

Tesis para optar por el Categoría Investigativa  
de Máster en Matemática Aplicada

Estudio del error de  
interpretación  
introducido por la  
curvatura de la  
respuesta y la  
variabilidad en diseños  
de experimentos a dos  
niveles

## Resumen

## Índice

Resumen .....	2
Índice .....	3
Introducción .....	4
Capítulo 1: Estado del Arte .....	10
1.1 Diseños de Experimentos .....	10
1.1.1 Conceptos Generales .....	10
1.2 Diseño de parámetros .....	12
1.3 Selección de la métrica o "performance measure" .....	14
1.4 Selección de la matriz de diseño .....	17
1.4.1 Matriz producto y matriz ampliada .....	17
1.4.2 Alternativas a la Matriz Producto .....	20
1.4.3 Diseños no aleatorizados .....	23
1.5 Análisis de datos y detección de efectos significativos .....	25
1.6 Selección de condiciones óptimas del modelo .....	28
1.7 Modelos de regresión .....	32
Capítulo 2: Estudio de las superficies "Y" y su variabilidad .....	34
2.1 Definición de Errores por Curvatura .....	34
2.2 Determinación de la presencia de curvatura .....	35
2.3 Utilización de diseños factoriales con puntos al centro .....	37
2.4 Estudio de la influencia de factores .....	38
2.5 Análisis de la influencia de la variabilidad .....	38
2.6 Aproximaciones a $\sigma^2(Y)$ y $\sigma(Y)$ a partir de diseños factoriales a 2 niveles .....	40
Capítulo 3: Estrategia para evitar errores .....	45
3.1 Estrategia Experimental para evitar errores .....	45

## Introducción

Acabamos de entrar en un nuevo milenio y el escenario que rodea a las empresas es muy diferente del que existía hace tan sólo 20 años: Los usuarios esperan que los productos cubran un mayor número de prestaciones; el aumento de la oferta y los avances tecnológicos hacen que el nivel de calidad de los productos sea cada vez mayor; como consecuencia de la globalización de los mercados las condiciones de uso de los productos son muy diversas (climas diversos, costumbres diferentes,...) y, sin embargo, se espera un buen funcionamiento bajo cualquiera de estas condiciones.

Como consecuencia de este escenario los productos son cada vez más complejos, y la tarea de diseñarlos y fabricarlos es cada vez más difícil haciéndose necesaria en la fase del diseño la presencia de técnicos con un alto nivel de conocimiento tecnológico especializado, así como de líderes, con un conocimiento profundo y global del producto, que coordinen las diferentes especialidades. Por otra parte para asegurar elevados índices de calidad en estos productos tan complejos se requiere que las tasas de fallo de las componentes que las integran han de ser prácticamente nulas.

El diseño del proceso de fabricación también resulta extremadamente complicado ya que el número de procesos involucrados es muy numeroso y el producto acumula la variabilidad de cada uno de los subprocesos. Como consecuencia, hay un alto coste de no-calidad debido a rechazos por no cumplir las especificaciones finales o por no cumplir algunas de las tolerancias intermedias. Este coste de no calidad es estudiado en profundidad en el programa de mejora "Seis Sigma" (Breyfogle (1999), Harry et al. (2000) y Pande et al. (2000) entre otros).

Para mantenerse en el mercado hay que encontrar una solución teórica al concepto de producto que espera la sociedad y que a la vez sea rentable desde un punto de vista de negocio. Es decir, entre todos los prototipos cumpliendo las especificaciones requeridas por los usuarios finales, se ha de encontrar aquel que presente mejor comportamiento en producción.

Por lo tanto, las empresas han de adoptar estrategias que les permitan sobrevivir en estos escenarios tan complejos y manteniendo su objetivo de hacer negocio. Estas estrategias han de contemplar diseñar y comparar productos teniendo en cuenta:

- El cumplimiento de las especificaciones funcionales requeridas;
- El comportamiento del producto ante condiciones variables de producción, entorno de uso, características de los usuarios,... etc.

Es fácil encontrar en el entorno que nos rodea ejemplos de productos a los que se les demanda altas prestaciones y que sean a su vez robustos o insensibles al entorno en que son utilizados.

Esta estrategia acaba siendo muy cara ya que se llega a tomar acciones costosísimas (y en muchos de los casos sin éxito) con tal de reducir el comportamiento variable del producto. Cuanto más complejo es el producto, y cuanto más diverso es el mercado, más sentido tiene optimizar los dos apartados a la vez: Se ha de diseñar un producto robusto desde el comienzo teniendo en cuenta el proceso que lo va a fabricar y el usuario al que va a llegar.

Aunque el problema de reducir la variabilidad entre productos o entre características de calidad no es un tema nuevo, sí que lo es el modo de abordar el tema propuesto en los 80 por el ingeniero Genichi Taguchi.

Tradicionalmente, la manera de atacar el problema era mediante una recogida de datos del proceso que permitiera realizar un ANOVA respecto a los factores que habían cambiado: Tipo de máquina, proveedor, etc. En general en estos estudios se hace un gran esfuerzo de recogida de datos en relación a los pocos factores que se estudian, y casi siempre estos factores están fijados en situaciones habituales de trabajo, por lo que se llega a identificar mejoras, pero todavía con una variabilidad de salida muy amplia.

Podríamos decir que con el método tradicional se intenta "descomponer la variabilidad total en sus fuentes para llegar a conocer aquella parte del proceso que contribuye más y por lo tanto hacia donde se han de dirigir los esfuerzos de mejora". Tippett (1935) y Daniels (1938) publicaron dos de los artículos más antiguos en esta línea y ambos provienen de empresas textiles. En ellos se plantea la búsqueda de condiciones de fabricación que ofrezcan una calidad de salida de las fibras lo más homogénea posible.

Como alternativa al método tradicional, Taguchi plantea experimentar, provocar escenarios, y lo hace desde un punto de vista científico y objetivo: En lugar de simplemente observar la variabilidad en las condiciones habituales de trabajo, propone:

- La realización de pruebas experimentales seleccionadas de una manera muy peculiar;
- El uso de un indicador ( $S/R$ ) que permitirá seleccionar las condiciones óptimas del diseño, es decir, las condiciones bajo las cuales la variabilidad en el comportamiento del producto o proceso se reduce drásticamente.

Este enfoque del problema marcaría un hito en el desarrollo de la estadística industrial.

Las discrepancias encontradas al analizar de dos formas diferentes los resultados de un experimento ejecutado a partir de una matriz producto fueron la semilla del trabajo de investigación que hemos llevado a cabo.

Durante la resolución de varios ejemplos utilizando diferentes métodos fueron encontrados errores que se han clasificado de la siguiente forma:

- ε Encontrar condiciones óptimas cuando en realidad no lo son (tipo I).
- ε No encontrar condiciones óptimas cuando en realidad existen (tipo II).

El error de Tipo I se muestra con frecuencia en estos casos:

- ✓ La variable de respuesta depende de interacciones significativas, entre uno de los factores de control con uno de los de ruido.
- ✓ La variabilidad de los datos puede introducir diferencias significativas en los factores tomados como óptimos.

Mientras que el Error de Tipo II se encuentra muchas veces cuando la variable de respuesta depende de forma no lineal de los factores de control y su óptimo se encuentra en la región experimental.

Aunque en un principio se debería esperar resultados muy similares analizando un mismo problema por los dos diseños, es conocido desde hace algún tiempo que las conclusiones pueden llegar a ser significativamente diferentes.

Es por esta razón que surgen las siguientes **interrogantes de investigación**:

- ? ¿A qué se deben estas diferencias?
- ? ¿Existe un método que es mejor que el otro?
- ? ¿Cuál es la estrategia más apropiada a adoptar desde el comienzo de la planificación de la experimentación?

Por lo que se puede plantear el siguiente **Problema Científico**:

- ✓ Diferencias en los resultados de los métodos de diseños de diferentes niveles para obtener condiciones óptimas.

De esta forma la **Hipótesis de Investigación** será la siguiente:

- ✓ Es posible determinar el error introducido por curvatura de la respuesta, aumentando con puntos centrales los diseños a dos niveles.
- ✓ Es posible modelar la variabilidad de la respuesta para determinar su influencia en los resultados de los diseños de Taguchi, considerando la interacción de varios factores de ruido.

Para dar respuesta a la Hipótesis se determina como **Objetivo General**:

- ✓ Determinar el error introducido por curvatura de la respuesta, aumentando con puntos centrales los diseños de dos niveles

El Objetivo General quedará desglosado en los siguientes **Objetivos Específicos**:

- ✓ Analizar las diferencias entre modelar las respuestas con dos y tres niveles.

- ✓ Desarrollar metodologías de actuación que ayuden a determinar la influencia de la curvatura.
- ✓ Obtener pautas de actuación que ayuden a seleccionar diseños en cada caso.

## ESTRUCTURA DE LA TESIS

## Capítulo 1: Estado del Arte.

### 1.1 Diseños de Experimentos.

El diseño estadístico de experimentos permite optimizar la información generada acerca del proceso en relación con los objetivos planteados, es por lo tanto una aplicación del método científico para generar conocimiento de acerca de un proceso o sistema. Esta herramienta se ha ido consolidando en la industria actual como un conjunto de técnicas estadísticas y de ingeniería, que permiten lograr máxima eficacia en los procesos con el mínimo costo. El diseño de experimentos es particularmente útil para crear calidad desde la fase de diseño del producto y del proceso; pero también permite lograr mejoras sustanciales en procesos ya establecidos.

#### 1.1.1 Conceptos Generales.

En este epígrafe se hace referencia a los conceptos más importantes que se utilizar en materia de diseño de experimentos a lo largo de este trabajo.

Un experimento es un cambio en las condiciones de operación de un sistema o proceso, que se hace con el objetivo que tendrá este cambio sobre una o varias variables del producto. Dicho experimento permite aumentar el conocimiento acerca del sistema. Por ejemplo en un proceso químico se pueden probar diferentes temperaturas, presiones o concentraciones y se puede medir el cambio observado en el rendimiento del proceso. La generación de conocimiento acerca del proceso propicia la introducción de mejoras en el mismo.

En la práctica se pueden realizar cambios en las condiciones de operación un proceso de diversas formas, estas formas pueden ser de manera casual o de manera ordenada y planeada. Generalmente en

la vida el hombre por su naturaleza experimenta constantemente, compara sensaciones, experiencias y situaciones de su cotidianeidad.

Lo mismo ocurre en las empresas donde las experiencias acumuladas por el personal más experimentado sobre las situaciones que se presentan durante el trabajo de los procesos los hacen conocedores de los mismos. Sin embargo en el mundo tan cambiante y exigente de hoy no se puede esperar la calidad de manera casual, se debe ir en su búsqueda, es en esta situación donde el diseño de experimentos se hace fuerte.

El diseño de experimentos consiste en planear un conjunto de pruebas, de tal manera que los datos puedan analizarse estadísticamente y obtener conclusiones válidas y objetivas acerca del producto o proceso.

En el momento de planear un experimento surge la infranqueable pregunta de conocer la cantidad adecuada de artículos a utilizar o producir para realizarles las pruebas, es decir conocer la unidad experimental.

La unidad experimental es la muestra de artículos que es necesario producir en una condición de operación del proceso para obtener a partir de ellos una medición o dato representativo de lo que allí ocurre.

En cada diseño de experimentos es importante definir cuidadosamente la unidad experimental ya que ésta puede ser una pieza o un conjunto de piezas producidas dependiendo del proceso que se estudia.

En todo proceso se deberán definir además las variables de entrada o factores, los que pueden ser controlables o no controlables y las

variables de salida o de respuesta, en el gráfico del anexo 1 se ilustra este contenido.

## 1.2 Diseño de parámetros.

Las ideas de Taguchi obtuvieron una gran aceptación en Occidente, sin embargo no quedaba claro que el método propuesto daba lugar a productos o procesos robustos y con buen comportamiento funcional. Así, si se aceptaba que para medir la calidad de un producto era necesaria una función de pérdidas que tuviera en cuenta las variaciones funcionales que pudiera experimentar el comportamiento de este producto una vez en manos del cliente, no quedaba claro que siguiendo las pautas recogidas en el capítulo anterior referentes al "Método de Taguchi" se lograra en todos los casos el objetivo de optimizar la función de pérdidas seleccionada. Este y otros aspectos dieron lugar a numerosos estudios en un intento de mejorar diferentes aspectos del método.

Sin pretender ser exhaustivos a la hora de citar todos los temas que rodean el diseño de parámetros para la consecución de productos y procesos robustos, presentaremos aquellos que aparecen con más frecuencia cuando se aplican estas técnicas en la industria. Estos temas los clasificamos en los siguientes grupos siguiendo las etapas de la metodología de Taguchi:

- 1) Selección de la métrica a estudiar;
- 2) Selección de la matriz de diseño o condiciones experimentales;
- 3) Análisis de datos y detección de efectos significativos;
- 4) Selección de condiciones óptimas

El problema a tratar puede ser planteado de la siguiente forma: Dada una característica de calidad  $Y$  que depende a través de una función /

desconocida de dos tipos de factores, de control y ruido, se desea elaborar una estrategia o metodología que contribuya a aumentar el conocimiento sobre la relación existente entre la característica de calidad y los factores estudiados, y que ayude a seleccionar las condiciones de los factores de control que optimizan esta característica, con el doble objetivo de mantenerla tan cerca del valor nominal y hacerla lo más robusta posible al efecto de factores ruido.

Para llevar a cabo esta estrategia se experimenta seleccionando determinados factores de control (X's) y ruido (Z's), siendo conscientes de que quedan fuera otros factores que pueden afectar a esta respuesta y que denominamos W's.

$$Y = f(X,Z,W)$$

Donde:

X = Factores de Control seleccionados;

Z = Factores Ruido seleccionados;

W = Factores no seleccionados;

$$Y = g(X,Z) + h \quad (1.1)$$

La proyección de/en el espacio generado por los factores X's y Z's da lugar a una función g quedando la componente h en el espacio complementario. La expresión h recoge la relación entre/y los factores W's no considerados (pudiendo estar implicados además los factores X's y Z's si están combinados con estos W's).

En la práctica se desea dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ? ¿Qué condiciones experimentales seleccionar para X's y Z's?;
- ? ¿Qué métrica utilizar para estudiar Y?;

- ? ¿Cómo se identifican los efectos significativos?;
- ? ¿Cómo se seleccionan las condiciones óptimas?.

Para ello, se acostumbra a aproximar la función  $g$  en (2.1) por medio de polinomios asumiendo que esta aproximación lineal es buena y la componente aleatoria restante no contiene información relevante.

### 1.3 Selección de la métrica o "performance measure"

Las métricas propuestas en la literatura pueden ser clasificadas en dos grupos:

- ✓ Métricas resumen;
- ✓ Métricas no-resumen.

Las métricas resumen integran los valores obtenidos de la característica  $Y$  al dejar fijas las condiciones de los factores de control y variar las condiciones de ruido. Así, son métricas resumen  $E(Y/Z \text{ variable})$ ,  $\text{Var}(Y/Z \text{ variable})$  o las  $S/R$  propuestas por Taguchi. Estas métricas se expresan sólo en función de los factores de control y al optimizarlas puede encontrar las condiciones en los factores de control donde  $Y$  es robusta a variaciones en los factores ruido.

Con estas métricas se busca las mejores condiciones de control sin plantearse conocer cómo es la relación  $g(X,Z)$  de partida.

Las métricas no-resumen estudian directamente la característica  $Y$  para distintas condiciones de los factores de control y ruido e intentan conocer al máximo la relación  $g(X,Z)$  en (2.1). A partir de la relación completa se estudia, en las distintas condiciones de los factores de control, el efecto de los factores ruido en la respuesta intentando minimizar este efecto.

Para poder utilizar las métricas resumen se necesita que las condiciones de ruido a las que se someten las condiciones experimentales en los factores de control sean las mismas, ello se consigue partiendo de una matriz producto. Este tipo de diseño admite los dos tipos de análisis.

Si el diseño de partida está definido a partir de una matriz producto, existen 3 métodos para analizar la variabilidad transmitida por los factores ruido:

- 1) Estimar directamente  $V(Y)$  con métricas resumen;
- 2) Estimar el modelo para  $Y$  con métricas no-resumen y analizar las interacciones entre factores de control y ruido;
- 3) Estimar el modelo para  $Y$  con métricas no-resumen y deducir la expresión de  $V(y)$  a partir de este modelo.

Aspectos más importantes del uso de métricas resumen o métricas no-resumen:

Las métricas resumen,  $S/R$ ; utilizadas por Taguchi para analizar los problemas de robustez fueron el origen de numerosas críticas: Resulta difícil justificar su uso e interpretar los resultados;

⇒ LSK (1987) demuestran que algunas de las  $S/R$  de Taguchi están asociadas a la minimización de alguna función de pérdidas pero no se pueden usar de forma indiscriminada ya que no siempre resultan ser métricas independientes del ajuste o media;

⇒ LSK (1987) recomiendan el uso de una PerMIA para reducir la variabilidad. La selección de una PerMIA depende de la función de transferencia y de la función de pérdidas. No siempre se asegura la existencia de una PerMIA y a veces el método para

estimar la PerMIA es complicado. Algunas de las PerMIA recomendadas son:

Relación entre media y Pérdidas	Función de	PerMIA'	Alternativas
Proporcional	$L(y)=k(y-T)^2$	$10 \log(E^2(Y)/\text{Var}(Y))$	S/R
Proporcional	$L(y)=k(\log(y)-T)^2$	$\text{Log}(\text{Var}(\log(y)))$	S/R
Independient	$L(y)=k(y-T)^2$	$\text{Var}(Y)$	(**)

(\*)Las PerMIAS recomendadas tienen mejor propiedades estadísticas que las S/R alternativas. (\*\*) En este caso no se debe utilizar S/R

Para trabajar directamente con  $\text{Var}(Y)$ , de cara a conseguir robustez, se requiere que las funciones media y variabilidad sean independientes, existiendo diferentes métodos para detectar la dependencia y tratar de corregirla.

Si la distribución teórica de la varianza pertenece a la familia exponencial 1-parámetro, se puede optar por la modelización vía GLM (*"General Lineal Model"*);

En general, si no hay información previa que pueda llevar a seleccionar una métrica más sofisticada, la información de los datos se revela mejor con métodos simples de análisis. Es mejor trabajar en término de la Media y la Desv. Típica o  $\log(s)$  que utilizar métodos más complicados ya que con experimentaciones reducidas no se detectarán mejoras (transformando los datos o modelando vía GLM);

Con la métricas no-resumen se logra tener mayor conocimiento de la relación existente entre "Y" y todos los factores a estudio que con las métricas resumen;

Si se analiza la robustez a partir de la estimación del modelo para  $Y$ , la detección de condiciones robustas a la variabilidad provocada por las condiciones de ruido está supeditada a la bondad de ajuste del modelo para la localización.

#### 1.4 Selección de la matriz de diseño

La matriz de diseño contiene las condiciones en que se han de fijar los factores de control y ruido para realizar la experimentación. En la práctica, las restricciones económicas obligan a economizar el número de experimentos lo cual otorga una gran importancia a este tema.

Primeramente presentaremos la selección de la matriz en función del modelo teórico que se pretende estimar, y a continuación hablaremos del orden de la experimentación teniendo en cuenta este tema.

##### 1.4.1 Matriz producto y matriz ampliada

Aunque el objetivo final del diseño de parámetros es encontrar aquellas condiciones de los factores de control  $X$ 's que hacen a la característica de calidad  $Y$  lo más robusta posible a los factores ruido  $Z$ 's, manteniendo el valor de  $Y$  dentro de unos márgenes establecidos, cada diseño permite explorar la relación de  $Y$  con los factores  $X$ 's y  $Z$ 's de una manera diferente. Por ello, antes de seleccionar la matriz de diseño es primordial plantear la hipótesis sobre la estructura del modelo teórico que se pretende investigar.

Como hemos visto en los apartados anteriores, existen principalmente dos tipos de planteamientos para el modelo teórico:

⇒ Modelo resumen:

Estudia, en cada condición de los factores de control, el valor esperado de la respuesta y la variabilidad debida a los factores ruido. Para realizar este estudio se resume la información a lo largo de las condiciones de ruido. Por ejemplo si se trabaja con media y variabilidad se acostumbra a utilizar los modelos:

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon \quad i, j = 1, \dots, k$$

$$\log(\sigma) = \beta_0^* + \sum_{i=1}^k \beta_i^* X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^* X_i X_j + \varepsilon \quad i, j = 1, \dots, k$$

⇒ Modelo no-resumen:

Se estudia el comportamiento de la respuesta Y para cada condición experimental determinada por los factores de control y ruido. Más adelante se explota la relación entre los factores X's y Z's para llegar a condiciones robustas.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i, j = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r$

De acuerdo a la anterior división, y tomando como referencia para ilustrar los ejemplos los diseños factoriales a dos niveles, existen, a grandes rasgos, dos métodos de plantear la matriz de diseño:

⇒ Matriz producto:

Es la matriz planteada por Taguchi y puede ser interpretada como un diseño  $2^{k-p} \times 2^{r-q} = 2^{(k+r)-(p+q)}$ , resultante de realizar un producto

cartesiano de un diseño  $2^{k-p}$  para los factores de control y un diseño  $2^{r-q}$  para los factores ruido;

⇒ Matriz ampliada:

Es una matriz de tantas columnas como número total de factores incluyendo tanto a los factores de control como a los de ruido. Puede ser interpretada como un diseño  $2^{(k+r)-x}$ .

Si el diseño se ha seleccionado a partir de una matriz producto en general:

- ⇒ Se llega a menos condiciones en los factores de control que se selecciona a partir de una matriz ampliada. Como consecuencia de este hecho el número de efectos asociados a los factores de control que pueden ser estimados cuando se trabaja con métricas no-resumen es menor;
- ⇒ Siempre permiten estimar libre de confusiones las interacciones entre factores de control y factores ruido (reordenando previamente las observaciones en una matriz ampliada).

En cambio, si los diseños se seleccionan a partir de una matriz ampliada teniendo en cuenta a todos los factores involucrados y siguiendo criterios de máxima resolución, se pueden obtener diseños con más efectos estimables en los factores de control pero en muchas situaciones las interacciones entre factores de control y factores ruido no estarán libres de confusiones (en el ejemplo presentado los dos diseños permiten estimaciones libres de confusiones pero esto no es siempre así).

Por otra parte, un diseño a partir de una matriz ampliada seleccionada por criterios de máxima resolución, no permite analizar los "prototipos" a partir de métricas resumen ya que las condiciones a las que se someten

los prototipos son diferentes y por lo tanto los resultados obtenidos a partir de las métricas resumen no son comparables.

Taguchi propone la selección del diseño a partir de una matriz producto y no por criterios de resolución y este hecho ha provocado numerosas críticas, las más comunes relacionadas con el hecho de que estos diseños necesitan una gran cantidad de condiciones experimentales para conseguir una resolución determinada en los factores de control (Shoemaker, Tsui y Wu (1991), Sacks y Welch (1992) y Box (1992) entre otros), y si se trabaja con métricas no-resumen es posible seleccionar diseños con un número total de condiciones experimentales menor.

A pesar de las críticas recibidas con motivo del coste asociado a su ejecución, estos diseños gozan de una gran aceptación en el entorno industrial. Podemos justificar parte de esta aceptación en la disposición intuitiva de las pruebas. En cuanto al coste, este se puede reducir drásticamente si el diseño no se ejecuta de forma totalmente aleatoria.

Cuando el problema del número de condiciones experimentales es grave, Taguchi (1987) propone la utilización de un único "factor ruido compuesto" obtenido a partir de los factores ruido a estudio, que recogería entre todas las condiciones de ruido posibles las dos que provocan las condiciones extremas en la respuesta. Esta estrategia, que conceptualmente tiene un buen planteamiento, sin embargo presenta serias dificultades prácticas ya que resulta difícil conocer a priori cuáles son estas condiciones.

#### 1.4.2 Alternativas a la Matriz Producto

A raíz de las primeras publicaciones del trabajo de Taguchi, diversos autores han trabajado en temas relacionados con métodos de

asignación de factores a las columnas de una matriz ampliada con tal de que el diseño resultante permitiera estimar aquellos efectos que son importantes a la hora de detectar condiciones robustas.

Si se asume que la relación entre la respuesta "Y" y los factores a estudio puede ser aproximada por un modelo lineal de primer orden con términos cruzados:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i, j = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r$

- ⇒ Si interesa estudiar la robustez o lo que es lo mismo, el efecto de los factores ruido en las distintas condiciones de los factores de control, es necesario estimar los efectos que contengan algún factor ruido:  $\theta_l, \theta_{lm}, \delta_{il}$  ( $\theta_{lm}$  no afecta a la selección de las condiciones robustas sólo al valor esperado en estas condiciones);
- ⇒ Si interesa estudiar la respuesta media en diferentes condiciones de los factores de control es necesario estimar los efectos que contengan únicamente factores de control ( $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}$ ).

Por lo tanto si se trabaja con diseños factoriales a dos niveles y se da prioridad a la detección de condiciones robustas, estos diseños han de permitir estimar los efectos principales y las interacciones entre los factores de control y los factores ruido. Queda claro que no es suficiente seleccionar diseños basados en los criterios de máxima resolución y mínima aberración ya que estos diseños tratan por igual a los factores de control y a los factores ruido (Shoemaker y Tsui (1992)).

Addelman (1962 y 1964) posee trabajos, previos a la época en que estamos hablando, donde propone diseños factoriales para un conjunto

de factores clasificados en dos categorías. Estos diseños (para dos, tres cuatro y cinco niveles de los factores) se clasifican en tres clases:

- ⇒ Diseños Addelman de clase 1: De un conjunto de  $n$  factores, permiten estimar libre de confusiones todos los efectos principales y todas las interacciones dobles entre un subconjunto de  $k$  factores;
- ⇒ Diseños Addelman de clase 2: De un conjunto de  $n$  factores, permiten estimar libre de confusiones todos los efectos principales, todas las interacciones dobles entre un subconjunto de  $k$  factores y todas las interacciones dobles entre el resto de  $n-k$  factores;
- ⇒ Diseños Addelman de clase 3: De un conjunto de  $n$  factores, permiten estimar libre de confusiones todos los efectos principales y todas las interacciones dobles que contienen algún factor de un subconjunto de  $k$  factores seleccionados previamente.

Inspirándose en los diseños propuestos por Addelman, Jones (1990) propone un conjunto de diseños tales que, fijando el número de factores de control a estudio, se obtiene el número máximo de factores ruido que pueden estudiarse para un número determinado de condiciones experimentales, de tal forma que el diseño propuesto permite estimar, como mínimo, todos los efectos principales y todas las interacciones dobles entre factores de control y factores ruido; en cada caso particular, las interacciones de otro tipo pueden estar confundidas. Los diseños obtenidos a partir de la matriz producto son un caso particular de estos diseños pero se puede lograr el mismo objetivo con menos condiciones experimentales.

Jones (1990) además propone diferentes diseños dependiendo de si la función a optimizar es  $M(x)$ , relacionada con la cercanía de la respuesta al objetivo,  $V(x)$ , relacionada con la variabilidad de la respuesta debido a los factores ruido, o  $R(x)$ , una media ponderada de las dos expresiones anteriores evaluadas en las condiciones de los factores de control. Por ejemplo, si se desea optimizar  $R(x)$  se necesitan diseños que permitan estimar los efectos principales y todas las interacciones entre factores de control y factores ruido.

En el caso en que se trabaje con modelos lineales de segundo orden, Jones (1990) presenta los diseños "Addelman de clase 3 aumentados" construidos a partir de los diseños de clase 3 de Addelman (1962) añadiendo puntos centrales y estrella; los diseños "Box-Behnken modificados", (construidos como su nombre indica a partir de los diseños Box-Behnken); los diseños "Koshal modificados " y los diseños "de resolución III\* de Hartley modificados".

Wu y Zhu (1999) más recientemente aportan tablas de diseños donde, una vez fijado el número de condiciones experimentales y el número total de factores, dependiendo de cómo se alojen los factores entre el grupo de control o el grupo de factores ruido, se presentan varias alternativas de diseños en los que es posible estimar, si no todas, si algún grupo de interacciones entre factores de control y factores ruido. En estas tablas hay diseños que compiten entre sí en cuanto a sus características, y su selección dependerá de la importancia que se le dé a priori a los efectos que permiten estimar. Los diseños de Jones (1990) son casos particulares de los aquí presentados.

#### 1.4.3 Diseños no aleatorizados

Hasta ahora no hemos hecho ningún comentario sobre el orden en que se deberían de realizar las pruebas y suponiendo que un diseño con "n" condiciones experimentales requiere "n" experimentos u operaciones independientes a la hora de la ejecución. Sin embargo, en la práctica no siempre esto es así; de hecho en muchas más ocasiones de lo que cabría pensar, los experimentos no se aleatorizan sino que se realizan en un orden que supone un ahorro económico importante de experimentación y todo ello a costa de mover al mínimo los niveles de ciertos factores.

Como consecuencia, a la hora de evaluar el coste del diseño, el número de condiciones experimentales pasa a un segundo plano y lo que verdaderamente cobra importancia es el número de movimientos de los factores o lo que podríamos llamar el número de operaciones diferentes que se realizan.

Algunos diseños que recogen esta idea son los diseños denominados "split-plot" estudiados de forma muy amplia por Cox (1958) y a los que Jones (1991), Box y Jones (1992) y Bisgaard (2000) entre otros, les dan un tratamiento especial al aplicarlos al entorno de diseño de parámetros.

Los diseños split-plot aplicados al diseño de productos y procesos robustos, tienen una apariencia similar a los diseños obtenidos a partir de una matriz producto pero sin embargo se ejecutan de manera diferente a lo que sería un diseño totalmente aleatorizado, con el consiguiente ahorro económico de ejecución. Taguchi (1987) menciona explícitamente esta alternativa de experimentación en algunos de sus trabajos originales.

Sin embargo, en la mayoría de trabajos publicados donde se utilizan matrices producto no se acostumbra a mencionar el orden de experimentación, por lo que se asume que son diseños totalmente

aleatorizados y por lo tanto con una mala relación entre el número de efectos que pueden ser estimados y el coste de la experimentación.

El orden de ejecución no afecta a la estimación de los efectos sino que provoca diversas fuentes de error experimental, por lo tanto afecta a la significación de los efectos. Por lo tanto, si se reordenan las condiciones experimentales de una matriz producto en una única matriz extendida con el fin de estimar un modelo completo en los factores de control y ruido, no todos los efectos serán estimados con la misma precisión y no se podrán ordenar los efectos por su magnitud.

El escenario que rodea la selección de este tipo de diseños alternativos sería el siguiente: se desean realizar una serie de pruebas experimentales dentro de la metodología de diseño de parámetros pero se tienen restricciones económicas serias en cuanto al número de pruebas a realizar. Cabría la posibilidad de obtener el valor del comportamiento de la respuesta en un mayor número de condiciones experimentales si se agrupan estas ya que supondría una gran reducción de costes.

Aunque es posible realizar las pruebas de una gran variedad de formas, si no se sigue un "mínimo de orden" en el orden de realización, el análisis posterior de los datos comienza a ser dificultoso. Por ello se estudia principalmente tres métodos de ejecución de los experimentos: totalmente aleatoria, split-plot y strip-plot.

### 1.5 Análisis de datos y detección de efectos significativos

Cuando la experimentación se ha llevado a cabo partiendo de diseños factoriales, la estimación de los efectos se realiza por mínimos cuadrados ordinarios y los métodos más utilizados para la detección de los efectos significativos están basados en t-test individuales y en gráficos en papel probabilístico normal o semi normal (Daniel, 1959). En

el primer caso se requiere tener una estimación del error estándar del efecto y en el segundo no es necesario conocer este error, pero sólo se pueden llevar al gráfico efectos con el mismo error estándar.

Si la experimentación se ha realizado partiendo de una matriz producto, las estimaciones mínimo cuadradas de los efectos sobre la respuesta  $Y$  que se obtienen a partir de métricas resumen o métricas no-resumen son las mismas e independientes del orden de ejecución de las pruebas; sin embargo las estimaciones del error experimental, y por consiguiente del error estándar de los efectos, sólo son iguales si el diseño se ha ejecutado aleatoriamente.

Por consiguiente se puede estimar los efectos por el método que se desee pero sin tener en cuenta el grado de significación si el diseño no es aleatorizado; para obtener el grado de significación se puede estimar cada fuente de error a partir de un análisis de la varianza, ANOVA, y aplicarlo a cada grupo de efectos.

Si las pruebas se han ejecutado según un diseño en split-plot o strip-plot, existen dos fuentes de error diferentes para el primer caso, la que viene del "plot" y la que viene del "subplot", y tres para el último, la del "plot", el "subplot" y la de la interacción entre "plot" y "subplot". Por consiguiente, si se utilizan los métodos habituales de estimación mínimo cuadrática asumiendo que el diseño es totalmente aleatorizado:

- ⇒ Si se utilizan métricas resumen la estimación que se obtiene del error estándar de los efectos (todos ellos asociados a factores de control) será correcta si el diseño es aleatorizado o es un split-plot con el "plot" los factores de control;
- ⇒ Si se utilizan métricas no-resumen, la estimación del error estándar de los efectos sólo es correcta si se ha aleatorizado el diseño.

Para la detección de efectos significativos se pueden utilizar t-test o gráficos en papel probabilístico normal teniendo cuidado de realizar un gráfico para cada grupo de efectos con el mismo error estándar (Jones (1991) y Bisgaard(2000)).

Si, como ocurre habitualmente, se parte de prototipos fabricados seguidos sin mover las condiciones de proceso, es decir como un split-plot con el "plot" los factores de control, es mucho más sencillo analizar los datos con una métrica resumen que hacerlo con una no-resumen que incluya a todos los factores en el modelo, ya que este último análisis implica la estimación de varias fuentes de variación y tratar los efectos de una manera más sofisticada.

En la práctica se desconoce la magnitud del error experimental y los experimentos son llevados a cabo sin realizar réplicas genuinas por lo que se ha de recurrir a métodos de estimación del error que dependen del diseño seleccionado.

Si se parte de un diseño factorial ejecutado de forma aleatoria, la estrategia de selección propuesta por Taguchi de agrupar los efectos más pequeños para estimar el error experimental, tiende a incrementar el error de tipo I, es decir, tiende a considerar significativos efectos que no lo son. Stephens y Mouw (1999) aplicando el método de selección propuesto por Taguchi demuestran que en un diseño con 15 efectos aleatorios es muy probable seleccionar 3 de ellos como significativos con  $\alpha=0.01$ .

Para el mismo diseño con 15 efectos aleatorios, Box (1988) varía ligeramente el método propuesto por Taguchi y, partiendo de los 7 efectos más pequeños para estimar el error, muestra lo probable que es detectar como significativos entre 3y 6 de los 8 factores restantes. Por esta razón este autor recomienda utilizar el principio de "sparsity" y tomar aquellos efectos que representan a interacciones de orden superior a la

hora de estimar el error experimental. Este mismo autor recomienda utilizar información a priori sobre el número de efectos significativos en experiencias similares para seleccionar los efectos a partir de los gráficos de probabilidad Bayes (Box y Meyer, 1986).

Finalmente, como resultado del análisis, se seleccionarán aquellos efectos significativos para la métrica a estudio. Cuando se trabaja con métricas resumen del tipo media y varianza, los factores significativos se clasifican en:

- Factores de control que afectan a la medida de variabilidad;
- Factores de control que afectan sólo al ajuste y no afectan a la variabilidad;

En cambio, cuando se trabaja con métricas no-resumen se estudian tanto los factores de control como los de ruido por ello la clasificación de los factores significativos es como sigue:

- Factores de control que interaccionan con factores ruido;
- Factores ruido que afectan a la respuesta e interaccionan con los factores de control;
- Factores de control que no interaccionan con factores ruido pero afectan a la respuesta;
- Factores ruido que afectan a la respuesta pero no interaccionan con factores de control.

## 1.6 Selección de condiciones óptimas del modelo

Si se trabaja con S/R, la selección de los niveles de los factores significativos que maximizan esta métrica se hace a partir de los gráficos de los efectos. Ya hemos visto que la optimización de S/R no tiene porqué estar ligada siempre a una optimización de una función de

pérdidas y que en la mayoría de las situaciones se tiende a trabajar de forma separada con métricas para localización y para la dispersión, es decir asumiendo mientras no se tenga evidencia de lo contrario, que ambas medidas son independientes.

Cuando se utilizan métricas resumen alternativas a las propuestas por Taguchi, media y log(s) por ejemplo, se llega a un conjunto de factores de control que aparecen como significativos en alguna de las anteriores métricas o en ambas. Si la optimización se hace por separado, las condiciones óptimas se seleccionan a partir de los gráficos de los efectos sobre la media y sobre log(s).

Cuando el análisis de los datos se realiza a partir de métricas no-resumen, modelando directamente la respuesta Y en función de los factores de control y ruido mediante aproximaciones polinómicas, nos encontramos que el modelo general estimado

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i, j = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r$

tiene una parte que permanecerá fija una vez seleccionados los niveles de los factores de control

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j$$

$i, j = 1, \dots, k$

y tiene una parte "variable", donde el valor esperado de la respuesta en las condiciones de control depende del nivel en el que se encuentren ciertos factores ruido:

$$\sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i, j = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r$

Suponiendo que queremos optimizar por separado ambas expresiones:

- ☑ La selección de los niveles óptimos de los factores significativos que afectan a la media se realiza en general a partir de los gráficos de los efectos;
- ☑ La selección de los niveles óptimos de los factores significativos que afectan a la dispersión se puede realizar por dos métodos principalmente:
- ☑ A partir de los gráficos de interacciones de factores de control y factores ruido que surgen significativos en (2.25), seleccionando los niveles de los factores de control en los que el efecto de los factores ruido se minimiza;
- ☑ Minimizando la expresión de la Varianza(Y) que se obtiene a partir de la parte correspondiente del modelo para Y;

$$V(Y) = V\left(\sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{ij} X_i Z_l\right) + \sigma^2$$

$i, j = 1, \dots, k; \quad l, m = 1, \dots, r$  I

Como veremos más adelante, la existencia de interacciones entre factores de control y factores ruido es un requisito necesario pero no suficiente para la existencia de condiciones robustas, y las soluciones

obtenidas por cada uno de los dos métodos, en contra de lo que podría esperar, no siempre coinciden.

Independientemente del tipo de análisis que se realice (a partir de métricas reamen o modelando directamente la respuesta), cuando en la selección de condiciones óptimas se desea tener en cuenta los dos criterios de media y variabilidad a la vez puede haber conflicto entre ambos y por ellos diversos autores recomiendan distintas estrategias.

Jones (1991) construye una métrica nueva a partir de las dos anteriores ponderando el peso de cada una de las partes a partir de un coeficiente "A" difícil de seleccionar en un entorno real de experimentación. Grima (1993) propone analizar las distintas soluciones alternativas en un gráfico bivalente "media - varianza" que permite tener una idea global de cada situación.

La dificultad que entraña dar un peso a una parte sobre la otra hace que la mayoría de autores sigan manteniéndose en las dos métricas originales a la hora de seleccionar las condiciones y se estudien varias soluciones alternativas utilizando criterios externos al propio estudio para decantarse por una solución u otra (criterios de coste por ejemplo).

### Selección de condiciones robustas al error experimental

En todos los análisis presentados hasta el momento se ha asumido que el modelo de partida era cierto y que los errores o discrepancias entre los valores observados y los que predice el modelo siguen una distribución normal con varianza constante e independiente de cada factor.

Cuando se dispone de réplicas, es posible detectar problemas de heterocedasticidad, y por consiguiente oportunidades de seleccionar condiciones robustas a este ruido, estudiando la variabilidad en cada

condición experimental por métodos similares a los expuestos anteriormente.

Si no hay réplicas, algunos autores han estudiado métodos para minimizar  $V(e)$  a partir de un tratamiento especial de los residuos (Ferrer y Romero, 1995 y Fuller and Bisgaard, 1995). Se trataría de trabajar con una transformación de los residuos

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

$$w_i \begin{cases} \ln e_i^2 + 1.27 & \text{si } e_i \neq 0 \\ \ln(0.5 \min\|e_i\|)^2 + 1.27 & \text{si } e_i = 0 \end{cases}$$

y modelar esta respuesta en función de los factores de control con el objetivo de encontrar condiciones robustas al ruido externo.

$$w_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$

## 1.7 Modelos de regresión

En los diseños de experimentos se obtienen modelos de regresión de diferentes órdenes, aunque generalmente en diseños factoriales a dos niveles se emplean modelos de primer orden. En general la respuesta "Y" se llega a representar hasta modelos de 1er orden con las combinaciones de términos de los factores.

El modelo de regresión para dos variables:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

El modelo de regresión para tres variables se formará sumando los términos:

$$\hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_{13} x_1 x_3 + \hat{\beta}_{23} x_2 x_3 + \hat{\beta}_{123} x_1 x_2 x_3$$

El modelo general para tres factores se puede escribir de forma general de la siguiente forma:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n \beta_{ijk} x_i x_j x_k$$

Un modelo de regresión cuadrático para dos variables se podría escribir de la forma:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 + \hat{\beta}_{11} (x_1)^2 + \hat{\beta}_{22} (x_2)^2 + \varepsilon$$

Como se puede observar el modelo cuadrático es similar al modelo lineal, solo que en este caso se añade la curvatura representada por:

$$\hat{\beta}_{11} (x_1)^2 + \hat{\beta}_{22} (x_2)^2$$

La forma de escribir un modelo general de tres factores es:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_{ii} (x_i)^2 + \varepsilon$$

## Capítulo 2: Estudio de las superficies "Y" y su variabilidad.

En este capítulo se estudian las formas de la respuesta ("Y") y las superficies representantes de su variabilidad en diferentes casos, considerando diferentes tipos de diseños a partir de diseños factoriales  $2^k$  que luego son aumentados con puntos al centro para estudiar la curvatura.

### 2.1 Definición de Errores por Curvatura

Como se expone en el primer capítulo de este trabajo existe una diferencia al emplear los modelos de regresión de distintos órdenes, esta diferencia se hace notable en los casos donde se acerca o se contiene la región de mayor curvatura dentro de la región experimental.

Si en general la respuesta "Y" se llega a representar hasta modelos de 1er orden con las combinaciones de términos de los factores.

El modelo de regresión para dos variables resulta:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

En este caso el modelo de regresión cuadrático correspondiente resulta:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 + \hat{\beta}_{11} (x_1)^2 + \hat{\beta}_{22} (x_2)^2 + \varepsilon$$

Por lo que si se compara el modelo lineal con el de dos variables cuadráticas se nota como dentro del error se incluye el término

$$\hat{\beta}_{11} (x_1)^2 + \hat{\beta}_{22} (x_2)^2$$

El error que introduce la curvatura en el modelo lineal puede tener mayor o menor implicación en el ajuste en dependencia de la región de la curva que se esté investigando con la región experimental.

En casos de diseño de parámetros de los procesos donde se quiere buscar un punto de máximo, de mínimo o de silla, aplicando movimientos secuenciales a la región experimental, es muy probable que en algún momento de la experimentación se tenga que estudiar la curvatura pues el error introducido por la misma, será significativo sobre los estimadores lineales.

Teóricamente se pueden ver las formas en que los modelos lineales y cuadráticos se aproximan.

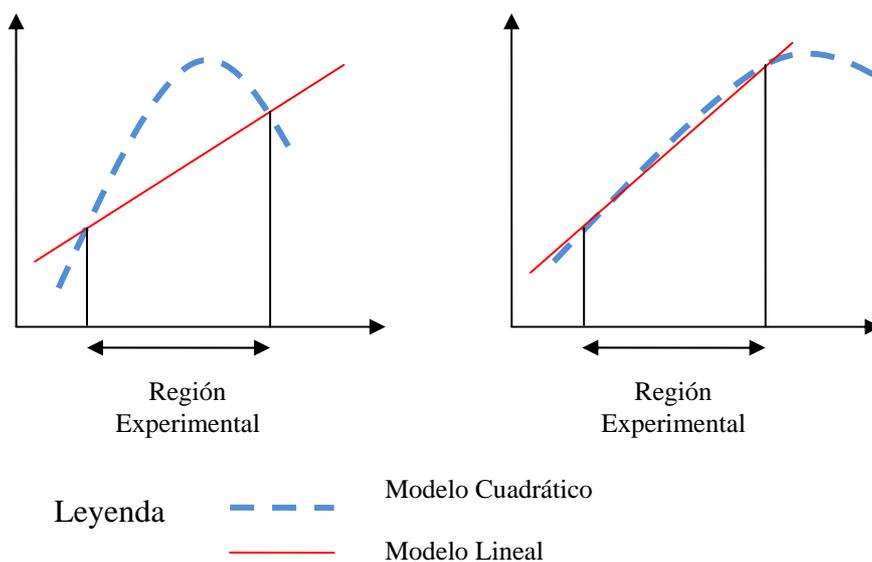


Figura 2.1: Comparación de modelos de regresión, Fuente: Elaboración Propia

## 2.2 Determinación de la presencia de curvatura.

Las formas de determinar cuando en un efecto sobre la respuesta predomina la parte lineal o cuadrática pueden ser varias, en este

apartado se muestran algunas de las diversas formas de detectar la presencia de curvatura.

Ya en epígrafe anterior se introdujo el concepto de error de curvatura, en la práctica lo más importante es como determinar este error y buscar una vía para evitarlo.

Es clave acotar que con diseños de experimentos a dos niveles no se puede determinar la influencia de los términos cuadráticos, por lo tanto no se puede estudiar la curvatura de la respuesta. Es por esta situación que se recomienda utilizar diseños con al menos un punto al centro.

Para determinar la influencia de la respuesta se puede emplear un método gráfico como el que se presenta en la figura 2.2. Haciendo superposición de los gráficos de los efectos de los factores con diagramas Box & Whiskers y enlazando los puntos centrales con líneas o graficando los intervalos de confianza de las medias que se calculan para cada factor.

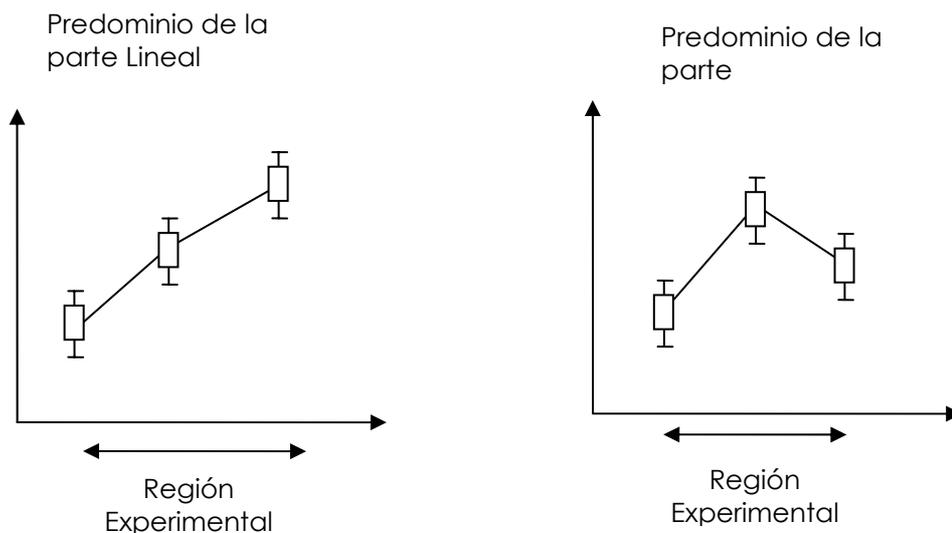


Figura 2.3: Efectos de factores de diferente grado predominante  
Fuente: Elaboración Propia

Este método es un tanto subjetivo pero es muy útil para tener una idea global de la situación de los factores que se analizan en el experimento, y luego poder analizar con más detenimiento los factores significativos. Además es muy útil en diseños donde la respuesta es discreta, ya que esta característica de "Y" puede incluir en el modelo de regresión distintos niveles de error.

Para asegurar que el comportamiento de la variable de respuesta no es adecuadamente descrito con un modelo lineal, se tendrá en cuenta los resultados del análisis de varianza que se deberá realizar. Sin embargo el análisis de varianza que se emplea comúnmente no es capaz de detectar curvaturas no polinómicas de la respuesta.

### 2.3 Utilización de diseños factoriales con puntos al centro.

Cuando en un diseño factorial  $2^k$  los  $k$  factores admitan un nivel intermedio de prueba es recomendable formar un tratamiento adicional formado por la combinación del nivel intermedio o medio de todos los factores. A tal tratamiento o combinación se le conoce como punto central.

Hay dos razones por las que es deseable correr el punto central con cierto número de réplicas. La primera razón es obtener grados de libertad adicionales para el error en la tabla de análisis de varianza (ANOVA), sin perjudicar el balance de la estimación de los efectos de interés. Es conveniente interpretar las tablas ANOVA con al menos 8 grados de libertad, condición que a veces es difícil de lograr cuando por condiciones económicas el experimento se corre sin las réplicas suficientes.

La segunda razón está dirigida a que las repeticiones al centro pueden detectar la posible presencia de curvatura en al menos uno de los factores objeto de estudio. La curvatura a la que nos referimos es el efecto cuadrático de los factores.

#### 2.4 Estudio de la influencia de factores.

Como se había mencionado anteriormente existen básicamente dos tipos de factores: Controlables y no controlables (o de ruido). Por lo regular, los factores de estudio eran los controlables, sin embargo en el diseño robusto es conveniente tener una clasificación más detallada del tipo de factores controlables que pueden influenciar el proceso en cuanto a su efecto sobre la media y la variabilidad de la respuesta de interés. Se pueden distinguir cuatro tipos de factores, a saber (ver anexo 2):

1. Afecta la media y la variabilidad.
2. Afecta solo la variabilidad.
3. Afecta solo la media.
4. No afecta la media ni la variabilidad.

Cuando se afirma en el diseño clásico que un factor tiene efecto sobre la respuesta, generalmente se quiere decir que el factor afecta la media de la variable de respuesta. En cambio cuando se está analizando un diseño robusto se tiene más presente que el efecto del factor puede también afectar la variabilidad o sobre la media y la variabilidad de manera simultánea.

#### 2.5 Análisis de la influencia de la variabilidad.

Existen dos maneras principales de analizar la variabilidad transmitida por los factores ruido a la respuesta:

A) Estimando directamente la variabilidad utilizando métricas resumen. Para lograr este objetivo todas las condiciones experimentales en los factores de control se han de someter a las mismas condiciones de ruido y se aproxima  $V(Y)$  por polinomios del tipo:

$$V(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon \quad i, j = 1, \dots, k \quad \varepsilon \sim \text{iid} \rightarrow N(0, \sigma)$$

B) Estimando primero el modelo que relaciona la respuesta  $Y$  con los factores de control y ruido,

$$Y = F(X's) + \sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r \quad \varepsilon \sim \text{iid} \rightarrow N(0, \sigma)$

Y deduciendo el comportamiento de  $V(Y)$  a partir de este modelo por dos métodos:

- a. Método gráfico: En el que se estudian las interacciones entre factores de control y factores ruido para determinar las condiciones de los factores de control que minimizan el efecto de los factores ruido
- b. Método analítico: A partir del modelo estimado para "Y" en la ecuación se obtiene el modelo para  $V(Y)$  donde la parte principal se debe a la varianza transmitida por los factores ruido  $V_Z(Y)$

$$V(Y) = V\left(\sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{l \neq m} \theta_{lm} Z_l Z_m + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l\right) + V(\varepsilon) = V_Z(Y) + V_\varepsilon(Y)$$

$i = 1, \dots, k \quad l, m = 1, \dots, r$

$$V_Z(Y) = \beta_0^* + \sum_{i=1}^k \beta_i^* X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^* X_i X_j \quad i, j = 1, \dots, k$$

Estas diferencias de partida dan lugar en general a diferentes estrategias de experimentación: Puesto que con el primer método se persigue estimar el modelo para la variabilidad, se seleccionan diseños producto donde una parte importante del presupuesto se asigna a los factores ruido, que son los que inducen esta variabilidad (Taguchi and Wu (1980)).

En cambio, cuando se trata de modelar el valor esperado de la respuesta, se tiende a seleccionar las condiciones experimentales de una manera menos redundante, de tal manera que permitan estimar los coeficientes de este modelo con un mínimo coste (Jones (1990), Shoemaker et al. (1991), Wu et al. (1999), Bisgaard (2000) y Wu y Hamada (2000)).

En general, un diseño seleccionados para estimar un modelo para la respuesta "Y" sólo permite llegar a  $V(Y)$ , mientras que si se selecciona el diseño a partir de una matriz producto, se puede aproximar  $V(Y)$  por las dos vías descritas.

## 2.6 Aproximaciones a $\sigma^2(Y)$ y $\sigma(Y)$ a partir de diseños factoriales a 2 niveles.

En la experimentación ordinaria, tanto si se trabaja con matrices producto como si no, con mucha frecuencia se recurre a diseños factoriales a 2 niveles, la mayoría de las veces fraccionados, a la hora de estudiar el comportamiento de la respuesta "Y" ante los factores de control y factores ruido. A partir de estos diseños se identifican los factores que afectan a la localización de  $\bar{Y}$  y los que son sensibles a la

transmisión de la variabilidad provocada por los factores ruido a la respuesta.

Si la relación entre la respuesta "Y" y los factores a estudio puede expresarse por un modelo lineal de primer orden con a lo sumo términos cruzados, estos diseños permiten estimar de forma adecuada los coeficientes del modelo, salvo problemas de alias si el diseño es muy fraccionado.

Para este tipo de modelos en "Y", se ha visto que la estructura de la superficie asociada a  $\sigma^2(Y)$  es en general más complicada en los factores  $X_i$ . Si planteamos 2 tipos de aproximaciones polinómicas.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \varepsilon = X\beta + \Phi\beta_{ii} + \varepsilon$$

Donde  $\Phi$  en la matriz de columnas  $X_i^2$  y  $\beta_{ii}$  el vector contenido por los coeficientes  $\beta_{ii}$

En general la relación entre la respuesta "Y" y los factores de control y ruido seleccionados puede ser representada por un modelo lineal del tipo:

$$Y = \mu + \sum_{l=1}^r \theta_l Z_l + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r \delta_{il} X_i Z_l + \varepsilon$$

$i = 1, \dots, k \quad l = 1, \dots, r \quad \varepsilon - iid -> N(0, \sigma)$

Donde " $\varepsilon$ " es independiente tanto de los factores de control como de los factores ruido y tiene varianza constante.

Es decir que la forma de las superficies asociadas a la variabilidad, o equivalentemente, la estructura de los modelos que las representan, dependen directamente de la relación existente entre la respuesta "Y" y los factores ruido, incluyendo esta relación a las interacciones de los factores de control con estos factores ruido.

La superficie  $\sigma^2(Y)$ , asociada al modelo en "Y", puede ser representada en el espacio  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  de una manera exacta por un polinomio de segundo orden completo y posee una zona estacionaria de mínima varianza. La zona estacionaria puede ser expresada en función de los coeficientes del modelo en Y.

En el caso particular de que en el modelo para "Y" todos los efectos principales asociados a los factores ruido se anulen ( $\theta_1 = 0$  para  $1 = 1, 2, \dots, r$ ), la zona de mínima varianza pasa por el centro de la región experimental y si se aproximan las superficies  $\sigma^2(Y)$ ,  $\sigma^2(Y)$  y  $\log(\sigma)$  por polinomios de segundo orden, los términos de primer orden se anulan ( $\beta_i = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Por otra parte, si se selecciona como región de interés la que cumple  $|X_i| \leq 1$ , y los coeficientes del modelo en "Y" cumplen las condiciones en (7.13), la superficie  $\sigma^2(Y)$  toma la forma de un "plano cuadrado" y  $\sigma^2(Y)$  admite una aproximación exacta por un plano.

En general, sólo si la zona de mínima varianza está suficientemente alejada de la región experimental, las tres superficies,  $\sigma^2(Y)$ ,  $\sigma^2(Y)$  y  $\sigma(o)$ , admiten aproximaciones locales por polinomios de primer orden; si no es así, se necesitan términos de segundo orden para aproximarlas. Por lo tanto si estas superficies se aproximan a partir de métricas resumen, se ha de partir de diseños de segundo orden para obtener una buena aproximación. (Si se parte de diseños factoriales

recomendamos añadir puntos centrales para chequear la necesidad o no de ampliar el diseño a uno de segundo orden).

En principio no hemos encontrado una razón para que de una manera generalizada la transformación  $\log(o)$  sea aproximada por polinomios mejor que  $\langle Jz(Y) \rangle$  aunque reconocemos que habrá casos particulares donde esto ocurra (y donde por criterios teóricos de distribución muestral funcione mejor la primera). Sin embargo, hemos encontrado condiciones bajo las cuales  $\langle Jz(Y) \rangle$  admite representaciones más sencillas.

Si se trabaje bajo cualesquiera de estas métricas con modelos "L" que no contienen los términos cuadráticos puros, se pueden cometer graves errores en la estimación de la superficie ya que es muy probable que ésta sea cuadrática. El error de estimación cuando se trabaja con (fzPO viene dado por la expresión:

Error estimación =  $L-Q = Y_i P_u C_1 \sim x_f$ )

y por lo tanto aunque no se comete error de estimación en los puntos de diseño, se superestima la variabilidad dentro de la región experimental.

Por otra parte, los modelos "L" tienen serios problemas de ajuste en la zona de mínima varianza lo cual es grave si esta zona está próxima a la región de estudio. Si es así, las soluciones seleccionadas como robustas no corresponden con las teóricas. Además, en caso de querer planificar la siguiente etapa de experimentación, se tiende a seleccionar una estrategia equivocada, ya que la zona seleccionada no mejora la robustez sino todo al contrario (se pueden consultar ejemplos de este tipo en los dos capítulos anteriores).

Hemos mostrado señales que pueden ayudar al experimentador a sospechar sobre una falta de ajuste de modelos "L" a las superficies

teóricas, una de ellas era la presencia de términos de segundo orden en el modelo y la otra es la presencia de valores negativos de variabilidad en las previsiones.

Si el modelo para  $Y$  expresado en (7.18) necesitara de términos de mayor grado para ser aproximado, las superficies  $\langle \eta^2(Y) \rangle$ ,  $(J_z(Y))$  y  $\log(o)$  también aumentarían su complejidad. En general, si tomamos el orden en que aparecen los términos en  $X_j$  interaccionando con los factores ruido en el modelo para  $Y$ , estos mismos factores tienden a aparecer en un orden mayor en los modelos de dispersión, por esto decimos que los modelos de dispersión son más complejos que los de localización en términos de los factores de control.

## Capítulo 3: Estrategia para evitar errores.

### 3.1 Estrategia Experimental para evitar errores.

Tradicionalmente las metodologías de optimización de procesos presentan en el primer paso de la experimentación la utilización de diseños factoriales a dos niveles incluyendo la mayor cantidad de factores posible, empleando para determinar esta cantidad el criterio económico y la experiencia del personal. Los niveles de ahorro se encuentran indudablemente ligados a la cantidad de corridas de un experimento, por lo que a medida que se fraccionan se deberá experimentar menos veces.

La práctica ha demostrado que la concepción antes planteada puede no resultar del todo cierta, pues al aumentar los niveles de fraccionamiento se aumentan en consecuencia los niveles de confusión, aumentando también el riesgo de cometer errores. La forma común de la estrategia utilizada en la optimización de procesos cuenta en general con los siguientes pasos:

1. Experimentación factorial a dos niveles con alto fraccionamiento.
2. Selección de Factores.
3. Experimentación para la búsqueda de primer orden.
4. Experimentación para la búsqueda segundo.
5. Optimización del proceso (respuesta).

Las debilidades de esta metodología consisten en:

- a) La experimentación inicial con modelos de primer orden puede causar la no apreciación de factores activos que realmente lo

son. Motivados por curvaturas de las respuestas de la forma que se presentó en el epígrafe anterior.

- b) Se deben utilizar al menos dos diseños o aumentar el primero para conocer la existencia de curvatura de la respuesta.
- c) La optimización del proceso se realiza teniendo en cuenta la respuesta, sin embargo está demostrado que la variabilidad es un objeto de estudio muy importante para la calidad.

Como mejora a estas metodologías que se utilizan como resultado de la investigación del presente trabajo se plantea la siguiente metodología:

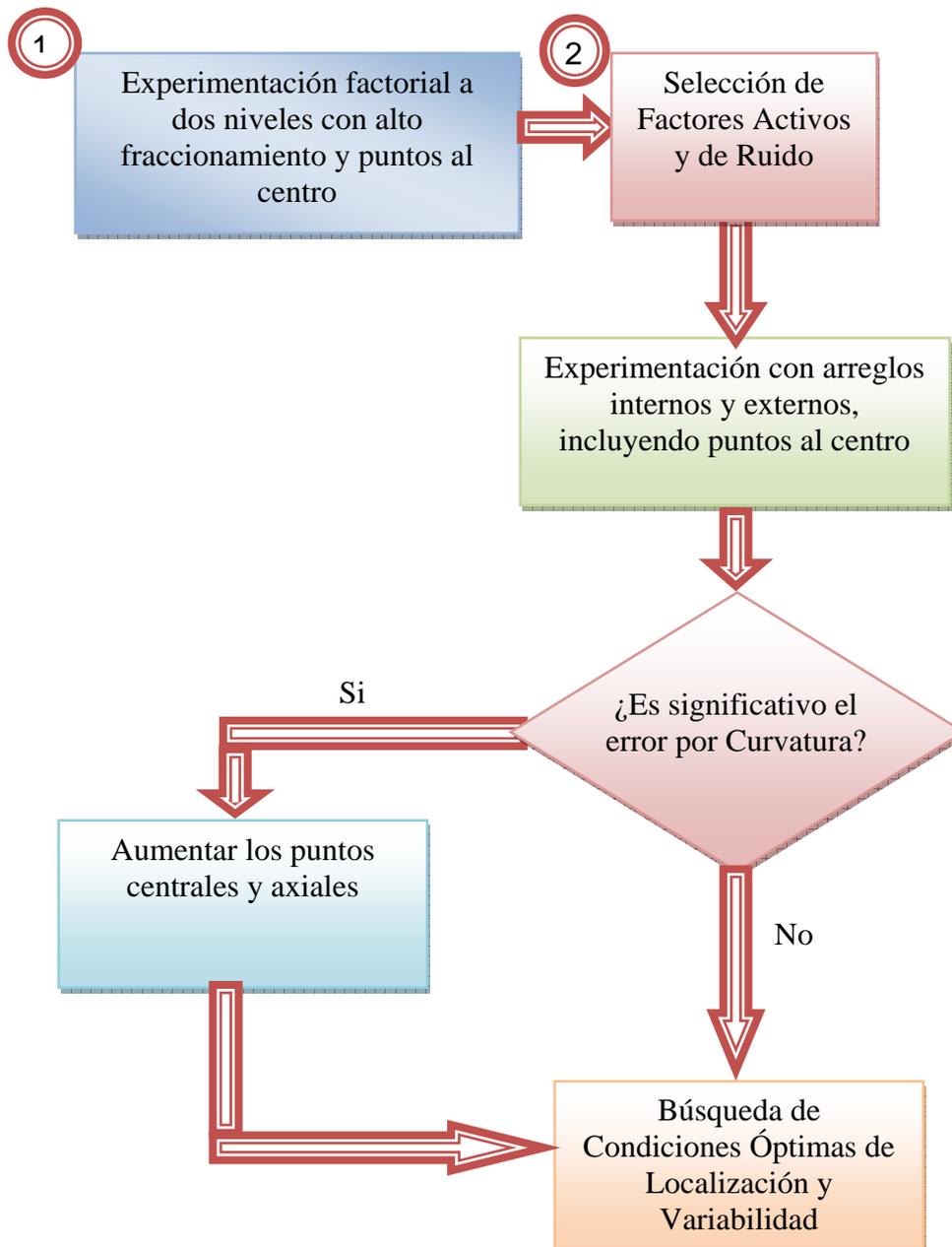
1. Experimentación factorial a dos niveles con alto fraccionamiento y puntos al centro.
2. Selección de Factores Activos y de Ruido.
3. Experimentación utilizando arreglos internos y externos que incluyan puntos al centro.
4. Aumentar los puntos centrales en caso necesario.
5. Optimización del proceso en cuanto a Localización y Variabilidad.

Esta metodología de experimentación se obtiene como resultado de la evolución de la aplicación de las técnicas clásicas del Análisis y Diseño de Experimentos. Ya que sus bases se sustentan en la integración de los conceptos que los diferentes autores plantean en sus métodos de experimentación. A continuación se explica los elementos que se tomaron en cuenta a la hora de proponer cada paso:

- a) La experimentación con puntos al centro en la primera etapa, a pesar de que se utilicen experimentos con alto nivel de fraccionamiento podrá evitar que se desestimen factores donde su interacción predominante sea no lineal.
- b) Luego de determinar cuáles son los factores que afectan en mayor medida la respuesta, no se deberá cometer el error de

desechar los demás de forma total, se pueden tener en consideración los que pudieran tener influencia directa a o través de interacciones significativas sobre la variabilidad o la respuesta, de forma que se puedan bloquear en los arreglos externos y por tanto minimizar su efecto considerado ya como ruido sobre la respuesta.

- c) La inclusión de puntos al centro en la segunda etapa permitirá realizar evaluaciones de no linealidad de los modelos de forma más directa, evitando utilizar diseños específicos para estudio de curvatura cuando no son necesarios.
- d) La optimización de los procesos en cuanto a la variabilidad se utilizará debido a que las características de calidad de productos y procesos deben tener la mayor estabilidad posible para poder ser mejorados continuamente, pues no se puede actuar efectivamente sobre procesos fuera de control o de especificaciones.



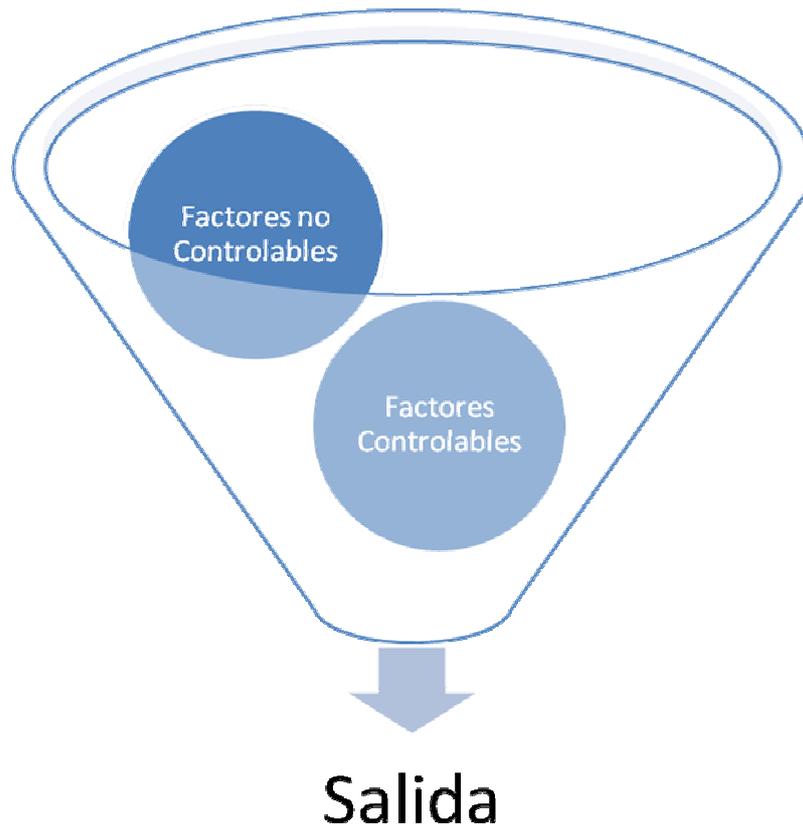
## Conclusiones

## Recomendaciones

## Bibliografía

Anexo 1: Variables de un proceso y preguntas para realizar un experimento.

## Entrada



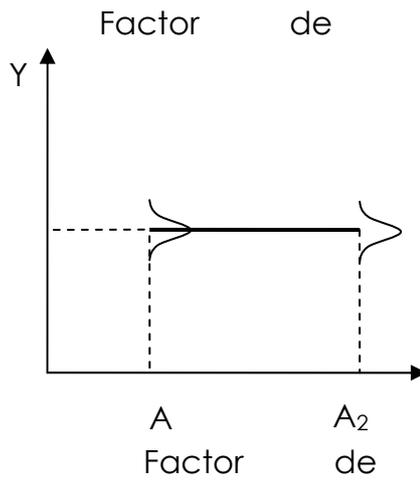
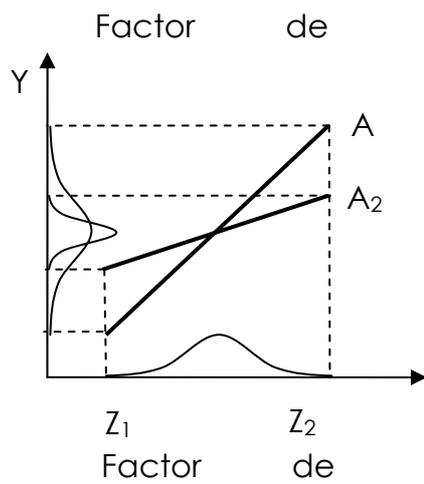
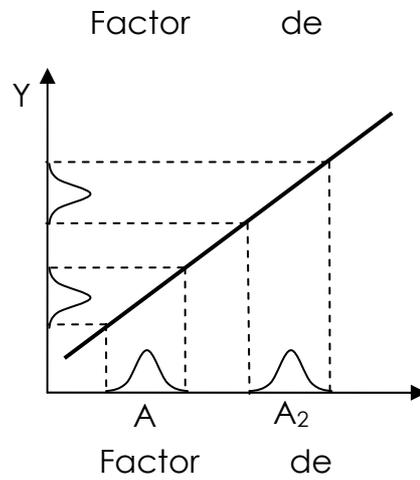
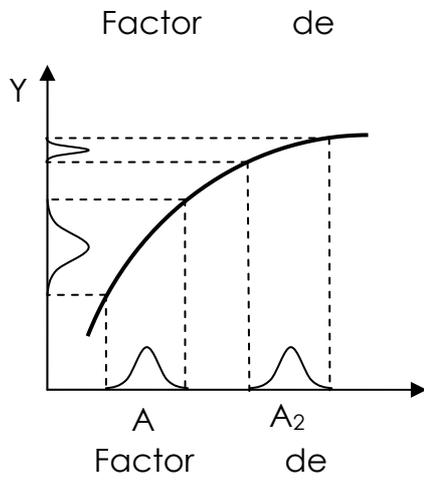
¿Cuáles son las características de calidad que se van a medir?

¿Cuáles son los factores controlables que deben incluirse en el experimento?

¿Qué niveles debe utilizar cada factor?

¿Cuál diseño experimental es más adecuado?

Anexo 2: Clases de factores de acuerdo a su influencia sobre la media y variabilidad.



1. Afecta la media y la variabilidad.
2. Afecta solo la variabilidad.
3. Afecta solo la media.
4. No afecta la media ni la variabilidad.



