Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Química

Tópicos fundamentales del Diseño Mecánico de Equipos y Aparatos de la Industria Química.

Autora: Meiby Alvarez Leonard

Tutores:

Dr.C. Rafael Antonio Goytisolo Espinosa

M.Sc. Rohary Padilla Rodríguez

Cienfuegos, Cuba

Curso: 2013 – 2014

Declaración de autoría

Yo, Meiby Alvarez Leonard, declaro que soy la única autora de este trabajo y autorizo al Departamento de Química de la Facultad de Ingeniería en la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", para que hagan el uso que estimen pertinente con el trabajo de diploma.

Para que así conste firmo (firmamos) la presente a los 18 días del mes de Junio de 2012.

____

Autora: Meiby Alvarez Leonard

______________________________ ______________________________

Dr.C. Rafael Antonio Goytisolo Espinosa M.Sc. Rohary Padilla Rodríguez

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido revisado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referente a la temática señalada.

______________________ ______________________

Firma ICT Firma Firma Vicedecano

Pensamiento

"La vida cobra significado cuando te sientes motivado, creas metas y las persigues de forma imparable".

Les Brow

Agradecimiento

Agradezco a mi tutor el Dr. Rafael Goytisolo "El Goyo" por haber confiado en mi para hacer este trabajo, espero haber estado a su altura. Gracias por haberme ayudado mucho en etapas tan difíciles de mi vida. Agradezco en especial a mi "esposo" Rohary Padilla Rodriguez, por ser el hombre perfecto. Gracias por apoyarme y aguantar mis locuras. Agradezco de corazón a mi familia mi papá "Pachanga", mi querida madre Nilda, gracias por aguanterme todas mis malcriadeces y por confiar en mi. Gracias a mis suegros Padilla y Chary, sin su ayuda no fuese posible este trabajo.

A los profesores que me han formado durante toda la carrera, gracias por su comprensión y por su ejemplo.

Gracias a mis conpañeron de curso por apoyarme en todas las etapas de mi vida, en especial a Zudy, Betty y Rosalí.
Agradezco a Yuviny con ayudarme en esta etapa final.

Dedicatoria

A mis más grandes tesoros

Jessica Lorena y Elizabeth.

Resumen

En el presente Trabajo de Diploma se realizará una recopilación de los Tópicos Fundamentales que requiere un Ingeniero Químico para enfrentar los problemas mecánicos más comunes y frecuentes en el Diseño Mecánico de Equipos y Aparatos de la Industria Química y de Procesos en General. Se han incorporado ejemplos de cálculo que contribuyen a la comprensión de la aplicación de la Teoría.

Se incorporan además un grupo limitado de Casos de Estudio que contribuyen a comprender la aplicación de los tópicos tratados y amplían aún más el horizonte de los mismos.

En los Casos de Estudio analizados se recoge la experiencia del Colectivo de Mecánica Aplicada de muchos años enfrentando y solucionando problemas de Fallas en Sistemas Mecánicos y se aspira a que su incorporación al presente sirva de guía orientadora a los estudiantes de Ingeniería Química y a los profesionales de la producción que a diario enfrentan problemas de esta índole.

La totalidad de los Casos de Estudio analizados han sido trabajos realizados y aplicados en la Industria. Una parte de ellos han sido reconocidos como Premios Provinciales del CITMA y han sido publicados en Revistas Nacionales e Internacionales.

Abstract

The recompilation of different topic that need Chemical Engineering to solve the mechanical problems. Some of commons and frequently mechanical design of equipment in the Chemical Industries and general process. It be incorporate some examples that calculate and contribute to apply the theory.

In this thesis are incorporated a limited group of test problem for develop of topic related with the thematic. The experience of the Applied Mechanic Team in the University of Cienfuegos, Cuba, solving failure and industrial problems was incorporate in this work. It is an important guide for Chemical Engineers that solve this type of problems.

All test problems analyzed in this work was industrials real cases. An important part of this group has been obtained the Provincial CITMA Award.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Introducción

El Plan de Estudios D de la Carrera de Ingeniería Química contempla la asignatura Diseño Mecánico de Equipos cuyas particularidades son:

- **Datos Generales**

Disciplina: Ingeniería de los Materiales.

Asignatura: Diseño Mecánico de Equipos

Curso: Plan D diurno

Especialidad: Ingeniería Química

Año académico: Cuarto.

Semestre: Segundo.

Horas Totales: 42

Examen Final: La asignatura no tiene examen final.

- **Objetivos Educativos de la Asignatura**

Que el estudiante sea capaz de:

1. Desarrollar un pensamiento racional y lógico al analizar la influencia de la forma constructiva y las cargas aplicadas al realizar los cálculos constructivos.
2. Enfrentar distintas situaciones que impliquen diseño y/o modificación de equipos teniendo en cuenta los criterios económicos pudiendo defender y discutir estas ideas mediante una exposición oral adecuada.

Objetivos Instructivos de la Asignatura

1. Aplicar, a nivel productivo, los criterios de resistencia a emplear en base al material empleado, al tipo de cargas que actúan y las características del equipo según el proceso específico que ocurre con vistas a realizar los cálculos de diseño para la determinación de las dimensiones básicas de los principales elementos de los equipos de la industria química.
2. Aplicar, a nivel productivo, los algoritmos de cálculo para la determinación de las tensiones en la sección transversal de la pared de los equipos o sus elementos con vistas a la comprobación de su resistencia mecánica.

- **Contenidos de la Asignatura**
- **Sistema de conocimientos**

Introducción al diseño mecánico. Criterio de resistencia. Diseño de elementos básicos para la construcción de los equipos de la Industria Química. Envolturas sometidas a presión interior y exterior, envolturas de sección rectangular sometidas a presiones de gases e hidrostáticas. Tapas y fondos de aparatos sometidos a presión interior y exterior. Refuerzo de orificios. Bridas. Soportes de aparatos horizontales y verticales. Diseño de equipos de agitación. Selección de los parámetros constructivos principales. Determinación de las dimensiones del eje de los mezcladores. Comprobación de la resistencia mecánica de los principales tipos de mezcladores. Diseño mecánico de intercambiadores de calor; determinación del diámetro de la coraza en base al número total de tubos y del número de pasos. Determinación de las tensiones en la coraza y los tubos por efecto de la presión y la temperatura. Control de la unión mandrilada. Cálculo del grosor de la placa de tubo.

- **Sistema de habilidades**

Seleccionar el criterio de resistencia a emplear para el cálculo de recipientes sometidos a presión interior y exterior. Determinar el valor de las tensiones permisibles del material seleccionado. Realizar los cálculos de resistencia para la determinación de los grosores de pared de los principales elementos básicos de los equipos de la Industria Química. Utilizar las tablas y manuales necesarios para el diseño de los equipos. Utilización de la computación para el cálculo de los equipos. Realizar los cálculos para la determinación de las dimensiones básicas de los equipos de mezclado e intercambiadores de calor. Utilizar las tablas y manuales necesarios para el diseño de los equipos mencionados.

- **Sistema de valores**

1. Desarrollar en los estudiantes un pensamiento racional y lógico que les permita analizar la influencia de la forma constructiva y las cargas aplicadas al realizar el cálculo, con el auxilio de los programas de computación, permitiéndoles analizar las variables óptimas para la construcción.

2. Que los estudiantes sean capaces de enfrentar distintas situaciones de solución que impliquen el diseño y/o modificación de equipos de la Industria Química, fundamentando sus ideas apoyados en la valoración económica de la solución, pudiendo defender y discutir los mismos mediante la exposición oral adecuada.

- **Indicaciones Metodológicas y de Organización de la Asignatura**

Esta asignatura posee un carácter aplicado, tendiente a brindar los conocimientos necesarios, desde el punto de vista de resistencia mecánica, que permitan seleccionar los equipos con la seguridad de que soportaran las cargas de trabajo en las condiciones de operación. Al mismo tiempo permitir el diseño de equipos comunes en la industria química, como por ejemplo: intercambiadores de calor, reactores con o sin equipos de agitación, recipientes, etc. Al ser una asignatura de formación complementaria en la carrera de Ingeniería Química requiere del profesor una explicación clara del porqué de su impartición y de la necesidad de la misma. Para ello es conveniente brindar algunos ejemplos de problemas que se le presentan a los ingenieros en el ejercicio de su profesión, tales como:

- La selección del tipo de intercambiador (rígido, de cabeza flotante o con junta de expansión) requiere del cálculo de las tensiones en la coraza y en los tubos debidas a la presión y a la temperatura.
- La comprobación de los parámetros de trabajo de un mezclador, lo cual requiere el cálculo a la resistencia del diámetro del eje del mezclador.
- La comprobación de la resistencia de un equipo, en el caso de que se decida elevar sus parámetros de trabajo, con vista a la intensificación del proceso.

Siempre que sea necesario, sobre todo cuando se trate de equipos, se deben preparar retro transparencias con las formas constructivas de estos elementos, as! como pancartas; estas últimas para utilizar preferentemente en las clases prácticas. Un elemento de vital importancia para la asimilación de los contenidos a explicar es el uso de maquetas confeccionadas con material de plástico (acrílico), las cuales pueden ser además proyectadas con el retroproyector. Teniendo en cuenta la concepción del plan de estudio, que contempla un mayor estudio independiente, por parte de los estudiantes, esta materia tiene que ser impartida por el profesor haciendo hincapié en los aspectos teóricos más esenciales y utilizando parcialmente las clases prácticas para realizar algunos ejercicios tipos. Es importante, que el profesor utilice esquemas generalizados de actividades, es decir un esquema que le indique al alumno la forma de pensar cómo abordar la solución de estos problemas, destacando que en cada elemento puede haber un algoritmo de cálculo específico pero la forma de solución es similar. En los intercambiadores de calor se le presta atención a los aspectos constructivos relacionados con el cálculo del diámetro de la coraza en dependencia del número de tubos y número de pasos, tratando de utilizar las normas o aspectos recomendados en la literatura para el trazado de los tubos en la placa de tubos. Otro aspecto importante es el referente al diseño de los cabezales, en particular, a la disposición de los baffles separadores, en dependencia del número de pasos, separación entre los tubos y el baffle, etc. Como aspecto fundamental del cálculo mecánico de los intercambiadores se contempla la determinación de las tensiones en la coraza y tubos por efectos de la presión y la temperatura, lo cual permite definir el tipo de intercambiador a utilizar (tipo rígido, con juntas de expansión o cabezal flotante).También se considera el cálculo del grosor de la placa de tubos. Se seleccionó, como equipo a diseñar un intercambiador de calor, pues en el mismo intervienen diferentes elementos de equipos que fueron vistos en el tema 1 y que pueden incluirse en los cálculos de clases prácticas si se considera necesario. Finalmente se incluyó el diseño de equipos de mezclado, por un equipo de uso muy frecuente, donde se debe hacer hincapié en los criterios existentes para el dimensionamiento de los mismos (dimensión del elemento agitador, altura de ubicación, el cálculo del eje del mezclador.

Esta asignatura está vinculada al programa director de computación a través de una plataforma interactiva como es el microcampo u otra y la confección de algunos programas específicos para resolver algunos problemas de diseño de intercambiadores y equipos de mezclado, al programa director de idioma inglés mediante revisiones bibliográficas para los talleres. Para contribuir a la formación económica del estudiante, a través de todo el desarrollo de la asignatura, se hacen valoraciones económicas para lograr un buen diseño de equipos, seleccionando adecuadamente los materiales de construcción desde el punto de vista económico y luego pasar a un diseño racional en el cual también se tiene en cuenta este factor.

La vinculación con el cuidado del medio ambiente se logra con la selección adecuada del material de construcción así como el diseño adecuado de los equipos, pues si esto no se garantiza, los equipos no funcionarían adecuadamente, pudiera haber roturas y salideros, dañando el ecosistema. Esto se hace a través de toda la asignatura y con estos mismos razonamientos, se vincula al criterio de calidad.

- **Sistema de Evaluación**

El sistema de evaluación de esta asignatura está conformado por la evaluación de los talleres, en los cuales se promueve el trabajo independiente, las clases prácticas, las cuales son rigurosamente controladas y evaluadas y dos trabajos de control en clases.

- **Bibliografia**

Mijalev. y otros Cálculos y diseño de máquinas y aparatos de la industria química, 394 p. Ed GIZDAT, 1987

Fundamentación del Trabajo de Diploma:

Como se aprecia en la Bibliografía recomendada por el programa el libro de texto es de una Edición Rusa, de muy difícil localización en nuestro país, indudablemente de poseerlo, aunque sea en formato electrónico, será de una inestimable ayuda no sólo para la docencia sino para la práctica profesional de los ingenieros, sin embargo, el mismo no aborda los conceptos básicos necesarios para que el lector que no sea Ingeniero Mecánico pueda emplearlo en la práctica, por lo que se puede afirmar que no sirve como libro de texto en Cuba para el Plan de Estudios actual del Ingeniero Químico.

El Problema Científico a resolver se puede entonces formular como sigue: No existe un libro de texto escrito en español que recoja los tópicos fundamentales del Diseño Mecánico de los Equipos y Aparatos más comunes en la Industria Química, que pueda ser utilizado como Material Auxiliar en la Docencia de Pregrado.

La Hipótesis puede fundamentarse de la siguiente manera: En el caso particular de la Universidad de Cienfuegos esta asignatura se desarrolla en la Facultad de Ingeniería que integra las dos Carreras: la Ingeniería Mecánica y la Ingeniería Química, o sea, que en la Facultad esta asignatura no es una asignatura de servicio, sino es una asignatura de sus propias carreras, donde los Departamentos de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Química están unidos para enfrentarla. La Carrera de Ingeniería Mecánica es una Carrera de Excelencia con un Claustro bien preparado. La **Hipótesis** puede formularse como sigue: Resulta posible escribir un Documento Técnico que recoja los aspectos técnicos fundamentales del Diseño Mecánico de los Equipos y Aparatos de la Industria Química y que además incorpore los Aportes Científicos del Colectivo de Mecánica Aplicada sobre estos aspectos en particular que podrán ser empleados para la docencia y la práctica industrial para esta Carrera.

El **Objetivo General** es: Elaborar un Documento Técnico que recoja los diferentes tópicos vinculados con la Problemática del Diseño Mecánico de los Equipos y Aparatos de la Industria Química en General.

Sobre la base de estos antecedentes y recomendaciones se han planteado para el presente trabajo los siguientes **Objetivos Específicos**:

1. Escribir una primera versión de los diferentes tópicos vinculados.
2. Prepara un grupo de Anexos y Casos de Estudio reales enfrentados por el Colectivo de Mecánica Aplicada que complementen el Documento y que puedan servir además de apoyo a la Docencia y a los Ingenieros de la Producción.

Capítulo I Fundamentos de la Teoría de los Estados Tensional y Deformacional. Criterios de Resistencia

1.1 Introducción al Capítulo

La Teoría del Estado Tensional y Deformacional es un Tema Clásico de todos los Cursos de Resistencia de Materiales y Mecánica de materiales del mundo, así como los Criterios de Resistencia. No se pueden comprender esta disciplina si no se posee un conocimiento cabal de estos temas, razón por la cual este es el primer Capítulo de este Trabajo de Diploma. Esta Teoría no ha cambiado prácticamente nada en los últimos 30 años, es muy poco lo nuevo que se le aporta en el mundo, sin embargo, la literatura Europea y Asiática, en particular la Rusa aborda estos Tópicos con mucha mayor profundidad que la literatura americana en general. Entre los libros rusos utilizados se encuentran: (Pisarenko et al. 1989); (Feodosiev 1985); (Stiopin 1985); (Miroliubov & Otros 1985). Entre la literatura americana en general se utilizaron los libros clásicos de toda américa: (Beer & Jonhston 1993); (Fitzgerald 1996); (Mott 1996);(Bedford et al. 2002);(Spiegel & Limbrunner G.F 1999); e incluso se consultaron libros de Teoría de la Elasticidad y de Mecánica de Materiales Avanzada como son: (Fogiel 1996);(Solecki & Conant 2002). De autores cubanos también se utilizaron algunos libros como fueron: (Goytisolo et al. 1972), con muy buen tratamiento de los Criterios de Resistencia, (Fernández Levy 1983) y (Silovsky K. 1978) este último es tal vez el autor que con mayor profundidad aborda el tratamiento teórico y el Método del Círculo de Mohr de la Teoría de los estados Tensional y Deformacional. Se utilizaron además otras fuentes que serán referidas en el Capítulo.

1.2 Estado tensional del punto

La magnitud de las tensiones normales σ y las tensiones tangenciales τ, que surgen en un punto de un cuerpo sometido a la acción de un sistema arbitrario de cargas dependen de la orientación específica del plano que se hace pasar por el punto. Al girar el plano las componentes σ y τ, así como la tensión resultante varían en determinadas proporciones.

El conjunto infinito de tensiones que surgen en los infinitos planos que se pueden hacer pasar por un punto dado de un sólido se denomina Estado Tensional del Punto. El estudio del estado tensional de los diferentes puntos de un sólido no es un problema puramente abstracto, sino que es un problema práctico necesario para la solución de problemas complejos, sobre todo, para la evaluación de la resistencia en el caso de solicitación combinada.

Para caracterizar el estado tensional de un punto cualquiera, se hace necesario conocer las tensiones en las caras de un paralelepípedo rectangular diferencial ubicado alrededor del punto. Al pasar de un punto a otro de un sólido, el estado tensional varía gradualmente, por lo tanto es posible admitir que en las caras del paralelepípedo elemental las tensiones se distribuyen uniformemente. Está claro que esto es posible si se acepta la hipótesis de continuidad del material, lo cual permite el paso a volúmenes muy pequeños. Disminuyendo las dimensiones del paralelepípedo, este se reducirá al punto en cuestión. En el caso límite todas las caras del paralelepípedo pasarán por el punto y se podrá considerar que las tensiones en los planos que conforman las caras de paralelepípedo se corresponden con las del punto.

La tensión que surge en cada cara del paralelepípedo se descompondrá en tres componentes ortogonales: una normal, que se designará por la letra σ con el subíndice correspondiente al eje x, y o z que sea normal al plano. Las componentes tangenciales se designarán con dos subíndices, el primero se corresponde con el eje perpendicular al plano donde actúa la tensión tangencial y el segundo con el eje que caracteriza la dirección de dicha tensión. Estos dos subíndices caracterizan completamente sin ambigüedad la posición y dirección de una tensión tangencial cualquiera. La dirección de los ejes se considera arbitraria.

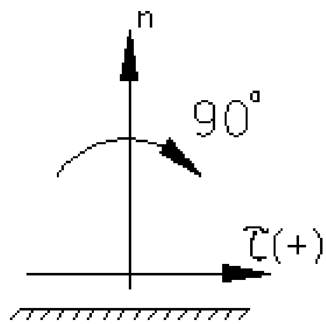


Fig. 1.1 Convenio de signos para las tensiones tangenciales

Las tensiones normales de tracción σ se consideran positivas y las de compresión negativas. Para las tensiones tangenciales utilizaremos el siguiente convenio de signos: la tensión τ se considerará positiva si para hacer coincidir la normal saliente al plano donde actúa la tensión tangencial con el sentido de la tensión tangencial, se hace necesario girar dicha normal 90º en la dirección de las manecillas del reloj, tal como se muestra en la Fig.1.1.

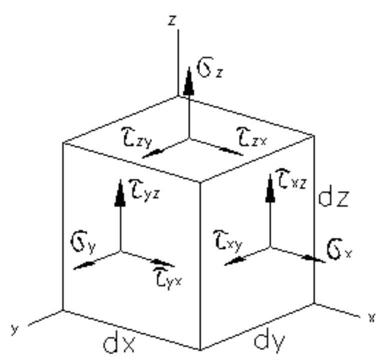


Fig. 1.2 Tensiones en las caras de un paralelepípedo recto rectangular ubicado alrededor de un punto

Las tensiones que surgen en las caras del paralelepípedo elemental se muestran en la Fig.1.2. En las caras que no se ven en la figura aparecen las mismas tensiones pero de signo contrario.

1.3 Estado Tensional del Punto. Clasificación

Se dice que el estado tensional del punto se conoce si se conocen las tensiones en las caras de un paralelepípedo elemental ubicado alrededor del punto. Si alrededor de un punto A se escoge un elemento de forma cúbica infinitamente pequeño, entonces en sus caras actuarán en el caso general las tensiones normales y tangenciales indicadas en la Fig. 1.2. Al girar el cubo alrededor del punto, las componentes de la tensión en la cara del mismo variarán. En un punto de un cuerpo cualquiera bajo cualquier sistema de cargas, existirá al menos una posición del cubo en la cual, en las caras del mismo solo surgen tensiones normales (Desaparecen las tensiones tangenciales.). Esta es una de las cualidades del estado tensional del punto. Entonces, si en las caras del cubo actúan solamente las tensiones normales, estas se denominan Tensiones Principales y los planos sobre los que ellas actúan, Planos Principales.

Se puede demostrar, que en cada punto del sólido solicitado, existen tres planos principales, ortogonales entre sí. Las tensiones principales se designan por σ_1, σ_2 y σ_3 teniendo en cuenta que la máxima de ellas (considerando el signo) se designa por σ_1 y la mínima (considerando el signo también), por σ_3.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Los diversos tipos de estados tensionales se clasifican según el número de tensiones principales que surgen.

1. Si las tres tensiones principales son todas diferentes de cero, el estado tensional se denomina triaxial o de volumen. Fig. 1.3.

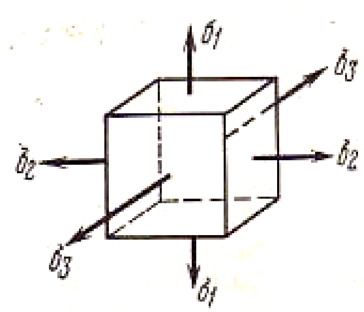


Fig. 1.3 Estado tensional triaxial

2. Si una de las tres tensiones principales es igual a cero, el estado tensional se denominará biaxial o plano.
3. Si son nulas dos de las tres tensiones principales, entonces el estado tensional se denominará monoaxial o lineal.

Se dice que la resistencia de una pieza se puede evaluar si se conoce el estado tensional de todos sus puntos. En los casos más simples la evaluación de la resistencia de los elementos de las estructuras se realiza por el valor máximo de la tensión normal o por el de la tensión tangencial máxima (cálculo por cizallamiento), resultando que la Condición de Resistencia será:

$$\sigma_{máx} \leq [\sigma] \tag{1.1}$$

$$\tau_{máx} \leq [\tau] \tag{1.2}$$

Siendo $[\sigma]$ y $[\tau]$ los valores admisibles de las tensiones normal y tangencial respectivamente, que dependen del material y de las condiciones de trabajo del elemento que se calcula.

1.4 Estado Tensional Lineal

El estado tensional lineal o uniaxial es el que surge en los elementos traccionados o comprimidos. Para poder juzgar plenamente sobre el estado tensional del elemento, es preciso saber calcular las tensiones que surgen en cualquier plano inclinado del elemento traccionado o comprimido. Fig. 1.4

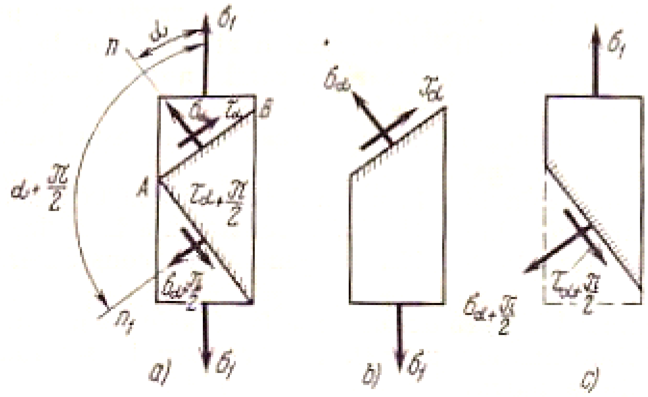


Fig. 1.4 Tensiones en los planos inclinados de un elemento traccionado o comprimido

Las tensiones normales en la sección transversal σ_1 de la barra se consideran conocidas.

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} \tag{1.3}$$

Si calculamos las tensiones que surgen en la sección inclinada AB, cuya normal forma un ángulo α con la dirección de σ_1. La dirección del ángulo α, opuesta a las manecillas del reloj, la consideramos positiva.

Designaremos por,

A – Área de la sección perpendicular al eje de la barra.

A_α - Área de la sección inclinada un ángulo α

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} \tag{1.4}$$

En el caso general, en la sección inclinada pueden actuar tanto tensiones normales σ_α, como tangenciales τ_α. Sus valores los podemos obtener de la condición de equilibrio de la parte separada, de la inferior, por ejemplo (Fig. 1.4 b).

Proyectando las fuerzas sobre la dirección σ_α y teniendo en cuenta la expresión (1.4) tendremos,

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha \qquad (1.5)$$

Proyectando las fuerzas sobre la dirección τ_α y teniendo en cuenta la expresión (4) hallamos,

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot sen\ 2\alpha \qquad (1.6)$$

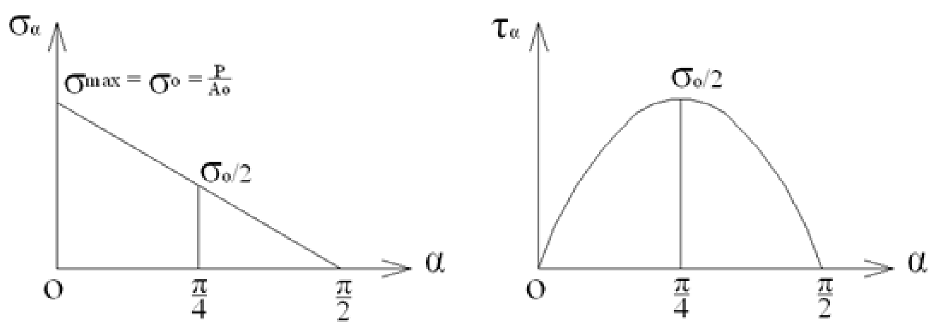
Cuando σ_1 es positiva (tracción) y $0 \le \alpha \le 90^\circ$, la tensión tangencial τ_α resulta también positiva, lo que quiere decir que la tensión tangencial está orientada como en la Fig. 1.4 b. O sea las tensiones tangenciales que se orientan de esta forma se acuerda considerarlas como positivas.

De las ecuaciones (1.5) y (1.6) se deduce que:

Para $\alpha = 0$ $\quad \sigma_\alpha = \sigma_0 \quad \tau_\alpha = 0$

Para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sigma_\alpha = 0 \quad \tau_\alpha = 0$

Planos Principales



Para $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}$ $\quad \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2} \quad \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2}$

Fig. 1.5 Magnitud de las tensiones normales y tangenciales en función de α

Así pues, en las secciones longitudinales no existen tensiones tangenciales, por lo que estos planos longitudinales son planos principales. En las secciones transversales surgen solo tensiones normales, las cuales son máximas y a su vez son también tensiones principales. Estas tensiones se designan por σ_1. Como en el caso en cuestión, es diferente de cero solamente una sola tensión principal, este estado tensional es monoaxial.

De la expresión (1.6) se deduce que la tensión tangencial máxima surge en la sección inclinada $\alpha = 45^\circ$ y es igual a la mitad de la tensión principal.

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1}{2} \tag{1.7}$$

1.5 Ley de paridad de las tensiones tangenciales

Si analizamos las tensiones normales y tangenciales en dos planos ortogonales entre sí. Según los resultados, primero:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{(\alpha+90^\circ)} = \sigma_1 \tag{1.8}$$

es decir, que la suma de las tensiones normales en dos planos ortogonales entre sí es constante e igual a la tensión principal; y segundo,

$$\tau_\alpha = -\tau_{(\alpha+90^\circ)} \tag{1.9}$$

Es decir, en dos planos ortogonales entre sí actúan tensiones tangenciales de igual valor y de signo contrario (Ley de paridad de las tensiones tangenciales).

Las tensiones tangenciales en dos planos perpendiculares entre sí, o van simultáneamente dirigidas hacia la arista donde se cortan los planos o en la dirección opuesta, como lo indica la Fig. 1.4 a).

Esta Ley se cumple para cualquier estado tensional.

$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$

1.6 Estado Tensional Plano

El estado tensional plano es aquel, en el que solo en uno de los planos, las tensiones normales y tangenciales son cero simultáneamente. En el estado tensional plano o biaxial las dos tensiones principales σ_1 y σ_2 pueden ser ambas mayores que cero. (Fig. 1.6 a), una puede ser mayor que cero y la otra negativa, o sea menor que cero, pero puede suceder que ambas tensiones principales diferentes de cero sean negativas (menores que cero)

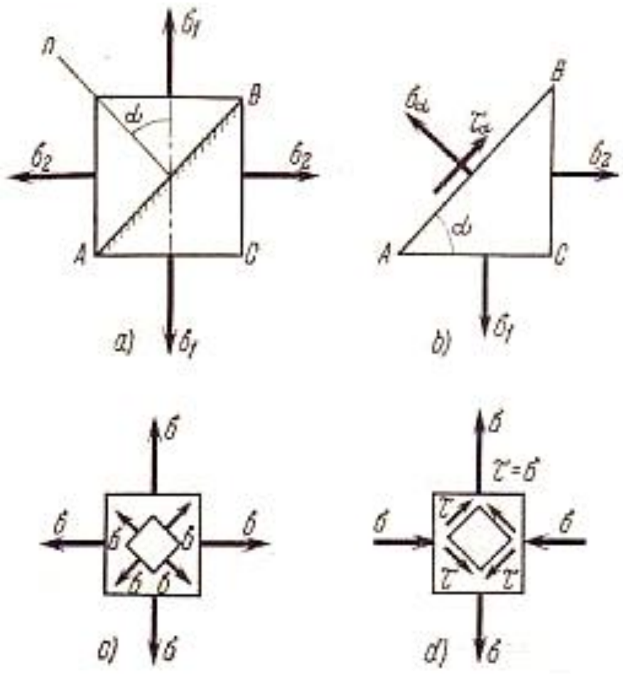


Fig. 1.6 Estado Tensional Plano

Los subíndices en las anotaciones de las tensiones principales se pones de manera tal que $\sigma_1 > \sigma_2$. Se considera positivo el ángulo α, entre σ_1 y la normal al plano arbitrario, que se mide en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

El ángulo formado por la tensión σ_2 y el plano arbitrario es igual a α + 90º.

Las tensiones σ_α y τ_α en un plano inclinado cualquiera se pueden obtener de las condiciones del equilibrio del prisma triangular ABC (Fig. 1.7 b).

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot sen^2 \alpha \qquad (1.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sen\, 2\alpha \qquad (1.11)$$

De la ecuación (1.11) se desprende que las tensiones tangenciales máximas son iguales a la semidiferencia de las tensiones principales,

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{1.12}$$

y surge en los planos de igual inclinación respecto a σ_1 y σ_2, es decir, cuando $\alpha = 45^\circ$. Esto se deduce de que para $\tau_{máx}$, $sen\ 2\alpha = 1$

Casos particulares:

1er caso: Estado tensional en el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

En este caso todas las tensiones, en todos los planos que pasan por el punto dado, la tensión tangencial τ_α es igual a cero, mientras que la tensión normal tiene un valor constante $\sigma_\alpha = \sigma$. Este estado tensional se denomina **tracción (compresión) uniforme biaxial**.

2do caso: Estado tensional en el cual $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = -\sigma$ y $\sigma_2 = 0$

En este caso, las tensiones en los planos de igual inclinación respecto a σ_1 y σ_3, es decir, cuando $\alpha = 45^\circ$ y $\alpha = 135^\circ$ serán $\sigma_\alpha = 0$ y $\tau_\alpha = \pm\sigma$. Este estado tensional se denomina **deslizamiento puro o cortante puro**.

La forma más importante de enfrentar el estado tensional plano es el problema recíproco: dadas las tensiones normales y tangenciales que actúan en las caras del elemento (Fig. 1.7 a), calcular la orientación de los planos principales y el valor de las tensiones principales.

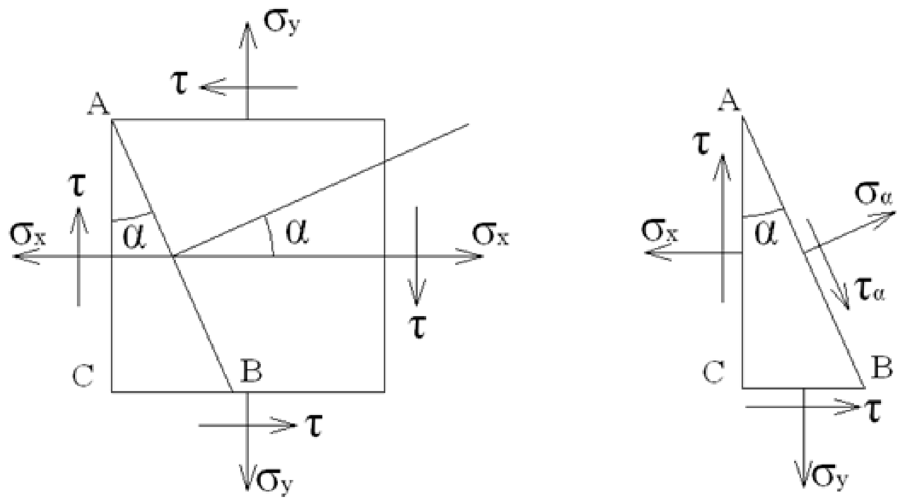


Figura 1.7 Caso recíproco del estado tensional plano

Supongamos que $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$. El ángulo α se mide desde la dirección de la mayor de las tensiones hasta la normal al plano. Se considera positiva la dirección de α opuesta a la de las manecillas del reloj.

Proyectando las fuerzas sobre la dirección de σ_α obtenemos,

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot sen^2 \alpha - \tau \cdot sen\, 2\alpha \qquad (1.13)$$

Proyectando las fuerzas sobre la dirección de τ_α obtenemos,

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot sen 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha \qquad (1.14)$$

La magnitud σ_α varía continuamente, al variar el ángulo de inclinación α del plano. Los planos principales se obtienen hallando la derivada $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}$ e igualándola a cero,

$$\tan 2\alpha_o = -\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (1.15)$$

Sustituyendo este valor de α = α_0 en la ecuación (1.13) se obtienen los valores extremos de las tensiones normales, es decir, los valores de las tensiones principales máxima y mínima:

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau^2} \qquad (1.16)$$

Si una de las tensiones principales es igual a cero, entonces la expresión (1.16) se simplifica,

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \qquad (1.17)$$

Las tensiones principales surgen en planos perpendiculares entre sí. Para el estado tensional del punto se cumple que la suma de las tensiones normales en los planos perpendiculares entre sí es constante. Para el estado tensional plano:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{máx} + \sigma_{mín} = cte$$

O sea, que si en un plano surge $\sigma_{\max}$, en el plano perpendicular a este surgirá $\sigma_{\min}$.

A los planos que pasan por el punto donde las tensiones tangenciales tienen sus valores extremos (máximo ó mínimo) se denominan **planos de cortante**.

Para hallar la posición de estos planos se deriva y se iguala a cero la expresión (1.14) y como resultado se obtiene la siguiente expresión.

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \qquad (1.18)$$

Sustituyendo este valor de α = α_1 en la ecuación (1.14) se obtienen los valores extremos de las tensiones tangenciales, es decir, los valores de las tensiones principales máxima y mínima. Como resultado se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{\frac{máx}{mín}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^{\ 2}} \qquad (1.19)$$

Pero en los planos donde actúan $\tau_{\max}$ y $\tau_{\min}$ actúa también σ_m

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tag{1.20}$$

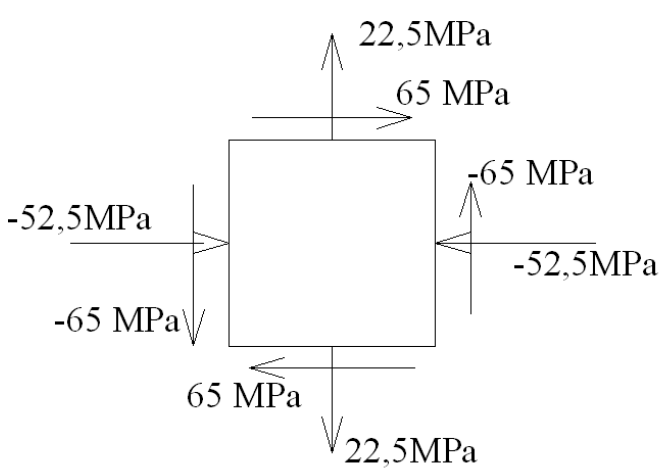
Comparando las expresiones de $\sigma_{\frac{máx}{mín}}$ y $\tau_{\frac{máx}{mín}}$ tenemos que:

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{\frac{máx}{mín}} \tag{1.21}$$

Ejemplo No.1:

Para el estado tensional mostrado en la figura determine:

a) La posición de los planos principales.
b) La magnitud de las tensiones principales.
c) La posición de los planos de cortante.
d) La magnitud de las tensiones tangenciales $\tau_{máx}$ y $\tau_{mín}$
e) Represente gráficamente dichos planos y tensiones.



Solución:

a) Como tiene que cumplirse que $\sigma_x > \sigma_y$

σ_x = 22, 5 MPa, σ_y = - 52, 5 MPa y τ_{xy} = 65 MPa

$$\tan 2\alpha_o = -\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 65}{22{,}5 - (-52{,}5)} = -1{,}73$$

$2 \cdot \alpha_o$ = - 60º y α_o = - 30º

b)

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = \frac{22{,}5 + (-52{,}5)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(22{,}5 - (-52{,}5)\right)^2 + 4 \cdot 65^2}$$

$$\sigma_{\frac{máx}{mín}} = -15 \pm 75 \text{ MPa}$$

$\sigma_{máx}$ = 60 MPa y σ_{min} = - 90 MPa

De acuerdo con los valores obtenidos, la tensión principal σ_1 será la mayor de todas algebraicamente, o sea: σ_1 = 60 MPa, como una de las tres tensiones principales es negativa y el estado tensional es plano, se tiene que: σ_2 = 0 MPa y σ_3 = - 90 MPa.

c)

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{22{,}5 - (-52{,}5)}{2 \cdot 65} = 0{,}576$$

α_1 = 15º

d)

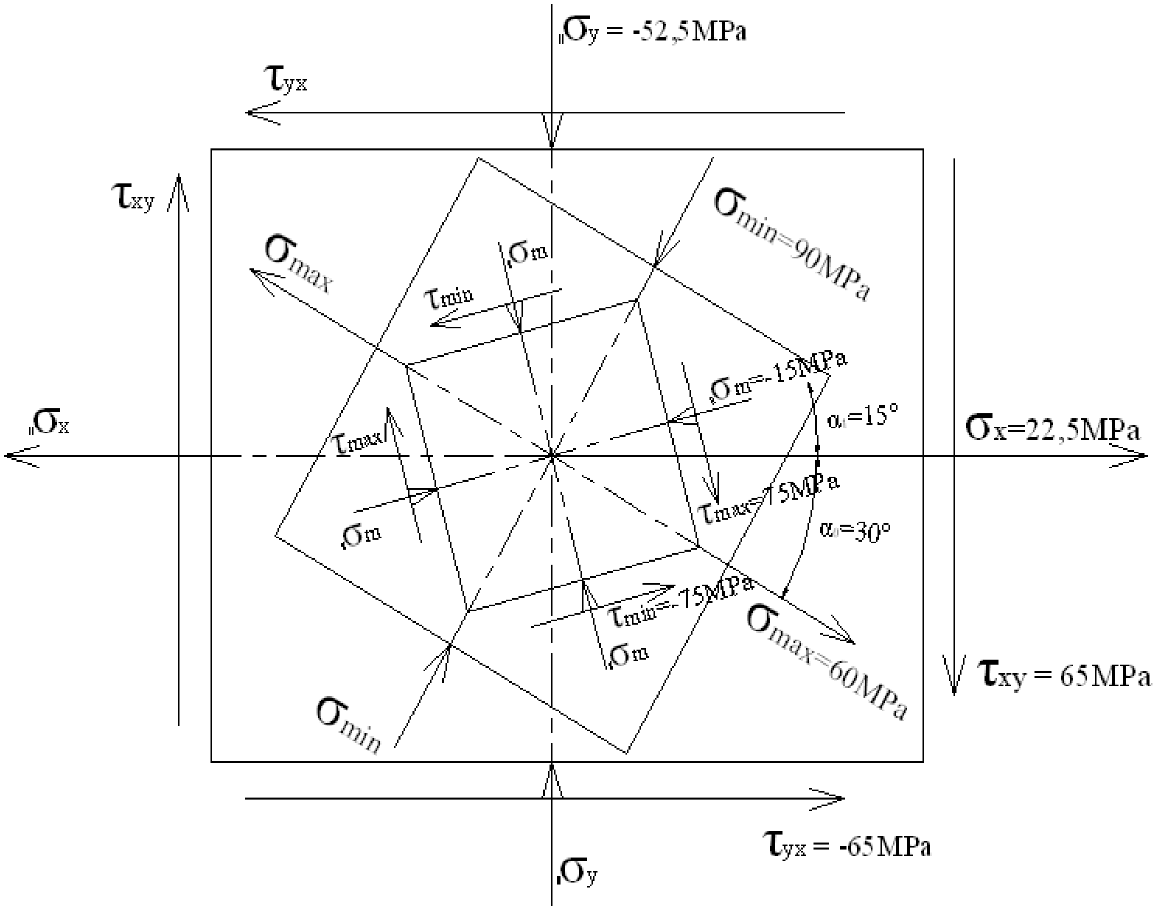
$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^{\ 2}} = \pm 75 \text{ MPa}$$

$\tau_{\max}$ = 75 MPa y $\tau_{\min}$ = -75 MPa

En los planos donde actúan las tensiones tangenciales máxima y mínima, actúa una tensión normal de magnitud:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{22{,}5 - (-52{,}5)}{2} = -15 \, MPa$$

e) Representación gráfica.



1.7 Estado Tensional Triaxial

El estado tensional triaxial es aquel, cuando en ninguno de los planos, las tensiones normales y tangenciales son cero simultáneamente. El estado tensional de volumen o triaxial se examina pocas veces en el curso de Resistencia de Materiales. Por eso señalaremos aquí solamente algunos aspectos esenciales de la Teoría del Estado Tensional Triaxial.

Examinemos el caso del estado tensional triaxial (Fig. 3.8) cuando por las caras del paralelepípedo elegido actúan todas las tres tensiones principales, de manera que:

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$

Mediante la Teoría de la Elasticidad se demuestra que si se traza una sección inclinada, la tensión normal σ_α y la tangencial τ_α se pueden determinar por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3 \qquad (1.22)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1{}^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2{}^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3{}^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha{}^2} \qquad (1.23)$$

Donde α_1, α_2 y α_3 son los ángulos que forma la normal, en la sección analizada, con la dirección de las tensiones principales correspondientes σ_1, σ_2 y σ_3.

Si analizamos este caso del estado tensional, cortando un prisma rectangular por un plano inclinado, tal como se muestra en la figura 1.8.

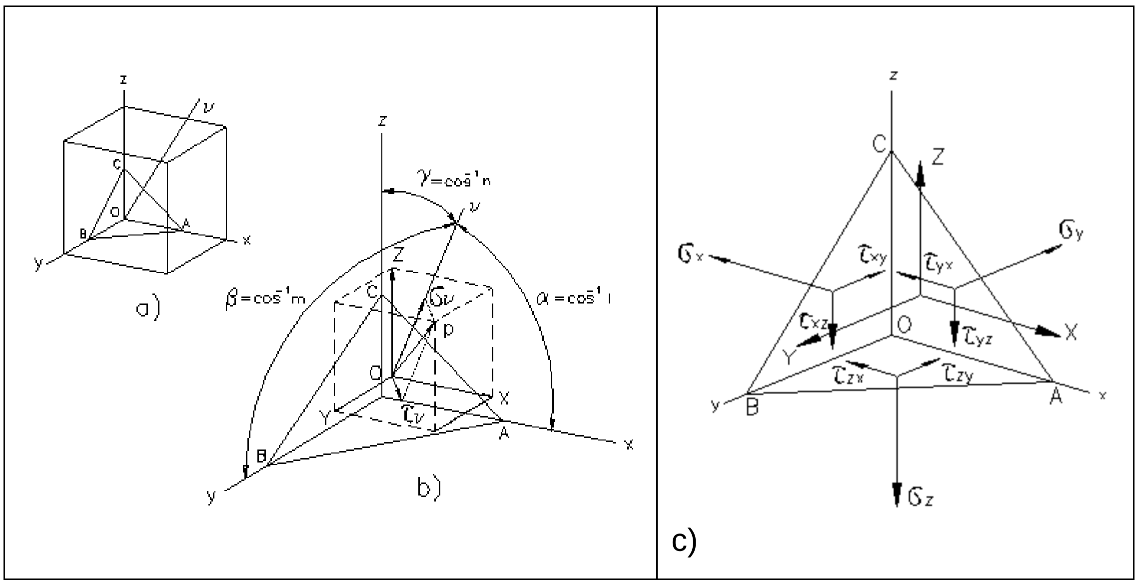


Fig. 1.8 Estado Tensional Triaxial

En el texto (Feodosiev 1985) del equilibrio del prisma se demuestra la ecuación cúbica siguiente:

$$S^3 - S^2 \cdot I_1 + S \cdot I_2 - I_3 = 0 \qquad (1.24)$$

Las tres raíces de esta ecuación son las tres tensiones principales, donde:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2 \end{array}\right\} \qquad (1.25)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Se puede demostrar que las tres raíces de la ecuación (1.26) siempre son reales. Estas raíces nos dan los tres valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

$S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_2$ y $S_3 = \sigma_3$

Y los invariantes expresadas en función de las tensiones principales son:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Está claro que las tensiones principales, es decir, las raíces de la ecuación (1.24), se determinan por el carácter del estado tensional y no dependen del sistema de coordenadas admitido. Por lo tanto al girar el sistema original de ejes x, y y z los coeficientes I_1, I_2 e I_3 de la ecuación (1.25) no variaran, por lo que se conocen como **invariantes del estado tensional.** Para cualquier posición del paralelepípedo original alrededor del punto las tensiones principales darán siempre iguales.

En algunos casos, los invariantes pueden ser iguales a cero. Por ejemplo, si $I_3 = 0$, entonces una de las raíces de la ecuación (1.24) también será igual a cero. En este caso se dice que el estado tensional es **biaxial o plano**.

Si son iguales a cero simultáneamente los invariantes segundo y tercero, o sea, $I_2 = I_3 = 0$, entonces la ecuación (1.24) tendrá dos raíces iguales a cero. En este caso se dice que el estado tensional es **monoaxial o lineal**.

Para cualquier estado tensional, los planos donde surgen las tensiones tangenciales extremas forman 45° con los planos principales.

1.8 Diagrama Circular del Estado Tensional. Círculo de Mohr

La determinación de las tensiones principales constituye una etapa necesaria intermedia en los cálculos de la resistencia del estado tensional complejo. Por eso, muy a menudo resulta necesaria la determinación de las tensiones principales. Esto, sin embargo, no quiere decir que siempre sea necesario resolver la ecuación cúbica (1.24). En la mayoría de los casos que se encuentran en la práctica, la posición de uno de los planos principales en el punto que se estudia se puede determinar previamente. Entonces los dos planos principales restantes se determinan del conjunto de planos perpendiculares al primero, lo que simplifica considerablemente el problema. Una forma práctica de resolver este problema es utilizando el Círculo de Mohr, este aspecto viene detalladamente explicado en los textos Resistencia de Materiales de Gilda Fernández y V. Feodosiev,(Fernández Levy 1983); (Feodosiev 1985).

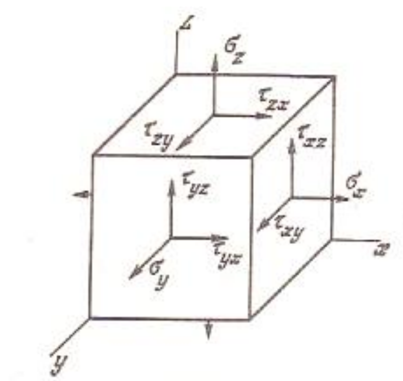


Fig. 1.9 Estado Tensional Triaxial

1.9 Estado deformacional del punto

El conjunto de las deformaciones que aparecen en la dirección de los distintos ejes y en los diversos planos que pasan por un punto dado, se conocen como Estado Deformacional del Punto.

Al igual que para el Estado Tensional se puede demostrar que son seis las componentes suficientes para caracterizar completamente el Estado Deformacional, o sea, tres componentes lineales de la deformación ε_x, ε_y, ε_z y tres angulares γ_{xy}, γ_{yz} y γ_{zx}.

El análisis del Estado Deformacional demuestra que tiene propiedades idénticas a las del Estado Tensional, o sea, existen tres ejes ortogonales entre sí en cuyo sistema no existen deformaciones angulares. Estos ejes son los ejes principales del Estado Deformacional y las deformaciones lineales de este sistema se denominan **deformaciones principales**.

Las deformaciones principales se obtienen a través de la ecuación cúbica:

$$\varepsilon^3 - J_1 \cdot \varepsilon^2 + J_2 \cdot \varepsilon - J_3 = 0 \qquad (1.26)$$

Cuyos coeficientes J_1, J_2 y J_3 son las Invariantes del Estado Deformacional.

$$\left.\begin{aligned}
J_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\
J_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{\gamma_{xy}{}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}{}^2}{4} - \frac{\gamma_{xz}{}^2}{4} \\
J_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

Comparando estas expresiones con las del Estado Tensional se ve que el análogo de la tensión normal es la deformación lineal y el de la tensión tangencial es la distorsión o deformación angular. Continuando la analogía se pueden construir los Círculos de Mohr del Estado Deformacional.

El análisis del Estado Deformacional se basa en relaciones puramente geométricas y, por lo tanto, es válido para cualquier sólido homogéneo independientemente de las propiedades del material y su estado.

1.10 Relación entre los estados tensional y deformacional. Ley de Hooke generalizada

Entre las componentes del Estado Tensional y Deformacional existen determinadas dependencias. Cuando las deformaciones son pequeñas esta dependencia es lineal y se conoce como Ley de Hooke Generalizada. La forma más simple de la Ley de Hooke se observa en un cuerpo isótropo donde los ejes principales del Estado Tensional coinciden con los de Estado Deformacional

Para obtener la expresión analítica de la Ley de Hooke Generalizada se aplica el principio de la superposición.

En cualquiera de los planos coordenados, por ejemplo el plano xy, la deformación angular se determina solamente a través de la Ley de Hooke para la distorsión pura aplicada al plano correspondiente (figura 2 a). O sea:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.28}$$

Las tensiones normales evidentemente no influyen en la magnitud de. Los otros dos pares de tensiones tangenciales tampoco influyen en la magnitud de γ_{xy}. Para demostrar esto supongamos que el par de tensiones tangenciales $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ provoca una deformación angular en el plano zx. (Figura 3 a y b)

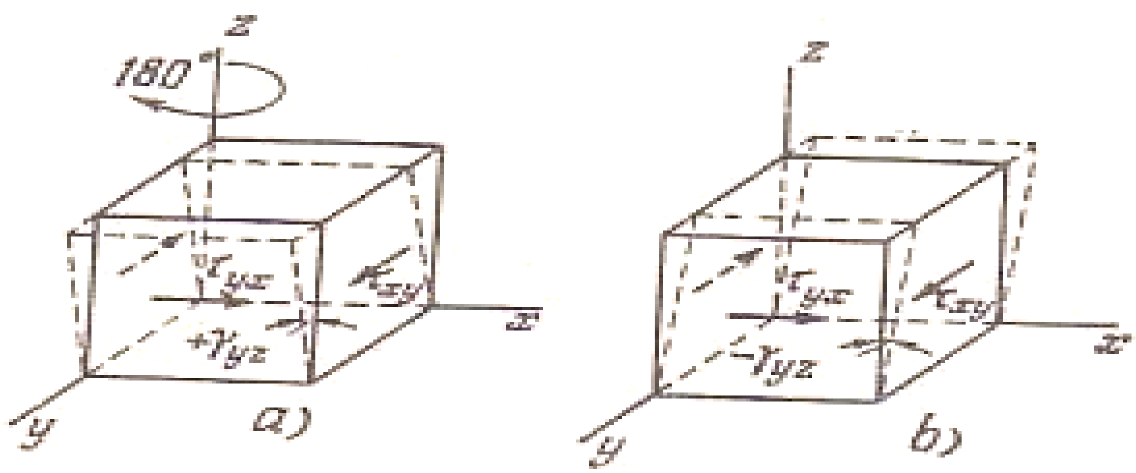


Fig. 1.10 a) Cubo en posición inicial; b) Cubo girado 180º

Si suponemos que la distorsión se produce como en la figura 3 a) y ahora giramos el cubo 180º con relación al eje z, tenemos entonces las tensiones en la misma dirección y la misma deformación angular contraria, lo cual sería imposible. Esta contradicción se resuelve solo si $\gamma_{xy} = 0$.

La deformación unitaria lineal en la dirección de eje x debido a σ_x será igual a $\frac{\sigma_x}{E}$, las tensiones normales σ_y y σ_z originan a lo largo del eje x deformaciones transversales de signo contrario $-\mu\frac{\sigma_y}{E}$ y $-\mu\frac{\sigma_z}{E}$.

Sumando estas deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad (1.29)$$

De forma análoga se pueden escribir las restantes expresiones de la Ley de Hooke Generalizada.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Estas expresiones constituyen la Ley de Hooke Generalizada para los cuerpos isótropos. En ella aparecen tres constantes elásticas E, G y μ. En la realidad solo dos de ellas son independientes, ya que la tercera es dependiente de la magnitud de las otras dos. O sea,

$$G = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)} \qquad (1.31)$$

1.11 Deformación de volumen

La deformación de volumen no es más que la relación entre el cambio de volumen del paralelepípedo durante la deformación: ΔV por unidad de volumen del mismo: V ubicado alrededor del punto.

El volumen inicial del paralelepípedo es:

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz \qquad (1.32)$$

Y el volumen después de la deformación será:

$$V_f = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) \qquad (1.33)$$

Pero:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta dy}{dy} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Entonces:

$$V_f = dx \cdot dy \cdot dz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

Y la variación de volumen será:

$$\Delta V = V_f - V_0 = dx \cdot dy \cdot dz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - dx \cdot dy \cdot dz$$

Efectuando y despreciando los diferenciales de orden superior:

$$\Delta V \cong dx \cdot dy \cdot dz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad (1.34)$$

Entones la deformación de volumen será:

$$e = \frac{\Delta V}{V} \cong \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (1.35)$$

Expresando ε_x, ε_y y ε_z en función de las tensiones a través de las expresiones de la Ley de Hooke Generalizada:

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (1.36)$$

Si el estado tensional es de tracción triaxial uniforme $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, el volumen tiene que aumentar $e \geq 0$.

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E}(3\sigma) \geq 0$$

De donde:

$1-2\mu \geq 0$ y $\mu \leq \frac{1}{2}$

El coeficiente de Poisson μ no puede ser mayor que 0.5 teóricamente. La goma tiene $\mu = 0.47$, sin embargo otros materiales anisótropos y algunos plásticos anisótropos poseen $\mu \geq 0.5$.

1.12 Energía potencial unitaria de deformación

Está claro que la energía potencial acumulada en un volumen elemental se determina por la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores sobre la superficie de este volumen. Las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo elástico realizan cierto trabajo (W). Este trabajo se transforma parte en energía potencial de deformación del cuerpo (U) y parte en trasmitir cierta velocidad a la masa del cuerpo en forma de energía cinética (K). El balance de energía es el siguiente:

$W = U + K$

Si la carga se aplica lentamente, la velocidad de los desplazamientos de las partículas del cuerpo será insignificante y se podrá considerar que $K = 0$. A este tipo de carga se le llama estática. En este caso:

$W = U$

y todo el trabajo de las fuerzas exteriores se transforma en energía potencial de deformación.

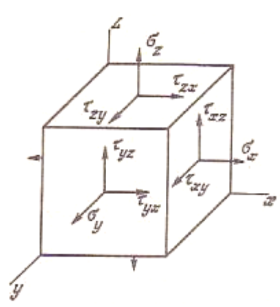


Fig. 1.11 Tensiones en el Estado Tensional Triaxial

La fuerza normal $\sigma_x \, dydz$ (Fig. 1.11) realiza cierto trabajo en el desplazamiento $\varepsilon_x \, dx$.

Este trabajo será:

$$\frac{1}{2}\sigma_x \; dydz \cdot \varepsilon_x \; dx \qquad (1.37)$$

siendo ε_x, el alargamiento unitario según el eje x, originado por todas las fuerzas que actúan.

La fuerza tangencial $\tau_{yz} \; dydx$ realiza en el desplazamiento $\gamma_{yz} \; dz$ el trabajo siguiente:

$$\frac{1}{2}\tau_{yz} \; dydx \cdot \gamma_{yz} \; dz \qquad (1.38)$$

De igual manera las fuerzas originadas por las restantes tensiones normales y tangenciales realizan trabajo en los desplazamientos correspondientes de su punto de aplicación.

Sumando estos trabajos se obtiene que:

$$dW = dU = \frac{1}{2} dxdydz\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \qquad (1.39)$$

Sustituyendo las expresiones de la Ley de Hooke Generalizada y hallando la energía unitaria de deformación, o sea, la energía por unidad de volumen, se obtiene que:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right] + \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\right] \qquad (1.40)$$

Si se trata de los planos principales:

$\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ y $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

De donde:

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \qquad (1.41)$$

Esta energía unitaria de deformación total se puede descomponer convencionalmente en dos componentes de energía, una que acumula producto del cambio de volumen y la otra por la distorsión o cambio de forma. (Fig. 1.12)

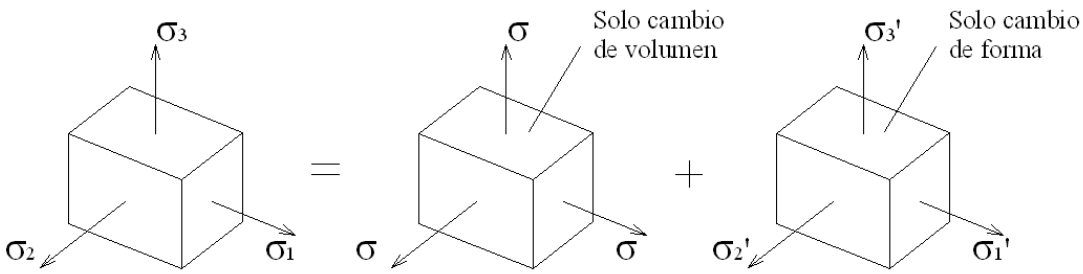


Fig. 1.12 Descomposición convencional de la energía de deformación en energía del cambio de volumen y de forma

Tendrá que cumplirse que:

$\sigma_1 = \sigma + \sigma_1^{/}$, $\sigma_2 = \sigma + \sigma_2^{/}$ y $\sigma_3 = \sigma + \sigma_3^{/}$

El valor de σ hay que hallarlo partiendo de la condición de que en el estado tensional complementario no haya deformación de volumen. O sea que:

$$\sigma_1^{/} + \sigma_2^{/} + \sigma_3^{/} = 0 \qquad (1.42)$$

O sea:

$$(\sigma_1 - \sigma) + (\sigma_2 - \sigma) + (\sigma_3 - \sigma) = 0$$

Despejando σ:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad (1.43)$$

Se cumple entonces que:

$$U_0 = U_{0\,v} + U_{0\,f} \qquad (1.44)$$

Donde:

$U_{0\,v}$ - Energía potencial de deformación debida solo al cambio de volumen.

$U_{0\,f}$ - Energía potencial de deformación debida solo al cambio de forma.

Sustituyendo (1.44 en (1.41) para el estado tensional uniforme, se obtiene que:

$$U_{0v} = \frac{1-2\mu}{6E}\left[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right]^2 \tag{1.45}$$

y restando esta expresión de la energía total U_0, obtiene que:

$$U_{0f} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \tag{1.46}$$

$$U_{0f} = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^{\;2} + \sigma_2^{\;2} + \sigma_3^{\;2} - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right] \tag{1.47}$$

1.11 Criterios o Hipótesis de Resistencia

1.11.1 Propósito de las Hipótesis de Resistencia

La verificación de la resistencia de un elemento de una estructura puede hacerse muy fácilmente en el caso de los estados tensionales uniaxiales, debido a que en este caso es fácil determinar experimentalmente la magnitud de las tensiones peligrosas (límite de fluencia para los materiales dúctiles o límite de rotura para los materiales frágiles).

De esta forma la condición de resistencia para el caso del estado tensional uniaxial se puede determinar de la forma siguiente:

$$\sigma_{máx} \le [\sigma] \tag{1.48}$$

Pasemos ahora a estudiar los métodos para establecer la condición de resistencia en los estados tensionales complejos.

En la Fig. 1.13 se muestra el caso general de un estado tensional triaxial, en el cual conocemos la magnitud de las tensiones tangenciales σ_1, σ_2 y σ_3

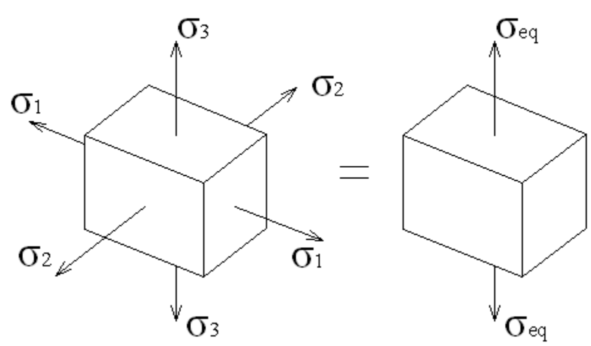


Fig. 1.13. Estado tensional triaxial principal y estado tensional equivalente

Preguntémonos: ¿A qué valor de las tensiones σ_1, σ_2 y σ_3 tiene lugar el estado límite en el material, o sea, en que instante ocurrirá la rotura si es un material frágil o la fluencia si es un material dúctil?

Basándose en los experimentos se puede decir que en el caso del estado tensional compuesto, el estado peligroso para un mismo material puede tener lugar para diferentes valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3, en dependencia de las relaciones existentes entre estas. La determinación experimental de las propiedades de resistencia de los materiales en el caso del estado tensional compuesto resulta muy difícil, ya que, como puede existir un número infinito de relaciones entre σ_1, σ_2 y σ_3 se necesitaría una cantidad infinita de experimentos para caracterizar completamente las cualidades de resistencia de los materiales para cada estado tensional. Esta dificultad trae consigo la necesidad de utilizar los resultados experimentales obtenidos a partir de un estado tensional simple para la evaluación de la resistencia de un elemento que se encuentre sometido al estado tensional compuesto dado. Por lo tanto, para su análisis, el estado tensional compuesto se sustituye por un estado tensional simple, que se elige de tal forma que según cierto criterio determinado, este sea equivalente al estado tensional compuesto dado.

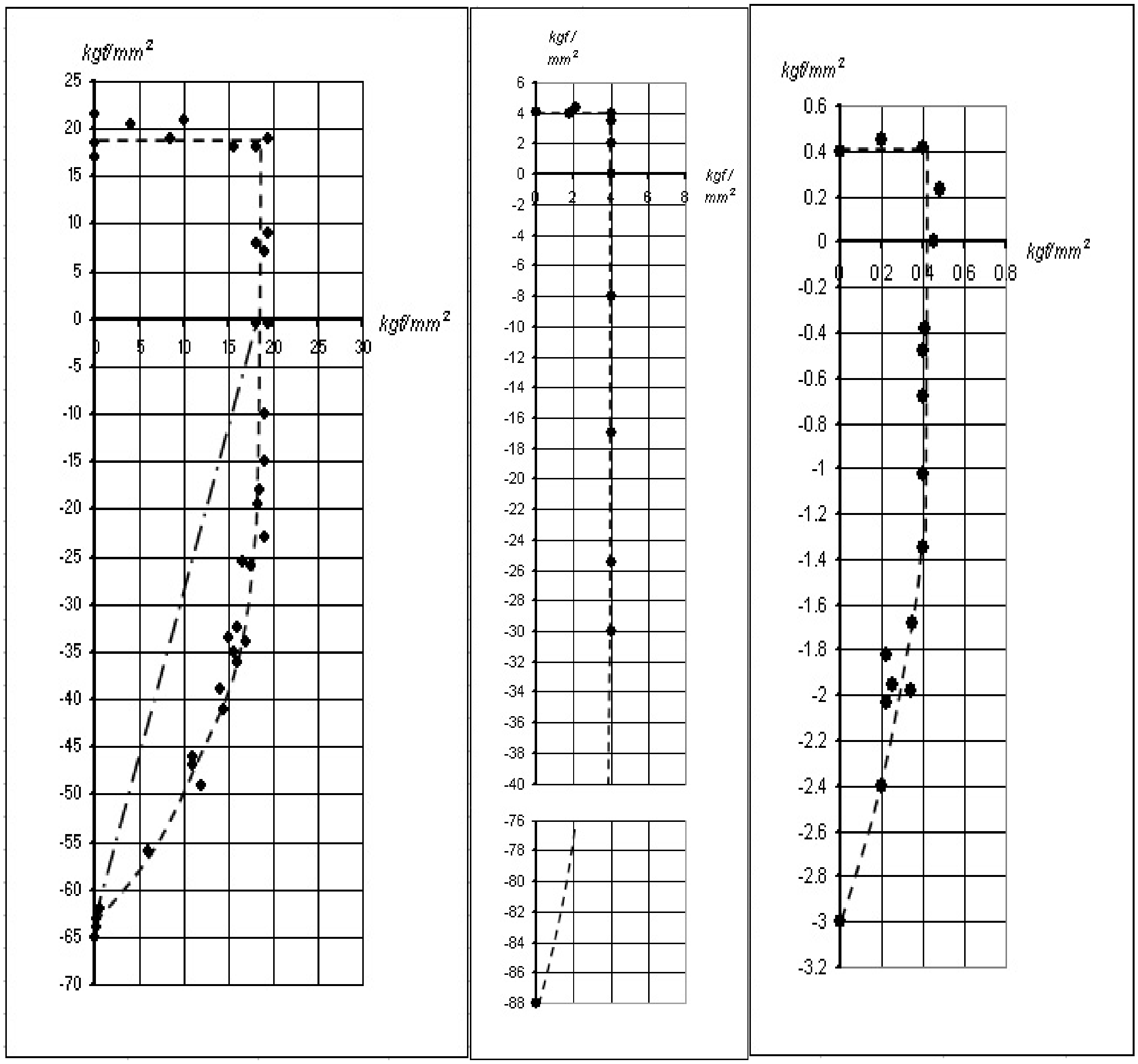
La elección del criterio de equivalencia depende de los factores que se consideran determinantes para la aparición del estado límite del material. Por eso el criterio de equivalencia entre ambos estados tensionales se llama **Criterio o Hipótesis de Resistencia**. Todas las Teorías (Hipótesis) de Resistencia tienen el mismo fin: sustituir el estado tensional compuesto por un estado tensional simple (uniaxial) equivalente (Fig. 1.13). La diferencia entre las diferentes Teorías o Hipótesis de Resistencia consiste en la elección del Criterio de Resistencia. Sin embargo, la elección del criterio de resistencia es un problema complejo, por el hecho de que un mismo material puede fallar de una manera frágil o dúctil bajo diferentes estados tensionales y bajo diferentes condiciones de ensayo.

De acuerdo con los dos tipos posibles de rotura: frágil y dúctil, las Teorías de resistencia se clasifican en dos grandes grupos.

- Teorías de Resistencia según las cuales se prevé la superación de la resistencia a la fluencia (deformación plástica).
- Teorías de Resistencia según las cuales se prevé la superación de la resistencia a la rotura.

La veracidad de una u otra hipótesis se confirma experimentalmente. Por consiguiente, antes de comenzar el estudio de las diferentes Teorías de Resistencia vamos a estudiar los resultados de algunos ensayos obtenidos en estados tensionales biaxiales. Así por ejemplo el Académico (Davidenkov & Spiridonova 1946) realizó ensayos con diferentes materiales dúctiles y frágiles sometidos a estados tensionales planos con probetas en forma de tubos, de manera de poder lograr estados tensionales planos con diferentes relaciones entre las tensiones principales. Los tubos eran sometidos a la acción simultanea de una carga axial (de tracción o de compresión) y a una presión interior.

En la Fig. 1.14 a) se muestra el primero y cuarto cuadrante (el segundo cuadrante es simétrico con relación al cuarto) del diagrama de tensiones límites obtenido con probetas de hierro fundido gris cuya composición química era: C – 3,48 %, Si – 2,21 % y Mn – 0,52 %. Las probetas eran tubos con diámetro exterior 14 mm y espesor 0,75 mm. Del diagrama se aprecia que la resistencia máxima a la a tracción de dicho material era $\sigma_{ut} = 19$ kgf/mm^2 y la resistencia máxima a la compresión era mucho mayor $\sigma_{uc} = 63$ kgf/mm^2, siendo $k = \sigma_{ut}/\sigma_{uc} = 0,3$. Para estados tensionales planos de tracción biaxial la destrucción de este material ocurría cuando cualquiera de las dos tensiones principales alcanzaba el valor de $\sigma_{ut} = 19$ kgf/mm^2.



a) b) c)

Fig. 1.14 Resultados experimentales de N.N. Davidenkov para materiales frágiles

Para estados tensionales planos mixtos, o sea, una tensión principal de tracción y otra de compresión (segundo o cuarto cuadrantes), siempre que fuera $\sigma_3 > -23$ kgf/mm^2 , la destrucción ocurría cuando $\sigma_1 = \sigma_{ut} = 19$ kgf/mm^2 y cuando la tensión de compresión comenzaba a aumentar en magnitud, o sea, $\sigma_3 < -23$ kgf/mm^2, la tensión de tracción en el momento de la destrucción se hacía cada vez menor mientras la de compresión aumentaba, llegando a $\sigma_3 = \sigma_{uc} = -63$ kgf/mm^2 cuando la tensión de tracción se hacía cero (estado uniaxial límite de compresión). Para el estado tensional plano de cortante puro $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_3 = -\sigma$, la destrucción se produjo cuando $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sigma_{ut} = 19$ kgf/mm^2.

(Davidenkov & Spiridonova 1946) investigó otros materiales frágiles como fueron el vidrio y el yeso medicinal. Las probetas de vidrio eran tubos de 35 mm de diámetro interior con 1 mm de espesor de pared y las de yeso medicinal de 39,5 mm de diámetro interior y 3 mm de pared. Los resultados experimentales se muestran en las Figs. 1.14 b) y c). En estas se muestran igualmente el primero y segundo cuadrante de los diagramas de tensiones límites experimentales obtenidos. En ningún caso fue investigado el tercer cuadrante. En todos los materiales frágiles investigados se confirma que la destrucción para el estado tensional de cortante puro ocurre cuando $\tau_u = \sigma_{ut}$.(Davidenkov & Spiridonova 1946) investigó también algunos materiales dúctiles. Los diagramas de tensiones límites obtenidos para estos materiales se muestran en la Fig. 1.15. Los materiales dúctiles investigados por Davidenkov fueron el acero y el cobre. El diagrama de tensiones límites en estos casos no se ploteó con los valores absolutos de las tensiones límites, sino con el cociente entre la tensión principal correspondiente y la tensión límite a tracción, que en el caso de los materiales dúctiles coincide con el límite de fluencia a tracción del material.

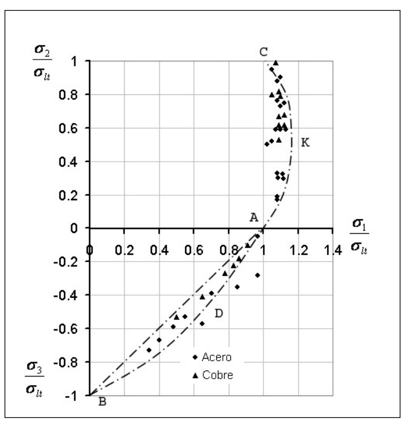


Fig. 1.15 Resultados experimentales de N.N. Davidenkov para materiales dúctiles

Los resultados de todos estos ensayos están representados gráficamente de forma aproximada, a modo de generalización de los mismos, en la Fig. 1.16 para (materiales dúctiles) y en la Fig. 1.17 para (materiales frágiles). Los interceptos del diagrama con los ejes representan las tensiones límites bajo los estados uniaxiales de tracción y compresión, en la parte positiva y negativa de estos respectivamente.

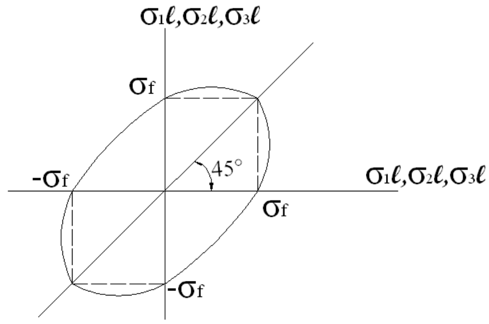


Fig. 1.16 Resultado de los ensayos para materiales dúctiles

$$\sigma_{f\,t} = \sigma_{f\,c} = \sigma_f$$

Como resultado de la generalización de estos ensayos para diferentes materiales dúctiles se ha podido demostrar que el diagrama de tensiones límites para estos materiales es una elipse girada a 45º tal como se muestra en la Fig. 1.16 Los interceptos del diagrama con los ejes corresponden, en el caso de los materiales dúctiles, con la tensión en el límite de fluencia tanto del lado de la tracción como de la compresión, ya que para estos materiales $\sigma_{f\,t} = \sigma_{f\,c} = \sigma_f$.

En el caso de los materiales frágiles la generalización de los ensayos para diferentes materiales frágiles demuestra que el diagrama de tensiones límites para estos materiales tiene la forma mostrada en la Fig. 1.17.

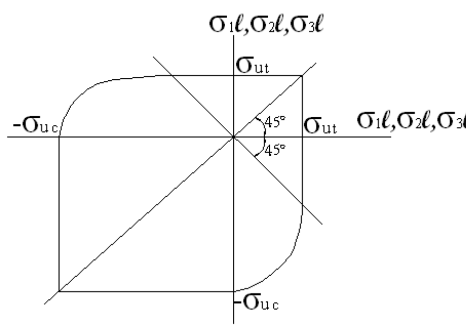


Fig. 1.17 Resultado de los ensayos para materiales frágiles $\sigma_{f\,c} > \sigma_{f\,t}$

En este caso el diagrama se diferencia apreciablemente en su forma con relación al diagrama para los materiales dúctiles. A causa de la mayor resistencia a la compresión de los materiales frágiles con relación a su resistencia a la tracción los interceptos con los ejes del lado de la tracción se corresponden con la resistencia máxima a la tracción del material bajo el estado uniaxial de tensiones y los interceptos del lado de la compresión, con la resistencia máxima a la compresión.

La veracidad de cada una de las hipótesis se comprueba entre otros criterios sobre la base de la correspondencia de cada uno de los diagramas teóricos de la hipótesis para materiales dúctiles y frágiles con los experimentos.

Después de este breve estudio de resultados experimentales se pasarán a estudiar las distintas teorías de resistencia, haciéndolo de acuerdo con el orden de aparición de cada una de ellas.

1.11.2 Hipótesis de Resistencia que se reconocen como clásicas

A través de la historia de la Mecánica de los Materiales los científicos han tratado de explicar las causas de la destrucción de los materiales y en ese empeño se han formulado numerosas hipótesis. En la literatura de Mecánica de Materiales y de Resistencia de Materiales se explican estas hipótesis y los criterios que utiliza cada una de ellas como causa de la destrucción. De todas las hipótesis planteadas se reconocen en la literatura cinco clásicas que son: Primera Hipótesis o Criterio de las Tensiones Normales Máximas de Galileo – Leibnitz, llamada también de Clebsch – Rankine, Segunda Hipótesis o Criterio de las Deformaciones Lineales Máximas de Mariotte – Grashof, llamada también de Saint Venant, Tercera Hipótesis o Criterio de la Tensión Tangencial Máxima de Coulomb, llamada también de Guest, Cuarta Hipótesis o Criterio de las Tensiones Tangenciales Octaédricas o de la Energía Unitaria de Deformación del Cambio de Forma, conocida como de Huber – Mises – Henke, o simplemente en muchos textos de Von Mises y la Quinta Hipótesis o Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. De todas estas hipótesis los diferentes autores coinciden en afirmar que la Cuarta Hipótesis es un criterio exacto de plasticidad, o sea, que ella explica con exactitud las causas de destrucción de los materiales dúctiles y todos los fenómenos asociados con la falla de estos materiales.

A través de esta teoría se explica, por ejemplo, que la fluencia de los materiales dúctiles sometidos a torsión se alcanza cuando la tensión tangencial alcanza el valor de la fluencia a cortante, cuyo valor según la hipótesis debe ser: $\tau_f = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_f$, donde σ_f

es la fluencia a tracción, resultado este que se confirma cerradamente en los experimentos. En las publicaciones de los últimos años se han planteado otras muchas hipótesis, la mayoría de ellas aparecen expuestas en las referencias ((Stiopin 1985);(Pisarenko et al. 1989) sin embargo, a pesar de estos numerosos intentos hay que reconocer que la única hipótesis que explica con bastante exactitud la destrucción tanto de los materiales dúctiles, como la de los frágiles, es la Quinta Hipótesis o Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, que es una de las pocas hipótesis que permite considerar la diferencia de la resistencia de los materiales frágiles a la tracción y la compresión. Se verán a continuación con más detalle cada una de estas Hipótesis.

1.12 Primera Hipótesis. Teoría de las Tensión Normal Máxima

Es la hipótesis más antigua (Galileo Galilei siglo XVII), adopta como criterio de resistencia las tensiones normales máximas a tracción y a compresión.

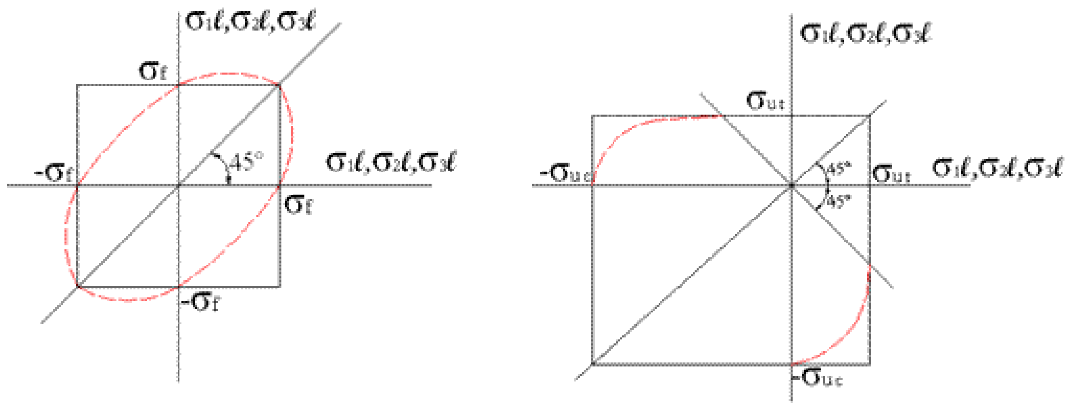
Según esta hipótesis:

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) empieza cuando la tensión normal máxima para un estado tensional compuesto alcanza el valor peligroso de la tensión normal para un estado tensional simple o uniaxial.

La condición de resistencia de esta hipótesis se formula entonces como sigue:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq [\sigma]_t \text{ y } \sigma_{eq} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c \qquad (1.49)$$

La comparación del diagrama de tensiones límites para materiales dúctiles y frágiles según esta teoría con los diagramas de experimentales se muestra en las Figs. 1.18 a) y b).



a) **b)**

Fig. 1.18 Comparación de los diagramas de tensiones límites según la Primera Teoría y los gráficos experimentales a) Materiales dúctiles b) Materiales frágiles

Para los materiales dúctiles esta hipótesis no concuerda con los resultados experimentales, ya que, los puntos obtenidos en el ensayo siguen una línea curva y no las líneas rectas que plantea esta primera teoría. Para materiales frágiles esta hipótesis concuerda exactamente con los resultados experimentales, en el primer y tercer cuadrante, no así en el segundo y cuarto.

Por lo tanto, la primera hipótesis solo debe usarse cuando se establezca el criterio de resistencia de rotura frágil (material frágil) para un estado tensional que este en el primer cuadrante (todas las tensiones principales de tracción) y en el tercer cuadrante (todas las tensiones principales de compresión); ya que es aquí donde único esta teoría concuerda exactamente con los resultados experimentales.

1.13 Segunda Hipótesis. Teoría de la Deformación Lineal Máxima

Se le atribuye al científico francés Barre de Saint Venant (1797 – 1886) aunque en la literatura especializada se conoce también como Teoría de Edmond Mariotte (XVIII). Esta hipótesis adopta como criterio de resistencia la deformación lineal de valor absoluto máximo.

Según esta hipótesis:

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) comienza cuando la deformación lineal unitaria máxima para un estado tensional compuesto alcanza el valor peligroso de la deformación lineal unitaria máxima para un estado tensional simple o uniaxial. La condición de resistencia de esta hipótesis se puede formular entonces como sigue:

$$|\varepsilon_{\max}| \leq [\varepsilon]$$

Donde:

$[\varepsilon]$ - Deformación lineal unitaria admisible para un estado tensional uniaxial.

Aplicando Ley de Hooke Generalizada, si ε_1 es la deformación lineal unitaria máxima para el estado tensional compuesto se tiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

En el caso de tracción simple, la magnitud de la deformación lineal unitaria admisible estará dada de acuerdo con la Ley de Hooke

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

Ahora la condición de resistencia se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \tag{1.50}$$

Como se puede observar la condición de resistencia de acuerdo con esta segunda teoría toma en cuenta, en la influencia de la resistencia del material, la combinación de las tres tensiones principales, sin embargo el criterio asumido se demuestra que es erróneo.

Los diagramas de tensiones límites y su comparación con los resultados experimentales para el caso de estados tensionales planos se muestra en la Fig. 1.19 a) y b).

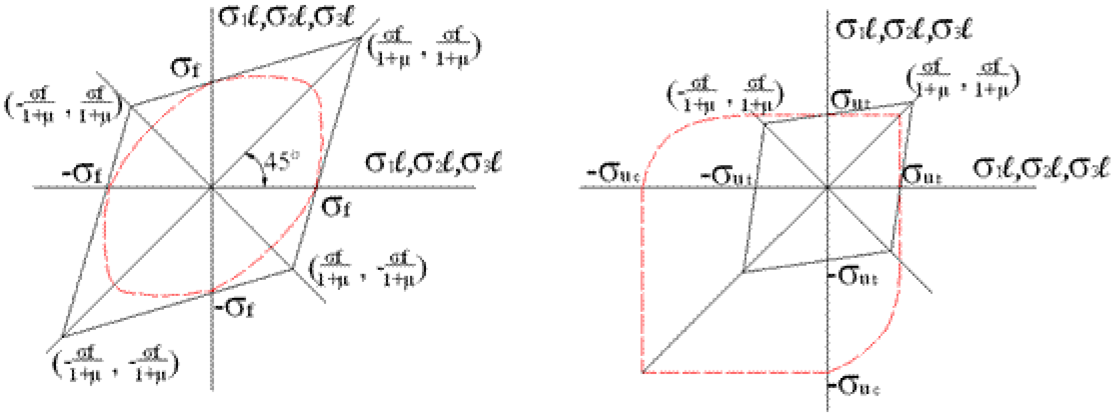


Fig. 1.19 Comparación de los diagramas de tensiones límites según la Segunda Teoría

Al comparar las curvas experimentales con la curva teórica se ve que las mismas no coinciden. Por su falta de correspondencia con los resultados experimentales esta teoría no se utiliza en la práctica.

1.14 Tercera Hipótesis. Teoría de la Tensión Tangencial Máxima

Se conoce como hipótesis de Coulomb (siglo XVIII), aunque en la literatura también se le atribuye a (Guest 1900). Toma como criterio de resistencia la tensión tangencial máxima.

Según esta hipótesis:

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) comienza cuando la tensión tangencial máxima para el estado tensional compuesto alcanza el valor de la tensión tangencial límite para el estado tensional simple o uniaxial.

De acuerdo con esta teoría la condición de resistencia será la siguiente:

$$\tau_{máx} \leq [\tau]$$

Donde:

$[\tau] = \dfrac{\tau_{\lim}}{n} \cong \dfrac{[\sigma]}{2}$ - Tensión tangencial admisible.

n - Factor de seguridad.

Para un estado tensional triaxial el valor máximo de las tensiones tangenciales será:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

De aquí que la condición de resistencia podrá ahora escribirse de la forma:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]_t \quad (1.51)$$

Los diagramas de tensiones límites para materiales dúctiles y frágiles, así como su comparación con los diagramas experimentales se muestran en la figura 4.5 a) y b).

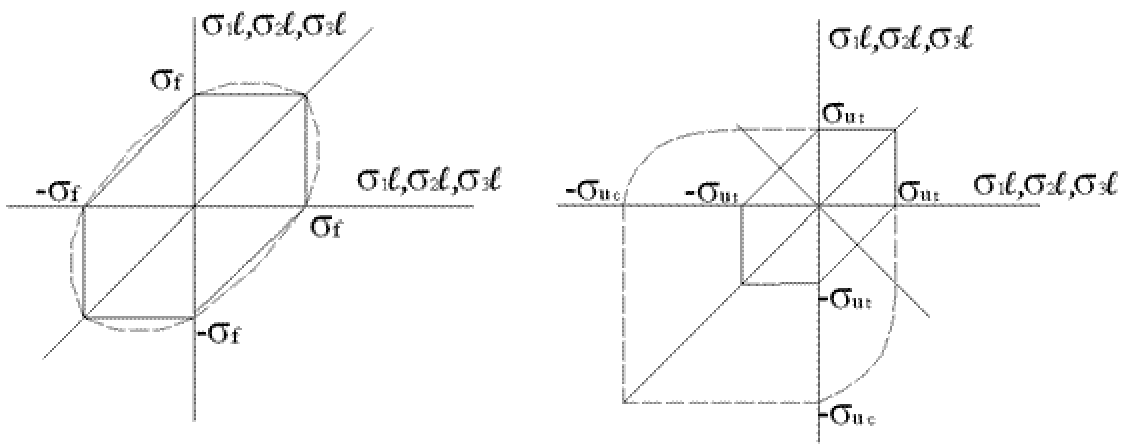


Fig. 1.20 Comparación de los diagramas de tensiones límites según la Tercera Teoría

Comparando estos resultados vemos que la tercera teoría caracteriza la resistencia de los materiales dúctiles con cierta reserva de resistencia para todos los estados tensionales compuestos.

En el caso de los materiales frágiles no concuerda con los resultados experimentales y con excepción del primer cuadrante (donde si concuerda), la reserva en los restantes cuadrantes es excesiva.

Los experimentos han demostrado que $\tau_f \cong 0.6 \cdot \sigma_f$, lo que concuerda con los resultados de la Teoría, lo cual justifica la aplicabilidad de esta teoría para aquellos materiales en los cuales la falla ocurre por fluencia (materiales dúctiles).

1.15 Cuarta Hipótesis. Teoría de la Energía Potencial Unitaria de Deformación del Cambio de Forma

Se le atribuye a los autores M.T. Huber, R. Von Misses y H. Hencke (siglo XVIII). Toma como criterio de resistencia la energía potencial unitaria de deformación del cambio de forma.

Según esta teoría:

La alteración de la resistencia (paso al estado límite del material) comienza cuando la energía potencial unitaria de deformación del cambio de forma para el estado tensional compuesto alcanza el valor peligroso de la energía potencial unitaria máxima para el estado tensional simple o uniaxial.

De acuerdo con esta teoría la condición de resistencia será la siguiente:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_t \qquad (1.52)$$

Los diagramas de tensiones límites para materiales dúctiles y frágiles, así como su comparación con los diagramas experimentales se muestran en la Fig. 1.21 a) y b).

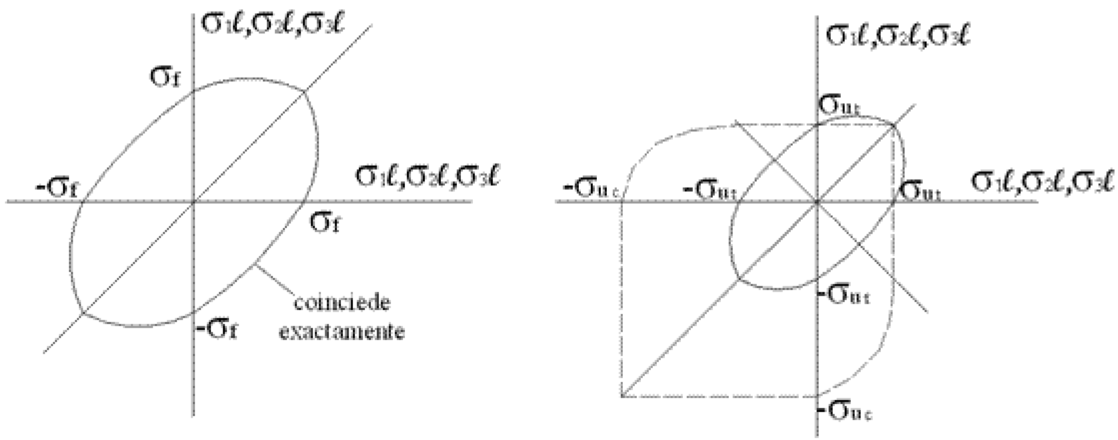


Fig. 1.21 Comparación de los diagramas de tensiones límites según la Cuarta Teoría

Comparando estos resultados vemos que esta teoría caracteriza la resistencia de los materiales dúctiles, en los cuales concuerda perfectamente con los resultados experimentales.

Como puede observarse al comparar esta teoría con la tercera teoría de resistencia, la tercera no toma en cuenta la influencia de la tensión principal σ_2, que en realidad si ejerce influencia. El desarrollo de la cuarta teoría toma como base el resultado experimental de que la deformación plástica no va acompañada de un cambio de volumen del cuerpo. En otras palabras, en el caso de dos estados tensionales diferentes, la deformación plástica comienza a desarrollarse en ambos cuando la cantidad de trabajo específico que se emplea en el cambio de forma es igual. En el caso de los materiales frágiles no concuerda con los resultados experimentales y con excepción del primer cuadrante, la reserva en los restantes cuadrantes es excesiva.
Esta teoría concuerda muy bien con los resultados experimentales para los materiales dúctiles. **Es más exacta que la tercera teoría para materiales dúctiles.**

1.16 Quinta Hipótesis. Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr

Se le atribuye a Otto Mohr (siglo XX). En esta Hipótesis Mohr no toma en cuenta un criterio específico de resistencia, sino que parte del fenómeno de la destrucción en sí, partió del propio concepto de estado tensional límite.
Para explicar esta teoría supongamos que se dispone de una máquina de ensayos de materiales que tiene la propiedad de hacer surgir en la probeta cualquier estado tensional y que este estado puede ser variado, manteniendo constante la relación entra las tensiones principales.
Escogiendo cierto estado tensional y aumentado simultáneamente todas sus componentes, llega un momento en que este estado tensional se convierte en un estado tensional límite y la probeta se destruye o surgen en ella deformaciones plásticas. Aplicando este procedimiento para diferentes estados tensionales, llegamos a un conjunto de círculos de Mohr correspondientes a distintos estados tensionales límites y trazamos la envolvente (Figura 4.7)

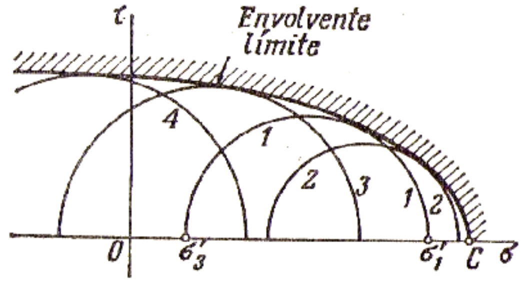


Fig. 1.22 Envolvente de los círculos de Mohr límites para distintos estados tensionales

La suposición principal de esta teoría es que: "la forma de la envolvente de los círculos de Mohr de los estados tensionales límites depende de las propiedades del material y es una característica mecánica del material, como lo es, por ejemplo, el diagrama de tracción". Este enfoque se basa principalmente en la sistematización lógica de los resultados de los ensayos. Ahora se debe resolver el problema siguiente: ¿Cómo trazar la envolvente de los círculos límites?

Teniendo en cuenta lo difícil que resulta obtener los datos necesarios para construir los círculos límites intermedios entre el círculo correspondiente a la tracción uniaxial y el punto donde se corta con el eje de las tensiones normales, llegamos a la conclusión de que el método más fácil y efectivo para la obtención de la envolvente aproximada es trazar la tangente a los círculos de tracción o compresión (Fig. 1.23).

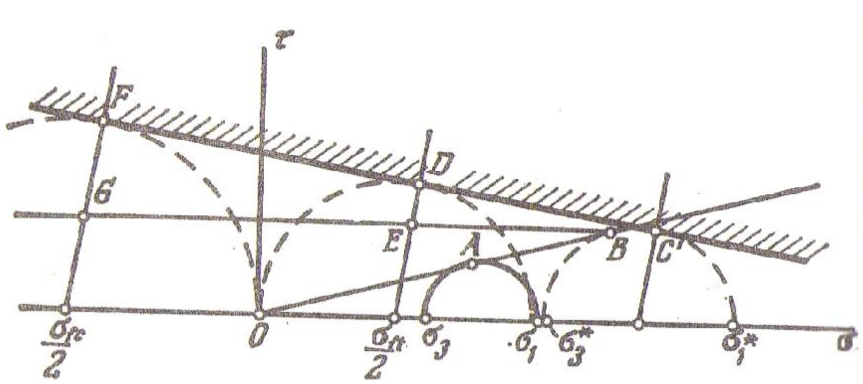


Fig. 1.23 Envolvente límite de los círculos de Mohr según la Teoría Clásica de Mohr

Suponiendo que la envolvente es una línea recta, es fácil obtener la condición de resistencia para un estado tensional intermedio.
De esta forma aplicando proporcionalidad entre triángulos y haciendo una serie de transformaciones matemáticas, obtenemos la condición de resistencia:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_t}{[\sigma]_c}\sigma_3 \leq [\sigma] \tag{1.52}$$

Para los materiales dúctiles $[\sigma]_t = [\sigma]_c$; la envolvente es paralela al eje de las abscisas y la condición de resistencia coincide con la obtenida en la tercera hipótesis.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

La limitación fundamental de la Teoría de Mohr consiste en la falta de exactitud en la determinación de la envolvente límite en la zona correspondiente a la tracción triaxial. Esta limitación no tiene gran importancia, puesto que tales estados tensionales se encuentran rara vez en la práctica.
Los diagramas de tensiones límites para materiales dúctiles y frágiles, así como su comparación con los diagramas experimentales se muestran en la Fig. 1.24 a) y b).

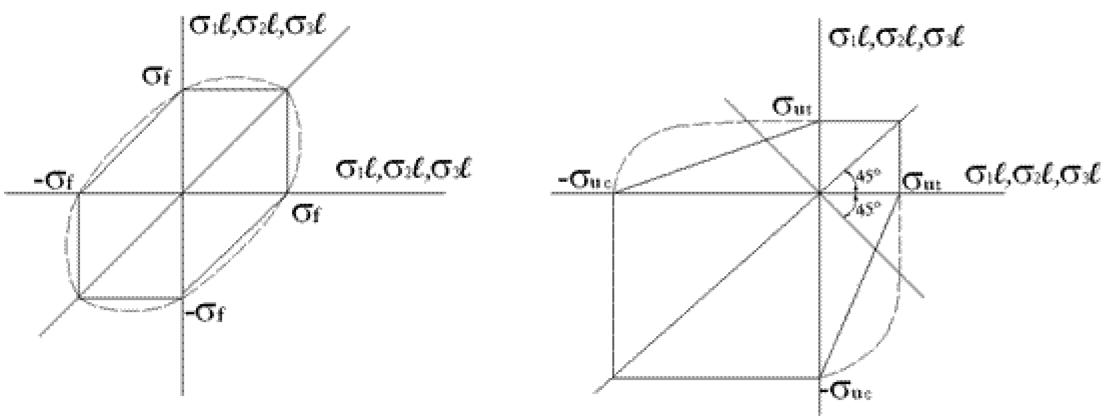


Fig. 1.24 Comparación de los diagramas de tensiones límites según la Teoría Clásica de Mohr

Comparando estos resultados vemos que esta teoría caracteriza la resistencia de los materiales dúctiles, en los cuales concuerda perfectamente con los resultados obtenidos por la tercera hipótesis, con cierta reserva de resistencia para todos los estados tensionales compuestos.

En el caso de los materiales frágiles esta teoría concuerda exactamente en el primer y tercer cuadrante con los resultados experimentales; y en el caso del segundo y cuarto con cierta reserva de resistencia para todos los estados tensionales compuestos. Si la comparamos con la primera hipótesis, vemos que esta es más completa, ya que la primera sólo se puede utilizar para estados tensionales situados en el primer o tercer cuadrante, mientras que la quinta se puede utilizar para cualquier estado tensional compuesto. Es la más exacta utilizada para los materiales frágiles.

1.17 Perfeccionamiento de la formulación matemática de la Teoría de Mohr

Este epígrafe constituye un Aporte Científico del Colectivo de Mecánica Aplicada a la Teoría de las Hipótesis o Criterios de Resistencia que fue reconocido como Premio Provincial de la Academia de Ciencias en el año 2005 (Goytisolo 2005) y está incluido dentro del Premio Nacional de la Academia de ciencias del año 2005: Perfeccionamiento de los Esquemas de Análisis y de los Métodos de Cálculo de los Elementos de Máquinas y Equipos y ha sido publicado en numerosas fuentes. Los diferentes autores de Resistencia de Materiales o de Mecánica de Materiales no han sido todo lo justos que se puede al referirse a la Teoría de Mohr y partiendo de que, para el caso particular de los materiales dúctiles, la Teoría de Mohr coincide en su planteamiento con la Tercera Hipótesis, la consideran simplemente como una generalización de ésta, sin valorar en toda su magnitud el mérito de esta Teoría. Uno de los pocos autores que sitúa esta Teoría en el lugar que se merece es (Feodosiev 1985) destacando que el mérito de la Teoría de Mohr radica en que no se formula ningún criterio como causa de la destrucción, sino que se enfoca el proceso de destrucción de los materiales desde el punto de vista fenomenológico, o sea, su planteamiento se basa en la descripción lógica del fenómeno de la destrucción que es lo más natural y lo más lógico. El autor del material del presente curso se ha declarado ferviente seguidor de estos planteamientos que ensalzan a la Teoría de Mohr y se ha propuesto con el desarrollo de este epígrafe contribuir a demostrar que la Teoría de Mohr es la única vía posible de poder evaluar el fenómeno de la destrucción de los materiales dúctiles y de los frágiles a través de una única formulación matemática, la única limitación existente es la necesidad de una mayor exactitud al describir matemáticamente la envolvente límite.

La formulación clásica de la condición de paso al estado límite según la Teoría de Mohr, como se ha explicado es la siguiente:

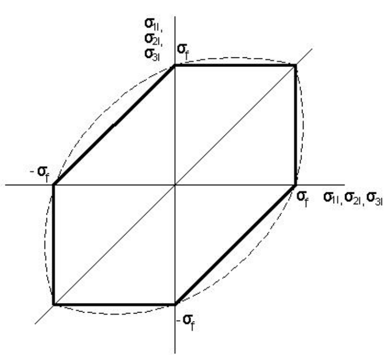
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 = \sigma_{lt}$$

Donde:

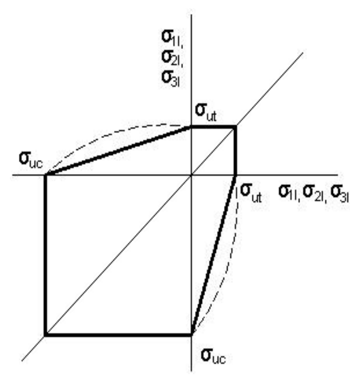
$k = \dfrac{\sigma_{lt}}{\sigma_{lc}}$, σ_{lt} = tensión límite a tracción y σ_{lc} = tensión límite a compresión.

Si se aplicara la Formulación Clásica de Mohr para el hierro fundido investigado por (Davidenkov & Spiridonova 1946), el cual posee: k = σ_{ut} / σ_{uc} = 19 / 63 = 0,3, la destrucción bajo el estado tensional de cortante puro debía haber ocurrido cuando τ_u = σ_{ut} / (1 + k) = 0,77 σ_{ut}, cuando los propios resultados de (Davidenkov & Spiridonova 1946) confirman que la destrucción ocurre cuando τ_u = σ_{ut}, lo que implica un 23 % de error con relación a los experimentos.

Los diagramas de tensiones límites para materiales dúctiles y materiales frágiles obtenidos para estados tensionales planos según este planteamiento, se muestran respectivamente en la Figs. 1.25 a) y b).



a) Materiales Dúctiles



B) Materiales Frágiles

Fig. 1.25 Diagramas de Tensiones Límites según la Teoría Clásica de Mohr

En líneas de trazos discontinuos se muestra también la forma de los diagramas de tensiones límites obtenidos experimentalmente, como se verá más adelante en el desarrollo del trabajo, para reducir el error hay que acercarse lo más posible a las líneas de trazos discontinuos. Como se aprecia la formulación clásica de la Teoría de Mohr arroja ciertas deferencias con relación a los diagramas experimentales, sobre todo en el segundo y cuarto cuadrantes, tanto para materiales dúctiles como frágiles. Por ejemplo, para materiales dúctiles, de acuerdo a la formulación clásica de Mohr se obtiene que para el estado tensional de cortante puro ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = -\sigma$), la destrucción se produce cuando $\tau_f = 0{,}5\ \sigma_f$, lo cual no coincide con los resultados de la cuarta hipótesis mencionados anteriormente, introduciendo un 15,5 % de error. Para el caso de los materiales frágiles se obtiene para el caso del estado tensional de cortante puro que la destrucción ocurre cuando $\tau_u = \sigma_{ut} / (1 + k)$, introduciendo un error considerable ya que para los materiales frágiles se confirma experimentalmente que la destrucción bajo el estado tensional de cortante puro ocurre cerradamente cuando $\tau_u \cong \sigma_{ut}$. El hecho de que existan estas diferencias con los resultados experimentales no quiere decir de ninguna manera que la Teoría de Mohr sea inexacta, sino simplemente que la expresión de la evolvente límite empleada en la formulación matemática de la Teoría Clásica de Mohr no es la más adecuada, ya que solamente toma en consideración los mayores círculos de Mohr correspondientes a los estados tensionales límites de tracción uniaxial y de compresión uniaxial.

En el presente trabajo se demostrará que la formulación matemática de la evolvente de Mohr, incorporando en el análisis un tercer círculo: el mayor de los tres círculos de Mohr para el caso del estado tensional límite de cortante puro, no sólo conduce a una formulación matemática mucho más exacta de la condición de resistencia según esta hipótesis, que reduce sensiblemente los errores en el segundo y cuarto cuadrante, sino que vincula el proceso de destrucción con el signo que posea la tensión media $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$, entre las tres tensiones principales del mayor de los tres círculos de Mohr del estado tensional.

Según el criterio del autor del presente trabajo, para los materiales dúctiles el mecanismo de destrucción es siempre el corrimiento de los átomos de la red cristalina producto de la presencia de la tensión tangencial máxima, mecanismo que está absolutamente confirmado por la Tercera y la Cuarta Hipótesis, esto proceso es independiente del signo que posea la tensión media del estado tensional. Sin embargo en el caso de los materiales frágiles el mecanismo de destrucción es extremadamente dependiente del signo de la tensión media σ_m. De la Teoría del Estado Tensional se conoce que en el plano donde ocurre la tensión tangencial máxima existe una tensión normal cuya magnitud es precisamente σ_m, si la tensión normal σ_m. $>$ 0, el mecanismo de destrucción predominante no es precisamente el corrimiento de los átomos producto de la presencia de la tensión tangencial máxima, sino la separación directa de las partículas producto de la presencia de la tensión normal σ_m. de tracción. Cuando por el contrario σ_m. $<$ 0, el mecanismo de destrucción predominante es el corrimiento de los átomos en la red cristalina, interferido este corrimiento por la presencia de una tensión normal de compresión que hace más difícil el proceso de corrimiento en la medida que la tensión media de compresión se haga cada vez mayor, haciendo que el material se comporte como más resistente. Esto como se verá es lo que se observa en los resultados experimentales y lo confirma la formulación matemática de la Teoría de Mohr obtenida en el presente trabajo. Estas consideraciones fueron expuestas ya hace quince años en el Trabajo (Goytisolo 1989) y publicada posteriormente en varias publicaciones.

La correspondencia entre la teoría y la práctica de los diagramas de tensiones límites trazados para cada una de las hipótesis de resistencia para los estados tensionales planos, ha sido confirmada experimentalmente. De los diagramas se aprecia la correspondencia de los resultados experimentales con la Cuarta Hipótesis para el estado tensional de cortante puro, o sea, la destrucción bajo este estado tensional, en el caso de los materiales dúctiles, ocurre cuando $\tau_f = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_f$, lo que se diferencia en un 15,5 % con los resultados predichos por la Teoría Clásica de Mohr.

Se verá a continuación como siguiendo el razonamiento lógico de Mohr e incorporando estos resultados experimentales obtenidos para el estado tensional de cortante puro, se puede obtener una formulación matemática más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. Se verá primero como obtener la ecuación de la envolvente límite utilizando el mayor de los tres círculos de Mohr correspondiente a los estados tensionales límites uniaxial de tracción y de cortante puro.

En la Fig.1.26 se muestran estos círculos límites y el mayor de los tres círculos de Mohr de un estado tensional cualquiera en el cual las tensiones principales σ_1 y σ_3 han sido aumentadas proporcionalmente en su magnitud n veces, hasta que el mayor de los tres círculos de Mohr para ese estado tensional se hace tangente en el punto C a la evolvente límite ABC, formada por los círculos limites correspondientes al estado uniaxial límite de tracción y el límite de cortante puro.

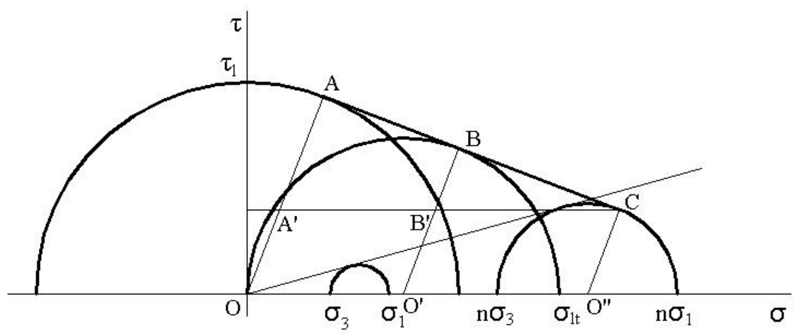


Fig. 1.23 Modelo de la evolvente límite obtenida con el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes al estado tensional límite de tracción uniaxial y al estado tensional límite de cortante puro ($\sigma_m > 0$)

De la Fig. 1.23 se tiene que:

$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{BB'}{B'C}$$

Donde:

AA´ = τ_l - n(σ_1 - σ_3)/2 BB´ = σ_{lt} / 2 - n(σ_1 - σ_3)/2

A´C = 00´´ = n(σ_1 + σ_3)/2 B´C = n(σ_1 + σ_3)/2 - σ_{lt}/2

Sustituyendo y procesando la expresión obtenida, considerando que la tensión límite a cortante se pueda expresar como una función de la tensión límite a tracción, o sea, $\tau_l = \varphi\ \sigma_{lt}$, se obtiene que:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right) = \frac{\sigma_{lt}}{n}$$

Que constituye en esencia una nueva formulación de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, para el caso de que la tensión media del estado tensional a evaluar sea: $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 > 0$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right) \leq [\sigma]_t \qquad (1.53)$$

Si se toma el factor de seguridad n = 1 se obtiene la condición de paso al estado límite para estos estados tensionales:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right) = \sigma_{lt}$$

Se expondrá a continuación como obtener la ecuación de la envolvente límite utilizando el mayor de los tres círculos de Mohr correspondiente a los estados tensionales límites uniaxial de compresión y de cortante puro.

En la Fig. 1.24 se muestran estos círculos límites y el mayor de los tres círculos de Mohr de un estado tensional cualquiera en el cual las tensiones principales σ_1 y σ_3 han sido aumentadas proporcionalmente en su magnitud n veces, hasta que el mayor de los tres círculos de Mohr para ese estado tensional se hace tangente en el punto C a la evolvente límite ABC, formada por los círculos limites correspondientes al estado uniaxial límite de compresión y el límite de cortante puro.

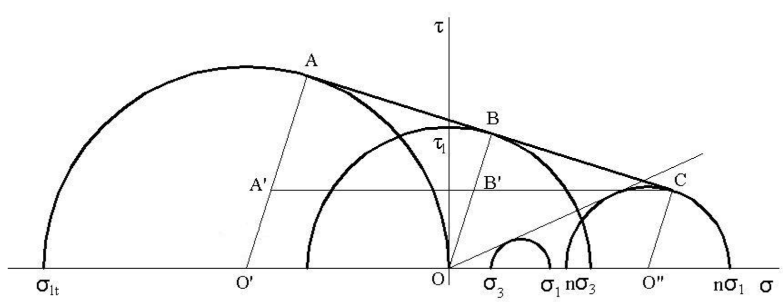


Fig. 1.24 Modelo de la evolvente límite obtenida con el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes al estado tensional límite de compresión uniaxial y al estado tensional límite de cortante puro ($\sigma_m < 0$)

De la Fig. 1.24 se tiene que:

$$\frac{AA}{A\acute{}C} = \frac{BB\acute{}}{B\acute{}C}$$

Donde:

AA´ = σ_{lc}/ 2 - n(σ_1 - σ_3)/2 BB´ = τ_l - n(σ_1 - σ_3)/2

A´C = σ_{lc}/2 + n(σ_1 + σ_3)/2 - B´C = 00´´ = n(σ_1 + σ_3)/2

Sustituyendo y procesando la expresión obtenida, considerando al igual que en el caso anterior que la tensión límite a cortante se pueda expresar como una función de la tensión límite a tracción, o sea, $\tau_l = \varphi \ \sigma_{lt}$ y considerando además que $\sigma_{lt} = k \ \sigma_{lc}$ se obtiene que:

$$\frac{\sigma_1}{\varphi} - k\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) = \frac{\sigma_{lt}}{n} \qquad (1.54)$$

Que constituye también una nueva formulación de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, pero en este caso para cuando la tensión media del estado tensional a evaluar sea: $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$

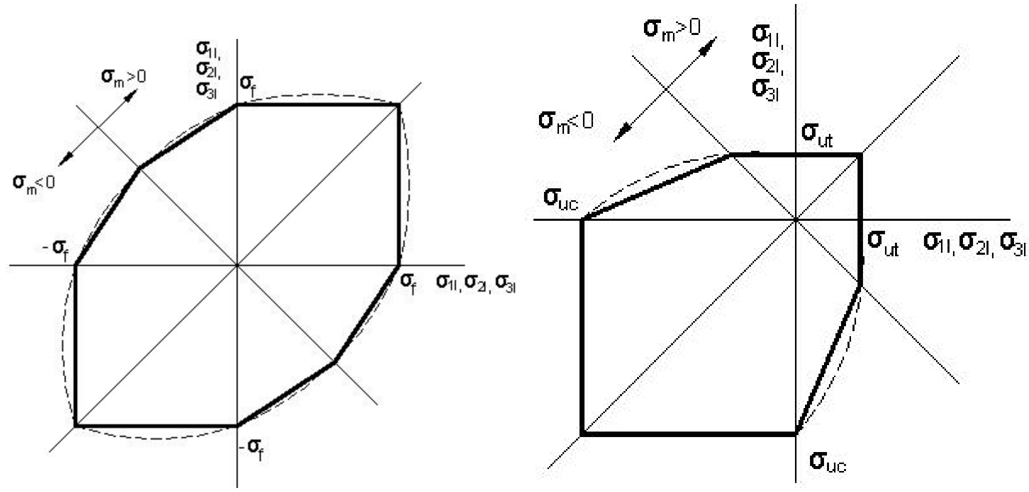
$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1}{\varphi} - k\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) \le \left[\sigma\right]_t \qquad (1.55)$$

Si se toma el factor de seguridad n = 1 se obtiene la condición de paso al estado límite para estos estados tensionales:

$$\frac{\sigma_1}{\varphi} - k\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) = \sigma_{lt} \qquad (1.56)$$

Construyendo los diagramas de tensiones límites con las condiciones de paso al estado límite dadas por las ecuaciones (1.55 y 1.56), para cuando $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 > 0$ y (4), para cuando $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$ se obtienen los diagramas de tensiones límites mostrados en la Figs. 1.25 a) y b), para las nuevas formulaciones matemáticas obtenidas.

Como se puede apreciar de los diagramas de tensiones límites obtenidos, la nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr reduce sensiblemente el error de esta Teoría para el segundo y cuarto cuadrante tanto para los materiales dúctiles como para los frágiles. El error de la formulación clásica para el estado tensional de cortante puro del 15,5 % para los materiales dúctiles y del 23 % o más para los materiales frágiles, se reduce a cero con el nuevo planteamiento.



a) b)

Fig. 1.25 Diagramas de tensiones límites para los materiales Dúctiles (a) y frágiles (b) según la nueva formulación matemática de la Teoría de Mohr

1.18 Conclusiones parciales del Capítulo I

1. En el Capítulo se incluyeron todos los tópicos fundamentales de la Teoría del Estado Tensional y Deformacional con un nivel adecuado para las necesidades de un Ingeniero Químico, pero sin que se dejara de tratar ninguno de los tópicos.
2. No se profundizó en el tratamiento grafico de la Teoría del Estado Tensional a través del Círculo de Mohr, se menciona su empleo y se deja este tópico para el estudio independiente del Ingeniero interesado.
3. Se aborda con buena profundidad lo relativo a los Criterios de Resistencia, tal vez este el aspecto más importante para la utilización práctica de estos conocimientos por el Ingeniero Químico en la práctica ingenieril.
4. Se ha incluido el perfeccionamiento de la Teoría de Mohr, que constituye un Aporte Científico del Colectivo de Mecánica Aplicada a la Teoría de las Hipótesis de Resistencia

Capítulo II Cálculo de tensiones en recipientes de paredes delgadas, recipientes de paredes gruesas y placas planas

2.1 Introducción al Capítulo

Este constituye también un tema clásico de los cursos de Resistencia de Materiales y Mecánica de los Materiales, la bibliografía empleada es la misma que en el capítulo anterior. Cuando se ha utilizado alguna otra nueva fuente se referencia en el propio Capítulo.

2.2 Cálculo de tensiones en bóvedas simétricas con carga simétrica según la Teoría Membranal

Se entiende por bóveda un cuerpo limitado por dos superficies curvas, de manera que la separación entre dichas superficies (espesor) es pequeño en comparación con el resto de las dimensiones. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de las dos superficies de la bóveda se llama superficie media. Las bóvedas simétricas son aquellas en las cuales la superficie media es una superficie de revolución. Así las bóvedas pueden ser, en dependencia de la superficie de revolución de que se trate: cilíndricas, cónicas, esféricas, tóricas, etc.. Las bóvedas pueden ser de espesor constante o no. En la práctica la mayoría de las bóvedas presentan espesor constante. En este tema se analizarán exclusivamente las bóvedas simétricas de espesor constante sometidas a la acción de cargas simétricas con relación al eje de revolución.

El cálculo de las bóvedas se realiza con máxima sencillez en el caso de que se pueda admitir que las tensiones se distribuyen uniformemente a través del espesor, o sea que no existe flexión en las paredes de la misma. La teoría de las bóvedas basada en esta suposición se conoce como Teoría Membranal.

Si la bóveda no presenta cambios bruscos en su configuración, ni empotramientos y si no está solicitada por cargas o momentos concentrados, en el cálculo se puede aplicar la Teoría Membranal. En los lugares donde existen cambios bruscos o empotramientos se produce un efecto de flexión que provoca un incremento local de las tensiones conocido como efecto de borde. Se analizará a continuación la Teoría Membranal y posteriormente se analizará el efecto de flexión en el caso de una bóveda cilíndrica.

Consideremos una bóveda simétrica sometida a la acción de una carga simétrica (presión de un gas), tal como se muestra en la Fig. 2.1. Según la Teoría Membranal la bóveda se comporta como una membrana, no existe flexión en las paredes y las tensiones se distribuyen uniformemente a través del espesor. Analicemos un elemento diferencial de superficie de la bóveda (Fig. 2.1). Las tensiones que surgen en las caras de este elemento son principales debido a la simetría de las cargas, que no provocan cortante en las paredes de la bóveda.

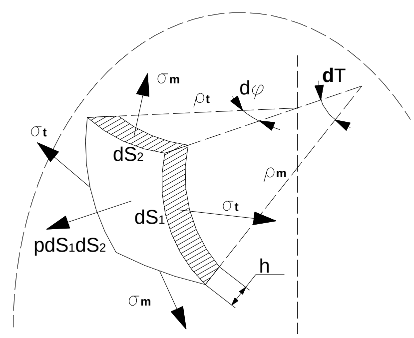


Fig. 2.1 Radios de curvatura y tensiones en los planos tangencial y meridional

En el cálculo de las bóvedas es importante diferenciar correctamente lo que denominaremos plano meridional del plano tangencial o circunferencial. El plano meridional es perpendicular al eje de revolución, el radio de curvatura que se observa en un corte meridional de la bóveda es el radio de curvatura tangencial o circunferencial. Un plano tangencial contiene al eje de revolución y el radio de curvatura que se observa en un corte tangencial es el radio de curvatura meridional.

Vamos a representar los cortes tangencial y meridional del elemento diferencial de superficie de la bóveda mostrada en la Fig. 2.1. Planteando la ecuación de equilibrio en la dirección de la normal n-n a la superficie del elemento separado de la bóveda.

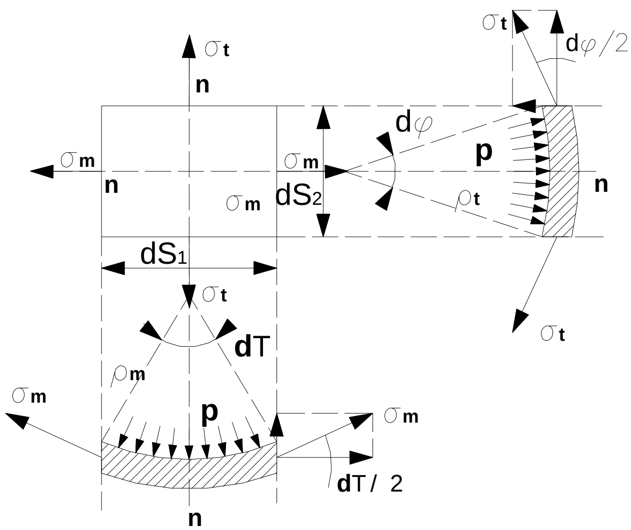


Fig. 2.2 Proyecciones de la bóveda en los planos tangencial y meridional

$$\sum F_{n-n} = 2 \cdot \sigma_t \cdot dS_1 \cdot h \cdot sen\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + 2 \cdot \sigma_m \cdot dS_2 \cdot h \cdot sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) - p \cdot dS_1 \cdot dS_2 = 0$$

Pero: $sen\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2} \quad y \quad sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio:

$$\sigma_t \cdot dS_1 \cdot h \cdot d\varphi + \sigma_m \cdot dS_2 \cdot h \cdot d\theta = p \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

Pero: $dS_1 = \rho_m \cdot d\theta \quad y \quad dS_2 = \rho_t \cdot d\varphi$

Sustituyendo estas en la ecuación de equilibrio se tiene:

$$\frac{\sigma_t \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot h}{\rho_t} + \frac{\sigma_m \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot h}{\rho_m} = p \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

Cancelando finalmente $dS_1 \cdot dS_2$ y ordenando:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h} \tag{2.1}$$

Esta ecuación se conoce como Ecuación de Laplace y nos permite establecer una relación entre las tensiones que surgen en las paredes de la bóveda, las dimensiones de ésta y la presión. La misma no permite calcular la magnitud de σ_m y σ_t pues son dos incógnitas en una sola ecuación, por lo que siempre se hace necesario aplicar el método de las secciones para un corte meridional de la bóveda. Veamos algunos ejemplos.

2.3 Recipiente esférico de paredes delgadas

En el presente epígrafe se obtendrá la expresión de la condición de resistencia usando la tercera y la cuarta hipótesis de resistencia para una bóveda esférica de radio R y espesor h sometida a la acción de una presión interior uniforme p provocada por un gas almacenado en su interior, como la mostrada en la Fig. 2.3. La tensión admisible del material es $[\sigma]_t$.

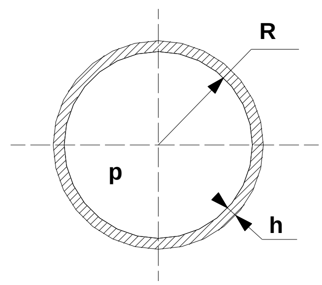


Fig. 2.3 Recipiente Esférico de Paredes Delgadas

Debido a la geometría de la esfera $\rho_t = \rho_m = R$ y por lo tanto debido a su simetría geométrica, evidentemente $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$. Aplicando la ecuación de Laplace:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}$$

De donde: $\sigma = \dfrac{p \cdot R}{2 \cdot h}$

El estado tensional es plano uniforme de tracción:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \quad y \quad \sigma_3 = 0$$

Evaluando la resistencia por la tercera hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t \qquad (2.2)$$

de donde: $\sigma_{eq} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \leq [\sigma]_t$

Según la cuarta hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot R}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot R}{2 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot R}{2 \cdot h}\right)^2} \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \leq [\sigma]_t \qquad (2.3)$$

Para una bóveda esférica las condiciones de resistencia aplicando la tercera y la cuarta hipótesis coinciden.

Esta situación no es así cuando la bóveda contiene un líquido o un sólido en forma de polvo fino. A continuación se obtendrá la distribución de las tensiones σ_t y σ_m y la tensión equivalente a través del contorno de una bóveda esférica de radio R y espesor h que contiene un fluido de peso específico γ, tal como se muestra en la Fig. 2.4. La esfera es de material frágil.

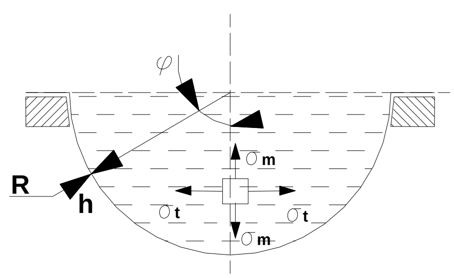


Fig. 2.4 Bóveda esférica que contiene un líquido

Para la esfera: $\rho_t = \rho_m = R$ y como contiene un líquido de peso específico γ, entonces: $p = \gamma \cdot R \cdot \cos\varphi$. Aplicando la ecuación de Laplace:

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{R} = \frac{\gamma \cdot R \cdot \cos\varphi}{h}$$

Apliquemos el método de las secciones por un plano meridional:

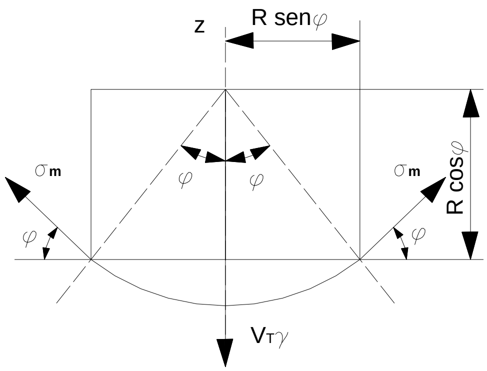


Fig. 2.5 Corte meridional en una bóveda esférica con líquido

El casquete esférico soporta un peso del fluido con un volumen igual al del cilindro de radio $R \cdot sen\varphi$ y altura $R \cdot \cos\varphi$ y el del segmento esférico.

O sea:

$$V_T = V_{cil} + V_{seg\,esfer}$$

$$V_{cil} = \pi \cdot (R \cdot sen\varphi)^2 \cdot R \cdot \cos\varphi = \pi \cdot R^3 \cdot sen^2\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$V_{seg\,esfer} = \pi \cdot R^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \cos^3\varphi \right)$$

Sumando ambos volúmenes:

$$V_T = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(1 - \cos^3\varphi\right)$$

Aplicando ahora $\sum F_z = 0$

$$\sum F_z = \sigma_m \cdot (2 \cdot \pi \cdot R \cdot sen\varphi \cdot h \cdot sen\varphi) - \gamma \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(1 - \cos^3\varphi\right) = 0$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot R^2}{3 \cdot h} \cdot \frac{1 - \cos^3\varphi}{sen^2\varphi} \qquad (2.4)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Laplace y despejando σ_t se obtiene:

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot R^2}{3 \cdot h} \cdot \frac{1 - \cos^3 \varphi}{sen^2 \varphi} \tag{2.5}$$

Construyendo los gráficos de distribución de las tensiones σm y σt.

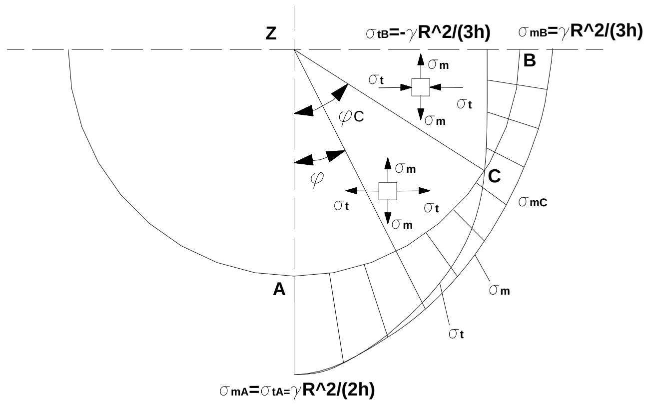


Fig. 2.6 Gráficas de distribución de las tensiones σm y σt a través del contorno de la bóveda

Construyamos el gráfico de σeq aplicando la Teoría de Mohr: $\sigma_{eq} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq [\sigma]_t$. La Teoría de Mohr es válida tanto para materiales dúctiles como frágiles.

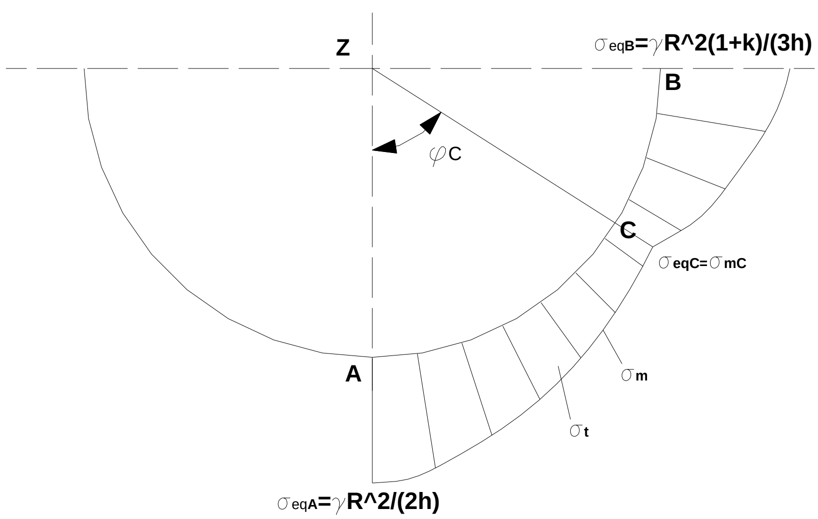


Fig. 2.7 Tensión Equivalente según Mohr

El punto más crítico es el A, ya que para los materiales frágiles: k < 0,5.

$$\sigma_{eq\,A} = \frac{\gamma \cdot R^2}{2 \cdot h} \leq [\sigma]_t \tag{2.6}$$

2.4 Recipiente Cilíndrico de Paredes Delgadas

En este epígrafe se obtendrá la expresión de la condición de resistencia aplicando la tercera y la cuarta hipótesis de resistencia para una bóveda cilíndrica de radio R y espesor h sometida a la acción de una presión interior uniforme p provocada por un gas almacenado en su interior. La tensión admisible del material es $[\sigma]_t$. (Fig. 2.8).

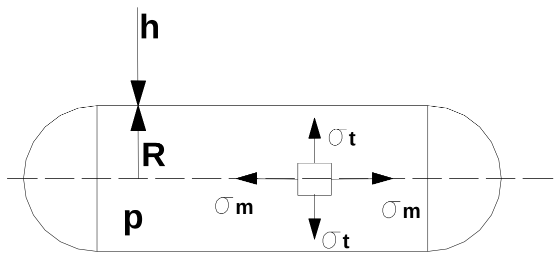


Fig. 2.8 Recipiente cilíndrico de paredes delgadas

En este caso $\rho_t = R$ y $\rho_m = \infty$. Aplicando Laplace:

$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}$ de donde: $\sigma_t = \frac{p \cdot R}{h}$

Apliquemos el método de las secciones dividiendo la bóveda en dos partes por un plano meridional (Fig. 2.9).

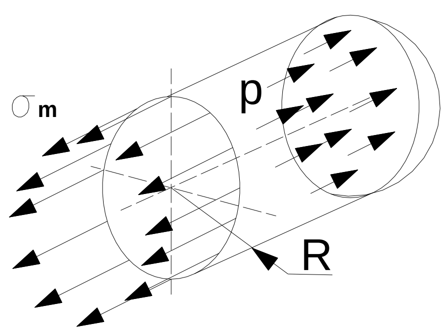


Fig. 2.9 Corte meridional de una bóveda cilíndrica

$$\sum F_z = \sigma_m \cdot (2 \cdot \pi \cdot R) \cdot h - p \cdot (\pi \cdot R^2) = 0$$

$$\sigma_m = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h}$$

El estado tensional es plano. En este caso:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{p \cdot R}{h}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Aplicando la tercera hipótesis:

$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t$ de donde: $\sigma_{eq} = \dfrac{p \cdot R}{h} \leq [\sigma]_t$

Según la cuarta hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot R}{h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot R}{2 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot R}{h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot R}{2 \cdot h}\right)} \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq} = 0{,}86 \cdot \frac{p \cdot R}{h} \leq [\sigma]_t \qquad (2.7)$$

La cuarta hipótesis, como se conoce, es más exacta. Sin embargo la tercera ofrece cierta reserva de resistencia adicional. La tensión equivalente en el recipiente cilíndrico como se aprecia es del orden del doble del recipiente esférico para una misma presión interior.

2.5 Recipiente Cónico de Paredes Delgadas

En el presente epígrafe se abordará el cálculo de las tensiones en un recipiente cónico que contiene un líquido o un sólido en forma de polvo, que es el caso más frecuente de este tipo de recipiente. Se hallará la distribución de las tensiones σ_t y σ_m y la expresión de la condición de resistencia según la tercera hipótesis para un recipiente cónico de altura H, espesor h y ángulo de cono 2α, que se muestra en la Fig. 2.10. El recipiente contiene un líquido de peso específico γ.

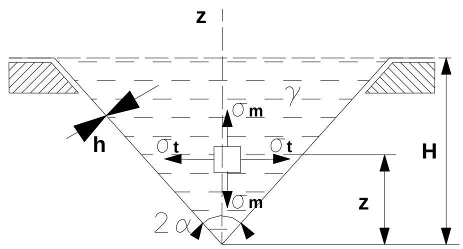


Fig. 2.10 Recipiente cónico de paredes delgadas con líquido

De acuerdo con la geometría del cono:

$$\rho_t = \frac{z \cdot \tan\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{y} \quad \rho_m = \infty$$

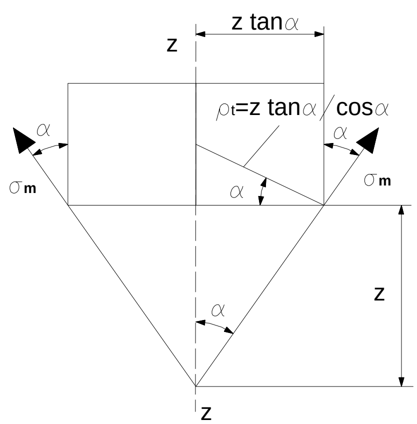


Fig. 2.11 Corte meridional en un recipiente cónico con líquido

Como contiene un fluido de peso específico γ:

$$p = \gamma \cdot (H - z)$$

Aplicando Laplace:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h} \quad \text{se obtiene:} \quad \frac{\sigma_t}{\left(\frac{z \cdot \tan\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \frac{\gamma \cdot (H - z)}{h}$$

Entonces:

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot (H - z) \cdot z \cdot \tan\alpha}{L \cdot \cos\alpha} \tag{2.8}$$

Aplicando el método de las secciones por un plano meridional.

$$\sum F_z = \gamma \cdot (V_{cil} + V_{cono}) - \sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot z \cdot \tan\alpha \cdot h \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\gamma \cdot \left[\pi \cdot (z \cdot \tan\alpha)^2 \cdot (H - z) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (z \cdot \tan\alpha)^2 \right] = \sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot z \cdot \tan\alpha \cdot h \cdot \cos\alpha$$

$$\sigma_m = \frac{z \cdot \tan\alpha \cdot \left(H - \frac{2}{3} \cdot z \right) \cdot \gamma}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha} \tag{2.9}$$

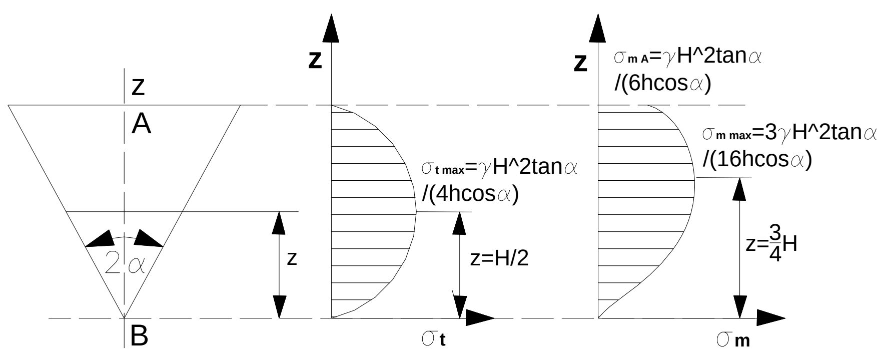


Fig. 2.12 Distribución de las tensiones σm y σt a través de la altura del cono

$$\frac{d\sigma_t}{dz} = \frac{\gamma \cdot H \cdot \tan\alpha - 2 \cdot \gamma \cdot z \cdot \tan\alpha}{h \cdot \cos\alpha} = 0$$, como resultado: $z = \frac{H}{2}$

Para z = 0, $\sigma_{tB} = 0$

Para z = h/2, $\sigma_{t\max} = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot \tan\alpha}{4 \cdot h \cdot \cos\alpha}$

Para z = H, $\sigma_{tA} = 0$

$$\frac{d\sigma_m}{dz} = \frac{\gamma \cdot H \cdot \tan\alpha - \frac{4}{3} \cdot \gamma \cdot z \cdot \tan\alpha}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha} = 0$$, como resultado: $z = \frac{3}{4} \cdot H$

Para z = 0, $\sigma_{mB} = 0$

Para z = ¾ h, $\sigma_{m\max} = \frac{3 \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \tan\alpha}{16 \cdot h \cdot \cos\alpha}$

Para z = H, $\sigma_{mA} = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot \tan\alpha}{6 \cdot h \cdot \cos\alpha}$

Para toda z el estado tensional es plano de tracción, o sea, siempre $\sigma_3 = 0$ y por lo tanto:

$$\sigma_{eq\max} = \sigma_{t\max} = \frac{\gamma \cdot H^2 \cdot \tan\alpha}{4 \cdot h \cdot \cos\alpha} \leq [\sigma]_t \qquad (2.10)$$

2.6 Efecto de borde en las bóvedas de paredes delgadas

Hasta ahora hemos estudiado las bóvedas considerando que en las paredes de las mismas solo surgen tensiones normales de tracción o de compresión y hemos despreciado el efecto de la flexión en la misma. En realidad, si en la bóveda existe empotramiento o cambios bruscos en su configuración surgen momentos flectores que incrementan la magnitud de las tensiones locales en estas zonas.

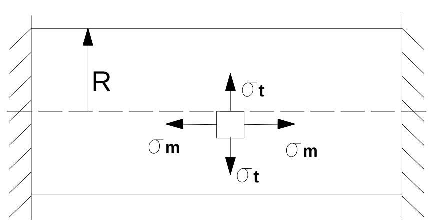


Fig. 2.13 Bóveda cilíndrica empotrada en sus extremos

Para analizar este efecto consideremos una bóveda cilíndrica empotrada en sus extremos tal como se muestra en la Fig. 2.13. Si la bóveda no tuviera restricciones en sus deformaciones, el incremento del radio se puede hallar partiendo de la Ley de Hooke generalizada. O sea:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_m)$$

Como: $\sigma_t = \frac{p \cdot R}{h}$ y $\sigma_m = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h}$

Sustituyendo estas tensiones en la expresión de la Ley de Hooke:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{p \cdot R}{h} - \mu \cdot \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \right) = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \cdot (2 - \mu)$$

Pero por definición:

$$\varepsilon_t = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R + \Delta R) - 2 \cdot \pi \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{\Delta R}{R}$$

Igualando estas dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\Delta R = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot h} \cdot (2 - \mu) \qquad (2.11)$$

En la zona de los empotramientos la bóveda tiene las deformaciones restringidas, de aquí que la pared de la bóveda sufra un pandeo que origina tensiones de flexión. En la Fig. 2.14 se muestra la deformación que sufre la pared en esta zona y la forma del diagrama de momentos flectores.

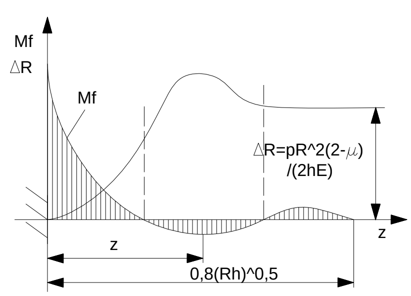


Fig. 2.14 Deformación y momento flector en la bóveda cilíndrica con empotramiento

$$M_f = \frac{p \cdot R \cdot h}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}} \cdot e^{-k \cdot z} \cdot (\cos(k \cdot z) - sen(k \cdot z))$$

Donde:

$$k = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h}{4 \cdot R^2 \cdot D}}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \tag{2.12}$$

Sustituyendo D en k:

$$k = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1 - \mu^2)}{h^2 \cdot R^2}} \tag{2.13}$$

El momento flector máximo se produce en el empotramiento, o sea, para z = 0 (momento flector por unidad de perímetro).

$$M_{f,ax} = \frac{p \cdot R \cdot h}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}} \tag{2.14}$$

La tensión máxima, para $W = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot h^2$

$$\sigma_{f\,max} = \frac{p \cdot R}{h} \cdot \frac{3}{\sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}} \tag{2.15}$$

Para el acero $\mu \cong 0{,}3$, de modo que:

$$\sigma_{f\,max} = 1{,}82 \cdot \frac{p \cdot R}{h} \tag{2.16}$$

O sea, que la tensión de flexión es 1,82 veces la tensión máxima calculada por la Teoría Membranal, por lo que el efecto de borde conduce a un aumento sustancial de las tensiones.

2.7 Recipiente cilíndrico de paredes delgadas de geometría ideal

Un caso muy importante en la práctica es el de un cilindro de radio R unido a un fondo esférico de radio 2R. Esta combinación se utiliza buscando la igualdad de las tensiones entre el cuerpo y el fondo del recipiente.

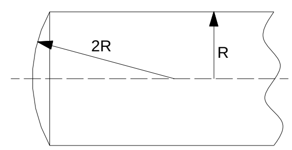


Fig. 2.15 Recipiente cilíndrico de radio R con fondo esférico de radio 2R

El efecto de borde en este caso está determinado por el hecho de que el fondo esférico es más rígido que el cuerpo cilíndrico. Se puede demostrar que en este caso:

$$\sigma_{eq} = 1{,}05 \cdot \frac{p \cdot R}{h} \cdot \sqrt{\frac{R}{h}} \qquad (2.17)$$

Esta tensión es mucho mayor que la calculada por la Teoría Membranal. Si se utiliza una transición tórica entre la bóveda cilíndrica y el fondo esférico (Fig. 2.16) se obtiene que la tensión se reduce en magnitud.

$$\sigma_{\max} = 0{,}145 \cdot \frac{p \cdot R}{h} \cdot \frac{R}{\rho} \qquad (2.18)$$

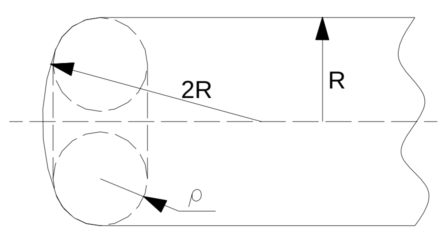


Fig. 2.16 Recipiente cilíndrico de geometría ideal

Donde ρ es el radio de la transición tórica. Observemos, que si en la expresión anterior si se sustituye $\rho = 0{,}145 \cdot R$ se obtiene:

$$\sigma_{\max} = \frac{p \cdot R}{h} \tag{2.19}$$

Y las tensiones en la zona de transición se corresponden con las calculadas según la Teoría Membranal.

Hay que tener presente que las tensiones originadas por la flexión no siempre se consideran como tensiones de cálculo, ya que estas poseen un efecto local muy difícil de precisar en la mayoría de los casos. Se sabe que en el caso de los materiales dúctiles después de alcanzada la fluencia se produce la recuperación del metal y él es capaz de continuar soportando cargas hasta la resistencia máxima, por otro lado como el resto del elemento permanece elástico se generan en los concentradores locales tensiones residuales de compresión que favorecen la resistencia. Las deformaciones plásticas locales no influyen en la capacidad de resistencia de un elemento en condiciones de carga estática

El efecto de borde estudiado si tiene una gran importancia en el caso de materiales frágiles o en el caso de cargas que varían cíclicamente con el tiempo, ya que en el primer caso no existe fluencia y en el segundo caso la avería se produce a tensiones que están por debajo de la fluencia y el proceso de redistribución de tensiones mencionado no se produce.

2.8 Cálculo de tensiones en cilindros de paredes gruesas según las Ecuaciones del Problema de Lamé

Supongamos un cuerpo homogéneo de forma cilíndrica solicitado por una carga exterior simétrica con relación al eje del cilindro y que no cambia a lo largo del mismo. Al aplicar la carga se producirán desplazamientos en los puntos del cilindro. Partiendo de la condición de simetría estos desplazamientos serán radiales (Fig. 2.17). Designemos por u el desplazamiento radial de un punto A cualquiera.

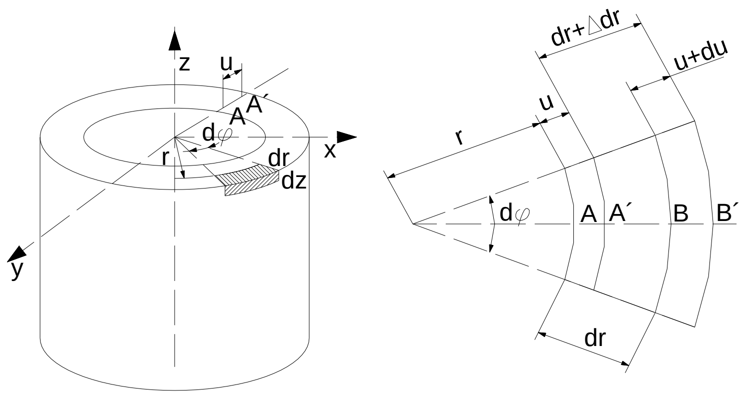


Fig. 2.17 Cilindro de Pared Gruesa

Separemos del cuerpo un elemento diferencial de volumen en forma de cuña de dimensiones dr, rdφ y dz (Fig. 2.17) y analicemos los desplazamientos y deformaciones en las direcciones radial y circunferencial.

Si se analiza el segmento de longitud dr se obtiene que:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Y si se analiza la deformación de la circunferencia que pasa por el punto A tenemos que:

$$\varepsilon_t = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r + u) - 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{u}{r}$$

En la dirección longitudinal bajo la acción de la presión actuando sobre los fondos del cilindro se produce también una variación de la longitud del segmento dz, de manera que:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

El estado tensional que surge en el elemento de la pared será un estado tensional triaxial (Fig. 2.18), en el cual las tensiones normales en las diferentes caras serán tensiones principales ya que debido a la simetría geométrica y de las cargas no surgen tensiones tangenciales.

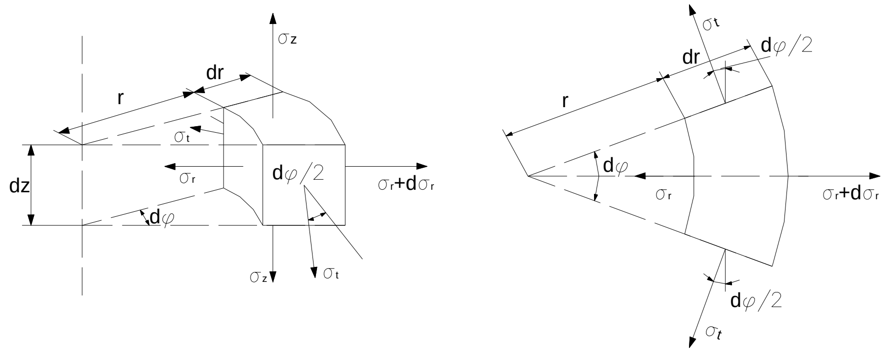


Fig. 2.18 Estado Tensional de la pared de un Cilindro de Pared Gruesa

Proyectando todas las fuerzas en la dirección radial (Fig. 2.18) se tiene:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)\cdot(r + dr)\cdot d\varphi \cdot dz - \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz - 2\cdot\sigma\cdot dr \cdot dz \cdot sen\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Considerando $sen\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cong \frac{d\varphi}{2}$ y despreciando los diferenciales de orden superior. Después de simplificar se tiene que:

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\cdot r - \sigma_t = 0 \qquad (2.20)$$

Expresemos esta relación en función del desplazamiento radial u. Según la Ley de Hooke generalizada.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_r - \mu\cdot(\sigma_t + \sigma_z)\right] \qquad (2.21)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_t - \mu\cdot(\sigma_r + \sigma_z)\right] \qquad (2.22)$$

Resolviendo (2.21) y (2.22) para despejar σ_r y σ_t se obtiene que:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_r + \mu\cdot\varepsilon_t) + \frac{\mu}{1-\mu}\cdot\sigma_z \qquad (2.23)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z \qquad (2.24)$$

Como: $\varepsilon_r = \dfrac{du}{dr}$ y $\varepsilon_t = \dfrac{u}{r}$

Sustituyendo estas expresiones en (2.23) y (2.24) y estas a su vez en (2.20), se obtiene finalmente que:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \qquad (2.25)$$

Que puede ser escrita así:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right] = 0 \qquad (2.26)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(u \cdot r)}{dr}\right] = 0 \qquad (2.27)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como Ecuación Diferencial del Problema de Lamé, científico Francés que en el año 1833 resolvió originalmente el cálculo de tensiones y desplazamientos en cilindros de paredes gruesas.
La solución de esta ecuación es:

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \qquad (2.28)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración que dependen de las condiciones específicas de contorno.

2.9 Determinación de tensiones y desplazamientos en tubos y esferas de pared gruesa

2.9.1 Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior y exterior simultáneamente

Consideremos un cilindro de pared gruesa de radio interior a y radio exterior b sometido a una presión interior p_a y a una presión exterior p_b. (Fig. 2.19).

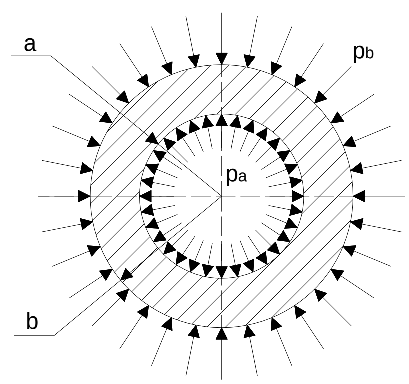


Fig. 2.19 Cilindro de Pared Gruesa sometido a presión interior y exterior

Teniendo en cuenta que:

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} , \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad y \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \tag{2.29}$$

Se tiene que:

$$\varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \tag{2.30}$$

$$\varepsilon_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \tag{2.31}$$

Sustituyendo (2.30) y (2.31) en las expresiones (2.23) y (2.24):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)-C_2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{1}{r^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\sigma_z \tag{2.32}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)+C_2\cdot(1-\mu)\cdot\frac{1}{r^2}\right]+\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\sigma_z \tag{2.33}$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de borde siguientes:

Para r = a $\sigma_r = -p_a$, y

Para r = b $\sigma_r = -p_b$

De donde se obtiene que:

$$C_1 = \frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{p_a\cdot a^2 - p_b\cdot b^2}{b^2-a^2}-\frac{\mu}{E}\cdot\sigma_z \tag{2.34}$$

$$C_2 = \frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{1}{1-\mu}\cdot\frac{(p_a-p_b)\cdot a^2\cdot b^2}{b^2-a^2} \tag{2.35}$$

La magnitud de la tensión σ_z se puede hallar partiendo del equilibrio del tubo en la dirección longitudinal (Fig. 2.20).

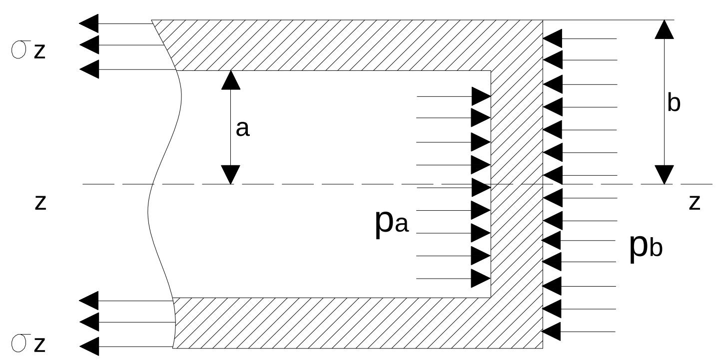


Fig. 2.20 Tensión longitudinal σ_z

$$\sum F_z = \sigma_z \cdot \pi \cdot \left(b^2 - a^2\right) + p_b \cdot \pi \cdot b^2 - p_a \cdot \pi \cdot a^2 = 0 \tag{2.36}$$

$$\sigma_z = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \tag{2.37}$$

Sustituyendo las constantes C_1 y C_2 en las ecuaciones (2.29) y (2.31) y (2.32) se obtiene que:

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 \cdot b^2}{r^2} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \tag{2.38}$$

y:

$$u = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \tag{2.39}$$

Si no existiera la tensión en la dirección longitudinal, o sea, $\sigma_z = 0$.

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \tag{2.40}$$

2.9.2 Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior solamente

Si $p_a = p$ y $p_b = 0$, las expresiones (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40) se reducen a:

$$\sigma_z = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \tag{2.41}$$

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right) \tag{2.42}$$

$$u = \frac{p}{E} \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot b^2}{r} \right] \qquad (2.43)$$

$$u = \frac{p}{E} \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot b^2}{r} \right] \quad (para\ \sigma_z = 0) \qquad (2.44)$$

Analicemos como varían σ_r y σ_t a lo largo del radio (Fig. 2.21).

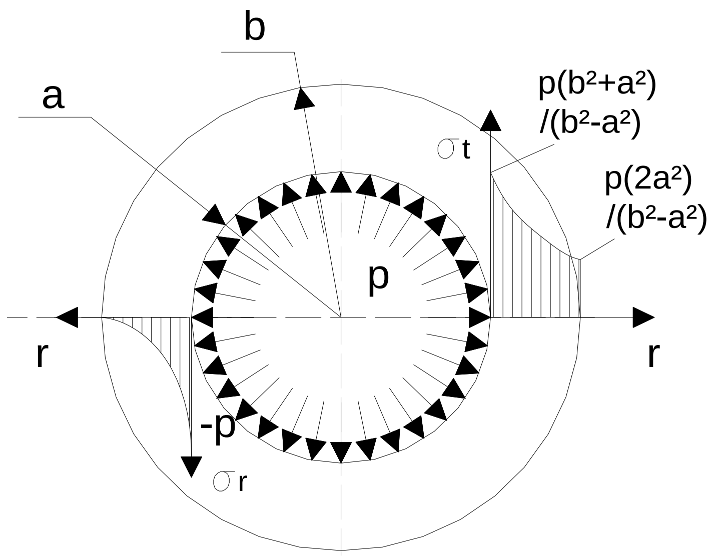


Fig. 2.21 Distribución de tensiones radiales y tangenciales en función del radio en un cilindro con presión interior solamente

Para r = a tenemos:

$$\sigma_{t\,r=a} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{r\,r=a} = -p$$

Para r = b tenemos:

$$\sigma_{t\,r=b} = p \cdot \frac{2 \cdot a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{r\,r=b} = 0$$

Además:

$$\sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

Para r = a (Punto A), se produce el punto más peligros, siendo:

$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \text{ y } \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p$$

La tensión equivalente máxima será:

$$\sigma_{eq}^{máx} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]_t \tag{2.45}$$

2.9.3 Cilindro de pared gruesa sometido a presión exterior solamente

Si $p_a = 0$ y $p_b = p$ las expresiones (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40)) quedan como sigue:

$$\sigma_z = -\frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \tag{2.46}$$

$$\sigma_{\substack{r \\ t}} = -\frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{2.47}$$

$$u = -\frac{p}{E} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot a^2}{r}\right] \tag{2.48}$$

$$u = -\frac{p}{E} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot a^2}{r}\right] \quad (para\ \sigma_z = 0) \tag{2.49}$$

La distribución de σ_t y σ_r a lo largo del radio queda como se muestra en la Fig. 2.22

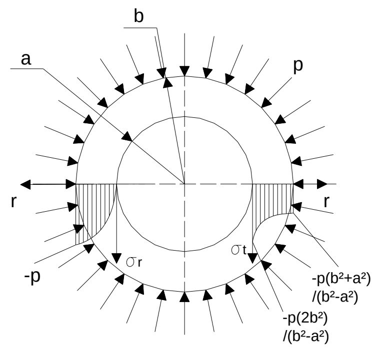


Fig. 2.22 Distribución de tensiones radiales y tangenciales en función del radio en un cilindro con presión exterior solamente

Para r = a tenemos:

$$\sigma_{t\,r=a} = -p\cdot\frac{2\cdot b^2}{b^2-a^2}$$
$$\sigma_{r\,r=a} = 0$$

Para r = b tenemos:

$$\sigma_{t\,r=b} = -p\cdot\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}$$
$$\sigma_{r\,r=b} = -p$$

Además:

$$\sigma_z = -p\cdot\frac{b^2}{b^2-a^2}$$

El punto más crítico sigue siendo el punto A, donde:

$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = \sigma_z = -p\cdot\frac{b^2}{b^2-a^2}\ y\quad \sigma_3 = \sigma_t = -p\cdot\frac{2\cdot b^2}{b^2-a^2}$$

La tensión equivalente máxima será:

$$\sigma_{eq}^{máx} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq}^{máx} = 0 - \left(-p\cdot\frac{2\cdot b^2}{b^2-a^2}\right) = p\cdot\frac{2\cdot b^2}{b^2-a^2} \leq [\sigma]_t \qquad (2.50)$$

2.9.4 Aplicación de las Ecuaciones del Problema de Lamé a los cilindros de paredes delgadas. Cilindro de pared gruesa de espesor muy pequeño

Analicemos el caso de un cilindro de pared gruesa en el cual el espesor se pudiera considerar muy pequeño. O sea: $b = a + \delta \quad donde \quad \delta \to 0$

En este caso la presión interior p que se puede soportar es relativamente pequeña y por lo tanto la tensión radial σ_r que tiene una magnitud igual a –p se puede despreciar, o sea $\sigma_r \cong 0$ y el estado tensional en la pared del tubo será entonces plano con tensiones σ_t y σ_r. Veamos que sucede en este caso con la tensión σ_t. En un tubo de pared gruesa bajo presión interior se tiene que para r = a.

$$\sigma_{t\,r=a} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

Y para r = b:

$$\sigma_{t\,r=b} = p \cdot \frac{2 \cdot a^2}{b^2 - a^2}$$

En este caso $b = a + \delta$, por lo tanto:

$$b^2 - a^2 = (a+\delta)^2 - a^2 = 2 \cdot a \cdot \delta + \overbrace{\delta^2}^{\approx 0} \cong 2 \cdot a \cdot \delta$$

$$b^2 + a^2 = (a+\delta)^2 + a^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot \delta + \overbrace{\delta^2}^{\approx 0} = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot \delta$$

$$b^2 + a^2 = 2 \cdot a \cdot (a+\delta) \cong 2 \cdot a^2$$

Sustituyendo (2.40) y (2.41) en (2.37):

$$\sigma_{t\,r=a} = p \cdot \frac{2 \cdot a^2}{2 \cdot a \cdot \delta} = p \cdot \frac{a}{\delta}$$

Y sustituyendo en (2.38):

$$\sigma_{t\,r=b} = p \cdot \frac{2 \cdot a^2}{2 \cdot a \cdot \delta} = p \cdot \frac{a}{\delta} \tag{2.51}$$

que se corresponde con la tensión longitudinal en las bóvedas cilíndricas.

Como se aprecia, si el espesor del tubo es pequeño, se puede considerar que las tensiones en la dirección de σ_t se distribuyen uniformemente a través del espesor, lo cual es la consideración fundamental de la Teoría Membranal, aplicable en el caso de paredes delgadas. Si se evalúa la tensión en la dirección de σ_z para el caso de paredes delgadas según la ecuación (2.46):

$$\sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

Sustituyendo (3.40)

$$\sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{2 \cdot a \cdot \delta} = \frac{p \cdot a}{2 \cdot \delta} \qquad (2.52)$$

Que se corresponde con la tensión meridional en las bóvedas cilíndricas.

Como conclusión se deduce que la aplicación de la Teoría Membranal al cálculo de las bóvedas cilíndricas es simplemente una aproximación que se puede considerar aceptable, verificada por las ecuaciones de Lamé, pero queda claro también que las ecuaciones exactas para cualquier cuerpo cilíndrico son las ecuaciones del Problema de Lamé.

2.9.5 Cilindro de pared gruesa de espesor infinito. Presión máxima que puede soportar un cilindro de pared gruesa de espesor infinito

Se analizará ahora el caso opuesto al de la sección anterior, es decir, el de un cilindro de pared tan grande que sus dimensiones exteriores se pueden considerar infinitas, o sea, $b \to \infty$. Para un tubo de pared gruesa sometido a presión interior, se tiene que:

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right)$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p \cdot a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{r^2 \mp b^2}{b^2 - a^2}\right)$$

Si $b \to \infty$, el límite obtenido es indeterminado, aplicando entonces L´Hospital:

$$\lim_{b\to\infty} \sigma_{\substack{r\\t}} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{p \cdot a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{r^2 \mp b^2}{b^2 - a^2}\right)\right] = \mp \frac{p \cdot a^2}{r^2}$$

O sea:

$$\sigma_{\substack{r\\t}} = \mp \frac{p \cdot a^2}{r^2} \qquad (2.53)$$

Construyendo los gráficos $\sigma_t = f(r)$ y $\sigma_r = f(r)$ se obtiene que:

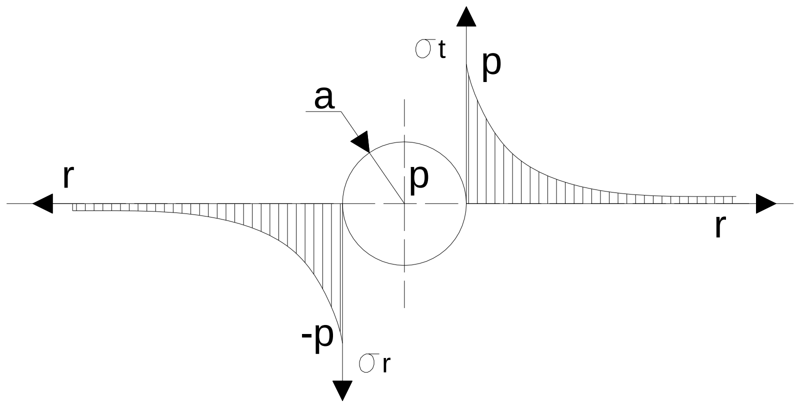


Fig. 2.23 Distribución de tensiones radiales y tangenciales en un cilindro con presión interior solamente de espesor infinito

En este caso $\sigma_1 = \sigma_t = p, \sigma_2 = 0 \; y \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p$

La tensión equivalente por la tercera hipótesis, da como resultado:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t$$

$$\sigma_{eq} = p - (-p) \leq [\sigma]_t$$

$$p_{\max} = \frac{[\sigma]_t}{2} \tag{2.54}$$

Aun cuando el cilindro tenga espesor infinito no se puede alcanzar con un tubo simple una presión mayor que la mitad de la tensión admisible del material del tubo.

Se han ideado soluciones ingenieriles para vencer esta dificultad como son los tubos compuestos y los tubos pretensados.

2.9.6 Aplicación de las Ecuaciones del Problema de Lamé para el cálculo de las tensiones en esferas de pared gruesa

Un Esquema de Análisis exacto para recipientes esféricos sometidos a presión interior es la Esfera de Pared Gruesa, para la cual hay que aplicar las Ecuaciones del Problema de Lamé de la Teoría de la Elasticidad. La aplicación de la Ecuación de Laplace de la Teoría Membranal es una simplificación y aunque es el Esquema de Análisis que aparece en las Normas y en la enorme mayoría dela literatura consultada se requiere ser muy cuidadoso al elegir los factores de seguridad por las impresiciones que se introducen en los cálculos. En la literatura clásica de Mecánica de Materiales no se aborda este Tema, ni siquiera en la literatura de Mecánica de Materiales Avanzada mas moderna disponible (Solecki & Conant 2002) Sólo en el libro de Mecánica de Materiales de (Mott 1996) se introducen en el cálculo de recipientes de paredes gruesa las ecuacuiones para el cálculo de las tensiones principales para las esferas de pared gruesa, que se dan en la Tabla 2.1

Tabla 2.1 Cálculo de las tensiones principales en una esfera de pared gruesa		
Esfera de pared gruesa	Tensión para un radio r cualquiera	Tensión máxima
Plano Circunferencial (Tensiones principales $\sigma_1 = \sigma_2$)	$\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{p \cdot a^3 \left(b^3 + 2r^3\right)}{2r^3 \left(b^3 - a^3\right)}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{p\left(b^3 + 2a^3\right)}{2\left(b^3 - a^3\right)}$ (En la superficie interna)
Dirección Radial (Tensión principal σ_3)	$\sigma_3 = \dfrac{-p \cdot a^3 \left(b^3 - r^3\right)}{r^3 \left(b^3 - a^3\right)}$	$\sigma_3 = -p$ (En la superficie interna)

Los símbolos utilizados son los siguientes: a = radio interno; b = radio externo; r = cualquier radio entre a y b, p = presión interna; uniforme en el interior del recipiente (presión de un gas). Las tensiones son de tracción cuando son positivas y de compresión cuando son negativas.

La evaluación de la resistencia del recipiente se realiza por el Criterio de Resistencia que se considere más adecuado para el caso.

2.10 Análisis de las expresiones empleadas por diferentes autores e instituciones para calcular las tensiones en la determinación de la vida útil por creep en el caso de los tubos sometidos a alta temperatura como son los tubos de los Generadores de Vapor

2.10.1 Estado tensional de la pared del tubo

Uno de los aspectos en los cuales existe una gran diversidad de criterios entre las distintas instituciones y autores que investigan este tipo de avería es en lo referente a la expresión empleada para el cálculo de las tensiones en la pared de los tubos. En la estimación de la vida útil por creep según la norma (ISO/TR 7468-1981 1981), desempeña un papel importante el valor de la tensión de trabajo. A continuación se realizará un análisis de las expresiones utilizadas en la literatura técnica para calcular la tensión en los tubos sometidos a presión interior y calentamiento exterior:

2.10.2 Considerando el tubo como una bóveda de pared delgada

El estado tensional que existe realmente en la pared de los tubos de pared delgada es un estado tensional triaxial en el cual las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot h} ;\ \sigma_2 = \sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot h} ;\ \sigma_3 = \sigma_r = -p \qquad (2.55)$$

La tensión equivalente en la pared se puede obtener considerando el estado tensional triaxial: $\sigma_3 \neq 0$ o Plano: $\sigma_3 = 0$. Esta última consideración es posible asumirla dado el hecho de que la presión que soportan las bóvedas es relativamente pequeña, por su condición de poseer la pared delgada. Esta consideración es aplicada cuando la relación D/h ≥ 20. Para obtenerla se utilizará la Cuarta Hipótesis de Resistencia o de la Energía Potencial Unitaria de Deformación de la Distorsión (Hipótesis de Huber-Mises-Henke).

2.10.3 Bóveda estado tensional triaxial (ETT)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \qquad (2.56)$$

Sustituyendo los valores de las tensiones principales en este caso:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - (-p)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right) + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right) \cdot (p) + (p) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h} \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)} \qquad (2.57)$$

2.10.4 Bóveda estado tensional plano (ETP)

De la ecuación (2.57) para $\sigma_3 = 0$ se tiene que:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)} \qquad (2.58)$$

De donde:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h} \qquad (2.59)$$

2.10.5 Considerando el tubo como un cilindro de pared gruesa aplicando las Ecuaciones del Problema de Lamé

Es necesario aclarar que ésta es la solución exacta para cualquier relación de D/h, sólo que en el caso de las relaciones grandes el problema se puede simplificar utilizando la Teoría Membranal o Ecuación de Laplace, considerando entonces el tubo como de pared delgada. En este caso, considerando: $R_e = \frac{D}{2} + \frac{h}{2}$ y $R_i = \frac{D}{2} - \frac{h}{2}$

$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{\mathrm{Re}^2 + Ri^2}{\mathrm{Re}^2 - Ri^2} = p\,\frac{\left(\frac{D}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}-\frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}-\frac{h}{2}\right)^2} = p \cdot \frac{D^2 + h^2}{2 \cdot D \cdot h} \qquad (2.60)$$

$$\sigma_2 = \sigma_m = \frac{p \cdot Ri^2}{\mathrm{Re}^2 - Ri^2} = p\,\frac{\left(\frac{D}{2}-\frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}-\frac{h}{2}\right)^2} = p \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D \cdot h} \qquad (2.61)$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -p \qquad (2.62)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.56):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left[p \cdot \frac{D^2+h^2}{2 \cdot D \cdot h}\right]^2 + \left[p \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D \cdot h}\right]^2 + [-p]^2 - p^2 \cdot \frac{(D^2+h^2)\cdot(D^2-h^2)}{8 \cdot D^2 \cdot h^2} + p^2 \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D^2 \cdot h^2} + p^2 \cdot \frac{(D+h)^2}{2 \cdot D^2 \cdot h^2}} \qquad (2.63)$$

Se obtiene que:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{(D+h)^2}{D \cdot H} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{\left(\frac{D}{H}+1\right)^2}{\frac{D}{H}} \qquad (2.64)$$

2.10.6 Ecuación propuesta por la Universidad de New South Wales en Australia (UNSW)

En la literatura se utilizan otras ecuaciones para el cálculo de las tensiones de los tubos con vista a su utilización en lo que se refiere al pronóstico de vida útil. Así por ejemplo en la metodología propuesta por la Universidad de New South Wales en Australia (Mayr et al. 2012) para la estimación de la Vida de los tubos de calderas en presencia del fenómeno erosión corrosión se propone la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot K \cdot \frac{p}{\ln[\frac{D+h}{D-h}]} \qquad (2.65)$$

K es una constante que depende la forma en que la pared del tubo es adelgazada por el fenómeno erosión corrosión. Si el adelgazamiento de la pared del tubo es uniforme se propone: *K*=1. Si el adelgazamiento se produce de forma de picaduras locales aisladas *K*>1.

2.10.7 Ecuación propuesta por el Buró Central de Generación Eléctrica (Central Electric Generating Board) de Canadá (CEGB)

En un reporte de Ontario Hidro (OH) en Toronto, Canadá se dan otras metodologías para la estimación de la Vida Útil en presencia del fenómeno de erosión corrosión en las cuales se utilizan otras expresiones de cálculo de las tensiones. Así por ejemplo: En la metodología propuesta por el Buró Central de Generación Eléctrica (Central Electric Generating Board) de Canadá (CEGB) se propone calcular las tensiones por expresión de la tensión circunferencial (σ_t) en las bóvedas multiplicadas por un factor de seguridad de 1,25 o sea:

$$\sigma_t = 1{,}25 \cdot \frac{p \cdot D}{2 \cdot h} \qquad (2.66)$$

Según el criterio autor del presente trabajo este factor de seguridad es excesivo.

2.10.8 Ecuación propuesta por la Central de Servicios Técnicos del Reino Unido (Central Technical Services, CTS)

En la metodología propuesta por la Central de Servicios Técnicos del Reino Unido (Central Technical Services, CTS) se propone simplemente calcular la tensión para la expresión de la tensión circunferencial según Laplace:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot h} \tag{2.67}$$

2.10.9 Comparación entre estas expresiones para el cálculo de las tensiones

En la Fig. 2.24 se muestran graficados los valores de σ en función de la relación D/h para las diferentes expresiones analizadas anteriormente, en el rango en que D/h varía en la práctica, o sea, $0 < D/h \leq 20$. Las gráficas han sido obtenidas para una presión de $p = 1$ MPa. Como se aprecia, la expresión de Lamé para el cálculo de tensiones de cuerpos cilíndricos con presión proporciona valores de la tensión que se encuentran por encima de las restantes expresiones en todo el rango, con excepción de la expresión utilizada por el Buró Central de Generación Eléctrica de Canadá (CEGB) que utiliza la ecuación de las bóvedas para paredes delgadas (Ecuación de Laplace) aumentada en un 25%. De esta comparación queda claro que la ecuación de Lamé ofrece una exactitud adecuada en el cálculo de σ y por lo tanto proveerá una estimación más real de la Vida Útil. Queda claro también que el coeficiente de 1,25 empleado por CEGB es excesivo sobre todo cuando la relación D/h ≥ 5, lo que provocará que la Vida Útil estimada por esta metodología sea inferior a la real.

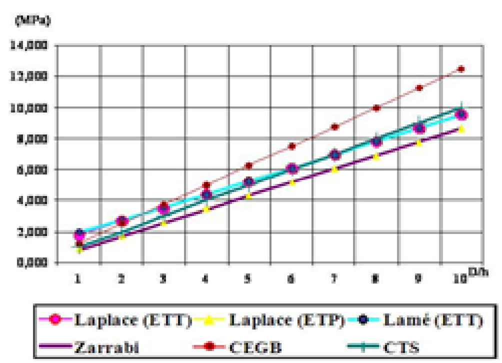


Fig. 2.24 Comparación entre las diferentes expresiones para el cálculo de las tensiones

2.11 Consideración de la diferencia de temperatura entre la superficie interior y exterior de la pared de los tubos en la magnitud de las tensiones

En las metodologías descritas en la literatura para la estimación de la vida útil por creep y otros tipos de falla en tubos de intercambiadores de calor en general, no se toma en cuenta la influencia de la diferencia de la temperatura Δt entre la superficie exterior e interior de la pared en la magnitud de las tensiones. Según Jusmatulin, para el cálculo de la tensión en la pared (ya sea de recipientes o de tubos) tomando en cuenta la diferencia de temperatura Δt entre la superficie exterior e interior de la pared del componente en cuestión, para calentamiento exterior, se tiene que: $\Delta t = t_e - t_i$

Donde: t_i = temperatura interior y t_e = temperatura exterior.

$$\sigma_{eq} = \frac{(\varepsilon+1)^2}{4\cdot\varepsilon}\cdot\sqrt{3\cdot p^2 + 3\cdot p\cdot m\cdot\Delta t + (m_1\cdot\Delta t)^2} \tag{2.68}$$

Donde:

$$m_1 = \frac{E\cdot\alpha\cdot a_1}{1-\mu} \quad a_1 = \frac{2\cdot\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2\cdot\ln\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)} - 1 \quad y \quad \varepsilon = D/h \tag{2.69}$$

P presión interior en el tubo, E Módulo de Elasticidad del material del tubo, α coeficiente de dilatación térmica del material del tubo, μ coeficiente de Poisson del material del tubo, D diámetro medio del tubo, h espesor de la pared del tubo.

Se hace necesario destacar que el hecho de que incorporar la diferencia de temperatura Δt en las expresiones de cálculo de las tensiones, juega un papel importante en el valor de las tensiones calculadas en comparación con el valor cuando no se considera la misma. Por otra parte hay que agregar que es muy importante disponer de datos de las propiedades físicas y mecánicas, tales como: *E*, α y μ en función de la temperatura de trabajo para el material en cuestión

2.12 Cálculo de elementos en forma de placas circulares, rectangulares y elípticas

La tensión máxima $\sigma_{máx}$ y la flecha ω_{max} en el caso de las placas circulares, rectangulares o elípticas se calculan de acuerdo con el esquema de análisis específico dado en la Fig. 2.25 y de acuerdo con el tipo de carga por las ecuaciones dadas en la Tabla 2.1.

Tabla 2.2. Ecuaciones para el cálculo de la tensión máxima y la deflexión máxima en placas

Carga distribuida	Carga concentrada	Momento distribuido
$\sigma_{máx} = K \cdot q \cdot \left(\frac{R}{h}\right)^2$	$\sigma_{máx} = K \cdot \frac{P}{h^2}$	$\sigma_{máx} = K \cdot \frac{M}{h^2}$
$w_{máx} = K_1 \cdot \frac{q \cdot R^4}{E \cdot h^3}$	$w_{máx} = K_1 \cdot \frac{P \cdot r^2}{E \cdot h^3}$	$w_{máx} = K_1 \cdot \frac{M \cdot R^2}{E \cdot h^3}$

Donde:

R – Radio exterior o dimensión (lado o semieje) mayor de la placa (cm)

r - Radio interior o dimensión (lado o semieje) menor de la placa (cm)

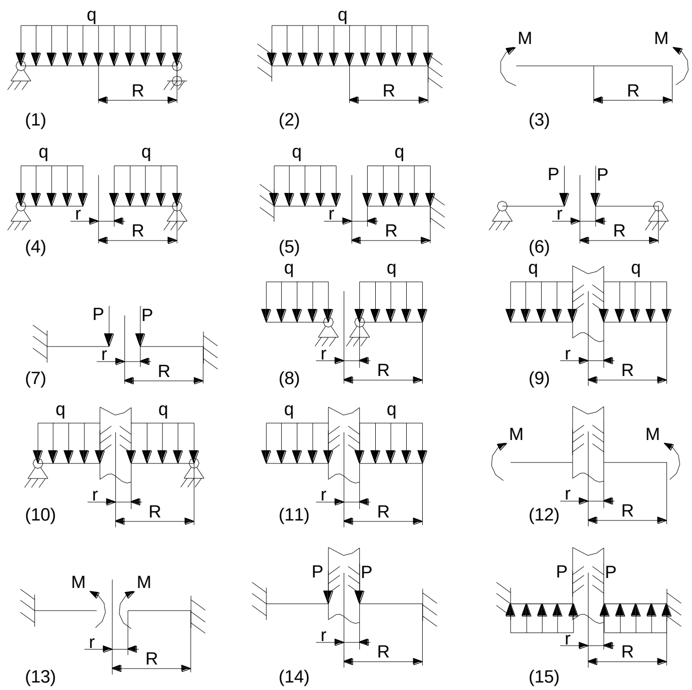
h – Espesor de la placa (cm)

q – Carga uniformemente distribuida por unidad de área (kgf/cm^2)

P – Carga concentrada (kgf)

M – Momento distribuido (kgf cm /cm)

Los coeficientes K y K_1 de estas expresiones se dan para los esquemas de análisis de las Figs. 2.25 y 2.26 en función de la relación R/r en las Tablas 2.2 y 2.3:



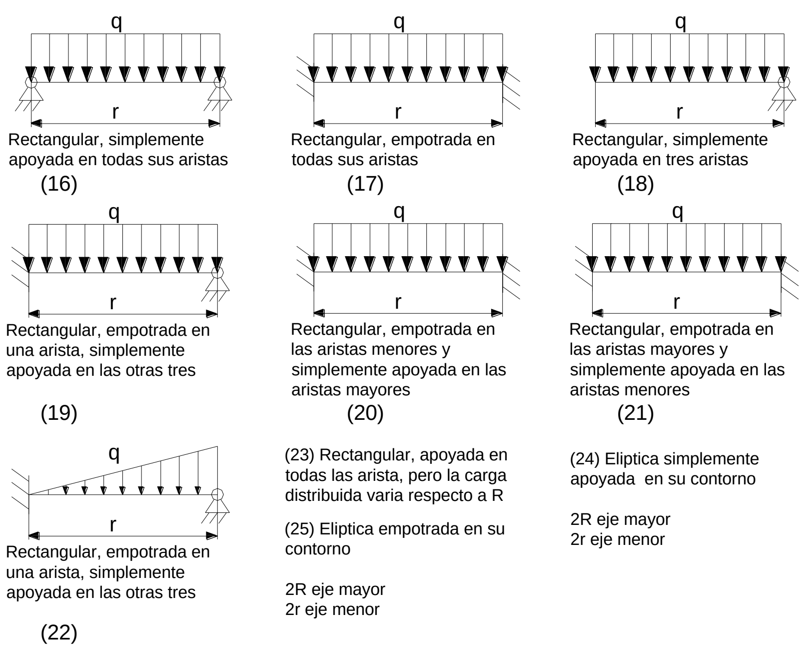


Fig. 2.25 Esquema de cálculo de placas circulares

Fig. 2.25 Esquema de cálculo de placas rectangulares y elípticas

Tabla 2.3. Coeficientes K y K_1 para placas circulares

R/r	1 a 1,25		1,5		2,0		3,0		4,0		5,0	
Caso	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1
1	1,240	0,696	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,750	0,171	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	6,000	4,200	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664	1,880	0,824	2,08	0,830	2,190	0,813
5	0,105	0,0025	0,259	0,0129	0,481	0,057	0,654	0,130	0,708	0,163	0,730	0,176
6	1,100	0,341	1,260	0,519	1,480	0,672	1,880	0,734	2,170	0,724	2,340	0,704
7	0,195	0,0036	0,320	0,024	0,455	0,081	0,670	0,171	1,000	0,218	1,300	0,238
8	0,660	0,202	1,190	0,491	2,040	0,902	3,340	1,220	4,300	1,300	5,100	1,310
9	0,135	0,0023	0,410	0,0183	1,040	0,0938	2,150	0,293	2,990	0,448	3,690	0,594
10	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,740	0,12500	1,210	0,291	1,450	0,417	1,590	0,492
11	0,072	0,00068	0,1825	0,005	0,361	0,023	0,546	0,064	0,627	0,092	0,668	0,112
12	6,865	0,2323	7,448	0,6613	8,136	1,493	8,710	2,555	8,930	3,105	9,036	3,418
13	6,000	0,196	6,000	0,485	6,000	0,847	6,000	0,940	6,000	0,801	6,000	0,658

14	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237	0,703	0,062	0,933	0,092	1,130	0,114
15	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,710	0,0329	1,540	0,110	2,230	0,179	2,800	0,234

Tabla 2.4. Coeficientes K y K_1 para placas rectangulares y elípticas

R/r	1,0		1,5		2,0		3,0		4,0	
Caso	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1
16	0,250	0,0443	0,346	0,0843	0,400	0,1106	0,450	0,1336	0,471	0,1400
17	0,308	0,0138	0,454	0,0240	0,497	0,0277	0,500	0,028	0,500	0,028
18	0,672	0,140	0,768	0,1600	0,792	0,165	0,798	0,166	0,800	0,166
19	-	0,030	-	0,070	-	0,101	-	-	-	-
20	-	0,0209	-	0,0582	-	0,0987	-	0,1276	-	-
21	-	0,0216	-	0,0270	-	0,0284	-	0,0284	-	0,0284
22	-	0,0221	-	0,0421	-	0,0553	-	0,0668	-	0,0700
23	-	0,0220	-	0,0436	-	0,0592	-	0,0772	-	0,0908
24	1,240	0,700	1,920	1,2600	2,260	1,580	2,600	1,880	2,780	2,020
25	0,750	0,171	1,340	0,3040	1,630	0,379	1,840	0,419	1,900	0,431

2.13 Conclusiones Parciales del Capítulo II

1. Se incluyeron en el Capítulo con una profundidad adecuada todos los aspectos vinculados con el cálculo de las tensiones en la pared y la evaluación de la resistencia de las bóvedas, los cilindros y esferas de pared gruesa y las placas.
2. Se incluyó además el cálculo de las tensiones en la pared de los tubos de las calderas tal como lo realizan diferentes instituciones en el mundo y tal como lo propone el Colectivo de Mecánica Aplicada. Se da en los Anexos la Metodología creada por este Colectivo de la UCf que ha sido reconocida como Premio Provincial de Investigación Científica del CITMA en los años 2012 y 2013.

3. Se incluye también en los Anexos un Caso de Estudio sobre la Pérdida de la Estabilidad del Equilibrio de un Generador de Escamas de Hielo del puerto pesquero de Cienfuegos que desde el punto de vista práctico constituye un tipo de bóveda no abordada en el Capitulo, pues se trata de una Bóveda sometida a presión exterior.

Capítulo III: Cálculo de los espesores requeridos en la pared, en los fondos y en los refuerzos de orificios de los recipientes soldados sometidos a presión interior

3.1 Introducción al Capítulo

La soldadura de Recipientes es un elemento muy importante en la Práctica Ingenieril. El cálculo realizado por las Ecuaciones del Capítulo anterior nunca está completo si no se realizan los cálculos de las soldaduras de los recipientes. Aquí se abordarán las ecuaciones Fundamentales descritas en la literatura y en las Normas(Society n.d.) pero se incorporara un Anexo con un Caso Real de Estudio del Cálculo de las Soldaduras en los Gasómetros de Hidrógeno de la Refinería de Petróleo ´Camilo Cienfuegos¨, donde se dan como referencias algunos trabajos del Colectivo de Mecánica Aplicada que fueron reconocidos en el Premio Nacional de la Academia de Ciencias del año 2013 recién entregado al Colectivo y cuyos Métodos de Cálculo fueron Objeto de Estudio en varias Tesis de Doctorado y Tesis de Maestría.

3.2. Características y eficiencia de las costuras soldadas de los recipientes sometidos a presión interior

El cálculo de las tensiones en los recipientes soldados se realiza sobre la base de la ecuación de Laplace, tomando en cuenta las particularidades constructivas del recipiente y la eficiencia φ de los cordones de soldadura presentes en el mismo, o se introducen algunas modificaciones de esta ecuación para tomar en cuenta la presencia de flexión en la pared. Según las Normas (Society n.d.), los cordones de soldadura se dividen por su importancia en cuatro categorías: A, B, C y D. En el esquema de la Fig. 3.1 se indica la categoría de los cordones de acuerdo a su posición relativa en un recipiente.

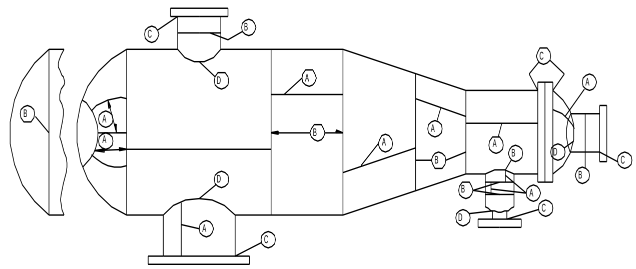


Fig. 3.1 Categoría de los cordones de soldadura de acuerdo a la posición relativa de estos en un recipiente

Categoría A:

Todos los cordones longitudinales en recipientes cilíndricos y las costuras soldadas en recipientes esféricos y fondos semiesféricos, abombados, etc.

Categoría B:

Todos los cordones circunferenciales, incluyendo cámaras de comunicación.

Categoría C:

Uniones soldadas de la conexión de platillos.

Categoría D:

Uniones soldadas de la conexión de las cámaras de comunicación con el cuerpo principal o los fondos del recipiente.

La eficiencia característica de los cordones de soldadura depende del tipo de costura y del grado de inspección que se vaya a establecer durante su realización. La más baja eficiencia se reporta en la literatura para las costuras no radiografiadas y la más alta para aquellos cordones que han sido radiografiados totalmente. Los valores de eficiencia reportados en la literatura difieren de una norma a otra y de uno a otro autor. Algunos valores a modo de orientación se dan en la siguiente tabla

Tabla 3.1 Eficiencia de las Costuras Soldadas					
Tipo No.	Tipo de costura	Limitaciones	Grado de Inspección		
			Radiografiada	Parcialmente Radiografiada	No Radiografiada
1	Uniones a tope soldadas por ambos lados con igual calidad.	Ninguna	1,00	0,85	0,70
2	A tope por un solo lado con pletina de toma de raíz	Ninguna	0,90	0.80	0,65
3	A tope por un solo lado sin pletina de toma de raíz	Costuras circunferenciales solamente de $S < 15$ mm y $D < 600$ mm.	___	___	0,60
4	A solape soldada por ambos lados	Costuras longitudinales de $S < 10$mm Costuras circunferenciales de $S < 15$ mm.	___	___	0,55
5	A solape soldada por un solo lado con costuras de tapón	Costuras circunferenciales de unión con los fondos excepto semiesféricas de	___	___	0,50

		D < 600 mm y S < 12 mm Costura circunferencial del cuerpo con S <15 mm			
6	A solape soldada por un solo lado sin costuras de tapón	Solo para costuras con fondos convexos hacia el lado de las presión S < 15 mm y D < 600 mm	──	──	0,45

Las restricciones del tipo de costura son de acuerdo a las categorías las siguientes:

a) Si el recipiente contiene gases o sustancias letales ya sean líquidos o gases todas las costuras deben ser completamente radiografiadas y los cordones hechos de acero al carbono o de baja aleación, deben ser tratados térmicamente después de soldados.
   1) Todas las costuras de categoría A deben ser del tipo 1
   2) Todas las de categorías B y C deben ser del tipo 1 o 2.
   3) Todas las de categoría D deben garantizar la penetración completa a través del espesor.

b) Cuando el recipiente opera a t < 7 º C y el ensayo de impacto es adecuado.
   1) Categoría A ----- 1
   2) Categoría B ----- 2
   3) Categoría C y D ----- penetración completa.

c) Recipientes no sometidos al fuego con P>3 kgf/cm^2.
   Deben ser radiografiados y tratados térmicamente.
   1) Categoría A ------- 1

2) Categoría B ------- 1 y 2

d) Recipientes sometidos al fuego.

a) 1) Categoría A ------- 1

2) Categoría B ------- 1 y 2 si $S > 15$ mm

3) No se permiten costuras de otras categorías ni tipos

b) Si $S > 15$ mm con acero al carbono o cualquier espesor de baja aleación deben ser tratados térmicamente.

3.3 Cálculo del espesor de la pared del cuerpo de los recipientes sometidos a presión interior

El espesor de la pared del cuerpo de los recipientes soldados que son sometidos a presión interior se calculan en las diferentes normas por expresiones que parten de la Ecuación de Laplace, tomando en cuenta la eficiencia de las costuras soldadas presentes en el mismo o se introducen algunas modificaciones de esta ecuación para tomar en cuenta la presencia del efecto de pared gruesa de Lamé cuando la relación diámetro del recipiente / espesor de la pared es pequeña..

La notación utilizada en las fórmulas de cálculo que se presentarán es la siguiente:

S – espesor mínimo necesario en el cuerpo cm.

P – Presión de trabajo en kgf/cm^2

D_i – Diámetro interior del cuerpo – cm.

$[\sigma]_t$ - Tensión permisible a tracción del material del cuerpo para las condiciones específicas de trabajo en kgf/cm^2.

θ – Ángulo de inclinación del cordón con relación a la generatriz del recipiente.

φ – Eficiencia de la costura soldada que se calcula.

c – Sobre espesor para corrosión (1 ó 2 mm)

A) Recipientes Cilíndricos

La expresión empleada para el cálculo del espesor requerido en la pared depende del tipo de cordón existente en el cuerpo. Si existen diferentes cordones, con diferentes eficiencias, se realiza el cálculo para los diferentes cordones presentes y se toma el mayor espesor obtenido. Se distinguen en general los cordones longitudinales, inclinados o circunferenciales (transversales) con relación a la generatriz.

a) Costuras Longitudinales:

Si S $<$ Di / 4 y p $<$ 0,385 φ $[\sigma]_t$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma]_t - 1{,}2 \cdot p} + c \qquad (3.1)$$

Si S $>$ Di / 4 y p $>$ 0,385 φ $[\sigma]_t$

$$S \geq \frac{D_i}{2}(Z^{172} - 1) + c \qquad (3.2)$$

Donde:

$$z = \frac{\varphi \cdot [\sigma]_t + p}{\varphi \cdot [\sigma]_t - p} \qquad (3.3)$$

b) Costuras Inclinadas:

Si S $<$ Di / 4 y p $>$ 0,385 φ $[\sigma]_t$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i \left(1 - \frac{sen^2\,\theta}{2}\right)}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma]_t - 1{,}2 \cdot p} + c \qquad (3.4)$$

c) Costuras Circunferenciales:

Si S $<$ Di / 4 y p $<$ 1,25 φ $[\sigma]_t$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i}{4 \cdot \varphi \cdot [\sigma]_t + 0{,}8 \cdot p} + c \qquad (3.5)$$

Si S $>$ Di / 4 y p $>$ 1,25 φ $[\sigma]_t$

$$S \geq \frac{D_i}{2}(Z^{172} - 1) + c \qquad (3.6)$$

Donde:

$$z = \frac{p}{\varphi \cdot [\sigma]_t} + 1 \qquad (3.7)$$

B) Recipientes Esféricos

Si S $<$ 0,178 Di y p $<$ 0,665 $\varphi\ [\sigma]_t$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i}{4 \cdot \varphi \cdot [\sigma]_t - 0{,}4 \cdot p} + c \qquad (3.8)$$

En ningún caso se admite un espesor menor que:

$$S_{\min} = \frac{D_i + 100}{1\,000}\ mm \text{ Donde } D_i \text{ en m} \qquad (3.9)$$

Si S $>$ 0,178 Di y p $>$ 0,665 $\varphi\ [\sigma]_t$

$$S \geq \frac{D_i}{2}\,(Y^{173} - 1) + c \qquad (3.10)$$

Donde:

$$Y = \frac{2\,(\varphi \cdot [\sigma]_t + p)}{2\,\varphi \cdot [\sigma]_t - p} \qquad (3.11)$$

C) Recipientes Cónicos

Para α < 30º (Semiángulo sólido del cono)

$$S \geq \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma]_t \cdot \cos\alpha - 1{,}2 \cdot p \cdot \cos\alpha} + c \qquad (3.12)$$

D_i - es el diámetro interior en el punto medio del cono cm.

D) Recipientes Elípticos

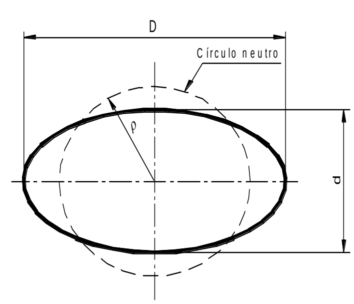


Fig. 3.2 Radio neutro ρ en un recipiente elíptico

La tensión de tracción es:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot S} \tag{3.13}$$

Este tipo de recipiente está sometido a tensiones de tracción y de flexión, producto de la tendencia a tomar la forma circular cilíndrica.

La tensión de flexión es:

$$\sigma_t = \frac{3 \cdot p}{4 \cdot S^2}\left(D^2 - 4 \cdot \rho^2\right) \tag{3.14}$$

El valor de ρ es:

Para 0,7 $\leq \frac{d}{D} < 1$

$$\rho = \frac{D + d}{4} \tag{3.15}$$

Para $\frac{d}{D} < 0{,}7$

$$\rho = \frac{D}{4}\left[\frac{3}{2}\left(1 + \frac{d}{D}\right) - \sqrt{\frac{d}{D}}\right] \tag{3.16}$$

d y D son los diámetros medios en cm.
La tensión resultante y la condición de resistencia es:

$$\sigma_{res} = \sigma_t + \sigma_f \leq \varphi \cdot [\sigma]_t \tag{3.17}$$

Se recomienda colocar las costuras próximas a la intersección del círculo neutro con el cuerpo, ya que con esos puntos la tensión de flexión teóricamente es cero.

3.4 Cálculo de los espesores de los fondos de los recipientes soldados sometidos a presión interior

Casi la totalidad de los recipientes sometidos a presión se construyen de forma cilíndrica, pero en todos los casos se requiere limitar la longitud del cilindro y cerrar sus extremos de alguna manera, y para esto se diseñan distintos tipos de fondos que estarán sometidos a las mismas condiciones de trabajo que el cilindro, pero cuyo comportamiento frente a las tensiones provocadas por la presión interior dependerá en gran medida de la forma geométrica del fondo.

Tipos de fondos: El cierre de los extremos de un recipiente cilíndrico puede construirse de varias formas geométricas, de mayor o menor complejidad constructiva, y de mejor o peor comportamiento frente a las tensiones causadas por la presión. Las formas más usuales son:

- Fondos esféricos
- Fondos elípticos
- Fondos toriesféricos
- Fondos cónicos
- Fondos planos

Cada una de estas formas tiene sus características dimensionales, constructivas y operacionales, por lo que cada una tiene también un campo de aplicación específico en la construcción de recipientes.

Selección del tipo de fondo:

La selección del tipo de fondo que se empleará en un recipiente depende de:

1. Las condiciones de operación: presión, temperatura y fluido.
2. Las dimensiones: diámetro del recipiente, espacio o longitud disponible para ubicar el cilindro.
3. Condiciones de construcción: posibilidades y recursos disponibles.

a) Fondos semiesféricos

Su forma corresponde a la mitad de una esfera. Desde el punto de vista de la utilización racional del material es la forma más ventajosa, pues con menos superficie de laminado encierra un mayor volumen que cualquier otra forma geométrica, y por presentar la distribución de tensiones más uniforme exige menos espesor. Desde el punto de vista constructivo es la forma más difícil. En su fabricación se puede usar el método de explosión (para diámetros generalmente pequeños) o el método de pétalos o sectores de esfera con casquete (generalmente reservado para diámetros grandes). Dada la uniformidad de su radio de curvatura pueden unirse directamente al cuerpo del cilindro, pues no presentan factores de concentración de tensiones (excepto los que se derivan de la construcción soldada).

Debido a sus dos características principales, la dificultad de su construcción y la uniformidad de distribución de tensiones se aplican generalmente en recipientes que justifiquen el gasto constructivo, tales como recipientes de grandes diámetros (que requieren elevado consumo de material), recipientes sometidos a presiones muy elevadas y recipientes que requieran poco peso y espacio.

Estos fondos se calculan como recipientes esféricos.

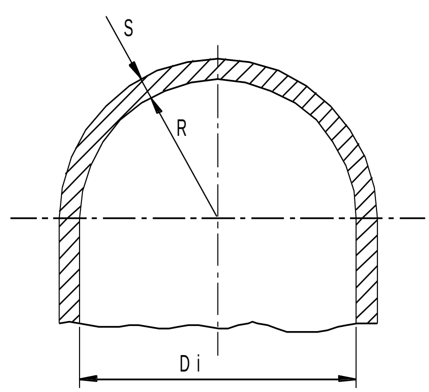


Fig. 3.3 Esquema de fondo semiesférico

Debido a que los fondos pueden construirse por sectores soldados se requiere introducir en la expresión de cálculo la eficiencia de la soldadura φ afectando a la tensión permisible del material. Se tomará φ = 1 para los fondos integrales, y φ < = 1 para los fondos de sectores soldados.

Se introduce además el sobre espesor de corrosión c que se determina en igualdad de condiciones que para el cilindro, las expresiones de cálculo son las mismas que para los recipientes esféricos.

Se puede apreciar que el espesor requerido para un fondo esférico es la mitad del requerido para un cilindro en las mismas condiciones. Para facilitar la unión soldada entre ambos, se hace una preparación de bordes que iguala localmente los espesores.

b) Fondos elipsoidales

Su forma corresponde a la mitad de un elipsoide de revolución, de modo que presenta radios de curvatura diferentes en el centro y en los extremos. La relación usual entre los radios de curvatura r y R en este tipo de fondos es $r = 0{,}25 \,.\, R$, (excentricidad de la elipse $e = 1$) por lo que el cambio de curvatura no es brusco y no constituye un factor de concentración de tensiones muy elevado. Si la excentricidad de la elipse es diferente de 1 el cambio de radio de curvatura es más brusco y se requerirá un espesor mayor para asimilar la concentración de tensiones. El radio de la curvatura central del fondo es $R = D^2 / 4.h$, donde h es la profundidad de la parte curva del fondo. Para el caso más generalizado ($e = 1$) se cumple que $h = D / 4$ y por tanto $R = D$.

Con el objetivo de alejar la zona de radio de curvatura menor (r) de la zona de soldadura a la parte curva del fondo se le añade como parte integral de la misma plancha un sector cilíndrico cuya longitud l está normalizada en función del diámetro y del espesor del fondo. En las normas norteamericana y británica la longitud de este sector cilíndrico generalmente es $l = 50$ mm, y en las normas rusas puede variar entre 25 y 120 mm.

Para diámetros pequeños estos fondos se construyen de una sola pieza, por conformación, por troquelado o por explosión; para diámetros grandes se construyen de dos o más piezas unidas por soldadura. La unión al cuerpo del recipiente puede ser realizada por soldadura o mediante bridas en los casos que requieran desmontaje frecuente.

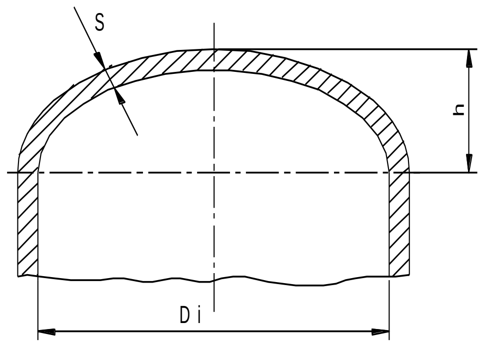


Fig. 3.4 Esquema de fondo elipsoidal

El cálculo del espesor se realiza por las siguientes expresiones:

Si h ≥ $\frac{D_i}{4}$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma] - 0{,}2 \cdot p} + c \tag{3.18}$$

Si $\frac{D_i}{6} \leq h \leq \frac{D_i}{4}$

$$S \geq \frac{p \cdot D_i \cdot k}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma] - 0{,}2 \cdot p} + c \tag{3.19}$$

Donde

$$k = \frac{1}{6}\left[2 + \left(\frac{D}{2 \cdot h}\right)^2\right] \tag{3.20}$$

C) Fondos toriesféricos

La configuración de estos fondos está dada por una zona central esférica con radio de curvatura R ≥ D, pero limitada a R ≤ 1,5. D y por un anillo toroidal de radio r << R. Usualmente r = (10 – 20) %. R pero limitado a un valor mínimo $r_{mín}$ = mín. (0,06. D o 3.

S). Cuando los parámetros de operación no son severos se emplea r = (6 – 10) %. R y cuando son más críticos r = 20%. R

El cambio de radios de curvatura es bastante brusco y constituye un factor de concentración de tensiones considerable, y en el cálculo hay que introducir un factor de multiplicación para el espesor que tenga en cuenta este efecto, por lo que el espesor de estos fondos resultará siempre mayor que el de fondos esféricos y elípticos. Por el mismo motivo estos fondos también requieren el sector cilíndrico adicional en la zona de unión del fondo al cuerpo del recipiente. Los valores de la longitud h son similares a los empleados en fondos elípticos.

Los fondos se construyen de una o más piezas en dependencia del diámetro y el espesor. Se construyen por troquelado o conformación y rebordeado.

Las dimensiones típicas son:

R = D

r = 0,073 R

$r_{\min} = 3 \cdot S$

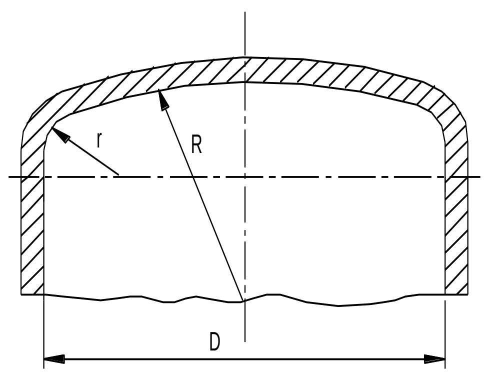


Fig. 3.5 Esquema de fondo toriesférico

El espesor se calcula por las siguientes expresiones:

$$S \geq \frac{p \cdot R \cdot M}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma] - 0,2 \cdot p} + c \qquad (3.21)$$

donde:

$$M = \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{R}{r}}\right) \tag{3.22}$$

D) Fondos cónicos.

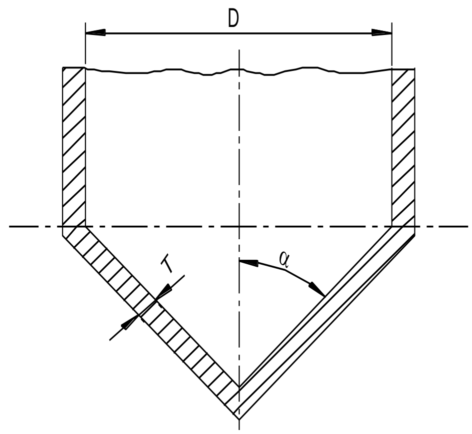


Fig. 3.6 Esquema de fondo cónico

Además de los diversos tipos de fondos curvos mencionados anteriormente, también se aplican en la construcción de recipientes otras formas que son muy útiles y necesarias. Por ejemplo, la forma cónica, que además sirve para construir las transiciones en recipientes o conductos con secciones de diámetros diferentes. Se calculan como recipientes cónicos con $\alpha < 30^\circ$.

En algunos recipientes se requiere o es muy usual emplear fondos cónicos, por ejemplo en silos verticales para almacenar productos viscosos; en otros casos se requiere el uso de transiciones cónicas para recipientes de dos diámetros, tales como intercambiadores o en algunas torres de proceso. Uno o ambos extremos del cono han de unirse al recipiente cilíndrico, y esta unión requiere de los mayores cuidados, pues constituye un importante factor de concentración de tensiones. Por este motivo solo está permitido realizar la unión del cono al cilindro de forma directa cuando los parámetros de operación son muy poco severos o cuando el ángulo total 2 α ≤ 45°. Para el resto de las aplicaciones se utiliza alguna solución constructiva que garantice la resistencia y rigidez de la unión, y esto se logra mediante:

- Un anillo de refuerzo en la zona de la unión, que se coloca en el exterior del cilindro.

- Rebordeando los extremos del cono en la zona de unión al cilindro. (fondos toricónicos)

El radio de curvatura para fondos toricónicos se escoge:

r = (0,15 - 0,20). D para presiones medias.

r = (0,06 - 0,15). D para presiones bajas.

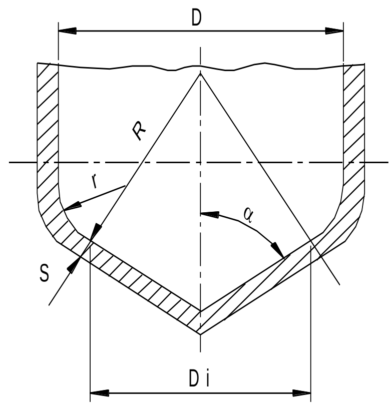


Fig. 3.7 Esquema de fondo toricónicos

E) Fondos toricónicos

Para $\alpha < 30^{\circ}$

$$r \cong \frac{D}{15}$$

$$r \cong 3 \cdot S$$

Para la parte tórica:

$$S \geq \frac{p \cdot R \cdot M}{2 \cdot \varphi \cdot [\sigma] \quad - 0,2 \cdot p} + c \qquad (3.23)$$

Donde:

$$R = \frac{D_i}{2 \cdot \cos\alpha} \qquad (3.24)$$

$$M = \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{R}{r}}\right) \qquad (3.25)$$

Para la parte cónica se calcula como recipiente cónico.

f) Fondos planos

- **Fondos planos soldados**

En algunos recipientes cilíndricos de construcción sencilla se emplean fondos de forma básicamente plana pero que pueden tener modificaciones en la zona de la unión soldada al cilindro. El espesor de este tipo de fondos depende, al igual que otros, del diámetro, la presión de cálculo, la resistencia del material, la eficiencia de la soldadura y de la cantidad y diámetro de las perforaciones que tenga (si las tiene); y a diferencia de otros tipos de fondos depende además de la configuración geométrica de la unión del fondo al cilindro, factor este que define la concentración de tensiones en dicha zona, que se convierte en el área más peligrosa de cualquier fondo plano. Por este motivo, así como por la débil resistencia de la forma plana a la flexión, este tipo de fondo se emplea generalmente en equipos que operan a presiones muy bajas o cuando los diámetros son muy pequeños. Los fondos planos soldados tienen como ventajas la sencillez de su fabricación y la facilidad de su montaje, y como desventajas la utilización limitada a presiones bajas o diámetros pequeños y que requieren espesores mucho mayores que el espesor del cilindro al cual se unen, lo que dificulta la unión soldada y constituye un importante factor de concentración de tensiones.

- **Fondos planos atornillados:**

Cuando se requiere el desmontaje frecuente de los fondos o tapas, para inspección, limpieza, montaje de dispositivos internos o carga y descarga de productos auxiliares, es conveniente emplear el tipo de fondo atornillado que se puede desmontar con facilidad. Por lo general las tapas atornilladas son de diámetro mediano o pequeño y se unen al recipiente mediante bridas.

Los fondos y tapas planos atornillados tienen como ventajas su fácil construcción sin recursos especializados, su facilidad de desmontaje y de maniobra y el poco espacio que ocupan. Su desventaja fundamental es el gran espesor requerido cuando el diámetro y/o la presión no son pequeños.

- **Cálculo de los espesores de los fondos planos circulares**

El espesor mínimo requerido para los fondos planos circulares, no reforzados puede ser calculado por la fórmula:

$$S \geq \frac{D}{2} \cdot \sqrt{\frac{K \cdot p}{[\sigma]_t}} + c \qquad (3.26)$$

K es un coeficiente que se toma de la Teoría de las Placas Planas

Cuando el fondo es unido mediante tornillos creando un momento de apoyo como en las figuras (j) y (k). En este caso el espesor es calculado por las fórmulas.

$$S \geq \frac{D}{2} \sqrt{\frac{K \cdot p}{[\sigma]_t} + 1{,}78 \cdot \frac{G \cdot h}{[\sigma]_t \cdot d^3}} + c \qquad (3.27)$$

en este caso el valor de S hay que calcularlo para dos condiciones de servicio diferentes y se toma el mayor.

Condición 1: Condiciones normales de operación.

p – presión de diseño en kgf/cm^2

$[\sigma]_t$ – a la temperatura de operación en kgf/cm^2

G – P $máx_t$ ·Z – fuerza máxima sobre los tornillos en kgf.

P $máx_t$ – Fuerza máxima sobre un tornillo.

Z – número de tornillos.

Condición 2: Condiciones iniciales.

P = 0

V – Fuerza de pretensión sobre un tornillo.

G = V · Z – fuerza de pretensión sumaria en kgf.

$[\sigma]_t$ – a la temperatura ambiente en kgf/cm^2

- **Cálculo de los espesores de los fondos planos no circulares**

El espesor requerido para el caso de fondos planos no circulares, no reforzados puede ser calculado por la fórmula:

$$S \geq \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Z \cdot K \cdot p}{[\sigma]_t}} + c \qquad (3.28)$$

Donde

$$Z = 3{,}4 - \frac{2{,}4 \cdot d}{D} \qquad (3.29)$$

d – Luz menor del fondo no circular en cm

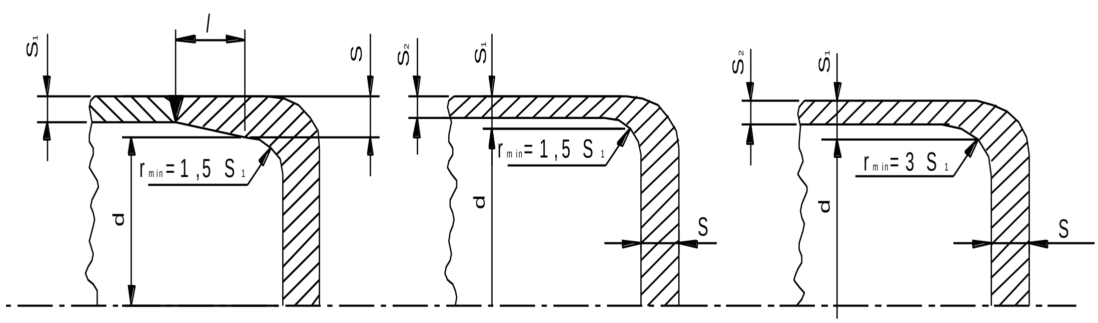
D – Luz mayor del fondo no circular en cm

Excepto cuando el fondo es unido mediante tornillos creando un momento de apoyo como en las figuras (L) y (M). En este caso el espesor es calculado por las fórmulas:

$$S \geq \frac{D}{2} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot K \cdot p}{[\sigma]_t} + 6 \cdot \frac{G \cdot h}{[\sigma]_t \cdot L \cdot d^2}} + c \qquad (3.30)$$

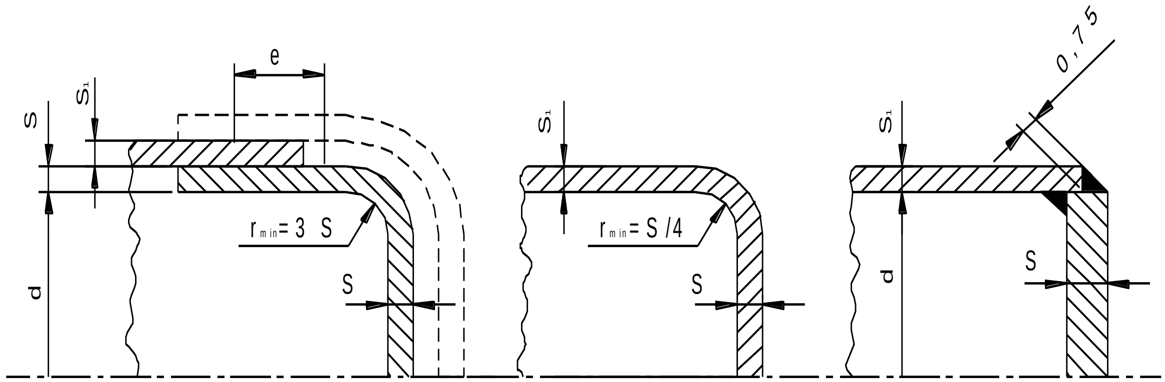
Donde L es el perímetro del fondo en cm. La metodología de cálculo es la misma que en el caso anterior.

Algunas recomendaciones constructivas para los fondos planos se dan en las siguientes figuras:

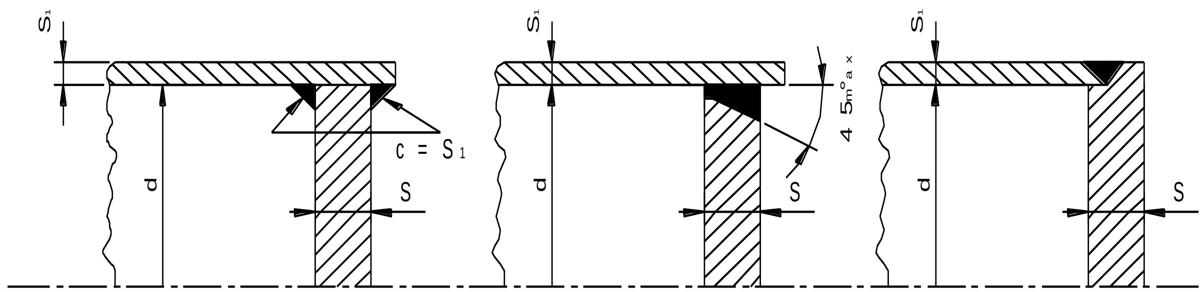


$S_{1\,min} = 2\,S_2$ $\qquad$ $S_{1\,min} = S_2$

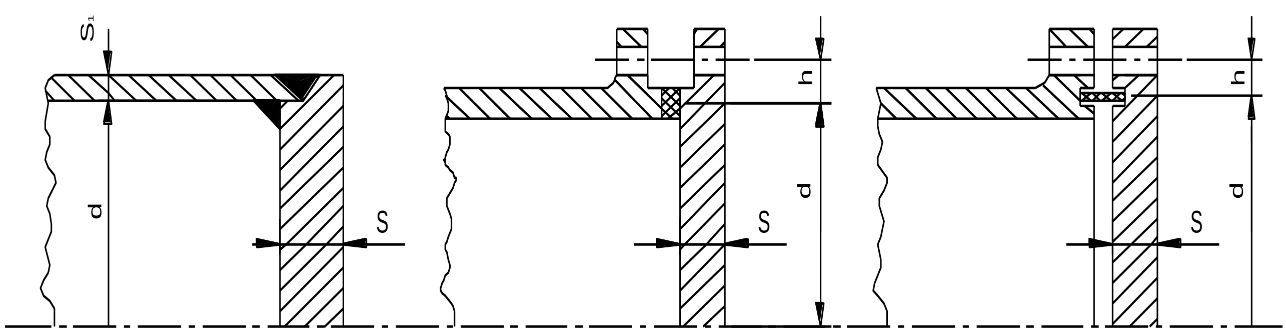
A) **B)** **C)**


e
S
S1
d
rmin= 3 S
S
S1
rmin= S /4
S
0,75
S1
d
S

D) **E)** **F)**


S1
d
c = S1
S
S1
d
45°max
S
S1
d
S

G) **H)** **I)**


S1
d
S
h
d
S
h
d
S

K) **L)** **M)**

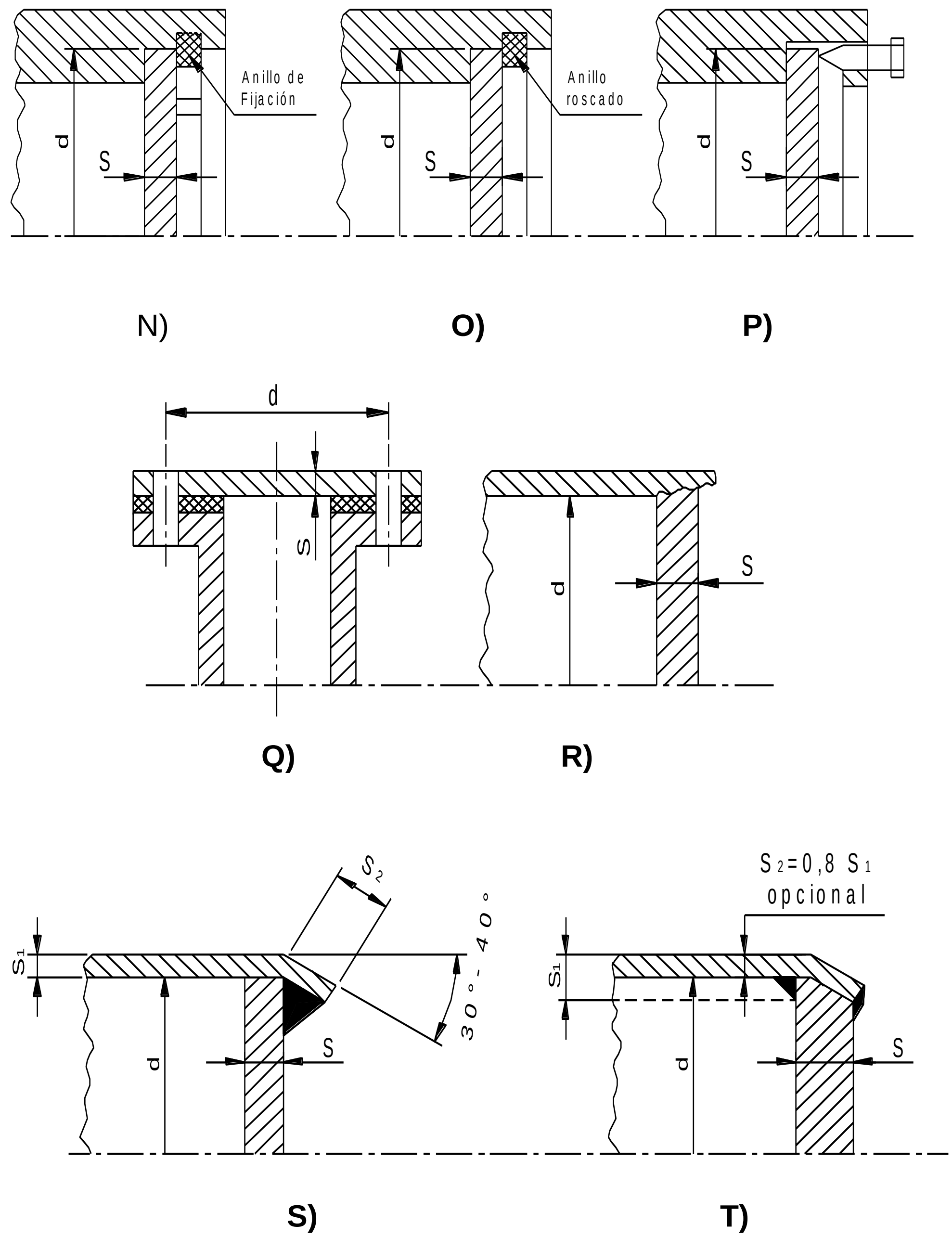


Fig. 3.8 Recomendaciones constructivas para los fondos planos

3.5 Calculo de los espesores de los refuerzo de orificios en paredes cilíndricas y fondos curvos de los recipientes soldados sometidos a presión interior

3.5.1 Necesidad de practicar orificios en los recipientes

Todos los recipientes requieren el uso de conexiones de diferentes dimensiones para variados fines:

- Conexión de tuberías
- Conexión de instrumentos
- Registros de acceso
- Conexión de válvulas de seguridad, etc.

Cada una de estas conexiones implica la necesidad de perforar la pared del recipiente con orificios de distintos diámetros que pueden estar situados en el cuerpo cilíndrico o en los fondos del aparato. Las carcasas cilíndricas se calculan idealmente como si no tuviesen perforaciones. Sin embargo, cada uno de estos orificios debilita mecánicamente la construcción y por tanto se requiere comprobar mediante cálculos si se garantiza la seguridad de trabajo del recipiente.

Para establecer el método de cálculo es necesario conocer la influencia que ejerce la abertura dada en el comportamiento y distribución de las tensiones en la pared del recipiente. Del estudio de la Resistencia de Materiales se conoce que la presencia de orificios en planchas sometidas a tensiones influye en su comportamiento, porque:

- La debilita mecánicamente al restarle área disponible para soportar las tensiones.
- Provoca la concentración de tensiones en los bordes del orificio.

La concentración de tensiones tiene carácter local y el valor de las tensiones máximas depende de las dimensiones del orifico y del espesor de las planchas.

En el caso de orificios practicados en paredes cilíndricas el factor de concentración de tensiones se determina por:

$k_\sigma = 3 + 3{,}45\, d^2 / D.S$

donde:

d es el diámetro del orificio

D es el diámetro del cilindro

S es el espesor del cilindro

El valor de $\sigma_{max} = k_\sigma \cdot \sigma$ será más de tres veces mayor que la tensión en una pared cilíndrica sin orificios.

Debido a la localización concentrada de las tensiones cerca del borde del orificio no tendría sentido técnico ni económico aumentar el espesor de la pared de todo el cilindro para soportar las tensiones, pues se desaprovecharía el material utilizado en todos los puntos del cilindro alejados del orificio. La solución más adecuada es fortalecer la zona cercana al orificio, haciéndola más gruesa o colocando material complementario en el lugar más cercano posible a la zona de tensiones elevadas, o sea, lo más cerca posible del borde del orificio.

3.5.2 Diseño y colocación del refuerzo

Durante muchos años el método más usado para reforzar orificios ha sido la colocación de un anillo soldado alrededor del mismo. Lo usual es construir ese anillo del mismo material y casi siempre del mismo espesor que la pared del recipiente, soldándolo a la misma de modo que la pared cilíndrica y el anillo funcionen como un conjunto sólido.

Para que el anillo de refuerzo pueda absorber una parte de las tensiones existentes en el borde del orificio, tiene que estar sólidamente unido a la pared, con soldaduras correctamente diseñadas y ejecutadas, por lo que las dimensiones de dichas soldaduras están normalizadas.

Para comprobar la hermeticidad de las costuras soldadas los anillos de refuerzo tienen un agujero roscado M10 por el cual se introduce aire a presión (< = 0,5 MPa) y las soldaduras se comprueban con agua jabonosa.

Los anillos de refuerzo pueden instalarse por dentro, por fuera o por ambos lados de la pared, pero es preferible colocarlos por fuera debido a la facilidad de acceso. El diseño más moderno y de mejores características, cuyo uso se ha difundido mucho en los últimos años es el de un casquillo de pared gruesa, que se inserta en el orificio a través de la pared y se une por soldadura de filete al recipiente y por soldadura a tope a la tubería.

El espesor del casquillo se toma $S <= S_1 <= 1,45$ S.

La longitud real del casquillo de pared gruesa que se proyecta hacia el exterior de la pared se denomina l_1, para el cálculo se toma una longitud l_{1c} que se determina como:

$l_{1c} = \text{mín} \{ l_1 \; ; \; 1{,}25 \, [(d + 2.c).(S_1 - c)]^{1/2} \}$

La longitud real del casquillo de pared gruesa que se proyecta hacia el interior de la pared se denomina l_2, pero para el cálculo se toma una longitud l_{2c} que se determina como:

$l_{2c} = \text{mín} \{ l_2 \; ; \; 0{,}5 \, [(d + 2.c).(S_1 - c)]^{1/2} \}$

Las ventajas de este diseño son:

- Permite colocar todo el material de refuerzo exactamente en la misma zona de concentración de tensiones
- En su fabricación no se desaprovecha material
- Facilidad de fabricación a partir de tubos de pared gruesa
- Menor longitud de soldadura
- Es más económico

3.5.3 Orificios no reforzados

En los recipientes que trabajan a presiones bajas, en los cuales las tensiones son pequeñas, o en los orificios de pequeño diámetro, cuyo factor de concentración de tensiones es también pequeño, el valor de las tensiones puede no ser tan elevado como para requerir un refuerzo alrededor del orificio.

El valor de la tensión circunferencial en la pared del cilindro o fondo es directamente proporcional a la presión y al diámetro del recipiente, por lo tanto, cuando alguno de ellos (o ambos) es pequeño el valor de la tensión también lo es, y las tensiones concentradas alrededor de un orificio pueden ser soportadas por el material en exceso de la pared y de la tubuladura, sin requerir material adicional.

El mayor diámetro de orificio que no necesita refuerzo se determina como:

$d_o = 2 \{ [(S - c) / (S_c - 0{,}875)]. [D_c. (S - c)]^{1/2} \}$

Donde

S_c es el espesor requerido por cálculo para la pared perforada

S es el espesor normalizado utilizado

D_c es el diámetro de cálculo. Para cilindros $D_c = D_i$; y para fondos curvos $D_c = D_i^2 / 2H$

En general, tanto en cilindros como en fondos curvos, no se refuerzan orificios de diámetro menor de 50 mm, excepto que:

- Existan variaciones bruscas de presión.
- Existan varios orificios cuya distancia entre centros sea menor que la suma de sus diámetros.
- El orificio se encuentre sobre una soldadura.

Los orificios no deben situarse sobre las soldaduras circunferenciales, y se prohibe situarlos sobre las soldaduras longitudinales.

3.5.4 Orificios situados en los fondos

La parte central de los fondos curvos (sector esférico) funciona en condiciones más favorables que el cilindro desde el punto de vista de la distribución de tensiones, pues como parte de una esfera el material se carga más uniformemente. Por este motivo los fondos curvos admiten, en su parte central, orificios no reforzados de mayor diámetro que los cilindros, de modo que $d <= 0,5. D_i$. No deben practicarse orificios en la zona del rebordeado, excepto orificios de muy pequeño diámetro.

3.5.5 Determinación del área de refuerzo requerida

Al practicar un orificio se elimina de la pared un área de metal F_1. Para que el orificio se considere reforzado tiene que cumplirse que el área de refuerzo $F_2 \geq F_1$.

El material de refuerzo F_2 está contenido en:

- El exceso de espesor de la pared del cilindro o fondo
- El exceso de espesor de la tubuladura
- Metal adicional (anillo o casquillo)

Debido a que las tensiones se concentran en la zona cercana al borde del orificio, todo el material que participa en el refuerzo es aquel que se sitúa en la zona limitada por las siguientes dimensiones:

En la dirección de la pared perforada: 2 (d + 2c)

En la dirección del eje del orificio: 6 (S – c)

De la primera dimensión se deduce que el diámetro del anillo de refuerzo no puede ser menor que aproximadamente el doble del diámetro del orificio.

3.5.6 Método de cálculo

El método propuesto es válido en el caso de cilindros si d / D ≤1; y en el caso de los fondos curvos si d / D ≤ 0,5.

1. Determinar el mayor diámetro de orificio permisible sin refuerzo, por la fórmula planteada antes.
2. Calcular la condición de refuerzo $F_2 \geq F_1$

$[(I_{1c} + S_{2c} + S - S_c - c)(S_1 - S_{1c} - c) + I_{2c}(S_1 - 2c)]X_1 + [I(X_2 \cdot S_{2c} + S - 0{,}875S_c - c)] = (d/2 + c)S_c$ Determinación del ancho de la zona de refuerzo (L):

$L = [D_c(S_{2c} + S - c)]^{1/2} \leq (d + 2c)/2$ Donde:

S_1 y S_{1C} son los espesores real y requerido respectivamente de la tubuladura.

S_2 es el espesor real del anillo de refuerzo (generalmente $S_2 = S$)

S_{2c} es el espesor de cálculo del anillo de refuerzo, que se toma:

$S_2 \geq S_{2c}$ si $L_{real} \leq [D_c (S_{2C} + S - c)]^{1/2}$

$S_2 \geq S_{2c}\, L / L_{real}$ si $L_{real} < [D_c (S_{2C} + S - c)]^{1/2}$

$X_1 = [\sigma_1] / [\sigma]$

$X_2 = [\sigma_2] / [\sigma]$

$[\sigma]$, $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$ son las tensiones permisibles para la carcasa, la tubuladura y el anillo de refuerzo respectivamente.

Si la condición de refuerzo no se cumple será necesario aumentar el área de refuerzo, aumentando el espesor del anillo S_2 o aumentando el espesor de la tubuladura S_1.

3.5.7 Soldadura de los anillos de refuerzo

El cateto mínimo de la soldadura de filete que une el anillo con el recipiente se determina como: $h_c = 0{,}85\,(S - c)$ pero generalmente se toma $h_c = S_2$.

Ejemplo No.1

Se tiene un recipiente cilíndrico de 1 800 mm de diámetro con fondos elípticos construido de un acero cuya $[\sigma]_t$ = 110 MPa mediante soldadura manual, a tope, por ambos lados y con 100% de control radiográfico. La presión interior de operación es 1,818 MPa, la temperatura de operación varía entre –20 y +50°C y el sobre-espesor de corrosión deseado es 0,003 m. El fluido contenido será amoniaco líquido, que provoca en este acero una velocidad de corrosión V_k = 0,1 mm/año. Se requiere instalar una tubuladura de acceso con diámetro d_a = 0,5 m y una longitud externa l_1 = 0,1 m en uno de los fondos. Determine si se requiere reforzar el orificio deseado o no, y en caso afirmativo decidir las dimensiones del refuerzo.

Solución:

- **Determinación de la necesidad o no del refuerzo**

Según el método conocido se halla el espesor requerido para el fondo elíptico sin orificios:

Espesor mínimo de cálculo: S_c = 0,016513 m.

Sobre espesor de corrosión: c = 0,003 m.

Espesor normalizado: S = 0,020 m.

Según el método conocido se halla el espesor requerido para el cilindro de la tubuladura:

Espesor mínimo de cálculo: S_{1c} = 0,004587 m.

Sobre-espesor de corrosión: c = 0,003 m.

Espesor normalizado: S_1 = 0,008 m.

Diámetro de cálculo del fondo:

$D_c = D^2 / (2.\ h)$

Para un fondo elíptico normalizado de excentricidad 2:1 la profundidad del fondo es:

$H = D_i / 4 = 1{,}8 / 4 = 0{,}45$ m.

$D_c = (1{,}8)^2 / (2 \cdot 0{,}45) = 3{,}6$ m.

Cálculo del máximo diámetro de orificio que no requiere refuerzo:

$$d_0 = 2\left\{\left[(S-c)/S_c - 0{,}875\right]\left[D_c(S-c)\right]^{1/2} - c\right\}$$

$= 2\ \{[(0{,}020 - 0{,}003) / 0{,}016513 - 0{,}875][3{,}6 \cdot (0{,}020 - 0{,}003]^{1/2} - 00{,}3\}$

d_0 = 0, 0704 m. El máximo diámetro de orificio permisible sin refuerzo en este caso es 0,0704 m, por lo que el orificio que se pretende realizar requiere un refuerzo.

- **Cálculo de las dimensiones del refuerzo**

Determinación de las longitudes de cálculo de la tubuladura:

- Longitud interior de cálculo l_{1c}:

$l_{1c} = 1{,}25\ [(d_a + 2c)(S_1 - c)]^{1/2}$

$= 1,25\ [(0,5 + 2 \cdot 0,003)(0,008 - 0,003)]^{1/2} = 0,06287$ m.

- Longitud exterior de cálculo l_{2c}:

Considerando que la tubuladura no penetra en el recipiente tomamos $l_{2c} = 0$. El espesor del anillo de refuerzo se toma siempre que sea posible igual al espesor de la pared perforada, para utilizar las planchas del mismo suministro. Se selecciona $S_2 = 0,020$ m.

- Determinación del ancho de cálculo y el ancho real de la zona de refuerzo:

$L_c = D_c \cdot (S_{2c} + S - c)^{1/2} < (d_a + 2c) / 2$

$= 3,6\ (0,020 + 0,020 - 0,003)^{1/2} < (0,5 + 2 \cdot 0,003) / 2$

$= 0,6924 < 0,253$

Dado que el máximo valor admisible es 0,253 se selecciona L = 0,250 m.

- Factores de corrección por resistencia mecánica:

Se calculan relacionando la tensión permisible de la tubuladura y el anillo de refuerzo respectivamente con la tensión permisible de la carcasa o fondo.

$X_1 = [\sigma]_1/[\sigma] = 1$ $X_2 = [\sigma]_2/[\sigma] = 1$

Si la tubuladura y el anillo se construyen del mismo material que el fondo, ambos coeficientes serán iguales a la unidad.

- Comprobación del área disponible para refuerzo contra el área requerida:

$$[(I_{1c} + S_{2c} + S - S_c - c)(S_1 - S_{1c} - c) + I_{2c}(S_1 - 2c)]X_1 + [I(X_2 \cdot S_{2c} + S - 0,875S_c - c)] >= (d_a + 2c)S_c / 2$$

$$[(0,06287 + 0,020 + 0,020 - 0,01653 - 0,003)(0,008 - 0,004587 - 0,003) + 0\ (0,008 - 2 \cdot 0,003)]1 +$$
$$[0,25(1 \cdot 0,020 + 0,020 - 0,875 \cdot 0,016513 - 0.003)] >= (0,5 + 2 \cdot 0,003)0,016513 / 2$$

$$0,005589 > 0,004177m$$

El área disponible para refuerzo, 0,005589 m es mayor que el área requerida, por lo que el orificio está debidamente reforzado si se construye el anillo de refuerzo con las dimensiones calculadas:

Diámetro interior: 0,516 m, Diámetro exterior: 1,016 m, Espesor: 0,020 m

3.6 Conclusiones Parciales del Capítulo III

1. En el Capítulo se dan las recomendaciones de las normas AWS sobre la eficiencia de las costuras soldadas en recipientes de las diferentes categorías.
2. Se dan las expresiones de cálculo de las tensiones en el cuerpo y en los fondos de los recipientes soldados de diferente geometría en el cuerpo y en los fondos.

3. Finalmente se dan las ecuaciones de cálculo de los espesores de los refuerzo de orificios en paredes cilíndricas y fondos curvos de los recipientes soldados sometidos a presión interior y se da un ejemplo de cálculo que ilustra el empleo de estas ecuaciones.
4. Se incorpora el Anexo IV como Caso de Estudio donde se aporta el enfoque del cálculo de las costuras soldadas de los Gasómetros de Hidrógeno de la Refinería de Petróleo ¨Camilo Cienfuegos¨ de la ciudad de Cienfuegos donde se utilizan ecuaciones de cálculo de las soldaduras desarrolladas por el Colectivo de Mecánica Aplicada en varios Trabajos de Diploma, Tesis de Maestría y Tesis de Doctorado y reconocidas con varios Premios Provinciales de Investigación Científica del Colectivo y un Premio Nacional de la academia de Ciencias entregado en el Año 2013.

Capítulo IV Cálculo de Soportes de Equipos

4.1 Introducción al Capítulo

Los Soportes de Equipos constituyen un Tema excesivamente amplio y complejo. Existen sistemas de soportes isostáticos e hiperestáticos donde se emplean apoyos rígidos e incluso apoyos elásticos e incluso un tipo de apoyo muy complejo desde el punto de vista del cálculo como lo es la viga sobre fundación elástica tratado con una profundidad adecuada y de forma muy didáctica para poder ser entendido incluso no sólo por los Ingenieros Mecánicos que profundizan en estos aspectos en dos semestres de la asignatura Resistencia de Materiales, sino por los Ingenieros Químicos, en la referencia (Pisarenko et al. 1989) y sobre el cual en la aplicación de su Esquema de Análisis el Colectivo de Mecánica Aplicada ha defendido varias Tesis de Maestría e incluso varias Tesis de Doctorado. En el presente Capítulo no se aspira a enfrentar estos complejos Esquemas de Análisis sino los esquemas más simples isostáticos e hiperestáticos pero algunos de ellos con aspectos muy novedosos en su aplicación pues, por ejemplo, no se contempla en las Normas de Intercambiadores de Calor la optimización de la posición de sus apoyos como se explicará en este Capítulo. En el caso de apoyos verticales (Columnas) se incluirá en el Capítulo un Aporte del Colectivo de Mecánica Aplicada referente al cálculo de la posible pérdida de la Estabilidad del Equilibrio en miembros cortos e intermedios.

4.2 Teorema de Castigliano

La base de los métodos energéticos de cálculo de los desplazamientos es el Teorema de Castigliano, el cual se enuncia como sigue: “La derivada parcial de la energía potencial de un sistema con respecto a una de las fuerzas del sistema es igual al desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza en su propia dirección”.

Designemos por U la energía potencial acumulada en el volumen del sólido como resultado del trabajo de las fuerzas exteriores, ver Fig. 4.1. Demos ahora a la fuerza P_n

un incremento dP_n. Entonces, la energía potencial del sistema recibirá su correspondiente incremento y será igual a:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \cdot dP_n \tag{4.1}$$

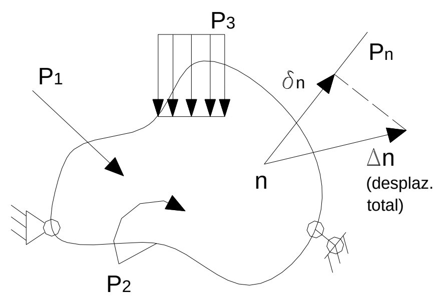


Fig. 4.1 Sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo deformable cualquiera

Variemos ahora el orden de aplicación de las cargas. Apliquemos primero el incremento dP_n. El punto de aplicación de esta fuerza tendrá un desplazamiento muy pequeño, cuya proyección en la dirección de la fuerza dP_n será $d\delta_n$ y el trabajo de la fuerza dP_n, cuya magnitud varió desde 0 a dP_n durante el desplazamiento será:

$$\frac{1}{2} \cdot dP_n \cdot d\delta_n \tag{4.2}$$

Apliquemos ahora todo el sistema de fuerzas exteriores. La energía que se acumula producto de todo el sistema de fuerzas es U, pero ahora está aplicada la fuerza dP_n y ella sufrirá un desplazamiento igual a δ_n con la diferencia con relación a los casos anteriormente analizados que durante este desplazamiento la fuerza dP_n permanece constante y el trabajo realizado por dicha fuerza será:

$$W = dP_n \cdot \delta_n \tag{4.3}$$

Como resultado de invertir el orden de aplicación de las fuerzas tenemos que la energía potencial acumulada en el sistema en esta segunda condición será:

$$\frac{1}{2} \cdot dP_n \cdot d\delta_n + U + dP_n \cdot \delta_n \tag{4.4}$$

Igualando (26) y (29), ya que según el principio de superposición el efecto no depende del orden de aplicación de las cargas. Prescindiendo del término $\frac{1}{2} \cdot dP_n \cdot d\delta_n$ por ser un diferencial de orden superior, se obtiene que:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \tag{4.5}$$

Hay que tener presente que durante la aplicación del Teorema la fuerza P_n y el desplazamiento δ_n son conceptos generalizados, o sea, si P_n es un par de fuerzas el desplazamiento calculado es un desplazamiento angular.
Veamos algunos ejemplos de aplicación de este Teorema.

Ejemplo No. 1
Determinar por el Teorema de Castigliano el ángulo de giro del extremo derecho de la barra solicitada por el momento torsor M.

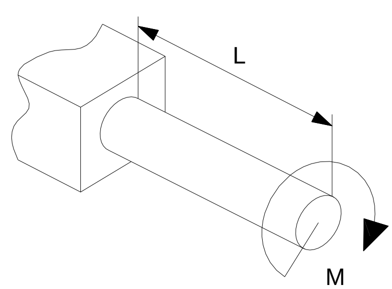


Fig. 4.2 Barra de sección circular empotrada y sometida a la acción de un momento torsor en el otro extremo

Solución:

La energía potencial de la barra en el caso de la torsión es:

$$U = \int_l \frac{M_t^2 \cdot dz}{2 \cdot G \cdot I_t}$$

Puesto que en este caso $M_t = M$ y la rigidez de la barra es constante (GI_t).

$$U = \frac{M^2}{2 \cdot G \cdot I_t} \cdot \int_l dz = \frac{M^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_t}$$

El ángulo de giro del extremo de la barra será:

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_t}$$

Lo cual coincide con la conocida expresión para calcular el ángulo de giro en la torsión.

Ejemplo No. 2

Para la armadura de la Fig. 4.3 calcule el desplazamiento vertical del punto B.

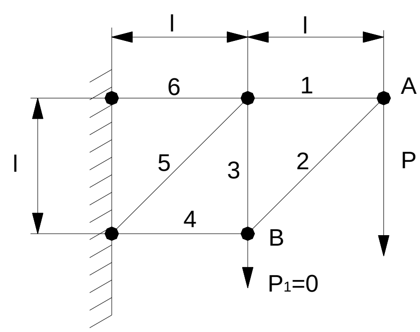


Fig. 4.3 Armadura sometida a una carga concentrada en el nudo A

Solución:

El Teorema de Castigliano permite calcular el desplazamiento del punto de aplicación de una fuerza de un sistema en su propia dirección. En este caso en el punto B no tenemos ninguna fuerza vertical aplicada. Para poder resolver el problema tendremos que colocar una fuerza ficticia $P_1 = 0$ en el punto B y en dirección vertical y se calculan las fuerzas internas en las barras considerando la presencia de P y de P_1. La energía de cada barra será igual a:

$$U_i = \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E \cdot A}$$

Todas las barras poseen la misma sección transversal y son del mismo material.

i	N_i	l_i	U_i
1	P	l	$P^2 \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$
2	$-\sqrt{2} \cdot P$	$\sqrt{2} \cdot l$	$2 \cdot \sqrt{2} \cdot P^2 \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$
3	$P_1 + P$	l	$(P_1^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P + P^2) \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$
4	$-P$	l	$P^2 \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$
5	$-\sqrt{2} \cdot (P_1 + P)$	$\sqrt{2} \cdot l$	$2 \cdot \sqrt{2} \cdot (P_1^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P + P^2) \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$
6	$2 \cdot P + P_1$	l	$(P_1^2 + 4 \cdot P_1 \cdot P + 4 \cdot P^2) \cdot l / (2 \cdot E \cdot A)$

$$U_T = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{P^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \left(7 + 4 \cdot \sqrt{2}\right) + \frac{P_1^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \left(2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) + \frac{P \cdot P_1 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \left(6 + 4 \cdot \sqrt{2}\right)$$

El desplazamiento vertical se hallará derivando esta energía con respecto a P_1.

$$\delta_{VB} = \frac{\partial U_T}{\partial P} = \frac{P_1 \cdot l}{E \cdot A} \cdot \left(2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) + \frac{P \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \left(6 + 4 \cdot \sqrt{2}\right)$$

Pero como realmente la fuerza P_1 es nula, entonces:

$$\delta_{VB} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \cdot \left(6 + 4 \cdot \sqrt{2}\right)$$

El Teorema de Castigliano como se aprecia es particularmente útil y de muy sencilla aplicación para la determinación de desplazamientos en armaduras en las cuales como la fuerza interna es constante a lo largo de la longitud de las barras resulta muy simple el cálculo de la energía total del sistema.

4.3 Método de Mohr

Ya se ha visto que la dificultad del Teorema de Castigliano es que para calcular el desplazamiento en algún punto donde no exista fuerza aplicada es necesario colocar una fuerza ficticia de magnitud cero y obtener la energía del sistema en función de las cargas aplicadas y de la fuerza ficticia, la solución de esta dificultad la desarrolló Mohr.

Diferenciando la expresión de la energía respecto a la fuerza ficticia determinamos el desplazamiento de su punto de aplicación en su propia dirección. Ahora solo es necesario recordar que la fuerza ficticia es igual a cero. De esta forma se determina el desplazamiento de un punto cualquiera de un sistema, aun cuando no tenga fuerza aplicada dicho punto.

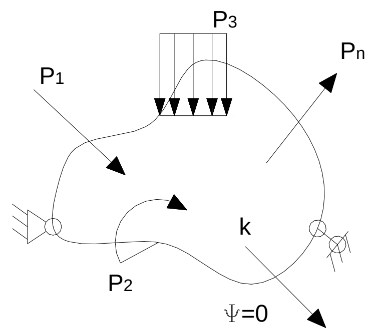


Fig. 4.4 Sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo deformable cualquiera al cual se le ha añadido una fuerza ficticia de magnitud cero

Supongamos que se quiere calcular el desplazamiento del punto k donde no existe fuerza aplicada. Para ello colocamos una fuerza ficticia ϕ=0 y hallamos las acciones interiores del sistema en función del sistema de cargas P y en función de ϕ. O sea:

$$M_t = M_{t\,P} + M_{t\,\phi}$$

$$M_x = M_{x\,P} + M_{x\,\phi}$$

$$M_y = M_{y\,P} + M_{y\,\phi}$$

$$N = N_P + N_\phi \qquad (4.6)$$

$$Q_x = Q_{x\,P} + Q_{x\,\phi}$$

$$Q_y = Q_{y\,P} + Q_{y\,\phi}$$

Las fuerzas internas provocadas por la fuerza ϕ son proporcionales a su magnitud. O sea, si se duplica la fuerza ϕ se duplican las acciones interiores que ella provoca. De aquí que las expresiones (4.6) se pueden escribir en función de las acciones interiores provocadas por una fuerza unitaria en la posición y dirección de la fuerza ϕ, multiplicada por el valor de la fuerza ϕ, o sea:

$$M_t = M_{t\,P} + M_{t1} \cdot \phi$$

$$M_x = M_{x\,P} + M_{x\,1} \cdot \phi$$

$$M_y = M_{y\,P} + M_{y\,1} \cdot \phi$$

$$N = N_P + N_1 \cdot \phi \tag{4.7}$$

$$Q_x = Q_{x\,P} + Q_{x\,1} \cdot \phi$$

$$Q_y = Q_{y\,P} + Q_{y\,1} \cdot \phi$$

Veamos cómo se transforma cada uno de los sumandos de la expresión de la energía potencial para el caso general. Analicemos por ejemplo el sumando correspondiente al momento torsor.

$$\int_l \frac{M_t^2 \cdot dz}{2 \cdot G \cdot I_t} = \int_l \frac{\left(M_{t\,P} + M_{t\,1} \cdot \phi\right)^2 \cdot dz}{2 \cdot G \cdot I_t} \tag{4.8}$$

De la misma forma se podrían transformar cada una de las integrales y obtendríamos expresiones similares para cada sumando.

Para obtener el desplazamiento sería necesario derivar la expresión así transformada de la energía potencial para el caso general de solicitación con respecto a la fuerza ϕ y suponer después que ϕ=0.

Realicemos este proceso para cada uno cualquiera de los sumandos, por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\int_l \frac{\left(M_{x\,P} + M_{x\,1} \cdot \phi\right)^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x}\right] = \int_l \frac{2 \cdot \left(M_{x\,P} + M_{x\,1} \cdot \phi\right) \cdot M_{x\,1} \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x}\Bigg|_{\phi=0} = \int_l \frac{M_{x\,P} \cdot M_{x\,1} \cdot dz}{E \cdot I_x} \tag{4.9}$$

De donde generalizando este resultado para los restantes términos de la expresión de la energía potencial para el caso general de solicitación se tiene que:

$$\delta_k = \int_l \frac{M_{tP} \cdot M_{t1} \cdot dz}{G \cdot I_t} + \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot dz}{E \cdot I_x} + \int_l \frac{M_{yP} \cdot M_{y1} \cdot dz}{E \cdot I_y} + \int_l \frac{N_P \cdot N_1 \cdot dz}{E \cdot A} + + k_x \cdot \int_l \frac{Q_{xP} \cdot Q_{x1} \cdot dz}{G \cdot A} + k_y \cdot \int_l \frac{Q_{yP} \cdot Q_{y1} \cdot dz}{G \cdot A} \tag{4.10}$$

Estas integrales se conocen como Integrales de Mohr y permiten calcular el desplazamiento en un punto cualquiera y en cualquier dirección independientemente de que exista una fuerza aplicada en ese punto o no. Para ello es necesario hallar las acciones interiores provocadas por la carga externa P en las diferentes secciones de la barra en función de z y las acciones interiores provocadas por una fuerza unitaria, colocada en un punto y en la dirección donde se desea calcular el desplazamiento del punto. No todas las integrales tienen el mismo peso relativo en el resultado final. En presencia de flexión o de torsión los desplazamientos provocados por las fuerzas normales y fuerzas de cortante son inconmensurablemente más pequeñas y se pueden despreciar.

El método de las Integrales de Mohr es muy útil en el caso de barras curvas done no existen otros métodos para el cálculo de los desplazamientos en este tipo de barras y la aplicación directa del Teorema de Castigliano se complica.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este método.

Ejemplo No. 3.

Determine el desplazamiento vertical del punto A de la viga mostrada en la Fig. 4.5 utilizando el Método de Mohr.

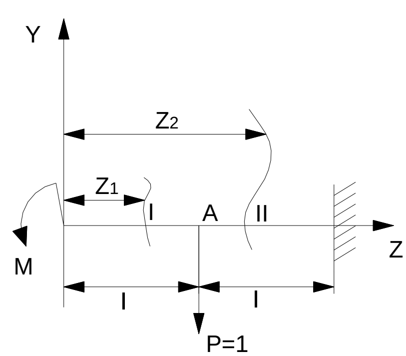


Fig. 4.5 Viga recta empotrada para ilustrar la aplicación del Método de Mohr

Solución:

La barra está sometida a flexión. Para calcular el desplazamiento del punto A es necesario resolver la siguiente integral:

$$\delta_{yA} = \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot dz}{E \cdot I_x}$$

Hallemos las acciones interiores de la carga externa y de la fuerza unitaria.

Tramo I: $M_{xP} = M, \quad M_{x1} = 0$

Tramo II: $M_{xP} = M, \quad M_{x1} = 1 \cdot (z_2 - l)$

$$\delta_{vA} = \int_0^l \frac{M \cdot 0 \cdot dz_1}{E \cdot I_x} + \int_i^{2l} \frac{M \cdot (z_2 - l) \cdot dz_2}{E \cdot I_x} = \frac{M}{E \cdot I_x \cdot \left[\int_l^{2l} z_2 \cdot dz_2 - \int_l^{2l} l \cdot dz_2 - \right]}$$

$$\delta_{vA} = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

Ejemplo No. 4

Determine el desplazamiento lineal resultante y el desplazamiento angular del punto A de las barra curva mostrada en la Fig. 12 si la rigidez de la misma es constante en toda su longitud.

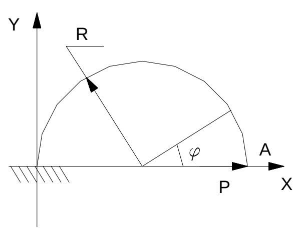


Fig. 4.6 Barra curva empotrada para ilustrar la aplicación del Método de Mohr

Solución:

Hallemos la expresión del momento flector provocado por la carga externa y por las fuerzas unitarias colocadas en el punto A en las direcciones donde se desea calcular los desplazamientos.

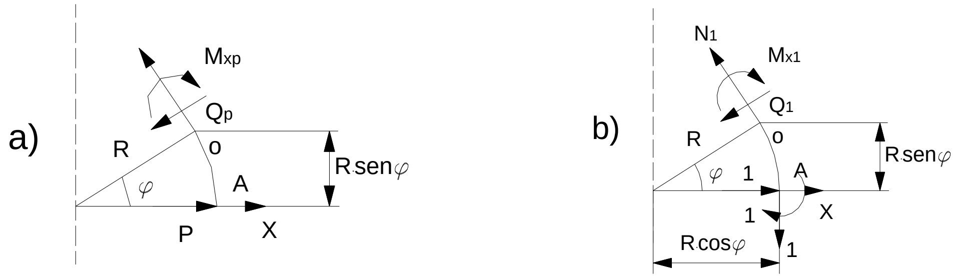


Fig. 4.7 Cálculo de los desplazamientos en una barra curva

$$\sum M_o = M_{xP} - P \cdot R \cdot sen\varphi = 0$$
$$M_{xP} = P \cdot R \cdot sen\varphi$$

Para la fuerza unitaria horizontal (Fig. 4.7 a)

$$\sum M_o = M_{x1} - 1 \cdot R \cdot sen\varphi = 0$$
$$M_{x1} = R \cdot sen\varphi$$

$$\delta_{HA} = \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot dz}{E \cdot I_x}$$ Pero dz = R dφ

$$\delta_{HA} = \int_0^{\pi} \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot R \cdot d\varphi}{E \cdot I_x} = \frac{R}{E \cdot I_x} \cdot \int_o^{\pi} P \cdot R \cdot sen\varphi \cdot R \cdot sen\varphi \cdot d\varphi = \frac{P \cdot R^3}{E \cdot I_x} \cdot \int_0^{\pi} sen^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$\delta_{HA} = \frac{\pi}{2} \frac{P \cdot R^3}{E \cdot I_x}$$

En la Tabla 5 página 193 de Feodosiev aparecen las soluciones para un grupo de integrales comunes. Para la fuerza unitaria vertical (Fig. 4.7 b).

$$\sum M_o = M_{x1} + 1 \cdot (R - R \cdot \cos\varphi) = 0$$

$$M_{x1} = -R \cdot (1 - \cos\varphi)$$

$$\delta_{VA} = \int_0^{\pi} \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot R \cdot d\varphi}{E \cdot I_x} = \frac{R}{E \cdot I_x} \cdot \int_o^{\pi} P \cdot R \cdot sen\varphi \cdot (-R \cdot (1 - \cos\varphi)) \cdot d\varphi$$

$$\delta_{VA} = \frac{-P \cdot R^3}{E \cdot I_x} \cdot \int_o^{\pi} (1 - \cos\varphi) \cdot sen\varphi \cdot d\varphi = -\frac{2 \cdot P \cdot R^3}{E \cdot I_x}$$

El signo menos indica que el desplazamiento es contrario al sentido de la fuerza unitaria vertical.

El desplazamiento lineal resultante será:

$$\delta_A = \sqrt{\delta_{VA}^2 + \delta_{HA}^2} = \sqrt{\left(\frac{-2 \cdot P \cdot R^3}{E \cdot I_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{P \cdot R^3}{E \cdot I_x}\right)^2}$$

$$\delta_A = \frac{P \cdot R^3}{E \cdot I_x} \cdot \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Para el momento unitario (Fig. 4.7 b) se tiene:

$$\sum M_o = M_{x1} - 1 = 0$$

$$M_{x1} = 1$$

$$\delta_{\varphi A} = \int_0^\pi \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot R \cdot d\varphi}{E \cdot I_x} = \frac{R}{E \cdot I_x} \int_0^\pi P \cdot R \cdot sen\varphi \cdot 1 \cdot d\varphi = \frac{P \cdot R^2}{E \cdot I_x} \cdot \int_0^\pi sen\varphi \cdot d\varphi$$

$$\delta_{\varphi A} = \frac{2 \cdot P \cdot R^3}{E \cdot I_x}$$

4.4 Regla de Vereschaguin

El método de Mohr tiene como inconveniente fundamental la necesidad de obtener las expresiones analíticas de las funciones correspondientes a las acciones interiores provocadas por la carga externa y por la fuerza unitaria y luego resolver las integrales. Esta incomodidad se agrava cuando se trata de la determinación de los desplazamientos en una barra de muchos tramos, sin embargo, si la barra está compuesta por tramos rectos, cada uno de los cuales es de sección constante, la operación de integración se puede simplificar. Este método de integración se conoce como Regla de Vereschaguin.

La regla o método de Vereschaguin se fundamenta en el hecho de que las acciones interiores provocadas por las fuerzas unitarias concentradas son una función lineal de z, o sea, sus gráficos de momentos son lineales.

Supongamos que en un tramo de longitud l se necesita determinar el valor de la integral del producto de dos funciones $f_{1(z)} \cdot f_{2(z)}$. O sea:

$$I = \int_l f_{1(z)} \cdot f_{2(z)} \cdot dz \qquad (4.11)$$

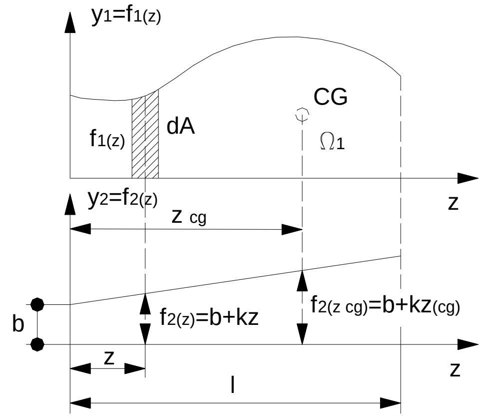


Fig. 4.8 Regla de Vereschiaguin

Si la función $f_{2\,(z)}$ es lineal, puede expresarse como:

$$f_{2(z)} = b + k \cdot z \tag{4.12}$$

Entonces:

$$I = b \cdot \int_0^l f_{1(z)} \cdot dz + k \cdot \int_0^l z \cdot f_{1(z)} \cdot dz \tag{4.13}$$

La primera integral representa el área debajo de la curva $f_{1\,(z)}$ y la denominaremos:

$$\Omega_1 = \int_0^l f_{1(z)} \cdot dz \tag{4.14}$$

La segunda integral representa el momento estático o momento de primer orden del área Ω_1 con relación al eje y, el cual es igual al producto del área por la coordenada de su centroide. O sea:

$$\int_0^l z \cdot f_{1(z)} \cdot dz = \Omega_1 \cdot z_{c.g.} \tag{4.15}$$

Donde $z_{c.g.}$ es la abscisa correspondiente al centroide del área Ω_1. Sustituyendo se obtiene:

$$I = b \cdot \Omega_1 + k \cdot \Omega_1 \cdot z_{c.g.} \tag{4.16}$$

$$I = \Omega_1 \cdot \left(b + k \cdot z_{c.g.}\right) \tag{4.17}$$

El término entre paréntesis representa la ordenada lineal del grafico f$_{2\ (z)}$ en la posición del centroide del gráfico f$_{1\ (z)}$. O sea:

$$b + k \cdot z_{c.g.} = f_{2(z\,c.g.)} \tag{4.18}$$

De donde finalmente:

$$I = \int_l f_{1(z)} \cdot f_{2(z)} \cdot dz = \Omega_1 \cdot f_{z(z\,c.g.)} \tag{4.19}$$

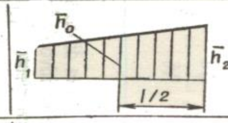
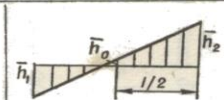
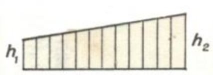
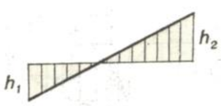
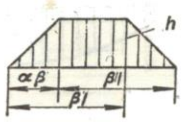
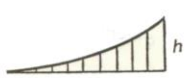
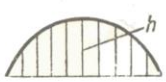
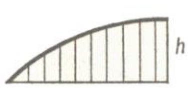
Así pues, según la Regla de Vereschaguin la operación de integración se sustituye por el producto del área del primer gráfico por la ordenada lineal del segundo gráfico, para la posición del centro de gravedad del primer gráfico.

Como se ve en el Método de Vereschaguin no es necesario obtener las expresiones analíticas de las funciones, sino construir los gráficos correspondientes.

En el caso de que ambas funciones sean lineales la operación de integración adquiere la propiedad de ser conmutativa. En este caso el resultado es el mismo si se multiplica el área del primer gráfico por la ordenada del segundo o viceversa.

En la Tabla 4.1 se muestran los productos de Vereschiaguin de diferentes combinaciones de la carga externa y de la fuerza unitaria.

Tabla 4.1 Producto de Diagramas según la Regla de Vereschiaguin

Diagrama de $\bar{M}_1$ / Diagrama de M_P					
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(\bar{h}_1+2\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}h(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}(1+\bar{\alpha})l$
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}h(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}(1+\bar{\beta})l$
	$\frac{1}{2}(h_1+h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(h_1+2h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[h_1(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)+h_2(2\bar{h}_2+\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}[h_1(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)+h_2(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}[(1+\bar{\beta})h_1+(1+\bar{\alpha})h_2]\bar{h}l$
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[(1+\beta)\bar{h}_1+(1+\alpha)\bar{h}_2]hl$	$\frac{1}{6}[(1+\alpha)\bar{h}_2-(1+\beta)\bar{h}_1]hl$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$ cuando $\alpha=\bar{\alpha}$
	$\frac{1}{2}(h_2-h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(2h_2-h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[h_2(2\bar{h}_2+\bar{h}_1)-h_1(2\bar{h}_1+\bar{h}_2)]l$	$\frac{1}{6}[h_2(2\bar{h}_2-\bar{h}_1)-h_1(\bar{h}_2-2\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}[(1+\bar{\alpha})h_2-(1+\bar{\beta})h_1]\bar{h}l$
	$h\bar{h}\beta l$	$\frac{1}{2}h\bar{h}\beta l$	$\frac{1}{2}h(\bar{h}_1+\bar{h}_2)\beta l$	$\frac{1}{2}h(\bar{h}_2-\bar{h}_1)\beta l$	$\frac{h\bar{h}}{6\bar{\beta}}\left(3-3\alpha-\frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha}\right)l$ cuando $\bar{\alpha}<\alpha$; $\frac{h\bar{h}}{6}\left(3-\frac{\alpha^2}{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right)l$ cuando $\bar{\alpha}>\alpha$
	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(\bar{h}_1+3\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_2-\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{12}h\bar{h}(1+\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2)l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h(\bar{h}_1+\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{3}h(\bar{h}_2-\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{3}(1+\bar{\alpha}\bar{\beta})h\bar{h}l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{5}{12}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_1+5\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{12}h(5\bar{h}_2-3\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{12}(5-\bar{\beta}-\bar{\beta}^2)h\bar{h}l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(5\bar{h}_1+3\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_2-5\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{12}(5-\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)h\bar{h}l$

Ejemplo No. 5

Resolver el ejemplo 3 aplicando la regla de Vereschaguin.

Solución:

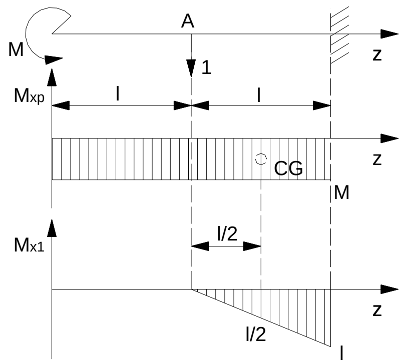


Fig. 4.9 Viga del Ejemplo 3 para aplicar la Regla de Vereshiaguin

$$\delta_{VA} = \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot dz}{E \cdot I_x}$$

$$\delta_{VA} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \int_l M_{xP} \cdot M_{x1} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(\Omega_1 \cdot f_{2(z c.g.)}\right)$$

Como:

$$\Omega_1 = M \cdot l \qquad \text{y} \qquad f_{2(z c.g.)} = \frac{l}{2}$$

Se obtiene:

$$\delta_{VA} = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

Que fue el resultado obtenido en el ejemplo 3.

Ejemplo No. 6

Calcule el desplazamiento horizontal del apoyo B del sistema reticulado de la Fig. 4.10.

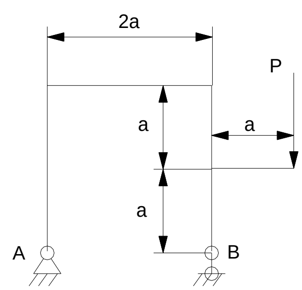


Fig. 4.10 Pórtico Isostático para aplicar la Regla de Vereschaguin

Solución:

$$\sum F_y = B_y - A_y - P = 0$$

$$A_y = B_y - P \qquad (1)$$

$$\sum M_A = B_y \cdot (2a) - P \cdot (3a) = 0$$

$$B_y = \frac{3}{2} \cdot P \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$A_y = \frac{3}{2} P - P = \frac{1}{2} \cdot P$$

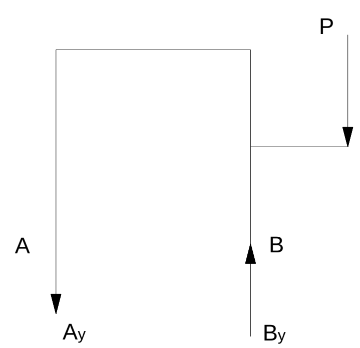
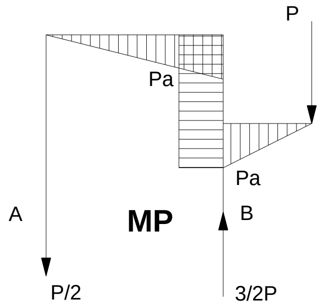


Fig. 4.11 Esquema de Análisis para el cálculo de las reacciones de la carga externa



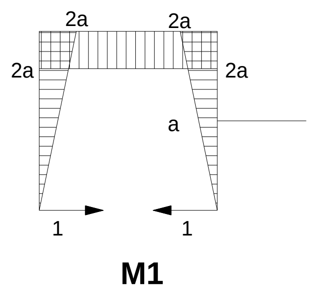


Fig. 4.12 Diagramas de momentos flectores de la carga externa y de la fuerza unitaria

$$\delta_{H\,B} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [cuadrado \times triángulo + trapecio \times rectángulo]$$

$$\delta_{H\,B} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot P \cdot a \cdot 2 \cdot a + \frac{1}{2}(a + 2a) \cdot P \cdot a \cdot a\right]$$

$$\delta_{H\,B} = \frac{7}{2} \cdot \frac{P \cdot a^3}{E \cdot I_x}$$

4.5 Solución de Sistemas Hiperestáticos por el Método de las Fuerzas

Ligadura: Una ligadura no es más que la limitación al movimiento. Se dividen en exteriores e interiores.

Ligadura exterior: Es una limitación al movimiento absoluto de algún punto del sistema.

Ligadura interior: Es una limitación impuesta a los desplazamientos relativos de los elementos del sistema.

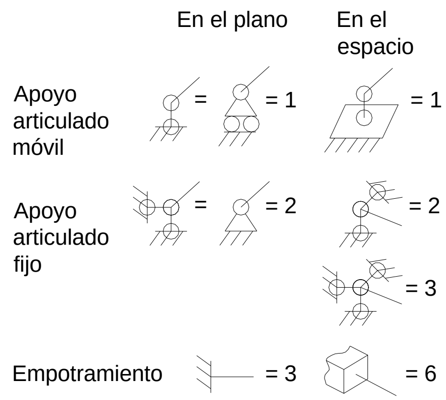


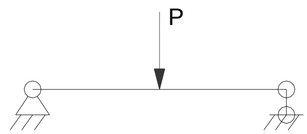
Fig. 4.13 Tipos de ligaduras exteriores

Fig. 4.14 Tipos de ligaduras interiores

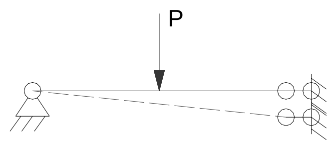
Una articulación en el plano elimina tantas ligaduras interiores como barras llegan a la articulación menos una (n-1) y en el espacio elimina 3(n-1) ligaduras interiores.

4.6 Ligaduras impuestas al Sistema. Grado de Hiperestaticidad

Sistema isostático es aquel sistema reticulado que posee las ligaduras exteriores e interiores necesarias para garantizar el equilibrio y la invariabilidad cinemática del sistema. En el plano el número de ligaduras exteriores que garantiza el equilibrio y la invariabilidad cinemática del sistema es de tres sin embargo tienen que estar dispuestas adecuadamente (Fig. 4.15).



(a)



(b)

Invariable cinemáticamente. b) No es invariable cinemáticamente

Fig. 4.15 Invariabilidad cinemática de las ligaduras exteriores

En el espacio este número de ligaduras es de seis. El sistema que posee un número de ligaduras superior a las necesarias es un sistema hiperestático y el número de ligaduras suplementarias es igual al grado de hiperestaticidad. La hiperestaticidad puede ser exterior o interior en dependencia de que las ligaduras suplementarias sean exteriores o interiores. En los sistemas hiperestáticos con ligaduras exteriores suplementarias no es posible la determinación de las reacciones de apoyo mediante las ecuaciones de equilibrio y si la hiperestaticidad es interior no es posible determinar las fuerzas internas en las barras por el método de las secciones.

4.7 Sistema base y sistema equivalente

Durante la solución de los sistemas hiperestáticos por el método de las fuerzas es necesario elegir un **sistema base** y conformar lo que se conoce como **sistema equivalente**.

Sistema base: Es el sistema hiperestático dado en el cual se han eliminado todas las ligaduras suplementarias tanto exteriores como interiores. Pueden existir diferentes posibles sistemas bases.

Sistema equivalente: Es el sistema base en el cual las ligaduras suplementarias eliminadas han sido sustituidas por las fuerzas que las representan. En un sistema equivalente dado, las fuerzas se designan por X_1, X_2, X_3,… X_n.

Veamos algunos ejemplos de sistemas equivalentes:

Ejemplo 1

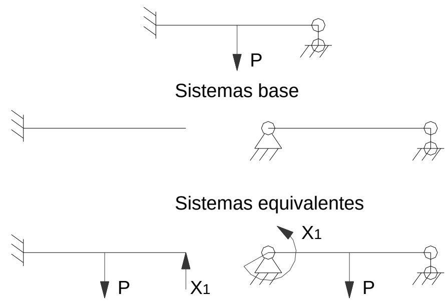


Fig. 4.16 Cuatro posibles Sistemas Equivalentes para el Sistema Base dado

Ejemplo 2

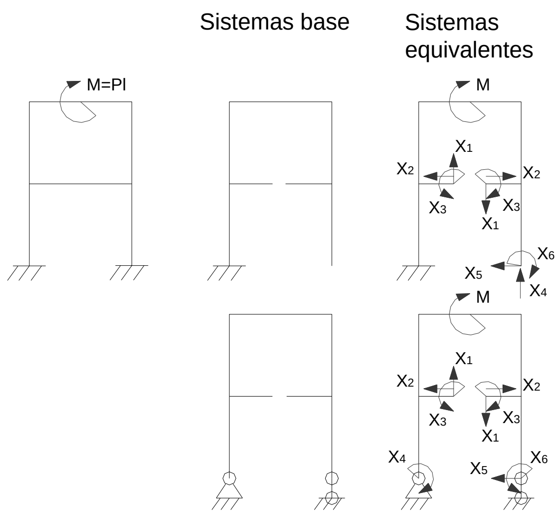


Fig. 4.17 Cuatro posibles Sistemas Equivalentes para el Sistema Base dado

4.8 Ecuaciones canónicas del método de las fuerzas

Analicemos, por ejemplo, el primer sistema equivalente del ejemplo 2, para un sistema de carga cualquiera (Fig.4.18).

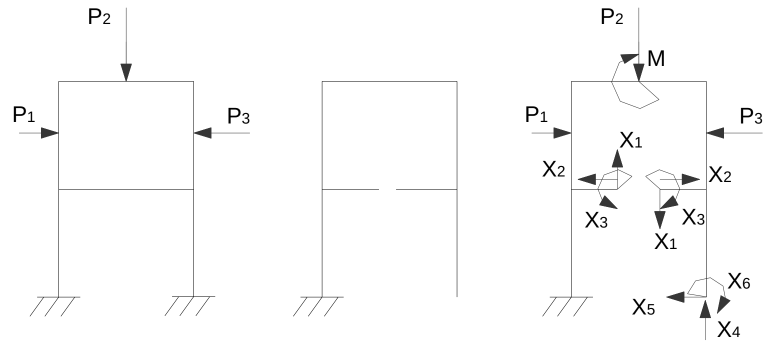


Fig. 4.18 Sistema Base y Sistema Equivalente del Sistema Hiperestático dado

Los desplazamientos originados por el sistema de fuerzas aplicado al sistema equivalente, en la dirección de cada una de las ligaduras eliminadas, tienen que ser cero. O sea:

$$\begin{aligned}
&\delta_{1[X1, X2, X3, \quad \ldots, Xn, P, P1]} = 0 \\
&\delta_{2[X1, X2, X3, \quad \ldots, Xn, P, P1]} = 0 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\delta_{n[X1, X2, X3, \quad \ldots, Xn, P, P1]} = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Las expresiones (4.20) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
&\delta_{1X1} + \delta_{1X2} + \delta_{1X3} + \ldots \qquad \ldots + \delta_{1Xn} + \delta_{1P} = 0 \\
&\delta_{2X1} + \delta_{2X2} + \delta_{2X3} + \ldots \qquad \ldots + \delta_{2Xn} + \delta_{2P} = 0 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\delta_{nX1} + \delta_{nX2} + \delta_{nX3} + \ldots \qquad \ldots + \delta_{nXn} + \delta_{nP} = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Puesto que cada uno de los desplazamientos δ_{iXk} es proporcional a la fuerza correspondiente se puede escribir que:

$$\delta_{i\,Xk} = \delta_{i\,k} \cdot X_k \tag{4.22}$$

Donde $\delta_{i\,k}$ es el desplazamiento en la dirección i provocada por una fuerza unitaria colocada en la posición de X_k. Las expresiones (4.21) quedarán entonces escritas como:

$$
\begin{array}{llllll}
\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\delta_{13}\cdot X_3+\ldots & \ldots+\delta_{1n}\cdot X_n+\delta_{1P}=0 \\
\delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{23}\cdot X_3+\ldots & \ldots+\delta_{2n}\cdot X_n+\delta_{2P}=0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\
\delta_{n1}\cdot X_1+\delta_{n2}\cdot X_2+\delta_{n3}\cdot X_3+\ldots & \ldots+\delta_{nn}\cdot X_n+\delta_{nP}=0
\end{array}
\tag{4.23}
$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones canónicas del método de las fuerzas pues en las mismas las incógnitas son las fuerzas X_1, X_2, X_3,… ,X_n y existirán tantas ecuaciones como fuerzas X_k desconocidas existan.

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.23) es necesario hallar los desplazamientos $\delta_{i\,k}$ que constituyen los coeficientes de las incógnitas X_k y además los términos independientes de las diferentes ecuaciones $\delta_{i\,P}$.

Según el método de Mohr, para hallar el desplazamiento en una dirección i determinada es necesario colocar una fuerza unitaria en esa dirección y obtener las acciones interiores provocadas por dicha fuerza unitaria y después obtener la integral del producto de las acciones interiores provocadas por esta fuerza unitaria y las acciones originadas por las cargas que provocan el desplazamiento. Pero en este caso, como cada uno de los desplazamientos $\delta_{i\,k}$ es originado por una fuerza unitaria colocada en la posición X_k, el desplazamiento $\delta_{i\,k}$ es la integral del producto de dos funciones unitarias, una originada por una fuerza unitaria colocada en la dirección i la otra por una fuerza unitaria colocada en la dirección X_k. Los coeficientes $\delta_{i\,P}$ se hallan resolviendo las integrales correspondientes a los productos de las fuerza unitaria colocada en la dirección i, o sea, de las acciones interiores originadas por esta fuerza unitaria por las acciones interiores originadas por las cargas externas P.

Se verá a continuación como se aplica el método de las fuerzas a la solución de diferentes sistemas reticulados hiperestáticos con diferentes características.

Ejemplo No. 7.

Resolver el pórtico hiperestático mostrado en la Fig. 4.19. Construya el diagrama de momentos flectores resultantes y halle el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga P.

Solución:

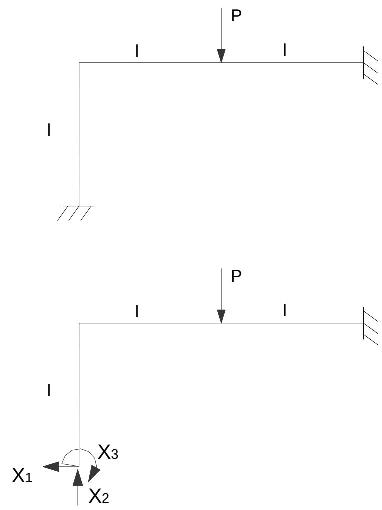


Fig. 4.19 Pórtico Hiperestático y su Sistema Equivalente

Elegimos un sistema base y conformamos el sistema equivalente. El sistema tiene tres ligaduras suplementarias exteriores. Como son tres fuerzas desconocidas planteamos un sistema de ecuaciones canónicas compuesto por tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{2P} = 0$$
$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{3P} = 0$$

Construimos los diagramas de momentos flectores de las fuerzas unitarias $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ y $X_3 = 1$ y el de la carga externa P.

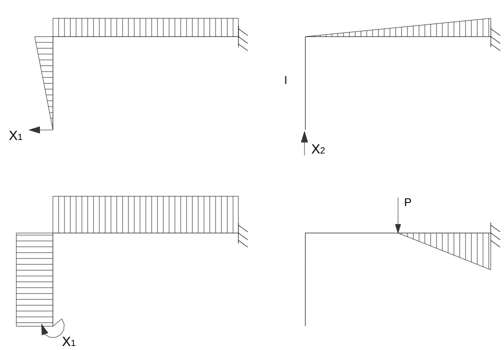


Fig. 4.20 Diagramas unitarios de las incógnitas y diagrama de la carga externa

Ahora se pueden hallar los coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[triángulo \times triángulo + rectángulo \times rectángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot l \cdot l \cdot l + l \cdot l \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{7 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[rectángulo \times triángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot 2l \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2 \cdot l^3}{E \cdot I_x}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[triángulo \times rectángulo + rectángulo \times rectángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot l + l \cdot 1 \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{5 \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[triángulo \times triángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2l \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{8 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[triángulo \times rectángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 1 \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{2 \cdot l^2}{E \cdot I_x}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[rectángulo \times rectángulo + rectángulo \times rectángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[1 \cdot 1 \cdot l + 1 \cdot 1 \cdot 2l \right]$$

$$\delta_{33} = \frac{3 \cdot l}{E \cdot I_x}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[rectángulo \times triángulo \right] = -\frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot Pl \cdot l \right]$$

$$\delta_{1P} = -\frac{P \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [trapecio \times triángulo] = -\frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (l + 2 \cdot 2l) \cdot P \cdot l \cdot l\right]$$

$$\delta_{2P} = -\frac{5 \cdot P \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{3P} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [rectángulo \times triángulo] = -\frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot P \cdot l \cdot l\right]$$

$$\delta_{3P} = -\frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

Después de sustituir estos coeficientes en las ecuaciones canónicas y simplificar se obtiene:

$$\frac{7}{3} \cdot l \cdot X_1 + 2 \cdot l \cdot X_2 + \frac{5}{2} \cdot X_3 = \frac{P \cdot l}{2}$$

$$2 \cdot l \cdot X_1 + \frac{8}{3} \cdot l \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 = \frac{5 \cdot P \cdot l}{6}$$

$$\frac{5}{2} \cdot l \cdot X_1 + 2 \cdot l \cdot X_2 + X_3 = \frac{P \cdot l}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$X_1 = -\frac{P}{4} \qquad X_2 = \frac{7}{16} \cdot P \qquad X_3 = \frac{1}{12} \cdot P \cdot l$$

Para hallar el diagrama de momentos flectores resultante hay que construir los diagramas de momentos de las cuatro fuerzas que intervienen en el sistema equivalente X_1, X_2, X_3 y P y sumarlos entre sí. El diagrama de P ya está construido y para construir los diagramas de X_1, X_2 y X_3 basta con multiplicar los diagramas de las fuerzas unitarias correspondientes por los valores de las fuerzas X_1, X_2 y X_3. En el caso de la fuerza X_1 que su valor dio negativo es necesario invertir el diagrama.

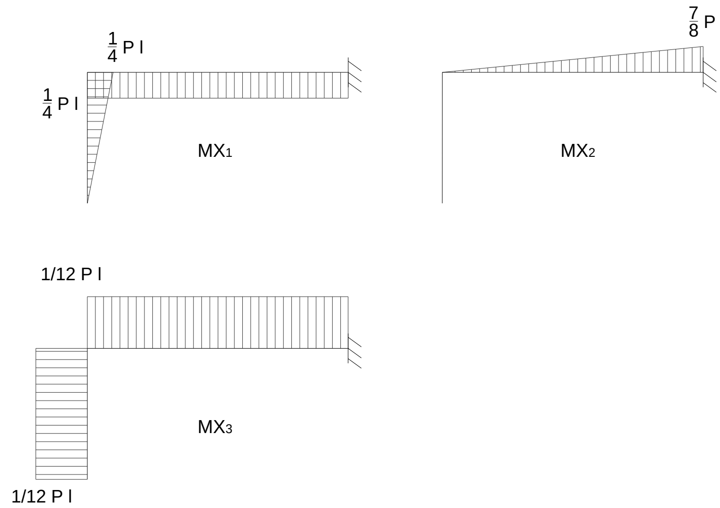


Fig. 4.21 Diagramas reales de las Fuerzas X_1, X_2 y X_3

Sumando estos diagramas entre sí con el de la carga externa P, se obtiene el diagrama de momentos flectores resultante.

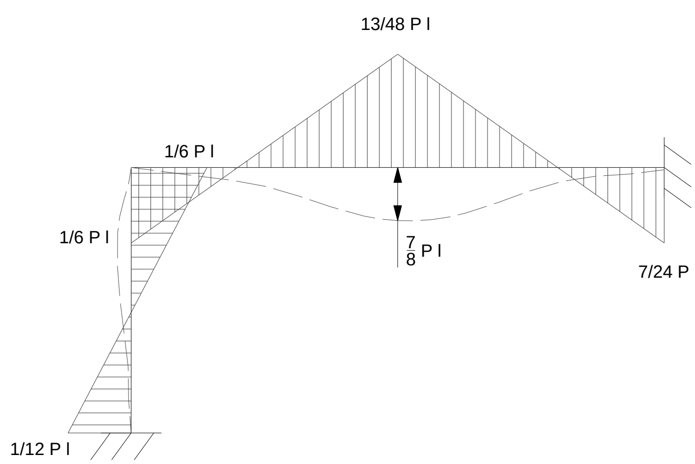


Fig. 4.22 Diagrama de Momentos Flectores resultante

El punto más crítico del sistema es la sección correspondiente al empotramiento de la derecha donde el momento flector es máximo. Como en cada barra o en cada porción de una barra el diagrama aparecerá representado del lado de la fibra de compresión es fácil imaginarse la curva elástica del pórtico. En la Figura aparece la línea elástica del pórtico representada con línea discontinua.

Para calcular el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga se coloca una fuerza unitaria en esa posición en el sistema equivalente y se construye el diagrama de momentos flectores de esa fuerza. O sea:

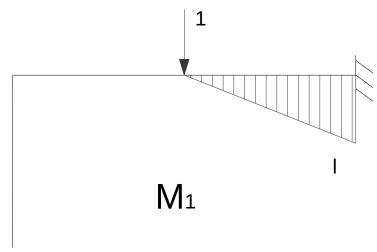


Fig. 4.23 Diagrama unitario de una fuerza colocada en el punto donde se quiere hallar el desplazamiento

Resolviendo la integral de Mohr correspondiente a la flexión con relación al eje X, empleando la Regla de Vereschaguin se obtiene el desplazamiento buscado.

$$\delta_{P\,P} = \int_l \frac{M_R \cdot M_1 \cdot dz}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[trapeciolado \sin vertidos \times triángulo \right] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot l \cdot l \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{24} P \cdot l - \frac{13}{48} \cdot P \cdot l \right) \right]$$

$$\delta_{P\,P} = \frac{5 \cdot P \cdot l^3}{96 \cdot E \cdot I_x}$$

Ejemplo No. 8

Determinar las fuerzas internas en las barras de la armadura hiperestática mostrada en la Fig. 4.24. La rigidez EA se considera igual para todas las barras. Las longitudes de las barras son las que se señalan.

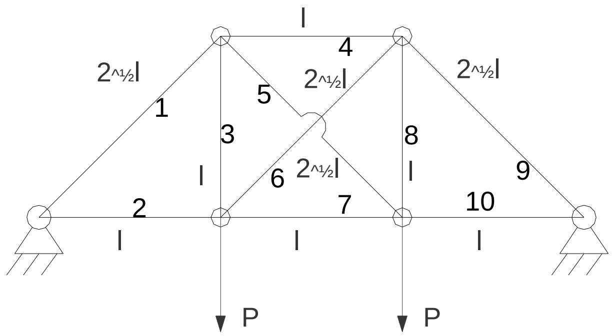


Fig. 4.24 Armadura Hiperestática

Solución:

La armadura tiene dos grados de hiperestaticidad, uno exterior y uno interior. Elegimos el sistema base sustituyendo el apoyo articulado fijo de la derecha por un rodillo y seccionamos la barra 5. Para conformar el sistema equivalente sustituimos las ligaduras eliminadas por las fuerzas correspondientes.

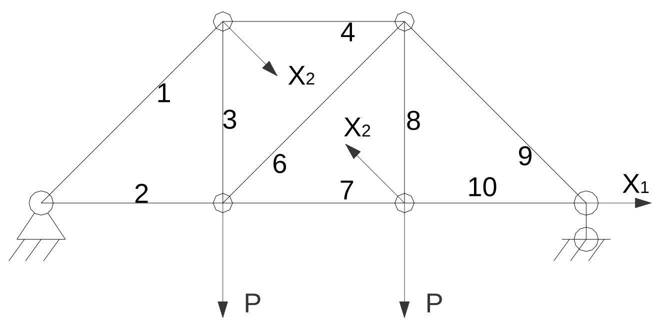


Fig. 4.25 Sistema Equivalente

El sistema de ecuaciones canónicas será:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P} = 0$$

Como en las armaduras las barras trabajan a tracción o compresión para calcular cada uno de los coeficientes δ_{ik} de las ecuaciones canónicas se formará solamente la integral correspondiente a la tracción o compresión. De modo que:

$$\delta_{ik} = \int_l \frac{N_i \cdot N_k \cdot dz}{E \cdot A}$$

Como las fuerzas normales N_i y N_k son constantes a lo largo de la longitud de la barra, se obtiene que:

$$\delta_{i\,k} = \frac{N_i \cdot N_k \cdot l}{E \cdot A}$$

de donde se deduce que no es necesario aplicar la Regla de Vereschaguin, sino que los coeficientes $\delta_{i\,k}$ se hallan directamente multiplicando los valores de las fuerzas normales por la longitud de la barra y dividiéndolo por la rigidez de las barras y luego sumando los de todas las barras.

A continuación se muestran los cálculos realizados para hallar los coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{i1} \cdot N_{i1} \cdot l_i = \frac{3 \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{i1} \cdot N_{i2} \cdot l_i = -\frac{\sqrt{2} \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{i2} \cdot N_{i2} \cdot l_i = \frac{\left(2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{i1} \cdot N_{iP} \cdot l_i = \frac{3 \cdot P \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{i2} \cdot N_{iP} \cdot l_i = -\frac{\sqrt{2} \cdot P \cdot l}{E \cdot A}$$

Sustituyendo estos coeficientes en las ecuaciones canónicas se tiene:

$$3 \cdot X_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X_2 = -3 \cdot P$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X_1 + 2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot X_2 = \sqrt{2} \cdot P$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene n los valores de X_1 y X_2.

$$X_1 = -\frac{10 + 12 \cdot \sqrt{2}}{11 + 12 \cdot \sqrt{2}} \cdot P \qquad y \qquad X_2 = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{11 + 12 \cdot \sqrt{2}} \cdot P$$

Para hallar las fuerzas internas originadas en cada una de las barras por las fueras X_1 y X_2 es necesario multiplicar las fuerzas $N_{i\,1}$ y $N_{i\,2}$ pos las fuerzas X_1 y X_2 respectivamente (columnas 10 y 11) y la fuerza N_i en cada barra del sistema hiperestático se halla sumando las fuerzas:

$$N_i = N_{iP} + N_{i1} \cdot X_1 + N_{i2} \cdot X_2$$

4.9 Aprovechamiento de las propiedades de simetría en la solución de sistemas hiperestáticos

Un pórtico es geométricamente simétrico cuando su parte derecha puede ser interpretada como la imagen al espejo de su parte izquierda con relación al eje o al plano de simetría, ver Fig. 4.26.

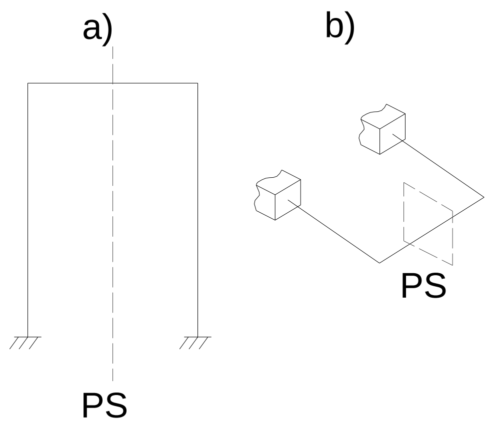


Fig. 4.26 Pórticos plano y plano-espacial simétricos

Las cargas aplicadas a los pórticos se clasifican además en simétricas y antisimétricas. Por cargas simétricas se entienden aquellas en las cuales las cargas situadas a la izquierda del plano de simetría constituyen la imagen al espejo de las de la derecha. En el caso de cargas antisimétricas las cargas a la izquierda constituyen la imagen al espejo invertida de las de la derecha (Fig. 4.27).

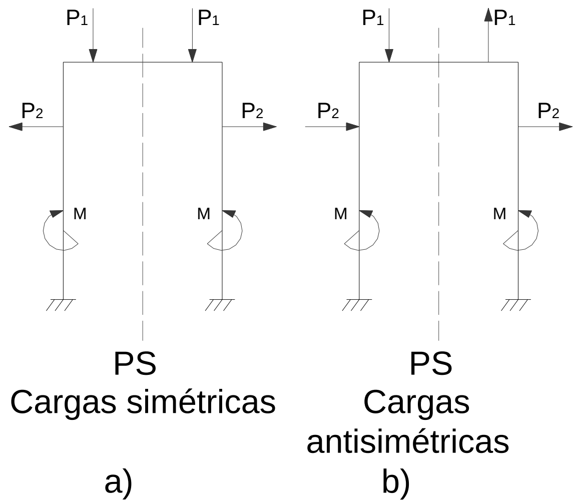


Fig. 4.27 Cargas externas simétricas y antisimétricas

De la misma forma podemos clasificar las acciones interiores en simétricas y antisimétricas. Los momentos flectores y la fuerza axial son cargas simétricas. Mientras que el momento torsor y las fuerzas de cortante son antisimétricas. En otras palabras, las acciones interiores que provocan tensiones normales son simétricas y las que provocan tensiones tangenciales son antisimétricas (Fig. 4.28).

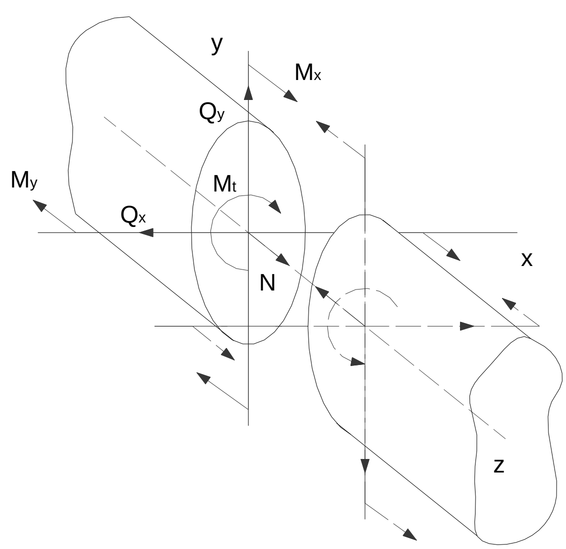


Fig. 4.28 Fuerzas Internas Simétricas y Antisimétricas

Las propiedades de simetría se enuncian como:

1. En un pórtico simétrico con carga simétrica son cero las acciones interiores antisimétricas en el plano de simetría.
2. En un pórtico simétrico con carga antisimétrica, son cero las acciones interiores simétricas en el plano de simetría.

Para aplicar las propiedades de simetría es necesario eliminar las ligaduras suplementarias cortando el pórtico por el plano de simetría sin alterar su estabilidad cinemática. Vamos a demostrar mediante un simple razonamiento lógico las propiedades de simetría mencionadas.

Analicemos el pórtico simétrico de seis grados de hiperestaticidad (3 exteriores y 3 interiores) mostrado en la Fig. 4.29. Eliminemos las ligaduras suplementarias dividiendo el pórtico por el plano de simetría. Se descompone el sistema en dos pórticos isostáticos independientes sin que se altere la invariabilidad cinemática del sistema.

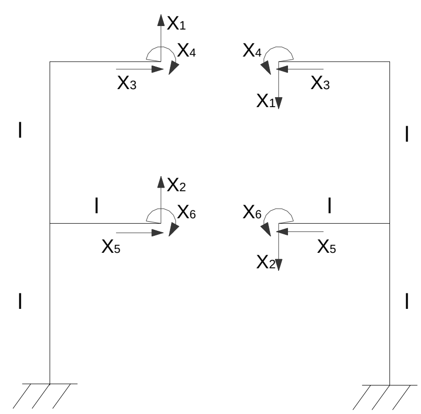


Fig. 4.29 Pórtico Simétrico dividido por el Plano de Simetría

Las ecuaciones canónicas serán:

$$
\begin{array}{l}
\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \delta_{15} \cdot X_5 + \delta_{16} \cdot X_6 + \delta_{1P} = 0 \\
\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \delta_{2P} = 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\delta_{61} \cdot X_1 + \delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{64} \cdot X_4 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \delta_{6P} = 0
\end{array} \qquad (4.24)
$$

En este sistema todos aquellos coeficientes que tienen un índice correspondiente a una fuerza interna simétrica y el otro a una fuerza antisimétrica serán iguales a cero. Por ejemplo, X_1 y X_2 son fuerzas interiores antisimétricas y X_3, X_4, X_5 y X_6 simétricas, de donde:

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{14}=\delta_{41}=\delta_{15}=\delta_{51}=\delta_{16}=\delta_{61}=\delta_{23}=\delta_{32}=\delta_{24}=\delta_{42}=\delta_{25}=\delta_{52}=\delta_{26}=\delta_{62}=0$$

Analicemos por ejemplo el coeficiente δ_{16}. En la Fig. 4.30 se muestran los gráficos de momentos unitarios de las fuerzas X_1 y X_6.

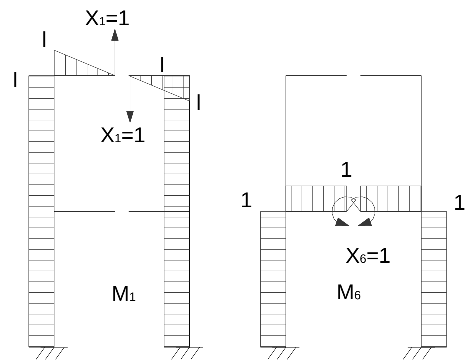


Fig. 4.30 Diagramas unitarios de las fuerzas X_1 y X_2

El producto por Vereschaguin de las mitades izquierda de ambos diagramas será positivo y el de las mitades derechas será negativo, de manera que el coeficiente δ_{16} será cero.

El sistema de ecuaciones canónicas se dividirá entonces en dos sistemas independientes:

$$\begin{aligned}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\delta_{1P}&=0\\ \delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{2P}&=0\end{aligned}\qquad(4.25)$$

$$\begin{aligned}\delta_{33}\cdot X_3+\delta_{34}\cdot X_4+\delta_{35}\cdot X_5+\delta_{36}\cdot X_6+\delta_{3P}&=0\\ \delta_{43}\cdot X_3+\delta_{44}\cdot X_4+\delta_{45}\cdot X_5+\delta_{46}\cdot X_6+\delta_{4P}&=0\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad&\vdots\\ \delta_{63}\cdot X_3+\delta_{64}\cdot X_4+\delta_{65}\cdot X_5+\delta_{66}\cdot X_6+\delta_{6P}&=0\end{aligned}\qquad(4.26)$$

Ahora bien, si la carga externa es simétrica los coeficientes $\delta_{1P} = \delta_{2P} = 0$ y el sistema (4.25) se convierte en un sistema de ecuaciones homogéneo, donde $X_1 = X_2 = 0$, quedando de esta forma demostrada la primera propiedad de simetría.

Si la carga es antisimétrica, entonces en el sistema (4.26)$\delta_{3P} = \delta_{4P} = \delta_{5P} = \delta_{6P} = 0$ y serán entonces cero las fuerzas X_3, X_4, X_5 y X_6, demostrándose entonces la segunda propiedad de simetría.

Ejemplo No. 9

Construya el gráfico de momentos flectores resultante para el pórtico hiperestático mostrado en la Fig. 4.31.

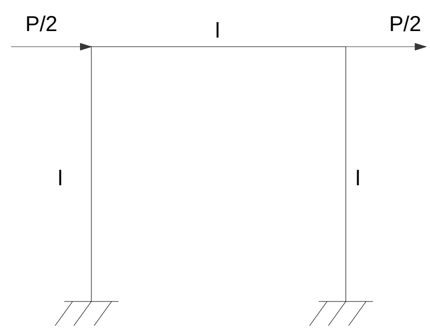


Fig. 4.31 Pórtico simétrico con carga antisimétrica

Solución:

El pórtico tiene tres ligaduras exteriores suplementarias. Además, es geométricamente simétrico y la carga es antisimétrica. Por lo que se aplica la segunda propiedad de simetría.

Dividamos el pórtico por el plano de simetría para eliminar las ligaduras suplementarias. Son cero la fuerza normal y el momento flector en el plano de simetría. Se trabaja solo con la mitad del pórtico ya que si el pórtico es simétrico y la carga antisimétrica el diagrama resultante será también antisimétrico. Tenemos una sola ecuación canónica, la cual es:

Fig. 4.32 Diagrama unitario de la incógnita y diagrama de la carga externa

Calculando las deformaciones se tiene:

$$\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{1P}=0$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\text{triángulo}\times\text{triángulo}+\text{rectángulo}\times\text{rectángulo}\right]=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot l\right]$$

$$\delta_{11}=\frac{7\cdot l^3}{24\cdot E\cdot I_x}$$

$$\delta_{1P}=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\text{triángulo}\times\text{triángulo}\right]=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[-\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{P\cdot l}{2}\cdot l\right]$$

$$\delta_{1P}=-\frac{P\cdot l^3}{8\cdot E\cdot I_x}$$

Sustituyendo en la ecuación canónica se obtiene el resultado:

$$X_1=\frac{3}{7}\cdot P$$

Hallando entonces el diagrama MX_1 y sumándole el de MP se obtiene el diagrama de momentos flectores resultantes

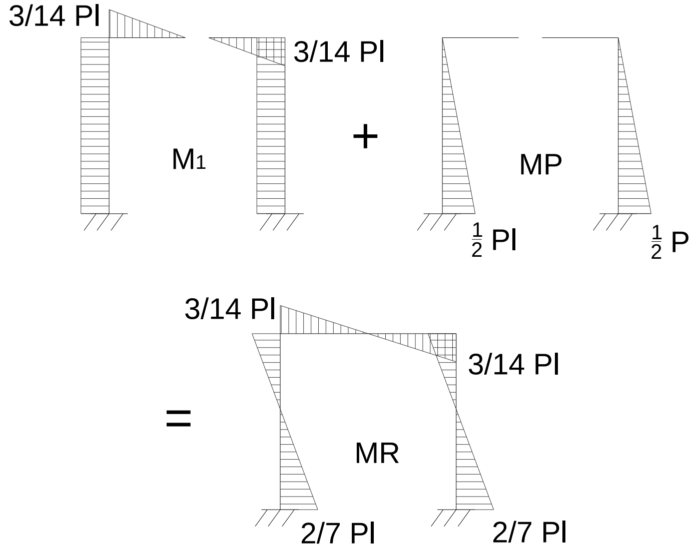


Fig. 4.33 Diagramas reales de las fuerzas X_1 y P y diagrama resultante del pórtico

Ejemplo No. 10

Construya el gráfico de momentos flectores resultante del pórtico hiperestático mostrado en la Fig.4.34.

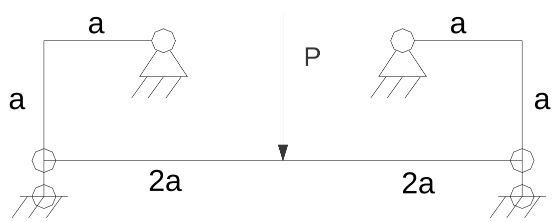


Fig. 4.34 Pórtico Hiperestático con apoyos articulados

Solución:

El pórtico tiene 3 ligaduras exteriores suplementarias, o sea, aparentemente tiene tres grados de hiperestaticidad, sin embargo, como es simétrico con carga simétrica son cero las acciones interiores antisimétricas en el plano de simetría. Se pueden aplicar las propiedades de simetría, ya que el pórtico se puede dividir por el plano de simetría sin alterar su invariabilidad cinemática. En este caso el grado de hiperestaticidad será 2.

El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P} = 0$$

A continuación se hallan los coeficientes de las ecuaciones.

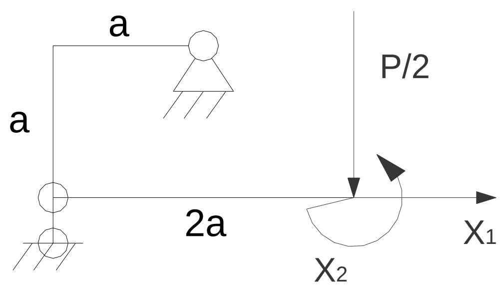


Fig. 4.35 Sistema equivalente

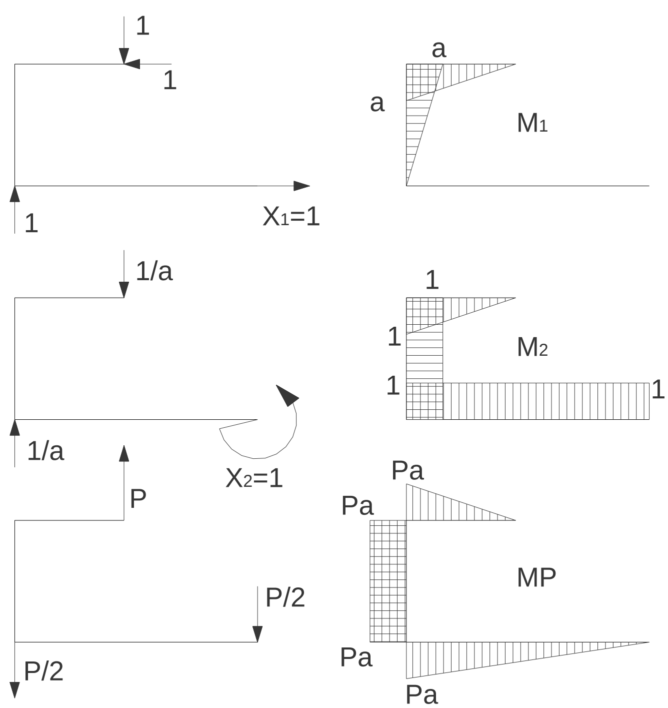


Fig. 4.36 Diagramas unitarios de las incógnitas y diagrama de la carga

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot 2 \cdot [triángulo \times triángulo] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot a\right] = \frac{2 \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [triángulo \times triángulo + triángulo \times rectángulo] = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot 1 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 \cdot a \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{5 \cdot a^2}{6 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [triángulo \times triángulo + rectángulo \times rectángulo + rectángulo \times rectángulo]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 2a \right] = \frac{10 \cdot a}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [- triángulo \times triángulo - triángulo \times rectángulo] = -\frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot P \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot P \cdot a \cdot a \right]$$

$$\delta_{1P} = -\frac{5 \cdot P \cdot a^3}{6 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot [- triángulo \times triángulo - rectángulo \times rectángulo - rectángulo \times triángulo]$$

$$\delta_{2P} = -\frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot P \cdot a \cdot a + 1 \cdot P \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot P \cdot a \cdot 2a \right] = -\frac{7 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

Sustituyendo los coeficientes en las ecuaciones canónicas y simplificando se obtiene:

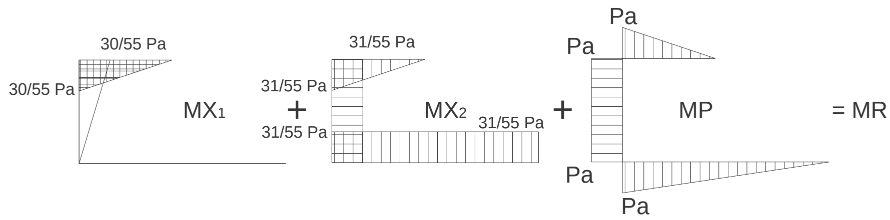
$$4 \cdot a \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 = 5 \cdot P \cdot a$$

$$5 \cdot a \cdot X_1 + 20 \cdot X_2 = 14 \cdot P \cdot a$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$X_1 = \frac{30}{55} \cdot P \qquad X_2 = \frac{31}{55} \cdot P$$

Construyendo los diagramas de MX_1 y MX_2 y sumándolos se obtiene el diagrama de momentos flectores resultantes como se muestra a continuación:



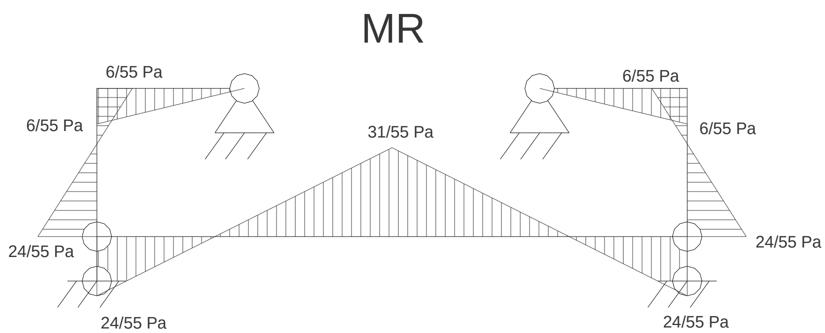


Fig. 4.37 Diagramas reales de las incógnitas y de la carga y Diagrama Resultante

4.10 Determinación de desplazamientos en los sistemas hiperestáticos

Para poder hallar los desplazamientos en un punto cualquiera y en cualquier dirección es necesario resolver la hiperestaticidad del sistema y construir el diagrama de momentos resultantes. Una vez resuelta la hiperestaticidad del sistema, el desplazamiento en un determinado punto se halla colocando la fuerza unitaria en dicho punto en la dirección en la que se desee determinar. Esto último se realiza en el sistema equivalente y se construye el diagrama de momentos de esta fuerza $M_\phi = 1$.

El desplazamiento se halla entonces por el Método de Mohr aplicando la regla de Vereschaguin, determinando entonces el producto por Vereschaguin de los diagramas M_R x M_ϕ.

4.11 Solución de vigas hiperestáticas utilizando la ecuación de los tres momentos

La ecuación de los tres momentos se deriva de aplicar el método de las fuerzas a una viga continua hiperestática de múltiples apoyos. El grado de hiperestaticidad en este caso será igual también al número de ligaduras suplementarias.

Para calcular estas vigas resulta muy cómodo partir del sistema base que se obtiene, introduciendo articulaciones en los apoyos y aplicando los momentos X_1, X_2, X_3, … X_m que son las fuerzas que representan las ligaduras eliminadas entre los tramos vecinos (Fig.4.38). Consideraremos positivos los momentos representados en la Fig.4.38.

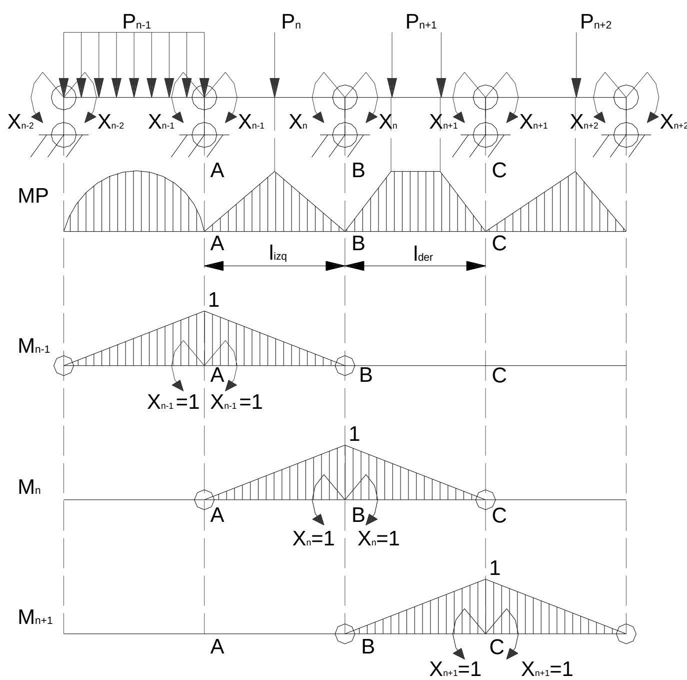


Fig. 4.38 Esquema de Análisis para la solución de vigas hiperestáticas por la Ecuación de los Tres Momentos

Se podrán plantear tantas ecuaciones canónicas como fuerzas desconocidas existan en la viga. Analizaremos como se transforma la ecuación n del sistema de ecuaciones canónicas para el caso de este esquema:

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \cdots + \delta_{n(n-1)} \cdot X_{(n-1)} + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{n(n+1)} \cdot X_{(n+1)} + \cdots + \delta_{nP} = 0 \qquad (4.27)$$

Determinemos los coeficientes de esta ecuación. Para ello construimos los diagramas de momentos de las cargas externas MP (Fig.4.33) y los diagramas unitarios de las fuerzas $X_{n-1} = 1$, $X_n = 1$ y $X_{n+1} = 1$ correspondientes a los tramos vecinos al tramo n (Fig. 4.33). Como al introducir articulaciones entre los diferentes tramos, los diagramas de momentos de las cargas externas se construyen de forma independiente para cada tramo como vigas articuladas en ambos extremos. De la misma forma se construyen los diagramas unitarios de los momentos que actúan en los apoyos.

En la ecuación (4.27) son cero todos los coeficientes de las incógnitas excepto $\delta_{n\,(n-1)}$, $\delta_{n\,n}$ y $\delta_{n\,(n+1)}$. En efecto el momento unitario n origina momentos flectores solamente en los tramos AB y BC. En estos mismos tramos aparecen momentos flectores provocados por los momentos unitarios (n-1) y (n+1) y por las cargas externas, de aquí que los productos de Vereschaguin de los diagramas son iguales a cero menos aquellos que determinan los coeficientes $\delta_{n\,(n-1)}$, $\delta_{n\,n}$, $\delta_{n\,(n+1)}$ y $\delta_{n\,P}$ (Fig. 4.33).

Si la rigidez de la viga $E{\cdot}I_x$ es constante a través de toda la longitud se obtiene que:

$$\delta_{n(n-1)} = \frac{l_i}{6 \cdot E \cdot I_x}, \quad \delta_{nn} = \frac{l_i + l_d}{6 \cdot E \cdot I_x} \quad y \quad \delta_{n(n+1)} = \frac{l_d}{6 \cdot E \cdot I_x} \qquad (4.28)$$

Sustituyendo (4.28) en (4.27) se obtiene:

$$X_{(n-1)} \cdot l_i + 2 \cdot X_n \cdot (l_i + l_d) + X_{(n+1)} \cdot l_d + 6 \cdot \delta_{nP} = 0 \qquad (4.29)$$

Donde l_i es la longitud del tramo a la izquierda del momento X_n y $X_{(n-1)}$ el momento a la izquierda del mencionado tramo y l_d es la longitud del tramo a la derecha del momento X_n y $X_{(n+1)}$ el momento a la derecha de este último tramo.

Para mejor claridad designémoslo como $M_{izq} = X_{(n-1)}$, $M_{med} = X_n$ y $M_{der} = X_{(n+1)}$ obtenemos definitivamente la ecuación:

$$M_{izq} \cdot l_{izq} + 2 \cdot M_{med} \cdot \left(l_{izq} + l_{der}\right) + M_{der} \cdot l_{der} + 6 \cdot \delta_{nP} = 0 \qquad (4.30)$$

Esta ecuación se denomina **Ecuación de los Tres Momentos.** El mecanismo de planteamiento de esta ecuación es el siguiente: se analizan consecutivamente todos los pares de tramos contiguos y para cada par de tramos se plantea la ecuación de los tres momentos. El número de pares de tramos es igual al número de apoyos adicionales intermedios. Es decir, que el número de ecuaciones de la viga continua es igual al grado de hiperestaticidad de esta.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones y después de determinar los momentos, sin dificultad se construye el diagrama de momentos flectores y se determinan las tensiones en la viga.

Ejemplo No. 11

Demostrar que para una viga de rigidez constante (E·I), con tres apoyos y los extremos en voladizo, la posición óptima de los voladizos que garantiza los menores momentos flectores en la viga es cuando α = 0,408, cuando la viga soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de toda la longitud. Resuelva el problema aplicando la ecuación de los tres momentos.

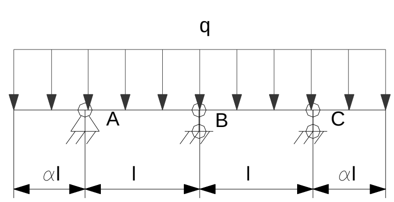


Fig. 4.39 Viga hiperestática con tres apoyos

Solución:

Adoptamos el sistema equivalente que se aprecia más abajo:

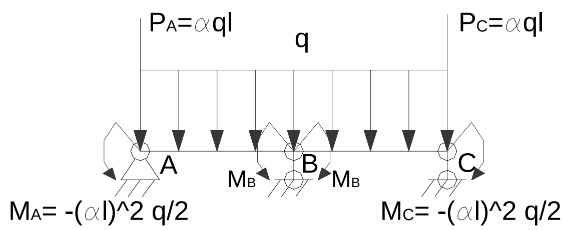


Fig. 4.40 Sistema Equivalente

Los voladizos son sustituidos por una carga concentrada $P_A = P_C = \alpha \cdot q \cdot l$ y los momentos $M_A = M_C = -\frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2}$ y se articularán los tramos en el apoyo intermedio, sustituyendo la ligadura eliminada por el momento desconocido M_m. Construyamos ahora el diagrama de la carga externa y el diagrama unitario M_m=1.

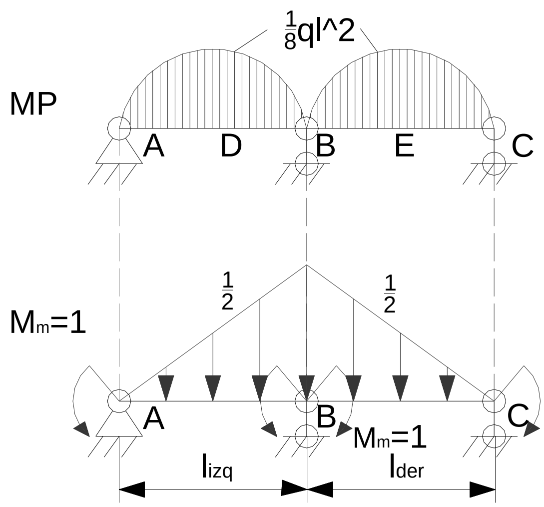


Fig. 4.41 Diagramas unitarios de las incógnitas y diagramas de las cargas externas para cada tramo

Los momentos M_A y M_C se considerarán como momentos de apoyo. O sea: $M_{izq} = M_A = -\frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2}$ y $M_{der} = M_C = -\frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2}$. Las cargas P_A y P_C solo tienen influencia en la magnitud de las reacciones en A y C.

La ecuación de los tres momentos quedará como:

$$M_{izq} \cdot l_{izq} + 2 \cdot M_{med} \cdot (l_{izq} + l_{der}) + M_{der} \cdot l_{der} + 6 \cdot \delta_{nP} = 0$$

$$-\frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2} \cdot l + 2 \cdot M_B \cdot (2 \cdot l) - \frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2} \cdot l + 6 \cdot (parábola \times triángulo + parábola \times triángulo) = 0$$

$$4 \cdot M_B \cdot l - \alpha^2 \cdot l^3 \cdot q + 6\left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 \cdot 1 \cdot l\right) = 0$$

$$4 \cdot M_B = \alpha^2 \cdot l^2 \cdot q - \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot (2 \cdot \alpha^2 - 1)$$

$$M_B = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot (2 \cdot \alpha^2 - 1) \qquad (4.31)$$

El momento flector será mínimo cuando los momentos flectores en todos los apoyos sean iguales. O sea, $M_A = M_B = M_C$ de donde:

$$\frac{q \cdot l^2}{8} \cdot (2 \cdot \alpha^2 - 1) = -\frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot q}{2}$$

$$2 \cdot \alpha^2 - 1 = -4 \cdot \alpha^2$$

$$\alpha = 0{,}408$$

En este caso el momento en los apoyos y en el centro del tramo será:

$$M_A = M_B = M_C = -\frac{q \cdot l^2}{12}, \; M_E = M_D = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^2 = \frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$$

El diagrama de momentos resultante será:

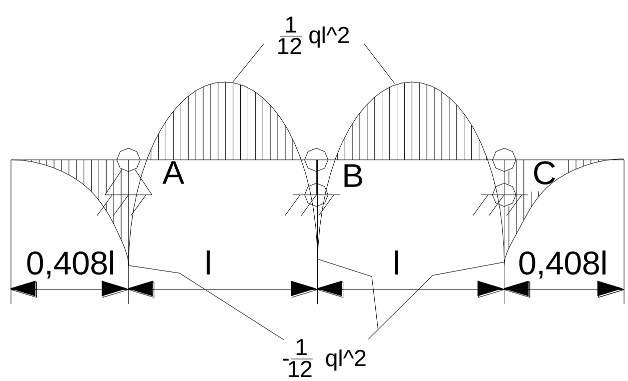


Fig. 4.42 Diagrama de Momentos Flectores Resultante Optimizado

Ejemplo No. 12

Construya aplicando la ecuación de los tres momentos el diagrama de momentos flectores resultante para la viga hiperestática de dos grados de hiperestaticidad mostrada en la Fig. 4.42.

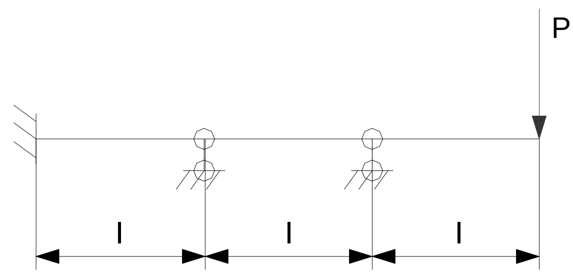


Fig. 4.42 Viga hiperestática empotrada con dos grados de hiperestaticidad

Solución:

La particularidad de esta viga consiste en que posee un empotramiento. Para resolver la misma por la ecuación de los tres momentos se sustituye el empotramiento por dos apoyos articulados situados a una distancia infinitamente pequeña, es decir se adiciona en al lado izquierdo un tramo de longitud $l_1 \to 0$ (Fig. 4.43). El sistema equivalente será entonces:

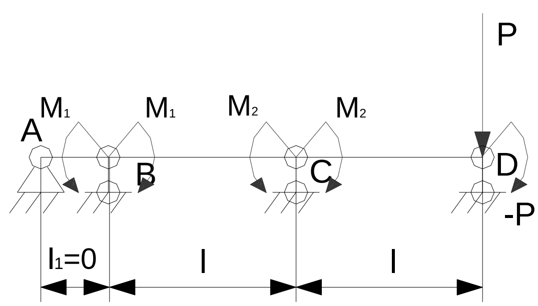


Fig. 4.43 Esquema de Análisis

Aplicando la ecuación de los tres momentos para los tramos AB y BC:

$$M_{izq} \cdot l_{izq} + 2 \cdot M_{med} \cdot \left(l_{izq} + l_{der}\right) + M_{der} \cdot l_{der} + 6 \cdot \delta_{1P} = 0$$

$$2 \cdot M_1 \cdot \left(0 + l\right) + M_2 \cdot l = 0$$

$$2 \cdot M_1 + M_2 = 0 \qquad (4.32)$$

Para los tramos BC y DC, en este caso el voladizo se sustituye por una carga P sobre el apoyo D y un momento que se considerará como momento de apoyo –Pl. La ecuación de los tres momentos en este caso será:

$$M_1 \cdot l + 2 \cdot M_2 \cdot (l + l) - P \cdot l \cdot l = 0$$

$$M_1 + 4 \cdot M_2 = P \cdot l \qquad (4.33)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.32) y (4.33) se obtiene:

$$M_1 = -\frac{1}{7} \cdot P \cdot l \qquad y \qquad M_2 = \frac{2}{7} \cdot P \cdot l$$

El diagrama de momentos flectores de la viga será:

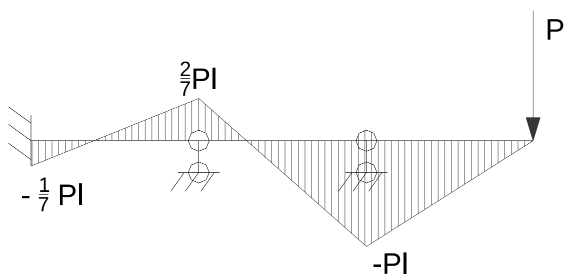


Fig. 4.44 Diagrama de momentos flectores resultante

4.12 Cálculo de apoyos verticales que se comportan como columnas

4.12.1 Conceptos de estabilidad. Carga crítica

De la Mecánica de los Sólidos Rígidos se conoce que el equilibrio de un sólido rígido puede ser estable, indiferente o inestable. Veremos que en el caso de los sólidos deformables también son posibles estos tres estados de equilibrio. Así, por ejemplo:

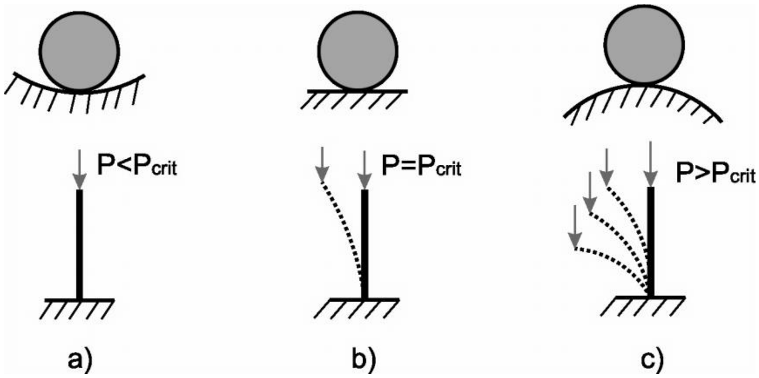


Fig. 4.45 Estados de Equilibrio

La esfera que se muestra en la Fig.4.42 a) colocada sobre una superficie cóncava horizontal tiene un estado de equilibrio estable. Si se le desvía ligeramente de su posición inicial de equilibrio y luego se retira esta acción, ella volverá a ocupar su posición inicial de equilibrio. Este mismo estado de equilibrio se presentará en una barra elástica comprimida, cuando la carga se compresión está por debajo de cierto valor crítico, $P<P_{crit}$.

La esfera de la Fig.4.42 b) estará en un estado de equilibrio indiferente, o sea, si se desvía ligeramente su posición ella adoptará una nueva posición de equilibrio. En el caso de la barra elástica para una carga de compresión $P=P_{crit}$ la barra adoptará una configuración curvilínea de equilibrio. El estado de equilibrio será entonces indiferente.

En el caso de la esfera colocada sobre una superficie convexa horizontal el estado de equilibrio será inestable. Basta una ligera desviación de su posición inicial de equilibrio para que la esfera ya no pueda recuperar dicha posición. Este sería el caso de la barra deformable si $P>P_{crit}$, la barra perdería el equilibrio y se produciría su destrucción por inestabilidad.

Se define entonces en el caso de los sólidos deformables la carga crítica como aquella carga para la cual el equilibrio de la barra comprimida es indiferente, o sea, la carga para la cual pueden existir indistintamente las configuraciones rectilínea y curvilínea de equilibrio y por encima de la cual la barra se destruye por inestabilidad

4.12.2 Determinación de la carga crítica de Euler

Analicemos ahora el estado crítico de una barra comprimida articulada en ambos extremos, o sea, cuando $P=P_{crit}$ y supongamos que la barra se encuentra en su configuración curvilínea de equilibrio (Fig. 4.43).

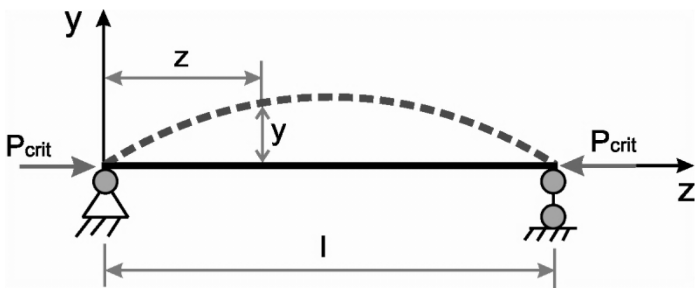


Fig. 4.46 Aplicación de la carga crítica de Euler sobre una barra articulada

Para el análisis se partirá de la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de una viga.

$$E \cdot I_{\min} \cdot y'' = M_f \qquad (4.34)$$

El momento de inercia empleado en la expresión (4.1) es el momento de inercia mínimo de la sección $I_{mín}$ ya que al producirse la deflexión de la barra esta ocurrirá con relación al eje centroidal para el cual el momento de inercia es mínimo.

En una sección z cualquiera:

$$M_f = -P_{crit} \cdot y \qquad (4.35)$$

El signo negativo significa que si la flecha ***y*** es positiva el momento flector es negativo y viceversa.

Sustituyendo (4.35) en (4.34).

$$E \cdot I_{\min} \cdot y'' = -P_{crit} \cdot y \qquad (4.36)$$

Ordenando:

$$y'' + \frac{P_{crit}}{E \cdot I_{\min}} \cdot y = 0 \tag{4.37}$$

Designando por:

$$\alpha^2 = \frac{P_{crit}}{E \cdot I_{\min}} \tag{4.38}$$

Se obtiene:

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = 0 \tag{4.39}$$

Este es una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya solución general es:

$$y = A \cdot \cos(\alpha \cdot z) + B \cdot sen(\alpha \cdot z) \tag{4.40}$$

Donde A y B son constantes de integración que se hallan por las condiciones de contorno:

Para z=0, y=0 $\rightarrow$ A=0 y,

Para z=l, y=0 $\rightarrow$ $B \cdot sen(\alpha \cdot l) = 0$

Esta última condición es válida si:

B=0, pero entonces y=0, lo que contradice la suposición inicial.

ó cuando

$$sen(\alpha \cdot l) = 0 \tag{4.41}$$

Para lo cual $\alpha \cdot l = 0, \pi, 2\pi, ..., n\pi$

donde:

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{l} \qquad (4.42)$$

Siendo ***n*** el número de semiondas del seno.

Sustituyendo (4.42) en (4.38) y despejando P_{crit} se obtiene:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{mín}}{\left(\frac{1}{n} \cdot l\right)^2} \qquad (4.43)$$

La cual se conoce como carga crítica de Euler.

El valor de la carga crítica depende teóricamente del número de semiondas que se originan en la deformación de la barra. Teóricamente son posibles n valores diferentes de la carga crítica. En realidad para cada tipo de apoyo la deformación será según un número de semiondas determinado. En el caso analizado n=1, que se corresponde con el valor mínimo de la carga crítica que produce la pérdida de la estabilidad del equilibrio en el caso de ambos apoyos articulados.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \qquad (4.44)$$

Esta es la expresión de la P_{crit} de Euler para ambos apoyos articulados.

4.12.3. Dependencia entre la carga crítica y las condiciones de apoyo

La expresión de la carga crítica de Euler se puede generalizar para las diferentes condiciones de apoyo como:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\nu \cdot l)^2} \tag{4.45}$$

donde:

$$\nu = \frac{1}{n} \tag{4.46}$$

Donde n es igual al número de semiondas que se originan en la deformación de la barra una vez que se pierde la estabilidad del equilibrio. El coeficiente ν es igual al inverso del número de semiondas y se conoce como coeficiente de reducción de la longitud.

Para determinar la expresión de la carga crítica para las diferentes condiciones de apoyo basta con analizar en cada caso bajo que curva elástica se producirá la pérdida de la estabilidad del equilibrio y contar entonces el número de semiondas de la deformación. En la Fig.4.44 se muestran los valores de ν para las diferentes condiciones de apoyos.

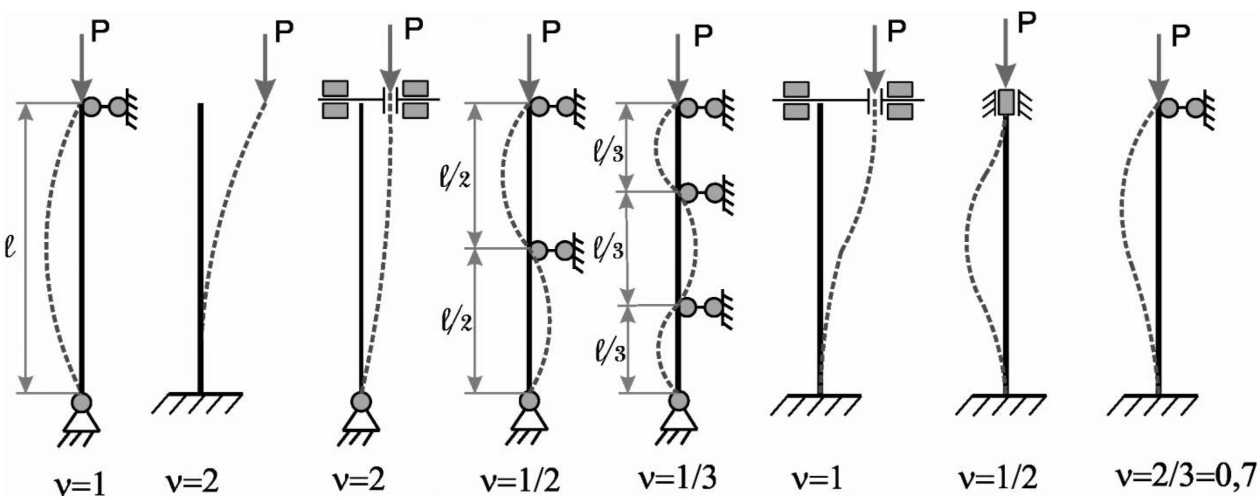


Fig.4.47 Condiciones de Apoyo

4.12.4. Límite de aplicabilidad de la fórmula de Euler

Realicemos algunas transformaciones a la fórmula de Euler para poder analizar su límite de aplicabilidad. Determinemos a partir de $P_{crít}$ la tensión crítica.

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{mín}}{(\nu \cdot l)^2 \cdot A} \tag{4.47}$$

En esta expresión se puede sustituir el cociente $I_{mín}/A$ por el radio de giro mínimo de la sección al cuadrado:

$$i_{mín}^2 = \frac{I_{mín}}{A} \tag{4.48}$$

donde:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot {i_{mín}}^2}{(\nu \cdot l)^2} \tag{4.49}$$

El término $\frac{\nu \cdot l}{i_{mín}}$ se denomina razón de esbeltez y se designa por la letra griega λ. O sea:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{mín}} \tag{4.50}$$

Observemos que λ caracteriza completamente la geometría de la construcción, o sea, condiciones de apoyo, longitud, geometría y dimensiones de la sección transversal.

En el cálculo de $P_{crít}$ se partió de la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de la barra y esta solo es aplicable en los límites de la Ley de Hooke de aquí que la expresión de Euler será solo válida si se cumple que:

$$\sigma_{crít} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \tag{4.51}$$

Donde σ_p es el límite de proporcionalidad del material.

De manera que la fórmula de Euler es solo aplicable para barras comprimidas que tienen una razón de esbeltez mayor que cierto valor límite. O sea:

$$\lambda \geq \lambda_{lím} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} \tag{4.52}$$

Estos elementos comprimidos se conocen como miembros esbeltos. El valor de $\lambda_{lím}$ se puede calcular exactamente para cada material por la expresión (4.19), pero para cálculos aproximados se pueden utilizar los siguientes valores:

- Para acero de bajo carbono empleado en la construcción de perfiles laminados $\lambda_{lím} \cong 100$.
- Para el hierro fundido $\lambda_{lím} \cong 80$.
- Para la madera $\lambda_{lím} \cong 70$.
- Para aceros aleados al cromo molibdeno $\lambda_{lím} \cong 70$.

4.12.5. Carga crítica en el caso de tensiones por encima del límite de proporcionalidad

Cabe preguntarse cómo se calcula la carga crítica cuando $\lambda < \lambda_{lím}$. Para respondernos esta pregunta es preciso analizar el gráfico real de variación de la tensión crítica como una función de la razón de esbeltez λ para un material dado. En la Fig. 4.45 se muestra este gráfico para el acero de bajo carbono.

En la gráfica se pueden diferenciar tres zonas. Los miembros cortos ($\lambda \leq \lambda_c$), los cuales no fallan por pérdida de la estabilidad del equilibrio, sino por compresión. Los miembros intermedios, para los cuales la tensión crítica es inferior a la tensión límite de compresión, o sea, que en la falla interviene la pérdida de la estabilidad después que las tensiones han alcanzado valores que incluso superan el límite de fluencia del material. Sin embrago, la falla en estos elementos se produce con tensiones que están muy por debajo de las tensiones calculadas por la expresión de Euler y finalmente los miembros esbeltos, para los cuales se produce la pérdida de la estabilidad del equilibrio con tensiones que se pueden calcular por la expresión de Euler y que están muy por debajo de la tensión límite de compresión.

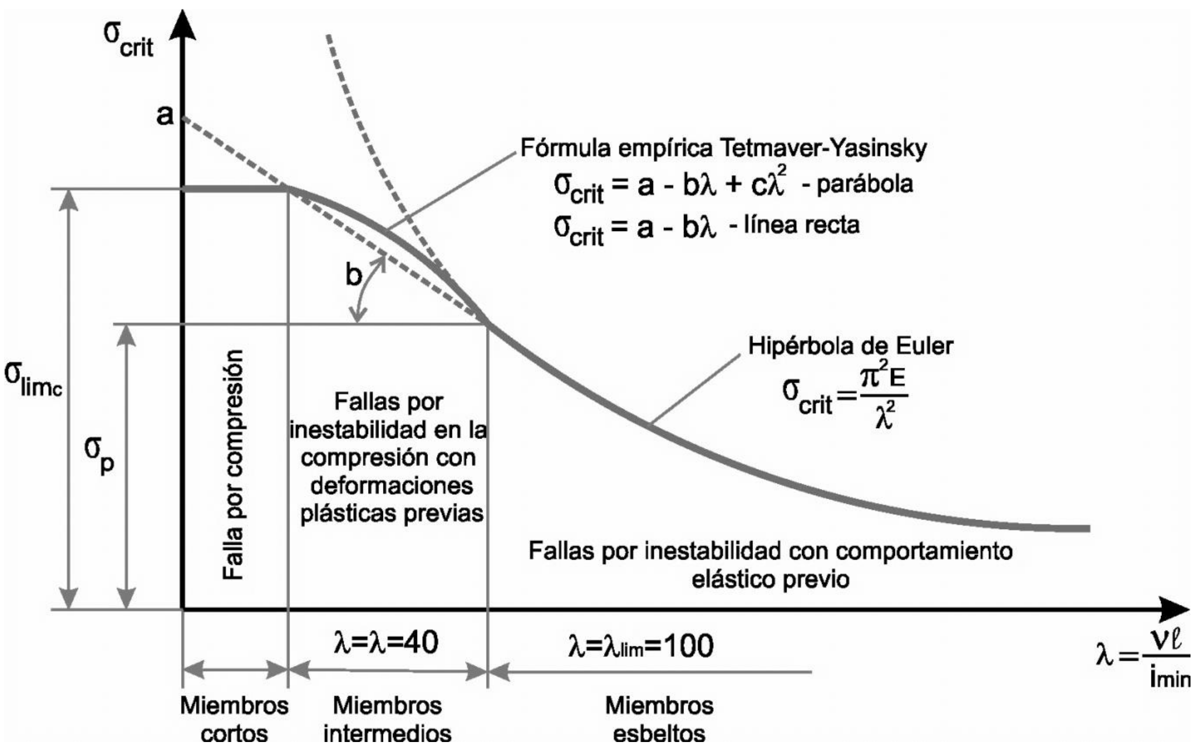


Fig. 4.48 Gráfico real de variación de la tensión crítica como una función de la razón de esbeltez λ para el acero de bajo carbono

Para el cálculo de la tensión crítica en el caso de los miembros intermedios ($\lambda_c \leq \lambda \leq \lambda_{lim}$) se emplean fórmulas empíricas.

Estas fórmulas empíricas se conocen como fórmula de Tetmaver-Yasinsky o también como fórmula de la parábola o de la línea recta.

$$\sigma_{crit} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \tag{4.53}$$

Los valores de los coeficientes para diferentes materiales aparecen en la literatura. Así, por ejemplo:

- Para acero CT-3 (ruso) a=3 100 kgf/cm^2, b=11,4 kgf/cm^2 y c=0
- Para acero CT-5 (ruso) a=4 640 kgf/cm^2, b=36,17 kgf/cm^2 y c=0
- Para fundición gris a=7 760 kgf/cm^2, b=120 kgf/cm^2 y c=0,53 kgf/cm^2
- Para madera a=293 kgf/cm^2, b=1,94 kgf/cm^2 y c=0

Ejemplo No. 13

Calcular la carga admisible para una barra comprimida de acero de bajo carbono con $\sigma \cong 2\ 000$ kgf/cm^2 y $E=2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, cuya sección transversal es rectangular de dimensiones 4x6 cm. La longitud de la barra l=80 cm y los extremos se pueden considerar articulados. Tome $n_s=3$

Solución:

La carga admisible a la compresión con posible pérdida de la estabilidad del equilibrio se calcula como:

$$[P] = \frac{P_{crít}}{n_s}$$

El factor de seguridad a la estabilidad en el caso de los aceros se toma n_s= 1,8 a 3,5, en el caso del hierro fundido donde la pérdida de la estabilidad se produce con fractura se toman valores mayores para el factor de seguridad n_s= 5 a 6,5. En la madera se recomienda n_s= 2,8 a 3,2. En este caso se requiere n_s= 3.

Para calcular la carga admisible se requiere calcular entonces la carga crítica, pero para ellos tenemos que averiguar primero si se trata de un miembro intermedio o esbelto. Calculemos entonces la razón de esbeltez:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{\min}}$$

donde:

ν =1 (extremos articulados).

l = 80 cm

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3}{b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = 1{,}15\ cm$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 80}{1{,}15} = 69{,}5\text{, y:}\quad \lambda_{\lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \cong 100$$

Por lo que se trata de un miembro intermedio.

Para el acero de bajo carbono (CT-3)

$$\sigma_{crit} = a - b \cdot \lambda = 3100 - 11{,}4 \cdot \lambda \quad kgf / cm^2\text{, y}$$

$$P_{crit} = \sigma_{crit} \cdot A = (3100 - 11{,}4 \cdot 69{,}5) \cdot 4 \cdot 6 = 55\,200 \quad kgf$$

La carga admisible será:

$$[P] = \frac{P_{crít}}{n_s} = \frac{55\,200}{3} = 18\,400\ kgf$$

4.12.6 Método del coeficiente φ de reducción de las tensiones admisibles

Al diseñar un elemento comprimido con posible pérdida de la estabilidad del equilibrio se presenta una contradicción, la expresión para el cálculo de la carga crítica depende de la razón de esbeltez y esta a su vez de las dimensiones de la sección transversal.

Esta contradicción se resuelve a través del método del coeficiente φ de reducción de las tensiones admisibles.

Este método se fundamenta en que la tensión admisible para un valor de λ dado se puede hallar como el producto de la tensión admisible a compresión $[\sigma]_c$ por un coeficiente φ de reducción de las tensiones admisibles que es una función de λ (Fig.4.46). O sea:

$$[\sigma]_s = \varphi \cdot [\sigma]_c \tag{4.54}$$

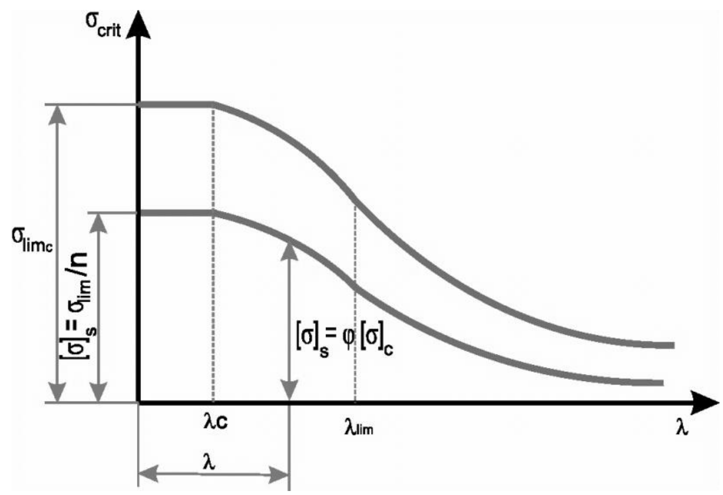


Fig.4.49 Comportamiento de la tensión crítica en función de la esbeltez

Los valores de φ como una función de λ aparecen tabulados para diferentes materiales en la Tabla 12, pág. 459 del (Feodosiev 1985).

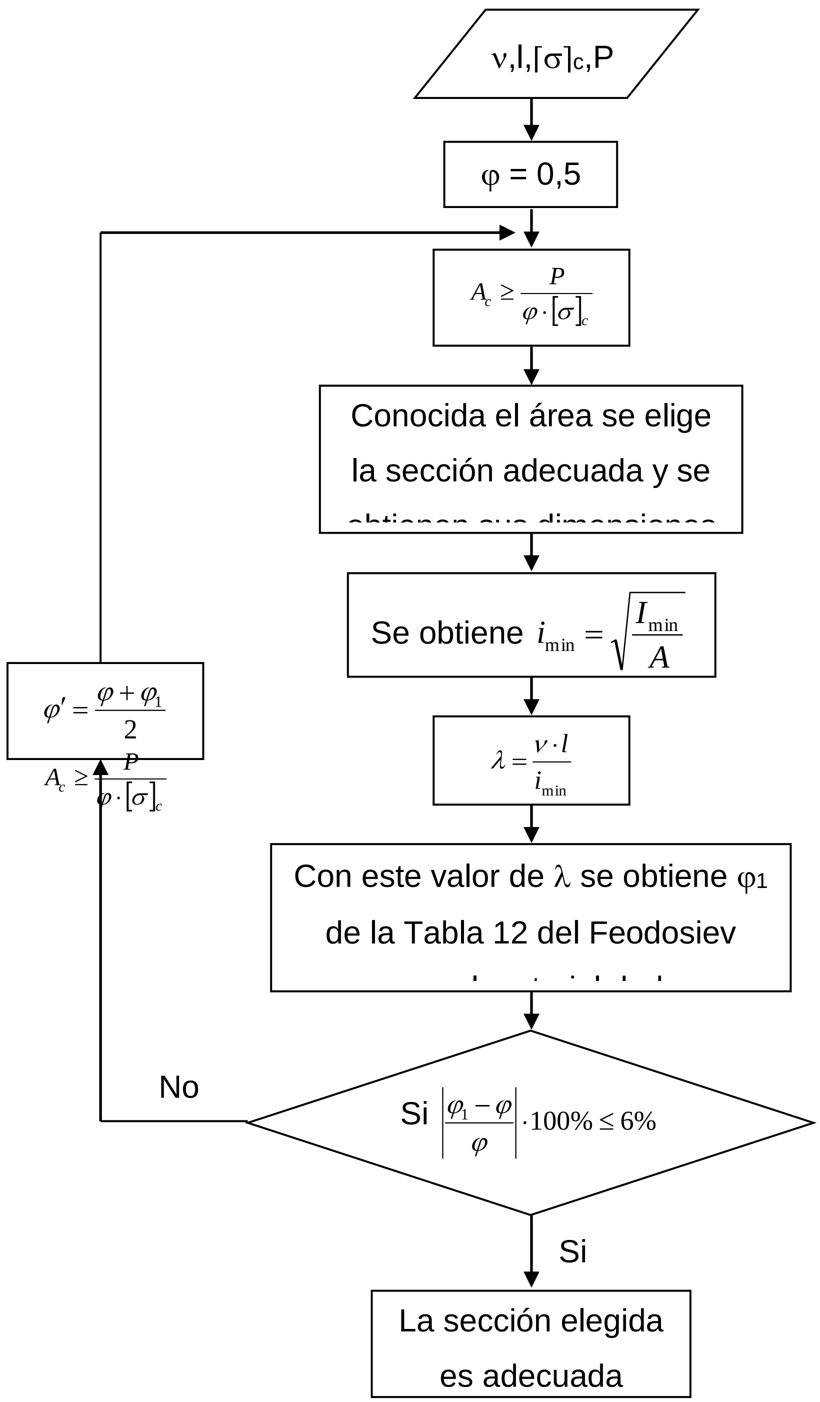
El cálculo del elemento se realiza entonces por la expresión:

$$\sigma_c = \frac{P}{A_c} \leq [\sigma]_s = \varphi \cdot [\sigma]_c \tag{4.55}$$

De donde se puede despejar:

$$A_c \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]_c} \tag{4.56}$$

La contradicción mencionada no se resuelve con este método, ya que φ también depende de λ, pero se puede organizar fácilmente la selección de la sección mediante el método de prueba y error. El algoritmo de cálculo es el siguiente:



Ejemplo No.14.

Calcule la dimensión a necesaria en la sección media de la biela del motor de combustión interna que se muestra en la Fig. 6. La posición mostrada en la biela debe considerarse como la más peligrosa. La presión en el interior del cilindro en el momento señalado es p_{cil}= 1,5 MPa. La sección media de la biela tiene las proporciones que se indican. El diámetro del pistón es d=10 cm. El material de la biela es acero forjado para el cual se puede tomar $[\sigma]_c$=100 MPa (acero CT-5).

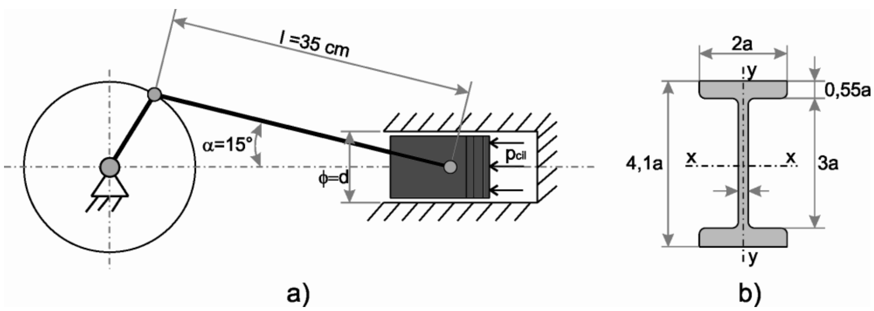


Fig.4.50. a) Mecanismo Biela-Manibela-corredera. b) Sección de la biela

Solución:

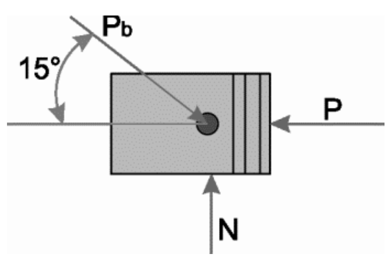
La fuerza sobre el pistón es:

$$P = p_{cil} \cdot A_p = p_{cil} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Para p_{cil}=1,5 MPa=0,15 kN/cm^2

$$P = 0{,}15 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 11{,}78\ kN$$

La fuerza sobre la biela se obtiene del diagrama de cuerpo libre del pistón.



$$\sum F_x = P_b \cdot \cos 15° - P = 0 \quad \Rightarrow \quad P_b = \frac{P}{\cos 15°} = \frac{11{,}78}{0{,}966} = 12{,}2\ kN$$

Se asume φ=0,5 y calculamos A_b con $[\sigma]_c$=100 MPa=10 kN/cm^2

$$A_b \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]_c} = \frac{12{,}2}{0{,}5 \cdot 10} = 2{,}44\ cm^2$$

El área real de la sección media de la biela es:

$$A_b = 2 \cdot 2a \cdot 0.55 \cdot a + 3a \cdot a = 5{,}2 \cdot a^2$$

de donde:

$5{,}2 \cdot a^2 > 2{,}44 \Rightarrow a = 0{,}69$ cm

Tomamos a=0,7 cm

Calculamos: $I_{mín} = I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot (0{,}55 \cdot a) \cdot (2a)^3 + \frac{1}{12} \cdot (3a) \cdot a^3$

$$I_{mín} \cong a^4$$

El radio de giro mínimo será:

$$i_{mín} = \sqrt{\frac{I_{mín}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{5{,}2 \cdot a^2}} \cong 0{,}44 \cdot a = 0{,}44 \cdot 0{,}7 = 0{,}31\, cm$$

La razón de esbeltez posee un valor de:

$$\lambda = \frac{\gamma \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 35}{0{,}31} = 112$$

De la Tabla 12 – Feodosiev, para el acero CT-5 con λ=112 (pág. 459), se obtiene:

λ	φ
110	0,43
112	φ_1
120	0,36

Interpolando, se obtiene: φ_1=0,416.

La diferencia en porciento de este valor con relación al φ asumido es:

$$\%dif = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{0{,}416 - 0{,}5}{0{,}5}\right| \cdot 100\% = 14\% > 6\%$$

Asumiendo $\varphi' = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}416}{2} = 0{,}458$ y repitiendo los cálculos:

$$A_b \geq \frac{12{,}2}{0{,}458 \cdot 10} = 2{,}62\, cm^2$$

$$a \geq \sqrt{\frac{2{,}62}{5{,}2}} = 0{,}71\, cm$$

$$i_{\min} = 0{,}44 \cdot 0{,}71 = 0{,}313\, cm$$

$$\lambda = \frac{\gamma \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 35}{0{,}313} \cong 112$$

Se obtiene de la Tabla 12 el valor para φ_1=0,432

El por ciento de diferencia:

$$\%dif = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{0{,}432 - 0{,}466}{0{,}466}\right| \cdot 100\% = 7{,}3\% > 6\%$$

Asumiendo ahora:

$$\varphi' = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0{,}466 + 0{,}432}{2} = 0{,}45$$

$$A_b \geq \frac{12{,}2}{0{,}45 \cdot 10} = 2{,}71\, cm^2$$

$$a \geq \sqrt{\frac{2{,}71}{5{,}2}} = 0{,}722\, cm$$

$$i_{\min} = 0{,}44 \cdot 0{,}71 = 0{,}318\, cm$$

$$\lambda = \frac{\gamma \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 35}{0{,}318} \cong 110$$

Para λ=110 de la Tabla 12 se obtiene: φ_1=0,43

$$\%dif = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{0,43 - 0,45}{0,45}\right| \cdot 100\% = 4,55\% < 6\%$$

La dimensión de a necesaria es:

$a \geq 0,722$ cm

Tabla 4.2 Valores de esbeltez según el tipo de acero

Esbeltez (λ)	Aceros CT-1,CT-2, CT-3 y CT-4	Acero CT-5	Aceros de alta calidad $\sigma_j \geq 3\ 200$	Hierro fundido	Madera
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,37	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10

190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

4.12.7 Método general para la estimación de la tensión crítica a la estabilidad en los miembros intermedios y cortos de materiales dúctiles

4.12.7.1Miembros intermedios y cortos de materiales dúctiles

En un sentido amplio, la pérdida de la estabilidad del equilibrio de los elementos comprimidos (pandeo) se define como un fenómeno de inestabilidad estructural caracterizado por una pérdida del estado de equilibrio cuando las cargas externas alcanzan un estado crítico. Los primeros experimentos sobre pandeo de barras comprimidas centralmente fueron realizados por Musschenbroek en 1729. Como resultado de sus pruebas concluyó que la carga del pandeo era inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna, resultado que fue obtenido por Euler 30 años después. Leonhard Euler en 1757 propuso el modelo matemático para los análisis de pandeo elástico en columnas que todavía es válido hoy. Al principio los ingenieros no aceptaron los resultados de los experimentos de Musschenbroek y de la Teoría de Euler. Casi 90 años después, Lamarle fue el primero en darle una explicación satisfactoria a la diferencia entre los resultados teóricos y los experimentales. Él demostró que la teoría de Euler no se contradice con los resultados de los experimentos, siempre que se garanticen las condiciones que éste asumió en el desarrollo de la misma. A finales del siglo XIX y principios del XX Baushinger en Alemania en 1903, Considere en Francia en 1889 y Tetmaüer en Suiza y Austria en 1889, con el auge que había tomado la construcción de estructuras metálicas en esa época, realizaron experimentos con ese acero estructural y demostraron que la fórmula de Euler era válida siempre que se cumplieran las condiciones supuestas por Euler en los extremos de la columna y sólo cuando la tensión crítica estaba por debajo del límite de proporcionalidad del material. En estos experimentos se tomaron las mayores precauciones con objeto de garantizar se cumplieran las condiciones en los extremos establecidas por la teoría. Se emplearon columnas con extremos aguzados y se adoptaron las medidas necesarias para asegurar la aplicación axial de la carga de compresión. En la Fig.4.48 se muestra los resultados de los experimentos de Tetmaüer.

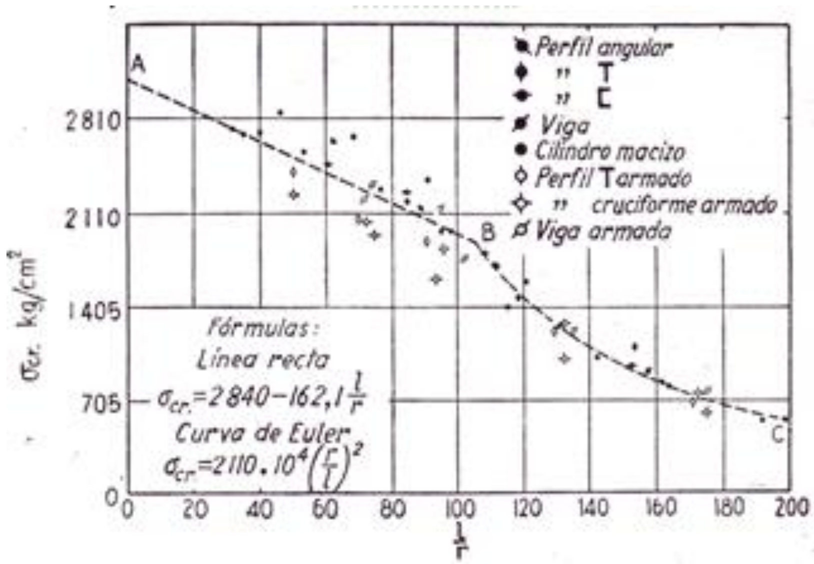


Fig.4.51 Resultados experimentales obtenidos por Tetmaüer

Las investigaciones sobre la posible pérdida de la estabilidad del equilibrio no se han detenido desde esa época, se han publicado numerosos trabajos sobre pandeo elástico o reversible de columnas de materiales estructurales.

Timoshenko y Gere ya en 1961 habían resuelto otros casos de mucho más complejos y de gran interés práctico, tales como la viga - columna bajo una carga axial distribuida uniformemente sobre una fundación elástica utilizando un análisis similar. West y Maf] determinaron los autovalores de una viga - columna sobre soportes elásticos usando el método numérico del valor inicial. Cheng y Pantelides obtuvieron las ecuaciones diferenciales, coeficientes de rigidez, y fuerzas de empotramiento de una viga - columna, incluyendo las deformaciones a flexión y a cortante. Ang y Wang y posteriormente Wang profundizaron en el estudio del pandeo de vigas - columnas sobre fundaciones elásticas, utilizando el Método de Elementos Finitos, pero la inmensa mayoría de estos trabajos enfrentan sólo el caso de columnas de gran esbeltez. Más recientemente, los efectos de las conexiones semirrígidas en la estabilidad de las vigas - columnas y estructuras empotradas han sido presentados por Aristizábal Ochoay por Bezujov. En la Universidad de Cienfuegos se han desarrollado estudios acerca de la estabilidad en cilindros hidráulicos, donde se destacan los trabajos.

Una descripción breve de los métodos utilizados para predecir la carga crítica de pandeo en columnas la da Timoshenko. Existen otros trabajos que ofrecen una presentación más detallada en los cuales se describen diferentes métodos para resolver este problema como son: el Método Clásico de Euler basado en la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de una viga, las Fórmulas Empíricas, el Método del Coeficiente φ de Reducción de la Tensión Admisible, los Métodos Energéticos, el Método de los Parámetros de Origen, el Método de la Integración Numérica de la Ecuación Diferencial, el Método de los Elementos Finitos, la Fórmula de la Secante para el caso de columnas con carga excéntrica y la aplicación del Método de las Cargas Límites al abordar los casos de pérdida de la estabilidad bajo flexión longitudinal y transversal simultánea.

De todos estos métodos descritos en la literatura en el presente trabajo se centrará la atención en el límite de aplicabilidad de la fórmula de Euler y específicamente en las expresiones y en los límites de aplicabilidad de las diferentes fórmulas empíricas empleadas para determinar la tensión o la carga crítica en los miembros cortos e intermedios, los cuales no están claramente establecidos en la literatura consultada.

4.12.7.2 Método Clásico de Euler

Según este método se parte de la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de una viga: $E\cdot I\ d^2y/dz^2 = M_f$, donde el momento flector M_f se expresa en función de la carga axial y de la flecha máxima del elemento comprimido, obteniéndose una ecuación diferencial que, como regla, puede ser resuelta por los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales y de donde se puede obtener la expresión de la carga crítica para diferentes condiciones de apoyo y de carga e incluso se pueden obtener soluciones exactas para columnas de rigidez variable. La expresión generalizada de la Carga Crítica de Euler se puede escribir de la siguiente manera:

$$P_{crít} = \frac{\pi^2 \, E \, I_{mín}}{(\nu \, l)^2} \qquad (4.57)$$

Donde ν es un coeficiente que depende de las condiciones de carga y de apoyo existentes en la columna y se conoce como coeficiente de reducción de la longitud. En Pisarenko aparecen los valores de este coeficiente para numerosas variantes de elementos comprimidos con diferentes condiciones de carga y apoyos, incluso algunos casos de elementos de rigidez variable.

4.12.7.3 Fórmulas Empíricas

El Método Clásico de Euler presenta una gran limitación, es solamente aplicable en elementos esbeltos (gran longitud y pequeñas dimensiones en la sección transversal) para los cuales el comportamiento carga – deformación del elemento es lineal y las tensiones no exceden el límite de proporcionalidad del material, tal como se determinó en los experimentos mencionados anteriormente. En términos de Tensión Crítica la expresión de Euler se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma_{crít} = \frac{\pi^2 \, E}{(\lambda)^2} \qquad (4.58)$$

Donde:

$\lambda = \nu \, l \,/\, i_{min}$, término conocido como razón de esbeltez.

La expresión de la Tensión Crítica de Euler es válida solamente para los miembros esbeltos, o sea, cuando $\lambda \geq \lambda_{lím,}$ donde la razón de esbeltez límite es igual a:

$$\lambda_{lím} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} \qquad (4.59)$$

Este inconveniente ha obligado históricamente a la obtención de fórmulas empíricas que permitieran hacer pronósticos de la posible pérdida de la estabilidad del equilibrio cuando no se cumplen estas condiciones. Entre estas fórmulas se encuentran la Fórmula del AISC (American Institute of Steel Construction) Esta institución ha obtenido expresiones tanto para columnas intermedias o cortas (mediana y pequeña esbeltez) como para columnas esbeltas, hechas de acero estructural, aunque esta última es la misma Ecuación de Euler con el módulo de elasticidad específico del acero estructural y un factor de seguridad preestablecido n_s = 1,92. Si se toma el factor de seguridad n_s = 1, la misma expresa la tensión crítica para la cual se produce la pérdida de la estabilidad en el elemento, o sea:

$$P_{\text{crít}} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_{\text{lím}})^2}\right)\sigma_f \tag{4.60}$$

El valor particular de λ que separa los miembros esbeltos de los intermedios, se expresa en este caso como:

$$\lambda_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_f}} \tag{4.61}$$

Comparando las expresiones (4.59) y (4.61) se aprecia claramente que esta expresión parte del supuesto que la formulo de Euler es válida hasta un valor de la tensión de trabajo:

$\sigma = 0{,}5\ \sigma_f \ll \sigma_p = (0{,}75 \text{ a } 0{,}85)\ \sigma_f \cong 0{,}8\ \sigma_f$

Esto contradice la Teoría de Mecánica de Materiales e introduce un error ya que está claro que la expresión de Euler es válida siempre que se cumpla la Ley de Hooke, o sea, siempre que la tensión de trabajo sea: menor o igual que el límite de proporcionalidad del material σ_p y en esta expresión se utiliza como límite de aplicabilidad una tensión que está muy por debajo del límite de proporcionalidad.

Otra fórmula reflejada en la literatura es la de J.B. Johnson, la cual ha sido obtenida para el caso de elementos intermedios particularmente en elementos de máquinas que pueden ser fabricados de cualquier acero y en la cual no se prefija el factor de seguridad dado el carácter variable de las condiciones ambientales y de servicio que caracteriza el comportamiento de los elementos de máquinas. Sin embargo cuando se profundiza en esta expresión se observa que la misma es idéntica a la fórmula de la AISC cuando el factor de seguridad se toma $n_s = 1$, o sea, que en el caso analizado en el presente trabajo, las conclusiones serían las mismas que las obtenidas para la ecuación de la AISC.

En la literatura de la antigua URSS se utiliza para el caso de los miembros intermedios la Fórmula Empírica conocida como de Tetmaüer – Yasinski o simplemente Fórmula de Yasinski obtenida sobre la base de numerosos experimentos para diferentes materiales, donde la tensión critica se expresa como una correlación del tipo:

$$\sigma_{crít} = a - b\lambda + c\lambda^2 \qquad (4.62)$$

Los coeficientes de la correlación a, b y c aparecen en la literatura para diferentes materiales. La ecuación (6), tiene la gran limitación desde el punto de vista práctico que las constantes a, b y c han sido obtenidas sólo para un número reducido de materiales, lo que limita enormemente su utilización práctica. La Tabla 4.3 se dan los valores de a, b y c dados por(Pisarenko et al. 1989) para algunos aceros.

Tabla 4.3 Valores de a, b y c para miembros intermedios según la fórmula de Yasinski

Material	σ_f kgf/cm^2	σ_p kgf/cm^2	E kgf/cm^2	λ_{lim}	λ_c	a kgf/cm^2	b kgf/cm^2	c kgf/cm^2
Acero Ct 3	2 400	2 000	2×10^6	100	40	3 100	11,4	0
Acero Ct 5	2 800	2 400	2×10^6	90	-	4 640	32,6	0
Acero 40	3 400	2 600	$2{,}135 \times 10^6$	90	-	3 210	11,6	0

4.12.8 Método Analítico Propuesto

En el presente epígrafe se pretende obtener una expresión analítica general aproximada para estimar el valor de la tensión crítica para los miembros cortos e intermedios partiendo del razonamiento simple de que para $\lambda = 0$, la tensión que provoca la falla del elemento comprimido en caso de los aceros y en general para los materiales dúctiles es el límite de -fluencia, o sea, $\sigma_{crit.} = \sigma_f$ y para $\lambda = \lambda_{lim.}$, la tensión que provoca la pérdida de la estabilidad del equilibrio del elemento comprimido es la tensión crítica de Euler obtenida para $\lambda = \lambda_{lim.}$, donde $\lambda_{lím} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$. Si se inscribe una parábola entre estos dos puntos tal como se muestra en la Fig.4.52 del diagrama σ_{crit} v.s. λ, se obtiene la expresión 7 de la tensión crítica que será exacta para $\lambda = 0$ y para $\lambda = \lambda_{lim.}$ Para los restantes valores de λ sólo será una aproximación pero en la comparación con las formulas empíricas existentes la correspondencia con la Teoría es mucho más adecuada.

$$\sigma_{cr} = \sigma_f - \frac{\sigma_p(\sigma_f - \sigma_p)}{\pi^2 \cdot \mathrm{E}} \cdot \lambda^2 \qquad (4.63)$$

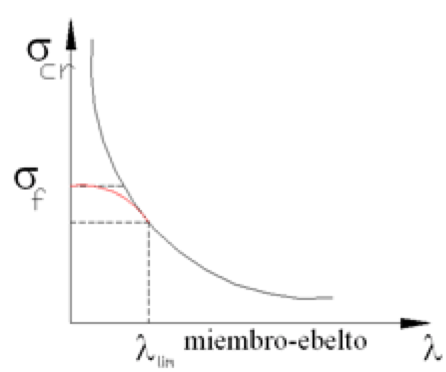


Fig. 4.52 Parábola inscrita entre σ_f y σ_{crit} para λ_{lim}

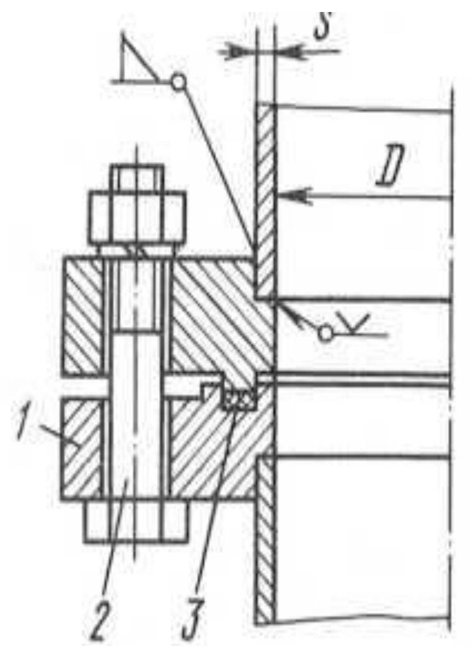
4.13 Conclusiones parciales del Capítulo IV

1. En el Capítulo se abordan los métodos energéticos para el cálculo de los desplazamientos que no solo sirven para calcular los desplazamientos lineales o angulares de cualquier estructura, sino que constituyen la base de la solución de las estructuras hiperestáticas por el Método de las Fuerzas.
2. Se aborda la solución de sistemas hiperestáticos planos y plano – espaciales, aplicando el Método de las Fuerzas e incluso aplicando en su solución las propiedades de simetría.
3. Se describe el Método de los Tres Momentos para la solución de vigas hiperestáticas y se aplica el mismo a la solución de una viga hiperestática de tres apoyos, donde se optimiza la posición de los mismos para lograr la máxima resistencia del elemento apoyado, que pudiera ser un intercambiador de calor.
4. Se aborda en el capitulo el cálculo de apoyos verticales como son por ejemplos las patas de muchos aparatos químicos o las patas de recipientes esféricos que se apoyan en patas verticales.
5. Se describe el cálculo de este tipo de apoyos cuando el mismo se comporta como un elemento esbelto aplicando el Método de Euler o cuando se trata de miembros cortos o intermedios que se utilizan fórmulas empíricas como puede ser la fórmula de Yasinski.
6. Finalmente se explica un Método General para la solución de Miembros Cortos e intermedios que constituye un Aporte del Colectivo de Mecánica Aplicada a la teoría de la Pérdida de la Estabilidad del Equilibrio de estos Elementos.

Capítulo V Cálculo de Bridas y Uniones Herméticas

5.1 Introducción al Capítulo

Las uniones embridadas (Fig. 5.1) es el tipo de uniones desmontables más ampliamente utilizables en la construcción de maquinaria química y en ellas se emplean las juntas que aseguran la hermeticidad y resistencia de estructuras, así como la simplitud de fabricación, montaje y desmontaje. La unión está compuesta por dos bridas, pernos y una junta que se pone entre las superficies de empaquetadura y permite asegurar la hermeticidad, siendo relativamente pequeño el esfuerzo de apriete de los pernos.



1 – Bridas; 2 – Pernos; 3 – Junta

Fig. 5.1 Unión embridada

Este tipo de unión no es como regla tratado en la literatura clásica de Elementos de máquinas. En el presente trabajo sólo fueron encontrados dos libros que la tratan con un nivel similar:(Mijalev et al. 1984) y el (Birger J.A., Schorr B.F. 1966) Todo este Capítulo ha sido conformado con esas dos fuentes.

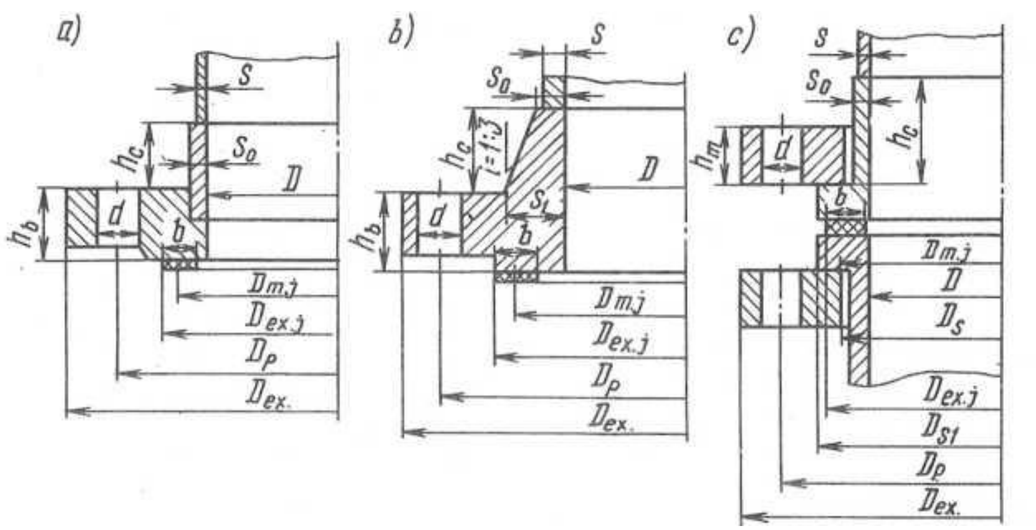
5.2 Tipos de Uniones Embridadas

Según la estructura, las bridas pueden dividirse en enteras (Fig. 5.2, a, b), cuando el cuerpo del aparato y la brida funcionan bajo la carga en conjunto, y en libres (Fig. 5.2 c), cuando el cuerpo del aparato está descargado de los momentos flectores que surgen durante la apriete de la unión embridada. La estructura de las bridas se determina en gran medida por la presión del medio operacional y por los requisitos de las mínimas horas trabajadas invertidas en el montaje o desmontaje de la unión.

Las bridas planas soldadas (ver fig. 1.37,a) son anillos planos soldados al borde dela virola por su perímetro. Se recomienda utilizarlos (Ver Tabla 5.1), siendo la presión convencional de 0,3 a 1,6 MPa y la temperatura de hasta 300 °C.

Las bridas empalmadas a tope por soldadura (Ver Fig. 5.2 b) tienen casquillos muñones cónicos. El casquillo de la brida se suelda a la virola por medio de una costura empalmada. Los márgenes de empleo de las bridas se ofrecen en la Tabla 5.1.

Las bridas libres (Ver Fig. 5.1b) son anillos. El diámetro de sus orificios es algo mayor que el diámetro exterior de la virola en la cual las bridas se ponen libremente.



a - Plana soldada; b - empalmada a tope por soldadura; c - Libre

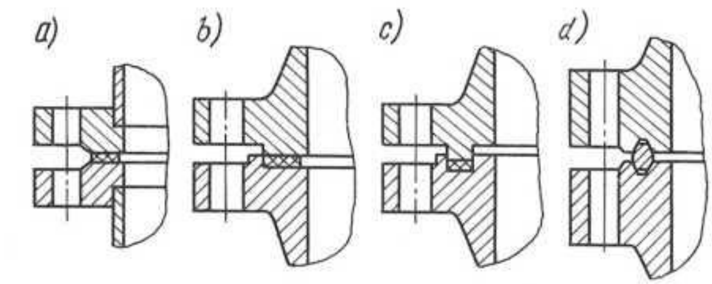
Fig. 5.2 Tipos de bridas

Durante el apriete la brida se apoya en el rebordeado de la virola o anillo soldado a su borde. Tales bridas se emplean a una presión convencional de hasta 1,6 MPa y a una temperatura de hasta 300 °0, y el número de ciclos de carga no debe exceder de 2×10^3. Habitualmente, se emplean en los aparatos fabricados de materiales blandos (cobre, aluminio) o frágiles (cerámica, cristal).

Las formas estructurales de las superficies de empaquetadura son reglamentadas por los OST 26-426-79 y 26-427-79 y se presentan en la Fig. %.3. La superficie plana de empaquetadura (Ver Fig. 5.3, a) se emplea a una presión interior de hasta 0,6 MPa, las bridas hembra-macho (Ver Fig.5.3 b), de 0,6 a 1,6 MPa, las de superficie acanalada (Ver Fig.5.3 c}j de 1,6 a 6,4 MPa. Las superficies de empaquetadura para la junta metálica de sección oval u octagonal (ver Fig.5.3 d) se recomiendan para las presiones de 6,4 a 16 MPa.

La junta debe responder a las siguientes especificaciones principales al ser comprimida por medio del menor posible apriete, ésta debe llenar todas las microasperezas de empaquetadura; conservar la hermeticidad de la unión en caso de los desplazamientos elásticos de los elementos de la unión embridada (con este propósito, el material debe poseer propiedades de elasticidad); conservar la hermeticidad de la unión durante su empleo prolongado bajo la acción de los medios corrosivos a temperaturas altas y bajas; el material de junta no debe ser deficitario.

Las condiciones muy diferentes de funcionamiento de las juntas dan lugar a la variedad de materiales de juntas utilizables: los metales - acero, níquel, aluminio, cobre, plomo; polímeros - plástico fluorocarbúrico, polietileno, caucho plasticado de policloruro de vinilo, asbesto, paronita, goma, juntas combinadas - asbesto en forros de metal laminado, polímeros en combinación con metales, etc.



a - Superficie lisa de empaquetadura; b - Hembra-Macho; c - Superficie acanalada; d - Para la junta metálica de sección ovalada u octagonal

Fig. 5.3. Tipos de las superficies de empaquetadura de las uniones embridadas

Tabla 5.1 Tipos y límites de aplicación de las bridas

Diámetro interior D, mm	Presión interior, MPa													
	Planas soldadas				Empalmadas por soldadura						Empalmadas a tope por soldadura para junta metálica de sección oval u octagonal			
	0,3	0,6	1,0	1,6	0,6	1,0	1,6	2,5	4,0	6,4	6,4	8,0	10,0	16,0
400-1600	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
1600-2000	x	x	x	x		x	x	x						
2000-3200	x	x	x			x	x							
3200-4000	x				x	x								

5.3 Metodología de cálculo de una Unión Embridada

El cálculo complejo de la unión embridada consiste en la determinación de las dimensiones geométricas de sus elementos principales (bridas, juntas, pernos) que satisfacen las condiciones de hermeticidad y resistencia.

Las uniones embridadas fabricadas de las aleaciones a base de titanio y aluminio, a diferencia de las a base de acero, se calculan, partiendo del hecho de que son inadmisibles las deformaciones plásticas. La metodología de cálculos de estas uniones se ofrece, respectivamente, en el OST 26-01-1298-75 y RTM 26-01-63-74.

A continuación, se ofrece el orden de cálculo de las uniones embridadas de acero de los aparatos que funcionan bajo la presión interior como los más difundidos en la construcción de aparatos químicos.

Las fórmulas de cálculo son utilizables (Ver Fig. 5.2) si $D_{ext}/D \leq 2$. Si el aparato funciona en las condiciones de varios regímenes de cálculo en temperatura y presión el cálculo se lleva a cabo en el régimen más grave.

La temperatura calculada de los elementos de la unión embridada se ajusta de acuerdo con los datos de la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Temperatura calculada de los elementos de una unión embridada

Tipo de Unión embridada	Aisladas			No Aisladas		
	tb	T1	tp	tb	T1	tp
Empalmadas a tope por soldadura	t	-	0,97t	0,96t	-	0,95t
Con anillos libres	t	0,97t	0,9t	0,96t	0,9t	0,81t
Nota: tb, T1, tp, t son temperaturas de las bridas, anillos libre, pernos y vírola, respectivamente.						

La tensión admisible para el material de los pernos (espárragos) se determina por la Tabla 5.3. Por las fórmulas (5.1) ó (5.2) se calcula la tensión admisible para el material de los pernos (espárragos) no indicado en la tabla 5.3:

Tabla 5.3 Tensión admisible [a]p (MPa) para pernos de acero (espárragos)

Temperatura calculada t, °C	Marca del acero					
	35;BOT5	12X18H10T; 10X17H13M2T	45X14H14B2M	35X;40X;37X12H8T 8MϕE38XA	25X2MϕA;25X1Mϕ	25X2M1Φ
20	130	110	160	230	230	230
100	126	105	150	230	230	230
200	120	98	138	225	225	225
250	107	95	132	222	220	220
300	97	90	126	220	215	215
350	86	86	120	185	215	215
375	80	85	117	175	210	210
400	75	83	114	160	210	210
425	68	82	110	-	182	195
450	-	80	107	-	156	180
475	-	79	104	-	127	165
500	-	78	100	-	96	150
510	-	-	95	-	84	137
520	-	-	90	-	74	120
530	-	-	85	-	*65*	100
540	-	-	-	-	55	75 ,
550	-	-	75 8	-	-	64

Si la temperatura calculada de los pernos (espárragos) no excede de 380°C para los aceros al carbono, de 420 °C para los aceros de baja aleación, de 525 °C para los aceros austeníticos

$$[\sigma]_p = \sigma_{fl} / \sigma_{fl.p}; \quad (5.1)$$

Si la temperatura calculada de los pernos (espárragos) excede de los valores mencionados anteriormente

$$[\sigma]_p = \{\sigma_{fl.} / n_{fl.p}; \sigma_{pr.10^5} / n_{pr.p}; \sigma_{1\%10^5} / n_{ar.p}\} \tag{5.2}$$

Donde $\sigma_{fl.}, \sigma_{pr.10^5}, \sigma_{1\%10^5}$ son límites de fluencia, de resistencia prolongada (fatiga) y de resistencia, respectivamente, del material de los pernos; $\sigma_{fl.p}$ es coeficiente de margen de seguridad de los pernos según el límite de fluencia (Tabla 5.4), $n_{pr.p}$ es coeficiente de margen de seguridad de los pernos según el límite de la resistencia prolongada (fatiga) ($n_{pr.p} = 1{,}8$); $n_{fl.p}$ es coeficiente de margen de seguridad de la resistencia de los pernos según el límite de arrastre($n_{ar.p} = 1{,}1$)

Tabla 5.4 Coeficiente de margen de seguridad de los pernos (espárragos) según el límite de fluencia

Material de los pernos		$n_{fl.p}$	
Acero	Características	Apriete no se controla	Apriete se controla
Al carbono	$n_{fl.} / \sigma_B \geq 0{,}7$	2,8	2,4
	$n_{fl.} / \sigma_B$ <0,7	2,3	2,1
Austenítico	-	1,9	1,8
<u>Nota.</u> $\sigma_{fl.}$ y σ_B son límites de fluidez y de resistencia , respectivamente , del material de los pernos(espárragos)			

El espesor s_0 del casquillo de la brida (Ver Fig. 5.1), en función de su estructura, se toma:

Para empalmada a tope por soldadura

$s \leq s_0 \leq 1{,}3s$, pero en todos los casos

$$s_0 - s \leq 5mm \tag{5.3}$$

Para planas soldadas y libres:

$$s_0 \geq s \tag{5.4}$$

donde s es espesor ejecutivo de la virola del aparato.

El espesor s_1 al lado de la base del casquillo de la brida empalmada a tope por soldadura (ver Fig. 5.1 b) es el siguiente:

$$s_1 = \beta_1 s_0 \tag{5.5}$$

en este caso β_1 se toma por la figura 5.4.

La altura h_c del casquillo de la brida es como sigue: de la empalmada a tope por soldadura

$$h_c \geq (1/i)(s_1 - s_0) \tag{5.6}$$

Donde i es inclinación del casquillo (i = 1/3) de la plana soldada o libre

$$h_c \geq 0{,}5\sqrt{D(s_0 - c)} \tag{5.7}$$

Tabla 5.5 Diámetros recomendables de los pernos (espárragos) dp (mm) en función de la presión y del diámetro del aparato

Presión interior Pcal. mm	Diámetro del aparato							
	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	≥2200
0-0,6	20	20	20	20	20	20	24	24-30
0,6-1,0	20	20	20	20	24-30	24-	30	30
1,0-1,6	20	20	24-	24-	24-30	24-	30	30
1,6-2,5	20	20	24-	24-	24-30	30	30	-
2,5-4,0	30	30	36	36	36	42	42	-
4,0-6,4	30	42	42	48	48	52	52	-
6,4-8,0	30-	42	48	52-	52-56	-	-	-
8,0-10,0	36-	48	52-	56—	56-64	-	-	-

El diámetro de la circunferencia de perno de las bridas

$$D_p \geq D + 2(s_1 + d_p + u) \tag{5.8}$$

De las planas soldadas

$$D_p \geq D + 2(2s_0 + d_p + u) \tag{5.9}$$

Para las libres

$$D_p \geq D_s + 2(d_p + u_1) \tag{5.10}$$

Donde u_1 es juego normativo entre la tuerca y la vírola (u_1= 8 mm); D_s es el diámetro interior del anillo libre $(D_s \geq D + 2s_0)$

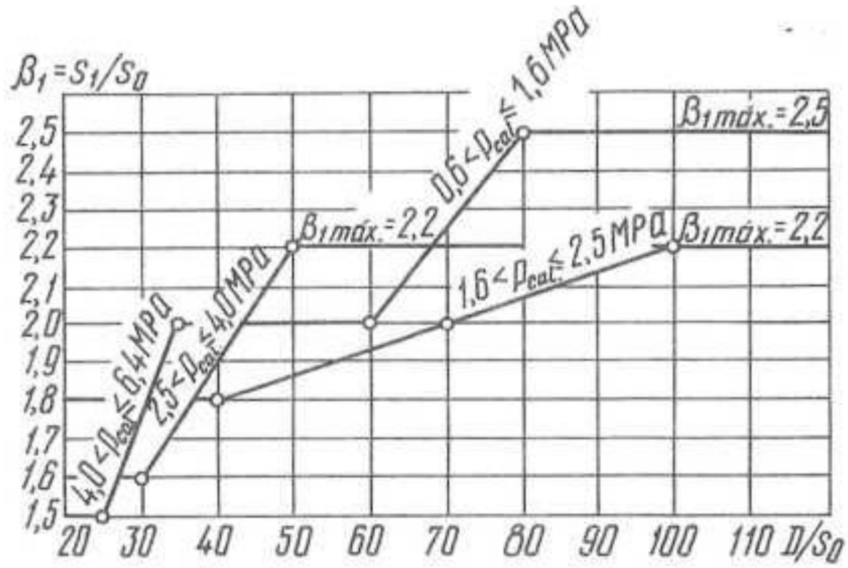


Fig. 5.4 Gráfico para obtener el coeficiente β

El diámetro exterior de las bridas de todos los tipos considerados

$$D_{ex.} \geq D_p + a \tag{5.11}$$

Donde a es adición estructural para situar las tuercas por el diámetro de la brida la que se toma de la Tabla 5.5

Tabla 5.6 Magnitudes auxiliares para determinar dimensiones de la brida

Diámetro del perno dp, mm	Diámetro del orificio para el perno d, mm	Adición estructural a, Parámetro normativo e, mm			
		para tuercas de seis aristas (ordinarias)	para tuercas de seis aristas con dimensión reducida para llave	para juntas planas	para juntas de sección oval u octagonal
20	23	40	36	30	50
22	25	42	40	32	52
24	27	47	42	34	57
27	30	52	47	37	60
30	33	58	52	41	64
36	40	60	63	48	71

42	46	80	69	55	78
48	52	92	80	61	84
52	58	97	86	65	88
56	60	110	-	-	195
60	66	115	-	-	240
64	70	120	-	-	240

El diámetro exterior de la junta es como sigues de las bridas empalmadas a tope por soldadura y planas soldadas

$$D_{ex.j} = D_P - e \tag{5.12}$$

Donde es e parámetro normativo que depende del tipo de la junta y se toma de la Tabla 5.5

De las bridas libres

$$D_{ex.j} \leq D_{s1} \tag{5.13}$$

Donde D_{s1} es diámetro exterior del ribete $\left(D_{s1} \leq D_p - d_p\right)$

El diámetro medio de la junta es el siguiente:

$$D_{m.j} = D_{ex.j} - b \tag{5.14}$$

Donde b es ancho de la junta tomada de la Tabla 5.6

La cantidad de pernos necesaria para asegurar la hermeticidad de la unión, es como sigue:

$$n_p \geq \pi D_p / t_{paso} \tag{5.15}$$

Donde t_{paso} es paso recomendado de disposición de los pernos, elegido en función de las presiones de la Tabla 5.8.

Tabla 5.7 Dimensiones de las juntas

Juntas	Diámetro del aparato D, mm	Anchura de la junta b, mm
Planas no metálicas	D ≤1000	12-15
	1000 < D ≤ 2000	15-25
	D > 2000	25
Planas metálicas	D ≤ 1000	10-12
	D > 1000	12-15
Planas en envoltura metálica y metálicas dentadas	D ≤ 1600	12-18
	D > 1 600	13-25
De sección oval y octagonal para p 3=6,4 MPa	D ≤ 600	12-13
	600 < D ≤ 800	16-22
	800 < D ≤ 1000	18-28
	1000 < D ≤ 1600	22-42

Tabla 5.8 Paso recomendable de disposición de los pernos

Presión en el aparato p_{cal}. MPa	Paso de disposición de los pernos t paso
Hasta 0,3	(4,2 ÷ 5) dp
0,3-0,6	(3,8 ÷ 4,8) dp
0,6-1,0	(3,5 ÷ 4,2) dp
1,0-1,6	(3,0 ÷3,8) dp
1,6-2,5	(2,7 ÷ 3,5) dp
2,5-4,0	(2,3 ÷ 3,0) dp
4,0-10,0	(2,1 ÷ 2,8) dp

La altura (espesor) de la brida es, aproximadamente, la siguiente:

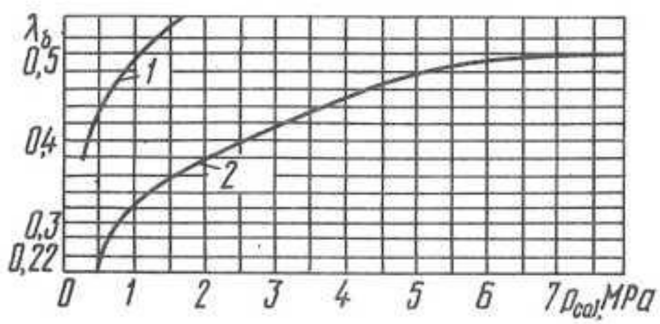
$$h_b \geq \lambda_b \sqrt{Ds_{eq.}} \qquad (5.16)$$

Donde λ_b se toma según la Fig. 5.5 y $s_{eq.}$ es espesor equivalente del casquillo.

$$s_{eq.} = s_0 \left[1 + \frac{h_c(\beta_1 - 1)}{h_c + 0{,}25(\beta_1 + 1)\sqrt{Ds_0}} \right] \qquad (5.17)$$

La carga de perno necesaria para asegurar la hermeticidad do la unión se determina, partiendo del esquema de carga (Fig.5.6).

El cálculo se reduce a la determinación de cargas para dos estados distintos: en caso del montaje F_{p1} y en las condiciones de trabajo F_{p2}.



1-bridas planas; 2-bridas empalmadas a tope por soldadura

Fig. 5.5 Valores de λ en función de la presión

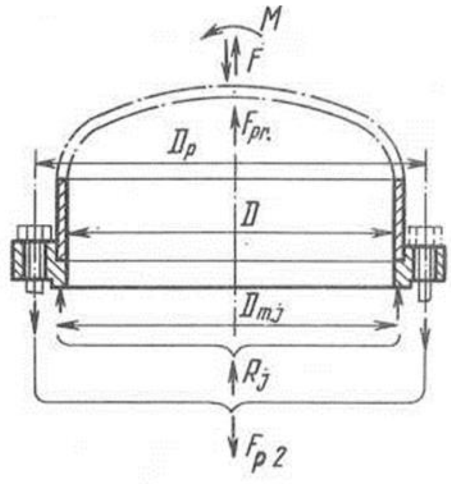


Fig. 5.6 Esquema de acción de las cargas sobre la brida en condiciones de trabajo

5.4 La carga de perno en las condiciones de montaje

$$F_{p1} = máx\begin{Bmatrix} k_r\left(f_{pr.} \pm F\right) + R_j + 4M / D_{m.j} \\ 0{,}5\pi D_{m.j} b_0 p_j \\ 0{,}4[\sigma]_{p20} n_p f_p s \end{Bmatrix} \qquad (5.18)$$

donde F es fuerza axial exterior de extensión (+) o comprimente (-); M es momento flector exterior; $[\sigma]_{p20}$ es tensión admisible para el material de los pernos a 20 °C (ver tabla 5.3)| p_j es presión mínima de la compresión de la junta (tablas 5.8 y5.9); f_p es área calculada de la sección transversal del perno; $f_{pr.}$ es resultante de la presión interior; R_j es reacción de la junta; k_r es coeficiente de rigidez de la unión embridada; b_0 es ancho efectivo de la junta; si b≤15 mm $b_0 = b$, si b>15 mm $b_0 = 0{,}12\sqrt{b}$ (en la expresión dada b y b_0 se miden en metros).

Tabla 5.9 Características de las juntas metálicas planas

Material de la junta	Coeficiente k_j	Presión de apriete de la junta, MPa		Módulo de elasticidad Ej, MPa
		mínima P_j	admisible $\lfloor P_j \rfloor$	
Goma con dureza instrumento ТШР de 1,2 MPa	0,5	2	18	3[1+b/ (2hj)]
Goma con dureza instrumento ТШР 1,2 MPa	1	3	20	4[l+b/(2hj)]
Cartón de amianto de 3 mm de espesor	2,5	20	130	2000
Paronita de espesor ≥1 mm	2,5	20*	130	2000
Plástico fluorocarbúrico-4 de 1 a 3 mm de espesor	2,5	10	40	2000

* Para los medios con alto, poder de penetración (hidrógeno, helio, productos ligeros de petróleo, gases licuados, etc.), p_j = 35 MPa.

Tabla.5.10 Carácteristicas de las juntas metálicas

Junta	Material	Coeficien-te k_j	Presión mínima de apriete de la junta p_j,
Plana metálica	Aluminio marca АДМ	4,00	60
	Latón marca Л63	4,75	90

	Acero 05кп	5,50	125
	Acero 08X13	5,50	125
	Acero 08X18H10T	6,50	180
Plana de amianto en envoltura metálica	Amianto en envoltura:		
	de aluminio	3,25	38
	de cobre 0 latón	3,50	46
	de acero (05кп)	3,75	53
	de acero (12X18H10T)	3,75	63
Metálica oval 0 de sección octagonal	Acero 05 кп	5,5	125
	Acero 08X13	5,5	125
	Acero 08X18H10T	6,5	180

La resultante de la presión interior $F_{pr.}$ y la reacción de la junta R_j se determinan por las fórmulas:

$$F_{pr.} = P_{cal} \pi D^2{}_{m.j} / 4 \qquad (5.18)$$

$$R_j = \pi D_{m.j} b_0 k_j P_{cal} \qquad (5.19)$$

Donde k_j es coeficiente que depende del material y estructura de la junta (ver tabla 5.8).

El área calculada de la sección transversal f_p del perno (espárrago) por el diámetro interior de la rosca, se toma de las siguientes relaciones:

dp, mm ………….. …...	20	22	24	27	30	36
fp.10^4,m^2 ………………….	2,35	2,95	3,4	4,45	5,4	7,9
dp, mm …………………………..	42	48	52	56	60	64
fp-10^4, m^2 …………	10,9	14,4	18,2	19,65	23,0	26,0

En caso de utilizar los espárragos, al tornear el vástago hasta un diámetro menor que el diámetro interior de la rosca, el valor del área de la sección transversal se determina por el diámetro del torneado.

El coeficiente de rigidez de la unión k_r = 1 para las bridas empalmadas a tope por soldadura con las juntas metálicas ovales o de ocho caras, así como para las bridas con los anillos libres. En otros casos, para determinar k_r se calculan previamente las siguientes magnitudes auxiliares:

la compresibilidad lineal de la junta (no metálica)

$$y_J = k_j h_j / \left(E_j \pi D_{m.j} b\right) \qquad (5.20)$$

donde h_j es altura (espesor) de la juntas; k_j es coeficiente de compresión de la junta (para las juntas: de goma $k_j = 0.09$;de cartón, paronita, plástico fluorocarbúrico, etc., $k_j = 1$); Ej es módulo de elasticidad del material de la junta (ver tabla 5.8);la compresibilidad angular de la brida

$$y_b = \left[1 - \upsilon\left(1 + 0.9\lambda'_b\right)\right]\varphi_2 / \left(h^3{}_b E\right) \qquad (5.21)$$

Donde υ , λ'_b son parámetros sin dimensión:

$$\upsilon = \frac{1}{1 + 0.9\lambda'_b\left(1 + \varphi_1 h_b{}^2 / s_{eq.}{}^2\right)} \quad \lambda'_b = h_b / \sqrt{Ds^2{}_{eq}} \qquad (5.22)$$

φ_1 y φ_2 son coeficientes determinados por las fórmulas:

$$\varphi_1 = 1.28 \log\left(D_{ex.} / D\right) \quad , \ \varphi_2 = \left(D_{ex.} + D\right) / \left(D_{ex.} - D\right)$$

ε es módulo de elasticidad del material de la brida (Mijalev et al. 1984); la compresibilidad lineal de los pernos

$$y_p = l_p / \left(E_p f_p n_p\right) \qquad (5.23)$$

donde E_p es **m**ódulo de elasticidad del material de los pernos(Mijalev et al. 1984); l_p es longitud calculada del perno.

La longitud calculada del perno es la siguiente:

$$l_p = l_{p.a} + 0{,}28d \qquad (5.24)$$

Donde $l_{p.a}$ es distancia entre las superficies de apoyo del perno y la tuerca (se determina estructuralmente); d es diámetro del orificio para el perno.

Entonces, el coeficiente de rigidez de la unión embridada es el siguiente:

en caso de empalme de las bridas de igual estructura,

$$k_r = \frac{y_p + 0{,}5 y_b \left(D_p - D - s_{eq}\right)\left(D_P - D_{m.j}\right)}{y_j + y_p + 0{,}5 y_b \left(D_p - D_{m.j}\right)^2}; \qquad (5.25)$$

en caso de empalme de las bridas de distinta estructura,

$$k_r = \frac{y_p + 0{,}25 y_b \left(B_1 + B_2\right)\left(D_P - D_{m.j}\right)}{y_j + y_p + 0{,}25\left(y_{b1} + y_{b2}\right)\left(D_p - D_{m.j}\right)^2}; \qquad (5.26)$$

$$B_1 = y_{b1}\left(D_p - D_{b1} - s_{eq.1}\right);$$
$$B_2 = y_{b2}\left(D_p - D_{b2} - s_{eq.2}\right),$$

donde y_{b1} , y_{b2} son compresibilidades angulares de las bridas; D_{b1}, D_{b2} son diámetros interiores de las bridas; $s_{eq.1}, s_{eq.2}$ son espesores equivalentes de los casquillos de bridas.

La carga de perno en las condiciones de trabajo

$$F_{p2} = F_{p1} + (1 - k_r)(F_{pr.} \pm F) + F_t, \tag{5.27}$$

donde F_t es esfuerzo debido a las deformaciones por cambio de la temperatura, determinado por las fórmulas:
para las bridas planas soldadas y empalmadas a tope por soldadura

$$F_t = \frac{y_p n_p f_p E_p (\alpha_b t_b - \alpha_p t_p)}{y_j + y_p + 0{,}5 y_b (D_p - D_{m.j})^2}, \tag{5.28}$$

para las bridas con anillos libres

$$F_t = \frac{y_p n_p f_p E_p [0{,}5(\alpha_b t_b + \alpha_1 t_1) - \alpha_p t_p]}{y_j + y_p + 0{,}5 y_b (D_p - D_{m.j})^2 + 0{,}5 y_1 (D_p - D_{s1})^2}, \tag{5.29}$$

donde α_b, α_1, α_p son, respectivamente, coeficientes de dilatación, lineal del material de las bridas, pernos y del anillo libre(Mijalev et al. 1984)); t_b, t_1, t_p son, respectivamente, temperaturas de la brida, pernos, anillo libre (ver tabla5.2); $y_1 = (D_{ex.} + D_s)/[(D_{ex.} - D_s)E_1 h_1^3]$ es compresibilidad del anillo libre; E_1 es módulo de elasticidad del material del anillo; h_1 altura (espesor) del anillo libre.

Si $F_t < 0$ debe cumplirse la condición siguiente:

$$[\sigma]_p n_p f_p - |F_t| > F_{p2}, \tag{5.30}$$

donde $[\sigma]_p$ es tensión admisible para el material de los pernos a la temperatura calculada.
Las condiciones de resistencia de los pernos son las siguientes:

$$F_{p1}/(n_p f_p) \le [\sigma]_{p20} \quad \text{y} \quad F_{p2}/(n_p f_p) \le [\sigma]_p \tag{5.31}$$

donde $[\sigma]_{p20}$ es tensión admisible para el material de los pernos a la temperatura de 20 °C.

La condición de resistencia de las juntas no metálicas es la siguiente:

$$F_{p.máx}/(\pi D_{m.j} b) \le \lfloor p_j \rfloor \tag{5.32}$$

donde p_j es presión admisible para la junta (ver tabla 5.6);

$$F_{p.máx} = máx.\{F_{p1}, F_{p2}\}.$$

La condición de resistencia del casquillo de la brida para la sección limitada por la dimensión s_1 (ver fig. 1.37,b), es como sigue:

$$\sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_a{}^2 - \sigma_1 \sigma_{a1}} \le [\sigma]_1 \tag{5.33}$$

La tensión máxima en la sección limitada por la dimensión s_1 es la siguiente

$$\sigma_1 = T_b M_0 \upsilon / \lfloor D^*(s_1 - c)^2 \rfloor;$$

$$D^* = D \qquad \text{si } D < 20 s_1; \tag{5.34}$$

$$D^* = D + s_0 \text{ si } D < 20 s_1 \text{ y } f_b > 1;$$

$$D^* = D + s_1 \text{ si } D < 20 s_1 \text{ y } f_b = 1;$$

donde f_b , T_b son parámetros sin dimensión determinados según la figura 5.7 y la fórmula

$$T_b = \frac{D^2{}_{ex.}\left[1+8{,}55\log\left(D_{ex.}/D\right)-D^2\right]}{\left(1{,}05D^2+1{,}94D^2{}_{ex.}\right)\left(D_{ex.}/D-1\right)};$$

M_0 es momento flector reducido , calculado de la condición

$$M_0 = máx.\begin{Bmatrix} 0{,}5\left(D_p - D_{m.j}\right)F_{p1} \\ 0{,}5\left[\left(D_p - D_{m.j}\right)F_{p2} + \left(D_{m.j} - D - s_{eq.}\right)F_{pr.}\right][\sigma]_{20}/[\sigma] \end{Bmatrix} \qquad (5.35)$$

La tensión máxima en el anillo de la brida es la siguiente:

$$\sigma_a = M_0\left[1-\upsilon\left(1+0{,}9\lambda_b'\right)\right]\phi_2/\left(Dh_b{}^2\right) \qquad (5.36)$$

La tensión admisible para la brida en la sección S1se toma igual al límite de fluidez del material de la brida, es decir, $[\sigma]_1 = \sigma_{fl}$ (Mijaliev M. F. et. al. 1984)

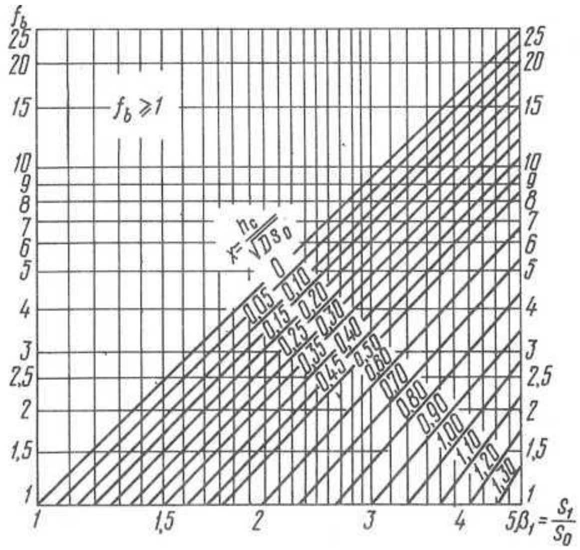


Fig.5.7.Gráfico para determinar el coeficiente f_b

La condición de resistencia del casquillo de la brida para la sección limitada por la dimensión (ver fig. 5.2),

$$\sqrt{(\sigma_0+\sigma_m)^2+\sigma_t^{\,2}-(\sigma_0+\sigma_m)\sigma_t}\leq\varphi[\sigma]_0 \qquad (5.37)$$

donde σ_0 es tensión máxima en la sección limitada por la dimensión s_0 , determinada según la fórmula

$$\sigma_0 = f_b\sigma_1 \qquad (5.38)$$

σ_t y σ_m son tensiones tangencial y meridional, respectivamente, en el casquillo de la brida, debidas a la presión interior:

$$\sigma_t = P_{cal.}D/[2(s_0-c)],\sigma_m = P_{cal.}D/[4(s_0-c)] \qquad (5.39)$$

$[\sigma]_0$ es tensión admisible para la brida en la sección s_0 que se toma, siendo la cantidad de cargas de la unión (montaje-desmontaje) no superior a 2·10^3, de la condición $[\sigma]_0 = 0{,}003E$ si $P_{cal.} < 4$ MPa; $[\sigma]_0 = 0{,}002E$ si $P_{cal.} \geq 4$ MPa.

La condición de hermeticidad de la unión embridada se determina por el ángulo de giro de la brida:

$$\theta = (\sigma_a / E)(D/h_b) \leq [\theta] \qquad (5.40)$$

donde $[\theta]$ es ángulo admisible de giro de la brida que se toma $[\theta] = 0{,}013$ rad para las bridas planas $[\theta] = 0{,}009$ rad si D≤2000 mm, $[\theta] = 0{,}013$ rad si D >2000 mm para las bridas empalmadas a tope por soldadura.

La condición de resistencia para el anillo libre es la siguiente

$$\sigma_1 = M_0^1(D_{ex.} + D_s)/\left[D_s h_1^2(D_{ex.} - D_s)\right] \leq [\sigma]_1 \qquad (5.41)$$

donde M_0^1 es momento flector reducido, determinado de la condición

$$M_0^1 = máx.\begin{Bmatrix} 0{,}5(D_P - D_{s1})F_{p1} \\ 0{,}5(D_p - D_{s1})F_{p2}[\sigma]_{l.20}/[\sigma]_1 \end{Bmatrix} \qquad (5.42)$$

Las tensiones admisibles para el material del anillo libre a la temperatura de 20 °C y la temperatura calculada son, respectivamente,

$$[\sigma]_{l.20} = \sigma_{fl.l.20} \quad \text{y} \quad [\sigma]_1 = \sigma_{fl.l} \qquad (5.43)$$

donde $\sigma_{fl.l.20}$, $\sigma_{fl.l}$ es límite de fluidez del material del anillo, respectivamente, a 20 °C y la temperatura calculada.

Requerimiento para el ángulo de giro del anillo libre

$$\theta_1 = (\sigma_1 / E_1)(D_s / h_1) \le [\theta]_1 \qquad (5.44)$$

El ángulo admisible de giro del anillo $[\theta]_1 = 0{,}026$ rad.

Ejemplo 5.1

5.1. Calcular la resistencia y hermeticidad de la unión embridada del aparato.

Datos iniciales. El diámetro interior D = 1600 mm, el espesor de la virola s = 34 mm, la presión interior Pcal = 4 MPa, la temperatura t = 113,5 °C. La brida está fabricada del acero 12X18H10T; los pernos, del acero 35X. Las bridas son no aisladas, empalmadas a tope por soldadura y tienen una superficie de empaquetadura acanalada. El momento flector y la fuerza axial exteriores faltan. El coeficiente de resistencia de las costuras soldadas $\varphi = 1$.

Solución. La estructura dada de la brida se ofrece en la figura 5.2,b y el tipo de la superficie de empaquetadura, en la figura 5.3,c.

1. La brida tiene las siguientes dimensiones estructurales. El espesor del casquillo se toma como s_0 = 38 mm lo que satisface la condición (5.3):

$s<s_0<1{,}3s$ (34 < 38 < 1,3·34)

y s_0 - s **<** 5 mm (38 - 34 = 4 mm < 5 mm).

El espesor s_1 del casquillo, determinado por la fórmula (5.5), es el siguiente:

$$s_1 = \beta_1 s_0 = 2 \cdot 38 = 76mm$$

Donde $\beta_1 = 2$ si D/s_0 = 1600/38 = 42,1 (ver fig.5.3).

La altura del casquillo, determinada por la fórmula (5.6), es la siguiente:

$$h_c \ge (1/i)(s_1 - s_0) = \frac{1}{1/3}(76 - 38) = 114mm$$

Tenemos $h_c = 120mm = 0{,}12m$.

El espesor equivalente de la brida es:

$$s_{eq.} = s_0\left[1 + \frac{h_c(\beta_1 - 1)}{h_c + 0{,}25(\beta_1 + 1)\sqrt{Ds_0}}\right]$$

$$= 38\left[1 + \frac{120(2-1)}{120 + 0{,}25(2+1)\sqrt{1600 \cdot 38}}\right] = 52{,}95mm$$

El diámetro de la circunferencia de pernos, determinado por la fórmula (5.8), es el siguiente:

donde u=6 mm} dp = 48 mm si p_{cal}= 4 MPa y D = 1600 mm (ver tabla 5.5). Tomemos $D_p = 1870mm = 1{,}87m.$

El diámetro exterior de la brida

$D_{ex.} \geq D_p + a = 1870 + 92 = 1962mm$

donde $a = 92mm$ para las tuercas de seis aristas M48 (ver tabla 5.6). Tomemos $D_{ex.} = 1970mm = 1{,}97m.$

El diámetro exterior de la junta, determinado por la fórmula **(**5.12**),**

$D_{ex.j} = D_P - e = 1870 - 61 = 1809mm,$

donde $e = 61mm$ para las juntas planas si d_p = 48 mm (ver tabla 5.6)

El diámetro medio de la junta es como sigue:

$D_{m.j} = D_{ex.j} - b = 1809 - 20 = 1789mm = 1{,}789m,$

donde b = 20 mm es ancho de la junta no metálica plana para el diámetro del aparato D = 1600 mm (ver tabla 5.7).

La cantidad de pernos, determinada por la fórmula (5.15),

$$n_p \geq \pi D_p / t_{paso} = 3{,}14 \cdot 1870 / 105{,}8 = 55{,}53,$$

donde t_{paso} = 2,2dp= 2,2·48 = 105,8 mm es paso de disposición de los pernos si $P_{cal.}$ = 4 MPa, elegido por la tabla 1.43. Tomemos n_p = 56 múltiple de cuatro.

La altura (espesor) de la brida, determinada por la fórmula (5.16),

$$h_b \geq \lambda_b \sqrt{Ds_{eq.}} = 0{,}447\sqrt{1600 \cdot 52{,}95} = 130{,}11mm,$$

donde $\lambda_b = 0{,}447$ para $P_{cal.}$= 4 MPa y las bridas empalmadas a tope por soldadura (ver fig. 5.5). Tomemos h_b = 140 mm = 0,14 m.

Es la siguiente la distancia entre las superficies de apoyo de las tuercas para la unión embridada con superficie de empaquetadura acanalada (aproximadamente) :

$$l_{p.a} \approx 2(h_b + h_j) = 2(140 + 2) = 284mm = 0{,}284m,$$

donde h_j = 2 mm es altura (espesor) de la junta estándar.

2. Las cargas que actúan sobre la brida. La resultante de presión interior es la siguiente:

$$F_{pr.} = P_{cal}\pi D^2{}_{m.j} / 4 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}789^2 / 4 = 10{,}05MN.$$

La reacción de la junta, determinada por la fórmula (5.19),

$$R_j = \pi D_{m.j} b_0 k_j P_{cal} = 3{,}14 \cdot 1{,}789 \cdot 16{,}97 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 4 = 0{,}95MN,$$

donde k_j= 2,5 para la paronita (ver tabla 5.9); b_0 es ancho efectivo de la junta

El esfuerzo, producido por las deformaciones de temperatura, según la fórmula (5.29),

$$F_t = \frac{y_p n_p f_p E_p (\alpha_b t_b - \alpha_p t_p)}{y_j + y_p + 0{,}5 y_b (D_p - D_{m.j})^2},$$

donde $\alpha_b = 16{,}6 \cdot 10^{-6}$ 1/°C y $\alpha_p = 13{,}3 \cdot 10^{-6}$ 1/°C son,respectivamente, coeficientes de dilatación lineal del material de las bridas (12X18H10T) y pernos (35X); t_b == 0,96t =0,96-113,5 = 109°C es temperatura calculada de las bridas no aisladas (ver tabla 5.2); t_p = 0,95t = 0,95·113,5=107,8°C es temperatura calculada de los pernos (ver tabla 5.2); E_p = 1,9·10^5 MPa para los pernos del acero 35X;

fp = 14,4·10^{-4} m^2 para los pernos de diámetro d_p= 48 mm; n_p es cantidad de pernos (n_p= 56); y_p , y_j , y_b son compresibilidades de los pernos, junta y bridas, respectivamente, calculadas por las fórmulas (5.20)-(5.23):

$$y_p = l_p / \left(E_p f_p n_p\right) = 0{,}297 / \left(1{,}9 \cdot 10^5 \cdot 14{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 56\right) = 19{,}34 \cdot 10^{-6}\, m / MN$$

donde $l_p = l_{p.a} + 0{,}28 d_p = 0{,}284 \cdot 0{,}04800{,}297 m$ es longitud calculada del perno

$$y_J = h_j / \left(E_j \pi D_{m.j} b\right) = 2 \cdot 10^{-3} / \left(2000 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}789 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\right) = 8{,}9 \cdot 10^{-6}\, m / MN$$

donde E_j = 2000 MPa para la junta de paronita (ver tabla 5.10);

$$y_b = \left[1 - \upsilon\left(1 + 0.9\lambda_b'\right)\right]\varphi_2 / \left(h^3{}_b E\right) = \left[1 - 0{,}561\left(1 + 0{,}9 \cdot 0{,}481\right)\right]9{,}6 / \left(0{,}14^3 \cdot 2 \cdot 10^5\right)$$
$$= 3{,}46 \cdot 10^{-3} 1 / \left(MN \cdot m\right)$$

donde

$$\lambda_b' = h_b / \sqrt{Ds^2{}_{eq}} = 0{,}14 / \sqrt{1{,}6 \cdot 52{,}95 \cdot 10^{-3}} = 0{,}481;$$

$$\varphi_2 = \left(D_{ex.} + D\right) / \left(D_{ex.} - D\right) = \left(1{,}97 + 1{,}6\right) / \left(1{,}97 - 1{,}6\right) = 9{,}6;$$

$$\upsilon = \frac{1}{1 + 0.9\lambda_b'\left(1 + \varphi_1 h_b{}^2 / s_{eq.}{}^2\right)} = \frac{1}{1 + 0{,}9 \cdot 0{,}481\left(1 + 0{,}116 \cdot 0{,}14^2 / 0{,}053^2\right)} = 0{,}561$$

$$\varphi_1 = 1.28 \log\left(D_{ex.} / D\right) = 1{,}28 \log\left(1{,}97 / 1{,}6\right) = 0{,}116;$$

E= $2 \cdot 10^5$ MPa para la brida del acero 12X18H10T.

Entonces,

$$f_t = \frac{19{,}34 \cdot 10^{-6} \cdot 56 \cdot 14{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}9 \cdot 10^5 \left(16{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 109 - 13{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 107{,}8\right)}{8{,}9 \cdot 10^{-6} + 19{,}34 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 3{,}46 \cdot 10^{-3}\left(1{,}87 - 1{,}789\right)} = 2{,}69 MN$$

El coeficiente de rigidez de la unión embridada, determinado por la fórmula (5.25), es el siguiente:

$$k_r = \frac{y_p + 0{,}5 y_b \left(D_p - D - s_{eq}\right)\left(D_P - D_{m.j}\right)}{y_j + y_p + 0{,}5 y_b \left(D_p - D_{m.j}\right)^2} =$$

$$= \frac{19{,}34 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 3{,}46 \cdot 10^{-3}\left(1{,}87 - 1{,}6 - 52{,}95 \cdot 10^{-3}\right)\left(1{,}87 - 1{,}789\right)}{8{,}9 \cdot 10^{-6} + 19{,}34 \cdot 10^{-6} + 0{,}53{,}46 \cdot 10^{-3}\left(1{,}87 - 1{,}789\right)^2} = 1{,}26$$

Es la siguiente la carga de pernos en condicionesde montaje antes de aplicar la presión interior:

$$F_{p1} = máx \left\{ \begin{array}{l} k_r \left(f_{pr.} \pm F\right) + R_j + 4M / D_{m.j} = 1{,}26 \cdot 10{,}05 + 0{,}95 = 13{,}61 MN \\ 0{,}5 \pi D_{m.j} b_0 p_j = 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}789 \cdot 16{,}97 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0{,}96 MN \end{array} \right\} = 13{,}61 MN$$

donde P_j= 20 MPa para la junta de paronita (ver tabla 5.10).

Es como sigue la carga de pernos en condiciones de trabajo, determinada por la fórmula (5.27),

$$F_{p2} = F_{p1} + \left(1 - k_r\right)\left(F_{pr.} \pm F\right) + F_t , = 13{,}61 + \left(1 - 1{,}26\right) \cdot 10{,}05 + 2{,}69 = 13{,}69 MN$$

El momento flector reducido, determinado por la fórmala (5.36),

$$M_0 = máx.\begin{cases} 0{,}5(D_p - D_{m.j})F_{p1} = 0{,}5(1{,}87 - 1{,}789)\cdot 13{,}61 = 0{,}55 MN\cdot m \\ 0{,}5\left[(D_p - D_{m.j})F_{p2} + (D_{m.j} - D - s_{eq.})F_{pr.}\right][\sigma]_{20}/[\sigma] = \\ = 0{,}5\left[(1{,}87 - 1.789)\cdot 13{,}69 + (1{,}789 - 1{,}6 - 52{,}95\cdot 10^{-3} x 10{,}5)\right]\cdot 160/150{,}4 = \\ = 1{,}32 MN\cdot m \end{cases}$$

donde $[\sigma]_{20} = 160 MPa$; $[\sigma] = 150{,}4 MPa$, respectivamente, para el material de la brida a 20 °C y a la temperatura calculada t = 113,5 °C

3. Comprobación de.la resistencia y hermeticidad de la unión.

Las condiciones de resistencia de los pernos (5.31) se cumplen:

$$F_{p1}/(n_p f_p) \le [\sigma]_{p20} \qquad 13{,}61/(56\cdot 14{,}4\cdot 10^{-4}) = 168{,}8 MPa < 230 MPa;$$

$$F_{p2}/(n_p f_p) \le [\sigma]_p \qquad 13{,}69/(56\cdot 14{,}4\cdot 10^{-4}) = 169{,}8 < 229{,}3 MPa,$$

donde $[\sigma]_{p20} = 230 MPa$, $[\sigma]_p = 229{,}3 MPa$ para el material de los pernos a +20 °C y a la temperatura calculada t_p =107,8 °C (ver tabla 5.3).

La condición (5.32) de resistencia de la junta no metálica de paronita se cumple:

$$F_{p.máx}/(\pi D_{m.j} b) \le \lfloor p_j \rfloor, \quad 13{,}69/(3{,}14\cdot 1{,}789\cdot 20\cdot 10^{-3}) = 121{,}85 MPa < 130 MPa$$

donde $\lfloor p_j \rfloor = 130 MPa$ para la junta de paronita (ver tabla 5.10);

$$F_{p.máx} = máx.\{F_{p1}, F_{p2}\} = máx.\{13{,}61 MPa; 13{,}69 MPa\} = 13{,}69 MPa$$

Es la siguiente la tensión máxima en la sección de la brida limitada por la dimensión s_1, determinada por la fórmula (5.34):

$$\sigma_1 = T_b M_0 \upsilon / \left\lfloor D^*(s_1 - c)^2 \right\rfloor = 1{,}82\cdot 1{,}32\cdot 0{,}561/\left\lfloor 1{,}6(0{,}076 - 0{,}001)^2 \right\rfloor = 149{,}23 MPa$$

donde

$D^* = D = 1{,}6m$ si $D < 20s_1$ (1600<20·76=1520) ;

$$T_b = \frac{D^2{}_{ex.}\left[1 + 8{,}55\log\left(D_{ex.}/D\right) - D^2\right]}{\left(1{,}05D^2 + 1{,}945D^2{}_{ex.}\right)\left(D_{ex.}/D - 1\right)} =$$

$$= \frac{1{,}97^2\left[1 + 8{,}55\log\left(1{,}97/1{,}6\right) - 1.6^2\right]}{\left(1{,}05 \cdot 1{,}6^2 + 1{,}945 \cdot 1{,}97^2\right)\left(1{,}97/1{,}6 - 1\right)} = 1{,}82.$$

La tensión máxima en la sección limitada por la dimensión s_0 es :

$$\sigma_0 = f_b\sigma_1 = 1{,}25 \cdot 149{,}23 = 186{,}54MPa,$$

donde $f_b = 1{,}25$ si $\beta_1 = 2$ y $x = h_c/\sqrt{Ds_0} = 120/\sqrt{1600 \cdot 38} = 0{,}487$ (ver fig. 5.7).

La tensión circular en el anillo de la brida, determinada por la fórmula (5.37), es la siguiente:

$$\sigma_a = M_0\left[1 - \upsilon\left(1 + 0{,}9\lambda_b'\right)\right]\phi_2/\left(Dh_b{}^2\right) = 1{,}32\left[1 - 0{,}561\left(1 + 0{,}9 \cdot 0{,}481\right)\right]9{,}6/\left(1{,}6 \cdot 0{,}14^2\right) = 80{,}05MPa$$

La tensión en el casquillo, debida a la presión interior, es la siguiente:

Tangencial

$$\sigma_t = P_{cal.}D/\left[2\left(s_0 - c\right)\right] = 4 \cdot 1{,}6/\left[2\left(38 - 1\right)10^{-3}\right] = 86{,}49MPa$$

Meridional

$$\sigma_m = P_{cal.}D/\left[4\left(s_0 - c\right)\right] = 4 \cdot 1{,}6/\left[4\left(38 - 1\right)10^{-3}\right] = 43{,}24MPa$$

Se cumple la condición de resistencia para la sección de la brida limitada por la dimensión s_1 = 76 mm:

$$\sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_a{}^2 - \sigma_1\sigma_{a1}} < [\sigma]_1;$$

$$\sqrt{149{,}23^2 + 80{,}05^2 - 149{,}23 \cdot 80{,}05} = 129{,}35MPa < 228MPa$$

donde $[\sigma]_1 = \sigma_{fl.} = 228MPa$ es tensión admisible igual al límite de fluidez del acero 12X18H10T si t = 107,8 °C

Se cumple la condición de resistencia para la sección limitada por la dimensión s_0 = 38 mm:

$$\sqrt{(\sigma_0 + \sigma_m)^2 + \sigma_t{}^2 - (\sigma_0 + \sigma_m)\sigma_t} \leq \varphi[\sigma]_0;$$

$$\sqrt{(186{,}54 + 43{,}24)^2 + 86{,}49^2 - (186{,}54 + 43{,}24)86{,}49} = 174{,}56MPa << 1 \cdot 400MPa$$

Donde $[\sigma]_0 = 0{,}002E = 0{,}002 \cdot 2 \cdot 10^5 = 400MPa$ para la brida del acero 12X18H10T en la sección s_0 si P_{cal} = 4 MPa.

La condición de hermeticidad, que se determina según la fórmula (1.150) por el ángulo de giro de la brida se cumple:

$$\theta = (\sigma_a / E)(D / h_b) \leq [\theta];$$

$$\theta = (80{,}05 / 2 \cdot 10^5)(1{,}6 / 0{,}14) = 0{,}0046 < 0{,}009rad,$$

donde $[\theta] = 0{,}009rad$ es ángulo admisible de giro de la brida empalmada a tope por soldadura si D = 1600 mm < 2000 mm.

Ejemplo 5.2

Elegir la estructura y calcular las dimensiones principales de la unión embridada de la tapa y del cuerpo del aparato vertical con dispositivo mezclador

Datos iniciales. El diámetro interior del aparato D = 1800 mm, el espesor de la pared de virola s = 8 mm, el cuerpo y la tapa están fabricados del acero 09Г2С, la presión interior en el aparato P_{cal}= 0,5 MPa. La temperatura del medio tratado t = 20 °C. La adición al espesor calculado de la pared c = 1 mm. La fuerza axial exterior y el momento flector faltan (F = 0, M = 0). El coeficiente de resistencia de las costuras soldadas $\varphi = 0{,}9$

<u>Solución</u>. Elijamos la estructura de la unión de la tapa y el cuerpo del aparato si D = 1800 mm y P_{cal} = 0,5 MPa, de acuerdo con la tabla 5.1, con bridas planas soldadas y superficie de empaquetadura acanalada (ver fig. 5.1).

1. Dimensiones estructurales de la brida. Tomemos el espesor del casquillo de la brida s_0 = 10 mm lo que satisface la condición s_0 > s (10 mm >8 mm).

La altura del casquillo de la brida, determinada, es la siguiente:

$$h_c \geq 0{,}5\sqrt{D(s_0 - c)} = 0{,}5\sqrt{1800(10-1)} = 63{,}64mm.$$

Consideremos que $h_c = 100mm$

El diámetro de la circunferencia de pernos, determinado es:

$$D_p \geq D + 2(2s_0 + d_p + u) = 1800 + 2(2 \cdot 10 + 20 + 4) = 1890mm = 1{,}89m$$

donde $d_p = 20mm$ es diámetro exterior del perno si D = 1800 mm y P_{cal} = 5 MPa; u es juego normado (u=4 mm).

El diámetro exterior de la brida es como sigue:

$D_{ex.} \geq D_p + a = 1890 + 40 = 1930mm$, donde a = 40 mm para las tuercas de seis aristas si d_p = 20 mm (ver tabla 5.7).

El diámetro exterior de la junta

$$D_{ex.j} = D_P - e = 1890 - 30 = 1860mm$$

donde e = 30mm para las juntas planas(ver tabla 5.7).

El diámetro medio de la junta es el siguiente:

$$D_{m.j} = D_{ex.j} - b) = 1860 - 15 = 1845mm = 1{,}845m,$$

donde b = 15 mm es ancho de la junta (ver tabla 5.8).

La cantidad de pernos necesarios para asegurar la hermeticidad de la unión es:

$$n_p \geq \pi D_p / t_{paso} = 3{,}14 \cdot 1890 / 90 = 66 \ uns$$

pernos $t_{paso} = 4{,}5d_p = 4{,}5 \cdot 20 = 90mm$ es paso de disposición de los pernos M2O en la circunferencia de pernos si $P_{cal.}$=0,5MPa (ver tabla 5.9).

Consideremos que n_p = 68 múltiplo de cuatro.

La altura (espesor) de la brida es:

$$h_b \geq \lambda_b \sqrt{Ds_{eq.}} = 0{,}436\sqrt{1800 \cdot 10} = 56{,}46mm,$$

donde $\lambda_b = 0{,}436$ para las bridas planas si $P_{cal.}$ = 0,5 MPa (ver fig. 5.5); $s_{eq.}=s_0$= 10 mm, ya que para las bridas planas $\beta_1 = s_1 / s_0 = 1.$

Consideremos h_b = 60 mm.

La longitud calculada del perno es como sigue:

$$l_p = l_{p.a} + 0{,}28d = 124 + 0{,}28 \cdot 20 = 129{,}6mm \approx 0{,}13m,$$

Donde $l_{p.a} = 2(h_b + h_j) = 2(60 + 2) = 124mm$ es distancia entre las superficies de apoyo de la cabeza de perno y de la tuerca, siendo el espesor de la junta $h_j = 2mm.$.

Cargas que actúan sobre la brida. La resultante de presión interior es como sigue:

$$F_{pr.} = P_{cal}\pi D^2{}_{m.j} / 4 = 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}845^2 / 4 = 1{,}336MN$$

La reacción de la junta es la siguiente:

$$R_j = \pi D_{m.j} b_0 k_j P_{cal} = 3{,}14 \cdot 1{,}845 \cdot 0{,}015 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}043MN$$

donde $k_j = 1$ para la goma con una dureza superior a 1,2 MPa (ver tabla 5.10)

b_0 = b = 15 mm= 0,015 m, ya que b≤15 mm.

El esfuerzo debido a las deformaciones de temperatura F_t = 0,ya que la temperatura de la unión, en el estado de trabajo es igual a la temperatura durante su montaje(+20°C).

El coeficiente de rigidez de la unión embridada es:

$$k_r = \frac{y_p + 0{,}5y_b(D_p - D - s_{eq})(D_P - D_{m.j})}{y_j + y_p + 0{,}5y_b(D_p - D_{m.j})^2}$$

donde y_p , y_j , y_b es compresibilidad de los pernos, junta y bridas, respectivamente.

La compresibilidad de los pernos

$$y_p = l_p / (E_p f_p n_p) = 0{,}13 / (1{,}9 \cdot 10^5 \cdot 2{,}35 \cdot 10^{-4} \cdot 68) = 43 \cdot 10^{-6} m / MN,$$

donde $E_p = 1{,}9 \cdot 10^5 MPa$ para los pernos del acero 35;

$f_p = 2{,}35 \cdot 10^{-4} m^2$ para los pernos de diámetro $d_p = 20mm.$

La compresibilidad de la junta es como sigue:

$$y_J = k_j h_j / (E_j \pi D_{m.j} b) = 0{,}09 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / (19 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}845 \cdot 15 \cdot 10^{-3}) = 109 \cdot 10^{-6}\, m / MN$$

donde

$$E_j = 4[1 + b/(2h_j)] = 4[1 + 15 \cdot 10^{-3} / (2 \cdot 2 \cdot 10^{-3})] = 19MPa$$

para la junta de goma con una dureza superior a 1,2 MPa (ver tabla 5.10); $k_j = 0{,}09.$

La compresibilidad de la brida es la siguiente:

$$y_b = [1 - \upsilon(1 + 0.9\lambda_b')]\varphi_2 / (h^3{}_b E) = [1 - 0{,}51(1 + 0{,}9 \cdot 0{,}447)]x$$
$$28{,}7 / (0{,}06^3 \cdot 1{,}99 \cdot 10^5) = 0{,}197(MN \cdot m)^{-1}$$

donde $h_b \geq \lambda_b \sqrt{Ds_{eq.}} = 0{,}06 / \sqrt{1{,}8 \cdot 0{,}01} = 0{,}047;$

$$\varphi_2 = (D_{ex.} + D)/(D_{ex.} - D) = (1{,}93 + 1{,}8)/(1{,}93 - 1{,}8) = 28{,}7;$$

$$\upsilon = \frac{1}{1 + 0.9\lambda_b'(1 + \varphi_1 h_b{}^2 / s_{eq.}{}^2)} = \frac{1}{1 + 0{,}9 \cdot 0{,}447(1 + 0{,}039 \cdot 0{,}06^2 / 0{,}01^2)} = 0{,}51$$

Si

$$\varphi_1 = 1.28 \log(D_{ex.} / D) = 1{,}28 \log(1{,}93/1{,}8) = 0{,}039;$$

E = 1,99·10^5 MPa para la brida del acero 09Г2C.

Entonces,

$$k_r = \frac{43 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 0{,}197(1{,}89 - 1{,}8 - 0{,}01)(1{,}89 - 1{,}845)}{109 \cdot 10^{-6} + 43 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 0{,}197(1{,}89 - 1{,}845)^2} = 1{,}133.$$

Es la siguiente la carga de pernos en las condiciones de montaje:

$$F_{p1} = máx \left\{ \begin{matrix} k_r(f_{pr.} \pm F) + R_j + 4M / D_{m.j} = 1{,}133 \cdot 1{,}336 + 0{,}043 = 1{,}557MN \\ 0{,}5\pi D_{m.j} b_0 p_j = 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}845 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 0{,}174MN \end{matrix} \right\}$$

donde $P_{cal.}$ = 4 MPa para la junta de goma con una dureza superior a 1,2 MPa (ver tabla 5.10).

Es como sigue la carga de pernos en las condiciones de trabajo:

$$F_{p2} = F_{p1} + (1 - k_r)(F_{pr.} \pm F) + F_t, = 1{,}557 + (1 - 1{,}133)1{,}336 + 0 = 1{,}379 MN.$$

El momento flector reducido es el siguiente:

$$M_0 = máx.\left\{\begin{array}{l} 0{,}5(D_p - D_{m.j})F_{p1} = 0{,}5(1{,}89 - 1{,}845)1{,}557 = 0{,}035 MN \cdot m \\ 0{,}5\left[(D_p - D_{m.j})F_{p2} + (D_{m.j} - D - s_{eq.})F_{pr.}\right][\sigma]_{20} / [\sigma] = \\ = 0{,}5[(1{,}89 - 1{,}845)1{,}379 + (1{,}845 - 1{,}8 - 0{,}01)1{,}336]1 = 0{,}0544 MN \cdot m \\ = 54{,}4 \cdot 10^{-3} MN \cdot m \end{array}\right\}$$

donde $[\sigma]_{20} / [\sigma] = 1$, ya que la temperatura de trabajo t = 20 °C.

Comprobación de la resistencia y hermeticidad de la unión. Durante el montaje de la unión embridada y en su estado de trabajo se cumple la condición de resistencia de los pernos:

$$F_{p1} / (n_p f_p) \le [\sigma]_{p20}; 1{,}557 / (68 \cdot 2{,}35 \cdot 10^{-4}) = 97{,}43 MPa < 130 MPa;$$

$$F_{p2} / (n_p f_p) \le [\sigma]_p; 1{,}379 / (68 \cdot 2{,}35 \cdot 10^{-4}) = 89{,}29 MPa < 130 MPa$$

donde $[\sigma]_{p20} = 130 MPa$ para los pernos de acero 35 a la temperatura de 20°C (ver tabla 5.3); $[\sigma]_p = 130 MPa$ para el material de los pernos a la temperatura de trabajo t=20°C.

Se cumple la condición de resistencia de la junta:

$$F_{p.máx} / (\pi D_{m.j} b) \le [p_j], 1{,}557 / (3{,}14 \div 1{,}845 \cdot 0{,}015) = 17{,}92 MPa < 20 MPa$$

donde $\lfloor p_j \rfloor = 20MPa$ para la junta de goma con una dureza superior a 1,2MPa(ver tabla5.9);

$$F_{p.máx} = máx.\{F_{p1}, F_{p2}\}. = máx.\{1,557MN;1,379MN\} = 1,557MN.$$

Es como sigue la tensión máxima en la sección limitada por la dimensión s_0, teniendo en cuenta las fórmulas (5.34) y (5.39)

$$\sigma_0 = f_b\sigma_1 = f_bT_bM_0\upsilon / \left\lfloor D\cdot(s_1 - c)^2 \right\rfloor = 1\cdot 1,885\cdot 54,4\cdot 10^{-3}\cdot 0,51 / \left\lfloor 1,8(0,01-0,001)^2 \right\rfloor = 358,7MPa,$$

donde $s_1=s_0$,ya que la brida plana soldada tiene casquillo cilíndrico;$f_b=1$,ya que $s_1/s_0=0$(ver fig.5.7), $D^*=D=1,8$m,ya que $D>20s_0$ (1,8m>20·0,01=0,2m)

$$T_b = \frac{D^2_{ex.}\left[1+8,55\log(D_{ex.}/D) - D^2\right]}{(1,05D^2 + 1,945D^2_{ex.})(D_{ex.}/D - 1)} =$$

$$T_b = \frac{1,93^2\left[1+8,55\log(1,93\ \ /1,8) - 1,8^2\right]}{(1,051,8^2 + 1,945\cdot 1,93^2)(1,93/1,8-1)} = 1,885.$$

La tensión en el casquillo, debida a la presión interior, es la siguiente.

Tangencial

$$\sigma_t = P_{cal.}D / [2(s_0 - c)] = 0,5\cdot 1,8 / [2(0,01-0,001)] = 50MPa$$

meridional

$$\sigma_m = P_{cal.}D / [4(s_0 - c)] = 0,5\cdot 1,8 / [4(0,01-0,001)] = 25MPa$$

Se cumple la condición de resistencia para la sección limitada por la dimensión s_0=8mm;

$$\sqrt{(\sigma_0 + \sigma_m)^2 + {\sigma_t}^2 - (\sigma_0 + \sigma_m)\sigma_t} \leq \varphi[\sigma]_0$$

$$\sqrt{(358,7+25)^2 + 50^2 - (358,7+25)50} = 361,3MPa < 0,9\cdot 597 = 538MPa,$$

Donde $[\sigma]_0 = 0{,}003E = 0{,}003 \cdot 1{,}99 \cdot 10^5 = 597MPa$ para la brida del acero 09Г2С en la sección s_0 si $P_{cal.}$=0,5MPa.

La tensión circular en el anillo de la brida, calculada por la fórmula (5.37) es la siguiente

$$\sigma_a = M_0\left[1-\upsilon\left(1+0{,}9\lambda_b'\right)\right]\phi_2/\left(Dh_b^{\,2}\right) = 54{,}4\cdot 10^{-3}\left[1-0{,}51x\left(1+0{,}9\cdot 0{,}447\right)\right]$$
$$28{,}7/\left(1{,}8\cdot 0{,}06^2\right) = 71{,}03MPa.$$

Se cumple la condición de hermeticidad de la unión embridada

$$\theta_1 = \left(\sigma_1 / E_1\right)\left(D_s / h_1\right) \le [\theta]_1$$

$$\theta_1 = \left(71{,}03/1{,}99\cdot 10^5\right)\left(1{,}8/0{,}06\right) = 0{,}0107 < 0{,}013rad,$$

donde θ es ángulo de giro de la brida; $[\theta]$es ángulo admisible de giro de la brida plana.

Problemas de control

5.1 Determinar la cantidad de pernos de la unión embridada hembra-macho para el aparato con el diámetro interior de 0,7 m que funciona a la tensión interior de 1 MPa. Las bridas empalmadas a tope por soldadura son del acero 20 y los pernos, del acero 35.

Respuesta. 32 pernos M20.

5.2 Determinar el espesor de referencia de una brida plana soldada de superficie lisa de empaquetadura que funciona a la presión interior de 0,3 MPa si el espesor de la pared del aparato es de 4 mm y el diámetro interior, 0,5 m.

Respuesta. 20 mm.

5.3 Determinar la relación entre la reacción de la junta Rj y la resultante de presión interior Fpr. necesaria para calcular el espesor de la pared de la tapa plana del aparato de 2,2 m de diámetro que funciona bajo la presión interior de 0,2 MPa y tiene espesor de la pared de virola s = 10 mm.

Respuesta. Rj/Fpr. = 0,84.

5.4 Determinar el espesor de una brida plana del acero '40X para el aparato de 1,2 m de diámetro que asegura la hermeticidad de la unión si la tensión circular en el anillo de la brida constituye 205 MPa.

Respuesta. 95 mm.

5.5 Calcular la resistencia y hermeticidad de una unión embridada del aparato que funciona bajo la presión interior. En la tabla 1.46 se ofrecen los datos iniciales para distintas versiones(Mijalev et al. 1984) .

5.5 Conclusiones Parciales del Capítulo V

1. En el Capítulo se abordan las ecuaciones de Cálculo de Uniones Embridadas necesarias para satisfacer de forma combinada la resistencia mecánica y la hermeticidad.
2. Se dan las ecuaciones para la selección de la junta en función del tipo y presión del fluido actuante.
3. Se introducen algunos ejemplos de cálculo que ayudan a comprender la aplicación de las ecuaciones descritas a determinadas situaciones concretas.
4. Finalmente se dan algunos ejercicios de control que ayudan al que se estudie esta materia a verificar si comprendió el contenido.

Capítulo VI Algunos Tópicos Específicos del Cálculo de Elementos de Máquinas

6.1 Fatiga Volumétrica y Superficial de los Metales

6.1.1 El fenómeno de la Fatiga de los Metales

La rotura por fatiga es la falla típica de las piezas de máquinas que están sometidas a un régimen de carga cíclico. Tal es el caso, por ejemplo, de los dientes de engranajes, los árboles, las correas, etc. E incluso aquellos aparatos donde existen variaciones cíclicas de las cargas, como son: recipientes con variación de la presión interior, tolvas con variación del peso que contienen, etc.

Los experimentos han demostrado que la falla por fatiga en los metales se inicia en un punto que constituye un verdadero núcleo de la misma, en el cual aparece una microgrieta, la cual va desarrollándose progresivamente hasta la rotura final.

Del examen microscópico de las fracturas por fatiga se desprende también que el núcleo de la misma se encuentra próximo a algún punto de concentración de tensiones, ya sea de carácter tecnológico, constructivo o de explotación. En estos puntos de concentración de tensiones se producen incrementos locales de la tensión que pueden dar origen a la formación de bandas de deslizamiento en los cristales. En el caso de cargas estáticas la aparición de bandas de deslizamiento conduce a cierta redistribución de las tensiones, lo cual no tiene mayor trascendencia; sin embargo, bajo la presencia de tensiones cíclicas el material se ve cargado y descargado continuamente y la presencia de deformaciones plásticas locales conduce a la aparición del fenómeno de endurecimiento por deformación. Es conocido que el endurecimiento por deformación provoca el incremento del límite elástico del metal, pero al mismo tiempo se reduce la capacidad del metal de asimilar deformaciones plásticas.

Este primer período no es peligroso, el metal se adapta a la presencia de cargas cíclicas, o sea, bajo la presencia de deformaciones plásticas locales, va elevando su capacidad resistente y puede soportar tensiones cíclicas más elevadas sin deformaciones plásticas. Ahora bien, si el incremento local de las tensiones es muy grande, o existen defectos en la estructura cristalina del metal o el proceso se repite durante un período prolongado, se excede la capacidad de deslizamiento plástico del metal y se produce la rotura de la red cristalina por descohesión de las partículas, surgiendo una pequeña microgrieta.

Esta pequeña fisura actúa entonces como un fuerte concentrador de tensiones, reproduciéndose el proceso anterior, lo que hace que la fisura se desarrolle progresivamente. Este segundo período es peligroso a partir del instante en que las dimensiones de la grieta exceden las dimensiones de los defectos internos de la estructura cristalina del metal, momento en el cual éste se considera dañado y sin posibilidad alguna de resistir la acción de las cargas por mucho tiempo. Alcanzado este momento la fisura se desarrolla rápidamente hasta que la sección sana del metal no sea capaz de soportar las cargas actuantes y se produce la falla.

En el mecanismo de la fatiga es posible considerar tres periodos característicos: el primero que se conoce como período de incubación que constituye todo el período previo al momento en que la microgrieta alcanza su tamaño peligroso, un segundo período conocido como figuración progresiva en el cual la grieta va extendiéndose en la profundidad del metal producto del efecto de entalla que la propia fisura engendra. Finalmente un tercer período de rotura frágil final, esta se produce de manera brusca sin señales externas que la anuncien, cuando la sección sana no es capaz de soportar las cargas actuantes.

El aspecto externo de la falla por fatiga es tan característico que permite conocer por simple inspección si la causa de la falla es o no un proceso de fatiga. En ella se distinguen claramente dos zonas (Fig.6.1)

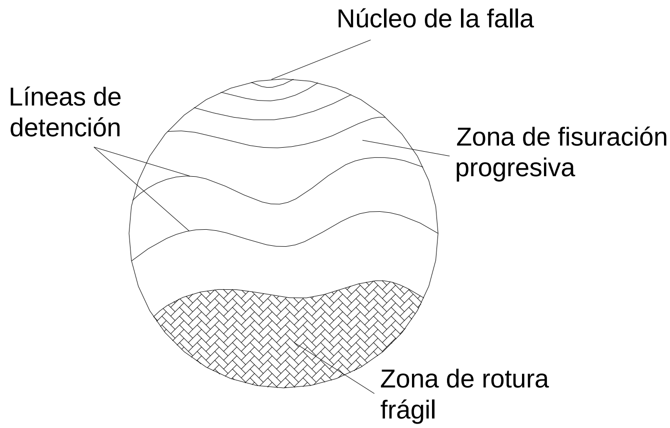


Figura 6.1 Zonas de una fractura por fatiga típica

a) La zona de fisuración progresiva, la cual es una zona con una superficie de granulación fina, de aspecto aterciopelado y en algunas zonas pulido debido al frotamiento de ambas caras de la grieta durante el proceso de fisuración.
b) La zona de rotura frágil, de estructura cristalina gruesa con todas las características de una rotura frágil normal.

El aspecto de la zona de fisuración progresiva depende mucho de la prolongación que haya tenido este período. Si el mismo es muy breve, el aspecto es de granulometría fina aterciopelada, sin embargo, si el período se extiende por un plazo prolongado entonces el frotamiento y el aplastamiento recíproco de ambas caras de la grieta hace que esta zona se presente con una superficie pulida y brillante.

La configuración y extensión de esta zona está muy relacionada con la forma e intensidad de los concentradores de tensiones y con la intensidad de la sobrecarga cíclica.

A una pequeña sobrecarga cíclica la rotura por fatiga se desarrolla lentamente, la pieza resiste un gran número de ciclos de carga hasta la fractura y el efecto de abrasión y aplastamiento entre las caras de la grieta será considerable. En este caso la grieta penetra a gran profundidad y la zona de rotura frágil es relativamente pequeña. En esta zona de fisuración progresiva aparecen huellas del desarrollo gradual de la grieta en forma de líneas más o menos paralelas que se conocen como líneas de detención porque ellas marcan el cambio del curso del desarrollo de la grieta producto de cambios locales de la resistencia del material, de las variaciones del régimen de carga, así como producto de las paradas de la máquina que interrumpen el proceso de fisuración y cambian su curso.

Al aumentar el grado de sobrecarga cíclica, el aspecto externo de ambas zonas se diferencia menos uno del otro, en este caso la zona de rotura por fatiga o de fisuración progresiva tiene un aspecto más bien aterciopelado, debido a que el número de repeticiones de las tensiones hasta la rotura resultan tanto menores cuanto mayores sean las tensiones efectivas. En este caso la zona de fisuración progresiva es pequeña y la de rotura frágil mucho mayor.

En la figura 6.2 se brindan algunos esquemas de las fracturas por fatiga para diferentes configuraciones y niveles del concentrador de tensiones y para diferentes condiciones de carga.

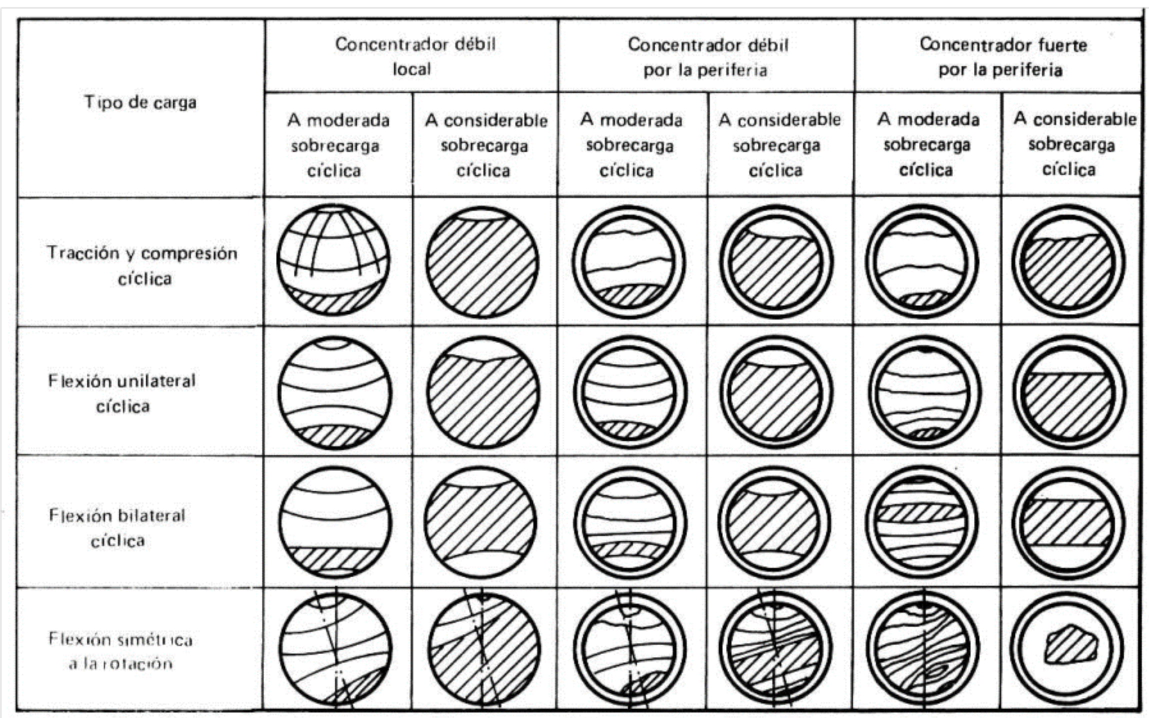


Fig. 6.2 Aspecto externo de las fallas por fatiga

6.1.2. Características de los ciclos de tensiones variables

El carácter de la variación de las tensiones cíclicas se representa convencionalmente por una sinusoide, tal como se muestra en la Fig.6.3, cuyos parámetros fundamentales son:

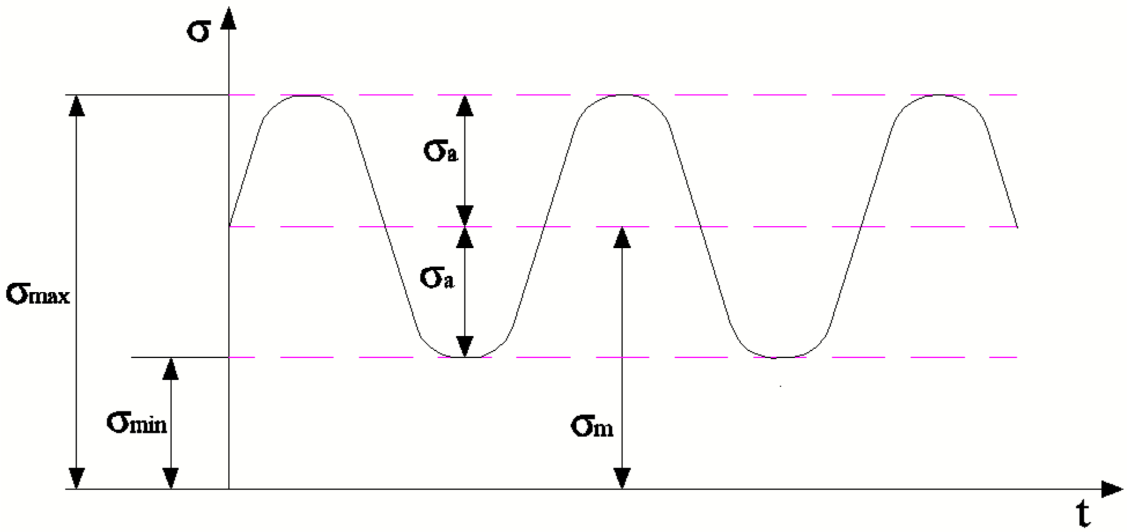


Fig. 6.3 Características de los ciclos de tensiones variables

$\sigma_{máx}$ o $\tau_{máx}$ - Tensión máxima.

$\sigma_{mín}$ o $\tau_{mín}$ - Tensión mínima.

σ_m o τ_m - Tensión media.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \qquad (6.1)$$

σ_a o τ_a - Tensión amplitud.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \qquad (6.2)$$

La relación entre la tensión mínima del ciclo y la máxima se denomina razón de asimetría del ciclo y se designa por la letra r.

$$r = \frac{\sigma_{mín}}{\sigma_{máx}} \qquad (6.3)$$

De acuerdo con el valor de r se distinguen tres ciclos que se consideran los más característicos:

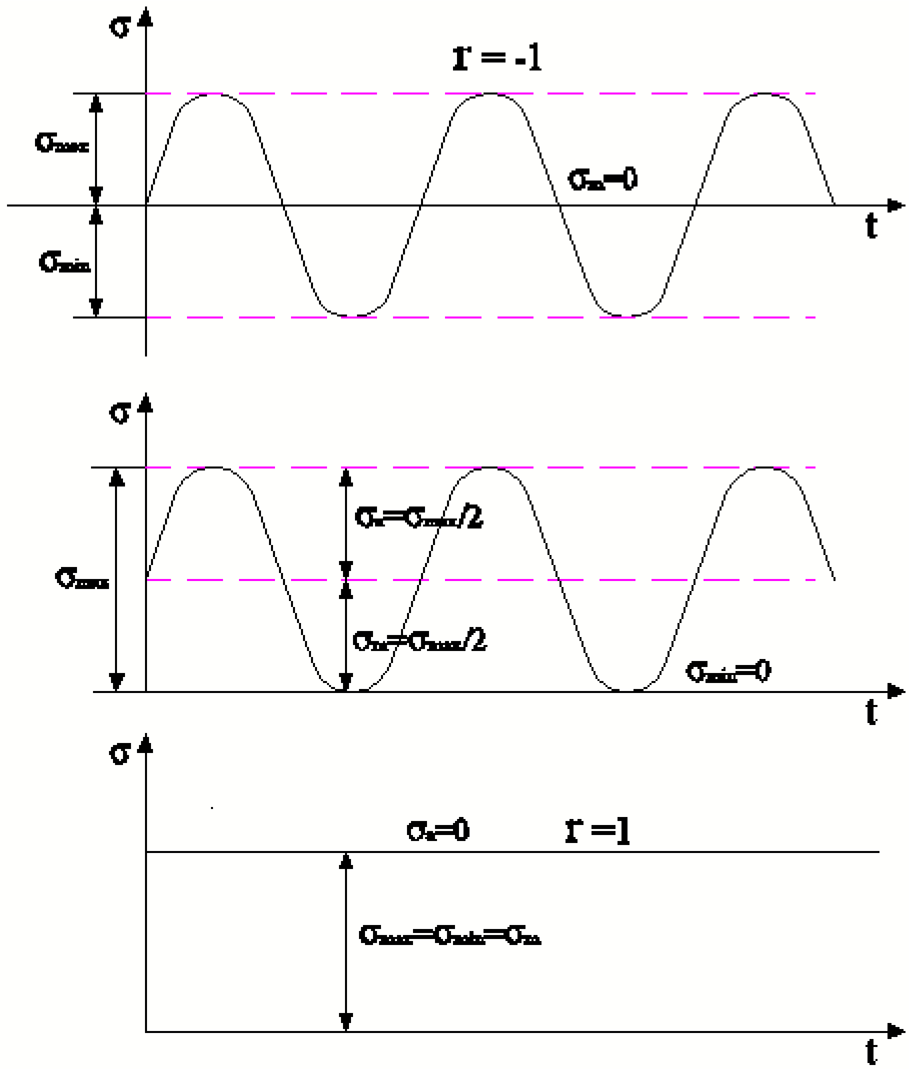


Fig. 6.4 Ciclo simétrico, intermitente y constante

- Ciclo simétrico: para el cual r= -1, o sea $\sigma_{mín}= -\sigma_{máx}$, en este caso $\sigma_m=0$ y $\sigma_a=\sigma_{máx}$ (Fig. 3 a).
- Ciclo intermitente: para el cual r=0, o sea $\sigma_{mín}= 0$ y $\sigma_a=\sigma_m=\sigma_{máx}/2$ (Fig. 3 b).
- Ciclo de tensiones constantes: para el cual r=1, en este caso $\sigma_a=0$ y $\sigma_m=\sigma_{máx}=\sigma_{mín}$ (Fig. 3 c).

6.1.3 Curva de Wohler. Límite de fatiga

Fue en Alemania a mediados del siglo antepasado donde Wohler, ingeniero de los ferrocarriles Bávaros, emprendió una serie de ensayos para determinar las causas de la falla de los ejes de los ferrocarriles y averiguar si los materiales presentan realmente un límite de fatiga, o sea, una tensión por debajo de la cual el material resistiera un número indefinido de ciclos de carga.

Los experimentos fueron realizados bajo flexión en rotación a la que se superponía un ciclo de tensiones constantes de tracción, de manera que variando la magnitud de las tensiones de flexión y de tracción se podían obtener ciclos de diferentes razones de asimetría.

Los resultados obtenidos se graficaron en un diagrama de σ_{max} vs. N, donde N era el número de ciclos para el cual se producía la rotura bajo la tensión σ_{max}. Esta gráfica se conoce como curva de Wohler y se obtiene hoy en día por medio de los ensayos de fatiga. El valor de la tensión para el cual la curva se hace asintótica al eje N se identifica como el límite de fatiga del material para la razón de asimetría a la que se efectúo el ensayo (Fig. 4) y se designa por σ_r, donde r es la razón de asimetría.

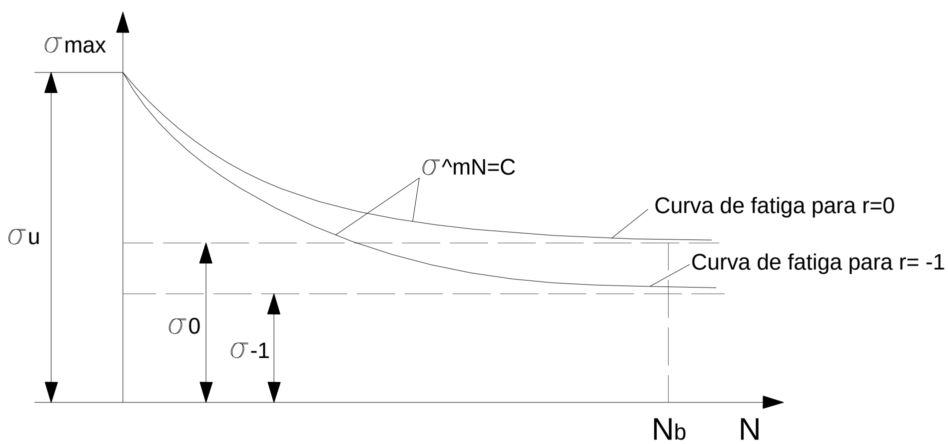


Fig. 6.5 Curva de Wohler. Límites de Fatiga

Los ensayos para determinar el valor del límite de fatiga de un material para una determinada razón de asimetría no se prolongan indefinidamente, sino que convencionalmente se toma un número de ciclos convencional, lo suficientemente grande que se denomina número de ciclos base, N_b, generalmente $N_b = 10^7$ ciclos, aunque puede ser mayor, y si el material es capaz de resistir durante el ensayo un número de ciclos mayor que N_b se considera que su vida es ilimitada.

Los valores de los límites de fatiga para diferentes razones de asimetría para los diferentes materiales utilizados en la ingeniería se reportan en los manuales.

En el caso de los aceros los límites de fatiga se pueden estimar en función de σ_u según los datos de la Tabla 6.1

Tabla 6.1 Estimación de los Límites de Fatiga en función de σu

Solicitación	**Ciclo Simétrico**	**Ciclo Asimétrico**
Flexión	$\sigma_{-1f} = 0.43\ \sigma_u$	$\sigma_{ob} = 0.6\ \sigma_u \leq \sigma_f$
Tracción – Compresión	$\sigma_{-1f} = 0.36\ \sigma_u$	$\sigma_{ot} = 0.5\ \sigma_u \leq \sigma_f$
Torsión	$\tau_{-1} = 0.223\ \sigma_u$	$\sigma_o = 0.3\ \sigma_u \leq \sigma_f$

Si la pieza debe trabajar solamente un número de ciclos limitado, la misma puede trabajar a una tensión superior al limite de fatiga. En este caso, el límite de fatiga restringido se calcula en función del límite de fatiga σ_r obtenido para un número de ciclos base N_b y el número de ciclos de vida deseada en la pieza N. El límite de fatiga se designa entonces como σ_{rN}.

$$\sigma_{r\,N}^{m} \cdot N = \sigma_r^m \cdot N_b$$

De donde:

$$\sigma_{r\,N} = \sqrt[m]{\sigma_r^m \cdot \frac{N_b}{N}} \tag{6.4}$$

6.1.4. Factores que afectan el límite de fatiga

El límite de fatiga para las piezas reales hechas de un determinado material se diferencia del límite de fatiga obtenido en el laboratorio mediante el ensayo de Wohler, debido a que en la resistencia a la fatiga influyen una serie de factores que están controlados durante el ensayo.

Estos factores son:

a) Cambio de forma de las piezas.
b) Sus dimensiones absolutas.
c) El estado de la superficie.
d) El medio externo.
e) La temperatura.
f) Las condiciones de aplicación de la carga.

Se verá brevemente como se manifiesta cada uno de estos factores:

a) Influencia del cambio de forma:

Los cambios de forma en las piezas reales originan concentración de tensiones y esta a su vez influye directamente en el proceso de fatiga. Mientras mayor sea la concentración de tensiones, mayor probabilidad existe de que se produzca la falla por fatiga.

La influencia de la geometría de las piezas se toma en cuenta mediante el coeficiente teórico de concentración de tensiones.

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma} \quad \text{o} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{máx}}{\tau} \qquad (6.5)$$

Donde:

$\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$ - Son las tensiones máximas provocadas por el concentrador correspondiente.

σ y τ - Tensiones medias que surgirían en esa zona si no se tomara en cuenta el efecto del concentrador.

El coeficiente α depende exclusivamente de la geometría de las piezas y no depende del material. Este coeficiente es siempre mayor que la unidad.

En general se puede decir que:

1) El valor de α es mayor mientras más agudo sea el fondo de la entalla, o sea, cuando el radio del fondo de la entalla es menor. Para un mismo radio, α es mayor mientras más profundo sea la entalla.
2) Con las mismas dimensiones geométricas de la pieza, el valor de α es mayor para la tracción y la compresión, menor para la flexión y menor aún para la torsión.
3) Para una forma geométrica dada y una determinada solicitación, α es mayor para las piezas planas que para las cilíndricas.

Ahora bien, no todos los materiales presentan la misma sensibilidad a la concentración de tensiones. Para los aceros, por ejemplo, la sensibilidad depende de la relación σ_f/σ_u, mientras mayor sea esta relación, o sea, en la medida que el acero sea menos dúctil, la sensibilidad es mayor.

El hierro fundido se considera una excepción dentro de los materiales frágiles, ya que en él, los concentradores internos provocados por el grafito libre presente en su estructura cristalina son mayores que los concentradores exteriores provocados por los cambios de forma, lo que hace que este material se comporte como insensible a los cambios externos de la forma.

Los metales no ferrosos son muy poco sensibles a la concentración de tensiones, así como el acero inoxidable 18/8 (18% Ni y 8% Cr).

El efecto de la sensibilidad se toma en cuenta a través del factor de sensibilidad a la concentración de tensiones q (q_σ o q_τ), el cual para el caso de los aceros depende de σ_u y de α (anexos).

Para los materiales muy sensibles q se aproxima a la unidad, para los insensibles q=0.

Mediante la combinación de la influencia de la geometría del concentrador α y la sensibilidad del material q se obtiene el coeficiente efectivo, o factor real de concentración de tensiones k (k_σ o k_τ):

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) \quad \text{o} \quad k_\tau = 1 + q_\tau \cdot (\alpha_\tau - 1) \tag{6.6}$$

En (Feodosiev, 1985), (Fernández, 1983) y (Pisarenko, 1989) aparecen los valores del coeficiente efectivo de concentración de tensiones para algunos tipos de concentradores. En los Anexos del Folleto de Fatiga volumétrica y superficial de los Metales(Goytisolo 2000) se dan algunas gráficas de factores teóricos y efectivos, y del factor de sensibilidad. En los manuales y en otros textos aparecen otras gráficas de α_σ o α_τ o de k_σ o k_τ.

En algunas ocasiones debido a la carencia de datos experimentales no es posible determinar alguno de los coeficientes efectivos de concentración de tensiones k_σ o k_τ. En este caso se pueden utilizar las siguientes relaciones aproximadas:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) \quad \text{o} \quad k_\tau = 1 + q_\tau \cdot (\alpha_\tau - 1) \qquad (6.7)$$

b) Influencia de las dimensiones absolutas

Para una misma tensión de trabajo, el incremento de las dimensiones absolutas aumenta la probabilidad de la rotura por fatiga, ya que es más probable la presencia de defectos internos y superficiales.

El efecto de las dimensiones absolutas se toma en cuenta mediante el factor de escala a factor de tamaño, ε, que toma en consideración la disminución del límite de fatiga de la pieza real con relación al obtenido para la probeta de diámetro 10 mm. En (Feodosiev, 1985) aparecen los valores del factor de tamaño ε. La curva 1 para el acero al carbono sin concentrador, la 2 para el acero aleado con concentrador y la 4 para todos los aceros con grandes concentradores de tensiones. Esta gráfica o similares aparece también en otros textos.

c) Influencia del estado de la superficie

En la medida que aumentan las micro irregularidades de la superficie, aumenta la probabilidad de aparición de la falla por fatiga, o sea, disminuye el valor del límite de fatiga. La influencia del estado de la superficie se toma en cuenta a través del coeficiente β_K: la curva 1 – superficie pulida, la 2 – rectificada, la 3 – maquinado fino, la 4 – maquinado tosco y la 5 acabado de laminación sin maquinado. Una gráfica para obtener este coeficiente aparece en el (Feodosiev, 1985).

d) Influencia del medio externo

Si la pieza trabaja en un medio corrosivo, la probabilidad de falla por fatiga aumenta. Este efecto se toma en cuenta también a través de β_k, curvas 6 y 7 del (Feodosiev 1985).

e) Influencia de la temperatura

La temperatura influye en el límite de fatiga de la misma forma que en σ_u. Para los aceros al carbono el límite de fatiga es mayor en la zona de 300 – 350 ºC que a la temperatura ambiente, pero disminuye para temperaturas superiores a 350 ºC. (Feodosiev muestra esta dependencia)

Si el límite de fatiga se estima por las relaciones de la Tabla 3, basta entonces con conocer el valor de σ_u a la nueva temperatura.

f) Influencia de las condiciones de carga.

La presencia de sobrecargas cíclicas provoca en el material un determinado efecto de daño. En general se dice que el efecto dañado es igual a la relación que hay entre el número de ciclos de trabajo a una tensión dada y el número de ciclos de rotura a esa tensión.

La hipótesis acumulativa plantea que en presencia de sobrecargas cíclicas la rotura por fatiga se produce cuando la suma de los efectos de dañado es igual a la unidad. O sea:

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}+\cdots \quad \cdots+\frac{n_i}{N_i}=1 \qquad (6.8)$$

Donde:

n_1, n_2 … - Ciclos de trabajo bajo los diferentes niveles de carga.

N_1, N_2 … - Número de ciclos hasta la rotura para los diferentes niveles de carga.

6.1.5. Diagrama de límites de fatiga

Con el objetivo de tener una representación gráfica de la relación entre los valores del límite de fatiga para los ciclos de diferentes razones de asimetría y definir el campo de tensiones para el cual no se produce la falla por fatiga se construye lo que se conoce como diagramas de límites de fatiga. Estos diagramas se pueden construir en diferentes sistemas de coordenadas (ver folleto), aquí se emplearán las coordenadas de Haigh (σ_a vs. σ_m).

Si se plotean en este diagrama las coordenadas (σ_a,σ_m) de los ciclos para los cuales se produce la rotura por fatiga para cada razón de asimetría se obtiene la curva mostrada en la Fig. 6.6.

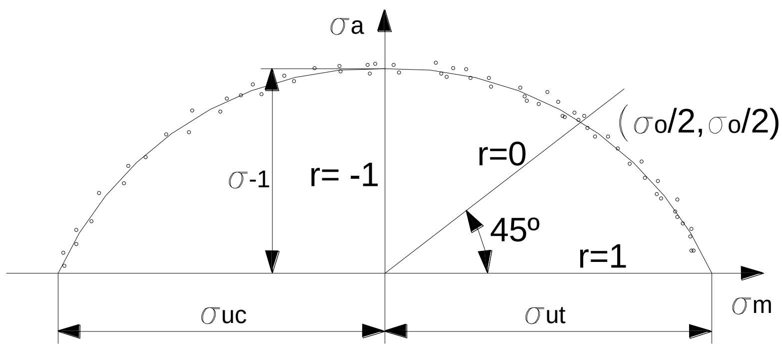


Fig. 6.6 Diagrama de Límites de fatiga en las coordenadas de Haigh

Observe que en este diagrama, cada una de las rectas oblicuas que pasan por el origen de coordenadas representa ciclos de una determinada razón de asimetría. Así, el eje de las abcisas, r=1, el de las ordenadas, r = -1 y en una recta con pendiente de 45º, r = 0. O sea, que el diagrama en su parte positiva agrupa todos los ciclos cuya razón de asimetría va desde $-1 \leq r \leq 1$.

Partiendo de que el volumen de datos experimentales sobre el límite de fatiga de los materiales es limitado, el diagrama se simplifica con tramos rectos. Para ello se parte de que se conocen las siguientes propiedades mecánicas del material.

σ_{-1} – Límite de fatiga para ciclo simétrico (r = -1).

σ_0 – Límite de fatiga para ciclo intermitente (r = 0).

σ_u – Límite de resistencia o resistencia máxima (r = 1).

σ_f – Límite de fluencia (r = 1).

En la Fig. 6.7 se muestra la simplificación.

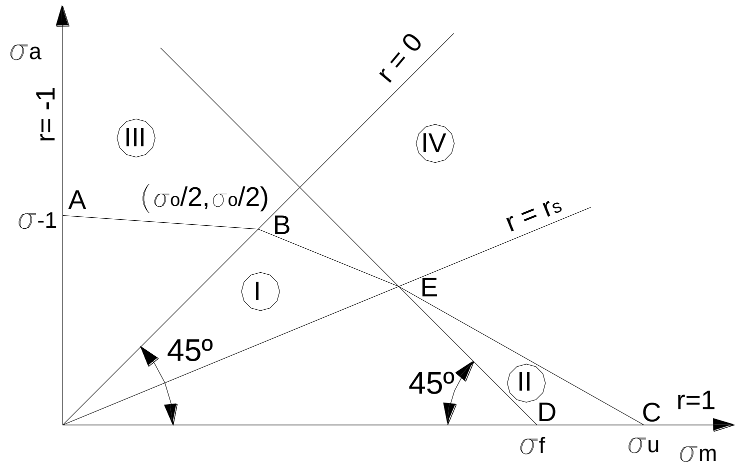


Fig. 6.7 Diagrama de Límites de Fatiga simplificado

En el diagrama se trazan los puntos:

A – para r = -1, $\sigma_a = \sigma_{max}=\sigma_{-1}$.

B – para r =0, $\sigma_a=\sigma_m=\sigma_{max}/2=\sigma_0/2$.

C y D – son σ_u y σ_f para r=1.

Como en las piezas reales no se puede admitir la fluencia, se traza por σ_f una recta a 45º que divide el diagrama en dos grandes zonas, a la derecha de esta recta $\sigma_{max}=\sigma_m+\sigma_a>\sigma_f$ y a la izquierda $\sigma_{max}=\sigma_m+\sigma_a<\sigma_f$, o sea, a la derecha se produce la fluencia y a la izquierda no.

El diagrama queda dividido entonces en cuatro zonas:

Zona I: No ocurre ni la falla por fluencia ni por fatiga.

Zona II: Ocurre la falla por fluencia, peor no por fatiga.

Zona III: Ocurre la falla por fatiga, no así la fluencia.

Zona IV: Ocurre la falla por fatiga con deformaciones plásticas.

Uniendo mediante rectas los puntos A, B, C, D y E se obtiene el diagrama simplificado de límites de fatiga conocido como diagrama de Serensen modificado en las coordenadas de Haigh.

6.2 Cálculo del factor de seguridad a la fatiga bajo régimen estable de carga

Se verá cómo partiendo del diagrama simplificado se pueden obtener las expresiones para el cálculo del factor de seguridad.

Desde el punto de vista de los valores de la razón de asimetría del ciclo, el diagrama queda dividido en tres zonas (Fig. 6.8).

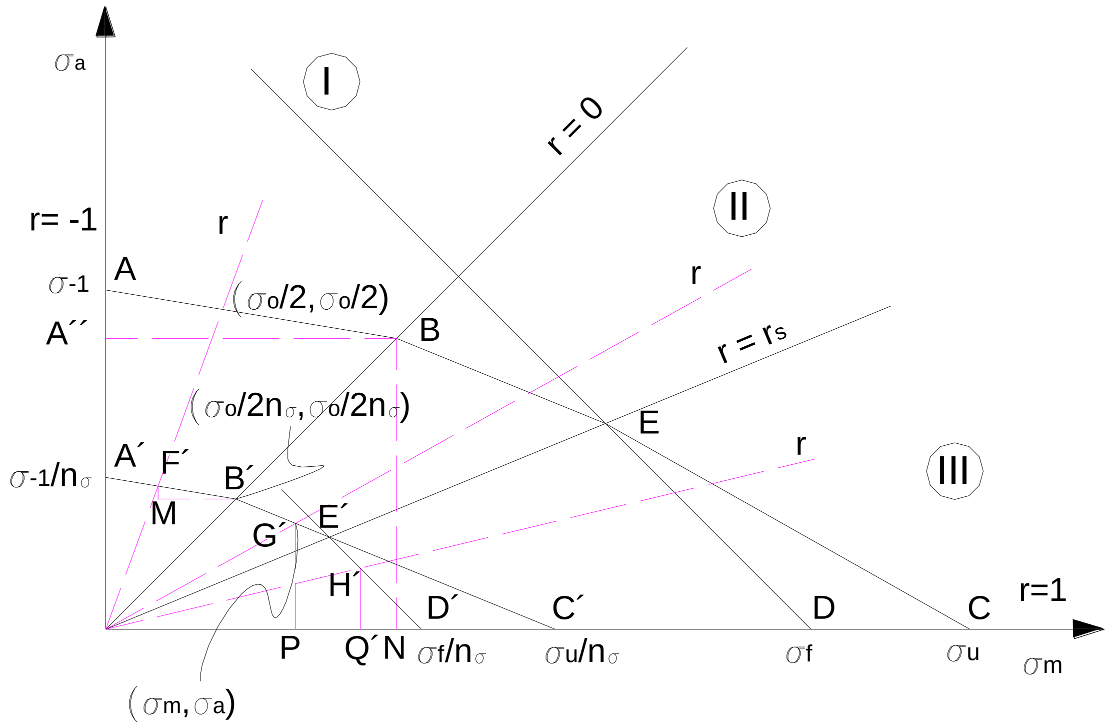


Fig. 6.8 Zonas del diagrama de Serensen modificado en las coordenadas de Haigh

Zona I: $-1 \leq r \leq 0$

Zona II: $0 \leq r \leq r_s$

Zona III: $r_s \leq r \leq 1$

Determinemos primero la razón de asimetría de la recta OE, o sea, la recta r_s.

La expresión para la recta DE es: $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_f \quad \Rightarrow \quad \sigma_{mE} + \sigma_{aE} = \sigma_f$ (6.9)

La expresión para la recta BEC: $m = -\dfrac{\dfrac{\sigma_0}{2}}{\sigma_u - \dfrac{\sigma_0}{2}} = -\dfrac{\sigma_{aE}}{\sigma_u - \sigma_{mE}}$ (6.10)

Simultaneando (6.9) y (6.10) se obtiene que:

$$\sigma_{aE} = \frac{\sigma_0 \cdot (\sigma_u - \sigma_f)}{2 \cdot (\sigma_u - \sigma_0)} \text{ y } \sigma_{mE} = \sigma_f - \frac{\sigma_0 \cdot (\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_u - \sigma_0} \qquad (6.11)$$

Y como:

$$r_s = \frac{\sigma_{\min E}}{\sigma_{\max E}} = \frac{\sigma_{mE} - \sigma_{aE}}{\sigma_{mE} + \sigma_{aE}} = 1 - \frac{\sigma_0 \cdot (\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_f \cdot (\sigma_u - \sigma_0)} \qquad (6.12)$$

Se determinará ahora la expresión de cálculo del factor de seguridad en la zona I:

$-1 \leq r \leq 0$.

ΔAA”B ~ ΔF´MB´

$$\frac{AA''}{A''B} = \frac{F'M}{MB'}$$

$$\frac{\sigma_{-1} - \frac{\sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{-\frac{\sigma_0}{2 \cdot n_\sigma} + \sigma_a}{\frac{\sigma_0}{2 \cdot n_\sigma} - \sigma_m}$$

Despejando n_σ se obtiene:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \left(\frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_m} \qquad (6.13)$$

Para la zona II: $0 \leq r \leq r_s$

ΔG´PC´ ~ ΔBNC

$$\frac{BN}{NC} = \frac{G'P}{PG'}$$

$$\frac{\frac{\sigma_0}{2}}{\sigma_u - \frac{\sigma_0}{2}} = \frac{\sigma_a}{\frac{\sigma_u}{n_\sigma} - \sigma_m}$$

Despejando n_σ se obtiene:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_u}{\left(\frac{2 \cdot \sigma_u - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_a + \sigma_m} \qquad (6.14)$$

Finalmente, para la zona III: $r_s \leq r \leq 1$

Del triangulo Q´D´H´ se tiene que:

OD´=OQ´+Q´H´

O sea: $\frac{\sigma_f}{n_\sigma} = \sigma_m + \sigma_a$

Despejando n_σ:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_f}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\sigma_f}{\sigma_{max}} \tag{6.15}$$

Como se aprecia, en esta zona el factor de seguridad se determina con relación a la fluencia igual que en el caso estático. En esta zona no existe probabilidad de falla por fatiga, primero aparece la fluencia. De igual manera se pueden obtener fórmulas similares para el factor de seguridad n_τ en cada zona.

Para tomar en cuenta los factores que afectan la resistencia a la fatiga se introducen en estas expresiones los factores: k_σ, ε_σ y β_k. Estos afectan a σ_a que representa la parte variable de la tensión aplicada.

En la Tabla 6.2 que se muestra más abajo aparece un resumen de las ecuaciones de cálculo para cada zona.

Cuando existen tensiones normales y tangenciales actuando simultáneamente, el factor de seguridad resultante se halla por la fórmula de Haigh-Pollard

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \tag{6.16}$$

Tabla 6.2 Expresiones para el cálculo de los factores de seguridad a la fatiga			
Zona	Rango de valores de r	Tensiones normales	Tensiones tangenciales
I	$-1 \leq r \leq 0$	$n_\sigma = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \left(\dfrac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_m}$	$n_\tau = \dfrac{\tau_{-1}}{\tau_a + \left(\dfrac{2 \cdot \tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}\right) \cdot \tau_m}$
II	$0 \leq r \leq 1 - \dfrac{\sigma_0 \cdot (\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_f \cdot (\sigma_u - \sigma_0)}$ o $0 \leq r \leq 1 - \dfrac{\tau_0 \cdot (\tau_u - \tau_f)}{\tau_f \cdot (\tau_u - \tau_0)}$	$n_\sigma = \dfrac{\sigma_u}{\left(\dfrac{2 \cdot \sigma_u - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_a + \sigma_m}$	$n_\tau = \dfrac{\tau_u}{\left(\dfrac{2 \cdot \tau_u - \tau_0}{\tau_0}\right) \cdot \tau_a + \tau_m}$
III	$r \geq 1 - \dfrac{\sigma_0 \cdot (\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_f \cdot (\sigma_u - \sigma_0)}$ o $r \geq 1 - \dfrac{\tau_0 \cdot (\tau_u - \tau_f)}{\tau_f \cdot (\tau_u - \tau_0)}$	$n_\sigma = \dfrac{\sigma_f}{\sigma_{max}}$	$n_\tau = \dfrac{\tau_f}{\tau_{max}}$

Ejemplo No. 1

El árbol rasurado mostrado en la Fig. 6.9 gira a una velocidad angular constante y en la sección de la ranura está sometido a tensiones de flexión de valor σ_{fmax}= 500 kgf/cm^2, a tracción de valor: σ_{tmax}= 500 kgf/cm^2 y a torsión τ_{max}= 400 kgf/cm^2. El material del árbol es acero al carbono con temple y revenido con una σ_u= 7 500 kgf/cm^2 y σ_f= 4 400 kgf/cm^2. La ranura fue elaborada con una cuchilla de forma en el torno, sin rectificado posterior.

Determine el factor de seguridad resultante a la fatiga del árbol es esa sección. Las dimensiones están en milímetros.

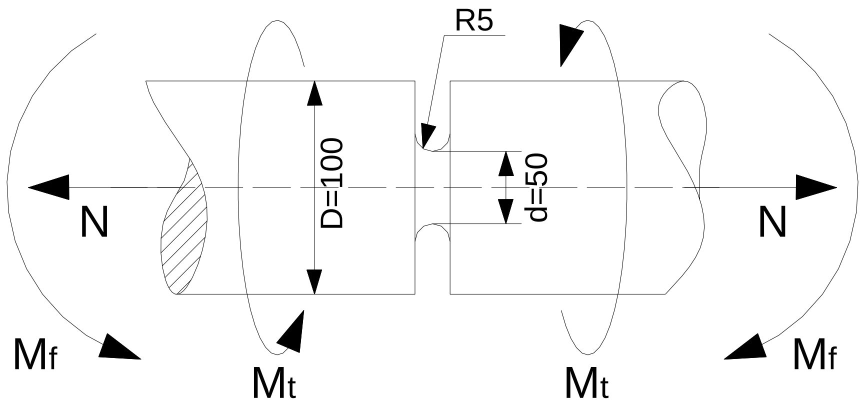


Fig. 6.9 Árbol ranurado Ejemplo 1

Solución:

La tensión normal máxima del ciclo será:

$$\sigma_{max} = \sigma_{f\,max} + \sigma_{t\,max} = 500 + 500 = 1000\ kgf/cm^2$$

y la mínima:

$$\sigma_{min} = \sigma_{t\,max} - \sigma_{f\,max} = 500 - 500 = 0\ kgf/cm^2$$

El ciclo de las tensiones es intermitente, puesto que:

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0$$

O sea, se corresponde con la zona I: -1≤r≤0 y la expresión de cálculo del factor de seguridad es:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{k_\sigma \cdot \sigma_a}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta_k} + \left(\dfrac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_m}$$

Si el ciclo de las tensiones normales es intermitente:

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{max}}{2} = \frac{1000}{2} = 500\ kgf/cm^2$$

Los valores de σ_{-1} y σ_0 los estimamos según los datos de la Tabla 3 pág. 13 para la tracción que tiene valores más críticos. O sea:

$$\sigma_{-1} = 0{,}36 \cdot \sigma_u = 0{,}36 \cdot 7500 = 2700\ kgf/cm^2$$

$$\sigma_0 = 0{,}50 \cdot \sigma_u = 0{,}50 \cdot 7500 = 3750\ kgf/cm^2 < \sigma_f$$

El factor teórico de concentración de tensiones lo hallaremos del gráfico correspondiente al árbol ranurado a tracción que es más crítico:

Para $\frac{\rho}{a} = \frac{5}{50} = 0{,}1$ y $\frac{D}{d} = \frac{100}{50} = 2$ se tiene: α_σ=2,43

El factor de sensibilidad a la concentración de tensiones para σ_u= 7 500 kgf/cm^2=75 kgf/mm^2 y α_σ=2,43>2

q_σ=0,67

El coeficiente efectivo de concentración de tensiones es:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0{,}67 \cdot (2{,}43 - 1) = 1{,}96$$

El factor de estado de la superficie se toma para σ_u=75 kgf/mm^2 entre torneado fino y tosco, $\beta_k \cong 0{,}8$.

El factor de tamaño para d=50 mm y acero al carbono con concentrador (curva 2), ε_σ=0,75.

Sustituyendo en la expresión de n_σ:

$$n_\sigma = \frac{2700}{\frac{1{,}96 \cdot 500}{0{,}75 \cdot 0{,}8} + \left(\frac{2 \cdot 2700 - 3750}{3750}\right) \cdot 500} = 1{,}46$$

El ciclo de la torsión es constante (r=1), el factor de seguridad se halla por la expresión:

$$n_\tau = \frac{\tau_f}{\tau_{max}}$$

El límite de fluencia a cortante se puede estimar por la relación:

$$\tau_f = 0{,}6 \cdot \sigma_f = 0{,}6 \cdot 4\,400 = 2\,640 \; kgf/cm^2$$

De donde:

$$n_\tau = \frac{2\,640}{400} = 6{,}6$$

El factor de seguridad resultante:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1{,}46 \cdot 6{,}6}{\sqrt{1{,}46^2 + 6{,}6^2}} = 1{,}43$$

Un factor de seguridad a la fatiga inferior a n=1,5 ya resulta peligroso y no se puede considerar bueno. La posibilidad de falla es elevada.

Ejemplo No. 2.

Un árbol vertical de una bomba de pozo profundo tiene una sección con cambio en diámetro como se muestra en la Fig. 9.

El medio en que opera es corrosivo y se empleará un acero al cromo-níquel-molibdeno 40XHMA (según norma rusa), con temple y revenido cuyas propiedades mecánicas son: σ_u= 11 000 kgf/cm^2 y σ_f= 9 500 kgf/cm^2.

El árbol en la sección de cambio de diámetro soporta una carga axial igual al peso propio del árbol y los impelentes cuya magnitud es P= 6 390 kgf, un momento flector de magnitud M_f = 2 000 kgf cm y un momento torsor constante en el tiempo M_t= 4 000 kgf cm.

Calcule el factor de seguridad resultante a la fatiga de dicha sección del árbol.

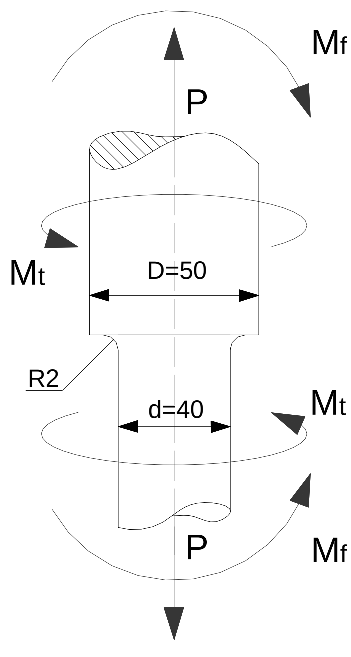


Fig. 6.10 Árbol de una bomba vertical

Solución:

Calculemos las tensiones de trabajo:

$$\sigma_a = \sigma_{Mf} = \frac{M_f}{W} = \frac{M_f}{0{,}1 \cdot d^3} = \frac{2000}{0{,}1 \cdot 4^3} = 312\ kgf/cm^2$$

$$\sigma_m = \sigma_p = \frac{P}{A} = \frac{6390}{\frac{\pi}{4}\cdot 4^2} = 508\ kgf/cm^2$$

El ciclo de las tensiones normales tendrá:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{Mf} + \sigma_P = 312 + 508 = 820\ kgf/cm^2 \text{, y}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_P - \sigma_{Mf} = 508 - 312 = 186\ kgf/cm^2$$

La razón de asimetría posee un valor de:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{186}{820} = 0{,}227$$

Hay que calcular $r_s = 1 - \frac{\sigma_0\cdot(\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_f\cdot(\sigma_u - \sigma_0)}$ con el objetivo de precisar en que zona se encuentra.

El valor de σ_0 se estima por las relaciones de la Tabla 3 para el caso de tracción. O sea:

$$\sigma_0 = 0{,}5\cdot\sigma_u = 0{,}5\cdot 11000 = 5500\ kgf/cm^2$$

El valor de r_s será entonces:

$$r_s = 1 - \frac{\sigma_0\cdot(\sigma_u - \sigma_f)}{\sigma_f\cdot(\sigma_u - \sigma_0)} = 1 - \frac{5500\cdot(11000 - 9500)}{9500\cdot(11000 - 5500)} = 0{,}842$$

Por lo tanto en ciclo está en la zona II, 0<(r=0,227)<(r_s=0,842) y la fórmula de cálculo de n_σ será:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_u}{\left(\frac{2\cdot\sigma_u - \sigma_0}{\sigma_0}\right)\cdot\frac{k_\sigma\cdot\sigma_a}{\varepsilon_\sigma\cdot\beta_k} + \sigma_m}$$

A continuación se determinará k_σ.

Para un cambio en diámetro bajo tracción con $\frac{D}{d}=\frac{50}{40}=1{,}25$ y $\frac{\rho}{d}=\frac{2}{40}=0{,}05$ se obtiene:

α_σ=2,2 y para α_σ>2 y σ_u=110 kgf/cm^2, q_σ=0,88.

De donde:

$$k_\sigma=1+q_\sigma\cdot(\alpha_\sigma-1)=1+0{,}88\cdot(2{,}2-1)\cong 2{,}06$$

El factor de tamaño ε_σ para el acero aleado con concentrador (curva 3) y d=40 mm es: ε_σ=0, 63.

Para corrosión en agua dulce (curva 6, Fig. 473 Feodosiev) con σ_u=11 000 kgf/cm^2 es: β_k=0, 35.

Sustituyendo estos valores en la expresión del factor de seguridad se obtiene:

$$n_\sigma=\frac{11000}{\left(\frac{2\cdot 11000-5500}{5500}\right)\cdot\frac{2{,}06\cdot 312}{0{,}63\cdot 0{,}35}+508}\cong 1{,}19$$

La tensión tangencial en la torsión $\tau=\frac{M_t}{W_t}=\frac{M_t}{0{,}2\cdot d^3}=\frac{4000}{0{,}2\cdot 4^3}=312\ kgf/cm^2$

La tensión de fluencia a cortante $\tau_f\cong 0{,}6\cdot\sigma_f=0{,}6\cdot 9500=5700\ kgf/cm^2$

El factor de seguridad a la torsión $n_\tau=\frac{\tau_f}{\tau_{\max}}=\frac{5700}{312}=18{,}27$

Y el factor de seguridad resultante:

$$n=\frac{n_\sigma\cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}=\frac{1{,}19\cdot 18{,}27}{\sqrt{1{,}19^2+18{,}27^2}}=1{,}187\ \text{(Muy bajo)}$$

6.3 Cálculo del factor de seguridad a la fatiga bajo régimen de carga inestable

Si la amplitud del ciclo permanece constante o se producen variaciones del orden del 10 al 20% se considera el régimen de trabajo estable. Si las tensiones de trabajo varían apreciablemente se considera entonces el régimen de trabajo inestable y el cálculo se realiza sobre la base de la hipótesis acumulativa.

Caractericemos el régimen inestable de cargas de la siguiente manera:

Las cargas Q_1, Q_2, Q_3,… Q_n.

Que provocan las tensiones σ_1, σ_2, σ_3,… σ_n.

Que actúan durante los número de ciclos n_1, n_2, n_3... n_n.

Siendo los ciclos de rotura para cada tensión N_1, N_2, N_3... N_n.

Sobre la base de la Hipótesis Acumulativa se hacen las siguientes suposiciones:

1. El efecto dañino de un grupo de cargas no depende del orden de sucesión de las mismas.
2. La suma de los efectos dañinos de las cargas reales es igual al efecto dañino de una carga equivalente de amplitud constante que actúe durante un número de ciclos equivalente igual a la vida de servicio de la pieza.
3. La falla por fatiga del elemento sometido a un régimen inestable de cargas se produce cuando la suma de los efectos dañinos de las cargas de operación es igual a la unidad.

Expresado matemáticamente sería:

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}+\cdots+\frac{n_n}{N_n}=1 \qquad (6.17)$$

De la curva de Wohler se tiene que: $\sigma_i^m \cdot N_i = C$, de manera que:

$$\sigma_1^m \cdot N_1 = C, \quad \sigma_2^m \cdot N_2 = C, \quad \cdots \quad \sigma_n^m \cdot N_n = C, \qquad (6.18)$$

Sustituyendo (18) en (17) se tiene que:

$$\sigma_1^m \cdot n_1 + \sigma_2^m \cdot n_2 + \sigma_3^m \cdot n_3 + \cdots + \sigma_n^m \cdot n_n = C \qquad (6.19)$$

Como para la tensión equivalente de amplitud constante se cumplirá también que:

$$\sigma_{eq}^m \cdot N_{eq} = C \qquad (6.20)$$

Donde N_{eq} es la vida de servicio de la pieza.

Igualando (6.19) y (6.20) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^m \cdot n_i = \sigma_{eq}^m \cdot N_{eq} \qquad (6.21)$$

Despejando la tensión equivalente se tiene:

$$\sigma_{eq} = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{N_{eq}}\right)\cdot \sigma_i^m} \qquad (6.22)$$

La razón $\frac{n_i}{N_{eq}}$ representa precisamente la fracción de la vida de servicio en que opera cada una de las tensiones de operación. Esta fracción se puede obtener estudiando el ciclo correspondiente al régimen de trabajo en un tiempo limitado y considerar que las fracciones obtenidas se mantienen inalterables para toda la vida la pieza.

La vida equivalente puede determinarse partiendo de que para el valor del límite de fatiga se cumple también que:

$$\sigma_r^m \cdot N_b = C \tag{6.23}$$

Igualando (6.20) y (6.23) y despejando N_{eq} se obtiene:

$$N_{eq} = \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_{eq}}\right)^m \cdot N_b \tag{6.24}$$

Si $\sigma_{eq}<\sigma_r$ no tiene sentido hablar de vida de la pieza, ya que la misma es teóricamente infinita.

Ejemplo No. 3.

La sección más crítica correspondiente al árbol de entrada de un reductor de velocidad, cuyas dimensiones se muestran en la Fig. 10 está sometido a torsión y flexión en rotación bajo un régimen inestable de carga que se puede caracterizar como sigue:

50% del tiempo de trabajo: M_{f1}= 4 000 kgf cm y M_{t1}= 8 000 kgf cm.

30% del tiempo de trabajo: M_{f2}= 2 000 kgf cm y M_{t2}= 4 000 kgf cm.

20% del tiempo de trabajo: M_{f3}= 10 000 kgf cm y M_{t3}= 20 000 kgf cm.

Calcule el factor de seguridad a la fatiga de dicha sección del árbol si el material es acero 45 es estado normalizado con σ_u= 6 000 kgf/cm^2, σ_f= 3 600 kgf/cm^2 y τ_f= 2 160 kgf/cm^2. El chavetero es fresado. Tome m=6.

Nota: el módulo a flexión y a torsión de la sección del árbol con chavetero es:

$$W_f = 0{,}1 \cdot d^3 - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$$

$$W_t = 0{,}2 \cdot d^3 - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$$

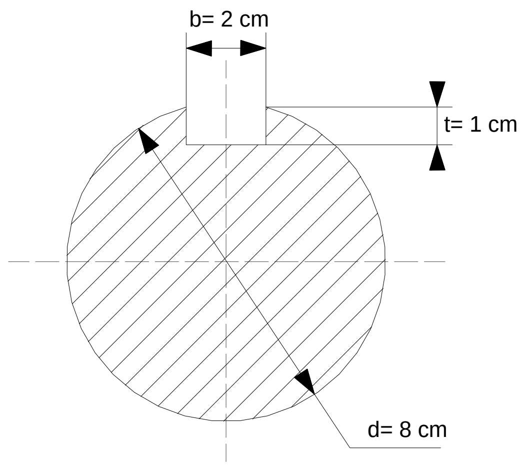


Fig. 6.11 Árbol con chavetero Ejemplo 3

Solución:

Calculemos los módulos de la sección para hallar las tensiones:

$$W_f = 0{,}1 \cdot 8^3 - \frac{2 \cdot 1 \cdot (8-1)^2}{2 \cdot 8} \cong 45\ cm^3$$

$$W_t = 0{,}2 \cdot 8^3 - \frac{2 \cdot 1 \cdot (8-1)^2}{2 \cdot 8} \cong 96{,}3\ cm^3$$

$$\sigma_1 = \frac{M_{f1}}{W_f} = \frac{4\,000}{45} = 88{,}9\ kgf/cm^2\ ,\ \ \tau_1 = \frac{M_{t1}}{W_t} = \frac{8\,000}{96{,}3} = 83{,}1\,kgf/cm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{f2}}{W_f} = \frac{2\,000}{45} = 44{,}45\ kgf/cm^2\ ,\ \ \tau_2 = \frac{M_{t2}}{W_t} = \frac{4\,000}{96{,}3} = 41{,}54\ kgf/cm^2$$

$$\sigma_3 = \frac{M_{f3}}{W_f} = \frac{10\,000}{45} = 222{,}2\ kgf/cm^2\ ,\ \ \tau_3 = \frac{M_{t3}}{W_t} = \frac{20\,000}{96{,}3} = 207{,}7\ kgf/cm^2$$

Hallando las tensiones equivalentes se tiene:

$$\sigma_{eq} = \sqrt[6]{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{N_{eq}}\right) \cdot \sigma_i^m} = \sqrt[6]{0{,}5 \cdot 88{,}9^6 + 0{,}3 \cdot 44{,}45^6 + 0{,}2 \cdot 222{,}2^6} \cong 170\ kgf/cm^2$$

$$\tau_{eq} = \sqrt[6]{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{N_{eq}}\right) \cdot \tau_i^m} = \sqrt[6]{0{,}5 \cdot 83{,}1^6 + 0{,}3 \cdot 41{,}54^6 + 0{,}2 \cdot 207{,}7^6} \cong 159\ kgf/cm^2$$

Como se trata de flexión en rotación, el ciclo de la flexión en rotaciónes simétrico (r = -1), para el cual:

$\sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_{eq} = 170\ kgf/cm^2$, $\sigma_m = 0$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1} \cdot \varepsilon_\sigma \cdot \beta_k}{k_\sigma \cdot \sigma_a}$$

Para la flexión (Tabla 6.1):

$$\sigma_{-1} = 0{,}43 \cdot \sigma_u = 0{,}43 \cdot 6000 = 2580\ kgf/cm^2$$

Para un chavetero en árbol macizo con $\frac{r}{h} = \frac{r}{t} = \frac{0{,}2}{1} = 0{,}2$

α_τ=3,3 y para σ_u=60 kgf/mm^2 y α>2, q_τ=0,6.

$$k_\tau = 1 + q_\tau \cdot (\alpha_\tau - 1) = 1 + 0{,}6 \cdot (3{,}3 - 1) = 2{,}38$$

El coeficiente k_σ se estima por la relación:

$$k_\sigma = \frac{k_\tau - 0{,}4}{0{,}6} = \frac{2{,}38 - 0{,}4}{0{,}6} = 3{,}3$$

El factor de tamaño para d=8 cm=80 mm y para acero al carbono con concentrador (curva 2) es: ε_σ=0,65.

El factor de estado de la superficie para σ_u=60 kgf/mm^2 y un valor medio entre las curvas 3 y 4: β_k=0,83.

Sustituyendo en n_σ:

$$n_\sigma = \frac{2580 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}83}{170 \cdot 3{,}3} = 2{,}48$$

El ciclo de la torsión es constante con τ_{max}=τ_{eq}=165 kgf/cm^2.

$$n_\tau = \frac{\tau_f}{\tau_{\max}} = \frac{2160}{159} = 13{,}6$$

El factor de seguridad resultante posee un valor de:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2{,}48 \cdot 13{,}6}{\sqrt{2{,}48^2 + 13{,}6^2}} = 2{,}45$$ (El factor de seguridad es aceptable)

6.4 El problema de Hertz

Cuando se habla de la resistencia de un elemento de máquina es necesario diferenciar la resistencia volumétrica de lo que se conoce como resistencia superficial a las tensiones que surgen en una pequeña parte del volumen del elemento bajo la acción de las fuerzas de contacto en una pequeña superficie. Este es el caso de los engranajes, levas, cojinetes de rodamientos, ruedas de fricción y otros elementos similares.

En este tipo de elemento puede resultar que la resistencia volumétrica sea adecuada y sin embargo la resistencia superficial insuficiente.

El problema de la determinación de las tensiones en un elemento de máquina cuando la superficie de contacto es pequeña en comparación con las dimensiones del elemento se conoce como Problema de Hertz, físico Alemán que desarrolló la teoría de los cuerpos en contacto a finales del siglo XIX y las tensiones se conocen como tensiones de contacto o de Hertz.

Estas tensiones tienen un carácter local y van desapareciendo gradualmente en la medida que se avanza en la profundidad del material.

Producto de las deformaciones de la zona de contacto, el área de contacto aumenta con la carga y tiene en general una forma elíptica. Esta elipse se transforma en un círculo en el caso de dos esferas, o de una esfera y un plano en contacto, o en una elipse muy alargada, prácticamente un rectángulo en el caso de dos cilindros, o un cilindro y un plano en contacto cuando los ejes son paralelos. En la Fig. 11 se muestra la forma general de la superficie de contacto y el carácter de la distribución de las tensiones en la misma, así como el estado tensional.

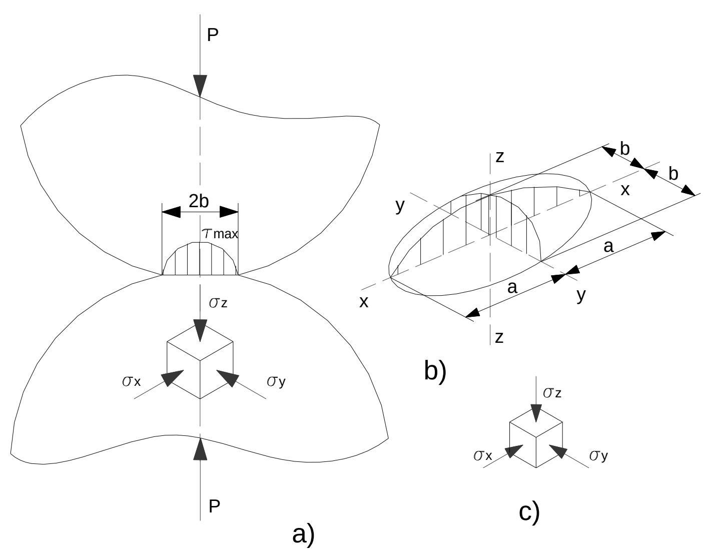


Fig. 6.12 Tensiones de contacto entre dos sólidos deformables

El estado tensional que surge en la zona de contacto e incluso en las zonas de la profundidad de la zona de contacto es un estado tensional triaxial de compresión, donde las tensiones principales son σ_x, σ_y y σ_z y la tensión principal de mayor valor absoluto es σ_z. La tensión σ_z tiene su valor máximo en el centro de la superficie de contacto. La tensión tangencial máxima de este estado tensional ocurre como regla debajo de la superficie de contacto a una profundidad $Z_{\tau\ max}$. En la Fig. 6.13 se muestra la variación de la magnitud de las tensiones σ_x, σ_y, σ_z y τ_{max} a través de la profundidad de la zona de contacto.

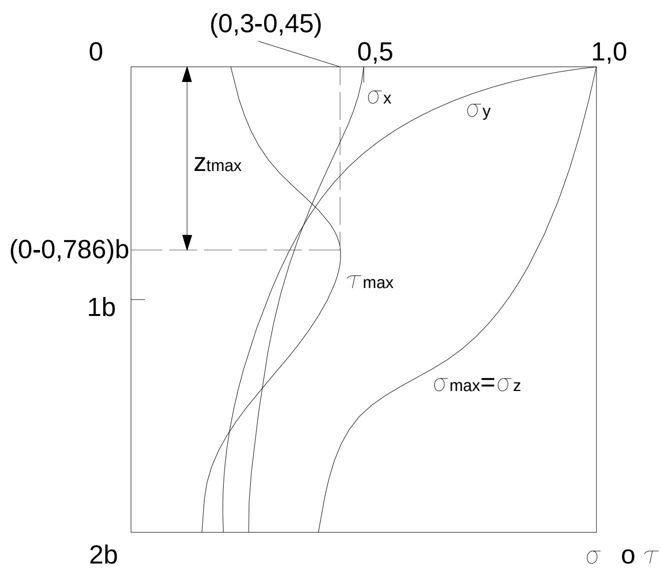


Fig. 6.13 Variación de las tensiones de contacto con la profundidad

La profundidad a la que surge la $\tau_{máx}$, así como su magnitud, depende fundamentalmente de que el contacto sea estático o que exista rodadura o deslizamiento entre las superficies.

Para dos cilindros paralelos en contacto estático $\tau_{máx}=0,3\cdot\sigma_{máx}$ y se produce a $Z_{\tau\ máx}=0,786\cdot b$ (b es el semieje menor de la elipse en contacto). Con rodadura $\tau_{máx}=0,35\cdot\sigma_{máx}$ y la profundidad prácticamente no varía. Si hay deslizamiento con f=0,33 se tiene que $\tau_{máx}=0,43\cdot\sigma_{máx}$ y ésta ocurre muy próximo a la superficie. En general si:

f>1/9 - $\tau_{máx}$ ocurre próximo a la superficie.

f<1/9 - $\tau_{máx}$ ocurre debajo de la superficie.

Esto tiene gran importancia en el proceso de la fatiga superficial, ya que las grietas en la superficie aparecen por la presencia de $\tau_{máx}$.

6.5 Cálculo de las tensiones de contacto

El área de contacto es una elipse cuya ecuación es:

$$A \cdot x + B \cdot y = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \qquad (6.25)$$

La tensión máxima ocurre en el centro de la elipse de contacto y es igual a:

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sqrt[3]{4 \cdot P \cdot A^2 \cdot E^2} \qquad (6.26)$$

Donde:

$\alpha = f_{\left(\frac{A}{B}\right)}$ - Parámetro que depende de la forma de la elipse de contacto.

P – Carga.

A – Constante de la ecuación de la elipse.

$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ - Módulo de elasticidad reducido.

E_1 y E_2 – Módulos de elasticidad de las dos piezas en contacto.

En la Tabla 18.2 pág. 451 de (Fernández, 1983) aparecen los valores paraα.

En las Tablas 18.3 y 18.4 págs. 452-453 de (Fernández, 1983) se dan las expresiones para calcular σ_{max} para diferentes superficies de contacto.

En la Tabla 18.5 pág. 454 de (Fernández, 1983) se dan los valores de $[\sigma]_{cont}$ para diferentes aceros y hierros fundidos para el caso de tensiones de contacto de carácter estático.

Si las tensiones de contacto varían con el tiempo hay que evaluar la posibilidad de aparición de la fatiga superficial, también conocida como picadura, cariado o pitting.

6.6 La fatiga superficial de los metales

La fatiga superficial no es más que la destrucción de la superficie por desprendimiento de las partículas de metal de la superficie en elementos que están sometidos a tensiones de contacto de carácter cíclico. Ejemplos típicos de este comportamiento son las ruedas dentadas, rodamientos, levas, ruedas de ferrocarril, rodillos de las cadenas de transmisión y muchos otros elementos.

La fatiga superficial se origina por un proceso idéntico al de la fatiga volumétrica, mediante un proceso de incubación en el que está presente el fenómeno de endurecimiento por deformación originado por deslizamientos plásticos locales bajo la presencia de la tensión tangencial máxima que ocurre en la zona de contacto. Este proceso da origen a una microgrieta que se desarrolla progresivamente hasta alcanzar la superficie. La grieta que alcanza la superficie estará orientada en al dirección de la fuerza de fricción, tal como se muestra en la Fig. 6.14.

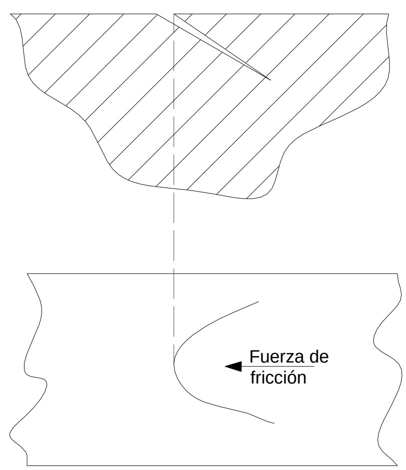


Fig. 6.14 Grieta típica de fatiga superficial

El proceso de destrucción (picadura de la superficie) comienza cuando las grietas han alcanzado la superficie. El proceso no ocurre de la misma forma en la superficie conductora que en la conducida y solo aparece en presencia del lubricante, en caso contrario predomina el desgaste y no se desarrolla con igual intensidad la picadura.

Analicemos las diferencias existentes entre la superficie conductora y conducida en el caso de dos ruedas de fricción (Fig. 14 a y b).

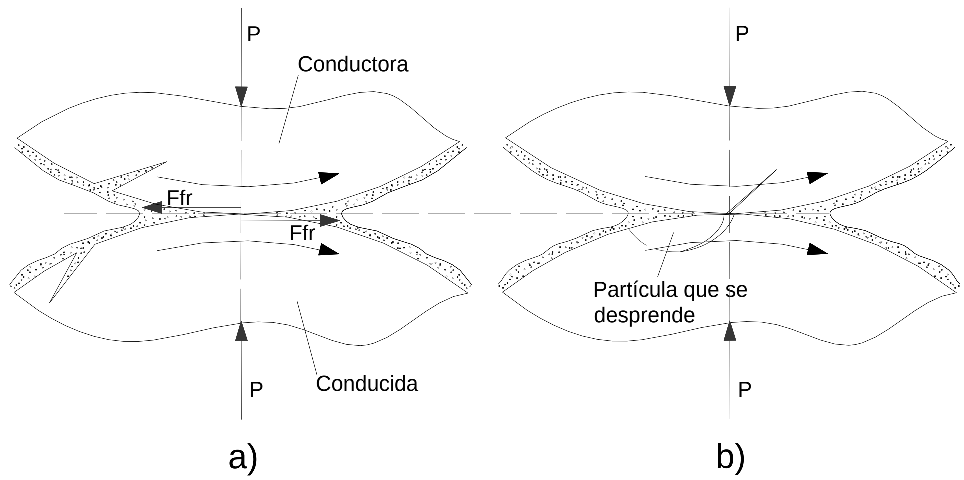


Fig. 6.15 Ruedas conductora y conducida

Las grietas alcanza la superficie orientadas en la dirección de la fuerza de fricción que actúa sobre las superficies en cuestión, tal como se muestra en la Fig. 6.15 a). En la rueda conductora llega a la zona de contacto primero el fondo de la grieta y el lubricante en estas condiciones es expulsado del interior de la misma, ya que la grieta se va cerrando desde el fondo hasta su abertura en la superficie. En la rueda conducida sucede todo lo contrario, o sea, la abertura exterior de la grieta llega primero a la zona de carga, el lubricante llega aprisionado aumentando la presión en el interior de la fisura, lo que favorece su desarrollo.

Este proceso se repite cíclicamente y la grieta se va extendiendo entonces hacia la superficie, hasta que se desprende una partícula de metal de la superficie formando un hoyuelo conocido como carie. El cariado o picadura de la superficie puede ser limitado o destructivo. El limitado está asociado a la presencia de deformaciones plásticas de la superficie bajo las tensiones de contacto que detiene el proceso de picadura. El cariado destructivo ocurre cuando la acción correctiva asociada a las deformaciones plásticas es insuficiente para detener el proceso. En las superficies duras, cuando aparece la picadura ésta es destructiva.

6.7 Límite de fatiga superficial. Condición de resistencia a la fatiga superficial

En la práctica no existe un límite de fatiga superficial, o sea, en el caso de las tensiones de contacto la picadura aparecerá en un período mas o menos prolongado, no obstante se establece un determinado límite de fatiga convencional para un determinado número de ciclos base N_b. Este límite aparece en la literatura en función de la dureza de la superficie y se designa por σ_{sup}.

$$\sigma_{sup} = C_R \cdot HRC \ \text{ o } \ \sigma_{sup} = C_B \cdot HB \qquad (6.27)$$

Donde:

C_R y C_B – Coeficientes que dependen del tipo de material y del tratamiento térmico.

HRC y HB – Dureza Rockwell y Brinell respectivamente de la superficie.

Si HB$\geq$350 la dureza se expresa en unidades Rockwell y se usa la primera expresión, en caso contrario (HB<350) se emplea la primera.

De la misma forma que para la fatiga volumétrica existen una serie de factores que afectan el límite de fatiga ocurre para la fatiga superficial. La tensión admisible a la fatiga superficial se obtiene por:

$$[\sigma]_{sup} = \sigma_{sup} \cdot k_o \cdot k_s \cdot k_t \cdot k_l \qquad (6.28)$$

Donde:

k_o – Coeficiente que depende de la viscosidad del lubricante.

k_s – Coeficiente que depende de la rugosidad superficial.

k_t - Coeficiente que depende de la temperatura (para t<100º $\rightarrow$ k_t= 1).

k_l – Coeficiente que depende del régimen de carga.

La condición de resistencia a la picadura es:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]_{sup} \qquad (6.29)$$

Ejemplo No. 1.

Determine la tensión de contacto máxima (σ_z) para el caso de una rueda de ferrocarril y el carril, si la carga radial que debe soportar la rueda es P=7,5 t. Considere que $E_1=E_2=2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2. La dimensiones dadas en la Fig.6.16 están en mm.

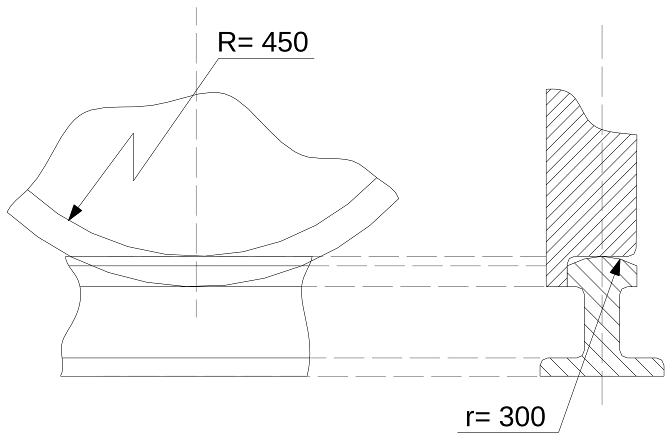


Fig. 6.16 Rueda de ferrocarril y su carril. Ejemplo No. 1

Solución:

Si analizamos la geometría de la construcción nos percatamos que se trata de dos cilindros cruzados de radios R y r respectivamente. La expresión para el cálculo de σ_{max} es este caso aparece en la Tabla 18.3 pág. 453 de(Fernández Levy 1983) Según la Tabla hay que considerar $R_2>R_1$. O sea, en este caso R_2=R=450 mm=45 cm y R_1=r=300 mm=30 cm. Las constantes A y B de la ecuación de la elipse de contacto son:

$$A = \frac{1}{2 \cdot R_2} = \frac{1}{2 \cdot 45} = \frac{1}{90}\, cm^{-1}$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot R_1} = \frac{1}{2 \cdot 30} = \frac{1}{60}\, cm^{-1}$$

El coeficiente α de la ecuación de cálculo depende de la relación A/B (Tabla 2.2 pág. 62 del folleto).

$\frac{A}{B} = 0{,}666$, realizando un interpolación lineal se obtiene: α=0,45

Además, como $E_1=E_2=2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 entonces $E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} = 2 \cdot 10^6\ kgf/cm^2$

Calculando la tensión de contacto máxima se obtiene:

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot E^2}{R_2^2}} = 0{,}45 \cdot \sqrt[3]{\frac{7500 \cdot \left(2 \cdot 10^6\right)^2}{45^2}} = 11050\ kgf/cm^2$$

Problema No. 2

Determine la tensión de contacto máxima y compruebe la resistencia estática del contacto entre una bola y los aros de rodadura en el caso de una caja de bolas radial de simple hilera cuyas dimensiones, acotadas en al Fig. 6.17, son: d=130 mm, D=280 mm, B=58 mm, d_b=44,5 mm, R_e=125 mm, r=23,4 mm.

La carga radial que soportará el rodamiento es de 4 000 kgf.

El material es acero aleado al cromo níquel 12XH3A (norma GOST) con HRC=62, para el cual $E=2{,}12\cdot10^6$ kgf/cm^2 y se puede admitir $[\sigma]_{cont}$=50 000 kgf/cm^2.

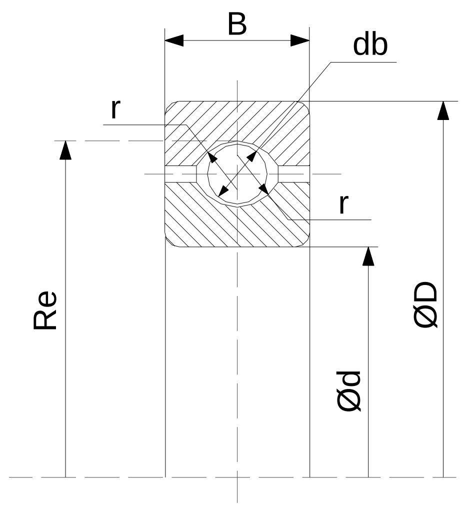


Fig. 6.17 Tensiones de contacto entre la bola y el aro de rodadura de una caja de bolas

Solución:

Se trata del contacto entre una superficie tórica (aro de rodadura) y una esfera (bola). La expresión de cálculo aparece en la Tabla 2.3 pág. 63 del Folleto de Fatiga (Goytisolo 2000) caso 3. Donde:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$ y,

$$B = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Siendo:

$$R_1 = \frac{d_b}{2} = \frac{4{,}454}{2} = 2{,}275 \text{ cm}$$

$$R_2 = r = 2{,}34 \text{ cm}$$

$$R_3 = R_e - d_b = 12{,}5 - 4{,}45 = 8{,}05 \text{ cm}$$

De modo que:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2{,}275} - \frac{1}{2{,}34} \right) = 0{,}0061 \text{ cm}^{-1} \text{ y,}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2{,}275} + \frac{1}{8{,}05} \right) = 0{,}282 \text{ cm}^{-1}$$

Además: $\frac{A}{B} \cong 0{,}02$, α=1,8 y $E_1=E_2=E=2{,}12 \cdot 10^6$ kgf/cm^2

Finalmente:

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot E^2 \cdot (R_1 - R_2)^2}{(R_1 \cdot R_2)^2}} = 1{,}8 \cdot \sqrt[3]{\frac{4000 \cdot \left(2{,}12 \cdot 10^6\right)^2 \cdot (2{,}275 - 2{,}34)^2}{(2{,}275 \cdot 2{,}34)^2}}$$

$$\sigma_{max} = 25\,000 \text{ kgf/cm}^2 < [\sigma]_{cont} = 50\,000 \text{ kgf/cm}^2$$

6.8 Concepto de velocidad crítica en árboles

Durante el funcionamiento de un árbol, a causa de la presencia de las deformaciones y de las excentricidades lógicas existentes en los centros de masa de los elementos colocados sobre los mismos se originan vibraciones. El cálculo de un árbol a las vibraciones consiste en comprobar la posible condición de resonancia, o sea aquella situación en la cual la amplitud de las oscilaciones transversales se incrementa bruscamente y puede alcanzar tales valores que conducen al árbol a la rotura.

La resonancia aparece a un número de revoluciones por minuto que se conoce como velocidad crítica que no es más que aquella velocidad a la cual la frecuencia del cambio de las fuerzas externas coincide con las oscilaciones propias del sistema consistente en el árbol y las piezas colocadas sobre el mismo. La resonancia puede aparecer también cuando la frecuencia de los cambios de las fuerzas exteriores es múltiplo entero de la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema.

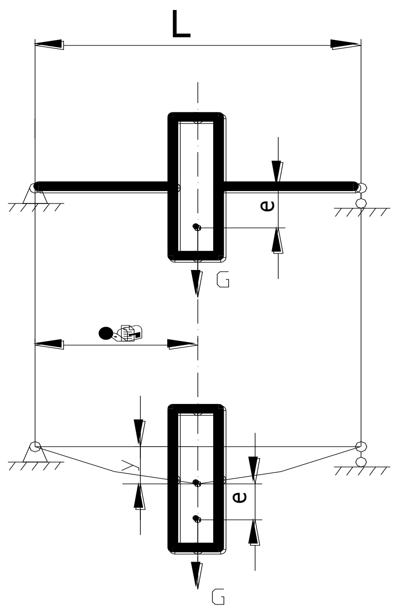


Fig. 6.18 Fuerza centrífuga en el árbol

Supongamos que sobre un árbol Fig. 6.18 está colocado en posición simétrica con relación a los apoyos un disco de peso **G**, el centro de masa del cual está desplazado con relación al eje geométrico de magnitud **e**. Durante el giro aparece una fuerza centrifuga inicial debido a la excentricidad ***e***, cuya magnitud es:

$$C_0 = m \cdot \omega^2 \cdot e \qquad (6.30)$$

Donde:

$$m = \frac{G}{g}$$

Bajo la acción de esta fuerza (sin considerar la influencia del peso propio) el árbol se pandeará una magnitud ***"y"*** (Fig. 2) lo que a su vez aumentará el valor de la fuerza centrífuga hasta una magnitud:

$$C = m \cdot \omega^2 (y + e) \qquad (6.31)$$

La magnitud de la flecha originada por una fuerza de magnitud ***C*** dispuesta simétricamente entre los dos apoyos, según el esquema de la Fig. 6.18**,** será igual a:

$$y = \frac{l^3}{48EI} \qquad (6.32)$$

De donde la fuerza **C** requerida para provocar una deflexión en el árbol de magnitud y será:

$C = \frac{48\ EI}{l^3}\ y = ky$ (6.33)

Donde *k* es la rigidez a flexión de dicho árbol, o sea la fuerza que provoca una deflexión e igual a la unidad.

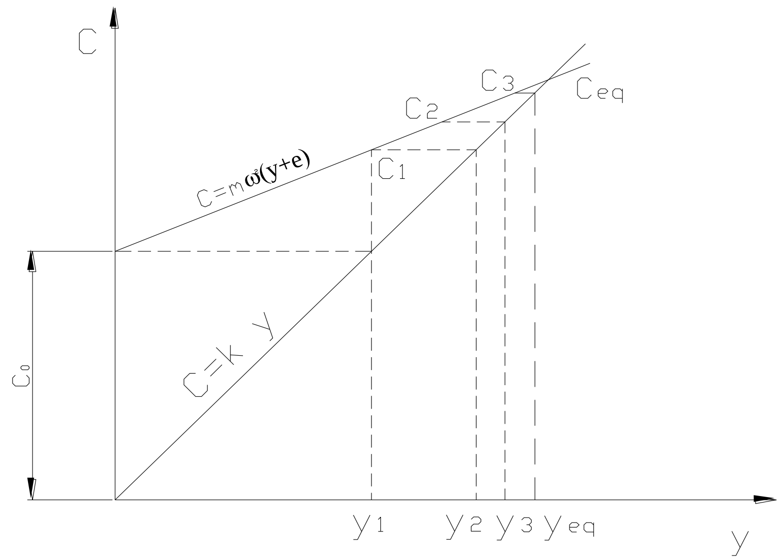


Fig. 6.19 Valor de la flecha de equilibrio en un árbol

El proceso ocurrirá de la siguiente forma. La fuerza centrifuga inicial $\boldsymbol{C_0}$ originará una fuerza centrifuga de magnitud:

$C_1 = m \cdot \omega^2 (y_1 + e)$ (6.34)

La fuerza $C_1 > C_0$ originará entonces una flecha $\boldsymbol{y_2}$ y esta aumentará la fuerza centrifuga un valor:

$C_2 = m\omega^2 (y_2 + e)$ (6.35)

y así sucesivamente hasta que alcance la flecha de equilibrio $\mathbf{y_{eq}}$, para lo cual se cumplirá que la fuerza centrífuga originada para esta flecha (Fig. 6.19)

$C_{eq} = m\omega^2 (y_{eq} + e)$ (6.36) será igual a la fuerza requerida para provocar una flecha de magnitud y_{eq}

$$C_{eq} = k \cdot y_{eq} \qquad (6.37)$$

Igualando ambas expresiones y despejando $\boldsymbol{y_{equilibrio}}$

$$y_{eq} = \frac{e}{\frac{k}{m\omega^2} - 1} \qquad (6.38)$$

En la medida que aumenta la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$; crece la magnitud del pandeo para el cual se produce el equilibrio y la velocidad angular alcanza el valor $\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ resulta que $\boldsymbol{y} \to \infty$, o sea que a una velocidad angular de esta magnitud el árbol se debe romper. Esta velocidad se conoce como velocidad crítica:

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (6.39)$$

Puesto que $\omega_{crit} = \frac{\pi n_{crit}}{30} \quad en \ \frac{rad}{s}$, entonces el número crítico de revoluciones por minuto del árbol será:

$$n_{crit} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{k_g}{G}} \qquad (6.40)$$

Y como $g = 981 cm/s^2$ y $f = \frac{G}{k} - cm$, es el pandeo estático del árbol bajo la acción del peso propio G de la pieza colocada sobre el árbol. Se tiene aquí:

$$n_{critica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/min \qquad (6.41)$$

Esta conclusión es válida incluso si se tiene en cuenta el pandeo del árbol por el peso propio de sistema.

La aproximación del número de revoluciones del árbol al valor crítico se manifiesta con un incremento de la vibración transversal del árbol. La zona de las velocidades de giro

$$0{,}7n_{crit} \leq n \leq 1{,}3n_{crit}$$

no deben utilizarse pues la probabilidad de rotura del árbol es extremadamente alta.

A causa de las distintas resistencias que surgen durante las vibraciones (rozamiento interno, rozamiento en los cojinetes, influencia del medio exterior, etc.) el incremento de las deformaciones en el árbol no es instantáneo y si se pasa rápidamente por esta velocidad de giro del árbol resulta nuevamente estable, tal como se muestra en la (Fig. 6.20).

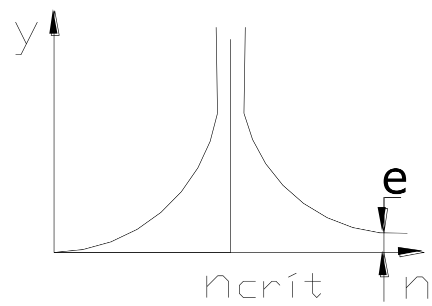


Fig. 6.20. Estabilización de giro del árbol para $n > n_{crit}$

Los árboles que trabajan a velocidades de giro mayores que la crítica, usualmente $n \geq (2 \div 3)n_{crit}$ se llaman flexibles. O sea, si $\omega \to \infty, \quad y \to e$.

El paso por la zona de velocidades críticas se debe hacer rápido para evitar un incremento peligroso de las deformaciones y en estos casos es aconsejable incluso el empleo de un sistema de amortiguaciones especiales de las oscilaciones.

De este modo el peligro de la resonancia en los árboles se puede eliminar por dos vías:

- Utilizando arboles rígidos par los cuales $n << n_{crit.}$
- Utilizando árboles flexibles finos con velocidad crítica baja, que se pandean ligeramente bajo la acción de la fuerza centrífuga y que adquieran de nuevo el equilibrio estático cuando $n > n_{crit.}$

A muy grandes velocidades de giro por ejemplo en las centrifugas con $n = 20000 - 40000\, r/min$, el empleo de árboles flexibles es la única solución posible.

Además su construcción se hace más barata y sencilla.

De la expresión se concluye también que en la medida que aumenta ***e*,** la inflexión del árbol aumenta y la zona de velocidades peligrosas del árbol se hace más amplia, de aquí que el balanceo dinámico del árbol junto con todas las piezas que van a estar colocadas sobre él, es un aspecto imprescindible en aquellos árboles de marcha rápida.

6.9 Conclusiones Parciales del Capítulo VI

1. En el Capítulo I se abordaron los Criterios de Resistencia para el cálculo estático de Elementos de Máquinas o Equipos, resulta imposible abordar en un Capítulo como este todos los Métodos de Cálculo de los Elementos de Máquina, sin embargo, teniendo en cuenta que el 90 % de los Elementos de Máquinas fallan por fatiga volumétrica o superficial se decidió incluir específicamente en este Capítulo todo lo referente al cálculo a fatiga y toda la teoría de las tensiones de contacto para abordar también la fatiga superficial.
2. Se han incluido ejemplos de cálculo a la fatiga y de tensiones de contacto, en elementos muy comunes en la práctica de manera que el lector pueda comprender como se aplican los procedimientos explicados.
3. Finalmente teniendo en cuenta la importancia que tiene para los equipos de operaciones unitarias como son: El centrifugado, la trituración, las bombas, los compresores y otros equipos se ha incluido en el Capítulo el cálculo de la velocidad crítica en árboles simples.

Capítulo VII Diseño Mecánico de Intercambiadores de Calor de tubos y coraza

7.1 Necesidad del diseño mecánico de estos equipos

Los intercambiadores de calor de tubo y coraza en sus diversas variantes constructivas son, probablemente, los más extendidos y utilizados en las industrias de procesos. Las razones de esta aceptación general son varias. Estos intercambiadores proporcionan una relativamente grande proporción de área de transferencia de calor con respecto al volumen y peso de los mismos. Proporcionan esta superficie en una forma que es relativamente fácil de construir en una amplia gama de tamaños y que mecánicamente es lo suficientemente resistente como para soportar las tensiones normales durante la fabricación, el envío y los esfuerzos de montaje de campo, y las condiciones de funcionamiento normales. Hay muchas modificaciones de la configuración básica, que pueden ser utilizadas para resolver problemas específicos. El intercambiador de tubo y coraza se puede limpiar de una manera razonable fácilmente, y los componentes más sujetos a fallas - juntas y tubos - pueden ser fácilmente reemplazados. Por último, existen buenos métodos de diseño, y experiencia en la construcción y el servicio en todo el mundo para el éxito del diseño y la fabricación construcción de estos intercambiadores.

El Diseño mecánico de los intercambiadores de calor de tubo y coraza provee información acerca de aspectos tales como espesor de la coraza, espesores de los tubos, etc (Saunders 1988); (Hewitt et al. 1994). Estos parámetros son calculados usando códigos o normas para el diseño y cálculo de recipientes sometidos a presión y temperatura tales como los códigos de la ASME, American Society of Mechanical Engineers y de la British Master Pressure Vessel Standard, BS 5500. Los códigos de la ASME son los más usados para el diseño mecánico de los intercambiadores y se componen de 11 secciones. La sección VIII (Recipientes a presión restringidos) de estos códigos es la más aplicable a los intercambiadores de calor de tubo y coraza, sin embrago, también son importantes la sección II (Materiales) y la sección V (ensayos no destructivos). Tanto la ASME como la BS5500 son ampliamente usadas y aceptadas en todo el mundo, no obstante algunos países insisten en usar sus propias normas nacionales. Para el caso particular de los intercambiadores de calor de tubo y coraza, la Norma TEMA (Tubular Exchanger Manufacturers Association) contiene de una manera detallada todos los cálculos mecánicos que es necesario realizarla a un intercambiador de calor de tubo y coraza. Para tratar de simplificar estas Normas internacionales se está tratando de obtener un código internacional único reconocido mundialmente, pero aun hasta el momento no hay ninguno aceptado.

El cálculo mecánico es imprescindible en el cálculo de diseño de un intercambiador de calor ya que no se trata solo de determinar las características geométricas del mismo sino que se requiere que ese equipo tenga un funcionamiento fiable y seguro.

Algunos requisitos a tener en cuenta para el diseño, la fabricación y la explotación de los equipos de transferencia de calor:

1. Materiales de construcción (perfiles, láminas. Tubos, piezas fundidas, piezas forjadas (eligiéndose de acuerdo a las características de las sustancias de trabajo.
2. Diseño:
    - Diámetros de los tubos para soportar las presiones de trabajo en función del material,
    - Diámetro de la coraza para soportar la presión del fluido que circula por ella y las cargas de flexión originadas por su propio peso en función de su longitud y su número de apoyos.
3. Fabricación
    - Calidad de las uniones soldadas o mandriladas
    - Garantizar hermeticidad y evitar así fugas del medio de trabajo
    - Resistencia mecánica (capacidad para soportar cargas de trabajo y agentes exteriores como huracanes, pequeños sismos, etc.
    - Estabilidad o rigidez (capacidad del equipo de mantener en las condiciones de trabajo su forma inicial)

- Durabilidad (conservar su capacidad de producción con los intervalos necesarios para su mantenimiento y reparación)
- Seguridad (capacidad de garantizar las condiciones de explotación y mantenimiento, facilidades de limpieza y purgas)
- Condiciones de transportación

4. Ensayos y explotación
    - Pruebas hidráulicas
    - Equipos de medición, válvulas de seguridad.

De esta forma se garantizará una operación:

- Continua
- Confiable
- Eficiente
- Segura

Para elegir el material y calcular la resistencia térmica hay que tener en cuenta entre otros:

- Agresividad de los fluidos
- Presión (presión de trabajo, la presión de diseño y la presión de prueba)
- Temperatura (temperatura de trabajo, temperatura de diseño
- Tensión permisible

Temperatura de diseño: se considera a la temperatura de trabajo más un margen de seguridad, es la temperatura que se utiliza para buscar las tensiones permisibles del material de construcción. En los cálculos de intercambiadores se toma un rango de 30^0C a 50 ^{0}C por encima de la temperatura más alta de cada uno de los fluidos.

Tensión permisible: los materiales para la fabricación de los elementos del equipo se seleccionan en base a las especificaciones de su explotación considerando los posibles cambios de sus propiedades físico- mecánicas por efecto de la presión, temperatura, medio de trabajo y por los procesos tecnológicos que ocurren en el equipo.

$$[\sigma]= \eta\ [\sigma^*] \qquad (7.1)$$

$[\sigma^*]$- tensión permisible normativa a las distintas temperaturas

η - coeficiente de corrección que tiene en cuenta la peligrosidad del medio de trabajo (si el medio no es toxico se toma el valor de 1, si no se conoce se toma el valor de 0.9

Los valores normalizados de tensión permisible por tipo de material a distintas temperaturas aparecen en los libros de diseño mecánico.

Presión de trabajo: es la presión estable de trabajo en el intercambiador tanto en la coraza como por el interior de los tubos.

Presión de diseño: es la que se debe de utilizar en el cálculo de diseño y no es más que la presión de trabajo más un margen de seguridad.

$P_d = 1.3$ a $1.8\ P_t$

Otras recomendaciones son:

Si $P_t > 0.07$ MPa la $P_d = 1.1P_t$

$0.05 < P_t < 0.07$ la $P_d = 0.1$ MPa

Si $P_t < 0.05$ MPa la $P_d = 0.06$ MPa

Presión de prueba: es el valor de la presión para probar la resistencia mecánica y la hermeticidad (presión hidrostática de prueba) Se toma $P_{HID} = 1.5\ P_d$

Presión nominal: es a la que pueden trabajar los accesorios normalizados.

Partes y accesorios fundamentales a tener en cuenta para el cálculo mecánico de un intercambiador de calor:

- Cuerpo
- Fondo
- Tapas
- Uniones
- Tubos
- Juntas

7.2 Cálculo del espesor y la presión permisible en un cuerpo, envoltura o coraza de un intercambiador de calor:

a) Envolturas cilíndricas sometidas a presión interior
b) Envolturas cilindricas sometidas a presión exterior

7.2.1 Envolturas cilíndricas sometidas a presión interior

- Cálculo del espesor permisible

El espesor permisible se calcula mediante la siguiente expresión:

$s = P_{CAL}*Dint/2\varphi *[\sigma] -P_{CAL} + c$,   m   (7.2)

Donde:

s- espesor de la coraza, m

Dint- diámetro interior de la coraza, m

φ- coeficiente de seguridad que tiene en cuenta el debilitamiento debido a la soldadura y tiene en cuenta también el debilitamiento por agujeros, los valores aparecen reportados en tabla 3.1 del anexo.

[σ]- tensión permisible, N/m^2

c- espesor adicional por los efectos de la corrosión, valores recomendados entre 0 a 3 mm, un valor de 0.3 para aceros inoxidables y entre 2 y 3 mm para acero al carbono y de baja aleación, 1.5 mm si trabaja con vapor de agua.

P_{CAL}- presión de cálculo, N/m^2

Si se parte del dato del espesor exterior de la coraza la ecuación toma otra forma.

El espesor estimado por normas debe ser el valor inmediatamente superior al calculado de acuerdo a los estandarizados.

Debe cumplir que

s-l/Dint ≤ 0.1 para carcasas de Dint ≥200mm y

s-l/Dint ≤ 0.3 para carcasas de Dint <200mm

- Cálculo de la presión permisible

La presión permisible se calcula por la siguiente expresión:

$[P] = 2\varphi [\sigma] * (t-c)/ Dint +(t-c)$, MPa   (7.3)

Debe cumplir la condición de que la presión calculada como presión permisible sea mayor que la presión a la que está sometido el cuerpo. Si las envolturas de que se trata en un cálculo de aparatos químicos fueran de formas rectangulares, cónica, esféricas o elípticas se reportan otras ecuaciones en la literatura especializada (Ver Capítulo II).

7.2.2 Envolturas cilíndricas sometidas a presión exterior (aparatos al vacio)

- Cálculo del espesor y la presión permisible

La carcasa puede estar sometida a efectos de compresión y pueden perder su capacidad de trabajo como consecuencia de un cambio brusco de su forma geométrica inicial, esto se conoce con el nombre de pérdida de estabilidad. (Ver anexo III)

Antes del cálculo se debe de definir si la coraza es corta o larga utilizando las siguientes sugerencias, de acuerdo a esto se determina la expresión a utilizar para el cálculo del espesor y la presión permisible:

La longitud sobre el diámetro interior de la coraza debe ser menor o igual a la raíz sexta de diez a la menos 6 por el módulo de elasticidad del material de la coraza para la temperatura de cálculo.

$$s = 0.47\ \frac{D}{100} * \left(\frac{Pcal * L}{10^{-6} * E * D}\right)^{0.4} + c \qquad (7.4)$$

La presión permisible se calcula según la siguiente ecuación:

$$[P] = 6.49 \times 10^{-6}\ E * \frac{D}{100} * \left[\frac{100 * (t - c)}{D}\right]^{5/2} \qquad (7.5)$$

Para el caso de carcasas largas el espesor permisible se calcula como:

$$s = 1.06\ \frac{D}{100} * \left(\frac{Pcal}{10^{-6} * E}\right)^{0.33} + c \qquad (7.6)$$

y la presión permisible como:

$$[P] = 0.85 \times 10^{-6}\ E \left[\frac{100 * (t - c)}{D}\right]^{3} \qquad (7.7)$$

- **Cálculo de Tapas y Fondos**

Los fondos y tapas constituyen elementos fundamentales de los equipos de transferencia de calor. Es la parte que limita su carcasa por arriba, por abajo o por laterales dependiendo de la posición de este.

Los fondos generalmente se construyen del mismo material que el cuerpo y de acuerdo con sus dimensiones pueden construirse enterizos o de piezas soldadas y pueden tomar distintas formas teniendo en cuenta:

- La forma de la envoltura a la cual se une
- las exigencias químico tecnológicas del equipo

Los fondos que se utilizan pueden ser:

- Planos
- Semiesféricos
- Elípticos
- Cónicos

El cálculo de estos fondos fueron abordados en los Capítulos II y III

.

- **Cálculo de los fondos elípticos y semiesféricos sometidos a presión interior**

El espesor de la pared se determina por la expresión:

$$s = \frac{Pcal \cdot R}{2\varphi\sigma - 0.5Pcal} + c,\ m \qquad (7.8)$$

Donde:

s- espesor de la coraza, m

Dint- diámetro interior de la coraza, m

φ- coeficiente de seguridad que tiene en cuenta el debilitamiento debido a la soldadura

[σ]- tensión permisible, N/m^2

c- espesor adicional

P_{CAL}- presión de cálculo, N/m^2

R-radio de la curvatura en la cima del fondo

$$R = \frac{D^2}{H} \qquad (7.9)$$

Toma los valores de: R=D, si H=0.25D para fondo elíptico y R= 0.5D, si H=0.5D para los fondos semiesféricos

H- distancia de la parte no cilíndrica

La presión permisible es:

$[P] = 2\varphi\,[\sigma] * (s\text{-}c) / R + 0.5\,(s\text{-}c)$, Mpa (7.10)

Existe recomendación con relación a que el espesor del fondo no debe ser menor que el espesor de la carcasa.

Los resultados obtenidos de espesor y presión permisible se aplican bajo las condiciones:

$$0.002 \leq \frac{s - D}{D} \leq 0.1$$

$$0.2 \leq \frac{H}{D} \leq 0.5$$

- **Calculo de los fondos elípticos y semiesféricos sometidos a presión exterior**

Se utilizan estos cálculos por ejemplo en las tapas de los intercambiadores con cabezal flotante

$$s = \frac{Ke \bullet R}{300} \sqrt{\frac{Pcal}{10^{-6}(E)}} + c \qquad (7.11)$$

$$s = \frac{Pcal \bullet R}{2\sigma} * \beta_1 \quad + c,\ m \qquad (7.12)$$

El valor de s se toma como el mayor calculado por las expresiones anteriores

Donde:

K_e- Coeficiente que se determina según la figura IV.3 o a través de la ecuación IV.9 o IV.10(Mironov & Cisneros 1996)

β_{1}- Se calcula según la ecuación (IV.11) (Mironov & Cisneros 1996).

Para el cálculo de la presión permisible se toma el menor valor de los calculados, según las ecuaciones siguientes:

$$P = 9.0 * 10^{-6} * E \left[\frac{(s-D)*100}{Ke \bullet R}\right]^{2} \qquad (7.13)$$

$$P = \left[\frac{2\sigma(s-c)}{\beta \bullet R}\right]$$

El coeficiente β se determina por la expresión (IV.14) (Mironov & Cisneros 1996)

Las ecuaciones son aplicables si se cumple la condición:

$$0.2 \leq \frac{H}{D} \leq 0.5$$

7.3 Particularidades del cálculo según las Normas Tema. (Standard of Tubular Exchangers Manufacturers Association)

7.3.1 Generalidades

Las normas TEMA surgen como necesidad de los fabricantes de intercambiadores de calor en los Estados Unidos de Norteamérica para unificar sus criterios en la solución de los problemas presentados por los usuarios de equipos que constantemente reclamaban por la calidad y tolerancias proporcionadas en el diseño y fabricación de los mismos.

Estas normas se han dividido en las partes siguientes:

- Nomenclatura
- Tolerancias de Fabricación
- Fabricación en General, Información Necesaria
- Instalación, Operación y Mantenimiento
- Normas Mecánicas “TEMA“ CLASE R”
- Normas Mecánicas “TEMA“ CLASE C”
- Normas Mecánicas “TEMA“ CLASE B”
- Especificación de Materiales
- Normas Térmicas
- Propiedades Físicas de Fluidos
- Información General
- Prácticas Recomendadas.

Con respecto a las Normas Mecánicas, es importante señalar que las diferentes CLASES se desarrollan con las mismas partes; sin embargo, su diferencia radica principalmente en factores de diseño para cada una de ellas. Por otra parte conviene indicar que siempre se deberá especificar la categoría (CLASE), que desea emplearse de estas normas. Por ejemplo TEMA “R”, TEMA “B” o TEMA “C”, pero nunca especificar solamente TEMA, ya que carecería de sentido.

La CLASE “R”, es parte de las normas donde los requisitos de diseño, fabricación y materiales son los más estrictos. Esta CLASE se especifica generalmente para condiciones severas de operación y procesos de petróleo.

La CLASE “C”, se especifica para procesos y aplicaciones generales, siendo los requisitos menos estrictos que para el caso anterior. Esto último se aplica también para la CLASE “B” con la única diferencia que los equipos clasificados para esta categoría generalmente se encuentran en procesos químicos.

Los Intercambiadores de calor de tubo y coraza están sometidos a tensiones mecánicas (producto de la presión y la temperatura), a vibraciones y a erosión.

7.3.2 Tensiones Mecánicas

Los intercambiadores de calor de tubo y coraza están sujetos a tensiones mecánicas debido a una gran cantidad de fuentes las que se suman a los gradientes de temperatura que son los principales causantes de las tensiones mecánicas. También hay tensiones mecánicas que resultan de las técnicas de construcción usadas en el intercambiador, por ejemplo tensiones en los tubos y en las placas de tubo resultantes del proceso de rolado de los tubos. Por otra parte durante la fabricación, transporte e instalación del intercambiador se producen frecuentemente muchas tensiones imprevistas. Hay tensiones causadas por las reacciones en las estructuras de soporte debido al peso del intercambiador y también tensiones causadas por las conexiones de tubos; estas tensiones por lo general son muy diferentes durante la operación normal de la planta que durante la construcción o el apagado de la misma. Finalmente hay tensiones dentro del intercambiador como resultado de las corrientes de flujo del proceso, especialmente presiones, durante la operación o funcionamiento.

Para proteger al intercambiador de deformaciones permanentes o debilitamiento debido a las tensiones mecánicas, es necesario diseñar el intercambiador de tal manera que cualquier tensión que pueda esperarse razonablemente que ocurra, no tensiones o deforme el metal más allá del punto en el cual él pueda retornar espontáneamente a su condición original; por otra parte, es necesario garantizar que durante la operación no se produzcan tensiones mayores que las tensiones para las cuales fue diseñado el intercambiador. El análisis de tensiones y deformaciones en un intercambiador de calor de tubos y coraza es un aspecto muy amplio y complicado, y por tanto solo se analizarán los aspectos mecánicos más sobresalientes que tienen una relación directa con el diseño térmico e hidráulico. Los problemas más obvios pueden ser como mínimo anticipados de manera cualitativa por el diseñador térmico, quien entonces debe procurar el consejo de un especialista en la parte mecánica.

7.3.3 Medidas para atenuar o evitar las tensiones térmicas

Dado que, por su propio objetivo de trabajo, la coraza del intercambiador de calor estará a una temperatura significativamente diferente que los tubos, la coraza se expandirá o se contraerá en relación con los tubos, lo que resulta en tensiones existentes en ambos componentes y que se transmiten a través de las láminas de tubos. Las consecuencias de las tensiones térmicas varían con las circunstancias, pero si las corazas se deforman, los tubos se salen de la placa de tubos o simplemente se separan. El intercambiador de placas de tubos fija mostrado la figura 1 es especialmente vulnerable a este tipo de daño, porque no hay provisión hecha para acomodar la expansión diferencial.

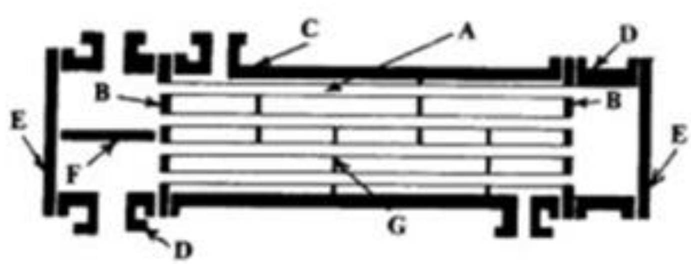


Fig. 7.1. Diagrama de un intercambiador de tubo y coraza típico (con placa de tubos fija), mostrando sus componentes: A-tubos, B-Placas de tubos, C-Coraza y Boquillas en el lado de la coraza, D-Canales y boquillas en el lado del tubo, E-Cubierta de los canales, F- Divisor de los pases, G-Deflectores

Hay una regla empírica que dice que una configuración de placa de tubos fija simple sólo se puede utilizar para los casos en que las temperaturas de entrada de las dos corrientes no difieren en más de 38 grados centígrados. Obviamente, debe haber muchas objeciones hechas a una declaración tan tajante, reconociendo las diferencias en los materiales y sus propiedades, el nivel de temperatura de operación, puesta en marcha y procedimientos operacionales cíclicos, etc.

7.3.4. Junta de Expansión de la Coraza

La solución más obvia para el problema de la expansión térmica es poner un dispositivo de expansión o junta en la coraza, como se muestra en la figura 2.

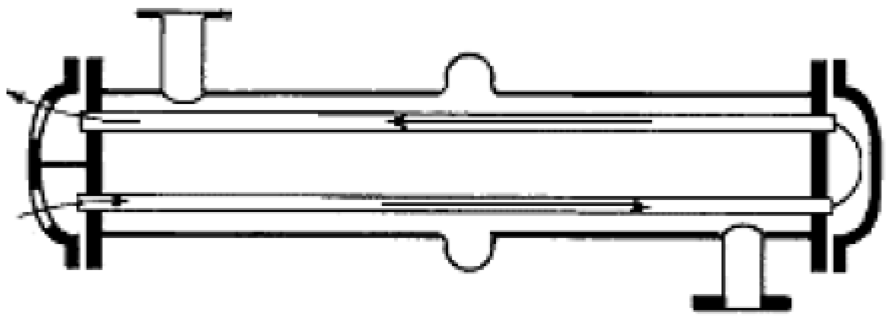


Fig. 7.2. Esquema del diseño de una placa de tubos fija con una junta de expansión incorporada

Esto se convierte en menos atractivo para las corazas de gran diámetro y / o el aumento de la presión de lado de la coraza. Sin embargo, corazas con diámetros muy grandes, y presión próxima a la atmosférica han sido diseñadas con una junta de bolas parcial en la coraza para permitir que la misma “gire” parcialmente para atenuar o acomodar las tensiones.

7.3.5 Flejes o muelles internos

Hace pocos años se ha hecho popular un diseño a base de flejes o muelles internos (Ver Fig. 7.3). Esta aplicación ha tenido mucho éxito en re hervidores verticales de termosifón, donde solamente se permite un paso por el lado de los tubos.

Estos flejes han sido diseñados para operar exitosamente con agua hirviendo a alta presión en el lado del tubo y gas efluente de un reactor a alta temperatura en el lado de la coraza.

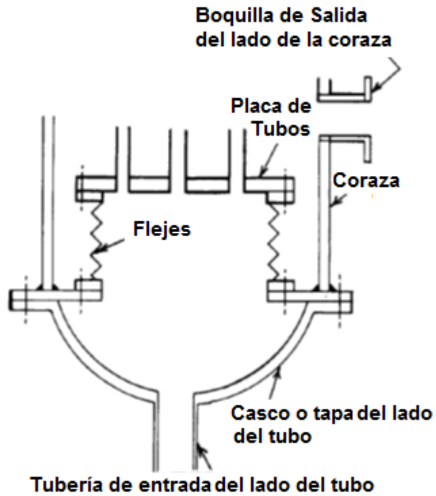


Fig. 7.3. Esquema de una configuración de flejes internos para un intercambiador de un pase por los tubos

7.3.6 Diseños de Cabezales Flotantes

Existen varios diseños diferentes de cabezales flotantes que están en uso hoy en día. El objetivo o meta en cada caso por supuesto es resolver el problema de las tensiones térmicas y cada diseño debe cumplimentar este objetivo. Sin embargo, de manera inevitable, algo debe sacrificarse y cada configuración tiene una serie de desventajas diferentes que deben ser tenidas en cuenta al elegir una. El cabezal flotante más simple de todos es el que se muestra en la figura 4, donde se puede sacar todo el haz de tubos del intercambiador hacia fuera del mismo. Una de las placas de tubos es hecha lo suficientemente pequeña de tal forma que ella y su casco o tapa puedan ser haladas completamente hacia afuera del intercambiador para la inspección y la limpieza.

El lado del tubo puede limpiarse y los tubos individuales pueden ser reemplazados sin sacar el haz de tubos de la coraza. Desafortunadamente, muchos tubos tienen que ser omitidos del extremo del haz de tubos para dejar espacio para los bordes del casco y la brida con los tornillos.

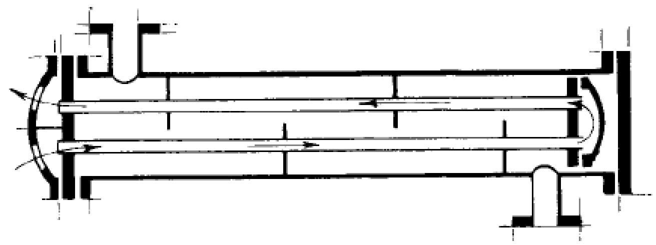


Fig. 7.4 Diseño de cabezal flotante extraíble

Este problema puede evitarse con el “cabezal de anillo flotante deslizante” (ver figura 5). En este caso el casco o tapa del cabezal flotante se atornilla a un anillo trasero deslizante en lugar de a la placa de tubos o espejo. Este tipo de cabezal incrementa el costo y la complejidad mecánica del intercambiador, pero permite no tener que “retirar” tubos del espejo como en el caso del cabezal flotante extraíble y además conserva las otras ventajas de este cabezal.

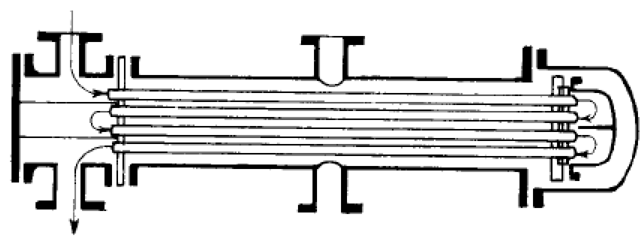


Fig. 7.5. Diseño de cabezal flotante extraíble con anillo deslizante

Hay otros dos tipos de cabezales flotantes, que son el "outside-packed lantern ring," (figura 6), y el "outside-packed stuffing box", (figura 7). Estos cabezales son más propensos a la fuga hacia la atmósfera que los descritos anteriormente y pierden la ventaja de un sellado adecuado, lo que es muy importante en fluidos peligrosos o fluidos sometidos a alta presión. Tienen la ventaja de permitir diseños de un solo pase por el lado del tubo.

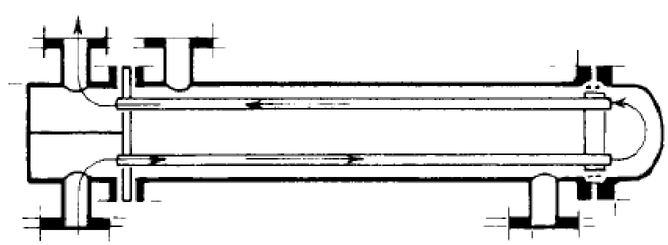


Fig. 7.6 Cabezal flotante “Outside Packed Lantern Rin”

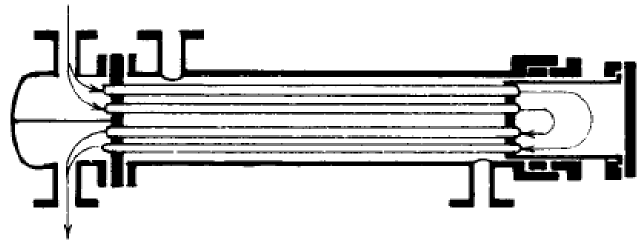


Fig. 7.7 Cabezal flotante "Outside Packed Stuffing Box"

7.4 Erosión

Otro problema esencialmente mecánico en el diseño de los intercambiadores de calor de tubo y coraza es la erosión: es decir la rápida pérdida o remoción del metal debido a la fricción del fluido cuando fluye a través de la tubería. La erosión ocurre frecuentemente con la corrosión y además acelera la misma, eliminando la película protectora que se forma en ciertos metales.

La cantidad de erosión depende del metal (para otras condiciones equivalentes, mientras más duro sea el metal, menor erosión habrá), de la velocidad y densidad del fluido y de la geometría del sistema. Por tanto la erosión es por lo general más severa en la entrada de los tubos o en el doblado de los tubos en U, debido a las tensiones de cortante adicionales asociadas con el giro del fluido dentro del tubo.

Otros efectos más intangibles están asociados con la química del fluido y el metal del tubo, especialmente cuando está presenta la corrosión.

7.5 Cálculos de diseño mecánico

7.5.1 Cálculos que se realizan

Definida la geometría del intercambiador de calor, se deben realizar los cálculos de diseño mecánico que aseguren que el diseño del intercambiador de calor sea válido para las presiones, temperaturas y condiciones de diseño. Los cálculos típicos son:

- Cálculos del grosor de la pared de la coraza.
- Cálculos del grosor de las conexiones de entrada y salida (boquillas).
- Cálculos del grosor de pared de los tubos interiores.

- Cálculos de las dimensiones de las juntas de expansión (para compensar a la camisa y a los tubos de las diferentes expansiones que sufren debido a las diferentes temperaturas que soportan).
- Cálculos del grosor de los soportes del haz tubular.
- Cálculo a las vibraciones.
- Cálculo de las uniones soldadas.

Los cálculos de diseño mecánico pueden resultar en la necesidad de un grosor de pared u otros parámetros que no se ajusten con el diseño geométrico definido durante los cálculos térmicos e hidráulicos. En este caso debe realizarse una nueva propuesta para la geometría y repetir los cálculos tanto térmicos como hidráulicos y mecánicos. En el presente trabajo se abordará el cálculo del espesor de la pared de la coraza y del espesor de la pared de los tubos.

7.5.2 Determinación del espesor de la coraza

- **Análisis de esfuerzos combinados en un recipiente a presión de pared delgada (Según La Place)**

Los intercambiadores de calor de tubo y coraza, y en general los recipientes a presión, son corazas cilíndricas o esféricas que tienen en su interior un fluido a determinada presión. Esta presión somete al recipiente a cargas en diferentes direcciones que a su vez generan tensiones en el material. Si la relación radio-espesor del recipiente es igual o mayor a diez (Ec. 10), se puede considerar de “pared delgada”, en este caso las tensiones principales se producen en la dirección circunferencial y en la dirección longitudinal y se desprecia el esfuerzo en la dirección radial. Estas tensiones son comúnmente llamadas tensiones de membrana y se manifiestan en un plano tangente a la superficie del equipo. (Ver en Capítulo II la Teoría Membranal)

El espesor de la pared del casco puede determinarse a partir del análisis de tensiones, mediante la combinación de tensiones para ambos casos, circunferencial (ver figura 8 b) y longitudinal (ver figura 8 c), en un elemento infinitesimal que se aleje de los bordes del recipiente. Las fórmulas para un cilindro de pared delgada son las siguientes:

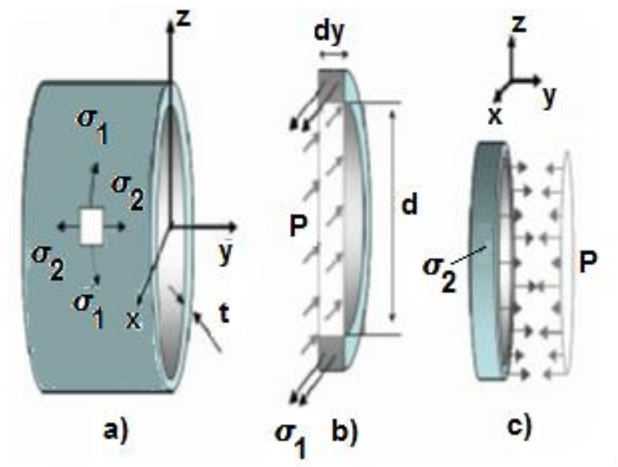


Fig. 7.8 Tensiones en un recipiente cilíndrico de pared delgada

Esfuerzo circunferencial:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow [2\sigma_1(t.dy)] - [P\ (d.dy)] = 0 \qquad (7.14)$$

Esfuerzo longitudinal:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow [\sigma_2(\pi.d.t)] - \left[P\left(\pi\frac{d^2}{4}\right)\right] = 0 \qquad (7.15)$$

F_x – Fuerzas aplicadas en el eje “x”

F_y – Fuerzas aplicadas en el eje “y”

σ_1 – Esfuerzo circunferencial.

P – Presión interna del recipiente.

σ_2 – Esfuerzo axial.

d – Diámetro interior de la coraza.

Si en las ecuaciones anteriores se sustituye el valor de los esfuerzos S_1 y S_2 por la resistencia máxima admisible del material y se despeja t, se obtendrá el valor del espesor del recipiente en función de la resistencia del material a la presión al que está expuesto.

- **Espesor según el esfuerzo circunferencial**

$$[2\sigma_{adm}(tdy)] - [P\ (d.dy)] = 0$$

$$t_{circ} = \frac{[P\ (2rdy)]}{[2\sigma_{adm}\ (dy)]} = \frac{P.d}{2.\sigma_{adm}} \qquad (7.16)$$

- **Espesor según el esfuerzo longitudinal**

$$[S_{adm}(2\pi r t)] - [P\ (\pi r^2)] = 0$$

$$t_{long} = \frac{[P\ (\pi r^2)]}{[S_{adm}\ (2\pi r)]} = \frac{P \times r}{2 \times S_{adm}} \tag{7.17}$$

Se puede observar que el valor de t obtenido para la tensión circunferencial resulta mayor (el doble) al obtenido para la tensión transversal, debido a que esta último tensión es dos menor que la circunferencial.

En este caso d sería el diámetro de la coraza y t su espesor. Para el cálculo se deben emplear los Criterios de Resistencia. Estas consideraciones se explicaron detalladamente en el Capítulo II. Otros autores plantean solamente el cálculo a las tensiones circunferenciales para determinar el espesor de la coraza, pero esto es una simplificación muy burda, que solamente tendría sentido si a estas tensiones se le suman las tensiones de flexión por el peso propio y las tensiones por el efecto de borde.

Fig. 7. 9 Cálculo sobre la base de la tensión circunferencial solamente

7.6 Procedimiento de la norma ASME

La norma ASME establece el siguiente procedimiento:

El análisis del casco se efectuará considerando que es un cilindro sometido a presión interna y a presión externa cuando presenta vacío. (Código ASME Sección VIII División 1 Ap. 1-1 y UG-28).

Para una relación:

$$t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{D_i}{2} \quad \text{o} \quad P \leq 0{,}385.\sigma.E \tag{7.18}$$

Entonces el espesor requerido de la coraza será:

- En función del radio exterior

$$t_r = \frac{P\left(\frac{D_o}{2}\right)}{\sigma.E + 0{,}4P} = \frac{PR_o}{\sigma.E + 0{,}4P} \tag{7.19}$$

- En función del radio interior

$$t_r = \frac{PR_i}{\sigma.E - 0{,}6P} \qquad (7.20)$$

y la presión máxima admisible será:

$$[P_{máx}] = \frac{\sigma.E.(t-CA)}{\frac{D_o}{2} - 0{,}4.(t-CA)} \qquad (7.21)$$

Donde:

t: Espesor nominal o espesor mínimo del casco.

D_o: Diámetro externo casco.

D_i: Diámetro interno casco.

L: Longitud del casco

CA: Tolerancia a la corrosión.

E: Eficiencia de la junta de soldadura

S: Esfuerzo permisible casco.

P: Presión de diseño.

[Pmáx] Presión máxima de trabajo permisible.

7.7 Espesor mínimo de la coraza

El espesor mínimo de la coraza se determina por las fórmulas de la norma, más la corrosión permisible, pero en ningún caso el espesor nominal de la coraza debe ser menor que los que se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 7.1. Espesor mínimo de la coraza en función del diámetro en plg. (mm)

Diámetro nominal de la coraza.	Espesor o grueso mínimo	
	Aceros al carbono	Aceros aleados
6 (152)	-	1/8 (3,2)
8 – 12 (203-305)	-	1/8 (3,2)
13 – 23 (330-584)	5/16 (7,9)	1/8 (3,2)
24 – 29 (610-737)	5/16 (7,9)	3/16 (4,8)
30 – 39 (762-991)	3/8 (9,5)	1/4 (6,4)
40 – 60 (1016-1524)	7/16 (11,1)	1/4 (6,4)
61– 80 (1549-2032)	1/2 (12,7)	5/16 (7.9)

81-100 (2057-2540)	1/2 (12,7)	3/8 (9,5)

Cuando la sustancia dentro del recipiente es un líquido, se debe considerar el efecto de la columna del líquido en adición a la presión interna antes considerada. Para los cálculos que se harán posteriormente, la presión interna será entonces la presión de diseño dentro del cilindro más la presión hidrostática del fluido. Si ρ es la densidad del líquido, g la aceleración de gravedad y D_s el diámetro interno del recipiente, que representa la mayor altura de la columna de líquido, entonces:

$$P = P_{diseno} + P_{columna\ de\ líquido} \tag{7.22}$$

Si las tapas del cilindro son planas, se debe considerar un esfuerzo adicional, el esfuerzo a flexión, que surge como resistencia del elemento a ser doblado por fuerzas externas. Esto ocurre por ejemplo en el caso de la placa tubular y otras superficies planas como los bordes de las bridas.

7.8 Cálculo de los tubos

7.8.1 Generalidades

El análisis en los tubos del intercambiador de calor, debe tomar en cuenta la presión interna ejercida por el fluido dentro de los tubos, y la presión externa que actúa por causa del fluido que se encuentra del lado de la coraza.

La norma TEMA en su sección V, apartados RCB-2.1 y RCB 2.2 (Saunders 1988) indica que los tubos que se usan para equipos de transferencia de calor deben ser calibrados e identificados por la nomenclatura BWG (Birmingham Wire Gage). En la tabla RCB – 2.21 de dicha norma se muestran los datos de los calibres más comunes de los tubos de cobre, aluminio, acero y sus aleaciones.

Las siguientes longitudes en pulgadas de tubos para intercambiadores son las más comúnmente usadas, entre paréntesis los valores en mm: 96 (2438), 120 (3048), 144 (3658), 192 (4877) and 240 (6096). No obstante, también pueden ser usados otros valores de longitud.

El Código ASME en Sección VIII en los acápites UG-28 y UG-31 establece el procedimiento para el cálculo de los espesores de diseño.

7.8.2 Cálculo del tubo de acuerdo a la presión interna

(Código ASME Sección VIII División 1 Ap. 1-1, 1-2)

El espesor mínimo del tubo sometido a una presión interna P, debe ser el que resulte mayor de los calculados de acuerdo a los esfuerzos circunferenciales (tangenciales) y longitudinales.

$$t = \frac{P.R}{\sigma_{adm}.E - 0,6P} \qquad (7.23)$$

De acuerdo a la tensión longitudinal:

$$t = \frac{P.R}{2\sigma_{adm}.E + 0,4P} \qquad (7.24)$$

Donde:

t - Espesor nominal tubos (pulg.)

P- Presión interna de diseño máxima ($lb/pulg^2$)

R- Radio interior del tubo (pulg.).

σ_{adm} - Esfuerzo máximo permitido del material empleado a la temperatura de diseño (ASME VIII, Subsección C). ($Lb/pulg^2$).

E- Eficiencia de la junta soldada según ASME.

Dada la importancia de las soldaduras en la construcción y diseño de los recipientes, el ASME introduce la variable "E" como la eficiencia de junta para el cálculo del espesor del recipiente cilíndrico. Esta variable toma en consideración los tres factores anteriormente descritos, junto con el nivel de inspección radiográfica que se realiza a la junta en consideración, así como la localización de dicha soldadura en la estructura del recipiente, para así definir la capacidad o confiabilidad que tiene la soldadura para resistir los efectos de las cargas bajo las cuales estará sometida. Esta variable puede tener alguno de los siguientes valores:

E = 1 Para radiografiado total.

E = 0.85 Para radiografiado aleatorio.

E = 0.70 Para equipo sin radiografiado

Para determinar el valor aplicable de la eficiencia de junta se realiza un análisis de acuerdo al método que se expone en el párrafo UW-12 del Código ASME Sección VIII, División 1, en el cual se especifican las normas de diseño y fabricación para recipientes construidos por soldadura. La tabla UW-12 del código ASME se indican las eficiencias de las uniones soldadas del recipiente como una función de tres variables; el tipo de junta a emplear (se especifican seis tipos de soldaduras), el nivel de inspección radiográfica a aplicar en la unión y la categoría de la junta, la cual se refiere a la ubicación de la soldadura dentro de la estructura del recipiente a presión. En el caso de la unión entre el cuerpo del recipiente y la brida de soporte para la tapa plana es imposible realizar una inspección radiográfica confiable, pues los resultados obtenidos serían discordantes. Esto se debe a que la inspección radiográfica no puede ser realizada sobre cordones de soldadura a filete; en cuyo caso no se obtienen resultados confiables de la inspección realizada. En este caso, el ASME emplea otro procedimiento de cálculo que involucra otra metodología de diseño para obtener las dimensiones, espesores y tipo de junta que se requieren para la tapa plana (Saunders 1988)

Máxima Presión interna admisible (Código ASME Sección VIII División 1 Ap. 1-1, 1-2)

La presión interna máxima que pueden soportar los tubos se puede calcular por la siguiente expresión:

$$[P_{máx}] = \frac{2\sigma_{adm} . E_t . t_t}{d_o - 0,8 t_t} \qquad (7.25)$$

Cálculo de acuerdo a la presión externa. (Código ASME Sección VIII División 1 UG-28(c)

En el caso de la presión externa (o vacío interno), no hay fórmula directa como para el diseño bajo presión interna, porque debe ser considerado el pandeo además. El procedimiento que se seguirá se da en la Sección VIII, División 1 del código de ASME en el párrafo UG-28, y requiere del uso de varias cartas y gráficos dados en el apéndice 5 de la propia norma. A continuación se expone de manera resumida dicho procedimiento..

Si $\frac{d_o}{t} \geq 10$ entonces $P_{a1} = \frac{4.B}{3.\left(\frac{d_o}{t}\right)}$ (7.26)

Para valores de A que se alejan hacia la izquierda de la Línea Material/Temperatura aplicable:

$$P_{a2} = \frac{2.A.M}{3.\left(\frac{d_o}{t}\right)} \quad (7.27)$$

La Máxima presión admisible (MAWP) va a ser Pa1 ó Pa2 según el caso.

Si $\frac{d_o}{t} < 10$

Entonces $P_{a1} = \left[\frac{2,167}{\left(\frac{d_o}{t}\right)} - 0,0833\right].B$ y $P_{a2} = \frac{2.S^*}{\left(\frac{d_o}{t}\right)}\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{d_o}{t}\right)}\right]$ (7.28)

La Máxima presión admisible (MAWP) va a ser la menor de Pa_1 y Pa_2..

Donde:

t: Espesor nominal tubos (pulg)

d_o: Diámetro externo tubos (pulg)

d_i: Diámetro interno tubos (pulg)

L: Longitud tubos (pulg)

E: Eficiencia de la junta de soldadura

S*: Min [(2S),(0.9S_y)] (psi)

S_y: Esfuerzo de fluencia tubos a temperatura de diseño (psi)

S: Esfuerzo permisible tubos a temperatura de diseño (psi)

A: Factor geométrico de elementos sometidos a presión externa

B: Factor del material sometido a presión externa

M: Módulo de elasticidad tubos a temperatura de diseño (psi)

P: Presión de diseño (psig)

MAWP: Presión Máxima de Trabajo Permisible (psig)

7.9 Tensiones en los tubos

7.9.1 Tensiones en los tubos según la norma TEMA

Es muy importante en el caso de los tubos hacer un análisis más detallado del estado tensional que se produce en los mismos. Las tensiones axiales en los tubos debidas a la expansión térmica y a la carga de presión no debe exceder la tensión admisible del material de los tubos a la temperatura de diseño establecida por las normas.

La tensión total combinada y la condición de resistencia de los tubos σ_T en kPa está dada por la expresión:

$$\sigma_T = \sigma_p + \sigma_{TT} \leq [\sigma_{adm}] \tag{7.29}$$

La tensión axial debida a la presión σ_p en kPa se define como:

$$\sigma_p = \frac{P\pi\left(G^2 - N d_o^2\right)}{4A_T} \tag{7.30}$$

Donde:

P - Es la mayor de las presiones de trabajo, ya sea en el tubo o en la coraza en kPa.

N- Número de tubos

G- El valor de G depende de las siguientes consideraciones y se expresa en mm:

- G se tomará tanto para la condición corroída como no corroída, dependiendo de cuál condición se está analizando.
- Para los intercambiadores con placas de tubo fijas, G será el diámetro interior de la coraza.
- Para intercambiadores tipo caldera, G será el diámetro interior del puerto.
- Para cualquier placa de tubos flotante (excepto las divididas), G será el G usado para las placas de tubo fija usando la P según lo definido para los otros tipos de intercambiadores.
- El tipo de placas de tubo T también será comprobado usando la presión P definida arriba.
- Para una placa de tubos flotante dividida, G será 1.41 (d) donde d es la longitud del tramo más corto medido sobre las líneas centrales de las juntas.

- Para otro tipo de intercambiadores, G será el diámetro sobre el cual está actuando la presión considerada. (Por ejemplo, la presión que actúa en el lado de la junta de una placa de tubos, G sería igual al diámetro en la localización de la carga de reacción de la junta como se define en la norma. Para una presión actuante sobre una cara integral de una placa de tubos, G es el diámetro interior de la partición integral de la presión)

do – Diámetro exterior del tubo entre las placas de tubos en mm.

7.9.2 Análisis de Tensiones considerando el tubo como una Bóveda de Paredes Delgadas

El estado tensional que existe en la pared de los tubos es un estado tensional triaxial en el cual las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\ ; \qquad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\ ; \qquad \sigma_3 = \sigma_r = -p \qquad (7.31)$$

La tensión equivalente en la pared se puede obtener considerando el estado tensional triaxial: $\sigma_3 \neq 0$ o Plano: última consideración es posible asumirla dado el hecho de que la presión que soportan las bóvedas es relativamente pequeña, por su condición de poseer la pared delgada (Feodosiev 1985). Esta consideración es aplicada cuando la relación D/h ≥ 20, $\sigma_3 = 0$. Esta (Jusmatulin 1990). Para obtenerla se utilizará la Cuarta Hipótesis de Resistencia o de la Energía Potencial Unitaria de Deformación de la Distorsión (Hipótesis de Huber-Mises-Henke).

- **Bóveda Estado Tensional Triaxial (ETT)**

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \qquad (7.32)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - (-p)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right) + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right) \cdot (p) + (p) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)}$$

(5)

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h} \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)} \qquad (7.33)$$

- **Bóveda Estado Tensional Plano (ETP)**

De la ecuación (4) para $\sigma_3 = 0$ se tiene que:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)} \tag{7.34}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h} \tag{7.35}$$

7.9.3 Análisis de Tensiones considerando el tubo como un cilindro de pared gruesa aplicando las Ecuaciones del Problema de Lamé

Es necesario aclarar que ésta es la solución exacta para cualquier relación de D/h, solo que en el caso de las relaciones grandes el problema se puede simplificar utilizando la Teoría Membranal (Ecuación de Laplace).

En este caso del estado tensional, considerando: $Re = \frac{D}{2} + \frac{h}{2}$ y $Ri = \frac{D}{2} - \frac{h}{2}$

$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{\mathrm{Re}^2 + Ri^2}{\mathrm{Re}^2 - Ri^2} = p \frac{\left(\frac{D}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} = p \cdot \frac{D^2 + h^2}{2 \cdot D \cdot h} \tag{7.36}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m = \frac{p \cdot Ri^2}{\mathrm{Re}^2 - Ri^2} = p \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} = p \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D \cdot h} \tag{7.37}$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -p \tag{7.38}$$

Sustituyendo en la ecuación del Criterio de Resistencia según la Cuarta Hipótesis.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left[p \cdot \frac{D^2 + h^2}{2 \cdot D \cdot h}\right]^2 + \left[p \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D \cdot h}\right]^2 + [-p]^2 - p^2 \cdot \frac{\left(D^2 + h^2\right) \cdot \left(D^2 - h^2\right)}{8 \cdot D^2 \cdot h^2} + p^2 \cdot \frac{(D-h)^2}{4 \cdot D^2 \cdot h^2} + p^2 \cdot \frac{(D+h)^2}{2 \cdot D^2 \cdot h^2}} \tag{7.39}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{(D+h)^2}{D \cdot H} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{\left(\frac{D}{H} + 1\right)^2}{\frac{D}{H}} \tag{7.40}$$

7.9.4 Influencia de la diferencia de temperatura entre la superficie interior y exterior de la pared de los tubos en la magnitud de las tensiones

En las metodologías descritas en para la estimación la literatura de la vida útil por creep y otros tipos de falla en tubos, no se toma en cuenta la influencia de la diferencia de la temperatura Δt entre la superficie interior y exterior de la pared en la magnitud de las tensiones. Según la referencia (Jusmatulin 1990), para el cálculo de la tensión en la pared (ya sea de recipientes o de tubos) tomando en cuenta la diferencia de temperatura Δt entre la superficie interior y exterior de la pared del componente en cuestión, para calentamiento exterior, se tiene que:

$$\sigma_{eq} = \frac{(\varepsilon+1)^2}{4\cdot\varepsilon}\cdot\sqrt{3\cdot p^2 + 3\cdot p\cdot m\cdot\Delta t + (m_1\cdot\Delta t)^2} \tag{7.41}$$

$$m_1 = \frac{E\cdot\alpha\cdot a_1}{1-\mu} \quad a_1 = \frac{2\cdot\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2\cdot\ln\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)} - 1 \quad y \quad \varepsilon = D/h \tag{7.42}$$

p presión interior en el tubo, E Módulo de Elasticidad del material del tubo, α coeficiente de dilatación térmica del material del tubo, μ coeficiente de Poisson del material del tubo, D diámetro medio del tubo, h espesor de la pared del tubo.

Se hace necesario destacar que el hecho de que incorporar la diferencia de temperatura Δt en las expresiones de cálculo de las tensiones, juega un papel importante en el valor de las tensiones calculadas en comparación con el valor cuando no se considera la misma. Por otra parte hay que agregar que es muy importante disponer de datos de las propiedades físicas y mecánicas, en función de la temperatura.

7.10 Conclusiones Parciales del Capítulo VII

1. En el Capítulo se incluyen los criterios de las diferentes Normas vinculadas con el cálculo mecánico de los intercambiadores de calor para el cálculo de las tensiones en los tubos y en la coraza.
2. Se describe la posibilidad de realizar el cálculo de la coraza incluyendo la tensión de flexión originada en el cuerpo dependiendo del número de apoyos de la coraza, optimizando la posición de los apoyos de acuerdo a su número (Ver

Capítulo IV) y el Efecto de Borde que genera tensiones suplementarias en la transición cuerpo – fondo (Ver Capítulo II), fenómeno este muy importante por el incremento delas tensiones transversales que provoca (Ver también Anexos II y IV)

3. Las ecuaciones del Problema de Lame constituyen las ecuaciones exactas para evaluar las tensiones y la resistencia tanto en los recipientes cilíndricos o esféricos (Ver Capítulo II) y si se desea tomar en cuenta la influencia de la temperatura en las propiedades físicas y mecánicas del material y la influencia de la diferencia de dilataciones térmicas se debe emplear la Ecuación de Jusmatulin dada en el presente Capítulo VII basada también en las Ecuaciones de Lame.

Conclusiones Generales

Como resultado del trabajo de recopilación de Tópicos Fundamentales del Diseño y Cálculo de Equipos y Aparatos de la Industria Química realizado y generalizando los resultados obtenidos en los mismos, se pueden formular las siguientes conclusiones del presente trabajo:

1. Los Tópicos del Diseño Mecánico de Equipos y Aparatos de la Industria Química seleccionados son de gran utilidad para garantizar la fiabilidad y la disponibilidad de las Instalaciones Industriales.

2. Las Metodologías de cálculo estudiadas puede ser empleada en el Diseño de estos Aparatos y Equipos pero también en el Diagnóstico de Fallas para esclarecer las causas de las mismas y para la toma de las decisiones correspondientes.

3. Los Métodos de Cálculo incluidos en la selección pueden ser combinados con los Temas de la Mecánica de la Fractura para obtener el Pronóstico de la Vida Util de un componente de una Instalación Industrial, permite planificar sobre una base científica el momento adecuado para las reparaciones y garantiza la adecuada fiabilidad en la operación de la Instalación. Esto ya ha sido logrado en uno de los Trabajos de Diploma de la primera graduación de Ingenieros Químicos de la Universidad de Cienfuegos.

4. Los resultados obtenidos en la aplicación de los Casos de Estudio incluidos en el Trabajo confirman que mediante estos nuevos conocimientos el Ingeniero Químico puede obtener impactos científicos, económicos, sociales y medio ambientales importantes.

Recomendaciones

Continuar de inmediato la investigación en dos direcciones:

1. Continuar incorporando nuevos Tópicos a este material de estudio paras perfeccionarlo en la medida en que se identifiquen nuevas necesidades para el Ingeniero Químico.
2. Incorporar nuevos Casos de Estudio donde se apliquen concretamente los Métodos de cálculo estudiados

Referencias Bibliográficas

Anon, 2002. Análisis estructural de cilindros de paredes delgadas sometidos a presión. *Centro Azúcar*, 29(1), pp.43–48.

ASME, Secciones V, VIII y XI.

ASTM, 1986. Standars E-23 y E-399. , 03.01.

Avilés, R., 1995. *Fatiga de materiales en el diseño y análisis mecánico*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Bilbao.

Bedford, Anthony, Fowler, W.L. & Bedford, A, 2002. *Engineering mechanics: Statics & dynamics*, Prentice Hall.

Beer, F.P. & Jonhston, E.R., 1993. Mecánica de los Materiales. *Colombia: Mc Graw--Hill*, p.738.

Besujov, I.., Lyzchin, O.. & Kolkinov, N.., 1987. *Estabilidad y Dinámica de la Destrucción*, Moscú: Vizchaya Schkola.

Bilmes, P.D., 1999. *Análisis y Prevención de Fallas Metalúrgicas. Facultad de Ingeniería*. Universidad Nacional de la Plata. Argentina.

Birger, J.A., Schorr, B.F. & Schneiderovhich, R.M., 1975. *Cálculo de la resistencia de las piezas de máquinas*, Moscú: Editorial Mashinostroenie.

Birger J.A., Schorr B.F., S.R.M., 1966. *Cálculo de la resistencia de las piezas de máquinas.*, Moscú: Editorial Mashinostroenie.

Blake, A., 1996. *Practical Fracture Mechanic in Design*, New York: Marcel Dekker.

Broek, D., 1983. *Fracture Control for the Chemical Process Industries*, St. Louis: The Materials Technology Institute of the Chemical Process Industries.

CIME, 1999. *Informe técnico sobre evaluación de la integridad del gasómetro*,

Davidenkov, N.N. & Spiridonova, N.I., 1946. Mechanical methods of testing-analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. In *Proceedings-American Society for Testing and Materials*. pp. 1147–1158.

Feodosiev, V.I., 1985. *Resistencia de Materiales* 3ra ed., Moscú: MIR.

Fernández Levy, G., 1983. *Resistencia de Materiales*, La Habana: Pueblo y Educación.

Fitzgerald, R., 1996. *Mecanica de Materiales*, Mexico: Alfaomega S.A de C.V.

Fogiel, M., 1996. *The strength of materials & mechanics of solids problem solver: a complete solution guide to any textbook*, New Jersey: Research & Education Assoc.

Gonzáles, V., 2000. Influencia de las imperfecciones geométricas en estructuras de paredes delgadas sometidas a presión. *Ingeniería Mecánica*, 3(2), pp.7–14.

Goytisolo, R.A., 1989. Algunas consideraciones acerca del Planteamiento de la Condición de Resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr.

Goytisolo, R.A., 2000. Folleto de Fatiga volumétrica y superficial de los Metales.

Goytisolo, R.A., 2005. Una formulación más exacta de la condición de resistencia para el cálculo de elementos de máquinas según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. In Cienfuegos: CITMA.

Goytisolo, R.A., Levy Fernñandez, G. & Gonzáles Ruiz, M., 1972. *Resistencia de Materiales* D. M. Rivero, ed., Villa Clara: Pueblo y Educación.

Goytisolo, R.A., Mey, L. & Roha, loco, 2012. Improvement of the calculation of stresses during creep life prediction of tubes steam generators.

Guest, J.J., 1900. V. On the strength of ductile materials under combined stress. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 50(302), pp.69–132.

Guliaev, A., 1983. *Metalografía*, Moscú: MIR.

Guliaev, A.P., 1983. *Metalografía Tomo I*, Moscú: l MIR.

Den Hartog, J.P., 1992. *Advanced Strength of Materials*, New York: Mc Graw. Hill.

Hernández, H., 2006. *Desarrollo y Perfeccionamiento de las expresiones de cálculo de las tensiones máximas en uniones soldadas con costuras de filete*.

Hewitt, G.F., Shires, G.L. & Bott, T.R., 1994. *Process Heat Transfer*, CRC Press.

Hofer, K.E., 1968. Equations for Fracture Mechanic. *Machine Design*, 40(3), pp.103–113.

ISO/TR 7468-1981, 1981. *Summary of average stress rupture properties of wrought steels for boiler and pressure vessels*,

Iwadate, T., Mhbid, O. & Mibchvbdiv, 1994. Prediction of fracture toughness KIC transition curves of pressure vessel steels from Charpy V-Notch impact test results. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 116, pp.353–358.

Del Junco, J.E., 2013. *Investigación de la Falla por creep de los tubos de las Calderas de la CTE "Carlos Manuel de Céspedes" en presencia o no del adelgazamiento de la pared, para diferentes materiales de los tubos*. Universidad de Cienfuegos.

Jusmatulin, R.E., 1990. *Manual de recipientes y tuberías de alta presión*, Moscú: Mashinostroenie.

Krasnoschicov, E.A. & Sukomel, A.S., 1986. *Problemas de Termotransferencia*, Moscú: MIR.

Laschinnski, A., 1983. *Construcción de aparatos químicos soldados. Manual del Ingeniero*, Moscú: Eneshtorgizdat.

Maslenkov, S.B. & Maslenkova, E.A., 1991. *Aceros y aleaciones para elevadas temperaturas*, Moscú: l Metallurgiya.

Maslienkov & Maslienkova, 1981. *Aceros y aleaciones para altas temperaturas*, Moscú: Metalurgiya.

Mayr, P., Periquito, P. & Mey, L., 2012. Analysis of low-stress creep testing data and its implication on the life-time prediction for 9-12% Cr steels. In *Creep 2012*. Kyoto, Japón: Chemnitz University of Technology.

Mijalev, M.F. et al., 1984. *Cálculo y Diseño de Máquinas y Aparatos de la Industria Química*,

Miroliubov, I.Y. & Otros, 1985. *Problemas de Resistencia de Materiales*, Moscú: MIR.

Mironov, V. & Cisneros, C., 1996. *Guía metodológica para el proyecto de curso de equipos de transferencia de calor*,

Mott, R.L., 1996. *Resistencia de Materiales Aplicada* 3ra ed., México: Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Pisarenko, G.S., Yakovlev, A.P. & Matveet, V.K., 1989. *Manual de resisitencia de Materiales*, Moscú: MIR.

R, J.E., 1990. *Manual de recipientes y tuberías de alta presión*, Moscú: Mashinostroenie.

Rivero, M., 2012. *Estimación de la vida útil de los tubos de las calderas de la CTE “Carlos Manuel de Céspedes” para diferentes materiales de los tubos*.

Rogers, D.K. & D, S., 1982. Comparison of boiler tube residual life prediction models. In *Report No. CTS-04176-2*. Toronto, Canadá.

Rolfe, S.. & Barson, J.., 1977. *Fracture and fatigue control in structures. Aplications of fracture Mechanics*, New Jersey: Prentice Hall.

Saunders, E.A.D., 1988. *Heat Exchangers—Selection, Design and Construction*, Longman Scientific and Technical.

Society, A.W., *, Requirements for pressure vessels fabricated by welding, The American Society of Mechanical Engineers, Boiler and Pressure Vessel Code: UW.*,

Solecki, R. & Conant, R.J., 2002. *Advanced Strength of Materials*, Oxford University Press.

Spiegel, L. & Limbrunner G.F, S., 1999. *Advanced Strength of Materials*, Prentice Hall.

Stiopin, P.A., 1985. *Resistencia de Materiales*, Moscú: MIR.

Tanaka, K., 1997. A tentative explanation for two parameter, C and n in Paris equation of fatigue crack growth. *Int. Journ. of Fract (USA)*, 5, pp.563–583.

Timoshenko, S., 1965. *Resistencia de Materiales*, Moscú: Nauka.

Timoshenko, S., 1961. *Teoría de la Estabilidad Elástica*, Buenos Aires: EDIAR.

Troschenko, V.T., 1987. *Resistencia a la fatiga de los metales y aleaciones Editorial , p*, Naukova Dumka.

Zarrabi, K., 1993. Estimation of boiler tube life presence of corrosion and erosion process. *Int. J. PresVes. and Piping.*, 53, pp.351–358.

ANEXO I

Caso de Estudio: Metodología de Pronóstico de la vida por Creep de los tubos de los Generadores de Vapor y su aplicación al material de los tubos del Sobrecalentador Secundario

Autores: Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, M.Sc. Eliover Leyva Padrón, Lic. Yanileisy Rodríguez Calderón, Ing. Mayren Rivero Castellanos, Ing. Jesús Ernesto del Junco García.

La falla fundamental que se produce en los tubos en general de los Generadores de Vapor es la falla por creep. Una gran cantidad de fenómenos metalúrgicos de importancia dependen fuertemente de la temperatura que se origina en la instalación, como es el caso de la termofluencia (creep), en la que además de la temperatura, juegan un papel importante la tensión a la que se ve sometido el material del tubo y el tiempo de operación(Feodosiev 1985).

Durante la falla por creep en el tubo se forma una vesícula producto de la deformación plástica lenta que se va originando por la acción de la temperatura y el tiempo, la tensión va incrementándose en la pared producto del adelgazamiento de la misma, hasta que aparece la fractura del tubo en el plano longitudinal que como se conoce es el plano del tubo donde aparece la mayor tensión producto de la presión interior (Bilmes 1999).

En la Figura 1 se muestra la avería de un tubo de caldera por el fenómeno de creep donde se aprecia la forma típica de ¨boca de pescado¨ que la caracteriza.

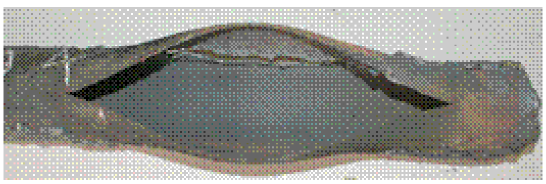


Figura 1 Falla típica por creep de un tubo de caldera

En la actualidad, en los años 2012 (Goytisolo et al. 2012),(Rivero 2012), (Del Junco 2013) se logró elaborar en la UCf ¨Carlos Rafael Rodríguez¨ una metodología basada en la Norma Internacional ISO/TR 7468-1981, la cual tomando en cuenta una serie de aspectos novedosos no contemplados por ninguna de las Instituciones que en el mundo investigan las averías de los tubos de calderas, permite pronosticar la vida por creep de los tubos en dependencia de los parámetros de explotación de la caldera y del material de los mismos. El Parámetro Fundamental que se utiliza para pronosticar la vida de los tubos de diferentes materiales a la falla por creep es el Parámetro de Larson Miller. Este Parámetro se describe en la Norma Internacional ISO/TR 7468-198, donde aparecen la enorme mayoría de los materiales de los tubos que se emplean mundialmente en las distintas partes y componentes de una Caldera.

Para poder pronosticar la vida por creep de un tubo, de una caldera, tal como se plantea en (Goytisolo et al. 2012), se necesita conocer la tensión de trabajo de la pared del tubo. Existen distintas ecuaciones utilizadas por diferentes instituciones en el mundo y la enorme mayoría de ellas parte de una simplificación del Estado Tensional de la Pared del Tubo que lo considera, independientemente de los parámetros geométricos reales, como una bóveda de pared delgada que se comporta como una membrana. Esta Teoría se conoce en la Mecánica de los Materiales (Pisarenko et al. 1989) como Teoría Membranal o simplemente Ecuación de Laplace. Es ampliamente conocido que su empleo es una simplificación. La expresión exacta es la Ecuación del Problema de Lamé, que se emplea obligatoriamente en los Tubos de Paredes Gruesas, pero que constituye la ecuación exacta de la Teoría de la Elasticidad para cualquier cuerpo cilíndrico sometido a presiones interiores, exteriores o ambas simultáneamente. En los trabajos(Goytisolo et al. 2012)) y (Rivero 2012) se hizo una comparación entre las diferentes expresiones empleadas en la literatura por diferentes instituciones:

- Considerando el tubo como una bóveda de pared Delgada aplicando la Ecuación de Laplace. (Feodosiev 1985)

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h}$$

Bóveda Estado Tensional Triaxial (ETT). (Rivero 2012)

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p \cdot D}{h} \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)^2 - \left(\frac{p \cdot D}{2 \cdot h}\right) \cdot \left(\frac{p \cdot D}{4 \cdot h}\right)}$$

- Considerando el tubo como un cilindro de pared gruesa aplicando las Ecuaciones del Problema de Lamé (ETT). (Feodosiev 1985).

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{(D+h)^2}{D \cdot H} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{\left(\frac{D}{H}+1\right)^2}{\frac{D}{H}}$$

- Metodología propuesta por la Universidad de New South Wales en Australia (UNSW).(Zarrabi 1993) .

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot K \cdot \frac{p}{[\frac{D+h}{D-h}]}$$

- Metodología propuesta por el Buró Central de Generación Eléctrica (Central Electric Generating Board) de Canadá (CEGB).(Rogers & D 1982) .

$$\sigma_t = 1{,}25 \cdot \frac{p \cdot D}{2 \cdot h}$$

- Ecuaciones del Problema de Lamé (ETT). (Feodosiev 1985).

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{(D+h)^2}{D \cdot H} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p \cdot \frac{\left(\frac{D}{H}+1\right)^2}{\frac{D}{H}}$$

- Metodología propuesta por la Central de Servicios Técnicos del Reino Unido (Central Technical Services, CTS) (Rogers & D 1982).

$$\sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot h}$$

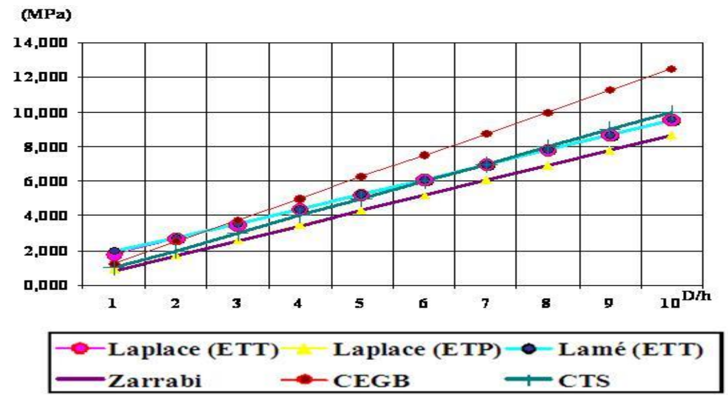


Figura 2. Comparación entre las diferentes expresiones para el cálculo de las tensiones

En la Figura 2 se muestran graficados los valores de σ en función de la relación D/h (D – Diámetro del tubo y h – espesor de la pared) para las diferentes expresiones analizadas en el rango en que D/h varía en la práctica, o sea: $0 < D/h \leq 20$. Las gráficas han sido obtenidas para una presión dep = 1 MPa. Como se aprecia, la expresión de Lamé para el cálculo de tensiones de cuerpos cilíndricos con presión interior (expresión exacta según la Teoría de la Elasticidad) proporciona valores de la tensión que se encuentran por encima de las restantes expresiones en todo el rango, sobre todo para $D/h \leq 10$ que es el rango en el caso de tubos de calderas, con excepción de la expresión utilizada por el Buró Central de Generación Eléctrica de Canadá(CEGB) que utiliza la ecuación de las bóvedas para paredes delgadas (Ecuación de Laplace) aumentada en un 25%. De esta comparación queda claramente demostrado en el trabajo (Rivero 2012) que la ecuación de Lamé ofrece una exactitud adecuada en el cálculo de σ y por lo tanto proveerá una estimación más racional de la vida útil por creep del elemento. Hay que aclarar que la Norma ISO/TR 7468-1981 no ofrece ninguna expresión para el cálculo de la tensión de trabajo del tubo σ.

En estas metodologías descritas en la literatura para la estimación de la vida útil por creep, no se toma en cuenta la influencia de la diferencia de la temperatura Δt entre la superficie exterior e interior de la pared en la magnitud de las tensiones, aspecto este muy importante en los tubos de calderas pues el calentamiento es muy intenso. Según la referencia(R 1990), para el cálculo de la tensión en la pared de un tubo o recipiente cilíndrico cualquiera, tomando en cuenta la diferencia de temperatura Δt entre la superficie exterior e interior de la pared del componente en cuestión, para calentamiento exterior, se tiene que:

$$\Delta t = t_e - t_i \qquad (1)$$

Donde: t_i = temperatura interior y t_e = temperatura exterior.

$$\sigma_{eq} = \frac{(\varepsilon+1)^2}{4\cdot\varepsilon}\cdot\sqrt{3\cdot p^2 + 3\cdot p\cdot m\cdot\Delta t + (m_1\cdot\Delta t)^2} \qquad (2)$$

Donde:

$$m_1 = \frac{E\cdot\alpha\cdot a_1}{1-\mu} \quad a_1 = \frac{2\cdot\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2\cdot\ln\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)} - 1 \quad y \quad \varepsilon = D/h \qquad (3)$$

P presión interior en el tubo, E Módulo de Elasticidad del material, α coeficiente de dilatación térmica del material del tubo, μ coeficiente de Poisson del material del tubo, D diámetro medio del tubo, h espesor de la pared del tubo. Esta expresión planteada por Jusmatulin no es empleada por ninguna de las instituciones que investigan las averías de los tubos de calderas.

Se hace necesario destacar que el hecho de que incorporar la diferencia de temperatura Δt en las expresiones de cálculo de las tensiones, juega un papel importante en el valor de las tensiones calculadas en comparación con el valor cuando no se considera la misma. Por otra parte hay que agregar que es muy importante disponer de datos de las propiedades físicas y mecánicas, tales como: *E*, α y μ en función de la temperatura de trabajo para el material en cuestión (Maslienkov & Maslienkova 1981); (Birger et al. 1975), pues esta expresión para el cálculo de las tensiones introduce la influencia de la temperatura en dichas propiedades físicas y mecánicas en la magnitud de la tensión, influencia ésta tampoco considerada en las ecuaciones empleadas por las distintas instituciones en el mundo para tubos de calderas.

La Vida Útil por fractura bajo creep se puede calcular partiendo del Parámetro Larson Miller según los datos dados por la Norma ISO / TR7468-198. Según esta Norma para un acero cualquiera de los que se emplean en los tubos de calderas, este Parámetro toma la expresión siguiente o similar:

$$P(\sigma)=\frac{\log t-10{,}656877}{T-500}=a+b\cdot(\log\sigma)+c\cdot(\log\sigma)^{2}+d\cdot(\log\sigma)^{3}+e\cdot(\log\sigma)^{4} \qquad (4)$$

Donde: a, b, c, d, e son constantes del ajuste de la curva. Los valores de las constantes se dan en la propia Norma

En esta expresión de cálculo, t es la vida útil por creep en horas, T la temperatura de trabajo del material en grados Kelvin y σ es la tensión equivalente en la pared del tubo en MPa. Esta tensión σ se calculará en el presente trabajo por la Ecuación del Problema de Lamé de la Teoría de la Elasticidad propuesta por (R 1990), Ecuación 2.

Conociendo el valor de la tensión σ se pude calcular el valor del Parámetro de Larson Miller partiendo del lado derecho de la ecuación (4) y teniendo entonces la temperatura de trabajo T (ºK) del material, se puede despejar del lado izquierdo de la misma, el tiempo de rotura en el cual dicho material a esa tensión y a esa temperatura se deformará plásticamente por el fenómeno de creep alcanzando la deformación de rotura y ésta será la vida útil por creep para ese material en esas condiciones de trabajo.

Esta ecuación del Parámetro de Larson Miller, incluyendo la ecuación de Jusmatulin (2), que toma en cuenta la influencia de la temperatura en las propiedades físicas y mecánicas del material en la tensión equivalente de la pared, las ecuaciones que caracterizan la influencia de las propiedades físicas y mecánicas del acero con la temperatura se incorporaron en un software hecho en MatLab(Rivero 2012);(Del Junco 2013) para calcular la vida útil por creep, para cualquier material del cual se posean las constantes de correlación y para cualquier temperatura de trabajo.

Específicamente en tubos de calderas(Zarrabi 1993) que es uno de los investigadores más destacados acerca de la falla por creep en los tubos de calderas en su artículo: ¨Estimation of boiler tuve life in presence of corrosión and erosion processes¨, describe una metodología que utiliza la Norma ISO, pero el cálculo de las tensiones lo realizó por la ecuación empleada por la: Central Electric Generating Board de Canadá (CEGB), ecuación ésta que fue analizada anteriormente y que da valores más pequeños de la tensión que la ecuación de Lamé, que es la ecuación exacta y que como se explicó, será la utilizada en el presente trabajo. Zarrabi en dicho artículo se refiere a la razón de adelgazamiento de los tubos por el efecto de erosión – corrosión, pero no da ningún valor de la razón de adelgazamiento.

En otro artículo (Zarrabi 1993) si da valores típicos de las razones de adelgazamiento, por ejemplo para tubos finos de 50 mm de diámetro exterior y 5 mm de espesor de pared da un valor de k = 2,5 – 5,0 nm/h (nanómetros/ hora) y para tubos gruesos, también de 50 mm de diámetro exterior y 9 mm de espesor de pared da un valor de k = 2,5 – 15 nm/h, o sea valores máximos mucho mayores. En el algoritmo y en el Programa elaborado se da la posibilidad de incorporar diferentes razones de adelgazamiento producidas por la presencia del fenómeno erosión corrosión si en el caso analizado este fenómeno se considera más o menos importante.

En la Figura 3 se muestra el algoritmo empleado en el programa elaborado en la Universidad ¨Carlos Rafael Rodríguez¨ de Cienfuegos.

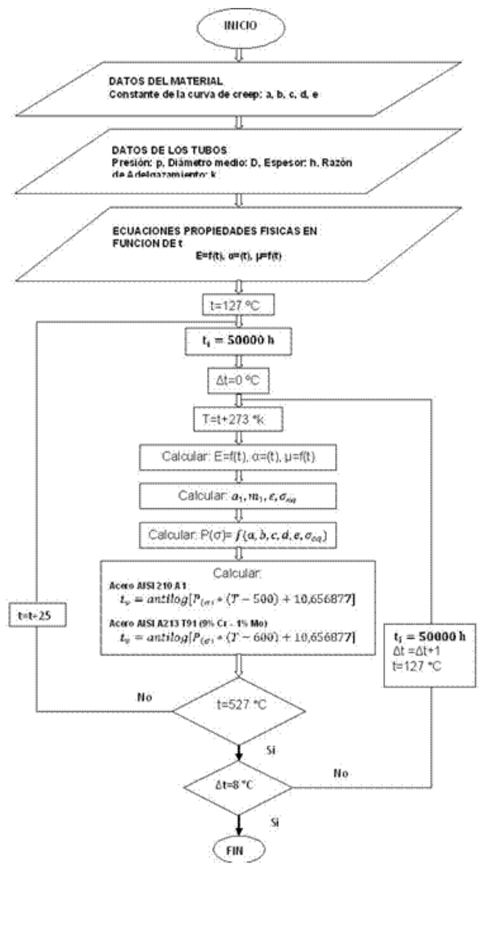


Figura 3 Algoritmo empleado en el programa elaborado por el Colectivo de Mecánica Aplicada para el pronóstico de la vida por <u>creep</u>

En la Figura 4 se muestra la estimación de la vida útil del acero actual AISI 210 A1 realizada en el trabajo (Rivero 2012) utilizando el software elaborado que calcula la tensión σ por la expresión (2) y toma en cuenta la diferencia de temperatura Δt entre la pared exterior e interior del tubo por la ecuación (1) y las dimensiones del tubo y las propiedades físicas y mecánicas del acero por las ecuaciones (3).

Del resultado del procesamiento se obtuvieron dos conclusiones generales para cualquier acero muy importantes:

1. Que para todos los aceros existe un punto de inflexión en la temperatura de la pared en la falla por creep cuyo valor de temperatura en ºK coincide con el número del denominador del Parámetro de Larson Miller a partir del cual el comportamiento del acero en lo referente a la falla por creep se hace más deficiente.
2. El incremente de Δt afecta mucho más negativamente a partir de esa temperatura, o sea, que se puede tener un criterio a priori del comportamiento del acero a la falla por creep simplemente observando este número, se sabe entonces que a partir de una temperatura en ºK mayor que el número del denominador del Parámetro de Larson Miller el acero se comporta ante la falla por creep de forma más deficiente.

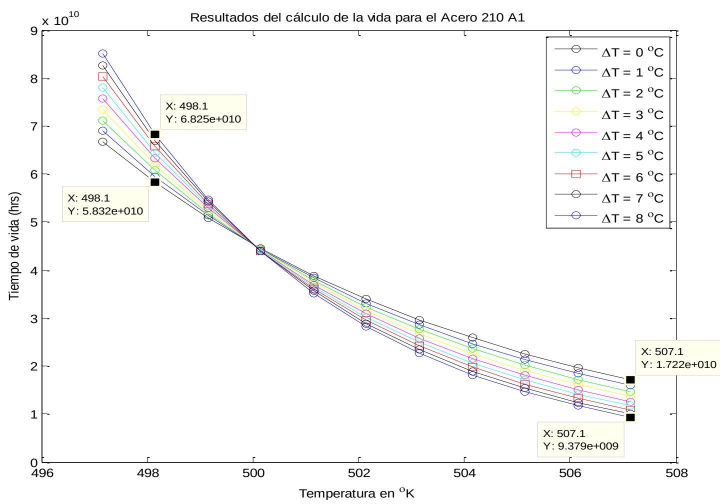


Figura 4. Resultados del procesamiento con el algoritmo y el software elaborados en (Goytisolo et al. 2012), (Rivero 2012) y (Del Junco 2013) para el acero actual AISI 210 A1 (SA 210 A1)

Por otro lado en el mundo se trabaja intensamente en la obtención de aleaciones más resistentes al creep. El material históricamente más empleado en los tubos de las calderas de la Central Termoeléctrica de Cienfuegos es el acero AISI 210 A1 o similares, sin embargo en la actualidad en el mundo se utilizan otros aceros, así por ejemplo en el Evento Científico “Creep” 2012 celebrado en Mayo 2012 en Kyoto Japón y en el cual el tutor principal del presente trabajo y otros coautores presentaron un artículo (Goytisolo et al. 2012) y en el cual no se pudo participar, pero se recibió información de todos los trabajos que fueron presentados, resultando muy significativo que una gran parte de los trabajos presentados se referían al empleo del acero con 9 % de cromo y 1 % de molibdeno (AISI 213 T 91). (Danielsen H. K., Hald J. 2012), (Fujio Abe, 2012).(Maile K. and Klenk A. 2012), (Mastaka Y. et. al. 2012), (Mayr P. et. al, 2012), (Ukai S. et. al. 2012), (Yamasaki S. et. al. (2012). Esto motivó que se incluyera este acero en el análisis del pronóstico de vida para la evaluación económica que será realizada en el presente trabajo. En los pronósticos de vida realizados para este acero, se confirmó en el trabajo (Rivero 2012) que la vida útil por creep es mucho mayor, del orden de mucho más de 100 veces superior, que la obtenida con el acero AISI 210 A1 o los similares empleados en Cuba, o sea, que se puede esperar que con el mismo se reduzcan considerablemente las averías de los tubos, que es la causa esencial de los grandes gastos de las Centrales Termoeléctricas en la actualidad y se propuso incorporarlo en la evaluación técnico – económica que será realizada en el presente trabajo.

Estos resultados han dado origen a esta investigación en la cual se prevé evaluar desde el punto de vista económico la posibilidad de reducir los costos de las averías mediante el mejoramiento del material. Además como se dijo anteriormente existe la situación concreta del Proyecto de Quema de Gas donde la Central Termoeléctrica tiene aprobada la inversión para transformar una de las dos unidades japonesas para quemas gas. Esto introduce una problemática adicional. La experiencia mundial con este combustible implica que las temperaturas se elevan en el rango entre 600 y 700 ºK es que en esas condiciones la temperatura de trabajo, sobre todo del Sobrecalentador Secundario se elevará por encima de 600 ºK que es la temperatura nominal actual de las calderas de la Central Termoeléctrica de Cienfuegos en condiciones de quema de crudo, esto implicará que la vida útil por creep se reducirá enormemente y los aceros actuales incrementarán sustancialmente el número de averías por tubos ponchados por creep.

Teniendo en cuenta esta particularidad del proceso de quema de gas en las calderas en el trabajo (Del Junco 2013) se realizó el pronóstico de la vida por creep de los distintos aceros empleados en el Proyecto de Quema de Gas de la Central Termoeléctrica ¨Carlos M. de Céspedes¨ hasta las temperaturas de 800 ºK, pronósticos estos necesarios para poder realizar la evaluación económica. Los resultados se darán a continuación.

- **Vida por creep del acero AISI 210 A1 (SA 210 A1)**

La Ecuación del Parámetro Larson Miller según los datos dados por la Norma ISO / TR7468-198 para este acero AISI 210 A1 de los tubos de la tiene que la Ecuación del Parámetro de Larson Miller es:

$$P(\sigma) = \frac{\log t - 10{,}656877}{T - 500} = a + b \cdot (\log \sigma) + c \cdot (\log \sigma)^2 + d \cdot (\log \sigma)^3 + e \cdot (\log \sigma)^4 \qquad (5)$$

Las constantes de la ecuación según la Norma se dan en la Tabla 1.

Tabla 1 Constantes de la ecuación de correlación para el acero AISI 210 A1 Según la Norma ISO / TR7468-198	
a	-0,68628
b	1,459851
c	-1,18513
d	0,424568
e	-0,05725

Tabla 2 Resultados del pronóstico para el acero AISI 210 A1 (SA 210 A1) para Δt = 0 ºC

TºK	tºC	E	μ	α ºC^{-1}	a1	m1	σ MPA	Vida (hrs)
400	127	2.157434e+005	0.268794	1.2585e-005	0.956357	3.551181	87.094029	3.42886e+016
425	152	2.149441e+005	0.262263	1.2765e-005	0.956357	3.556772	87.094029	1.15711e+015
450	177	2.140717e+005	0.255419	1.2937e-005	0.956357	3.557259	87.094029	3.90479e+013
475	202	2.131261e+005	0.248263	1.3103e-005	0.956357	3.552756	87.094029	1.31772e+012
500	227	2.121072e+005	0.240794	1.3262e-005	0.956357	3.543387	87.094029	4.44679e+010
525	252	2.110152e+005	0.233013	1.3413e-005	0.956357	3.529291	87.094029	1.50062e+009
550	277	2.098500e+005	0.224919	1.3558e-005	0.956357	3.510614	87.094029	5.06401e+007
575	302	2.086115e+005	0.216513	1.3696e-005	0.956357	3.487512	87.094029	1.70891e+006

600	327	2.072999e+005	0.207794	1.3826e-005	0.956357	3.460146	87.094029	57669.1
625	352	2.059151e+005	0.198763	1.3950e-005	0.956357	3.428688	87.094029	1946.11
650	377	2.044571e+005	0.189419	1.4067e-005	0.956357	3.393313	87.094029	65.6738
675	402	2.029259e+005	0.179763	1.4177e-005	0.956357	3.354201	87.094029	2.21624
700	427	2.013215e+005	0.169794	1.4279e-005	0.956357	3.311535	87.094029	0.0747895
725	452	1.996439e+005	0.159513	1.4375e-005	0.956357	3.265502	87.094029	0.00252386
750	477	1.978931e+005	0.148919	1.4464e-005	0.956357	3.216292	87.094029	8.51705e-005
775	502	1.960691e+005	0.138013	1.4545e-005	0.956357	3.164094	87.094029	2.87418e-006
800	527	1.941718e+005	0.126794	1.4620e-005	0.956357	3.109098	87.094029	9.69924e-008

De la Ecuación 5 se ve que el número del denominador en el Parámetro de Larson Miller, que el punto de inflexión para este acero es de 500 º K, por lo que es de esperar que por encima de esta temperatura empeora su comportamiento ante la falla por creep. Como se aprecia en la Tabla 2 la temperatura de trabajo tiene una notable influencia en la vida útil por fractura bajo creep. Así por ejemplo si la temperatura de la pared del tubo es de 600 ºK (327 ºC), la Vida Útil por Fractura bajo creep es de 6,58 años (Un año son 8760 horas). Sin embargo para una temperatura de 625 ºK (452 ºC) la Vida Útil se reduce a 1 946 horas, mucho menos de un año de explotación. Esto para Δt = 0 ºC. Si aumenta Δt la vida se reduce mucho más.

En el Proyecto de Quema de Gas, la temperatura de los tubos se eleva en el rango de 600 a 700 ºK, de aquí la importancia de aplicar esta metodología para estimar la vida de los materiales propuestos en el Proyecto y poder proponer otra variante para la Inversión, por supuesto investigando si la nueva variante propuesta resulta rentable.

- **Vida por creep del acero AISI 213 T12 (SA 213 T12)**

Este es uno de los aceros incluidos en el Proyecto de Quema de Gas. La Ecuación del Parámetro Larson Miller según los datos dados por la Norma ISO / TR7468-198 para este acero AISI 213 T12 (SA 213 T12) con (1% Cr – 0,5% Mo) es:

$$P(\sigma) = \frac{\log t - 13{,}36}{T - 500} = a + b \cdot (\log \sigma) + c \cdot (\log \sigma)^2 + d \cdot (\log \sigma)^3 + e \cdot (\log \sigma)^4 \qquad (6)$$

Donde: a, b, c, d, e son constantes del ajuste de la curva que se dan en la Tabla 3.La temperatura de inflexión para esta acero es también de 500 ºK.

Tabla 3 Constantes de la ecuación de correlación.	
a	-0,3052
b	-0,0491
c	0,01438
d	-0,00500
e	-0,00563

Los resultados del procesamiento para este acero se muestran en la Tabla 4.

Este es uno de los aceros que por tener cromo y molibdeno está propuesto por la CTE ¨Carlos M. de Céspedes¨ para utilizarlo en las zonas de más bajas temperaturas del Sobrecalentador Secundario, sin embargo desde el punto de vista de su comportamiento a la falla por creep es peor que el AISI 210 A1 y más caro. Para una temperatura de 573 ºK la vida por creep de este acero es prácticamente de cero horas, para la misma tensión que el acero AISI 210 A1. Se concluye por lo tanto que este acero es peor que el AISI 210 A1 y realmente no sirve para el Proyecto de Quema de Gas.

Tabla 4: Resultados para los tubos de acero AISI 213 T12 (SA 213 T12) con (1% Cr–0,5% Mo) con Δt = 0 º C

T ºK	t ºC	E	μ	α ºC^{-1}	a1	m1	σ MPa	Vida (hrs)
293	20	2.08000e+005	0.293217	1.1900e-005	0.956357	3.349227	87.094029	9.79707e+059
373	100	2.05347e+005	0.275497	1.2600e-005	0.956357	3.415379	87.094029	8.49719e+041
473	200	2.00000e+005	0.248847	1.3200e-005	0.956357	3.361212	87.094029	2.24905e+019
573	300	1.95000e+005	0.217197	1.3700e-005	0.956357	3.263797	87.094029	0.000595281
723	450	1.72000e+005	0.160347	1.4000e-005	0.956357	2.742692	87.094029	8.10602e-038
773	500	1.65536e+005	0.138897	1.4300e-005	0.956357	2.629021	87.094029	4.17032e-049
873	600	1.52852e+005	0.092247	1.4565e-005	0.956357	2.345450	87.094029	1.10381e-071

- **Vida por creep del acero AISI 213 T22 (SA 213 T22)**

Este es otro de los aceros incluidos en el Proyecto de Quema de Gas. La Ecuación del Parámetro Larson Miller según los datos dados por la Norma ISO / TR7468-198 para este acero AISI 213 T22 (SA 213 T22) con (2,5% Cr – 1 % Mo) es:

$$P(\sigma) = \frac{\log t - 13{,}36}{T - 500} = a + b\cdot(\log\sigma) + c\cdot(\log\sigma)^2 + d\cdot(\log\sigma)^3 + e\cdot(\log\sigma)^4 \qquad (7)$$

Donde: a, b, c, d, e son constantes del ajuste de la curva que se dan en la Tabla 5. La temperatura de inflexión para este acero es también de 500 ºK.

Tabla 5 Constantes de la ecuación de correlación.	
a	- 0.1791
b	- 0.00147
c	0.0000092
d	- 0.00000004
e	0.0000000001

Los resultados del procesamiento para este acero se muestran en la Tabla 6

Tabla 6: Resultados para tubos de acero AISI 213 T22 (SA 213 T22) con (2,5% Cr – 1 % Mo) con Δt = 0 º C								
T(ºK)	t(ºC)	E MPa	μ	α $^{o}C^{-1}$	a1	m1	σ MPa	Vida (hrs)
293	20	2.20021e+05	0.289958	1.01966e-05	0.956357	3.021716	87.094029	1.22752e+67
373	100	2.13671e+05	0.278118	1.093218e-05	0.956357	3.094619	87.094029	2.03764e+46
473	200	2.0566e+05	0.256852	1.173792e-05	0.956357	3.106600	87.094029	2.15901e+20
573	300	1.97565e+05	0.228402	1.241722e-05	0.956357	3.040628	87.094029	2.2876e-06
723	450	1.85267e+05	0.172257	1.319909e-05	0.956357	2.825311	87.094029	2.49499e-45
773	500	1.81126e+05	0.149950	1.339650e-05	0.956357	2.729904	87.094029	2.56821e-58
873	600	1.72782e+05	0.099948	1.369648e-05	0.956357	2.514541	87.094029	2.72118e-84

Este acero, al igual que el anterior, es peor que el AISI 210 A1, la vida para 573 ºK es de prácticamente cero horas y tampoco servirá para el Proyecto de Quema de Gas.

- **Vida por creep del acero AISI 213 T91 (SA 213 T91)**

Este acero es la novedad mundial para tubos de calderas, es mucho más caro pero como se verá su comportamiento al creep es excelente. La Ecuación del Parámetro Larson Miller según los datos dados por la Norma ISO / TR7468-198 para este acero AISI 213 T91 (SA 213 T91) con (9% Cr - 1% Mo) es:

$$P(\sigma) = \frac{\log t - 11{,}692613}{T - 600} = a + b \cdot (\log \sigma) + c \cdot (\log \sigma)^2 + d \cdot (\log \sigma)^3 + e \cdot (\log \sigma)^4 \qquad (8)$$

Donde: a, b, c, d, e son constantes del ajuste de la curva. Los valores de las constantes se dan en la Tabla 7.En este acero de acuerdo con el número del denominador del Parámetro de Larson Miller tiene su punto de inflexión a 600 ºK y será mucho mejor que todos los anteriores.

Tabla 7 Constantes de la ecuación de correlación.	
a	-0,80630
b	1,75733
c	-1,45750
d	0,53256
e	-0,07342

Los resultados del procesamiento para este acero se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8: Resultados para el acero AISI 213 T91 (SA 213 T91) con (9% Cr-1% Mo) con Δt = 0ºC								
T ºK	t ºC	E	μ	α ºC^{-1}	a1	m1	σ MPA	Vida (hrs)
293	20	2.460e+005	0.293217	1.02500e-005	0.956357	3.411876	87.094029	1.51152e+022
373	100	2.396e+005	0.275497	1.16000e-005	0.956357	3.668808	87.094029	2.78844e+019
473	200	2.390e+005	0.248847	1.24000e-005	0.956357	3.773215	87.094029	1.06609e+016
573	300	2.195e+005	0.217197	1.27500e-005	0.956357	3.419106	87.094029	4.07596e+012
673	400	2.066e+005	0.180547	1.32500e-005	0.956357	3.194791	87.094029	1.55834e+009
773	500	1.920e+005	0.138897	1.36000e-005	0.956357	2.900049	87.094029	595795
873	600	1.850e+005	0.092247	1.34000e-005	0.956357	2.611735	87.094029	227.788
973	700	1.658e+005	0.040597	1.33761e-005	0.956357	2.210725	87.094029	0.0870892
1073	800	1.445e+005	-0.016053	1.37680e-005	0.956357	1.872595	87.094029	3.32965e-005

Como se observa de la Tabla 8 este acero tiene un comportamiento excepcional desde el punto de vida de su vida por creep para elevadas temperaturas, así por ejemplo para la temperatura de 673 ºK su vida es de más de 1 500 millones de horas sin averías, para la temperatura de 773 ºK su vida por creep es de 595 785 horas que equivalen a 68 años de trabajo continuo. Estas son las razones por las cuales se propone incluir este acero en la evaluación económica del Proyecto de Quema de Gas, que es mucho más caro que los anteriores, pero tiene un comportamiento desde el punto de vista de la vida por creep que permite pronosticar que prácticamente quedarán excluidas las averías en el Sobrecalentador Secundario en todo el Ciclo de Vida, con el consiguiente impacto económico y social al reducirse enormemente las paradas de la Central para reparación de tubos de las calderas, lo que significa que por causa de esto se evitarán los apagones.

ANEXO II

Caso de Estudio: Investigación de la integridad estructural de recipientes para el almacenamiento de hidrógeno de la Refinería “Ñico López” en presencia de minilaminaciones en las paredes

Autores: Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Lic. Terman Frómeta Castillo, M.Sc. Francisco Ramos Blanco, Dr. Nelson Arzola de la Peña, Tec. Ramón Álvarez Ruiz, M.Sc. Vladimir Carrera Martínez.

1. *Introducción*

En la Refinería de Petróleo “Ñico López” se adquirieron tres grandes recipientes para almacenamiento de hidrógeno. Al realizar la inspección técnica para su puesta en servicio se detectó un volumen considerable de minilaminaciones paralelas la línea media de la pared del cuerpo y distribuidas en una faja de 30 mm de espesor simétricamente colocada con relación a la línea media. Ante la incertidumbre de que influencia podrían tener dichas mililaminaciones, la Dirección de la Refinería solicitó los servicios del Colectivo de Mecánica Aplicada de la Facultad de Mecánica de la Universidad de Cienfuegos y del Centro Experimental de la Construcción y el Montaje de la CEN, Juraguá, Cienfuegos para desarrollar una investigación cuyo objetivo fue:

Evaluar la integridad estructural desde el punto de vista mecánico de los 3 recipientes para el almacenamiento de hidrógeno. El dictamen tenía previsto los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterización (longitud, profundidad, tamaño, área, y orientación) por medio de Ensayos no Destructivos (END) de los defectos que pudieran ser detectados, tanto en el metal base como en las uniones soldadas.
2. Evaluación experimental de la composición química del material, estructura metalográfica, determinación de propiedades mecánicas (σ_r y a_k) y la estimación de las propiedades fractomecánicas, en particular la tenacidad a la fractura, K_{IC}.

3. Evaluar la peligrosidad de los defectos encontrados y elaborar las recomendaciones acerca de la utilización o no de los referidos recipientes.

2. Desarrollo

2.1 Dimensiones, parámetros de trabajo y especificaciones técnicas de los recipientes

Recipiente cilíndrico de fondo abombado

Diámetro exterior del recipiente (D): 3 000 mm

Radio exterior (R_e): 1500 mm

Radio medio (R): 1470 mm

Espesor (h): 60 mm

Altura (H): 28. 00 m

Temperatura de explotación, t = 38 ^{0}C

Presión máxima de explotación p = 55 atm.

2.2 Inspección visual y revisión de la documentación técnica

La inspección visual fue realizada desde el interior y exterior de los recipientes. Se pudo comprobar que existe linealidad entre los cordones soldados (no hay desplazamiento de bordes), y que el estado del material se encuentra en buenas condiciones. Debemos señalar que la documentación técnica que existe, la cual fue facilitada por los técnicos de la Refinería es escasa, y no aporta elementos sobre las características constructivas de las uniones soldadas.

2.3 Caracterización de los defectos

Los defectos existentes son laminaciones o exfoliaciones, propias de recipientes que se conforman por laminación, las cuales por su ubicación interior y orientación paralela a la superficie lateral de la pared del cuerpo del recipiente, según (A. P. Guliaev 1983) , no influyen en las propiedades mecánicas longitudinales del material. Los mismos están concentrados en una franja de 30 mm de espesor, 15 mm a cada lado de la línea media de la pared, las dimensiones de las mismas no exceden los 10 mm y la separación entre ellas varía entre 5 y 80 mm. . Esta situación no se observa en el material de los fondos, lo cual conduce a pensar que estas puedan haber tenido su origen en el proceso de rolado del cuerpo.

2.4 Composición química

Se determinó la composición química del material, el mismo se corresponde con el acero 16 ΓC, según la norma (GOST 5520-72) (Maslenkov & Maslenkova 1991).

2.5 Propiedades mecánicas

Se realizaron ensayos de tracción e impacto para varias probetas extraídas de la pared del Recipiente No. 2. Los valores medios obtenidos fueron:

$\sigma_f = \sigma_{02}$= 29.6 kgf/mm^2, σ_r= 47.4 kgf/mm^2, a_k = 12,5 kgf – m/cm^2, CVN= 98 J

2.6 Tenacidad de fractura (Parámetro K_{IC})

La Tenacidad a la Fractura del Material K_{IC} puede ser obtenida por ensayos según Norma ASTM E-399 (ASTM 1986), sin embargo es muy bien conocida la correlación existente entre la energía de absorción de los ensayos por impacto Charpy, con probetas con entalla en V (CVN) y el K_{IC} (Correlación de Rolfe - Barsón) tomado de: (Broek 1983); (Iwadate et al. 1994); (Rolfe & Barson 1977). La tenacidad a la fractura del material (K_{IC}) obtenida por esta vía fue:

$K_{Ic} = 166\ MPa\sqrt{m}$

Sin embargo para el espesor de la pared del gasómetro t = 6 cm = 0.06 m, el mayor valor de K_{Ic} que satisface la condición de deformación plana en este caso es:

$$K_{Ic} \leq \sigma_{0.2} \cdot \sqrt{\frac{t}{2.5}} = 45\, MPa \sqrt{m} = 4592\, kgf\, cm^{-3/2}$$

En los cálculos se utilizará por tanto el valor de K_{Ic}= 45 MPa $m^{1/2}$ = 4 592 kgf/$cm^{3/2}$, que garantiza la mayor seguridad en los cálculos y por lo tanto una mayor reserva de resistencia, lo que es aconsejable dado que se trata de recipientes que contendrán hidrógeno.

2.7 Evaluación de la peligrosidad de los defectos detectados desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica y de la Mecánica de la Fractura Subcrítica

La presencia de defectos interiores longitudinales en toda una franja próxima a la línea media de la pared de los recipientes puede resultar particularmente peligrosa en aquellos tramos del mismo donde aparecen momentos flectores y fuerzas de cortante originadas por el conocido efecto de borde, o sea, en la transición del cuerpo cilíndrico con los fondos abombados. Este fenómeno aparece detalladamente descrito en la literatura (Birger J.A., Schorr B.F. 1966); (CIME 1999); (Feodosiev 1985); (Pisarenko et al. 1989) y conduce a la aparición de tensiones tangenciales longitudinales, que toman su valor máximo en el plano de la línea media de la pared y que en presencia de cargas cíclicas (proceso de llenado – vaciado) puede conducir al crecimiento subcrítico de los defectos hasta que éstos alcancen su tamaño crítico.

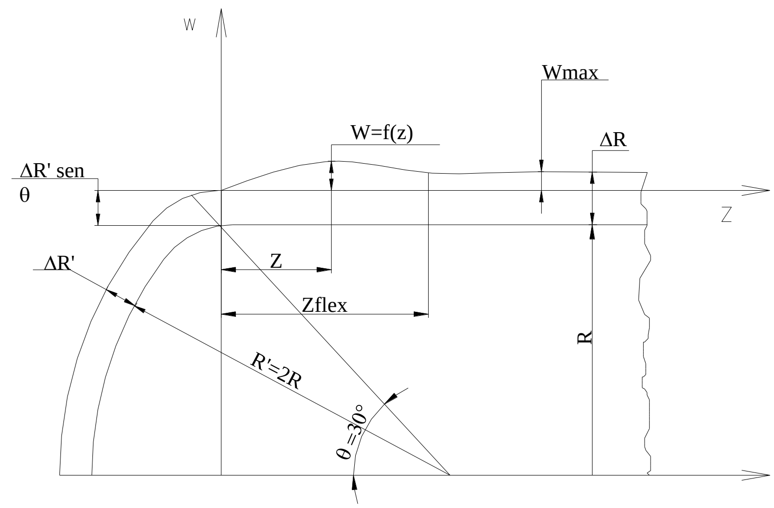


Fig.1 Deformación en un recipiente cilíndrico con fondo abombado producto de la flexión provocada por el efecto de borde

En la Fig. 1 se muestran los incrementos de los radios en las zonas cilíndricas y esférica respectivamente que se originan por la acción de la presión en un recipiente cilíndrico de radio R y fondo compuesto por un casquete esférico de radio R' = 2R y una transición tórica (ASME n.d.). Como se puede apreciar, al ser el fondo en el plano circunferencial más rígido, el incremento del radio en la zona del cuerpo cilíndrico es mayor que en la zona del fondo esférico. Esta diferencia origina flexión en toda una zona de longitud Z_{flex} que no solo incrementa las tensiones normales en el plano meridional del recipiente, sino que provoca la aparición de tensiones tangenciales en los planos longitudinales. La diferencia de radios después de la deformación será igual a la flecha máxima de la pared.

$$W_{max} = \mu \cdot \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot h} \qquad (1)$$

Donde:

w_{max} – flecha máxima por flexión de la pared.

R – radio medio de la pared del gasómetro.

p – presión interior.

h – espesor de la pared.

E – módulo de elasticidad del material del recipiente.

μ - coeficiente de Poisson del material del recipiente.

Se puede demostrar que la ecuación de la flecha W = f(z) queda descrita por la ecuación:

$$W = \mu \cdot \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot h} \cdot \left[1 - e^{-k \cdot z} \cdot \left(sen(k \cdot z) + \cos(k \cdot z)\right)\right]$$

(2)

Donde:

$$k = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}{R^2 \cdot h^2}}$$

(3)

Derivando la ecuación de la flecha se obtiene la ecuación de las pendientes:

$$W' = \frac{dW}{dZ} = k \cdot \mu \frac{p \cdot R^2}{E \cdot h} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot sen\left(k \cdot Z\right) \quad (4)$$

En [10] se demuestra que el momento flector, en la zona de efecto de borde, se puede hallar por la expresión:

$$M_f = D \cdot \frac{d^2 W}{dZ^2} \quad (5)$$

Donde:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)} \quad (6)$$

Hallando la segunda derivada de W y sustituyendo en (5) se obtiene que:

$$M_f = \frac{\mu \cdot p \cdot R \cdot h}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot \left(\cos(k \cdot Z) - sen(k \cdot Z)\right) \quad (7)$$

El momento flector máximo se halla de la condición $\frac{dM_f}{dZ} = 0$, de la cual se obtiene que éste se produce para Z = 0 y tiene un valor:

$$M_{f\,\max} = \frac{\mu \cdot p \cdot R \cdot h}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}} \quad (8)$$

La fuerza de cortante en la zona de efecto de borde se halla por la ecuación:

$$Q_y = D \cdot \frac{d^3 W}{dZ^3} \tag{9}$$

De donde, derivando de nuevo W y sustituyendo se obtiene que:

$$Q_y = -\frac{\mu \cdot p}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot h^2}{3 \cdot \left(1-\mu^2\right)}} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot \cos(k \cdot Z) \tag{10}$$

La fuerza de cortante máxima se halla de la condición $\frac{dQ_y}{dZ} = 0$. El máximo se produce también para Z = 0 y vale:

$$Q_{y_{max}} = \frac{\mu \cdot p}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot h^2}{3 \cdot \left(1-\mu^2\right)}} \tag{11}$$

En las Figs. 2, 3, 4 y 5, se muestra el comportamiento de la flecha, la pendiente, el momento flector y la fuerza de cortante calculados para los datos de los gasómetros. O sea p = 55 atm. = 56.815 kgf/cm^2, R = 147 cm, h = 6 cm, material acero 16MnSi para el cual, según [15], E = 2.1·10^6 kgf/cm^2 y μ = 0.3.

La zona en la cual se extiende el efecto de borde acotado como Z_{flex}, se puede precisar hallando el valor de Z donde la flecha es un valor tan pequeño como el 1% de la máxima O sea, de la ecuación (2).

$$e^{-k \cdot Z} \cdot \left(sen\left(k \cdot z\right) + \cos\left(k \cdot Z\right)\right) \le 0.01 \tag{12}$$

El término entre paréntesis no puede ser mayor que $\sqrt{2}$, de donde tiene que cumplirse que:

$$e^{-k \cdot Z} \le \frac{0.01}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad k \cdot Z = 4.95$$

Despejando Z, se obtiene que:

$$Z_{flex} \le \frac{4.95}{\sqrt[4]{\frac{3 \cdot \left(1-\mu^2\right)}{R^2 \cdot h^2}}} \tag{13}$$

Evaluando para los datos del gasómetro se obtiene que:

$$Z_{flex} \le 114.5\,\text{cm}$$

La tensión tangencial máxima que surge en la línea media de la pared del gasómetro, originada por la presencia de la fuerza de cortante $Q_{y\ máx}$, se halla por la ecuación de Zhuravski. Así, la τ_{max} por unidad de perímetro será:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{y\ max} \cdot S_{x\ max}}{I_x} \qquad (14)$$

Para una franja de espesor unitario en la pared:

$$S_{x\ max} = \frac{h^2}{8} \qquad e \qquad I_x = \frac{h^3}{12}$$

Se obtiene que:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{y\ max}}{h} \qquad (15)$$

Evaluando para los datos de los recipientes se obtiene:

$$\tau_{max} = 49.23\ kgf / cm^2 = 4.82\ N / mm^2$$

Fig. 3 Valores de la pendiente

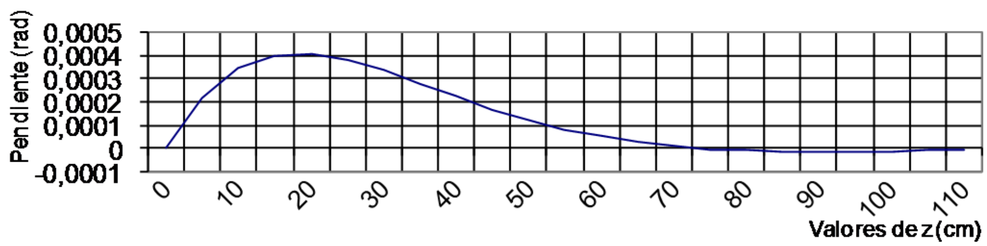
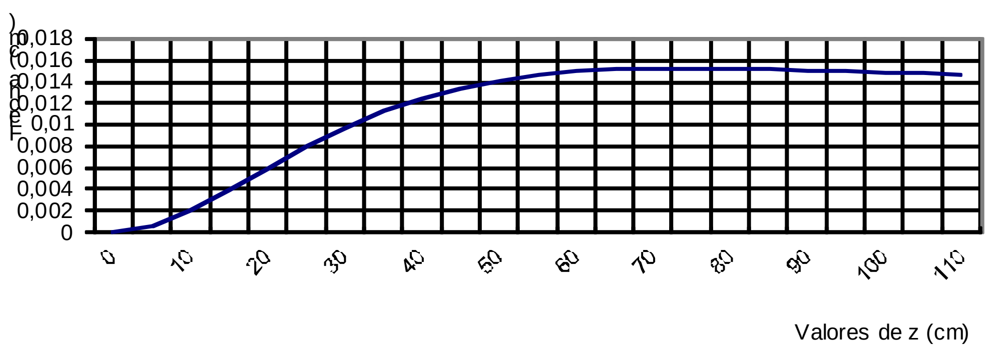


Fig. 2 Valores de la flecha



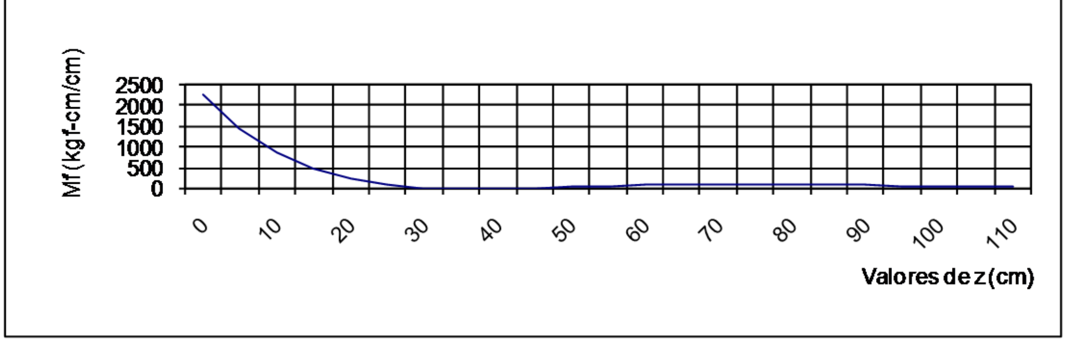


Fig. 4 Valores del Momento Flector

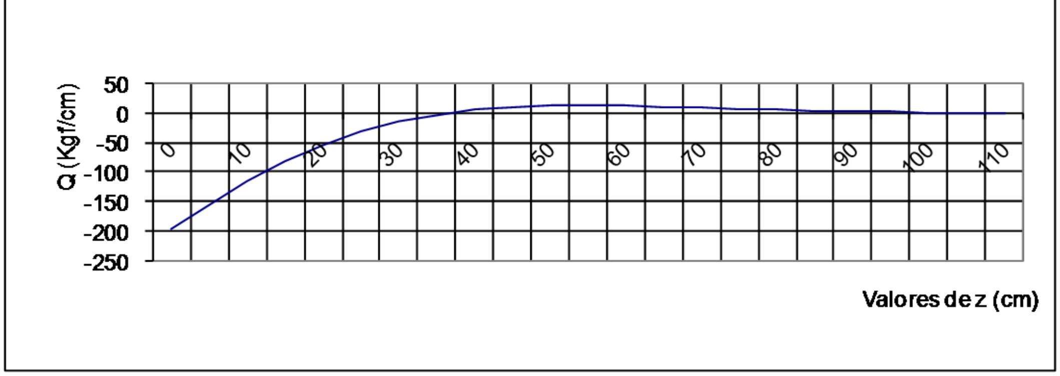


Fig. 5 Valores de la fuerza de cortante

Para evaluar la integridad estructural de los recipientes se requiere en primer lugar valorar, que posibilidad existe de que los defectos observados se extiendan inestablemente en toda su longitud provocando que la pared del mismo se divida en dos capas de espesor h = 3 cm cada una.

Según (Hofer 1968) para el caso de agrupaciones de defectos (Fig. 6) bajo el estado tensional de cortante puro, se tiene que:

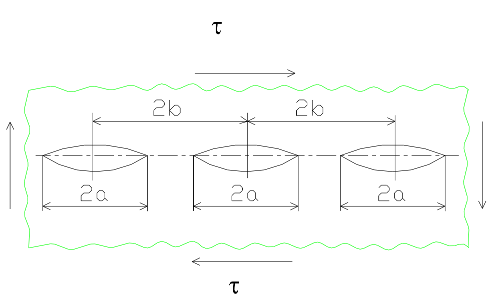


Fig.6 Agrupaciones de defectos interiores bajo cortante puro

$$K_{II} = \tau \cdot \sqrt{2 \cdot b \cdot tan\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot b}\right)} \tag{16}$$

La condición de crecimiento inestable es:

$$K_{II} = K_{I\,c} \tag{17}$$

La gráfica de resistencia residual se puede construir entonces de la ecuación:

$$\tau_c = \frac{K_{I\,c}}{\sqrt{2 \cdot b \cdot tan\left(\frac{\pi \cdot a_c}{2 \cdot b}\right)}} \tag{18}$$

En la Fig. 7 se muestran los gráficos de resistencia residual obtenidos para valores de b = 0.5, 1, 2, 4 y 8 cm de separación entre las grietas (Fig. 6). Como se aprecia de los mismos la tensión τ_{max}= 49.23 kgf/cm^2, es del orden de la tensión umbral en cada caso y provocaría el crecimiento inestable, solamente en el caso de que a ≅ b.

El análisis de crecimiento subcrítico se realizó por la clásica Ecuación de Paris.

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n \qquad \frac{mm}{ciclo} \tag{19}$$

En general el exponente n varía entre 2 y 3 (Avilés 1995); (Blake 1996). Específicamente para un acero similar al analizado el 15G2AF en la referencia (Troschenko 1987) se plantea que n = 2.5 a 2.6. En el análisis presente se tomó n = 2.5
La constante C se obtuvo de acuerdo a la correlación dada en (Tanaka 1997); como:

$$C = 5.18 \cdot 10^{-12}$$

Tomando ciclo intermitente (proceso de llenado - vaciado)

$$\Delta \tau = 49{,}23\ kgf / cm^2 = 4{,}82\ N / mm^2$$

Y el valor de ΔK para cada tamaño de grieta se halla por la ecuación:

$$\Delta K_i = \Delta \tau \cdot \sqrt{2 \cdot b \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a_i}{2 \cdot b}\right)} \tag{20}$$

En la Fig. 8 se muestra la gráfica de crecimiento subcrítico obtenida, donde se puede apreciar que para el menor valor de b considerado: b = 0,5 cm, para que a alcance el valor de a = 2,7 mm = 0,27 cm, hacen falta 40 millones de ciclos de llenado – vaciado. O sea que las minilamionaciones no presentan ninguna peligrosidad desde el punto de vista de la integridad estructural de la pared de los recipientes.

Se propone evaluar a continuación que influencia tiene el efecto de borde en la integridad estructural del gasómetro en presencia de un microdefecto superficial interior de forma semielíptica en los cordones de soldadura en la zona de efecto de borde.

Fig. 7 Gráficos de resistencia residual para diferentes valores de b

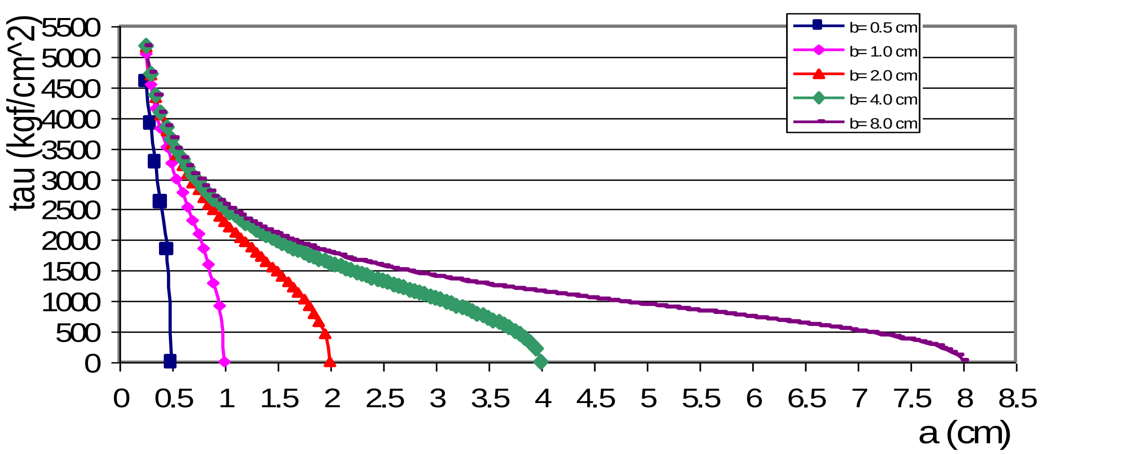
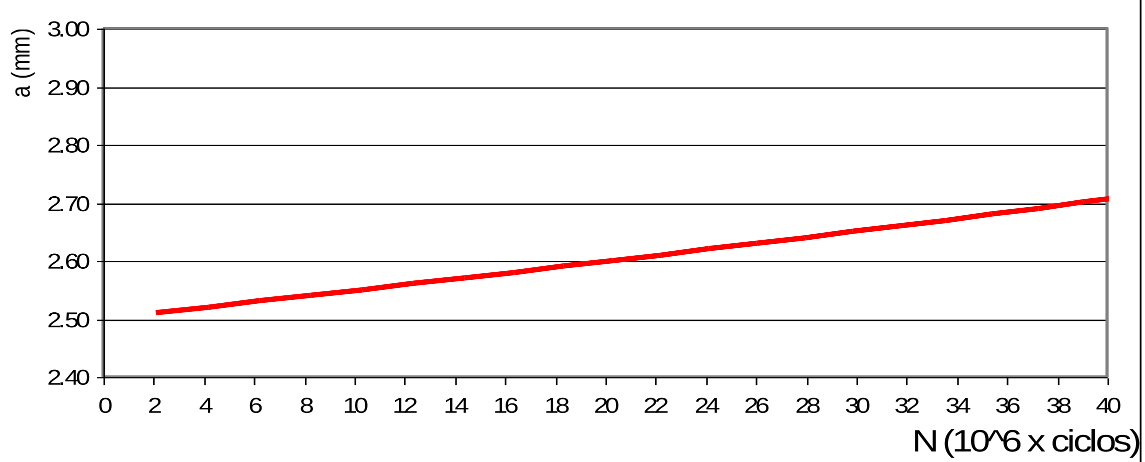


Fig. 8 Gráfico de crecimiento subcrítico para b= 0.5 cm



En la Fig. 9 se muestra un defecto de este tipo en los cordones. En el control realizado por ultrasonido no se detectó defecto alguno en la soldadura, no obstante se supondrá la existencia de un hipotético defecto de este tipo, de profundidad a = 0.1 mm, no detectable por la técnica ultrasónica empleada.

El efecto de borde en un recipiente con estas características conduce al incremento de la tensión meridional en la superficie interior del recipiente, por lo que la posibilidad de que un defecto superficial en los cordones de soldadura crezca y se convierta en inestable, aumenta. La tensión meridional provocada por la presión interior es:

$$\sigma_{mp} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \tag{21}$$

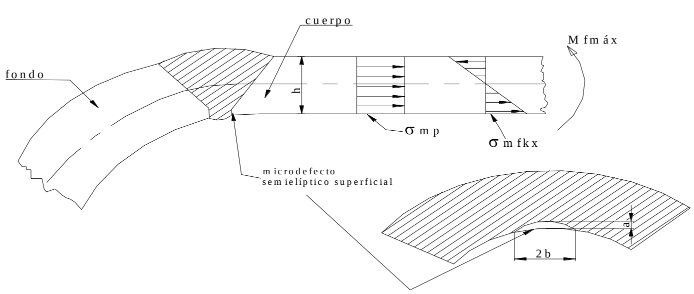


Fig.9 Microdefecto superficial interior de forma semielíptica

La tensión meridional provocada por el momento flector máximo en la zona de efecto de borde es:

$$\sigma_{m\,flex}^{\max} = \frac{M_{f\max}}{W} = \frac{6 \cdot M_{f\max}}{h^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu \cdot p \cdot R}{h \cdot \sqrt{3 \cdot \left(1-\mu^2\right)}}$$

$$\sigma_{m\,flex}^{\max} = \frac{3 \cdot \mu}{\sqrt{3 \cdot \left(1-\mu^2\right)}} \cdot \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \tag{22}$$

Para acero μ=0.3

$$\sigma_{m\,flex}^{\max} = 0.545 \cdot \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} \tag{23}$$

La tensión meridional resultante será:

$$\sigma_m = \sigma_{mp} + \sigma_{m\,flex}^{max} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} + 0.545 \cdot \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} = 1.545 \cdot \frac{p \cdot R}{2 \cdot h}$$

(24)

La tensión meridional crece en casi en casi un 55 % por el efecto de borde. La tensión circunferencial sigue siendo:

$$\sigma_c = \frac{p \cdot R}{h} \quad (25)$$

Para los datos de los recipientes:

$\sigma_m = 1075.3 \text{kgf} / \text{cm}^2 \qquad \sigma_c = 1392 \text{ kgf} / \text{cm}^2$

En estas condiciones se satisface la condición de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica. O sea, el radio de la zona plástica es:

$$r_p = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^2 = 0.068 \cdot a \quad (26)$$

El radio de la zona plástica es un 6.8 % del tamaño de la grieta y se puede admitir hasta un 20 % (Broek 1983).

Se puede considerar el estado plano de tracción biaxial uniforme. La condición de fractura para el caso de un defecto superficial semielíptico de un cordón de soldadura bajo este estado tensional es:

$$K_I = \beta_{sold} \cdot \beta_{grieta} \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = K_{Ic} \quad (27)$$

Donde:

$$\beta_{sold} = 1.3$$

$$\beta_{grieta} = \frac{\left[1 + 0.12 \cdot \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right]}{\phi_o} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\pi \cdot a} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h} \right)} \quad (28)$$

$$\phi_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2} \right) \cdot sen^2(\theta) \right]^{1/2} d\theta \quad (29)$$

La situación más crítica es cuando $\frac{a}{b} \to 0$

Se tomó, como sugiere Broek [6], tomar $\frac{a}{2 \cdot b} = 0.05$,o sea: $\frac{a}{b} = 0.1$. La integral elíptica (Ec. 29) fue resuelta para esta relación con el software DERIVE, obteniéndose ϕ_o =1.016. De donde:

$$\beta_{grieta} = 1.10 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\pi \cdot a} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}\right)} \qquad (30)$$

La resistencia residual se obtiene entonces como:

$$\sigma_c = \frac{K_{I\,c}}{1.43 \cdot \sqrt{2 \cdot h \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a_c}{2 \cdot h}\right)}} \qquad (31)$$

La curva de resistencia residual obtenida para K_{Ic} = 4 592 kgf/cm$^{-3/2}$ y h = 6 cm se muestra en la Fig.10.

Como se puede apreciar para que una tensión de magnitud σ = 1 392 kgf/cm^2 produzca el crecimiento inestable de una grieta, el supuesto microdefecto tendría que desarrollarse por crecimiento subcrítico por fatiga hasta una profundidad a = 2 cm.

El análisis del crecimiento subcrítico por fatiga del hipotético defecto se realizó por la misma ecuación (Ec. 19). En la Fig. 11 se muestra el gráfico de crecimiento subcrítico obtenido. Para que un microdefecto en la soldadura crezca hasta una profundidad a = 2 cm = 20 mm, se requieren mas de 200 000 ciclos, lo que representa una vida prolongada.

Es necesario destacar aquí que esta evaluación de la integridad de los gasómetros no es conclusiva. Se requerirá evaluar la influencia de la superposición de los efectos de las cargas de explotación con las tensiones suplementarias que pueden surgir en las minilaminaciones, a causa del incremento de la presión interior, producto de la posible difusión de hidrógeno atómico hacia estos defectos (vesificación) , lo cual puede provocar que la presión se eleve considerablemente y conduzca al crecimiento subcrítico de las minilaminaciones, pudiendo el recipiente quedar dividido en dos capas en alguna región de la zona de efecto de borde. Este hecho conduciría a un incremento suplementario de las tensiones meridionales originadas por el efecto de borde a más del 100 %, las cuales sumadas a las tensiones originadas por el incremento de la presión pudieran conducir a la pérdida de la integridad de los recipientes. En una segunda parte de este trabajo se analizará este efecto.

Fig. 10 Gráfico de resistencia residual

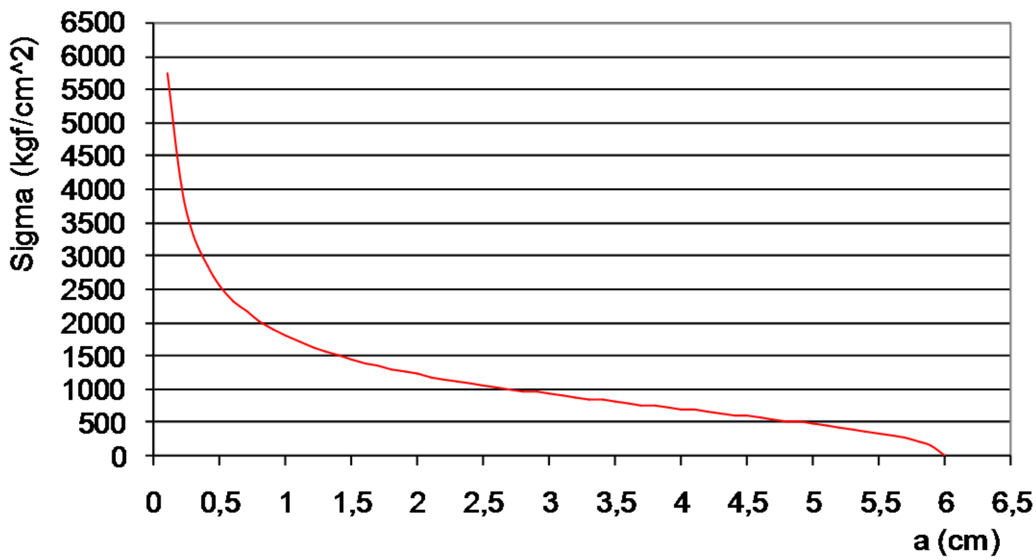
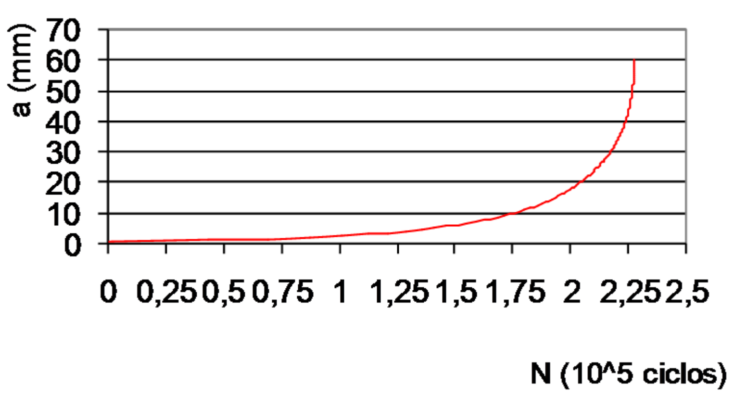


Fig.11 Gráfico de crecimiento subcrítico de la grieta



3 Conclusiones

1. El estudio estuvo restringido exclusivamente al cuerpo del recipiente, o sea, a la parte tubular y no a los fondos.
2. Los aspectos de diseño cumplen con lo establecido en (Laschinnski 1983)[14].
3. Todas las planchas o rolos de la parte tubular presentan pequeñas laminaciones (minilaminaciones), ubicadas en una franja de 30 mm de espesor y a más de 15 mm de las superficies interior y exterior. Esta situación no se observa en el material de los fondos, lo cual conduce a pensar que las mismas puedan haber tenido su origen en el proceso de rolado del cuerpo.
4. De los ensayos de ultrasonido, según las mediciones realizadas en el Recipiente No 2 (Central) no se encontraron defectos en las uniones soldadas.
5. Las minilaminaciones no son susceptibles de crecimiento por el campo de tensiones tangenciales longitudinales que surgen en condiciones reales de explotación en la zona de efecto de borde.
6. Por lo expresado en los puntos anteriores se concluye que los recipientes podrán soportar las 55 atm. de trabajo a una temperatura de 38 °C teniendo en consideración los resultados del presente trabajo.
7. La conclusión anterior no incluye la degradación del material ni los efectos originados por la posible difusión en el metal, del hidrógeno atómico contenido en los gasómetros (vesificación).

ANEXO III

Caso de Estudio: Análisis de la avería por pérdida de la estabilidad del equilibrio del cuerpo de un Generador de Escamas de Hielo

Autores: Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, M.Sc. Juan G. Noa Aguila, Dr. Luís Castellanos González, Dr. Aníbal Borroto Nordelo, Dr.. Sergio Montelier Hernández

1. Introducción.

A mediados del año 2002 la Empresa EPICIEN del Puerto Pesquero Industrial de Cienfuegos adquirió e instaló dos Generadores de Escamas de Hielo, "Geneglace" fabricados por la firma francesa Frigofrance S.A.. Desde los primeros momentos de la explotación, a pesar de que los dos Generadores son idénticos, el Generador Nº 1 Comenzó a presentar ciertas dificultades: excesivo ruido en su explotación, disparos por sobrecargas, ya que la fresa se trababa, la que evidentemente implicaba cierto desajuste del equipo. El Generador Nº 2 por el contrario, operado en las mismas condiciones no presentó ninguna de estas dificultades y se ha mantenido operando hasta la fecha sin averías. Desde su puesta en marcha el Generador Nº 1 estuvo parado por diferentes causas en varios períodos, hasta que finalmente el 16 de Febrero 2003 se presentó un a nueva avería en el Generador Nº 1, en esta ocasión mucho más grave, que lo sacó de servicio, con las correspondientes afectaciones económicas al disponer la Empresa solamente el 50 % del hielo previsto a producir con esta inversión. La pared interior del cuerpo del Generador se había deformado impidiendo su operación.

Se planteó la posibilidad de que todas estas situaciones hayan sido provocadas por una operación incorrecta, debido a una dosificación insuficiente de sal, lo cual conduciría a que el hielo se torne más difícil de despegar y por lo tanto requiriéndose un mayor esfuerzo para trocearlo. En el caso de esta última avería, la situación era diferente y se planteó la posibilidad de que la deformación observada pudiera haber sido provocada por una posible sobrepresión en el sistema.

El Colectivo de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez" realizó la investigación cuyo objetivo fue:

- Esclarecer las causas que pudieron dar origen a una avería como la observada, con el objetivo de poder establecer la reclamación correspondiente a la Firma Suministradora, ya que los equipos estaban en garantía.

2. Desarrollo.

Características de los Generadores de Escamas de Hielo. Datos técnicos

Los datos técnicos fundamentales son[4,5] : Tipo: 2F60, Capacidad de producción: 24 000 kg/24 horas, 500 kg/ hora cada Generador, Potencia del motor: 0,30 kW, Velocidad de giro del motor: 1 620 rpm, Velocidad de giro del rotor: 1,2 rpm, Tipo de refrigerante: Amoniaco, Presión del refrigerante: 3 a 5 kgf/cm^2, Temperatura del refrigerante: - 20 a - 25 °C, Adición de sal: de 100 a 300 g/m^3

Esquema y partes fundamentales.

En la Fig. 1 se muestra una vista general del Generador de Hielo y en la Fig. 2 un esquema seccionado donde se señalan las principales partes componentes[5]:

- Un cilindro **A** vertical, fijo de doble pared aislado exteriormente.
- Una parte giratoria constituida por un árbol central **B** sustentados por dos soportes **C**, una cubeta de distribución de agua **D**, una cubeta de recuperación **E**, una fresa **F** con dos soportes sustentados por dos brazos solidarios del árbol central y dos raquetas que enmarcan la fresa
- Una base **G** de nivel de agua constante, controlado por el grifo de flotador.

- Un accionamiento de la parte giratoria por motoreductor **H** con brazo de reacción **I** que actúa en un limitador de esfuerzo **J.**
- Una bomba de agua **K** realiza la circulación por un tubo L entre la base **G** y la cubeta de distribución **D**. La producción de frío la realiza un conjunto frigorífico, con órgano de descompresión situado a la alimentación que refrigera la doble pared del cilindro

Fig. 1 Vista general del Generador

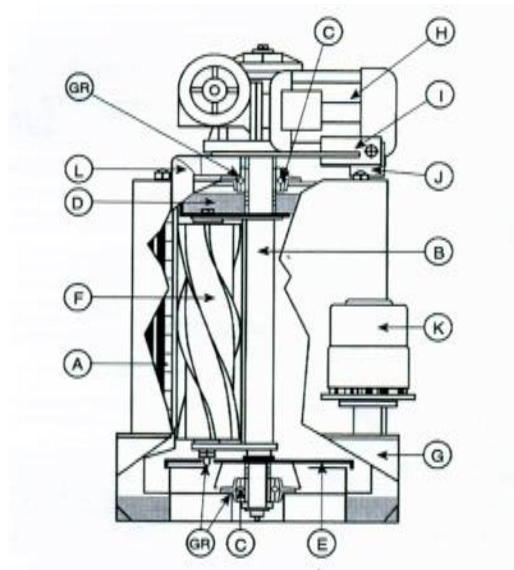


Fig. 2 Esquema y partes componentes

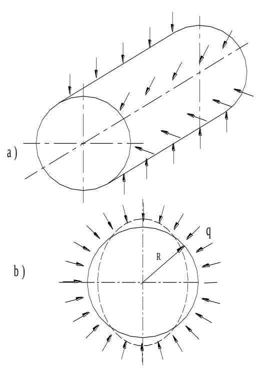
Dimensiones y material de la pared deformada

La pared deformada es la superficie interior del cilindro vertical **A,** cuyas dimensiones son: Radio exterior: Re = 39,05 cm, Radio interior: Ri = 37,95 cm, Radio medio: R = 38,5 cm y Espesor de la pared h = 1,1 cm Del material se conoce que se trata de un acero inoxidable. Por lo frecuente del empleo del acero inoxidable al cromo - níquel 1X18H9T en equipos de transferencia de calor se consideró que se trataba de uno similar a este acero. Las propiedades físicas y mecánicas del mismo fueron obtenidas según (Pisarenko et al. 1989)(Krasnoschicov & Sukomel 1986) y son: Resistencia máxima: σ_u = 5 800 kgf/cm^2, Límite de fluencia: σ_f = 2 400 kgf/cm^2, Módulo de

Elasticidad: E = 2 x 10 ^{6} kgf/cm^{2}, Coeficiente de Poisson: μ = 0.3, Coeficiente de dilatación térmica: α = 18,6 x 10^{-6} °C^{-1} y la Conductividad térmica: λ = 16 W/m-°C

Caracterización de la avería

La pared deformada del Generador de Escamas de Hielo constituye un cilindro de paredes delgadas sometido a presión exterior tal como se muestra en la Fig. 3a). Las causas fundamentales de falla de este tipo de elemento es la pérdida de la estabilidad del equilibrio. Este tipo de avería origina la deformación plástica de la pared, tal como se muestra en la Fig. 3b) y 4, a causa de la presencia de tensiones de compresión en la misma que exceden cierto valor σ_{crit} conocido como tensión crítica.



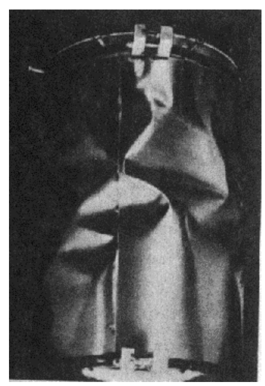


Fig.3 Pérdida de la estabilidad del equilibrio

Fig.4 Aspecto externo de la pérdida estabilidad del equilibrio en un cilindro

- Configuración inicial del cilindro de paredes delgadas con presión interior
- Configuración deformada del cilindro exterior.

La deformación en la pared interior del Generador de Escamas se muestra en la Fig. 5

Fig. 5 Deformación de la pared del Generador Nºº1

En el análisis que se realizará a continuación se demostrará que: si la pared interior del Generador no presenta imperfecciones geométricas la posibilidad de la pérdida de la estabilidad del equilibrio es limitada, aun en las condiciones más críticas, lo que se confirma por el hecho de que en el Generador Nº 2, no ha ocurrido esta avería. Sin embargo, se verá como la presencia de una ovalidad inicial, aun de valores tan pequeños como μ_o = 1 mm, o sea, en el rango de posibles valores de ajuste de la fresa, que puede llegar a ser hasta de 2 mm, provoca tensiones suplementarias de flexión que conducen a su vez a una reducción de la tensión crítica, fenómenos estos que aumentan notablemente la posibilidad de pérdida de la estabilidad del equilibrio.

Presión crítica en ausencia de imperfecciones geométricas

El cálculo de la presión exterior que provoca la pérdida de la estabilidad del equilibrio de la pared de una bóveda cilíndrica, sin imperfecciones geométricas es ampliamente abordado en la literatura (Besujov et al. 1987); (Birger J.A., Schorr B.F. 1966); (Feodosiev 1985); (Timoshenko 1961); (Timoshenko 1965) y esta presión crítica puede ser calculada para la relación R/h existente en la bóveda en análisis por la expresión:

$$pcrit = \frac{E}{4 \cdot (1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^3 \qquad (1)$$

Donde: $p_{crít}$ - Presión exterior que provoca la pérdida de la estabilidad - kgf/cm^2

E – Módulo de Elasticidad del material - kgf/cm^2

μ – Coeficiente de Poisson del material

h – Espesor de la pared - cm

R – Radio medio de la pared – cm

Para los datos del Generador de Escamas: Radio medio: R = 38,5 cm, Espesor de la pared h = 1,1 cm , Módulo de Elasticidad: E = 2×10^6 kgf/cm^2 y Coeficiente de Poisson: μ = 0,3. Se obtiene que: $p_{crit} = 12{,}8\ kgf/cm^2$

Esta p_{crit} provocará la pérdida de la estabilidad del equilibrio y por ende la deformación plástica de la pared para una tensión crítica de compresión en la misma, que puede ser calculada por la Ecuación de Laplace:

$$\sigma_{crit} = \frac{p_{crit}\, R}{h} = \frac{12{,}8 \cdot 38{,}5}{1{,}1} = 448\ \ {kgf}/{cm^2} \ll \sigma_f = 2400\ \ {kgf}/{cm^2} \qquad (2)$$

Como se observa, la pérdida de la estabilidad del equilibrio ocurre para tensiones de compresión que están muy por debajo de la tensión de fluencia del material.

La presión de trabajo p_{max} = 5 kgf/cm^2 está muy por debajo de la p_{crit} y provoca una tensión media de compresión en la pared, calculada por la Ecuación de Laplace:

$$\sigma_{crit} = \frac{p \cdot R}{h} = \frac{4 \cdot 38{,}5}{1{,}1} = 140\ \ {kgf}/{cm^2} \qquad (3)$$

La cual está también muy por debajo de la tensión de compresión crítica, por lo que evidentemente están presente otros factores que contribuyeron a la pérdida de la estabilidad del equilibrio.

Como resultado de la revisión bibliográfica relacionada con los problemas de estabilidad del equilibrio en bóvedas y con la aparición de tensiones térmicas en las paredes de los equipos de transferencia de calor, se pudo deducir que estaban presentes dos factores que podían elevar la magnitud de las tensiones de compresión y por lo tanto elevar el riesgo de pérdida de la estabilidad del equilibrio son:

1. Tensiones de compresión circunferenciales suplementarias originadas por la diferencia de temperatura entre la superficie interior y exterior de la pared deformada.
2. Tensiones de compresión circunferenciales suplementarias originadas por una posible imperfección geométrica inicial existente en la pared.

Se calculará a continuación la magnitud de estas tensiones.

Tensiones suplementarias circunferenciales originadas por la diferencia de temperatura entre la superficie exterior e interior de la pared deformada

La diferencia de contracciones térmicas, por el hecho de que la superficie exterior de la pared esta más fría que la interior, origina tensiones en la misma, de tracción en el borde exterior y de compresión en el borde interior. Este fenómeno es abordado en la literatura técnica por los siguientes autores(Pisarenko et al. 1989),(R 1990),(Timoshenko 1961),(Timoshenko 1965)y las tensiones pueden ser calculadas por las expresiones:

En el borde exterior:

$$\sigma_{\Delta t} = \frac{E \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot (1-\mu)} \cdot \left(1 - \frac{m}{6 + 3 \cdot m}\right) \qquad (4)$$

En el borde interior

$$\sigma_{\Delta t} = -\frac{E \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot (1-\mu)} \cdot \left(1 + \frac{m}{6 + 3 \cdot m}\right) \qquad (5)$$

El signo menos indica que esta tensión es de compresión.

Donde: $\sigma_{\Delta t}$ – Tensión originada por la diferencia de temperatura kgf/cm^2

$\Delta t = t_i - t_e$ - Diferencia de temperaturas entre los bordes interior y exterior de la pared °C

α_m – Coeficiente lineal de dilatación térmica medio del material ºC^{-1}

$m = \frac{Re}{Ri} - 1$ Donde: Re y Ri – radios exterior e interior de la pared, cm

Para los datos del Generador de Escamas de Hielo:

Re = 39,15 cm; Ri = 37,95 cm; m = 17,6 °C^{-1}; E = 2 x 10^6 kgf/cm^2; μ = 0,3

Se obtiene:

Tensión de tracción en el borde exterior

$\sigma_{\Delta t}$ = + 26,4 Δt kgf/cm^2 (6)

Tensión de compresión en el borde interior

$\sigma_{\Delta t}$= - 26,7 Δt kgf/cm^2 (7)

Cálculo de la diferencia de temperatura Δt y de la temperatura del borde exterior de la pared t_e

La capacidad de los Generadores de Escamas de hielo tipo 2 F600 es de 24 000 kg cada 24 horas, o sea m = 500 kg/h por cada generador. La cantidad de calor que hay que extraerle al agua a una temperatura: ta °C, para convertirla en hielo a una temperatura: t_H °C es:

$$Q = m \cdot C_a \cdot (t_a - 0) + \Delta H_s + m \cdot C_H \cdot (0 - t_H) \tag{8}$$

Donde: Ca – Calor específico medio del agua en el rango de temperaturas del agua en el Generador – kJ/kg-°C

C_H – Calor específico medio del hielo en el rango de temperaturas del hielo en el Generador – kJ/kg-°C

ΔHs – Entalpía de solidificación del agua – kJ/kg

Estos datos fueron obtenidos en las referencias [8, 9].

Ca = 4,20 kJ/ kg-°C, valor medio del rango de 0 a 10 °C

CH = 2,11 kJ/ kg-°C, valor medio en el rango de 0 a -20 °C

ΔHs = 333 kJ/ kg

La temperatura del agua en la bandeja superior, la temperatura del hielo y la temperatura de la pared interior fueron medidas en el Generador No 2 con un Termómetro Digital "Digitrón 2000" fabricado en Inglaterra con rango de medición desde –199,9 °C a 199,9 °C, con una resolución de 0,1°C en dicho rango y con un sensor plano para medición de temperaturas en superficies, tipo K, obteniéndose: ta =12°C, ti = -7 °C

Calculando la cantidad de calor Q en W:

$$Q = [500 \cdot 4{,}2 \cdot (12) + 333 + 500 \cdot 2{,}11 \cdot (8)] \cdot \frac{1000}{3600} = 9144\ W$$

Este calor tiene que ser conducido a través de la pared y tiene que cumplirse que:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \Delta t \cdot A \qquad (9)$$

Donde: λ - conductividad del material – W/m-°C

δ - espesor de la pared - m

A -área de conducción de calor

Despejando Δt y calculando para los datos del Generador de Escamas

$$\Delta t = \frac{9144 \cdot 0{,}011}{16 \cdot 2{,}86} = 2{,}2 \quad °C$$

Con este resultado se procedió a calcular las tensiones originadas en la pared por la diferencia de temperatura Δt

Tensiones de tracción en el borde exterior y de compresión en el borde interior:

Borde exterior: $\sigma_{\Delta t_e} = 58{,}1 \quad {kgf}/{cm^2}$, Borde interior: $\sigma_{\Delta ti} = -\,58{,}8 \quad {kgf}/{cm^2}$

Estas tensiones se suman a las tensiones provocadas por la presión.

Tensiones suplementarias originadas por las imperfecciones geométricas.

El colapso de las bóvedas cilíndricas sometidas a una presión externa depende mucho de las imperfecciones geométricas de la misma. La más importante de las posibles es una ovalidad inicial de magnitud μ_0, como la mostrada en la Fig. 6

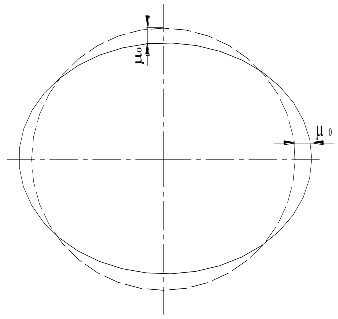


Fig. 6 Ovalidad inicial de magnitud μ_0

Según (Timoshenko 1961),(Timoshenko 1965) esta ovalidad provoca en la pared un momento flector cuya magnitud depende de la desviación radial máxima μ_0 y se puede calcular por la expresión:

$$M_{fmax} = \frac{p \cdot \mu_0 \cdot R}{1 - \dfrac{p}{p_{crit}}} \qquad (10)$$

Si se aísla de la bóveda un anillo limitado por dos planos meridionales, separados entre si la unidad de longitud. El módulo de la sección de este anillo será:

$$W = \frac{h}{6} \qquad (11)$$

La tensión de compresión en el borde interior de la pared originada por el momento flector será:

$$\sigma_{Mf} = \frac{M_{fmax}}{W} = \frac{6 \cdot p \cdot \mu_0 \cdot R}{h^2 \cdot \left(1 - \dfrac{p}{p_{crit}}\right)} \qquad (12)$$

Donde: p – Presión de trabajo - kgf/cm^2

μ_0 – Ovalidad inicial – cm

R - Radio medio de la bóveda – cm

h – Espesor de la pared – cm

$p_{crit.}$ – presión crítica de la bóveda sin imperfecciones - kgf/cm^2

Calculando para los datos del Generador de Escamas con una ovalidad máxima de μ_0 = 0,1 cm

$$\sigma_{Mf} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 0{,}1 \cdot 38{,}35}{(1{,}1)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{5}{12.8}\right)} = 156{,}6 \quad {kgf}/{cm^2}$$

En la flexión de la pared se producen tensiones de compresión a un lado de la línea media de la pared y tensiones de tracción al otro lado.

Tensión crítica en presencia de imperfecciones geométricas.

(Timoshenko 1961) propone la siguiente expresión para calcular la tensión de compresión crítica que provoca la pérdida de la estabilidad del equilibrio en una bóveda cilíndrica con una presión exterior y una ovalidad de magnitud μ_0

$$\sigma_{crit}^2 - \left[\sigma_f + (1 + 6 \cdot m \cdot n) \cdot m \cdot pcrit\right] \cdot \sigma_{crit} + \sigma_f \cdot pcrit \cdot m = 0 \qquad (13)$$

Donde: σ_{crit} - Tensión crítica con una ovalidad μ_0 - kgf/cm^2

σ_f – Tensión de fluencia del material - kgf/cm^2

p_{crit} – Presión crítica en presencia de imperfecciones - kgf/cm^2

m = R / h y n = μ_0 / R, μ_0 – ovalidad, R – Radio medio y h espesor, todos en cm

Resolviendo para σ_{crit} la ecuación cuadrática (13) y calculando para el Generador de Escamas: σ_f = 2 400 kgf/cm2 , p_{crit} = 12,8 kgf/cm2 , R = 38,5 cm y h = 1,1 cm y para valores de ovalidad inicial μ_0 = (0,01 a 0,1) cm, o sea, dentro del rango de valores posibles de ajuste de la fresa. Los resultados se muestran en la Fig. 7.

En la Fig. 7, junto con la dependencia entre la tensión crítica y las imperfecciones geométricas se ha ploteado la dependencia entre la tensión de trabajo resultante y la magnitud de la imperfección. De esta se puede apreciar como ya, a partir de un valor de μ_0 > 0,095 cm, la tensión resultante de trabajo es mayor que la tensión crítica y se produce la pérdida de la estabilidad del equilibrio.

Está claro que la dispersión propia de las propiedades mecánicas del material puede influir en los resultados obtenidos, sin embargo en el trabajo(Anon 2002) se analizó la influencia de la dispersión de éstas para los aceros y se concluyó que las posibles variaciones del Módulo de Elasticidad y del Límite de Fluencia pudieran influir como máximo en un 17,5 %. Por otro lado en el trabajo(Gonzáles 2000) se confirman las apreciaciones finales de este análisis al concluir que la presencia de imperfecciones geométricas influye sensiblemente en la posibilidad de la pérdida de la estabilidad del equilibrio.

3. Conclusiones.

Del análisis realizado se puede concluir lo siguiente:

1. Se excluye la posibilidad de que la avería haya podido ocurrir por alteraciones en la dosificación de sal o por violaciones de los parámetros de operación, por diversas razones, tales como:

- Los dos Generadores se han operado desde un principio con la misma dosificación de sal y el Generador Nº 2 no ha presentado en ningún momento problemas en a operación, mientras que en el Generador Nº 1, estos han sido reiterados desde el comienzo de la explotación.
- En el momento de la avería y en los días precedentes a la misma, tal como se pudo comprobar en los registros de la Empresa ambos Generadores estaban operando simultáneamente, por lo que cualquier otra violación hubiera provocado la avería de ambos equipos.
- En la investigación realizada quedó excluida la posibilidad de una sobrepresión dadas las características del esquema térmico y por el hecho de que una sobrepresión no provocaría la pérdida de la estabilidad en un solo lóbulo, como la observada en el Generador Nº 1, sino en dos o cuatro lóbulos como se muestra en las Figuras 3 b) y 4 lo que confirma la presencia de una imperfección geométrica en el recipiente. Por otro lado, al ser los dos Generadores iguales y estar operando simultáneamente, la avería se hubiera producido en ambos y no en uno solo como realmente se produjo.

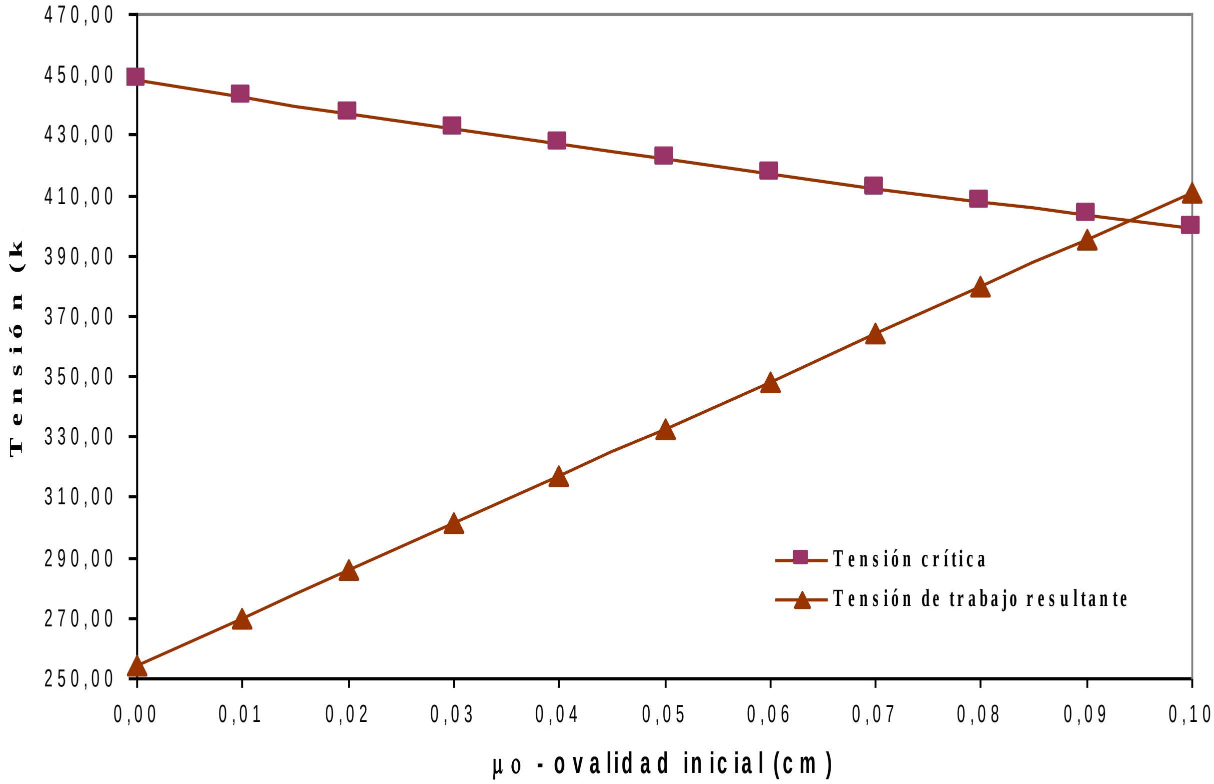


Fig. 7 Dependencia entre σ_{crit} y σ_{res} v.s μ_0

2. La Metodología General de Cálculo de la tensión de compresión en la pared tomando en cuenta no solo la presión exterior, sino incorporando también la tensión de flexión originada por la presencia de una ovalidad inicial y las tensiones originadas por la diferencia de temperatura entre los bordes interior y exterior propios de cualquier máquina térmica y su comparación con la función tensión crítica para precisar la posible pérdida de la estabilidad del equilibrio en dependencia de la ovalidad de la pared, constituye desde el punto de vista metodológico un Aporte Científico del Trabajo.
3. La tensión calculada sobre la base de esta metodología supera el valor de la tensión crítica de la bóveda con imperfecciones geométricas para una ovalidad $\mu_o = 0{,}095$ cm, o sea, la tensión alcanza el valor $\sigma_i = 395{,}4 \; {}^{kgf}\!/_{cm^2} > \sigma_{crit}$, lo que explica la deformación observada.

4. El análisis realizado conduce al dictamen final de que la avería presentada en el Generador de Escamas de Hielo Nº 1 de la Empresa EPICIEN del Puerto Pesquero Industrial de Cienfuegos es una falla por pérdida de la estabilidad del equilibrio de la pared a consecuencia de elevadas tensiones de compresión existentes en la misma y agravada por una ovalidad inicial muy pequeña, dentro el rango de posibles valores de ajuste de la fresa.

ANEXO IV

Caso de Estudio: Evaluación estática de la resistencia de diferentes cordones de soldadura de los gasómetros de hidrógeno de la Refinería de Petróleo ¨Camilo Cienfuegos¨, por los distintos efectos actuantes en presencia de un huracán de gran intensidad

Autores: Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Ing. Willian Beltrán Rodríguez, María Rosario Sánchez Macías, Ivan Castellanos Castresana
.

1. Dimensiones, parámetros de trabajo y especificaciones técnicas de los gasómetros

Recipiente cilíndrico de fondo abombado

Diámetro exterior del recipiente (D): 3 000 mm

Radio exterior del cuerpo (R_e): 1500 mm

Radio medio del cuerpo (R): 1470 mm

Espesor de la pared (h): 60 mm

Altura (H): 28. 00 m

Temperatura de explotación, t = 38 ^{0}C

Presión máxima de explotación p = 55 atm = 56,86 kgf/cm^2 = 0,558 kN/cm^2.

El peso de un gasómetro es: W = 131597kg = 1 291 kN

En la Figura 1 se muestra una vista de los Gasómetros.

Figura 1. Vista general de los Gasómetros de la Refinería ¨Camilo Cienfuegos¨

2 Determinación de las cargas producidas por el viento sobre los gasómetros de la Refinería de Petróleo ¨Camilo Cienfuegos¨

2.1 Carga transversal distribuida y momento de vuelco provocadas por el viento

Para la obtención de la carga transversal distribuida provocada por el viento, que es la carga que trata de provocar el desplazamiento lateral y el momento de vuelco provocado por el mismo, es necesario resolver algunas incógnitas, como el cálculo de la carga del viento.

- **Presión básica**

Se supondrá, salvo condiciones excepcionales, que el viento actúa horizontalmente y en cualquier dirección.

La presión básica es:

$$q_{10} = \frac{{V_{10}}^2}{1.6x\,10^3} \qquad (kN/m^2) \qquad (1)$$

Donde V_{10} para:

Mayor ráfaga de viento registrada en Cuba (340 km/h = 94.44m/s)

$$q_{10} = \frac{94.44^2}{1.6x10^3} = 5.57\ KN/m^2$$

- **Factores que modifican la presión básica**

Se asume un período de recurrencia de 50 años

Coeficiente de recurrencia **(C_t)** para 50 años es igual a 1

- Factor de región o provincia. Cienfuegos se encuentra en la Zona I cuya presión básica por provincia es:

  q = 1.3 kN/m^2
- Coeficiente de topografía o sitio **(C_s),** se toma para las condiciones límites de riesgo, Sitio expuesto:

C_s = 1.1

- Coeficiente de altura **(C_h)** que depende del tipo de terreno, el cual cumple con las condiciones de terrenos abiertos categoría A, donde para el cual la altura de gradiente (Z_g): altura a la cual la velocidad del viento alcanza su valor máximo es de 300 m y C_h $(Z_g/10)^{0.32}$, a partir de la altura de gradiente los coeficientes de altura se mantienen constantes estos valores son:

Tabla 1 Coeficiente de altura		
No.	Altura (m)	C_h
1	5	0.8
2	10	1
3	15	1.125
4	20	1.25
5	25	1.335
6	30	1.42

- Coeficiente de ráfaga **(C_r)** para tener en cuenta la naturaleza fluctuante de los vientos y su interacción se utiliza la Tabla 1.5:

Tabla 2 Coeficiente de ráfaga		
No.	Altura m	C_r
1	5	1.22
2	10	1.18
3	15	1.16
4	20	1.14
5	25	1.13
6	30	1.12

- El coeficiente de reducción por área expuesta **(C_{ra})** se busca con la ayuda de la Figura 1.3.

Tabla 3 Coeficiente de reducción del área		
No.	**Altura m**	**C_{ra}**
1	5	0.87
2	10	0.83
3	15	0.81
4	20	0.79
5	25	0.775
6	30	0.76

- Coeficiente de forma o aerodinámicos **(C_f)** Tabla 7, caso 4 pág. 11 y Caso 1.b pág. 37 de la NC 285: 2003.

$C_1 = 0.8$, $C_2 = -1.2$, $C_3 = -0.6$

- **Cálculo de la carga unitaria total**

La carga unitaria por unidad de área transversal es:

Carga Unitaria total, $q = q_{10} \cdot C_t \cdot C_s \cdot C_h \cdot C_{ra} \cdot C_f$ (kN/m^2). (2)

Para obtener la función matemática que representa la variación de la presión con la altura se realizó el ajuste de la curva, con el programa Curve Expert para los valores de altura y presiones resultantes ($P = q_1 + q_2$) calculadas con ayuda del Excel. Y se obtuvo el ajuste exponencial mostrado en la Figura 2.1

Tabla 4 Valores de la presión del viento con la altura		
No.	**Presión Resultante (kN/cm^2)**	**Altura**
1	10,40511648	5
2	12,0015676	10
3	12,9530907	15
4	13,7949405	20
5	14,32647307	25
6	14,81145882	30

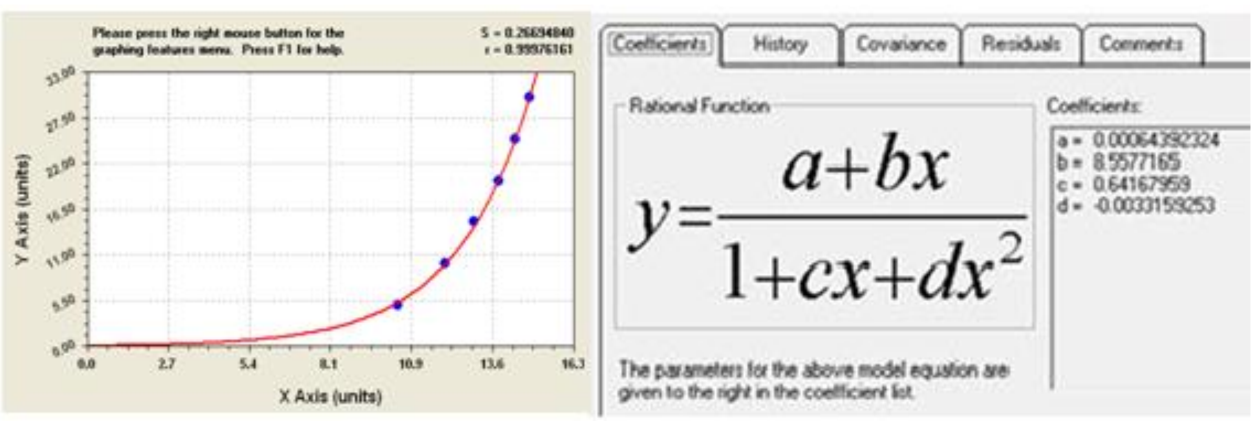


Figura 2 Ajuste en una función racional. Donde a, b, c y d son las constantes de la función

2.2 Cálculo de la carga transversal resultante del viento y del momento de vuelco resultante

Con la ecuación anteriormente determinada, se obtiene integrando dicha expresión, la fuerza total provocada por la presión o Carga Transversal del Viento sobre los gasómetros y el momento resultante de dicha presión.

- **Carga transversal del viento**

$$P_v = \int_0^A P_z \cdot dA = \int P_z \cdot D \cdot dz = D \int_0^H P_z \cdot dz \qquad (3)$$

Se multiplica por D para obtener la carga uniformemente distribuida por unidad de longitud D = 3 m.

$$P_z = \frac{a + bz}{1 + cz + dz^2}$$

$$P_v = D\int_0^{28.45} P_z \cdot dz = 1030.46\ kN$$

- **Momento de vuelco provocado por la presión del viento**

$$M_v = D\int_0^H P_z \cdot z \cdot d_z = D\int_0^{28.45} P_z \cdot z \cdot d_z = 16\,225.91\ kN \cdot m \qquad (4)$$

Con estas cargas se puede realizar el cálculo de las tensiones provocadas por el viento en los cordones de soldadura más peligrosos del mismo.

2.3 Inspección visual de los gasómetros y revisión de la documentación técnica

La inspección visual fue realizada desde el interior y exterior de los recipientes. Se pudo comprobar que existe linealidad entre los cordones soldados (no hay desplazamiento de bordes), y que el estado del material se encuentra en buenas condiciones. Debemos señalar que la documentación técnica que existe, la cual fue facilitada por los técnicos de la Refinería es escasa, y no aporta elementos sobre las características constructivas de las uniones soldadas.

2.4 Inspección ultrasónica y caracterización de los defectos detectados en la pared del cuerpo

Se realizó la inspección ultrasónica de la pared del cuerpo cilíndrico y de los fondos abombados. En la pared se detectaron defectos que son minilaminaciones o exfoliaciones, propias de recipientes que se conforman por laminación, las cuales por su ubicación interior y orientación paralela a la superficie lateral de la pared del cuerpo del recipiente, según (A. P. Guliaev 1983) no influyen en las propiedades mecánicas longitudinales del material. Los mismos están concentrados en una franja de 30 mm de espesor, 15 mm a cada lado de la línea media de la pared, la longitud de los mismos no exceden los 10 mm y la separación entre ellos varía entre 5 y 80 mm. Esta situación no se observa en el material de los fondos, lo cual permite concluir que estas minilaminaciones tuvieron su origen en el proceso de rolado del cuerpo.

2.5 Composición química y propiedades mecánicas del material de los recipientes

Se determinó la composición química del material, el mismo se corresponde con el acero 16 ΓC, según la norma GOST 5520-72 (Maslenkov & Maslenkova 1991).
Se realizaron ensayos de tracción e impacto para varias probetas extraídas de la pared del Recipiente No. 2. Los valores medios obtenidos fueron:

$$\sigma_f = 29.6\ kgf/mm^2 = 29,6\ kN/cm^2, \quad \sigma_r = 47.4\ kgf/mm^2 = 47,4\ kN/cm^2,$$

$$a_k = 12,5\ kgf{\cdot}m/cm^2, \ \ CVN = 98\ J,\ E = 2 \times 10^4\ kN/cm^2,\ \mu = 0,3$$

Donde: σ_f – Tensión en el límite de fluencia del acero.

σ_r – Tensión en el límite de resistencia del acero.

a_k – Resiliencia o resistencia al impacto Charpy del acero.

CVN – Energía del ensayo de impacto con probeta entallada en V.

E- Módulo de Elasticidad del material.

μ- Coeficiente de Poisson.

2.6 Evaluación de la resistencia del cordón de soldadura de filete de unión del gasómetro con el tubo de apoyo de los mismos

Los gasógenos están apoyados en un tubo de 3 m de diámetro interior y 1,6 cm de espesor en la pared y soldados al mismo con un cordón de soldadura de filete de cateto c = S = 1,6 cm tal como se muestra en la Figura 2.2.

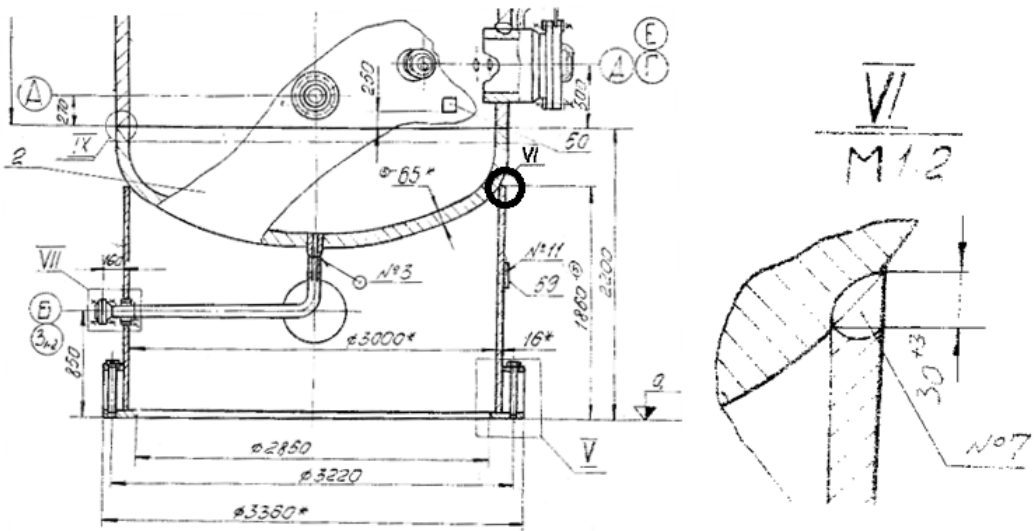


Figura 3 Tubo de apoyo de los gasómetros

Dichos cordones de soldadura constituyen tal vez los elementos de mayor riesgo de falla en caso de huracanes. En el cordón surge una tensión tangencial provocada por el Momento de vuelco M_v cuya magnitud se pude hallar partiendo de la Ecuación de Navier de la siguiente manera:

$$\tau_{Mv} máx = \frac{M_v \cdot ymáx}{Ix} = \frac{M_v}{Wx} \qquad (5)$$

El desarrollo de esta ecuación específicamente para una costura anular de filete, aparece desarrollada en el libro (Feodosiev 1985) de la forma siguiente:

$$\tau_{Mv\ máx} = \frac{5{,}66 \cdot M_v}{\pi \cdot c \cdot D^2} \qquad (6)$$

Para el cálculo del Momento del vuelco los datos son:

H=28.45 m

h´= 1.86 m

$$P_z = \frac{a+bz}{1+cz+dz^2}$$

D= 3 m

$$M_{f_{cordón}} = D \cdot \int_{h'}^{H} P_z \cdot z \cdot d_z = D \cdot \int_{1.86}^{28.45} P_z \cdot z \cdot d_z = 16\,196.24 \ kN \cdot m = 1\,619\,624 \, kN \cdot cm \qquad (7)$$

Sustituyendo los datos:

M_v = 1 619 624kN·cm

c = 1.6cm

D = 300cm

Se obtiene:

$$\tau_{Mv\ \max} = \frac{5{,}66 \cdot 1\,619624}{\pi \cdot 1.6 \cdot 300^2} \approx 20.26 \ kN/cm^2 \qquad (8)$$

Cortante directo provocado por la carga del viento Pv.

$$P_v = D\int_{1.86}^{28.45} P_z \cdot dz = 1004.95 \ kN \qquad (9)$$

Datos:

P_v= 1004.95 kN

$$l = \frac{\pi \cdot D}{4} = 235.619 \ cm$$

D= 300 cm

S=c=1.6 cm

El cordón se considerará dividido para esta carga en cuatro cuadrantes tal como se muestra en la Figura 2.3. Para los cuadrantes 1 y 3 esta carga es una carga transversal y para los cuadrantes 2 y 4 constituye una carga longitudinal a los cordones. Existen diferencias en las ecuaciones para el cálculo de las tensiones en las costuras de filete longitudinales y transversales(Hernández 2006), de aquí que sea necesario realizar esta consideración.

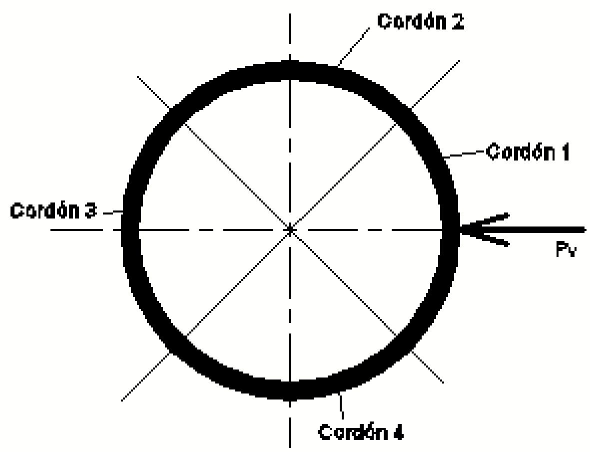


Figura 3 División de la costura de filete en cuatro cordones, dos longitudinales a la carga (Cordones 2 y 4) y dos transversales a la carga (Cordones 1 y 3)

Para los cordones 1 y 3, cordones transversales:

$$\tau_{máx_{transversal}} = \frac{\frac{P_V}{4}}{1.414 \cdot c \cdot l_T} \cdot \sqrt{\left(6 \cdot \frac{(S+c)^2}{c}\right) + 2 \cdot \left[\frac{(S+c)}{c}\right] + 0.67} = 3.093\ kN/cm^2 \quad (10)$$

Para los cordones 2 y 4, cordones longitudinales

$$\tau_{máx_{longitudinal}} = \frac{\frac{P_V}{4}}{1.414 \cdot c \cdot l_L} \cdot \left[0.25 + \frac{1.5 \cdot (S+c)}{c}\right] = 1.32\ kN/cm^2 \quad (11)$$

Los cordones transversales son los más cargados.

Con relación al peso propio del gasómetro se considerará que el peso propio descansa sobre el tubo y no sobre los cordones, o sea, que para evaluar la resistencia de este cordón se superpondrán solamente los efectos provocados por el viento. (P_V y M_V)

En la Figura 2.4 se muestran las direcciones de las tensiones tangenciales resistivas en la sección de los dos cordones transversales 1 y 3 que son los más peligrosos. Como se aprecia en la Figura en el cordón 3 se suman todas las tensiones. De manera que la condición de resistencia del cordón será:

$$\tau_{res} = \tau_{Mv\,\max} + \tau_{máx_{transversal}} = 20.26 + 3.09 = 23.35 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] \quad (12)$$

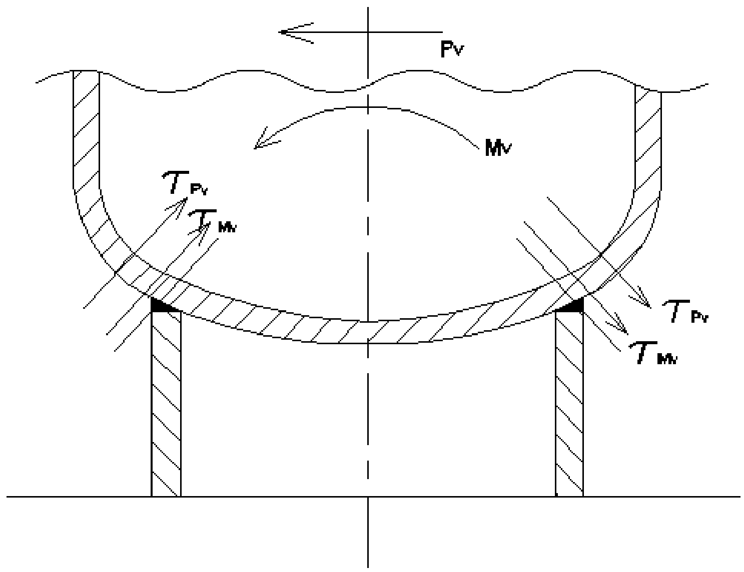


Figura 4 Superposición de las tensiones tangenciales en la sección de la garganta, provocadas por la Carga del Viento P_V y por el Momento de vuelco M_V

Considerando una eficiencia de los cordones de filete, la más baja posible, o sea, para soldadura manual por arco eléctrico con electrodo de baja calidad φ = 0,5, la tensión admisible de los cordones, tomando un factor de seguridad mínimo n = 1,3, con relación al límite de fluencia será:

$[\tau] = \varphi \cdot \sigma_f / n = 0,5 \cdot 29,6 / 1,3 = 11,38$ kN/cm^2

Con relación a la resistencia máxima del cordón:

$[\tau] = \varphi \cdot \sigma_r / n = 0,5 \cdot 47,4 / 1,3 = 18,2$ kN/cm^2

Como se puede apreciar, en caso de un huracán de la intensidad evaluado esos cordones no tendrán ni siquiera el factor de seguridad mínimo asumido así por ejemplo despejando de las ecuaciones anteriores los factores de seguridad, se tiene que:

Con relación a la fluencia:

$n = \varphi \cdot \sigma_f / \tau_{res} = 0{,}5 \cdot 29{,}6 / 23{,}35 = 0{,}63$

Con relación a la resistencia máxima:

$n = \varphi \cdot \sigma_r / \tau_{res} = 0{,}5 \cdot 47{,}4 / 23{,}35 = 1{,}01$

Como se aprecia el cordón alcanzará la fluencia sin llegar a la rotura. La posibilidad real de fractura lo determinará el carácter cíclico de las tensiones, en presencia de un huracán de gran intensidad, provocado por los momentos de ráfagas y calma, lo que se puede evaluar aplicando la Mecánica de la Fractura, lo cual se abordará en el Capítulo siguiente.

2.7 Evaluación del incremento de las tensiones meridionales en la pared del recipiente por el efecto de borde

Las tensiones normales y tangenciales se incrementan sensiblemente en aquellos tramos del recipiente donde aparecen momentos flectores y fuerzas de cortante originadas por el conocido efecto de borde, o sea, en la transición del cuerpo cilíndrico con los fondos abombados. Este fenómeno aparece detalladamente descrito en la literatura (Feodosiev 1985);(Solecki & Conant 2002) y conduce a la aparición de tensiones normales en las secciones transversales del recipiente (planos meridionales) y a tensiones tangenciales longitudinales, que toman su valor máximo en el plano de la línea media de la pared y que en presencia de cargas cíclicas (proceso de llenado - vaciado) estas tensiones pueden conducir al crecimiento subcrítico de los defectos en los cordones y en la pared hasta que éstos alcancen su tamaño crítico y en presencia de sobrecargas por la acción del viento pudieran provocar la fractura estática del material de los cordones de soldadura que son los elementos más débiles de los gasómetros.

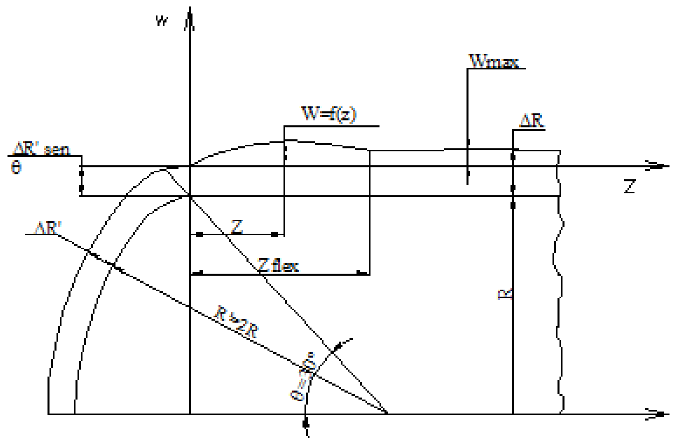


Figura 5 Deformación provocada en la pared y en el fondo del recipiente por el efecto de borde bajo la acción de la presión interior

En la Figura 2.4 se muestran los incrementos de los radios en las zonas cilíndricas y esférica respectivamente que se originan por la acción de la presión en un recipiente cilíndrico de radio R y fondo compuesto por un casquete esférico de radio R' = 2R y una transición tórica. Como se puede apreciar, al ser el fondo en el plano circunferencial más rígido, el incremento del radio en la zona del cuerpo cilíndrico es mayor que en la zona del fondo esférico. Esta diferencia origina flexión en toda una zona de longitud Z_{flex} que no solo incrementa las tensiones normales en el plano meridional del recipiente, sino que provoca la aparición de tensiones tangenciales en los planos longitudinales. La diferencia de radios después de la deformación será igual a la flecha máxima de la pared (Feodosiev 1985).

$$W_{max} = \mu \cdot \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot h} \qquad (13)$$

Donde:

w_{max} – flecha máxima por flexión de la pared.

R – radio medio de la pared del gasómetro.

P – presión interior.

H – espesor de la pared.

E – módulo de elasticidad del material del recipiente.

μ - coeficiente de Poisson del material del recipiente.

z- longitud a lo largo del recipiente.

Se puede demostrar que la ecuación de la flecha W = f(z) queda descrita por la ecuación:

$$W = \mu \cdot \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot h} \cdot \left[1 - e^{-k \cdot z} \cdot \left(sen(k \cdot z) + \cos(k \cdot z)\right)\right] \qquad (14)$$

Donde:

$$k = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}{R^2 \cdot h^2}} \qquad (15)$$

Derivando la ecuación de la flecha se obtiene la ecuación de las pendientes:

$$W' = \frac{dW}{dZ} = k \cdot \mu \frac{p \cdot R^2}{E \cdot h} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot sen\left(k \cdot Z\right) \qquad (16)$$

En (Den Hartog 1992) se demuestra que el momento flector, en la zona de efecto de borde, se puede hallar por la expresión:

$$M_f = D \cdot \frac{d^2 W}{dZ^2} \qquad (17)$$

Donde:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)} \qquad (18)$$

Hallando la segunda derivada de W y sustituyendo en (2.6) se obtiene que:

$$M_f = \frac{\mu \cdot p \cdot R \cdot h}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot \left(\cos(k \cdot Z) - sen(k \cdot Z)\right) \qquad (19)$$

El momento flector máximo se halla de la condición $\frac{dM_f}{dZ} = 0$, de la cual se obtiene que éste se produce para Z = 0 y tiene un valor:

$$M_{f\,\max} = \frac{\mu \cdot p \cdot R \cdot h}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}} \qquad (20)$$

La fuerza de cortante en la zona de efecto de borde se halla por la ecuación:

$$Q_y = D \cdot \frac{d^3 W}{dZ^3} \qquad (21)$$

De donde, derivando de nuevo W y sustituyendo se obtiene que:

$$Q_y = -\frac{\mu \cdot p}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot h^2}{3 \cdot (1-\mu^2)}} \cdot e^{-k \cdot Z} \cdot \cos(k \cdot Z) \quad (22)$$

La fuerza de cortante máxima se halla de la condición $\frac{dQ_y}{dZ} = 0$. El máximo se produce también para Z = 0 y vale:

$$Q_{y\,máx} = \frac{\mu \cdot p}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{R^2 \cdot h^2}{3 \cdot (1-\mu^2)}} \quad (23)$$

En las Figs. 2, 3, 4 y 5, se muestra el comportamiento de la flecha, la pendiente, el momento flector y la fuerza de cortante calculados para los datos de los gasómetros. O sea p = 55 atm. = 0,558 kN/cm^2, R = 147 cm, h = 6 cm, material acero 16 MnSi para el cual, según (A. Guliaev 1983), E = 2.1·10^4 kN/cm^2 y μ = 0.3.

La zona en la cual se extiende el efecto de borde acotado como Z_{flex}, se puede precisar hallando el valor de Z donde la flecha es un valor tan pequeño como el 1% de la máxima O sea, de la ecuación (2,6).

$$e^{-k \cdot Z} \cdot \left(sen(k \cdot z) + \cos(k \cdot Z)\right) \leq 0.01 \quad (24)$$

El término entre paréntesis no puede ser mayor que $\sqrt{2}$, de donde tiene que cumplirse que: $e^{-k \cdot Z} \leq \frac{0.01}{\sqrt{2}}$ y $k \cdot Z = 4.95$

Despejando Z, se obtiene que:

$$Z_{flex} \leq \frac{4.95}{\sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1-\mu^2)}{R^2 \cdot h^2}}} \quad (25)$$

Evaluando para los datos del gasómetro se obtiene que: $Z_{flex} \leq 114.5\,cm$

La tensión normal máxima que surge en la sección de transición del cuerpo con el fondo se halla por la ecuación de Navier, de donde:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f\,max} \cdot y_{max}}{I_x} = \frac{M_{f\,max}}{W_x} = \frac{M_{f\,max}}{0,1 \cdot D^3 \cdot (1-c^4)} \quad (26)$$

La tensión tangencial máxima que surge en la línea media de la pared del gasómetro, originada por la presencia de la fuerza de cortante $Q_{y\ máx}$, se halla por la ecuación de Zhuravski. Así, la τ_{max} por unidad de perímetro será:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{y\ max} \cdot S_{x\ max}}{I_x} \qquad (27)$$

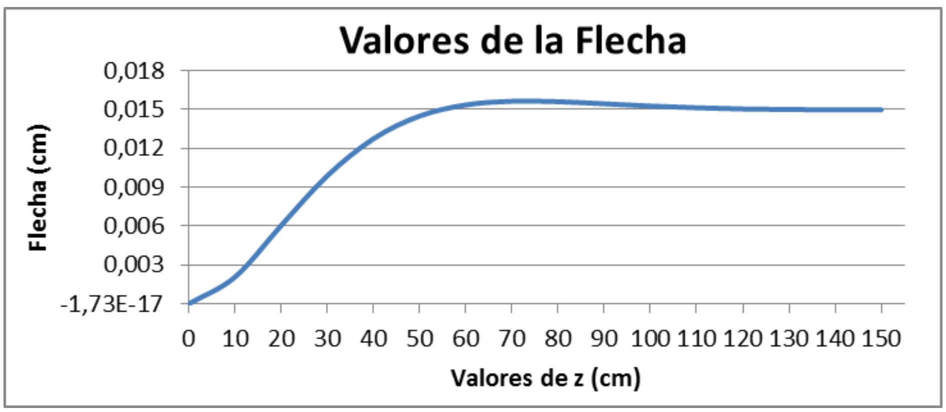
Para una franja de espesor unitario en la pared:

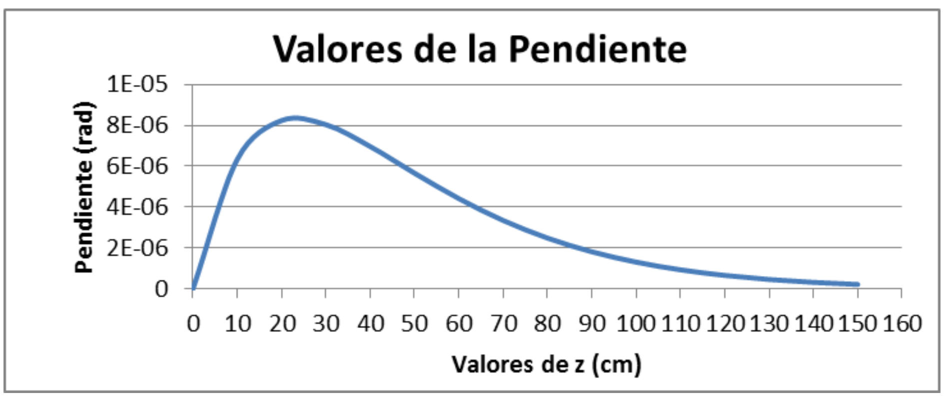
$$S_{x\ max} = \frac{h^2}{8} \qquad e \qquad I_x = \frac{h^3}{12}$$

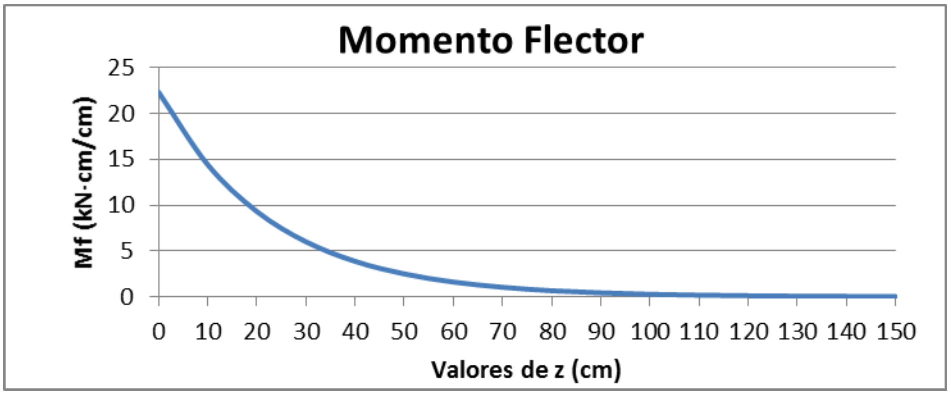
Se obtiene que:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{y\ max}}{h} \qquad (28)$$

Evaluando para los datos de los recipientes se obtiene:







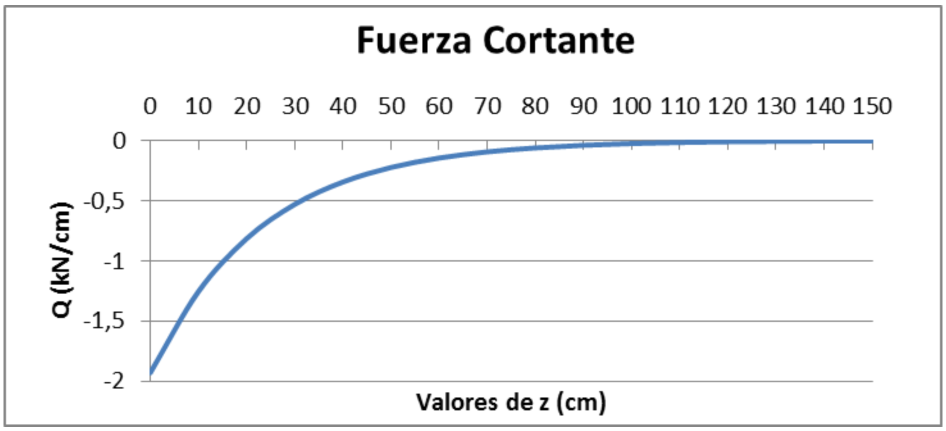


Figura 6 Valores de la flecha, pendiente momento flector y fuerza de cortante provocadas en el recipiente por el efecto de borde

2.8 Evaluación de la resistencia del cordón de soldadura a tope de unión del cuerpo del gasómetro con el fondo de los mismos

Este cordón es a tope, lo que permite pronosticar que será mucho más resistente, pero en el mismo hay varios factores involucrados: la presión interior, el efecto de borde y la acción del viento. Como efecto favorable está la tensión de compresión originada por el peso propio. Se evaluará a continuación la superposición de estos efectos.

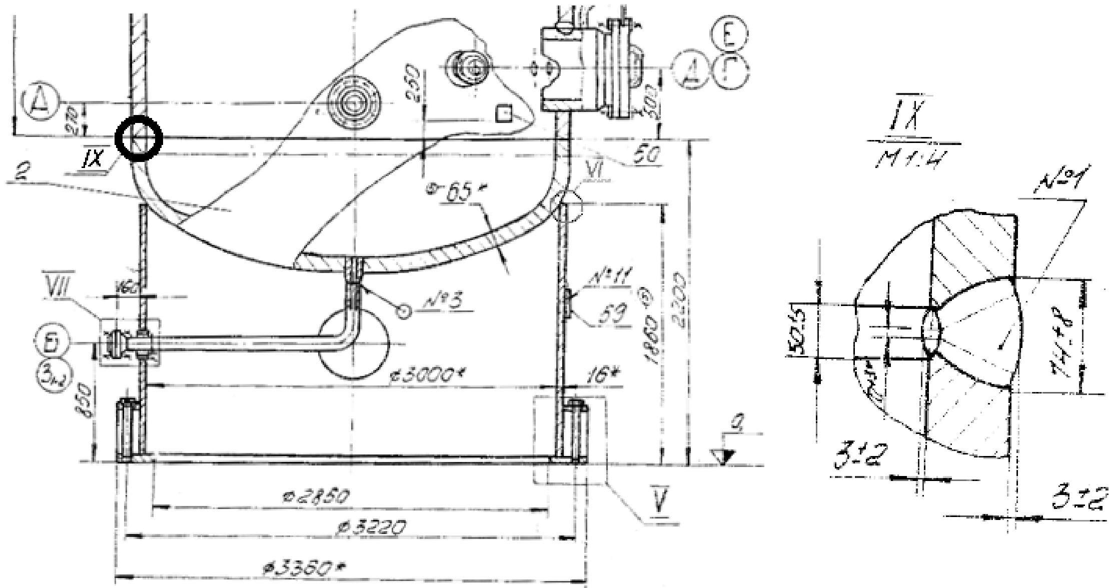


Figura 7 Costura soldada de unión entre el cuerpo y el fondo

En la Figura 2.8 se muestran las tensiones provocadas por estas cargas y los cuatro puntos de la sección transversal del cordón más peligrosos:

1. El punto A donde ocurre la tensión normal máxima de tracción provocada por el Momento de Vuelco en dicha sección, sumado con el Momento Flector del Efecto de Borde y a la cual se le resta la tensión de compresión provocada por el peso propio.
2. El punto B donde ocurre la tensión normal máxima de compresión provocada por las tres tensiones de compresión mencionadas en el caso anterior.
3. El punto C donde ocurre la Tensión Tangencial Máxima provocada por la Carga transversal del Viento P_V.

4. El punto D donde se superponen, utilizando la Tercera Hipótesis de Resistencia, las Tensiones normales y de cortante provocadas por todos los efectos, siendo este punto el conocido como de transición del ala con el alma para esta sección.

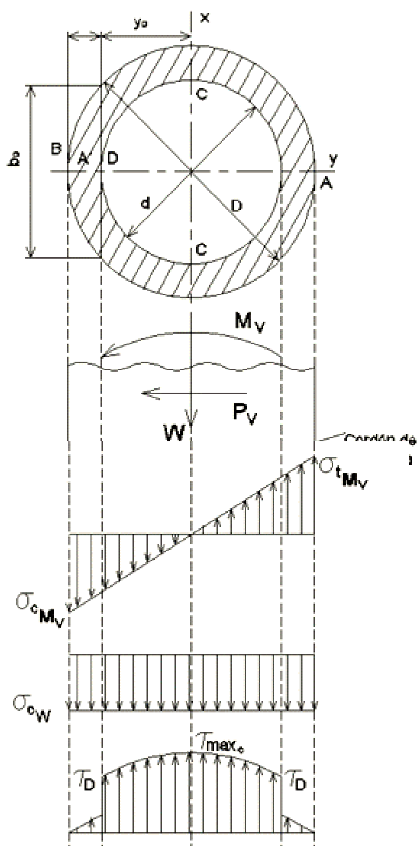


Figura 8 Tensiones provocadas por los distintos efectos en la soldadura a tope entre el cuerpo y el fondo

La magnitud de la carga del viento y el momento de vuelco cambian pues la sección está a más altura del piso.

$$P_v = D \cdot \int_{h'}^{H} P_z \cdot dz = D \cdot \int_{2.2}^{28.45} P_z \cdot dz = 997.21\ kN$$

$$M_v = D \cdot \int_{h'}^{H} P_z \cdot z \cdot d_z = D \cdot \int_{2.2}^{28.45} P_z \cdot z \cdot d_z = 16\,180.52\ kN \cdot m$$

Cálculo de las tensiones en el punto A

La tensión en esa misma sección provocada por el Efecto de Borde se calcula por la expresión:

$$\sigma_{EB\max} = 1{,}82 \cdot \frac{p \cdot R}{h}$$

Donde:

p es la presión del Hidrógeno dentro del recipiente: p = 0,558 kN/cm^2, R = 147 cm es el radio medio del cuerpo y h = 6 cm, espesor de la `pared. La tensión normal provocada por el momento flector del efecto de borde es:

$$\sigma_{EB\max} = 1{,}82 \cdot \frac{p \cdot R}{h} = 1{,}82 \cdot \frac{0{,}558 \cdot 147}{6} = 24{,}88\ kN/cm^2$$

La tensión meridional provocada por la presión interior es:

$$\sigma_{M\max} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h} = \frac{0{,}558 \cdot 147}{2 \cdot 6} = 6{,}84\ kN/cm^2$$

La tensión de flexión provocada por el Momento de Vuelco es:

$$\sigma_{máxMV} = \frac{M_R}{W} = \frac{1\,618052}{435\,990{,}75} = 3.71\ kN/cm^2$$

$$W = 0.1 \cdot D^3 \cdot (1 - c^4) = 435\,990.75\ \ cm^3$$

Donde:

D = 312 cm

d =300 cm

C=d/D=0.962

La tensión de compresión provocada en el cordón por el peso propio del recipiente será:

$$\sigma_W = \frac{W}{A} = \frac{W}{\pi \cdot D^2 \cdot (1 - c^2)/4} = \frac{1\,291}{\pi \cdot 312^2 \cdot (1 - 0{,}962^2)/4} = 0{,}227\ kN/cm^2$$

La condición de resistencia superponiendo los efectos de la presión interior, el efecto de borde, a tensión provocada por la acción del viento y el peso propio es:

$\sigma_{res} = \sigma_{Mmáx} + \sigma_{EBmáx} + \sigma_{máxMV} - \sigma_W = 6{,}84 + 24{,}88 + 3{,}71 - 0{,}227 = 35.203$ kN/cm^2> [0,9·29,6/1.3] > 20,5 kN/cm^2

Tomando un factor de seguridad mínimo de n = 1,3, el cordón no resiste con relación a la fluencia. Es significativo el hecho de que la mayor influencia la ejerce el Efecto de Borde. Es incluso posible que ese cordón haya sufrido ya la fluencia por la acción del Efecto de Borde, ya que si comprobamos la resistencia con relación al Límite de Resistencia del material se obtiene que:

$\sigma_{resA} = \sigma_{M\max} + \sigma_{EB\max} + \sigma_{máxMV} - \sigma_W = 6{,}84 + 24{,}88 + 3{,}71 - 0{,}227 = 35{,}203$ kN/cm^2> [0,9·47,4/1.3] >32,814 kN/cm^2

O sea, con relación a la Resistencia Máxima del material base, considerando una eficiencia de la costura a tracción del 90 % (φ = 0,9) el cordón tiene un factor de seguridad inferior al mínimo recomendado n = 1,3.

Si se despeja el factor de seguridad con relación a la Resistencia Máxima se obtiene que:

$$n = \frac{0{,}9 \cdot 47{,}4}{35{,}573} = 1{,}21$$

Todavía queda cierta reserva de resistencia con relación a la rotura. La Mecánica de la Fractura es la única que podrá confirmar la resistencia o no. Esta evaluación se realizará en el siguiente Capítulo.

Cálculo de la tensión tangencial máxima en el punto C

$$\tau_{\max C} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P_v}{A} = 0.23\, kN/cm^2 \leq [\tau]$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(1 - c^2\right) = 5\,700.09\, cm^2$$

La tensión tangencial admisible al cizallamiento del cordón es:

$[\tau] = \varphi \cdot \sigma_f /n = 0{,}5 \cdot 29{,}6 /1{,}3 = 11{,}38$ kN/cm^2

El cordón de soldadura resiste en este punto sin dificultades.

Cálculo de la tensión equivalente en el punto D

El punto D es un punto crítico por la razón de que existe en ese punto la tensión máxima de compresión y una tensión tangencial que no es la máxima pero que es elevada.

Cálculo de la tensión normal en el punto D

$$\sigma'_D = (\sigma_{máxMV} + \sigma_{EBmáx} + \sigma_{Mmáx}) \cdot \frac{d}{D} = 34.07\ kN/cm^2$$

$$\sigma_W = \frac{W}{A} = \frac{W}{\pi \cdot D^2 \cdot (1-c^2)/4} = \frac{1\,291}{\pi \cdot 312^2 \cdot (1-0{,}962^2)/4} = 0{,}227\ kN/cm^2$$

$$\sigma_D = \sigma'_D + \sigma_W = 34.29\ kN/cm^2$$

Cálculo de la tensión tangencial según la ecuación de Zhuravski.

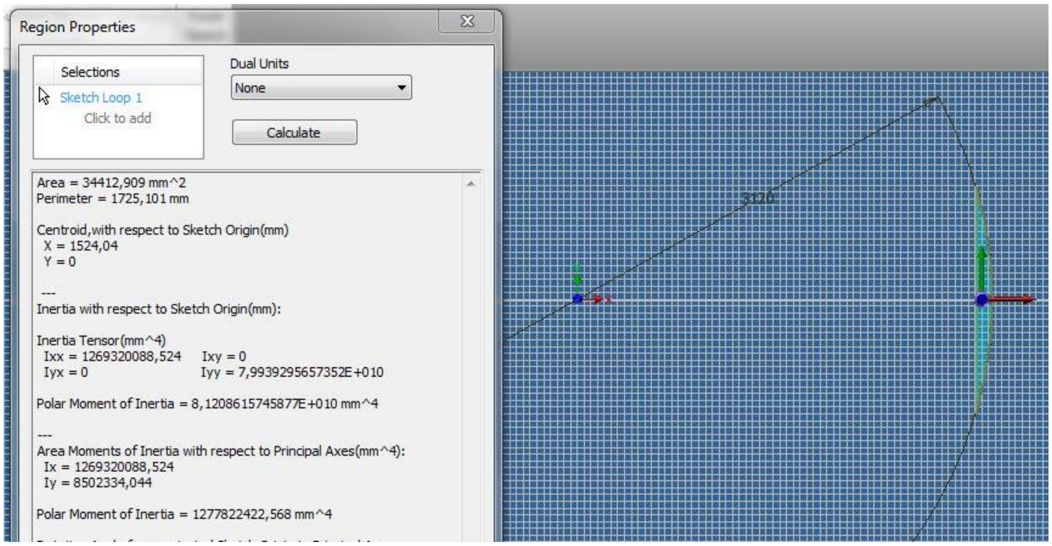
$$\tau_{DPV} = \frac{P_V \cdot S_X}{b \cdot I_X}$$

$$I_X = 0.05 \cdot D^4 \left(1-c^4\right) = 68\ 014\ 556.75\ cm^4$$

$$b = 2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 85.69\ cm$$

Estos cálculos se realizaron con la ayuda del programa Autodesk Inventor, se calculó el área y el centroide cuyos valores son, A=344.129cm2 y

$$\bar{y} = 152.404\ cm$$



$$S_X = A \cdot y = 52\,446.64\ cm^2$$

$$\tau_{DPV} = \frac{P_V \cdot S_X}{b \cdot I_X} = 0.009\ kN/cm^2$$

$$\tau_{\max EB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{y\max}}{h} = 1.93\ kN/cm^2$$

$$\tau_{res} = \tau_{máx\,EB} + \tau_{D\,PV} = 1.939\ kN/cm^2$$

La tensión equivalente en el punto D se calcula por la Tercera Hipótesis de Resistencia que ofrece cierta reserva de resistencia. La tensión admisible de la soldadura en ese punto se tomará igual a la del punto A.

[σ] = [0,9·29,6/1.3] = 20,5 kN/cm^2

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_D^2 + 4\tau_D^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{eq} = 34{,}29\ kN/cm^2 \geq [\sigma] = 20{,}5\ kN/cm^2$$

$$n = \frac{0{,}9 \cdot 29{,}6}{\sigma_{eq}} = 0{,}78$$

Como se aprecia en ese punto no queda reserva de resistencia estática con relación a la rotura.Este cordón sólo pudiera resistir si el huracán fuera de una categoría inferior. No obstante la Mecánica de la Fractura es la única que podrá confirmar si la fractura se produce o no en un plazo inferior al período en que esté azotando el huracán. Esta evaluación se realizará en el siguiente Capítulo.

Si comprobamos la resistencia con relación al Límite de Resistencia del material se obtiene que:

[σ]=[0,9·47,4/1.3] >32,814 kN/cm^2

$$\sigma_{eq} = 34{,}29\ kN/cm^2 > [\sigma] = 32{,}814\ kN/cm^2$$

O sea, con relación a la Resistencia Máxima del material base, considerando una eficiencia de la costura a tracción del 90 % (φ = 0,9) el cordón tiene un factor de seguridad inferior al mínimo recomendado n = 1,3.

Si se despeja el factor de seguridad con relación a la Resistencia Máxima se obtiene que:

$$n = \frac{0{,}9 \cdot 47{,}4}{\sigma_{eq}} = 1{,}24$$

Todavía queda cierta reserva de resistencia con relación a la rotura. La Mecánica de la Fractura es la única que podrá confirmar la resistencia o no.

3. Conclusiones

1. Se determinaron partiendo de las Normativas existentes para valorar las cargas provocadas por el viento en caso de un huracán de gran intensidad, la Carga Transversal y el Momento de Vuelco que origina esta carga.
2. Se valoró la resistencia de la costura soldada de filete que conecta el tubo de apoyo del gasómetro con el cuerpo del mismo. Este cordón evidentemente es funcional para soportar el peso propio del gasómetro pues este se apoya realmente en el tubo y el cordón no ejerce prácticamente ninguna función. Sin embargo en caso de huracanes se producen tensiones tangenciales no previstas en el diseño original por la acción del momento de vuelco que provocan que el cordón no tenga la resistencia adecuada.
3. Se valoró la resistencia de la costura soldada a tope que conecta el fondo del gasómetro con el cuerpo del mismo. Este cordón está sometido a una superposición de diferentes efectos como son: presión interior, efecto de borde, acción del viento y peso propio del gasómetro. Es significativo que debido al gran espesor del recipiente la tensión debida al efecto de borde es la mayor pues la

gran rigidez del fondo restringe las deformaciones del cuerpo y crea una gran tensión en el mismo. En caso de huracanes las tensiones provocadas por la acción del momento de vuelco provocan tensiones normales en el cordón no tan grandes como la del efecto de borde, pero en definitiva la superposición de todos los efectos hacen que el cordón esté en el límite de su resistencia. La Mecánica de la Fractura confirmará si el cordón resiste un huracán o no.

4. En el punto D donde se produce igualmente la superposición de todos los efectos, con el agravante que la tensión de compresión debido al peso se suma en lugar de restarse y además existe una tensión tangencial en ese punto la tensión equivalente es la más grande y por lo tanto el recipiente es mas crítico si apareciera un defecto interior en esa zona.Como se aprecia en los cálculosrealizados ese punto no queda reserva de resistencia estática con relación a la rotura. Este cordón sólo pudiera resistir si el huracán fuera de una categoría inferior. No obstante la Mecánica de la Fractura es la única que podrá confirmar si la fractura se produce o no en un plazo inferior al período en que esté azotando el huracán.