{\sigma_j} v_j \qquad \forall \sigma_j > 0. \tag{1.2.6}$$

Si $H = I$, con $I$ la matriz idéntica, se estaría en presencia de un problema de supresión de ruido (*denoising*) y si $\eta = 0$ sería un problema de deconvolución (*deblurring*)[2].

Supongamos la convolución de una señal con un *kernel*[3] Gaussiano. Como se ilustra en la Fig. 1.2, donde, $\eta$ es un ruido blanco Gaussiano del orden de $10^{-3}$.

[2] El término *deblurring* es equivalente a *desenfoque*

[3] En lo adelante llamaremos kernel al operador de convolución, núcleo de la convolución

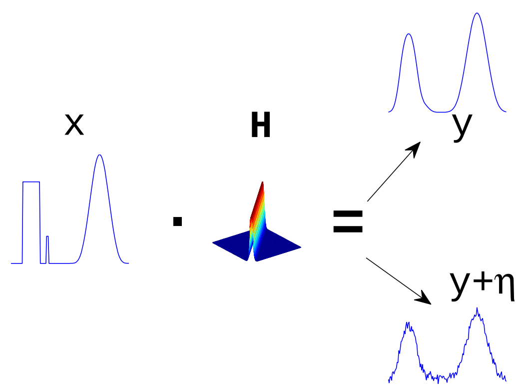


Figura 1.2: Sistema Lineal de forma $Hx + \eta = y$, con $\eta$ en el orden de $10^{-3}$. Se muestra la señal observada $y$ solo afectada por el operador y con ruido.

El número de condición de la matriz $H$ se obtiene a partir de su descomposición en valores singulares. Se usa la notación en Matlab para este ejemplo.

```
>> cond(H)
ans =
  3.5863e+018

El en caso de la función svd, quedaría:

>> [U,S,V]=svd(H);
>> D=diag(S);
>> condnumber=max(D)/min(D)

condnumber =    3.5863e+018
```

El alto valor del número de condición de la matriz implica el mal-condicionamiento en la solución del sistema. Se espera que cualquier alteración en los valores de entrada conduzca a una solución errónea, o como habíamos planteado, a la no dependencia entre observación y el valor real.

En la Fig. 1.3 se muestra, en a), que a medida que decrecen los valores singulares, el producto $u_j^T y$ decrece, lo que garantiza la estabilidad del sistema, obteniendo un valor prácticamente constante de $u_j^T y/\sigma_j$, en este caso no se ha adicionado ruido. En b), puede observarse que la presencia de ruido, aún cuando su valor es pequeño, conduce a un incremento del término $u_j^T y/\sigma_j$, y además, la inversión $u_j^T y$ ya no se corresponde con la caída de los valores singulares $\sigma_j$. Debido al número de condición de la matriz se ha amplificado el ruido, lo que conduce a una solución inestable.

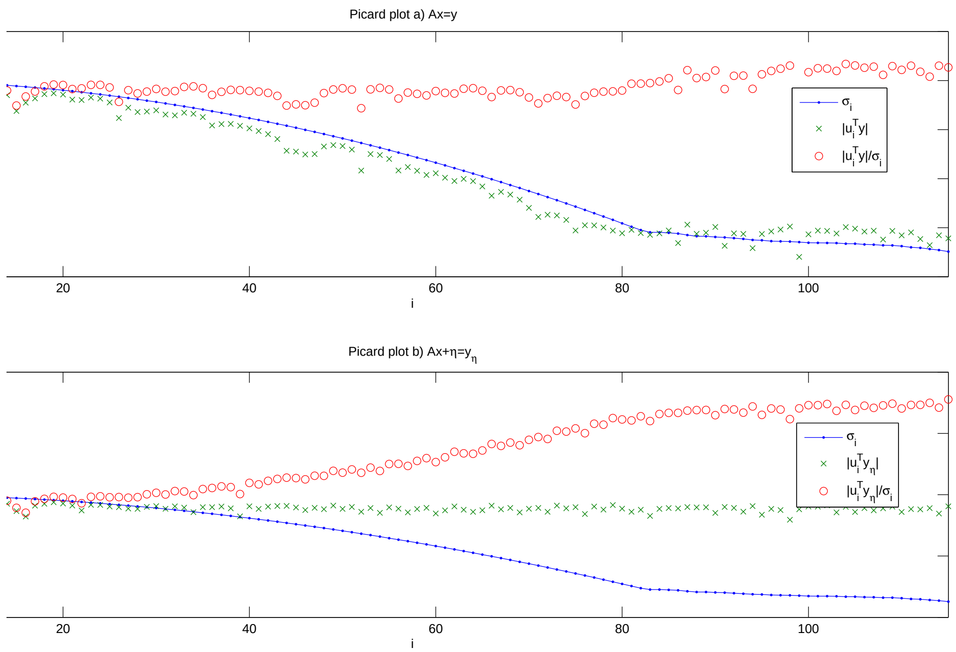


Figura 1.3: Comportamiento de los componentes SVD. a) Caída de los valores singulares $\sigma_j$ y los componentes $u_j^T b$ y $u_j^T b/\sigma_j$. En b) se muestran los mismos indicadores más un ruido en el Sistema Lineal de forma $Hx + \eta = y$, con $\eta$ en el orden de $10^{-3}$.

El resultado anterior conduce a la necesidad de implementar algunas técnicas que disminuyan el mal- condicionamiento de la matriz o que supriman los valores singulares cercanos a cero, que finalmente son los que crean la indeterminación como puede observarse en (1.2.6). Estas técnicas son conocidas como Métodos de Regularización.

Se ha extendido el análisis de la SVD porque este es el principio básico de los estudios actuales que se analizarán críticamente en los epígrafes siguientes.

## 1.3. Métodos de Regularización

La regularización consiste básicamente en introducir alguna clase de información *a priori* para estabilizar el problema en el sentido de Hadamard. En la literatura se ha desarrollado varias formas de penalización, en problemas disímiles: (Acar & Vogel, 1994) muestran resultados en señales eléctricas a partir de la regularización de Tikhonov y la de Variación Total. (Stefan, Garnero, & Renaut, 2005) expone el uso de las mismas en la reconstrucción de señales en estudios sísmicos, otros autores como (Herrera, Orozco, Moreno, & Calas, 2005b) utilizan la regularización a través de una transformada wavelet con un filtro de Wiener y (Hansen, 2002) utiliza la regularización con matrices Toeplitz.

### 1.3.1. Truncamiento de los valores singulares, TSVD

La manera más natural de regularizar un problem inverso, sería eliminar los valores singulares menos estables, cuando el nivel de ruido en los datos se incrementa. Este método es conocido como Truncamiento de la Descomposición en Valores Singulares (TSVD, *Truncated SVD*) (Lavarello $et\ al.$, 2006). Para ello se necesita un parámetro de regularización $\alpha$, que actúe como nivel de umbral para los valores singulares. De esta forma la expresión siguiente (Vogel, 2002):

$$w_\alpha(\sigma^2) = \begin{cases} 1, & \sigma_j^2 > \alpha, \\ \\ 0, & \sigma_j^2 \leq \alpha, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

define un filtro $w_\alpha$, que actúa sobre los valores singulares, dejando pasar sólo aquellos mayores que $\alpha$, como se muestra en la Fig. 1.4, donde desplazamiento a la izquierda del filtro por la disminución del parámetro de regularización $\alpha$, implica que en la solución del problema se incluyen los menores valores singulares. Entonces la estabilidad del sistema dependería en gran medida de la selección apropiada del parámetro de regularización y aún en ese caso se tiene la indeterminación entre supresión del ruido y pérdida de información útil.

Este truncamiento elimina los efectos de amplificación indeseados, pero también conduce a un suavizamiento de la solución por la eliminación de los menores valores singulares, que son los asociados a los auto-vectores que contienen los componentes de alta frecuencia, considerando estos como coeficientes de Fourier.

El autor no coincide con el análisis de Donatelli (2005), donde no considera en sus Tesis el TSVD, por ser computacionalmente costoso. En principio el Método de Regularización puede rechazarse por las consideraciones arriba planteadas en cuanto a su incertidumbre. Pero el costo computacional, no es mayor que el de los otros métodos considerados en (Donatelli, 2005).

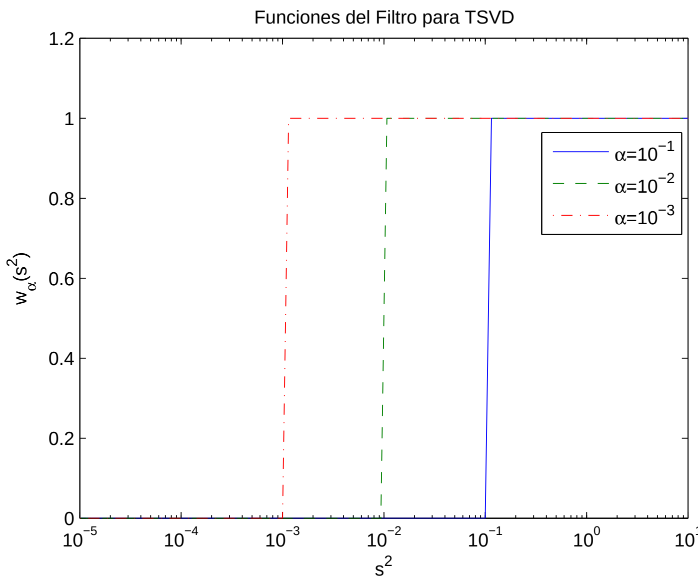


Figura 1.4: Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización TSVD.

Si incluimos la función del filtro $w_\alpha(\sigma^2)$ en (1.2.3) se tendría:

$$x_{est} = \sum_{j=1}^{n} w_\alpha(\sigma_j^2) \frac{u_j^T y}{\sigma_j} v_j \qquad \forall \sigma_j > 0. \tag{1.3.2}$$

Lo que conduce al método de regularización de menor costo computacional de todos los reportados en la literatura basados en SVD, según puede observarse en la siguente ecuación:

$$x_{est} = \sum_{\sigma_j > \alpha} \frac{u_j^T y}{\sigma_j} v_j. \tag{1.3.3}$$

### 1.3.2. Método de Tikhonov

La fuente más importante de problemas de mínimos cuadrados con restricciones cuadráticas, es la discretización de problemas inversos mal condicionados. En este tipo de problemas los valores singulares de $A$ decaen exponencialmente a cero; por esta razón, los métodos tradicionales para resolver problemas de mínimos cuadrados no son útiles. Introduciendo cierta información sobre la solución, el problema (1.2.1) se puede reemplazar por uno equivalente bien condicionado, que pueda resolverse con cierta precisión.

Esta técnica es conocida como regularización. En (Castillo, 2007) se plantea formalmente el problema de mínimos cuadrados con restricción cuadrática. En este trabajo, primero se propone transformar la función pulso $h(t)$ que forma parte del producto convolucional con $x(t)$ en una matriz de convolución $H$, de manera que al reescribir el problema inicial queda $y = Hx+\eta$.

$$\frac{1}{2}\min \|y - Hx\|^2 \quad s.a \quad \|Cx - b\|^2 \leq \Delta. \tag{1.3.4}$$

Donde $\|Cx - b\|^2 \leq \Delta$ representa la información que se tiene acerca de la solución y el parámetro $\Delta$ controla el balance entre el tamaño del residual y la continuidad de la solución.

En algunos casos de utilidad práctica, la solución se encuentra en la frontera, por lo tanto, tiene sentido estudiar el problema (Castillo, 2007):

$$\frac{1}{2}\min \|y - Hx\|^2 \quad s.a \quad \|Cx\|^2 = \Delta. \tag{1.3.5}$$

suponiendo que $b = 0$ cuya solución y algunos aspectos teóricos ya comentados.

Construyendo el Jacobiano para (1.3.5) y haciendo uso de una notación más cómoda,

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\|y - Hx\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|Cx\|^2. \tag{1.3.6}$$

Se trata ahora de minimizar esta nueva función Jacobiana, como un problema irrestricto.

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \tfrac{1}{2}\|y - Hx\|^2 + \tfrac{\alpha}{2}\|Cx\|^2 \\ J'_\alpha &= (y - Hx)(-H) + \alpha(Cx)C \quad \text{derivando } \tfrac{\partial J}{dx} \\ &= -H^T y + H^T Hx + \alpha C^T Cx \end{aligned}$$

aplicando la condición necesaria de mínimo $J'_\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} &H^T Hx + \alpha C^T Cx - H^T y = 0 \\ &(H^T H + \alpha C^T C)x = H^T y \end{aligned}$$

y la condición suficiente $J''_\alpha \geq 0$, donde, $J''_\alpha = H^T H + \alpha C^T C$, es decir, que este argumento sea semidefinido positivo.

Para cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) , para un mínimo local con restricciones, el operador $\alpha > 0$ y si se supone $C = I$; para que se cumpla la condición suficiente, la PSF tiene que ser semidefinida positiva. Entonces se obtiene la solución del problema.

$$x = (H^T H + \alpha I)^{-1} H^T y. \tag{1.3.7}$$

Para cada componente $x_i$, se cumple la ecuación,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha_j} \right) \frac{u_j^T y_i}{\sigma_j} v_j, \tag{1.3.8}$$

de esta última se conoce como regularizador de Tikhonov (o Función del Filtro) a la relación:

$$w_\alpha(\sigma^2) = \left( \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha_j} \right). \tag{1.3.9}$$

La Fig.1.5, muestra la función del Filtro de Tikhonov, de igual forma a como se analizó previamente el TSVD, para diferentes valores del parámetro de regularización $\alpha$. Note el corrimiento a la izquierda del filtro, lo que indica la entrada de los valores singulares de menor valor.

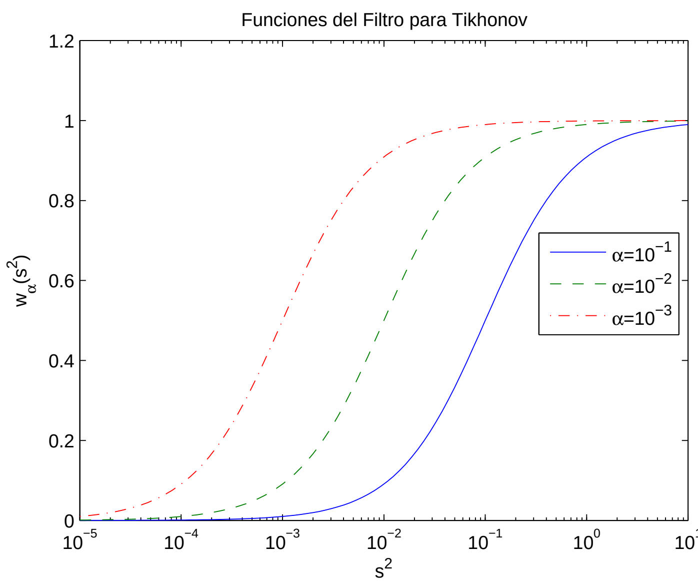


Figura 1.5: Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización de Tikhonov.

Este método tiene la ventaja de resolver el mal condicionamiento del problema inverso del cual parte, independiente de los valores singulares $\sigma_j$ de la matriz de convolución $H$, pero no es capaz de mejorar el valor de la solución calculada.

### 1.3.3. Filtro de Wiener, estimador óptimo en el sentido MSE

El filtro inverso ideal para $x = H^{-1}y$, como se ha analizado, no es realizable en la práctica, porque para determinadas frecuencias necesitaría una respuesta infinita (Kino, 1989). La mejor aproximación a este filtro sería aquel con el menor error cuadrático medio (*mean square error*, MSE) de amplitud, conocido como filtro de Wiener (Abeyratne $et\ al.$, 1997; Kino, 1989).

Siguiendo a Ghael, Sayeed, y Baraniuk (1997), se deriva la SVD a partir de la expresión matricial del Filtro:

$$G_w = R_x(R_x + \sigma^2 I)^{-1}, \tag{1.3.10}$$

donde $G_w$, es la función del filtro, $R_x$ es la autocorrelación de la señal de entrada y $\sigma^2$, es la varianza del ruido.

El inconveniente del Filtro de Wiener es que necesita conocer los estadísticos de segundo orden la señal de entrada, además de información sobre el ruido. Algo que generalmente se necesita estimar previamente o asumir conocidas (Ghael $et\ al.$, 1997). A pesar de estos inconvenientes, hay estrategias para la estabilización del filtro y para la obtención de los parámetros a partir de métodos iterativos que han sido descritos en (Hillery & Chin, 1991), con implementaciones en (Herrera, Moreno, Calas, & Orozco, 2005a; Herrera, Orozco, & Rodríguez, 2006; Herrera, 2006)

## 1.4. Deconvolución en el Dominio de la Frecuencia

Los análisis anteriores se han basado en encontrar la solución del Sistema Lineal $Ax = b$, a partir de la descomposición de la Matriz de Convolución $H$, en sus componentes SVD. O sea, el problema básico dado en (1.1.1), se sustituye por una multiplicación de matriz y vector, apoyado en la SVD.

En principio, los vectores singulares forman una base de senos y cosenos en la cual se proyecta el vector (señal) y los valores singulares son los coeficientes de correlación entre el vector de entrada y cada auto-vector. Esto puede observarse en la Fig.1.6, donde a medida que aumenta el índice del autovector, la forma de onda se convierte en una de mayor frecuencia, asociada a valores singulares de menor magnitud.

Este es el mismo sentido de la descomposición de una señal en series de Fourier (Oppenheim & Schafer, 1989), en la cual las funciones senos y cosenos forman una base ortonormal, donde se proyecta la señal y los coefficients, $a_n$ y $b_n$, son los respectivos coeficientes de correlación (Proakis

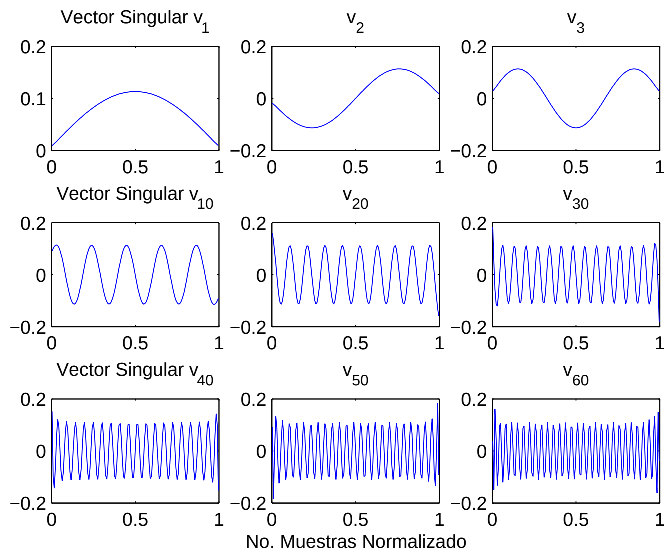


Figura 1.6: Auto-vectores de la SVD de la Matriz de Convolución.

& Manolakis, 1996). En el caso no periódico se emplea la Transformada de Fourier y en este trabajo se usará su variante discreta. Donoho (1995b), desarrolló un método similar a la SVD, pero cambiando los vectores singulares por funciones Wavelets, conocido como Deconvolución Wavelet Vaguelette, que ha generado una línea de investigación con resultados relevantes (Johnstone, Kerkyacharian, & Raimondo, 2004; Donoho & Raimondo, 2005). Esta línea puede ser objeto de trabajos futuros.

Replanteando el problema de Deconvolución en la Frecuencia y por la conocida propiedad de la transformada de que, convolución en el tiempo es multiplicación en la Frecuencia (Oppenheim & Schafer, 1989), se tiene, que el sistema $y(n) = h(n) * x(n) + \eta(n)$, se convierte en:

$$Y(f) = H(f)X(f) + N(f), \tag{1.4.1}$$

donde: $Y(f)$, $H(f)$, $X(f)$ y $N(f)$ son las respectivas transformadas de Fourier[4] de $y(n)$, $h(n)$, $x(n)$ y $\eta(n)$. Si la respuesta de frecuencia del sistema $H(f)$ no tiene ceros, se puede obtener un estimado de $F\{x(n)\}$ como: $X_1(f) = H^{-1}(f)Y(f) = X(f) + H^{-1}(f)N(f)$. Este truncamiento en la frecuencia, es conocido como Filtro Pseudo Inverso (Kino, 1989).

[4]A diferencia de la notación para matrices, en la trasformada se emplean los paréntesis para indicar la variable independiente (f): frecuencia

### 1.4.1. El filtro Pseudo Inverso en el Dominio de la Frecuencia

Para un $H$ no inversible, se convierte el problema de la deconvolución en mal-condicionado conduciendo a estimados erróneos (Neelamani, Choi, & Baraniuk, 2004). La primera aproximación pudiera obtenerse usando el filtro pseudo inverso, equivalente al TSVD en (1.3.1), como se muestra en la expresión siguiente (Kalifa & Mallat, 2003):

$$H(f)^{-1} = \begin{cases} 1/H(f), & si \ \ H(f) \neq 0, \\ 0, & si \ H(f) = 0, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Sin embargo, donde $H(f)$ toma valores cercanos a cero, hay una gran amplificación del ruido con varianza tendiendo a infinito, lo que conduce a estimaciones incorrectas (Neelamani, Choi, & Baraniuk, 1999). O sea, si $H(f) \approx 0$, el problema de la deconvolución es singular y para resolverlo se necesita algún método de regularización, que reduzca la varianza de la señal estimada.

### 1.4.2. El filtro de Tikhonov en el Dominio de la Frecuencia

A partir de la representación matricial del Filtro de Tikhonov, $(H^T H + \alpha I)^{-1} H^T$, en (1.3.7). Se puede obtener su representación en la frecuencia, usando los pares transformados (Oppenheim & Schafer, 1989), y la solución del sistema sería:

$$X_1(f) = \frac{H^*(f)}{|H(f)|^2 + \alpha^2} Y(f). \tag{1.4.3}$$

El problema de la selección del parámetro $\alpha$, es también crítico en la solución por Tikhonov en el dominio de Fourier. Una posible vía se analizará en la sección dedicada al filtro de Wiener.

### 1.4.3. El filtro de Wiener en el Dominio de la Frecuencia

La mejor aproximación al filtro inverso, sería aquella con el menor error cuadrático medio (*mean square error*, MSE) de amplitud, conocido como filtro de Wiener (Abeyratne $et\ al.$, 1997; Kino, 1989).

La señal estimada, $x_1(n)$, de $x(n)$, puede formularse como (Izzetoglu, Onaral, & Bilgutay, 2000):

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \sum_k g(k) y(n-k) \\ &= \sum_l s(n) y(n-l), \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

donde $x(n)$ es la respuesta del medio real y $s(n) = g(n) * h(n)$. Idealmente, $s(n)$ es una función delta de Kronecker, $\delta(n)$, cuando $g(n)$ es el inverso del pulso ultrasónico $h(n)$ y $x_1(n) = x(n)$.

$$g(n) * h(n) = \delta(n - n_0), \tag{1.4.5}$$

donde $n_0$ es el retardo de tiempo, cuando el pulso no es de fase mínima. En el caso ideal, el filtrado inverso quedaría (Izzetoglu $et\ al.$, 2000):

$$y(n) * g(n) = x(n) * (\underbrace{g(n) * h(n)}_{\delta(n-n_0)}) = x(n - n_0). \tag{1.4.6}$$

Pero en presencia de ruido, $s(n)$ no sería exactamente una función $\delta$, sino una aproximación y para cuantificar el error no se emplea el sentido convencional de filtro óptimo de Wiener en (Kino, 1989), sino el error entre $s(n)$ y una función $\delta$, $d(n)$ como se enuncia en (Abeyratne $et\ al.$, 1997).

$$T = \sum_n [d(n) - s(n)]^2 = \sum_n [d(n) - g(n) * h(n)]^2. \tag{1.4.7}$$

El filtro de la deconvolución se calcula para minimizar $T$ bajo la restricción $\sum_n [g(n)]^2 = c_0$, donde $c_0$ es un número positivo pequeño.

En el dominio de la frecuencia, la estimación $X_1(f) = F\{x_1(n)\}$ en (1.4.4) se puede plantear de la siguiente forma (Honarvar, Sheikhzadeh, Moles, & Sinclair, 2004):

$$\begin{aligned} X_1(f) &= Y(f)\, G(f), \quad \text{con} \\ G(f) &= \frac{H^*(f)}{|H(f)|^2 + P_\eta(f)/P_{x_1}(f)}\ , \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

donde $P_\eta(f)$ y $P_{x_1}$ son las densidades espectrales de potencia de $\eta(n)$ y $x_1(n)$, respectivamente. $H^*(f)$ es el complejo conjugado de $H(f)$. De la ecuación (1.4.8) puede observarse que la aplicación del filtro óptimo de Wiener requiere la estimación de los parámetros media ($\mu$) y varianza ($\sigma^2$), para la distribución del ruido. Honarvar $et\ al.$ (2004) asumen que, en la práctica, la estimación de parámetros que describen la distribución de amplitud de los dispersores (ruido) es imposible. En su estudio, el término $S_\eta(f)/S_{x_1}(f)$ se iguala a una constante independiente de la frecuencia $Q^2$:

$$X_1(f) = \frac{Y(f) H^*(f)}{|H(f)|^2 + Q^2}. \tag{1.4.9}$$

A la constante $Q^2$ le llaman factor de inmunidad al ruido (*noise desensitizing factor*) (Honarvar $et\ al.$, 2004) y el valor recomendado es:

$$Q^2 = 10^{-2}|H(f)|^2_{máx}. \tag{1.4.10}$$

Otra alternativa a este procedimiento se enuncia a continuación, basada en estudios recientes de parametrización del filtro de Wiener (Donoho & Raimondo, 2005; Johnstone & Raimondo, 2004; Neelamani $et\ al.$, 2004; Wan, Raju, & Srinivasan, 2003), y modelos estadísticos que también se emplean en la deconvolución de imágenes (Calvetti & Somersalo, 2005).

El filtro inverso planteado en forma genérica se representa por (Neelamani $et\ al.$, 1999; Wan $et\ al.$, 2003):

$$G_\alpha(f) = \frac{H^*(f)P_{x_1}(f)}{|H(f)|^2 P_{x_1}(f) + \alpha\,\sigma^2}, \tag{1.4.11}$$

donde: $P_{x_1}(f)$, es la densidad espectral de potencia de $x_1(n)$. El parámetro de regularización $\alpha$ controla el compromiso entre la cantidad de ruido a suprimir y la distorsión de la señal, uno a expensas del otro. Fijando $\alpha = 0$ se obtiene una reproducción total de la señal incluyendo el ruido (*unbiased estimation*) y con $\alpha \to \infty$, se suprime totalmente el ruido pero se distorsiona la señal estimada ($x_{1_\infty} = 0$) (Neelamani $et\ al.$, 1999). Para $\alpha = 1$, el filtro inverso (1.4.11) se corresponde con el filtro de Wiener LTI, el cual es óptimo en el sentido MSE, para una señal de entrada gaussiana. $\sigma^2$ es la varianza del ruido.

En la ecuación (1.4.11), $x_1(n)$ es una señal estacionaria en sentido amplio (WSS). En el caso de señales no estacionarias, se sustituye $P_{x_1}(f)$ por el espectro promedio. Neelamani $et\ al.$ (1999) asumen $P_{x_1}(f) = |X_1(f)|^2$.

El inconveniente visible, es la necesidad del conocimiento *a priori* de las señal que se desea estimar. Las alternativas iterativas del Filtro de Wiener, dan resultados satisfactorios usando el algoritmo de Hillery y Chin (1991); como se puede ver en (Herrera $et\ al.$, 2005b, 2005a) y más recientemente en (Herrera $et\ al.$, 2006).

## 1.5. El caso bidimensional

En esta sección se dirige el análisis a problemas de restauración e imágenes (caso bidimensional, 2D). El desarrollo precedente, para señales unimensionales (1D), puede extenderse a funciones en dos dimensiones, e incluso a casos d-dimensionales como se ha planteado previamente en Donatelli (2005).

La deconvolución de imágenes es un problema inverso lineal con aplicaciones en detección remota, sismología, astronomía, ultrasonidos, y de forma más general en la restauración de imágenes (Bioucas-Dias, 2003).

El reto en muchos problemas inversos lineales es que son, por naturaleza, mal-condicionados, esto significa que su operador no admite la operación inversa o que es cercano a singular, conduciendo a soluciones altamente sensibles al ruido.

En un problema inverso, el objetivo es estimar la señal/imagen original $x$, a partir de una observación ruidosa, $y$, producida por un operador $H$ aplicado a $x$. Cuando $H$ es lineal, estamos en presencia de un problema lineal inverso (LIP) (Bioucas-Dias & Figueiredo, 2008). En la Fig.1.7, mostramos el caso para imágenes similar al problema 1D mostrado en la Fig.1.2.

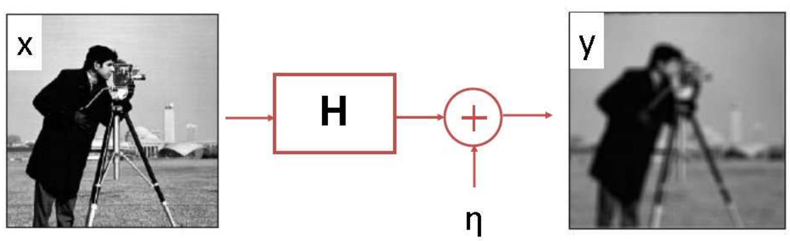


Figura 1.7: Sistema Lineal de forma $Hx + \eta = y$. Se muestra la imagen original $x$ afectada por el operador $H$, y con ruido $\eta$.

Estimar $x$, sin el conocimiento previo de $H$ se conoce como deconvolución ciega (*blind deconvolution*). Ejemplos en señales unidimensionales pueden verse en (Abeyratne $et\ al.$, 1997; Antoni, Guillet, Badaoui, & Bonnardot, 2005; Herrera $et\ al.$, 2005a) y para imágenes (Mignotte, 2007; Likas & Galatsanos, 2004).

En este trabajo, se asumirá que el operador $H$, el kernel de la convolución es conocido, porque el enfoque es resolver el problema inverso. Una vez demostrada la factibilidad de la propuesta, pudiera considerarse la inclusión de una etapa previa de estimación del **kernel**, como trabajo futuro. Ahora se estudiarán las PSF más comúnmente encontradas en los distintos problemas en los que se aplica la restauración de imágenes.

### 1.5.1. El $kernel$ o PSF

El $kernel$ de la convolución, en el campo del procesamiento de imágenes, se conoce como función de dispersión del punto (PSF). (Starck & Pantin, 2002)
Una PSF no puede tomar valores arbitrarios. En el modelo de observación discutido anteriormente hemos concluido que la imagen original y la observada son reales y no negativas debido a las características físicas del proceso de formación de imágenes subyacente. En consecuencia, las PSF deberán ser también reales y no negativas (Abad, 2003).
Además de ello, se debe tener en cuenta que las deficiencias de un sistema de captación de imágenes actúan normalmente como operaciones pasivas sobre los datos, es decir, no absorben ni generan energía. En consecuencia, toda la energía que surge de un punto de la imagen original debería preservarse, dando lugar a la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s,t)dsdt = 1 \tag{1.5.1}$$

lo que en el ámbito discreto se traduce en

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(s,t)dsdt = 1 \tag{1.5.2}$$

Una PSF convolucionada con la imagen original provoca un efecto llamado desenfoque (*blurring*). Se pueden distinguir muchos tipos de desenfoques debidos al movimiento relativo entre el dispositivo de captación y el objeto (Abad, 2003). Este movimiento puede ser en forma de traslación, rotación, por un repentino cambio de escala, o cualquier combinación de estas causas. Aquí sólo se va a tener en cuenta el caso de la traslación.
Cuando el objeto se traslada a velocidad constante, $V$, bajo un ángulo dado, $\phi$, durante el intervalo de exposición $[0,T]$, la distorsión es unidimensional. Denotando por $L = VT$ la "longitud del movimiento", la PSF viene dada por:

$$h(i,j;L,\phi) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & si \ \ \sqrt{i^2+j^2} \leq L/2 \ \ y \ \ i/j = -\tan\phi \\ 0, & en \ \ otro \ \ caso, \end{cases} \tag{1.5.3}$$

En este caso, la PSF es espacialmente invariante, aunque también se puede dar el caso en que sólo una parte de la imagen (típicamente un único objeto de la escena) esté sometida al movimiento de traslación, en cuyo caso la distorsión general será obviamente espacialmente variante. El efecto

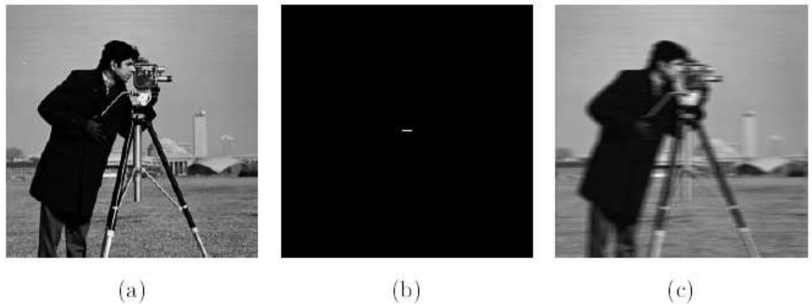

Figura 1.8: (a)Imagen *cameraman* original. (b) PSF de Desenfoque por movimiento lineal de 9 píxeles. (c) Imagen Borrosa

provocado por este PSF puede observarse en la Fig.1.8 y se conoce como: **desenfoque por movimiento lineal**

### 1.5.2. Desenfoque uniforme

Cuando una escena tridimensional se capta mediante una cámara en un plano bidimensional, algunas partes de la escena se encuentran en el foco, mientras que otras pueden no encontrarse en él. Si la apertura de la cámara es circular, la imagen correspondiente a cualquier fuente puntual será un pequeño disco denominado círculo de confusión. El grado de desenfoque (diámetro del círculo de confusión) dependerá de la longitud focal, de la apertura de la lente y de la distancia entre la cámara y el objeto. Si el grado de desenfoque es grande, en relación a las longitudes de onda consideradas, se puede emplear una aproximación geométrica que da lugar a una distribución de intensidad uniforme dentro del círculo de confusión. La PSF de este con radio $R$ viene dada por:

$$h(i,j;R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & si \ \sqrt{i^2+j^2} \leq R \\ 0, & en \ otro \ caso \end{cases} \tag{1.5.4}$$

Una forma severa de degradación por desenfoque que se emplea en un gran número de simulaciones (Banhan, 1997; Abad, 2003; Salzenstein, Collet, Cam, & Hatt, 2007), es **el desenfoque uniforme bidimensional**. Su expresión es,

$$h(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & si - \frac{L}{2} \leq i,j \leq \frac{L}{2} \\ 0, & en \ otro \ caso \end{cases} \tag{1.5.5}$$

### 1.5.3. Desenfoque por turbulencia atmosférica

El desenfoque atmosférico se produce en teledetección y astronomía debido al cambio en las condiciones de refracción de la atmósfera terrestre. Debido a que el desenfoque producido depende de múltiples factores como la temperatura, el tiempo de exposición o las condiciones meteorológicas, no se conoce una expresión analítica exacta que describa la forma de la PSF (Molina, Blanca, & Ripley, 1989).

Sin embargo, estudios sobre la temática (Jalobeanu, Zerubia, & Blanc-Féraud, 2007; Salzenstein $et\ al.$, 2007) han sugerido una aproximación radialmente simétrica de la forma:

$$h(r) = \frac{\beta/\pi R^2}{[1+(\frac{r}{R})^2]^\beta} \approx \left[1+(\frac{r}{R})^2\right]^{-\beta} \tag{1.5.6}$$

donde $r$ es la distancia de la fuente al píxel receptor.

Estos autores comentan que estos parámetros se pueden estimar a partir de fuentes puntuales (e.g. estrellas) que contenga la imagen.

### 1.5.4. Desenfoque Gaussiano

Algunas fuentes como (Katsaggelos, 1991) y posteriormente (Salzenstein $et\ al.$, 2007; Jalobeanu $et\ al.$, 2007) aproximan el desenfoque por turbulencia atmosférica mediante una función gaussiana :

$$h(i,j) = Ce^{\left\{-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}\right\}} \tag{1.5.7}$$

Esta aproximación se puede emplear para exposiciones prolongadas, por ejemplo en observaciones astronómicas. $C$ es una constante de normalización para asegurar que el desenfoque tiene volumen unidad y $\sigma$ determinará su severidad.

### 1.5.5. Desenfoque por dispersión

Las imágenes de rayos X muestran la distinta cantidad de radiación absorbida por el objeto que está siendo irradiado. Sin embargo, parte de la emisión también resulta alrededor de un punto. Hay muchos factores que intervienen en la PSF resultante de esta dispersión, aunque para los rangos de energía empleados en diagnóstico médico ésta se puede describir como:

$$h(i,j) = \frac{1}{(\beta^2 + (i^2 + j^2))^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.5.8}$$

donde $\beta$ determina la severidad del desenfoque.

## 1.6. Conclusiones parciales

Queda definido el problema de deconvolución de señales para el caso 1D y de restauración de imágenes como un problema inverso generalmente, mal condicionado. Este se trata como un problema de mínimos cuadrados, los métodos clásicos: Tikhonov, TSVD y Wiener, ofrecen una solución, ya sea, introduciendo información *a priori* o a través de la descomposición en valores singulares que logra un mejor condicionamiento. En el caso bidimensional, la función de dispersión puntual es el elemento que provoca el desenfoque en la imagen, y la eliminación de su efecto conduce a una aproximación del objeto real bajo observación.

Después de analizados los algoritmos previos, se decide en este trabajo, desarrollar el proceso de deconvolución empleando el algoritmo iterativo de Landweber, por su simplicidad y la independencia de parámetros de regularización. La desventaja del costo computacional asociada a los métodos iterativos, puede mitigarse por los avances en hardware que disminuyen el tiempo de ejecución.

# Capítulo 2

# ALGORITMOS DE DECONVOLUCIÓN EN SIMULACIONES

El Capítulo 2 se dedica a la implementación de los algoritmos discutidos en el Capítulo precedente. El método de Landweber, objeto de análisis se compara con los establecidos en la literatura, en ambos casos, señales e imágenes.

Los objetivos específicos que se persiguen en este Capítulo son: probar la factibilidad del algoritmo iterativo de Landweber en la deconvolución, mediante la comparación con otros métodos; validar los algoritmos en sistemas simulados.

## 2.1. Método iterativo propuesto

El método conocido como Landweber es tratado por varios autores (Vonesch & Unser, 2007; Mignotte, 2007). Este es un método iterativo que tiene sus bases en el Gradiente Descendiente, en el cual se obtiene una solución $x^* = x_{k+1}$ de $x_{k+1} = x_k - \tau J'_x$ para un funcional $J(x)$. La idea es minimizar la norma cuadrática del error dado en (1.2.1),

$$J(x) = \frac{1}{2}\|y - Hx\|^2.$$

El método de máximo descenso en un método de punto fijo y según el teorema de Punto Fijo de Banach (Conte & Boor, 1980), se dice que si en un espacio métrico $C$ completo se tiene una función contractiva $T(x) \in C$.

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|^2 \leq \rho\|x_1 - x_2\|^2, \tag{2.1.1}$$

para todo $x_1, x_2 \in C$ y para $\rho \leq 1$. El teorema plantea,

1. $T$ es una función contractiva entonces este tiene un único punto fijo, $x^*$ tal que $T(x^*) = x^*$

2. Si $x^*$ es un punto fijo de $T(x)$ es C, entonces la iteración de punto fijo comenzando con $x_0$ en C converge a $x^*$, o sea, $\lim_{m\to\infty} \|x^* - x_k\| = 0$ para la secuencia $x_{k+1} = T(x_k)$

Para usar la función iterativa anterior se obtiene $J'_x$,

$$J' = (y - Hx)(-H) = -H^T y + H^T Hx = H^T Hx - H^T y$$

sustituyendo $J'$ en el método iterativo, $x_{k+1} = x_k - \tau(H^T Hx - H^T y)$, que es el método conocido como Landweber, cambiando la notación de forma conveniente se expresa:
$\{\overline{H} = H^T H$ y $\overline{y} = H^T y\}$ se escribe lo anterior como (Vogel, 2002; Hanke $et\ al.$, 2000):

$$x_{k+1} = x_k + \tau(\overline{H}x - \overline{y}). \tag{2.1.2}$$

Para determinar cuando la ecuación anterior es una función contractiva haciendo uso del teorema de Banach.

$$\begin{aligned}
\|T(x_1) - T(x_2)\|^2 \quad &= \|x_1 + \tau(\overline{y} - \overline{H}x_1) - x_2 - \tau(\overline{y} - \overline{H}x_2)\|^2 \\
&= \|x_1 + \tau\overline{y} - \tau\overline{H}x_1) - x_2 - \tau\overline{y} + \tau\overline{H}x_2)\|^2 \\
&= \|x_1 - \tau\overline{H}x_1 - x_2 + \tau\overline{H}x_2\|^2 \\
&= \|(I - \tau\overline{H})x_1 - (I - \tau\overline{H})x_2\|^2 \\
&= \|(I - \tau\overline{H})\|^2 \|x_1 - x_2\|^2 \\
&\leq \rho\|x_1 - x_2\|^2 \\
\|T(x_1) - T(x_2)\|^2 \quad &\leq \|I - \tau\overline{H}\|^2 \|x_1 - x_2\|^2
\end{aligned}$$

Se retoma $\overline{H} = H^T H$ y aplicando la descomposición en valores singulares queda que

$$H^T H = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T)$$

entonces esta idea se utiliza en (2.1.2),

$$\begin{aligned}
x_{k+1} \quad &= x_k + \tau H^T y - \tau H^T H x_k \\
&= (I - \tau H^T H)x_k + \tau H^T y \\
&= \big(I - \tau[U\Sigma V^T U\Sigma V^T]\big)x_k + \tau(U\Sigma V^T)^T y \\
&= \big(I - \tau V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\big)x_k + \tau(U\Sigma V^T)^T y \quad \text{como } U^T U = VV^T = I \\
&= \big(VV^T - \tau V\Sigma^2 V^T\big)x_k + \tau V\Sigma^T U^T y \\
&= VV^T x_k - \tau V\Sigma^2 V^T x_k + \tau V\Sigma^T U^T y \\
&= V[I - \tau\Sigma^2]V^T x_k + \tau V\Sigma^T U^T y
\end{aligned}$$

Convenientemente, se establece la notación: $\alpha = V[I - \tau\Sigma^2]V^T$ y $\beta = \tau V \Sigma^T U^T y$, y se tiene la relación recursiva simple $x_{k+1} = \alpha x_k + \beta$. Si se escribe los $k$ términos anteriores a $x_{k+1}$ se obtiene:

$$\begin{gathered} x_{k+1} = \alpha x_k + \beta \\ x_k = \alpha x_{k-1} + \beta \\ x_{k-1} = \alpha x_{k-2} + \beta \\ \vdots \\ x_1 = \alpha x_0 + \beta \end{gathered}$$

y sustituyendo sucesivamente en el término $k + 1$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} \quad &= \beta + \alpha(\beta + \alpha x_{k-2}) \\ &= \beta + \alpha(\beta + \alpha(\beta + \alpha x_{k-3}) \\ &\vdots \\ &= \alpha^k x_0 + \beta(1 - \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{k-1}) \end{aligned}$$

La serie geométrica que se obtiene diverge para $|\alpha| > 1$ y en el caso $\alpha < 1$ la serie converge. Cuando $\beta = 1$ se cumple que $x_{n+1} = T(x_0) = x_0 + \beta k$; en este caso, $\lim_{k\to\infty} x_0 + \beta k = \infty$ y tampoco converge. Por tanto, interesa sólo cuando la serie converge,

$$x_{k+1} = \alpha^k x_0 + \beta \tfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \quad ; |\alpha| < 1 \tag{2.1.3}$$

De la condición de convergencia anterior, interesa conocer para que valores de $\tau$ este método garantiza una función contractiva, como $\alpha$ es una matriz se cumple que,

$$\sup_{\alpha} |[I - \tau(\Sigma^2)]| < 1$$

$$|1 - \tau\sigma^2_{\text{máx}}| < 1$$

$$-1 < 1 - \tau\sigma^2_{\text{máx}} < 1$$

$$0 < \tau < \frac{2}{\sigma^2_{\text{máx}}}$$

La función recursiva de Landweber en (2.1.2)

$$x_{k+1} = V(I - \tau\Sigma^2)^k V^T x_0 + \tfrac{I - V(I-\tau\Sigma^2)^k V^T}{I - V(I-\tau\Sigma^2)V^T} \tau V \Sigma V^T y$$

Si se asume que $x_0 = 0$ entonces el método iterativo en términos de la descomposición SVD quedaría definido como,

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(1 - (1 - \tau\sigma_j^2)^k\right) \frac{v_j^T y_i}{\sigma_j} \tag{2.1.4}$$

Es controversial el carácter parametrizado del Filtro de Landweber (Donatelli, 2005), para resolver el problema inverso a partir de iteraciones con un $\tau$ fijo. Pero si se observa la Fig.2.1, el comportamiento del Filtro para diferentes valores del número de iteraciones $k$, se puede deducir que a medida que las iteraciones aumentan, el filtro se va desplazando a la izquierda, cumpliendo el mismo principio de los Métodos TSVD y Tikhonov. En el método de Landweber, $k$ hace las funciones del parámetro de regularización.

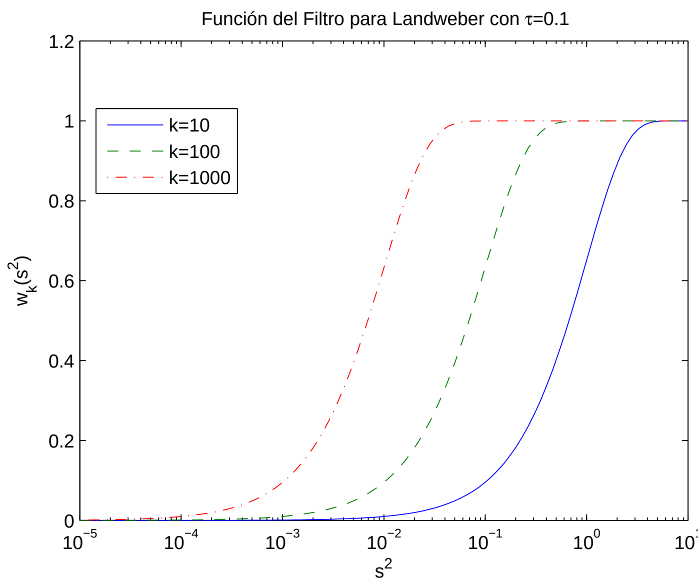


Figura 2.1: Filtro $w_\alpha(\sigma^2)$, para la regularización de Landweber.

### 2.1.1. El filtro de Landweber en el Dominio de la Frecuencia

Basado en el modelo matricial del Método de Landweber en (2.1.2), se puede derivar su representación en la frecuencia (Vogel, 2002):

$$X^{k+1}(f) = X^k(f) + \tau H^*(f)[Y(f) - H(f)X^k(f)], \tag{2.1.5}$$

donde el superíndice *, indica el conjugado complejo en el dominio de Fourier y $k$, es el número de iteraciones. Es común comenzar con un $X^k = 0$ y un parámetro fijo para el tamaño del paso, $0 < \tau < 1/||H||^2$.

En este método, a diferencia de los demás analizados, no hay involucrado ningún cociente, por lo que se evita la indeterminación cuando $H(f)$ toma valores cercanos a cero. Otra de las ventajas es que se puede detener la iteración cuando se comience a amplificar el ruido, y por último, si se tiene información *a priori* de la señal, se puede incorporar en el proceso iterativo como supuesto inicial, lo que reduciría el número de iteraciones hasta la convergencia o hasta que se alcance un criterio de parada.

## 2.2. Situación experimental, Materiales y Métodos

En todos los experimentos de esta tesis, se usa la misma arquitectura. Procesador AMD 64X2 Dual Core 2.3GHz, 2GB de RAM. No se empleó paralelización de los métodos, por cuanto los resultados obtenidos pudieran ser mejorados en trabajos futuros. De cualquier manera el empleo del mismo sistema garantiza la comparación entre métodos para un mismo conjuntos de datos, en cuanto al criterio de costo computacional basado en la arquitectura. Los tiempos de ejecución están dados en tiempo consumido por el CPU, usando la instrucción de MatLab, *cputime*. Todas las simulaciones se ejecutan en MatLab 2007b. En este trabajo se usan cuatro términos que dan una medida comparativa del comportamiento de los algoritmos, tanto en señales como en imágenes, ellos son:

**Relación Señal a Ruido Desenfocada, BSNR**, (**Blurred-Signal-to-Noise Ratio**) (Neelamani $et\ al.$, 2004; Johnstone $et\ al.$, 2004; Kerkyacharian, Picard, & Raimondo, 2005). Este indicador da una medida del grado de contaminación de la señal, para valores mayores la señal está más libre de ruido, el valor está expresado en dB (decibeles). Su formulación para el sistema $y = x * h + \eta$, está dada por (Raimondo & Stewart, 2007):

$$BSNR_{dB} = 10 \log \frac{||x * h||^2}{\sigma_\eta^2}, \tag{2.2.1}$$

esta medida se define en función de la varianza del ruido aditivo, $\sigma_\eta^2$ y $*$ es el operador de convolución.

La **SNR de la señal estimada** $\hat{x}$ después de la deconvolución, quedaría (Ma, Wang, & Du, 2006):

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{||x||^2}{||\hat{x} - x||^2}. \tag{2.2.2}$$

Con el objeto de comprobar objetivamente la calidad de los resultados obtenidos por los métodos presentados se usa la mejora en la relación señal-ruido (***ISNR: Improvement in Signal-to-Noise Ratio***)(Neelamani $et\ al.$, 2004). Esta métrica viene dada por:

$$ISNR_{dB} = 10 \log \frac{||x-y||^2}{||\hat{x}-x||^2}. \tag{2.2.3}$$

Es importante destacar que, aunque las métricas de error cuadrático medio no siempre reflejan las propiedades del sistema visual humano, sí sirven para proporcionar un sistema objetivo con el que poder comparar los resultados obtenidos por las diferentes técnicas. Sin embargo, en todos los ejemplos que se presentan, será importante considerar el comportamiento de los distintos algoritmos desde el punto de vista de la preservación de fronteras, lo que puede ser un indicador clave de la mejora de calidad en las comparaciones subjetivas de los distintos métodos presentados. El indicador del **error cuadrático medio, MSE**, se representa como (Donoho, 1995a; Ma $et\ al.$, 2006):

$$MSE = \frac{1}{N}||\hat{x}-x||^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\hat{x}_n - x_n)^2, \tag{2.2.4}$$

donde $N$, es la longitud de la señal.

## 2.3. Deconvolución de señales simuladas, caso 1D

En esta sección se basa el análisis en los resultados previos de (Vogel, 2002). El código en MatLab está disponible en su sitio web[1], que es referencia en investigaciones actuales sobre el tema (Cui, Lamm, & Scofield, 2007).

Para los experimentos en 1D, se considera la ecuación integral de Fredholm de primer tipo (Vogel, 2002):

$$g(x) = \int_0^1 h(x-x')f(x')dx \stackrel{\text{def}}{=} Hf(x); \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.3.1}$$

donde $f(x')$ es la señal original, representando en el ejemplo de Vogel (2002), la intensidad de una fuente luminosa con respecto a la posición $x$; $h$, es el $kernel$ de la convolución, que modela los

[1] http://www.math.montana.edu/∼vogel/Book/Codes/Ch1.

efectos de la turbulencia atmosférica en la propagación de la luz, definido Gaussiano (1.5.7); y $g$ que es la señal observada, representa la versión desenfocada y ruidosa.

El modelo matemático que describe al $kernel$ Gaussiano tiene la forma,

$$h(x - x') = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{(x - x')^2}{\sigma^2}\Big)\right\}$$

y $f(x')$ está dado por la función

$$f(x') = \begin{cases} 0{,}75 & ; 0{,}1 \leq x \leq 0{,}25 \\ 0{,}25 & ; 0{,}3 \leq x \leq 0{,}32 \\ \sin(2\pi x)^4 & ; 0{,}5 \leq x \leq 1 \\ 0 & para \quad otros \end{cases}$$

y se le añade un ruido aleatorio con media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma_\eta = 10^{-3}$

Todos estos componentes se muestran en la Fig.2.2 para una contaminación de la relación señal a ruido (ver (Kerkyacharian $et\ al.$, 2005)), BSNR = 40dB.

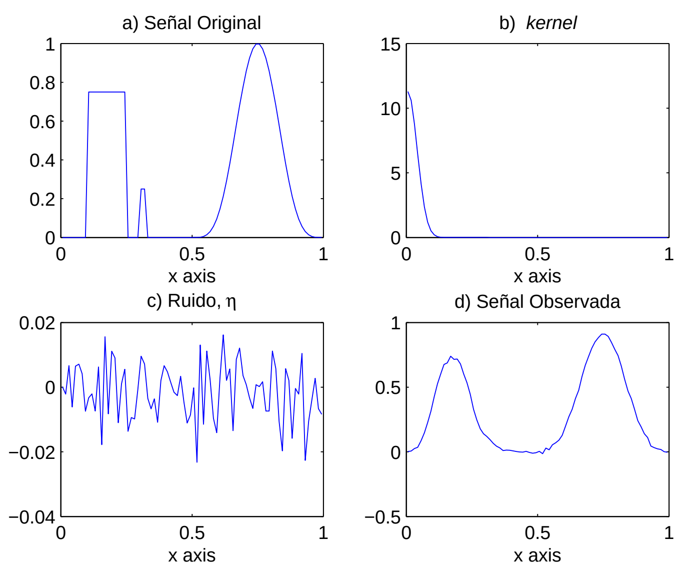


Figura 2.2: Señales del sistema convolucional. En (a), la señal original; en (b), el $kernel$ Gaussiano; en (c), el ruido aditivo y en (d), la señal observada.

La matriz de convolución, formada a partir del $kernel$, tiene un número de condición de $2{,}5450e + 016$, lo que es indicador del mal-condicionamiento del problema inverso. Los valores singulares muestran un decrecimiento a cero según se trató en Capítulo 1 esto conduce a la amplificación del ruido, cuando el parámetro $\alpha$ permite la entrada de los $\sigma_j$ cercanos a cero; observe este fenómeno en la Fig.2.3, gráfico inferior izquierdo.

La reconstrucción de la señal usando en Método TSVD descrito en la sección 1.3.1, se muestra en Fig.2.3. Observe que cuando los valores de $\alpha$ disminuyen hay una amplificación del ruido, conduciendo a soluciones inexactas.

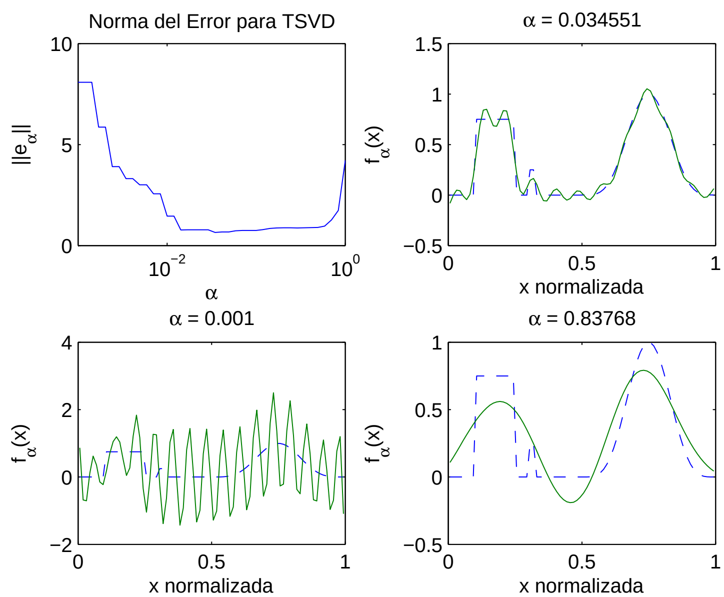


Figura 2.3: Deconvolución usando TSVD

El parámetro $\alpha$ hace la función de filtro, dejando pasar a la solución de la deconvolución, componentes más contaminados en la medida en que esté más cercano a cero. Sin embargo en la medida que este crece hacia 1,las oscilaciones se parecen más a funciones suaves en forma de senos y cosenos. El MSE $=0{,}0046$ para el mejor caso en la selección del parámetro $\alpha$ óptimo; con este se obtuvo una SNR$=16{,}81$ dB, y un ISNR $=3{,}9$ dB.

El código del TSVD fue modificado con la función del filtro en (1.3.9), para obtener la reconstrucción de Tikhonov en las mismas condiciones del experimento anterior. Los resultados se muestran en la Fig.2.5. El error en la estimación es menor que en el TVSD (MSE$=0{,}0044$), observe el seguimiento de la señal estimada con respecto a la original, sobre todo en el componente sinusoidal.

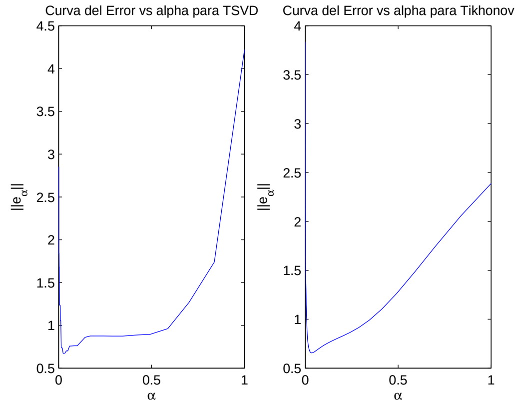


Figura 2.4: Curva del MSE con respecto al parámetro $\alpha$

Tabla 2.1: Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB.

| | $BSNR_{40}$ | | | $BSNR_{30}$ | | | $BSNR_{15}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Método | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| TSVD | 16,84 | 3,92 | 0,0046 | 17,08 | 2,78 | 0,0059 | 12,29 | 1,72 | 0,0131 |
| Tikhonov | 17,08 | 4,16 | 0,0044 | 16,24 | 3,23 | 0,0053 | 12,08 | 1,48 | 0,0138 |
| Landweber | 17,00 | 4,09 | 0,0044 | 16,86 | 3,44 | 0,0054 | 13,26 | 2,62 | 0,0105 |

En ambos casos (TSVD y Tikhonov) se ha recurrido a un algoritmo iterativo, variando $\alpha$, para encontrar el mejor caso, de forma similar a como se hizo en (Cui $et\ al.$, 2007). La sensibilidad de ambos métodos al parámetro de regularización, hace que estos métodos sean poco robustos a cambios de SNR, como se muestra en la Tabla 2.1. La sensibilidad del MSE con respecto al parámetro $\alpha$ se puede apreciar en la Fig.2.4.

El Método de Landweber tiene un mejor comportamiento cuando se incrementa el nivel de ruido en la señal.

El elemento común en la deconvolución por los tres métodos es que no se le puede dar seguimiento a la onda cuadrada. O sea, se crean oscilaciones en el borde, producto de la descomposición en el dominio de Fourier, representados en este caso por los autovectores. Esto se conoce como fenómeno de Gibbs (Donoho, 1995b).

Y para afrontar este problema, necesariamente se tendría que cambiar la base a un dominio de funciones básicas que se adapten a estos cambios abruptos de señal, como las Wavelets. Este tema no será abordado en este trabajo, se considera una línea futura de investigación, y es además tema

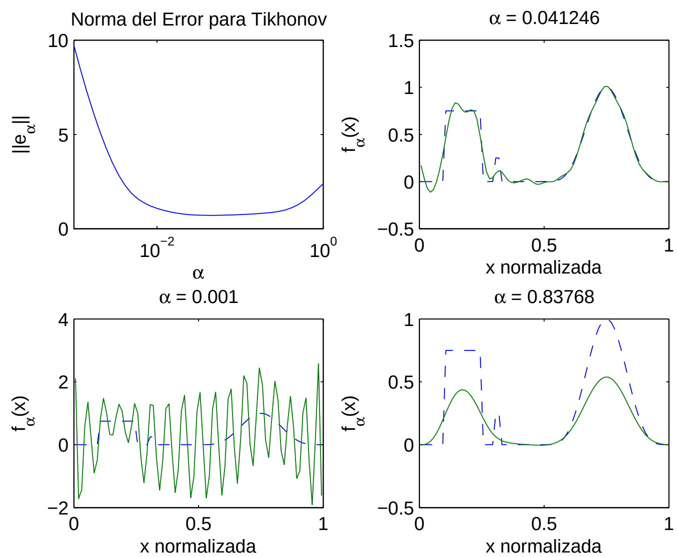


Figura 2.5: Deconvolución usando Tikhonov

Tabla 2.2: Tiempo consumido por cada método. Función en Matlab cputime.

| Método | cputime [ms] |
|---|---|
| TSVD | 2,382 |
| Tikhonov | 1,722 |
| Landweber | 59,649 |

de discusión actual, vea por ejemplo (Cui $et\ al.$, 2007; Raimondo & Stewart, 2007; Mignotte, 2007; Bioucas-Dias & Figueiredo, 2008).

La Tabla 2.2, muestra una referencia de la lenta convergencia del Método de Landweber, como algoritmo iterativo de busca del mínimo (observe la curva de la norma del error en gráfica superior izquierda de la Fig. 2.6). Sin embargo, su ventaja es que no debe ajustarse ningún parámetro para que encuentre una solución de mejor calidad que los otros dos métodos. Que en el caso anterior, hemos seleccionado, igual que en (Cui $et\ al.$, 2007), el mejor valor del parámetro de regularización, previamente a la corrida del algoritmo. Esta es la principal razón por la cual desarrollamos este trabajo orientado a demostrar la factibilidad del algoritmo iterativo de Landweber en la deconvolución.

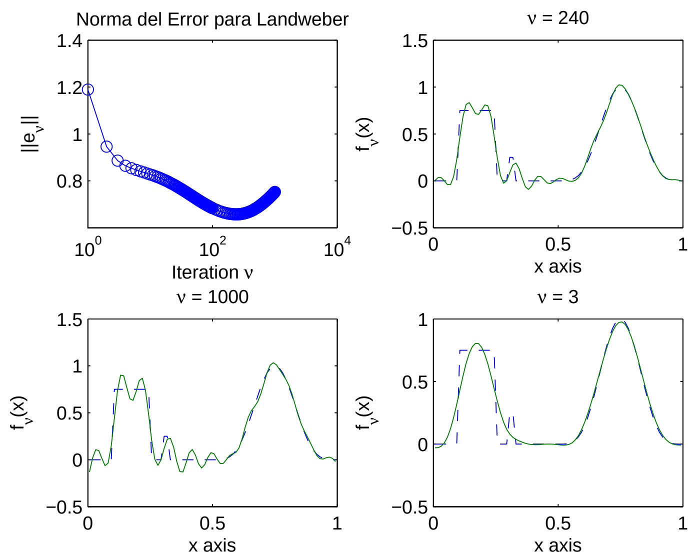


Figura 2.6: Deconvolución usando Landweber

Sin embargo, se encuentra que cuando el kernel de la convolución es centro simétrico, o sea describe una campana Gaussiana completa, diferente al representado en la Fig. 2.2. El problema de la deconvolución incrementa su carácter mal-condicionado, lo que implica incluir algún tipo de precondicionamiento en la matriz de convolución, como etapa previa a la descomposición en valores singulares.

## 2.4. Precondicionamiento de la Matriz de Convolución

En aplicaciones prácticas, no siempre se presenta un kernel Gaussiano como el descrito en el ejemplo anterior. Tal es el caso de aplicaciones ultrasónicas (en medicina o en ensayos no destructivos), donde el pulso emitido por un transductor es Gaussiano y centro simétrico (Adam & Michailovich, 2002; Honarvar $et\ al.$, 2004). En (Vogel, 2002) la matriz de convolución, $H$, es una matriz de Toeplitz, obtenida a partir del $kernel$ 1D. La Fig. 2.7, muestra gráficamente la distribución de los valores en la diagonal principal, lo que facilita su SVD. Una matriz Toeplitz es una matriz cuadrada, simétrica respecto a su diagonal principal de forma que se cumpla que:

$$\forall h_{i,j} \in H; h_{i,j} = h_{i+1,j+1} \quad (2.4.1)$$

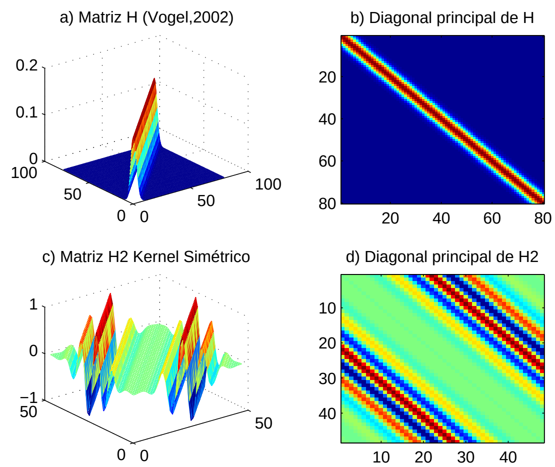


Figura 2.7: Matrices de Deconvolución

de donde resulta una matriz fuertemente simétrica.

Objetivo que se logra perfectamente para el caso en el que la PSF es positiva, como se mostró en la Fig.2.2b de la sección anterior. Pero que al tratarse de un kernel centro simétrico, se duplica la señal con un retardo. En ese caso es conveniente usar una matriz block-Toeplitz, es una matriz cuadrada y simétrica respecto a su diagonal secundaria , formalmente:

$$\forall h_{i,j} \in H; h_{i,j} = h_{i-1,j+1} \tag{2.4.2}$$

Esta transformación garantiza según Donatelli (2005) la simetría de la matriz de convolución, denominando a ese fenómeno *"re-blurring"*. Esto es geométricamente una rotación de 180º del PSF ($H'$). Además, los valores propios de $H'$ son los mismos de $H$ ($H'$ y $H$ son similares) y todos los valores propios de $H'^T H'$ son no negativos. (Donatelli, 2005).

El resultado fundamental es que la señal observada está ahora re-desenfocada y este garantiza una solución para las técnicas de regularización, ya que el ruido también sufre desenfoque y esto hace su contribución menos evidente.

Tabla 2.3: Pseudo-código para el precondicionamiento de la Matriz de Convolución.

**Dados**: la señal de observación *y*, el kernel *h*

| **Pasos** | **Observación** |
|---|---|
| 1: $N = \text{length}(y)$ | Número de muestras a extender $h$ |
| 2: $L = \text{length}(h)$ | |
| 3: $zpad = (N - L)/2,$ | |
| 4: $h_{pad} = [0, ..., 0_{zpad}, h^T, 0, .., 0_{zpad}]$ | |
| 5: $H = \text{BTTB}(h_{pad})$ | (Hansen, 2002) |
| 6: $H_P = H^T H + I$ | ver (Cui $et\ al.$, 2007) |
| 7: $[U, S, V] = \text{SVD}(H)$ | |
| 8: $svals$ =DIAG (S) | Obtener los valores singulares y ordenar |

El precondicionamiento impuesto a la matriz, implica una paso intermedio de centrado del kernel a la longitud de la señal, con un rellenado de ceros (*zero padding*). Se construye un Matriz de bloques de Toeplitz (*BTTB, Block Toeplitz with Toeplitz Blocks*) y después aplicar la transformación $K = H^T H + \alpha I$. En resumen los pasos para obtención de la Matriz de Convolución a partir del $kernel, h$ se muestran en el Pseudo-Código en la Tabla 2.3. El resultado de la aplicación del precondicionamiento del paso 6 en el algoritmo 2.3 puede observarse en la Fig.2.8. Se puede

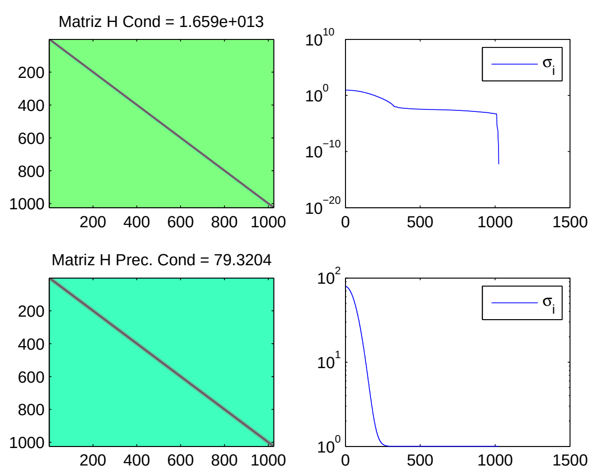


Figura 2.8: Precondicionamiento en la Matriz de Convolución.

apreciar en la figura derecha superior la distribución de los valores singulares para un $kernel$ Toeplitz, cuyo número de condición muestra el mal condicionamiento mientras que debajo aparece la matriz pre-condicionada cuyo número de condición es considerablemente menor, y los valores

singulares decaen a cero como se comentó previamente, según una progresión geométrica.
Los pasos siguientes a esta modificación concuerdan con lo descrito en (Vogel, 2002), para señales 1D. En el caso 2D, se implementa el Método de Landweber en el dominio de la Frecuencia, disminuyendo la complejidad del algoritmo de $O(N^4)$ a $O(N^2 log_2 N)$ con el empleo de la Transformada Rápida de Fourier bidimensional (FFT) (Cui $et\ al.$, 2007).

## 2.5. Deconvolución de Imágenes. Simulaciones

A pesar de que un número importante de problemas inversos se pueden cubrir con esta teoría, en este trabajo nosotros estamos interesados en el problema de la reconstrucción de imágenes desenfocadas (*blurred image reconstruction*). Por ello los ejemplos tratados en este apartado, estarán relacionados con la obtención de una imagen original a partir de su versión desenfocada y posiblemente contaminada con ruido aditivo. En esta sección partiremos de una simulación usada por Vogel (2002), con código disponible en su sitio web[2], donde se implementa el filtro de Tikhonov para la solución del problema inverso. De esta forma se puede establecer un criterio de comparación con resultados previos. Esta simulación se ha convertido en un estándar para la reconstrucción de imágenes, vea por ejemplo, (Cui $et\ al.$, 2007). En este caso se representa como la matriz original, una imagen de satélite (Vogel, 2002), desenfocada de manera tal que modele la distorsión atmosférica, que es un caso común de en imágenes del espacio exterior tomadas desde un telescopio en tierra.

El problema de convolución unidimensional se puede extender al caso 2D si se toma la integral en 2.3.1 y se define como:

$$g(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 h(x - x', y - y') f(x', y') dy dx \stackrel{\text{def}}{=} Hf(x, y); \qquad 0 \leq [x, y] \leq 1, \qquad (2.5.1)$$

Los algoritmos discutidos en el capítulo 1 se han ejecutado sobre esta imagen, degradada de acuerdo al modelo de formación descrito en la sección 1.5, con desenfoque por turbulencia atmosférica (véase la sección 1.5.3) y ruido gaussiano aditivo. La PSF que modela la distorsión atmosférica en está imagen se muestra en la Fig.2.9, bajo la consideración de que el ruido que

[2]http://www.math.montana.edu/∼vogel/Book/Codes/Ch5.

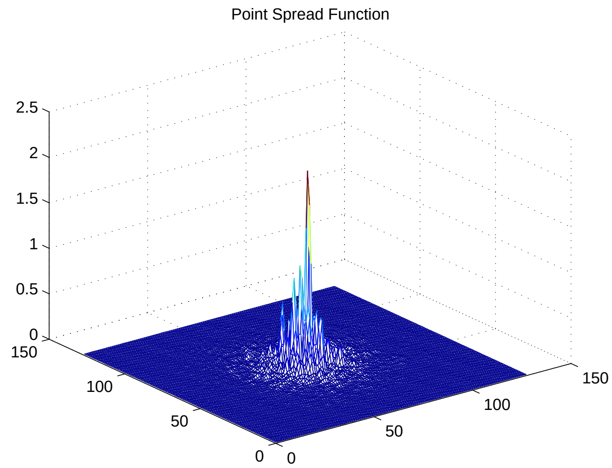


Figura 2.9: Función de Dispersión Puntual para desenfoque por turbulencia atmosférica.

se añade es Gaussiano. La Fig. 2.10 parte superior izquierda muestra la imagen original y en la derecha se muestra la imagen contaminada con una BSNR = 40 dB, a la imagen real y se obtiene una estimación de esta usando el filtro de Wiener (Imagen inferior izquierda).

La misma imagen es restaurada usando el método iterarivo Landweber y su estimación se muestra en la parte inferior derecha. Los indicadores de calidad de la señal verifican la ventaja del

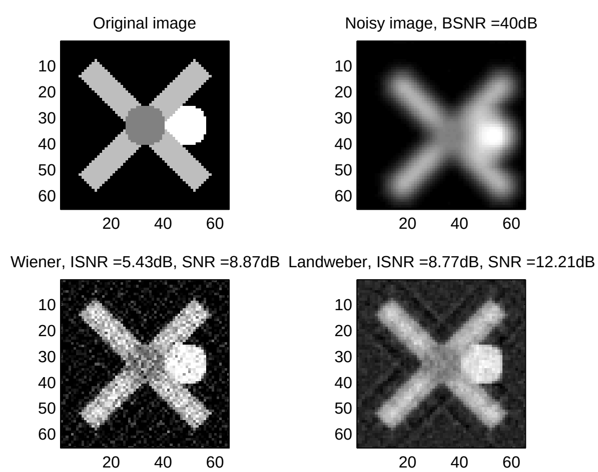


Figura 2.10: Solución de los métodos Wiener y Landweber en Imágenes

método iterativo con respecto al clásico, mostrando resultados superiores que se aprecian en la

Tabla 2.4: Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB.

| | $BSNR_{40}$ | | | $BSNR_{25}$ | | | $BSNR_{15}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Método | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | $8{,}92$ | $5{,}47$ | $1{,}435 \cdot 10^5$ | $-5{,}47$ | $-8{,}90$ | $3{,}94 \cdot 10^6$ | $-15{,}19$ | $-18{,}50$ | $3{,}70 \cdot 10^7$ |
| Landweber | $11{,}69$ | $8{,}24$ | $7{,}59 \cdot 10^4$ | $10{,}40$ | $6{,}96$ | $1{,}02 \cdot 10^5$ | $9{,}82$ | $6{,}52$ | $1{,}17 \cdot 10^5$ |

Tabla 2.4. Los valores de SNR e ISNR en el Método de Landweber superan a los obtenidos por la deconvolución usando Wiener, así como el error en la estimación según el MSE es considerablemente menor.

Sin embargo el aspecto negativo por lo que este método ha sido desechado en algunas investigaciones con respecto a los métodos clásicos es su costo computacional, lógicamente mayor al requerir de iteraciones. Se puede ver en la Tabla 2.5. basado en la misma arquitectura descrita anteriormente, se calcularon los tiempos de ejecución para ambos algoritmos. En la Tabla tal, puede verse que el método iterativo Landweber consume mucho más tiempo que el Wiener, pero como el resultado está en milisegundos, cabe señalar que realmente no es un costo excesivo contando con ordenadores poderosos como en la actualidad y conociendo que los resultados están dados en segundos. De igual manera, se analiza el comportamiento de este método iterativo en contraste

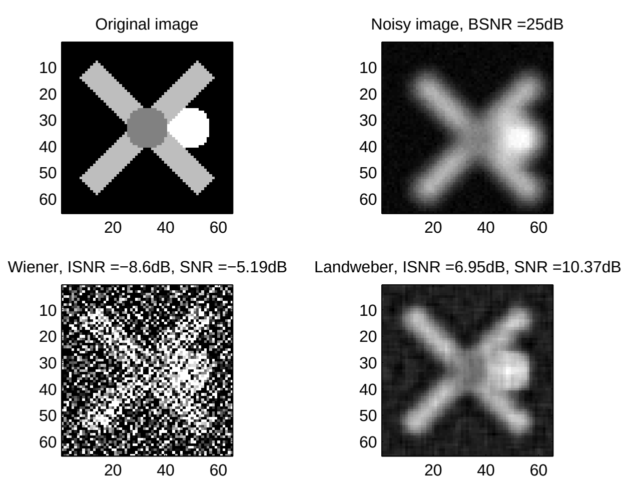


Figura 2.11: Restauración de una Imagen con BSNR=25dB

con el filtro de Wiener para mayores niveles de ruido ($15dB$ y $25dB$) en la imagen como en la sección dedicada a señales. Los resultados sintetizados en la Tabla 2.4 muestran su estabilidad en la restauración.

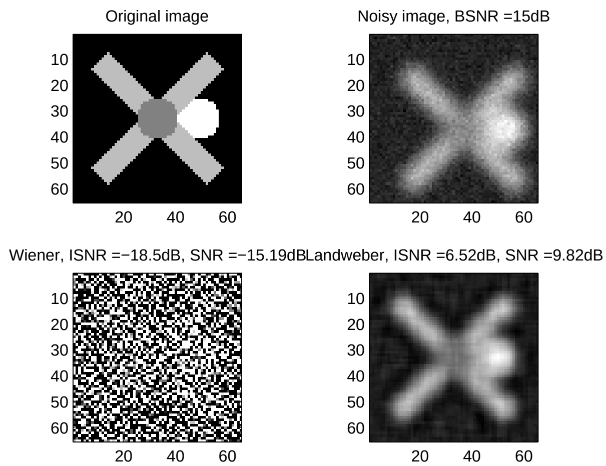


Figura 2.12: Restauración de una Imagen con BSNR=15dB

En la prueba realizada para una imagen extremadamente contaminada y desenfocada ($15dB$), el método Landweber muestra su potencia manteniendo valores aceptables en sus indicadores. La solución se muestra en la Fig.2.11 y la Fig.2.12. Es apreciable, por su parte, el deterioro de la solución provista por el filtro de Wiener en la medida en que la imagen se ve afectada por mayor ruido.

Tabla 2.5: Tiempo de procesamiento

| Método | CPUTime |
|---|---|
| Wiener | 0.004362 |
| Landweber | 0.7656 |

## 2.6. Conclusiones parciales

El método Landweber, es una propuesta basada en el conocido método de máximo descenso que ofrece sobre la base de un proceso iterativo, indicadores de calidad de la imagen y el error cuadrático medio, superiores a los métodos clásicos para un costo computacional medido a través del consumo de tiempo del CPU que puede resultar útil en postprocesamiento de imágenes. Los experimentos realizados con señales e imágenes simuladas corroboran estos resultados.

Para los caso de *kernel* centro simétrico, se propone utilizar una matriz de convolución basada en matrices *block-Toeplitz* y precondicionar aplicando un re-desenfoque *"reblurring"* que mejora el número de condición de la matriz.

# Capítulo 3

# DECONVOLUCIÓN DE SEÑALES ULTRASÓNICAS E IMÁGENES REALES

El Capítulo 3 se dedica a la discusión de los resultados obtenidos con la implementación del método iterativo de Landweber y se compara con los métodos clásicos. En este caso, se prueba con señales que simulan los ensayos no destructivos por ultrasonidos y en la segunda parte del trabajo, se utilizan imágenes reales de prueba.

El objetivo específico que se persigue en este Capítulo es: probar la efectividad del método iterativo Landweber en la deconvolución, mediante la comparación con otros métodos.

## 3.1. Deconvolución de señales de ultrasonido en END

En las señales unidimensionales se toma el caso del Ensayo No Destructivo (END) por ultrasonido que es objeto de análisis por diversos autores (Herrera, 2006; Wan $et\ al.$, 2003; Taxt & Frolova, 1999) y que es de gran interés para trabajos futuros.El análisis 1D está basado en señales generadas a partir de una distribución Bernoulli-Gaussiana (Kaaresen & Bølviken, 1999). Es conocido las señales con esta distribución representan el caso real de una respuesta del medio en los ensayos no destructivos (END).(Herrera, 2006; Herrera $et\ al.$, 2006)

En el END por ultrasonido, la deconvolución trata de extraer la respuesta del medio o material ante un impulso dado a partir de las observaciones que se obtienen durante la experimentación. En la Fig. 3.1b se muestra una función que representa la distribución de defectos en un material (con distribución Benoulli-Gaussiana), h es un pulso Gaussiano que se representa el kernel de la convolución, en este caso el pulso ultrasónico emitido sobre el sistema físico representado por la operación de convolución con un pulso gaussiano sinusoidal modelado por la función $h(k,n) = \cos\left[w_n(k-22)\right]\exp\left\{\frac{-(k-24)^2}{100}\right\}$ en la Fig.3.1a y a su vez, contaminado con ruido aditivo según el modelo presentado en 1.1.1.

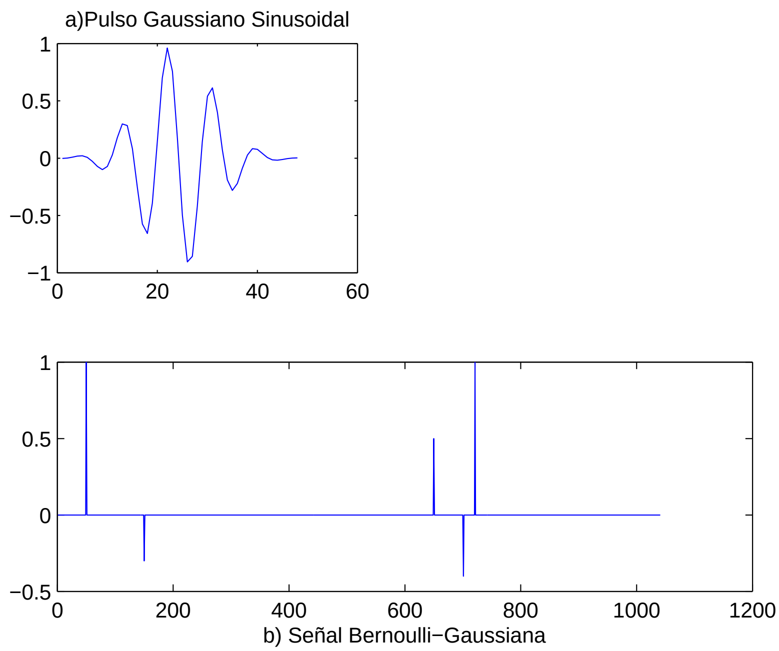


Figura 3.1: Señal de entrada que representa el patrón de defectos en materiales

En la Fig.3.2 se muestra el resultado de la convolución, donde cada oscilación corresponde a un defecto en el material, lo que dificulta la localización exacta de los defectos. En este caso, la deconvolución contribuiría al incremento de la resolución temporal, por la supresión de los efectos del pulso. Dejando como resultado pulso que aproximan a un delta de Dirac, lo que sería de gran ayuda en la localización de defectos.

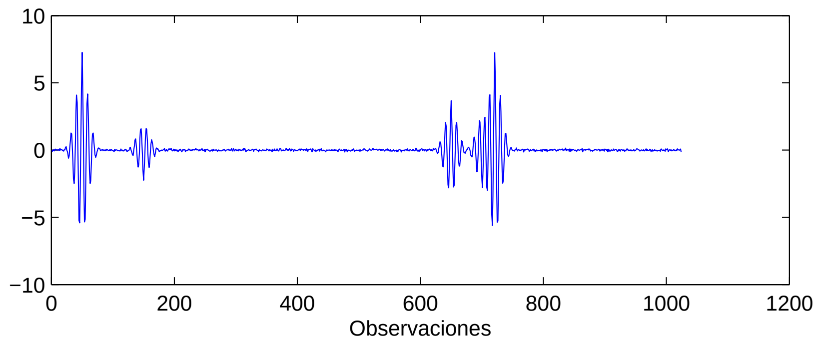


Figura 3.2: Observaciones del END por ultrasonido

En el capítulo anterior se señaló que para los casos de PSF centro simétricas ocurría un fenómeno de duplicación de la señal al transformar la señal $h(n)$ en una matriz de convolución usando la matriz *Toeplitz*, este efecto se puede ver en la Fig. 3.3. Cabe señalar que el fenómeno mostrado en la Fig.3.3 no representa al sistema físico real.

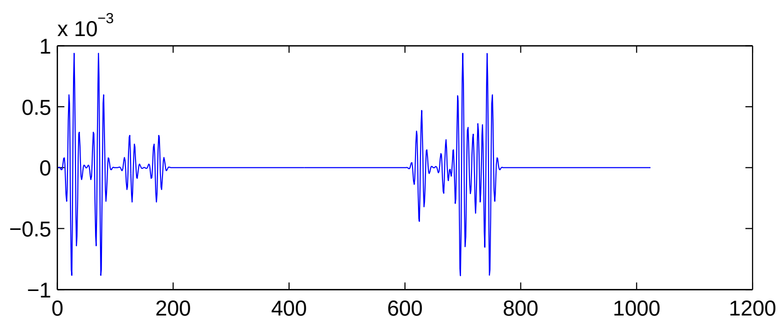


Figura 3.3: Señal duplicada

Intentar obtener una solución por algún método sin transformar primero el problema actual solo conduce a la amplificación del ruido (vea Fig. 3.4). Esto ocurre con cualquier método aunque se intente regularizar como en los métodos clásicos discutidos en el Capítulo 1, (1.3.1,1.3.2). Este hecho impone añadir algún condicionamiento al problema del producto de convolución que se realiza antes de que el ruido aditivo afecte el resultado.

Por eso se propuso en el capítulo anterior el uso de una matriz *Block-Toeplitz* que produzca una matriz de convolución que al relacionarse con el patrón de defectos, descrito en la Fig. 3.1,

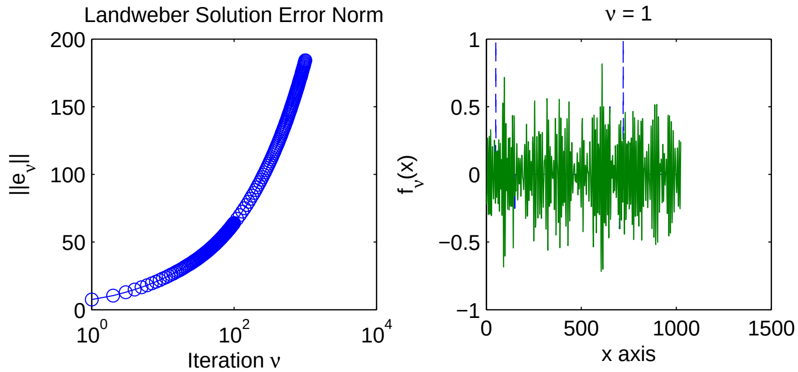


Figura 3.4: Amplificación del ruido en la señal en la solución usando Landweber

represente realmente al sistema físico esto se resuelve siguiendo en método propuesto en el pseudo-código de la Tabla 2.3.

La extracción de la señal respuesta del material, se realiza a través de los métodos utilizados en el Capítulo 2 para la señal simulada pero en este caso con la condición de una PSF centro simétrica, caso común del ensayo no destructivo como se mencionó en la sección. 2.4.

El primer elemento que aparece como ventaja al tratamiento clásico es que con el uso de una matriz $block - Toeplitz$ garantiza la simetría del pulso al transformarlo en una matriz de convolución y con el precondicionamiento se evita el mal condicionamiento que aparece que en la matriz original es $cond(H) = 1{,}6593e + 013$ que provoca cambios de esta misma magnitud en las observaciones con un pequeño cambio en el pulso de entrada. Sin embargo, al precondicionar la matriz como se propuso, este efecto disminuye considerablemente a $cond(H') = 79{,}3204$. Otro elemento que resulta favorable es el referente a los valores singulares que decaen a cero vertiginosamente en la primera matriz pero se logra con esta transformación que decaigan más suavemente según una progresión geométrica según se muestra en la Fig. 3.5.

Un resumen de los resultados se muestra en la Tabla 3.1, para diferentes niveles de BSNR, 40, 25 y $15dB$, seleccionados de forma tal que representen valores característicos de contaminación en mabientes reales.

En las distintas corrida se aprecia el decrecimiento de los indicadores SNR e ISNR con el

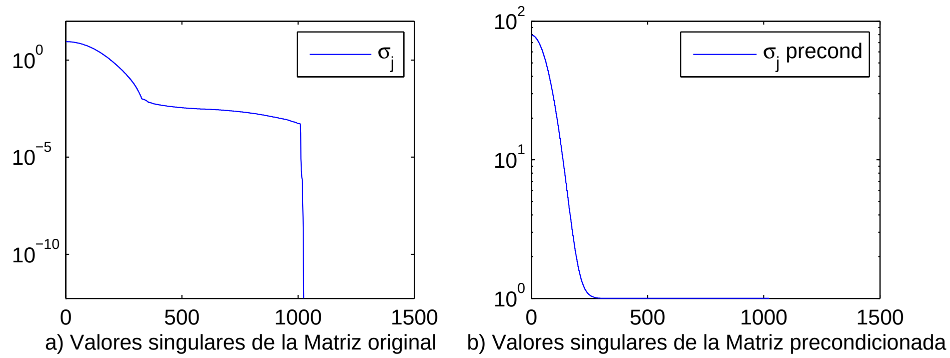


Figura 3.5: Progresión de los valores singulares.

Tabla 3.1: Indicadores SNR, ISNR y MSE para diferentes BSRN = 40, 30, 15 dB.

| | $BSNR_{40dB}$ | | | $BSNR_{25dB}$ | | | $BSNR_{15dB}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Método | SNR | ISRN | MSE | SNR | ISRN | MSE | SNR | ISRN | MSE |
| TSVD | 9,45 | 34,79 | 0,000277 | 0,02 | 25,38 | 0,0024 | −7,40 | 18,03 | 0,024 |
| Tikhonov | 9,95 | 35,28 | 0,0032 | 3,33 | 28,69 | 0,0145 | −1,89 | 23,54 | 0,862 |
| Landweber | 12,04 | 37,38 | 0,002 | 3,35 | 28,71 | 0,0144 | 1,63 | 27,06 | 0,0384 |

incremento del nivel de ruido. El elemento significativo y que valida nuestra hipótesis inicial, es que el método iterativo mantiene niveles de detección y reproducibilidad de la señal original, aún para el peor caso de señal ruidosa; donde los otros dos métodos de referencia fallan totalmente (vea los valores negativos de SNR del TSVD y Tikhonov para el caso de BSNR$= 15dB$).

Para el método TSVD, se muestra que al hacer variar el parámetro de regularización $\alpha$ para valores cercanos a uno se obtiene la mejor estimación de la señal, sin embargo el comportamiento en caso contrario es un valor constante del MSE. En la Fig.3.6 se muestra en la parte superior izquierda, el comportamiento del MSE al variar $\alpha$; en la parte superior derecha, se muestra la mejor aproximación de la extracción de la señal para $\alpha = 1$ con un error cuadrático MSE$= 0{,}000277$, e inmediatamente debajo se muestran dos soluciones cualesquiera, este MSE para $40dB$ de contaminación representa el menor, en detrimento de los indicadores de limpieza de la señal (SNR, ISNR).

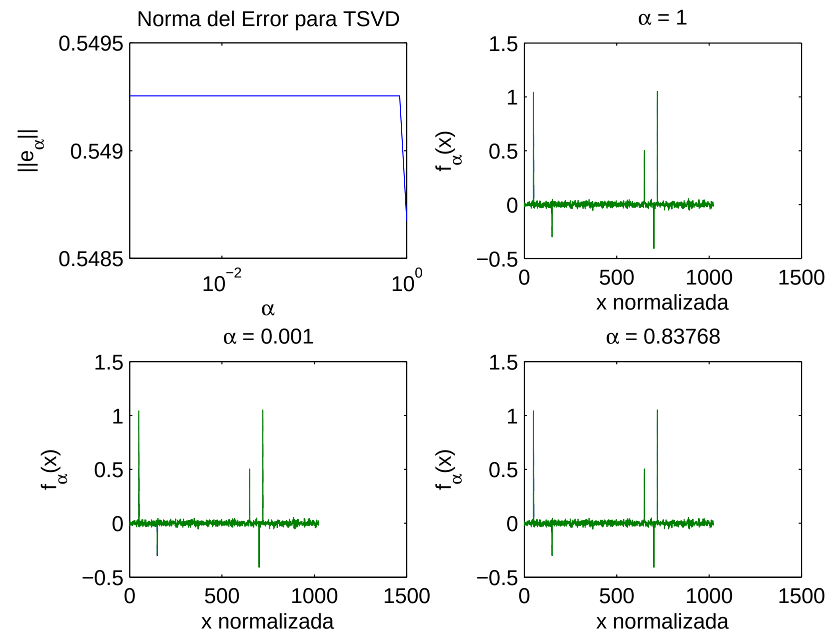


Figura 3.6: Solución usando el método TSVD con BSNR=40$dB$.

Al realizarse el mismo análisis para el Tikhonov resulta un comportamiento similar del MSE cuando el parámetro de regularización va incrementándose hasta 1, y encuentra su valor mínimo $0{,}0032$ cuando $\alpha = 0{,}41246$. Este método ofrece un ligero beneficio de los resultados en cuanto a la magnitud de la relación señal a ruido y su incremento. Una idea sobre la estimación de la señal y la curva del error cuadrático puede apreciarse en la Fig.3.7.

El método Landweber es independiente del parámetro de regularización, como se discutió en Capitúlo precedente, esta es la principal ventaja con respecto a los de referencia y unido al precondicionamiento de la matriz de convolución, conduce a mejores estimaciones. Es decir, mejora el proceso de deconvolución al hacerlo más robusto y exacto. Vea la Tabla 3.1. La Fig.3.8 muestra el comportamiento del error con respecto al número de iteraciones en la parte superior izquierda del gráfico; en la parte superior derecha se muestra la mejor estimación del patrón de defectos en un material, en el se aprecian claramente visibles, los picos de reflexión.

En la parte inferior (izquierda y derecha) se muestran la última iteración realizada por el método y la iteración 10 en el proceso de estimación. La figura superior izquierda ilustra el comportamiento de la norma del error en la estimación, del problema de minimización en cuestión, en esta se

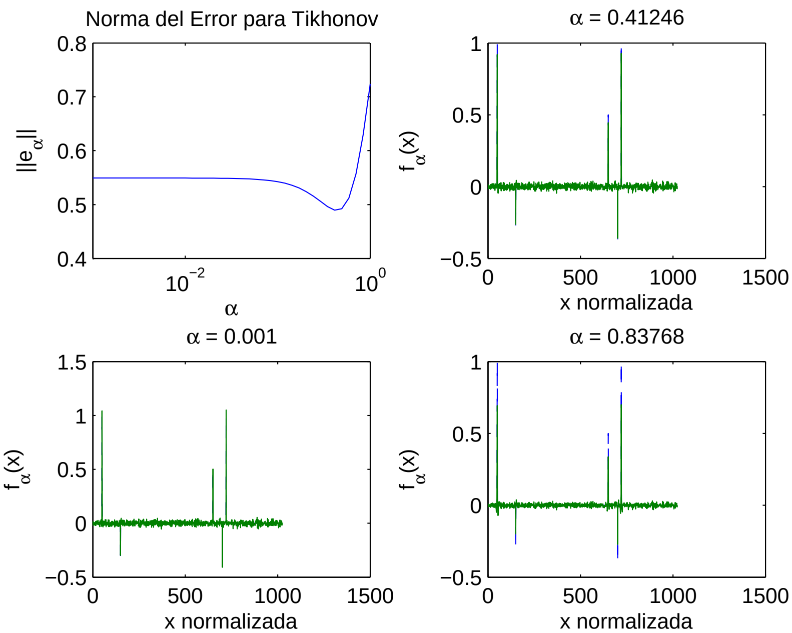


Figura 3.7: Solución usando el método Tikhonov con BSNR=40$dB$.

aprecia el descenso del método; primero más suave y luego a mayor velocidad hasta que empeora la solución que se utiliza como criterio de parada. Esta es una variante para este tipo de problemas de procesamiento de señales del conocido método de máxima pendiente, que actúa lentamente al caer en una zona de mínimos, pero en sentido general, converge a un mínimo local si existe.

Lo interesante que revela el uso de un método iterativo en contraposición a los clásicos es su capacidad de resolver el problema aún al incrementarse la contaminación por ruido en las observaciones a niveles significativos de relación de señal desenfocada a ruido (BSNR). Para el caso en que la contaminación se fija a BSNR$= 25dB$, la diferencia entre los indicadores de señal a ruido se hace más notable ($SNR_{TSVD} = 0{,}02$ y $SNR_{Land} = 3{,}35$) excepto el segundo método que mantiene un resultado ligeramente inferior ($SNR_{Tikh} = 3{,}33$).

Cuando la contaminación es más agresiva (BSNR=15$dB$) los resultados de los métodos clásicos ofrecen valores de los indicadores SNR, totalmente deteriorados (negativos) sin embargo el método Landweber muestra resultados positivos, aunque bajos.

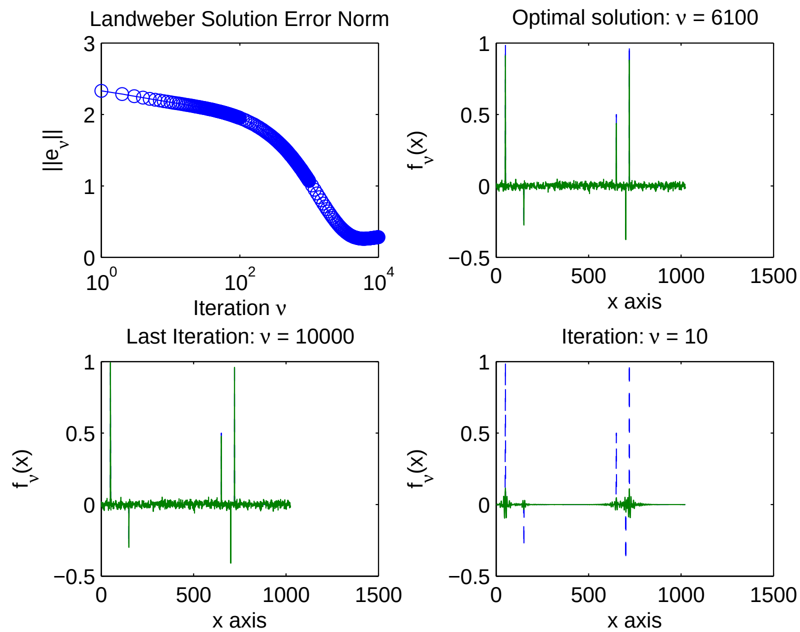


Figura 3.8: Solución usando el método propuesto Landweber con BSNR=40$dB$.

## 3.2. Deconvolución de Imágenes.

Se emplearán tres imágenes, patrones de referencia para la comprobación del rendimiento de algoritmos en el campo del procesamiento digital de imágenes. Caracterizadas por diferentes niveles de actividad espacial, esto es, con diferente cantidad de pequeños detalles. En la Fig. 3.9 se muestran estas imágenes: $mandril$ (alta actividad espacial), $cameraman$ (actividad espacial media) y $lenna$ (baja actividad espacial).

Como ya se ha comentado en la sección 2.2, vamos a emplear la métrica del incremento de la relación señal-ruido (ISNR) y demás indicadores, definidos en 2.2.3, para poder medir de forma cuantitativa la calidad de los resultados obtenidos.

Se procesó cada imagen con el método de deconvolución propuesto, degradadas según el modelo de formación de la sección 1.5.3, con desenfoque por movimiento horizontal de 9 píxeles y desenfoque gaussiano con varianza $\sigma = 3$ (véase la sección 1.5.7) y ruido gaussiano aditivo con diferentes varianzas para obtener BSNR de 15dB, 25dB y 40dB (véase la ecuación (2.2.3)) como se muestra en la Fig. 3.10. No se observaron problemas de convergencia para el número de iteraciones realizadas. Se aplica el filtro clásico de Wiener y se muestran los resultados para diferentes niveles de desenfoque y contaminación de ruido.

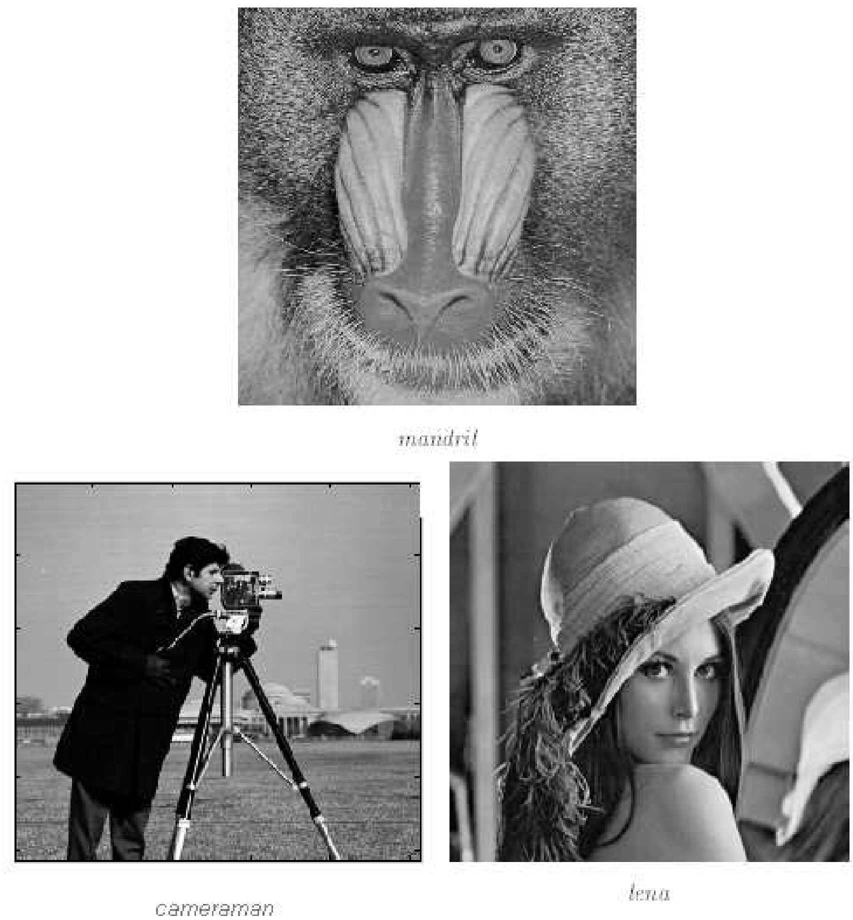


Figura 3.9: Imágenes de prueba

La imagen $Lenna$, que se muestra en la Fig. 3.11 (parte superior izquierda) la reconstrucción de la misma a partir de un desenfoque con una PSF Gaussiana y reduciendo el ruido aditivo.

La solución con el filtro clásico de Wiener mostrada en la parte inferior izquierda, aparentemente ofrece una mejor solución ante la vista del ojo humano, los indicadores de calidad de la imagen; con este método se obtiene con una error cuadrático de $1{,}03 \cdot 10^2$ superior al que resulta del Landweber de $99{,}54$, que además tiene indicadores de relación señal a ruido SNR$_{Wiener}$ $= 20{,}86$

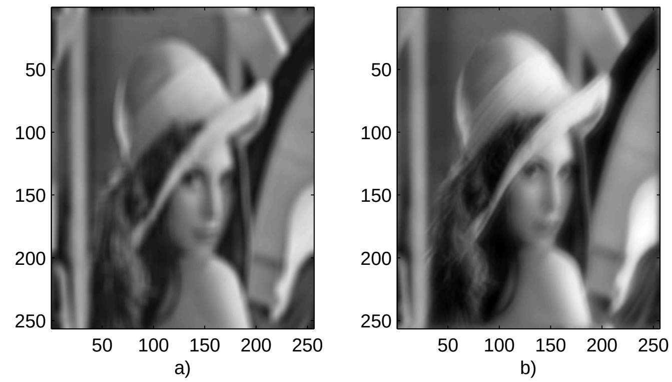


Figura 3.10: (a)Muestra de la Imagen $Lenna$ desenfocada por movimiento lineal y contaminada con ruido gaussiano a BSNR=40$dB$. (b) Con desenfoque Gaussiano.

y el incremento de este ratio ISNR$_{Wiener}$ $= 10{,}88$, ligeramente inferiores a los que resultan del Landweber, SNR$_{Landweber}$ $= 21{,}01$ y ISNR$_{Landweber}$ $= 11{,}03$ respectivamente. La Tabla 3.2 muestra el resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos para los distintos niveles de BSNR, es notable el deterioro que sufre la solución con el filtro de Wiener en la medida en que se incrementa la contaminación por ruido. Como se puede apreciar la imagen de la parte superior

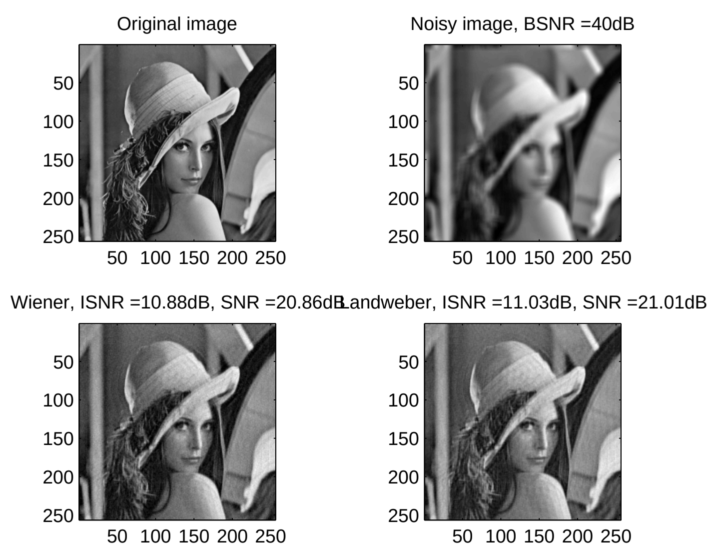


Figura 3.11: Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=40$dB$

derecha está desenfocada debido a un movimiento lineal y contaminada con ruido blanco.

Tabla 3.2: Resultados obtenidos para la Imagen *Lenna*.

| Desenfoque por Movimiento Lineal con $L = 9$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 20,87 | 10,89 | 102,83 | 10,73 | 0,76 | $1{,}0633e+3$ | 1,01 | $-8{,}76$ | $9{,}9506e+3$ |
| Landweber | 21,03 | 11,04 | 99,24 | 18,24 | 8,27 | 188,71 | 16,76 | 6,98 | 265,46 |
| | | | | | | | | | |
| Desenfoque: Gaussiano con $\sigma = 3$ | | | | | | | | | |
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 18,97 | 17,33 | 159,35 | 18,55 | 16,91 | 175,46 | 15,90 | 14,26 | 323,44 |
| Landweber | 19,94 | 18,30 | 127,34 | 19,30 | 17,66 | 147,63 | 17,00 | 15,36 | 250,87 |

En tanto la solución del Landweber lógicamente produce resultados que disminuyen con respecto al caso de BSNR=40$dB$ pero se podría decir que ofrece cierta estabilidad en su variación en lo que SNR e ISNR, respecta. El fenómeno de la variación de la solución en ambos métodos se puede observar en la Fig. 3.12 donde se ha contaminado la imagen con BSNR=$25dB$ de ruido acentuándose el desenfoque y aparecen en la solución del Wiener (parte inferior izquierda) un efecto de porosidad en la imagen reconstruida, que hace evidente la diferencia con respecto a la solución del Landweber. Esto efecto en la deconvolución por Wiener se incrementa con el aumento

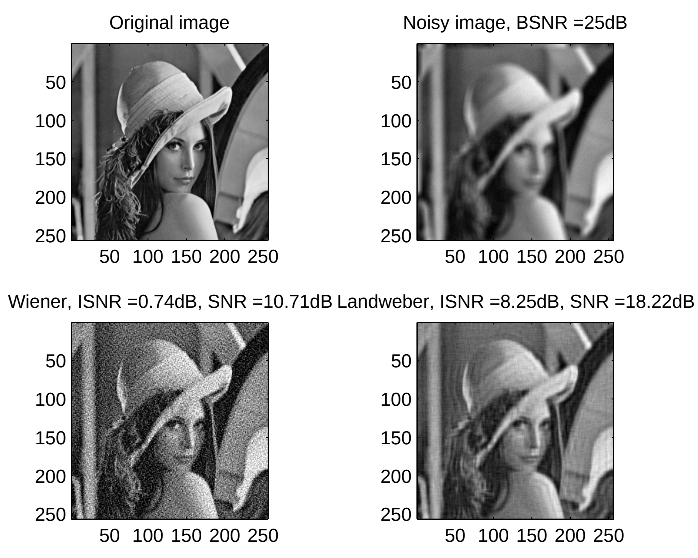


Figura 3.12: Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=$25dB$

del nivel de ruido, vea en la Fig.3.13 para una BNSR=15 $dB$.

Si se analiza el comportamiento de cada método por separado, el Landweber presenta una menor desviación de sus indicadores para diferentes niveles de contaminación (2 ó $3dB$), incurriendo en un incremento del MSE pero que se mantiene pequeño. El Wiener por su parte tiene un decrecimiento de las relaciones SNR e ISNR de aproximadamente diez unidades y un incremento del error en la estimación MSE de orden creciente ($10^2, 10^3$ y $10^4$). Si por otra parte se analiza el resultado que se obtiene al exponer la imagen en cuestión a un desenfoque gaussiano además del ruido que se añade, el efecto de este hace disminuir los indicadores con respecto al caso de desenfoque por movimiento lineal. O sea, se obtienen valores de SNR inferiores y contradictoriamente, la ISNR es superior y el error cuadrático medio ofrece una mejor solución en algunos casos que además es más cercana entre ambos métodos. En las imágenes

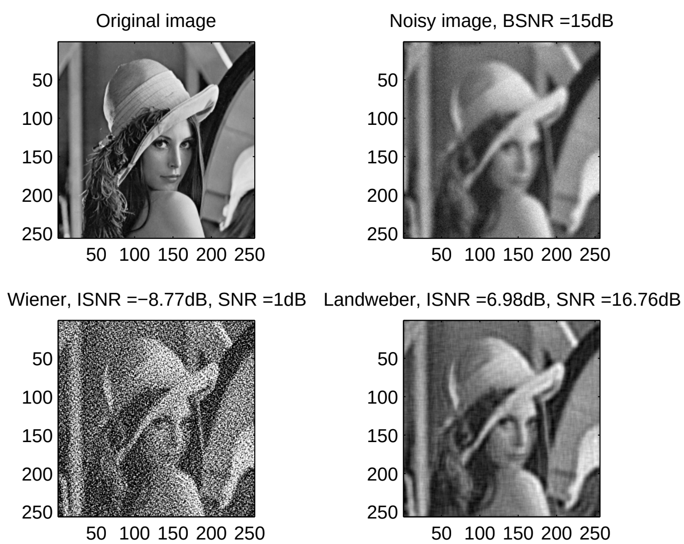


Figura 3.13: Solución de los métodos Wiener y Landweber para Lenna con BSNR=$15dB$

deconvolucionadas, por ambos métodos, aparece un efecto de ondulaciones, esto se debe a que estos métodos no tienen buen desempeño respecto a la conformación de bordes y contornos al reconstruir una imagen de alta resolución en el dominio de la frecuencia. El uso de otras transformadas pueden solucionar este fenómeno (ej. $wavelets$).

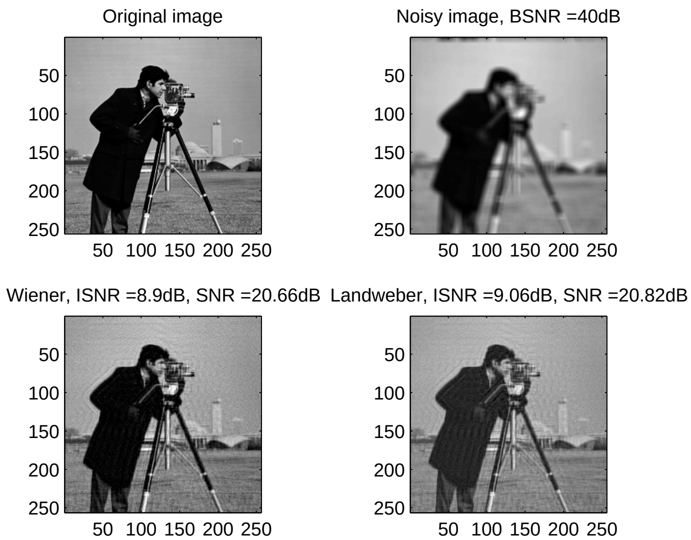


Figura 3.14: Solución de los métodos Wiener y Landweber en Imágenes

Ahora se somete al análisis un imagen que contiene un número mayor de detalles, conocida como $Cameraman$ (vea Fig. 3.14, la imagen de la izquierda, arriba) para verificar los resultados anteriormente obtenidos.
Se trata de de reconstruir rasgos y objetos en dos planos.
En este caso la solución ofrecida por Wiener tiene buena resolución y la diferencia entre este y el Landweber, superando a método iterativo en sólo unas décimas respecto a los indicadores obtenidos para un error cuadrático de $1{,}55 \cdot 10^2$ y $1{,}499 \cdot 10^2$ respectivamente.
Similar al caso anterior, el método de Wiener es bastante sensible al incremento del desenfoque deteriorando su solución rápidamente. No sucede así para el Landweber que se comporta estable, disminuyendo sus indicadores de SNR e ISNR de dos a tres unidades en la medida que el desenfoque varía de BSNR$= 40dB$ a $25$ y $15$, y el error cuadrático se incrementa de forma leve, a diferencia del anterior método cuyo MSE produce valores de orden creciente.

En la Tabla 3.3, se muestra un resumen de los resultados para ambos métodos con los diferentes razones de desenfoque y ruido. En esta tabla se puede notar que en la medida que la imagen posee mayor número de detalles los indicadores son menores, sin embargo se mantiene la estabilidad en

Tabla 3.3: Resultados obtenidos para la Imagen *Cameraman*.

| Desenfoque por Movimiento Lineal con $L = 9$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 20,65 | 8,89 | 156,01 | 10,48 | $-1{,}25$ | $1{,}6217e+3$ | 0,71 | $-10{,}73$ | $1{,}5387e+4$ |
| Landweber | 20,82 | 9,05 | 150,20 | 17,99 | 6,26 | 288,14 | 16,50 | 5,07 | 405,91 |
| | | | | | | | | | |
| Desenfoque: Gaussiano con $\sigma = 3$ | | | | | | | | | |
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 18,10 | 16,41 | 280,86 | 17,68 | 15,99 | 309,23 | 14,98 | 13,30 | 575,75 |
| Landweber | 18,69 | 17,00 | 245,15 | 18,09 | 16,41 | 281,06 | 16,30 | 14,61 | 424,95 |

la solución.

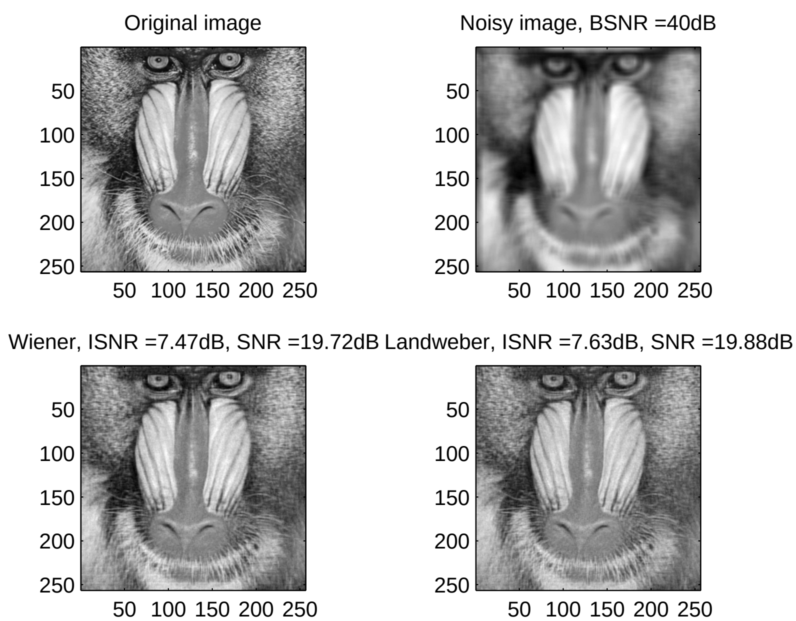


Figura 3.15: Solución de los métodos Wiener y Landweber para $Mandril$ con desenfoque por movimiento lineal

En el caso de la imagen $Mandril$, que está considerada como de alta actividad espacial, se puede notar en la Tabla 3.4, los indicadores con resultados inferiores a los estimados en las imágenes anteriores y a su vez, resultados superiores que en la solución mediante Wiener, independiente del desenfoque que se aplique. Aunque se puede ver que para el desenfoque Gaussiano la relación SNR tiene valores superiores que cuando se usa el desenfoque por movimiento lineal. Sin embargo, para este último tipo de $PSF$, el incremento de este ratio $ISNR$ es menor que para el Gaussiano.

Otro elemento interesante es el comportamiento del MSE obtenido; en la medida en que se incremento la contaminación por ruido, este se mantiene estable y su valor se incrementa levemente para valores mayores de ruido, en contraposición con lo que sucede con la SNR que tiene el el caso Gaussiano, menor valor y le corresponde un MSE inferior que al de movimiento lineal.

Tabla 3.4: Resultados obtenidos para la Imagen *Mandril*.

| Desenfoque por Movimiento Lineal con $L = 9$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 19,72 | 7,47 | 0,002 | 12,85 | 0,62 | 0,0097 | 3,57 | −8,48 | 0,082 |
| Landweber | 19,88 | 7,63 | 0,0019 | 17,12 | 4,90 | 0,0036 | 15,83 | 3,78 | 0,0049 |
| | | | | | | | | | |
| Desenfoque: Gaussiano con $\sigma = 3$ | | | | | | | | | |
| | $40dB$ | | | $25bB$ | | | $15dB$ | | |
| | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE | SNR | ISNR | MSE |
| Wiener | 16,90 | 15,21 | 0,0038 | 15,06 | 16,75 | 0,0039 | 15,58 | 13,89 | 0,0052 |
| Landweber | 17,34 | 15,64 | 0,0034 | 15,43 | 17,12 | 0,0036 | 15,88 | 14,19 | 0,0048 |

## 3.3. Conclusiones parciales

Se prueba que el método iterativo es factible para la solución de problemas inversos en procesamiento de señales e imágenes, mostrando resultados superiores a los obtenidos a través del Tikhonov y el TSVD en señales unidimensionales. El precondicionamiento propuesto asociado a la transformación del $kernel$ en una matriz $blockToeplitz$ resuelve el problema de mal condicionamiento presente en la deconvolución cuando la PSF es centro simétrica.

Los indicadores SNR e ISNR muestran buenos resultados aún con el aumento del ruido contaminante.

En las imágenes el método propuesto, muestra estabilidad en la solución para los dos tipos distintos de PSF, e independiente del grado de contaminación que afecta la imagen.

# CONCLUSIONES

Se logra demostrar que el método iterativo Landweber propuesto en la presente investigación logra mejorar los indicadores de calidad en la deconvolución de señales respecto a los métodos clásicos de contraste: Método de Tikhonov y TSVD. La relación señal a ruido y el incremento de este ratio, muestran valores superiores a los registrados por los métodos clásicos, para un error cuadrático medio inferior.

En señales donde el $PSF$ está centrado y es simétrico con respecto al origen, la transformación en una matriz de convolución a través de una matriz $Toeplitz$ basta para solucionar el mal condicionamiento que caracteriza a este tipo de problemas. Cuando se trata de $PSF$ centro simétricos como en el caso práctico del ensayo no destructivo, esta transformación amplifica el ruido existente en la señal; en ese caso, el uso de una matriz $block - Toeplitz$ garantiza la simetría de la matriz de convolución, solucionando dos problemas esenciales: la amplificación de ruido inicial y por ende la continuidad de la solución en términos de los condiciones de Hadamard. El precondicionamiento propuesto provoca un redesenfoque ($reblurring$) al problema de partida, lo que hace menos evidente el efecto del ruido, y a su vez, mejora el número de condición de la matriz de convolución.

En el caso de las imágenes el método propuesto supera los resultados alcanzados por el filtro inverso de Wiener, probando su estabilidad en la solución para diferentes niveles de contaminación $BSNR$ y para dos tipo desenfoque distintos, Gaussiano y por Movimiento lineal.

# RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Las recomendaciones que se realizan en este trabajo están orientadas al propuestas de trabajo futuro.

1. Implementar el método desarrollado para casos reales de imágenes, ejemplo, satelitales.
2. Debido a que estos métodos están limitados por el conocimiento del puso y la señal original, se propone trabajar sobre la base de deconvolución ciega, de manera que se introduzcan técnicas que permitan la estimación de la PSF
3. El empleo de funciones wavelets en la SVD, pudiera mejorar el proceso de detección y representación de bordes.

# BIBLIOGRAFÍA


Abad, J. (2003). *Restauración y reconstrucción bayesianas de imágenes usando descomposiciones multibandas.* Tesis de Doctorado, Universidad de Granada.

Abeyratne, U., Petropulu, A., Reid, J., Golas, T., Conant, E., & Forsberg, F. (1997). Higher order versus second order statistics in ultrasound image deconvolution. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, *44*(6), 1409-1416.

Acar, R., & Vogel, C. (1994). *Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems.*

Adam, D., & Michailovich, O. (2002). Blind deconvolution of ultrasound sequences using nonparametric local polynomial estimates of the pulse. *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, *49*(2), 118-131.

A.N.Tikhonov, & Arsenin, V. (1977). *Solution of ill-posed problems.*

Antoni, J., Guillet, F., Badaoui, M. E., & Bonnardot, F. (2005). Blind separation of convolved cyclostationary processes. *Signal Processing*, *85*, 51-66.

Banhan, M. (1997). *Wavelet-based image restoration techniques.* Tesis de doctorado, Northwestern University, Evanstou (Illinois).

Bioucas-Dias, J. (2003). Fast gem wavelet-based image deconvolution algorithm. En *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing* (Vol. 2, pp. 961–964).

Bioucas-Dias, J., & Figueiredo, M. (2008). A New TwIST: Two-Step Iterative Shrinkage/ Thresholding Algorithms for Image Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*. (Aceptado para publicar)

Byrne, C. (1998). Iterative algorithms for deblurring and deconvolution with constraints. *Inverse Problems*, *14*(6), 1455-1467.

Calvetti, D., & Somersalo, E. (2005). Statistical elimination of boundary artefacts in image deblurring. *Inverse Problems*, *21*, 1697-1714.

Castillo, Z. (2007). Mínimos cuadrados lineales con restricción cuadrática. *Divulgaciones Matemáticas*, *Vol. 15*(2), 161-177.

Chan, T., & Wong, C. (1996). *Total variation blind deconvolution.*

Chen, C. (2003). Advanced image processing methods for ultrasonic nde research. En *World congress of ultrasonics.* París, Francia.

Conte, S., & Boor, C. de. (1980). *Elementary numerical analysis: An algorithmic approach.* Adam Hilger.

Cui, C., Lamm, P., & Scofield, T. (2007). Local regularization for n-dimensional integral equations with applications to image processing. *Inverse Problems*, *23*, 1611–1633. (doi:10.1088/0266-5611/23/4/014)

Donatelli, M. (2005). *Image deconvolution and multigrid methods.* Tesis de Doctorado, Universitá Degli Studi di Milano.

Donoho, D. (1995a). De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. Inform., Theory*, 613-627.

Donoho, D. (1995b). Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 101–126.

Donoho, D., & Raimondo, M. (2005). A fast wavelet algorithm for image deblurring. En R. May & A. Roberts (Eds.), *Proc. 12th computational techniques and applications conference ctac-2004* (Vol. 46, pp. C29–C46). (http://anziamj.austms.org.au/V46/CTAC2004/Dono)

Engl, H., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). *Regularization of inverse problems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Ghael, S., Sayeed, A., & Baraniuk, R. (1997). Improved wavelet denoising via empirical Wiener filtering. En *Proc. SPIE, Wavelets Applications in Signal and Image Processing* (Vol. 3169, p. 389-399).

Golub, G., & Ye, Q. (2000). Inexact preconditioned conjugate gradient method with inner-outer iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *21*(4), 1305–1320.

Hanke, M., Nagy, J., & Vogel, C. (2000). Quasi-Newton approach to nonnegative image restorations. *Linear Algebra and its Applications*, *316*(1–3), 223–236.

Hansen, C. (2002). Deconvolution and regularization with toeplitz matrices. *Numerical Algorithms*, *29*, 323-378.

Herrera, R. (2006). *Deconvolución de señales ultrasónicas en la evaluación no desructiva.* Tesis de Doctorado, Universidad Central Marta Abreu de las Villas.

Herrera, R., Moreno, E., Calas, H., & Orozco, R. (2005a). Blind Deconvolution of Ultrasonic Signals Using High-Order Spectral Analysis and Wavelets. *Lecture Notes in Computer Science*, *3773*, 663 – 670.

Herrera, R., Orozco, R., Moreno, E., & Calas, H. (2005b). Deconvolución de señales ultrasónicas por regularización wavelet del filtro de Wiener. En *Simposio Ing. Elect.* Santa Clara, Cuba. (ISBN: 959250201-3)

Herrera, R., Orozco, R., & Rodríguez, M. (2006). Wavelet-based deconvolution of ultrasonic signals in nondestructive evaluation. *J Zhejiang Univ SCIENCE A*, *7*(10), 1748–1756.

Highan, N. J. (1996). *Accuracy and stability of numerical algorithms.* Dr. Dobb's Journal.

Hillery, A., & Chin, R. (1991). Iterative Wiener filters for image restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *39*(3), 1892–1899.

Honarvar, F., Sheikhzadeh, H., Moles, M., & Sinclair, A. (2004). Improving the time-resolution and signal-to-noise ratio of ultrasonic nde signals. *Ultrasonics*, *41*, 755-763.

Izzetoglu, M., Onaral, B., & Bilgutay, N. (2000). Wavelet domain least squares deconvolution for ultrasonic backscattered signals. En *Proc. annual EMBS international conference.*

Jalobeanu, A., Zerubia, J., & Blanc-Féraud, L. (2007). Blind image deconvolution: theory and applications. Taylor and Francis / CRC Press.

Johnstone, I., Kerkyacharian, G., & Raimondo, M. (2004). Wavelet deconvolution in a periodic setting. *Journal of the Royal Statistical Society B*, *66*(3), 547-573.

Johnstone, I., & Raimondo, M. (2004). Periodic boxcar deconvolution and diophantine approximation. *Annals of Statistics*, *32*(5), 1781–1804.

Kaaresen, K., & Bølviken, E. (1999). Blind deconvolution of ultrasonic traces accounting for pulse variance. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, *46*(3), 564-573.

Kalifa, J., & Mallat, S. (2003). Thresholding estimators for linear inverse problems and deconvolutions. *Annals of Statistics*, *31*, 58-109.

Katsaggelos, A. (1991). *Digital image restoration.* Springer-Verlag.

Kerkyacharian, G., Picard, D., & Raimondo, M. (2005). Adaptive boxcar deconvolution on full lebesgue measure sets. *Journal of the Royal Statistical Society B*, *57*(3), 301-369.

Kino, G. (1989). *Acoustic waves: Devices, imaging and analog signal processing.* Prentice-Hall.

Lavarello, R., Kamalabadi, F., & O'Brien, W. (2006). A regularized inverse approach to ultrasonic pulse-echo imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, *25*(6), 712–722.

Likas, A., & Galatsanos, N. (2004). A variational approach for bayesian blind image deconvolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *52*(8), 2222–2233.

Ma, Q., Wang, X., & Du, S. (2006). Method and application of wavelet shrinkage denoising based on genetic algorithm. *J Zhejiang Univ SCIENCE A*, *7*(3), 361–367.

Mignotte, M. (2007). A post-processing deconvolution step for wavelet-based image denoising method. *IEEE Signal Processing*, *14*(9).

Mignotte, M., & Meunier, J. (1999). A comparison of surperviced and blind deconvolution techniques applied in spect imagery. *IEEE trans on Biomedical Engineering*.

Molina, R., Blanca, N. P. de la, & Ripley, B. (1989). Statistical restoration of astronomical images. *Data Analysis in Astronomy III*, 75-82.

Nash, J. (1990). *Compact numerical methods for computers.* Adam Hilger.

Neelamani, R., Choi, H., & Baraniuk, R. (1999). Wavelet-based deconvolution for ill-conditioned systems. *IEEE Conf. Acoust. Speech, and Signal Processing (ICAASP)*, *6*, 3241-3244. (http://www-dsp.rice.edu/publications/pub/neelsh98icassp.pdf)

Neelamani, R., Choi, H., & Baraniuk, R. (2004). ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, *52*(2), 418-432.

Ng, M., Plemmons, R., & Pimentel, F. (2000). A new approach to constrained total least squares image restoration. *Linear Algebra and its Applications*, *316*(1–3), 237–258.

Ng, M., Plemmons, R., & Qiao, S. (1997). *Regularized blind deconvolution using recursive inverse filtering.*

Oppenheim, A., & Schafer, R. (1989). *Discrete-time signal procesing.* Prentice-Hall.

Proakis, J., & Manolakis, D. (1996). *Digital signal processing, principles, algorithms and applications* (Third Edition ed.). Prentice Hall.

Raimondo, M., & Stewart, M. (2007). The WaveD Transform in R: Performs Fast Translation-Invariant Wavelet Deconvolution. *Journal of Statistical Software*, *21*(2), 1–28.

Salzenstein, F., Collet, C., Cam, S. L., & Hatt, M. (2007). Non stationary fuzzy markov chains. *Pattern Recognition Letters*, *in press*.

Starck, J., & Pantin, E. (2002). Deconvolution in astronomy: A review. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, *114*, 1051-1069.

Starck, J. L., Pantin, E., & Murtagh, F. (2002). Deconvolution in astronomy: A review. *The Astronomical Society of the Pacific*, *114*, 1051–1069.

Stefan, W., Garnero, E., & Renaut, R. (2005). Signal restoration through deconvolution applied to deep mantle seismic probes. *Geophysical Journal International*, en revisión. (http://math.asu.edu/˜rosie)

Taxt, T., & Frolova, V. (1999). Noise robust one-dimensional blind deconvolution of medical ultrasound images. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, *46*(2), 291-299.

Vogel, C. (2002). Computational methods for inverse problems. *SIAM, Frontier in Applied Mathematics*.

Vonesch, C., & Unser, M. (2007). Fast wavelet-regularized image deconvolution. *IEEE Biomedical*, *2*(07).

Wan, S., Raju, B., & Srinivasan, M. (2003). Robust deconvolution of high-frequency ultrasound images using higher-order spectral analysis and wavelets. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, *50*(10), 1286-1295.

# ANEXOS

# Anexo A

# Descomposición en valores singulares del método de Tikhonov

Partiendo de (1.3.7) se realiza la descomposición en valores singulares.

$$
\begin{aligned}
x &= \left[(U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T + \alpha I\right]^{-1}(U\Sigma V^T)^T y \\
&= \left[V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T + \alpha V I V^T\right]^{-1}(V\Sigma^T U^T)y \\
&= \left[V\Sigma^T I\Sigma V^T + \alpha V I V^T\right]^{-1}(V\Sigma^T U^T)y && \text{Pues } U^TU = I \\
&= \left[\big(V\Sigma^T I\Sigma + \alpha V I\big)V^T\right]^{-1} V\Sigma^T U^T y && \text{Distributiva a la derecha de} \\
& && \text{la multiplicación con respecto a la suma} \\
&= (V^T)^{-1}\left[\big(V\Sigma^T\Sigma + V\alpha I\big)\right]^{-1} V\Sigma^T U^T y && \text{Ya que}(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}\text{y} \\
& && \text{conmutativa, } \alpha V = V\alpha \\
&= (V^T)^{-1}\left[V\big(\Sigma^T\Sigma + \alpha I\big)\right]^{-1} V\Sigma^T U^T y && \text{Distributiva a la derecha} \\
&= (V^T)^{-1}\left[\big(\Sigma^T\Sigma + \alpha I\big)\right]^{-1} V^{-1}V\Sigma^T U^T y \\
&= (V^T)^{-1}\left[\big(\Sigma^T\Sigma + \alpha I\big)\right]^{-1} (V^{-1}V)\Sigma^T U^T y && \text{Asociativa del producto} \\
&= (V^T)^{-1}\left[\big(\Sigma^T\Sigma + \alpha I\big)\right]^{-1} I\Sigma^T U^T y && \text{Pues } V^{-1}V = I \\
&= (V^T)^{-1}\left[\big(\Sigma^T\Sigma + \alpha I\big)\right]^{-1} \Sigma^T U^T y && \text{Pues } IA = A \\
&= V\left[\big(\Sigma^2 + \alpha I\big)\right]^{-1} \Sigma^T U^T y && \text{Ya que } VV^T = I \text{ entonces } (V^T)^{-1}; \Sigma^T\Sigma = \Sigma^2
\end{aligned}
$$

# Anexo B

# Demostración del filtro de Wiener

Partiendo de (1.1.1) se busca minimizar el Error Cuadrático Medio (MSE) entre la señal de salida y la referencia.

$$J_h = \frac{1}{2}E\{|\eta(n)|^2\} = \frac{1}{2}E\{|d(n) - y(n)|^2\} \tag{B.0.1}$$

Bajo la consideración de que el señal de entrada $x(n)$ es una variable aleatoria y siempre que se cumpla las siguientes condiciones:

- el sistema es lineal e invariante
- el ruido aditivo es gaussiano
- la señal de entrada es gaussiana
- el ruido y la señal de entrada no están correlacionados

Entonces tomando la convolución discreta $y = Hx$, $H$ es una matriz de convolución y sin ruido aditivo $\eta = 0$.

El error cuadrático medio sería un paraboloide,

$$J_h = E\{|d - Hx|^2\} = E\{d^T d\} - E\{d^T xH\} - E\{H^T x^T d\} + E\{H^T x^T xH\} \tag{B.0.2}$$

con un mínimo único que se obtiene derivando con respecto a $H$,

$$J_h^* = E\{Hx^T x - x^T d\} = 0$$

donde, $E\{H\} = H^*$,

$E\{x^T d\}$ ó $E\{d^T x\} = R_{xd}$: la matriz correlación cruzada

$E\{x^T x\} = R_{xx}$: matriz de autocorrelación.

Esta última es una matriz Toeplitz donde el elemento $i, j = i+1, j+1$, lo que genera una matriz simétrica, de manera que

- la autocorrelación $R_{xx} = \{r[i]\} = E\{x(n)x(n \pm i)\}$
- $R_{xx}$ es semidefinida positiva, satisface que $bR_{xx}b^T \geq 0 \quad \forall \neq 0$
- Es Hermítica $\Rightarrow R_{xx}^h = R_{xx}^c$:(c significa la conjugada transpuesta

El resultado es:

$$H^* = R_{xx}^{-1} R_{xd} \tag{B.0.3}$$

A la relación anterior se le conoce como ecuación de Wiener-Hopf, de la que se puede extraer el error mínimo sustituyendo en (B.0.2).

$$\begin{aligned} J_h &= E\{d^T d\} - E\{d^T x H\} - E\{H^T x^T d\} + E\{H^T x^T x H\} \\ &= E\{R_{yy}\} - E\{R_{xd} H\} - E\{H^T R_{xd}\} + E\{H^T R_{xx} H\} \\ &= \mu_d^2 - R_{xd} H - H^T R_{xd} + H^T R_{xx} R_{xx}^{-1} R_{xd} \end{aligned}$$

El MSE mínimo se encuentra entonces para:

$$J_h = \mu_d^2 - R_{dx} R_{xx}^{-1} R_{xd} \tag{B.0.4}$$

Sin embargo, donde $H$ toma valores cercanos a cero, hay una gran amplificación del ruido con varianza tendiendo a infinito, lo que conduce a estimaciones incorrectas (Neelamani $et\ al.$, 1999). O sea, el problema de la deconvolución es singular y para resolverlo se necesita algún método de regularización, que reduzca la varianza de la señal estimada. Regularizando y a través del mismo análisis se obtiene $e = (H^T H + \alpha C^T C)x + H^T y$, entonces explotando el principio de ortogonalidad $E\{e^T x\} = 0$ mencionado al inicio de este epígrafe,

$$E\{((H^T H + \alpha C^T C)x - H^T y)Hx\} = 0$$

$$E\{(H^T H + \alpha C^T C)x^T x H - H^T H x^T y\} = 0$$

$$E\{(H^T H + \alpha C^T C)R_{xx} H - H^T H R_{xd}\} = 0$$

en el que se obtiene que:

$$H = \left[H^2 + \alpha C^T C\right]^{-1} H^2 R_{xx}^{-1} R_{xd} \tag{B.0.5}$$

En esta expresión se puede notar la similitud con el método de Tikhonov.

Como muestra la Fig. 1.1 en presencia de ruido es posible estimar la autocorrelación de este, $R_{\tau\tau}$ además de autocorrelación de la señal de entrada $R_{xx}$ y la correlación cruzada $R_{xd}$. Considerando que las autocorrelaciones representa la densidad espectral o espectro de potencia de la señal y el ruido respectivamente (Herrera, 2006), dicho de otra forma, el cociente de la densidades espectrales $R_{xx}/R_{\eta\eta}$ representa la relación señal a ruido SNR; es conveniente hacer $C^T C = R_{xx}^{-1} R_{nn}$, lo que representa el factor de inmunidad al ruido (*noise desensitizing*)(Honarvar $et\ al.$, 2004) y el valor recomendado es:

$$R_{xx}^{-1} R_{\eta\eta} = 10^{-2} |H|^2_{\text{máx}} \tag{B.0.6}$$

Es necesario mencionar que el parámetro de regularización $\alpha$ controla el compromiso entre la cantidad de ruido a suprimir y la distorsión de la señal, uno a expensas del otro. Esta forma de regularización se conoce como encogimiento de Wiener.