

**Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”
Facultad de Ingeniería.**



Cálculo de las tensiones y del coeficiente de concentración de tensiones en el pie del diente para engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil asimétrico.

Tesis en opción al título de Ingeniero Mecánico.

Por

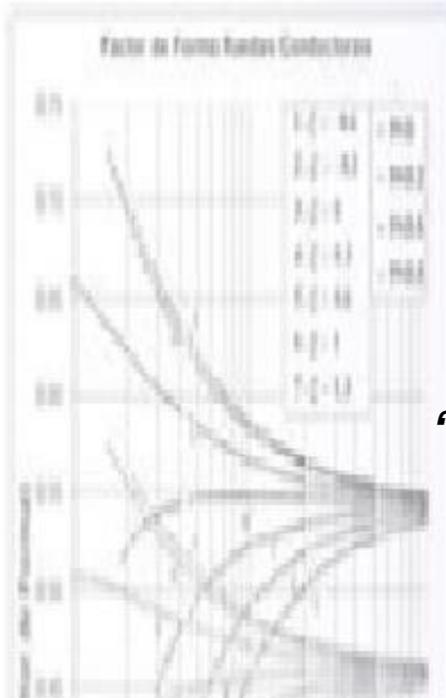
Autor: Majd Shaher Mahmoud Hammouda

Tutor: Dr. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa

Ing. William Beltrán Rodríguez

Junio 2015

“Año 57 de la Revolución”



**DECLARACIÓN DE AUTORIDAD
UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS**



Sistema de Documentación y Proyecto.

Hago constar que el presente trabajo constituye la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Cienfuegos, autorizando a que el mismo sea utilizado por el Centro de Estudio Superior para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de dicha institución.

Firma del autor.

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico Técnico
Nombre y Apellidos. Firma.

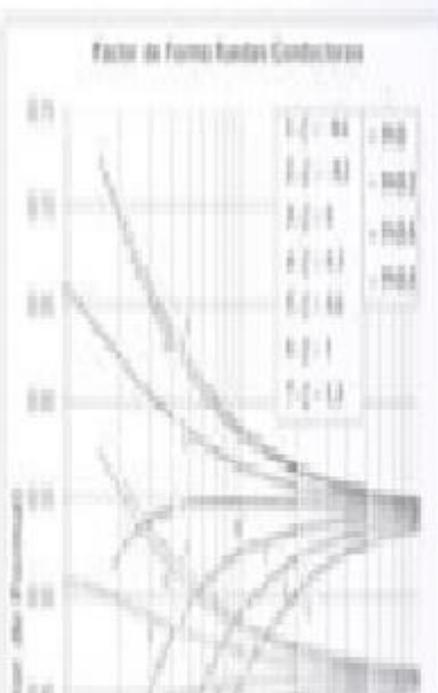
Vice Decano.
Nombre y Apellidos. Firma.

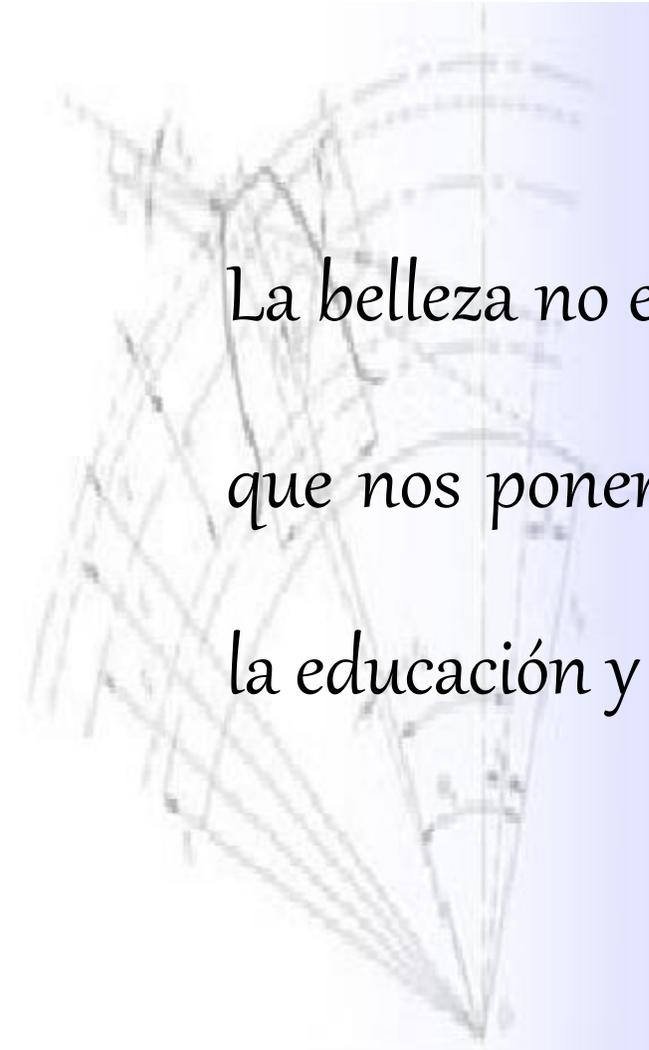
Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyecto.
Nombre y Apellido. Firma.



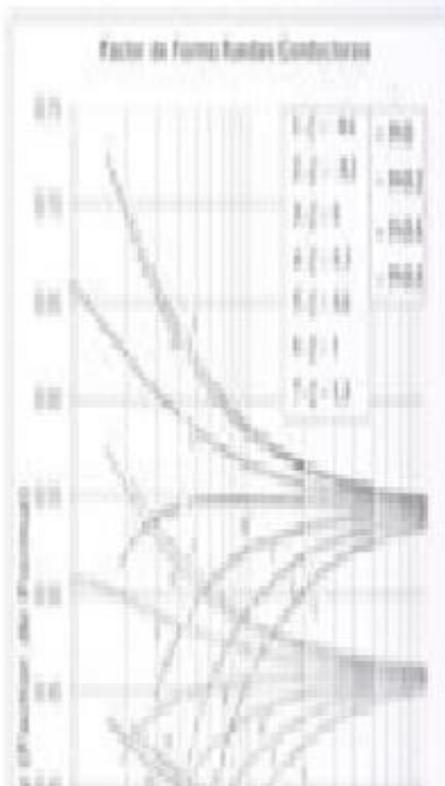
PENSAMIENTO





La belleza no es por las ropas o las joyas
que nos ponemos, sino es la belleza de
la educación y la ciencia q tenemos.

El poeta Ahmad shawki



AGRADECIMIENTO



AGRADECIMIENTOS

Antes que todo, gracias a Dios el todo poderoso, por estar donde estamos y por llegar a donde llegamos.

En segundo lugar le doy las gracias a mi familia, particularmente a mis padres, que hasta hoy en día se están sacrificando para desarrollarme y formarme a nivel personal y profesional para poder enfrentar la vida.

Al gobierno y el pueblo cubano que nos abrió el camino del saber y del conocimiento, desde el Medio Oriente, y desde todas las naciones del planeta hasta la isla de Cuba.

A la Universidad de Cienfuegos, sus dirigentes, sus profesores y sus trabajadores, con un especial agradecimiento a mi tutor Dr.C. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa

A mis hermanos y amigos árabes, que durante los seis años de diáspora hemos estado unidos y juntos hemos compartido este largo camino, hemos compartido alegrías y tristezas, gracias por sus continuo y gran apoyo.

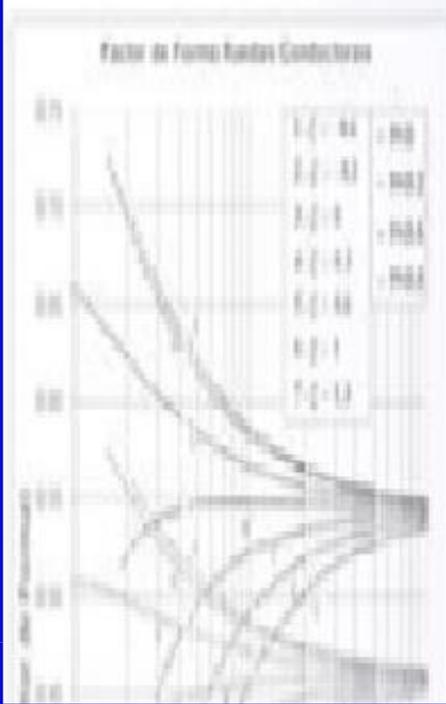
A todos los amigos y sus familiares que han mostrado preocupación y han brindado ayuda a lo largo de todo este tiempo.

Finalmente a toda persona que de una forma o de otra ha contribuido en la realización de esta tesis.

A todas estas personas, doy mi más profunda gratitud.

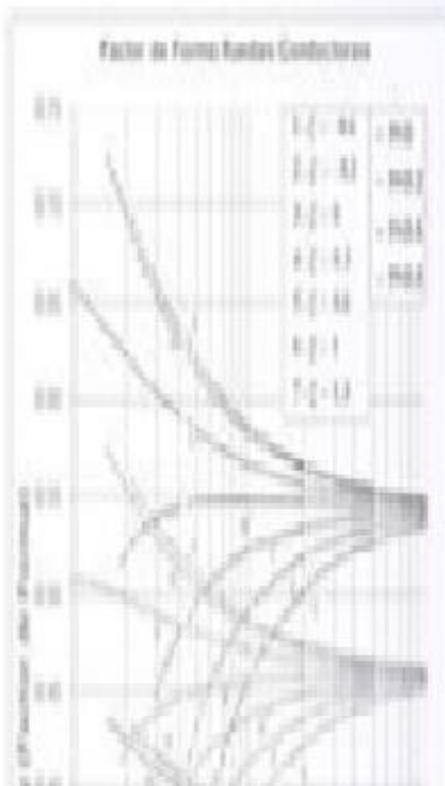


DEDICATORIA

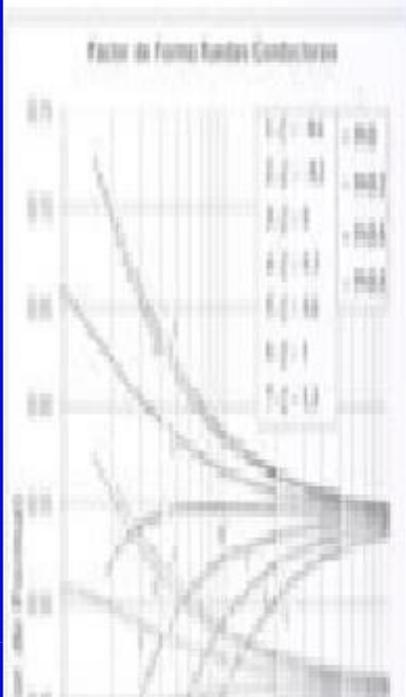




A mi familia, especialmente a mis padres, mis hermanos y mi tío Dr. Radi hammuoda y su familia le dedico esta humilde tesis, que sería el principio de toda una vida de agradecimiento por sus sacrificios y su confianza hacia mí.



RESUMEN



Resumen

En el presente trabajo se continua el perfeccionamiento de la Metodología creada por el Colectivo de Mecánica Aplicada para el Cálculo de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil asimétrico, que en el año 2014, recibió el reconocimiento correspondiente al Resultado Científico de Mayor Transcendencia y Originalidad de la Universidad de Cienfuegos. En esta ocasión se valora el cálculo de las tensiones en el pie para un coeficiente de asimetría $c = 1,5$, incorporando elementos novedosos como son: el coeficiente de fricción, el coeficiente de corrección la componente directa de compresión sobre el diente que en las ruedas con dientes asimétricos no se puede despreciar como se hace en la mayoría de las Normas y procedimientos de cálculo de las ruedas con dientes simétricos.

Las tensiones en el pie se calcularon por el Modelo Matemático creado y por el Método de los Elementos Finitos, se compararon los resultados obtenidos y se estimó, sobre la base de esa comparación el Coeficiente de Concentración de Tensiones en el pie. Los resultados se compararon con los obtenidos para los simétricos por Dobrovolski y por Aisman Quiñones, obteniéndose importantes conclusiones para la continuidad de la investigación.

Introducción	1
Problema Científico:	5
Hipótesis:	5
objetivo general:	5
objetivo Específicos:	5
Métodos de Investigación Empleados:	6
Capítulo I. Evolución del estado del arte acerca de los parámetros geométricos que influyen de la resistencia a la fractura de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfiles simétrico y asimétrico.	8
1.1 Breve historia del desarrollo de los engranajes.	8
1.2 La falla por fractura de los dientes de los engranajes.	9
1.3 Tensiones de flexión en la base del diente, formas de reducir las tensiones y de evaluar la capacidad de carga.	9
1.4 Modelos empleados para el cálculo del factor geométrico de forma y_f y las tensiones en el pie.	11
1.5 Engranajes asimétricos	14
1.6 Conclusiones del Capítulo I:	18
Capítulo II. Nuevo modelo matemático para evaluar la influencia de la componente radial de la carga, la fuerza de fricción y la corrección del dentado en el factor de forma y en las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos.....	20
2.1 Modelo matemático desarrollado por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos para calcular el factor de forma y las tensiones en el pie en los dientes evolventes de perfil simétrico.	20
2.1.2 Cálculo de las tensiones en el pie.	27
2.1.2.1 Expresiones utilizadas para el cálculo de las tensiones.	27
2.1.2.2 Expresiones para el cálculo de las tensiones volumétricas en el pie del diente dadas en las normas internacionales.	28
2.2 Nuevo modelo matemático desarrollado para calcular el factor de forma y las tensiones en el pie en los dientes evolventes de perfil asimétrico considerando la componente radial de la carga y los coeficientes de corrección y de fricción.	30
2.2.1 Fuerzas y tensiones que serán consideradas.	30

2.2.2 Cálculo del corrimiento “x” de la carga total q_n en los vértices del diente al ser trasladada la carga resultante hacia el eje del diente. -----	34
2.2.3 Otras ecuaciones del nuevo modelo. -----	36
2.3 Resultados obtenidos en el cálculo de las tensiones en el pie para los dientes de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos obtenidos por el nuevo modelo matemático elaborado en el presente trabajo para diferentes coeficientes de fricción y de corrección, con coeficiente de asimetría -----	40
2.4 Comparación de los valores del factor de forma obtenidos en el presente trabajo para diferentes números de dientes y coeficientes de asimetría, para coeficiente de fricción $f = 0$, sin corrección del dentado y despreciando la tensión de compresión directa provocada por la componente radial de la carga. -----	48
2.5 Conclusiones Parciales del Capítulo II. -----	49
Capítulo III. Determinación por el Método de los Elementos Finitos de las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos y estimación del factor de concentración de tensiones en la raíz del diente. -----	52
3.1 Determinación del coeficiente de concentración de tensiones en el pie. ----	52
3.1.1 Coeficiente de Concentración de Tensiones dado por (Dobrovolski, 1970) para engranajes cilíndricos con dientes simétricos -----	52
3.1.2 Coeficiente de Concentración de Tensiones de Dolan-Brogamer. ----	52
3.1.3 Otros Coeficientes de concentración de tensiones encontrados en la literatura para dientes de engranajes cilíndricos de perfil simétrico. -----	53
3.1.4 Factor de concentración de Tensiones obtenido por (Quiñones, 2004) para dientes de engranajes cilíndricos de perfil simétrico. -----	53
3.1.5 Factor de Concentración de Tensiones para dientes de evolvente de perfil asimétrico. -----	56
3.2 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Investigación de tensiones -----	57
3.3 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Investigación de las tensiones en el pie de los dientes de los engranajes de perfil asimétrico. -----	58
3.3.1 Modelo de Elementos Finitos para el cálculo de las tensiones en el pie en los dientes de perfil asimétrico. -----	58
3.3.2 Resultados obtenidos en el procesamiento por el Método de los Elementos Finitos. -----	60

3.3.3 Correlaciones obtenidas entre el Coeficiente de Concentración de tensiones k_{OMEF} y los números de dientes, los coeficientes de corrección y los coeficientes de fricción para las ruedas conductoras y conducidas con dientes asimétricos. -----	67
3.3.4 Comparación de los Resultados obtenidos con los valores del Coeficiente de Concentración de Tensiones para los dientes simétricos. ----	67
3.4 Conclusiones Parciales del Capítulo III. -----	79
Conclusiones Generales -----	81
Recomendaciones -----	84
Bibliografía -----	86

INTRODUCCIÓN

Introducción

El diseño de las transmisiones por engranajes es objeto de estudio por muchos especialistas en todo el mundo, que se enfrascan cada vez más en mejorar los métodos de cálculo para obtener transmisiones más duraderas, menos costosas y más eficientes.

Un elemento fundamental que se ha empleado desde hace ya varias décadas para mejorar la capacidad de carga de las transmisiones por engranajes lo constituye el empleo de la corrección, que favorece en gran medida la resistencia de estas transmisiones; así como otro elemento fundamental, la lubricación. La lubricación en las transmisiones por engranajes como teoría surgió desde la segunda década del siglo XX y se desarrolló durante la segunda mitad del mismo donde los estudios sobre el tema han tomado gran auge y actualmente se maneja el concepto de lubricación elasto-hidrodinámica para estas transmisiones

Ya desde la década del 70, en Cuba se comienza a dar los primeros pasos en el mejoramiento de las expresiones empleadas en la literatura para el diseño de los engranajes cilíndricos de perfil evolvente; principalmente en los temas de corrección y lubricación (Otarov y Goytisoló, 1974); (Goytisoló y Moya, 1976, 1977, 1978). Los inconvenientes fundamentales de los comienzos de estas investigaciones fueron considerar la lubricación que se establecía en los dientes de los engranajes como hidrodinámica y los cálculos realizados para el espesor de la película de lubricante fueron sobre esta base (Goytisoló y Moya, 1976).

Desde entonces y hasta la fecha se ha seguido trabajando en este sentido y a su vez se ha ido evolucionando en esta línea con trabajos un poco más recientes donde se analizan por separado aspectos como la corrección y la influencia de la lubricación elastohidrodinámica (Goytisoló y Moya, 1977, 1978); (Goytisoló, Moya y Pérez, 1991), (Goytisoló, Moya; Cabello, 1997).

La fractura de los dientes de engranajes, es producida en general, por la fatiga que tiene lugar en su base (raíz o pie) a causa de las tensiones variables de flexión surgidas por la carga variable en cada entrada sucesiva del diente en engrane. Se agrega un cambio brusco de la forma del diente (de evolvente a trocoide o círculo) en la zona de la curva de transición donde tienen lugar concentraciones de tensiones (Zablonski, 1980), (Figura 1 a).

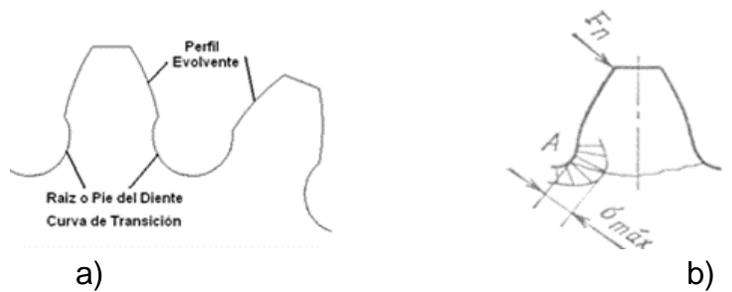


Figura 1a) Porción de engrane de 17 dientes sin corrección apreciándose claramente las curvas que forman el diente donde se encuentra el concentrador de tensiones.

b) Incremento local de tensiones que tiene lugar en el pie del diente a causa de la brusca transición.

La Concentración de Tensiones no es más que el incremento local de las tensiones en los elementos, determinado por el cambio brusco de las secciones transversales los cuales tienen lugar a causa de radios de redondeo, orificios, ranuras, cortes, etc., llamados concentradores. La concentración de tensiones está caracterizada por el Coeficiente de Concentración de Tensiones que es la razón entre la Tensión Local Máxima y el valor de la Tensión Nominal (Pisarenko, 1989), (Figura 1 b).

$$k = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_n} \quad (1)$$

Varios autores han trabajado en el esclarecimiento de este fenómeno para el caso de los dientes de engranajes. Uno de los procedimientos más antiguos, pero muy ilustrativo lo constituye la construcción de un modelo físico del diente de un material traslúcido (foto elástico) para luego obtener la visualización del estado tensional por el método óptico polarizado. En la Figura 2 a) se muestra este modelo. La pequeña separación de las franjas oscuras de interferencia adyacentes corresponde a un incremento de las tensiones. En las zonas donde existe una alta densidad de las franjas oscuras de interferencia se encontrará la mayor concentración de tensiones. Se aprecia fácilmente que, fuera de la zona de contacto, las zonas de mayor concentración de tensiones se encuentran precisamente en el pie del diente.



Figura 2 a) Modelo Físico de engranajes de material traslúcido para la visualización del estado tensional por el método óptico polarizado. b) Propagación transversal de una grieta provocando la fractura por fatiga.

Bajo un determinado número de ciclos de carga, en la zona de máxima concentración de tensiones, es muy probable el surgimiento de una grieta formándose en la zona de tracción “A” (lado de aplicación de la carga), Figura 2 b), a causa de defectos superficiales, calidad de fabricación, imprecisiones de cálculo o alteraciones del régimen normal de operación. Esta grieta puede propagarse transversalmente a lo largo del diente hasta llegar a la zona de tensiones mayores de compresión, donde la concentración de tensiones agudiza aún más la falla.

En los dientes de engranajes la concentración de tensiones está completamente determinada por la forma del diente, el material de fabricación y el acabado de la superficie de la curva de transición en el pie. La resistencia a la fractura por fatiga de los dientes de engranajes se puede aumentar considerablemente haciendo más firme la base del diente y disminuyendo la concentración de tensiones con el aumento del radio de curvatura de la superficie de transición. Además un acabado minucioso de la superficie de transición y la elevación de la rigidez con el aumento de la exactitud de fabricación, y la elevación de las propiedades mecánicas del material de las ruedas (Dobrovolski, 1970)

Un elemento muy importante que determina las tensiones que se originan en el pie de los dientes de los engranajes es el factor de forma el cual juega un papel fundamental a la hora de establecer el coeficiente de concentración de tensiones en el pie del diente. En la Norma (ANSI – AGMA, 2101-C95, 1995), (ANSI - AGMA, 908-B89 1995), (DIN, 1987) y en la Norma (ISO, 1996) se toma como factor de forma el conocido factor de Lewis, que sólo considera la geometría del diente, sin tomar en cuenta el efecto de la fuerza de fricción en los valores del factor de forma. En la actual Norma (GOST, 1989), no se emplea exactamente el factor de forma de Lewis, sino que se emplea un Factor de Forma que tampoco incluye la influencia del coeficiente de fricción. En la literatura técnica consultada sólo en lo antigua Norma GOST (Dobrovolski, 1970) se incluía la influencia de la fuerza de fricción en los valores de los Factores de Forma reportados pero para un

valor constante del coeficiente de fricción y sin hacer referencia alguna a la influencia que podían tener las variaciones de este coeficiente en los valores del Factor de Forma y en la resistencia a la fractura del dentado de las ruedas conductoras o conducidas. Dependiendo de las condiciones de lubricación el coeficiente de fricción puede tener valores muy diversos que pueden variar desde valores muy pequeños del orden de las centésimas o incluso de las milésimas en el caso de la lubricación elastohidrodinámica hasta valores en el orden de las décimas o incluso próximos a la unidad en el caso de la lubricación límite (Goytisoló y Moya, 1976); (Fuentes, 1996). Con relación a la influencia de la fuerza de fricción y de la corrección del dentado se han realizado investigaciones sobre los engranajes cilíndricos de perfil simétrico y sobre las transmisiones por tornillo sinfín (Quiñones, Goytisoló, Moya, 2005), (Soto, Moya y Goytisoló, 2007), (Quiñones, Goytisoló, Moya, 2007).

Otra forma de obtener las tensiones en el pie de un engranaje es construyendo modelos de los dientes de engranajes en un sistema CAD para su posterior análisis por el Método de los Elementos Finitos. Para estos modelos son calculadas las tensiones volumétricas en el pie del diente tanto de forma analítica, como por el MEF. El CCT es calculado mediante la expresión (1) tomando como valores de tensión máxima los obtenidos por el MEF y los nominales los calculados de forma analítica.

Particularmente en el caso de los engranajes de perfil asimétrico, sucede, que siendo esta transmisión muy novedosa y actual (Kapelevich, 1987); (Novikov, 2008) no se conocen aun completamente la influencia de todos los parámetros geométricos en la resistencia a la fractura y a pesar de que investigadores de Cuba, México y Venezuela han hecho aportes en este sentido (Velázquez, Moya, Soriano, 2004); (Moya, Velázquez, Arencibia, 2007); (Moya, Velázquez, Goytisoló, Machado, 2007); (Moya, Machado, Velázquez, Hernández, Fernández y Sierra; 2010), (Cárdenas, Hernández y Moya, 2013) sin embargo, hay que destacar que en estos trabajos realizados sobre la influencia de la geometría en la resistencia a la fractura no se ha incluido en la expresión del Factor de Forma la tensión de compresión provocada por la componente radial de la carga, ni se ha investigado la influencia en los factores de forma de las ruedas conductora y conducida de la fuerza de fricción ni de la corrección del dentado. Con relación al factor de concentraciones en el pie en estos engranajes, el Problema Científico es que el único intento conocido es el presentado por (Cárdenas, 2013), pero simplemente utilizó la ecuación de Ajuste de Dolan – Broghamer obtenida para los engranajes de perfil simétrico obtenida por el Método Foto Elástico y lo extrapoló para los engranajes de perfil asimétrico.

Problema Científico:

Sobre la base de estos antecedentes, para el caso de los engranajes de perfil asimétrico, sucede, que siendo esta transmisión muy novedosa y actual, no se conocen aun completamente la influencia de todos los parámetros geométricos en la resistencia a la fractura no existiendo ninguna referencia sobre la utilización del Método de los Elementos Finitos para determinar el coeficiente de concentración de tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil asimétrico.

Hipótesis:

Es posible, basándose en la experiencia internacional aplicada por diferentes autores para los engranajes cilíndricos de dientes rectos, y utilizando el Modelo Matemático, creado por el Colectivo de Mecánica Aplicada, para calcular las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos que contemple la influencia en las tensiones en el pie de los dientes: de la acción directa de compresión de la componente radial de la carga sobre el diente, el valor del coeficiente de fricción y los coeficientes de corrección del dentado en las ruedas conductora y conducida, obtener los valores de tensiones en el pie obtenidos por el Modelo y obtener las tensiones en el pie por el Método de los Elementos Finitos y de la comparación de estos resultados estimar el factor de concentración de tensiones en el pie para cada combinación evaluada de número de dientes, coeficiente de corrección y coeficiente de fricción.

El **Objetivo General** del presente trabajo es precisamente: Aplicando el Modelo Matemático para el cálculo de las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos con dientes rectos de perfil asimétrico y sus diferentes componentes, que considera la influencia de la acción directa de compresión de la componente radial de la carga sobre el diente, el valor del coeficiente de fricción y los coeficientes de corrección del dentado en las ruedas conductora y conducida, investigar la influencia de estos parámetros en la resistencia a la fractura de los mismos y comparar los resultados de las tensiones obtenidas analíticamente con las obtenidas para los mismos dientes por el MEF y como resultado obtener el Factor de Concentración de Tensiones. .

Como **Objetivos Específicos** se formularon los siguientes:

1. Estudiar en la literatura los aspectos vinculados con la geometría, la concentración de tensiones y la resistencia a la fractura de los engranajes cilíndricos con dientes de perfil asimétrico.
2. Aplicar el Modelo Matemático para el cálculo de las tensiones resultantes en el pie de los engranajes cilíndricos con dientes rectos de perfil

asimétrico, creado por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la UCf, para obtener las tensiones en el pie tanto de las ruedas conductoras como de las conducidas, para diferentes combinaciones de números de dientes, corrección y fricción.

3. Determinar valores de las tensiones en el pie mediante la utilización del Método de los Elementos Finitos con el objetivo de, comparando los valores analíticos calculados y los determinados por el Método de los Elementos Finitos, considerando estos últimos como los valores reales, obtener entonces para cada combinación de número de dientes, coeficiente de fricción, coeficiente de corrección los factores de concentración de tensiones en el pie en cada caso.

Métodos de Investigación Empleados:

Entre los Métodos Científicos que serán empleados en la investigación se pueden citar:

- **Métodos Generales:**

Se utilizará el método hipotético-deductivo al elaborar la Idea a Defender y proponer las nuevas líneas de trabajo a partir de los resultados obtenidos de la revisión bibliográfica. Se empleará también el método sistémico para enmarcar el tema de investigación en uno más amplio de la Mecánica Aplicada donde se aplican métodos computacionales de modelación y análisis y luego descomponerlo en subsistemas que al unirlos brindan una solución al problema planteado.

- **Métodos Lógicos:**

El método científico fundamental en este trabajo es el analítico-sintético. Mediante el análisis se evaluaron las expresiones para el cálculo geométrico de los engranajes investigados. La síntesis permite integrar las partes analizadas, lo que da como principal resultado el desarrollo de nuevas expresiones de cálculo de las tensiones en el pie en función de parámetros de explotación y de diseño como son: el coeficiente de fricción, el número de dientes y el coeficiente de corrección del dentado.

- **Método inductivo-deductivo.**

Mediante el estudio de los esquemas de análisis y ecuaciones empleadas en la literatura para el diseño de engranajes cilíndricos de dientes rectos simétricos que toman en cuenta la fricción que se establece entre las superficies en contacto y la influencia de la corrección del dentado, se puede establecer el posible beneficio o perjuicio que la combinación de estos dos efectos aplicados al cálculo de

engranajes para posteriormente comprobarlo mediante la aplicación de un moderno software de diseño y simulación, aplicando métodos numéricos: Método de los Elementos Finitos.

- **Métodos Matemáticos:** Se empleó un método de análisis numérico, en específico el Método de los Elementos Finitos para calcular mediante software de avanzada las tensiones en el pie de los dientes de engranajes y evaluar los beneficios de las modificaciones propuestas. Además se emplearán los principios estadísticos de Regresión Lineal Múltiple mediante software estableciendo nuevas relaciones para el cálculo de la concentración de tensiones en el pie del diente.

CAPITULO 1

Capítulo I. Evolución del estado del arte acerca de los parámetros geométricos que influyen de la resistencia a la fractura de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfiles simétrico y asimétrico.

1.1 Breve historia del desarrollo de los engranajes.

Se considera que en la Grecia antigua, se efectuaron análisis de engranajes en "Problemas Mecánicos de Aristóteles" (280 A.C.), donde se tiene conocimiento del mecanismo de tornillo sin fin y rueda, Arquímedes (250 A.C.) (Piován, 2004) Siendo el mecanismo más antiguo conocido basado en un sistema de engranajes el mecanismo de Anticitera (80 A.C.) (Rodríguez et. al, 2002). Marco Vitruvio (27 A.C.), en "De Arquitectura X.5" describe un molino de agua hidráulico, con utilización de engranajes (Vitrubio, 2004).

Entre los siglos XV al XVII, las teorías de engranajes fundamentadas en la descripción matemática de los perfiles de los dientes se destacan en Codice Atlántico (Da Vinci, 1497), más tarde (Litvin, 1997), surgen los primeros análisis de perfiles cicloides de Dürer (1525) y los perfiles de evolvente de La Hire (1694), posteriormente la acción conjugada es resuelta por Leonard Euler (1754), (Cárdenas, 2012)

En 1893 Wilfred Lewis (Lewis, 1893), publica un análisis para estimar la tensión en la base del diente, (Grant, 1899) ejecuta y propicia la producción en serie de los engranajes. A partir de este momento, la aparición de nuevos inventos como la máquina de vapor, conlleva el desarrollo de nuevas aplicaciones para los engranajes. En 1926 se utiliza el engrane hipoide en la transmisión del automóvil Packard. (Cárdenas, 2012)

En la obra citada de (Litvin, 1997) se relacionan parte de los responsables de los principales aportes a la teoría del engranaje, en los dos primeros tercios del siglo pasado, tales como: Friedrich Wilhelm Lorenz, Edwin R. Fellows, Earle Buckingham, Gustav Niemann, Hans Liebherr, Darle W. Dudley, Oliver E. Saari, Chrisanf F. Ketov, Nikolai I. Kolchin y Mikhail L. Novikov. (Cárdenas, 2012)

A finales del siglo XX y durante los comienzos del siglo XXI comienzan nuevos desarrollos de sistemas de engranajes, utilizándose por primera vez perfiles con dientes asimétricos (Kapelevich, 1989) desarrolla la síntesis de estos engranajes y (Novikov et. al, 2008) describen la investigación y desarrollo de la caja de engranajes TV7-117S, primera con perfiles de dientes asimétricos, producidos en serie por Klimov Corporation y Motor Sich JSC en Zaporozhye, Ucrania. (Cárdenas, 2012)

1.2 La falla por fractura de los dientes de los engranajes.

En las normas internacionales, publicaciones de resultados de investigaciones y textos, puede apreciarse que la información de los modos posibles de falla que presentan las ruedas dentadas, se concentran, por una parte respecto a la falla por deterioro o desgaste en la superficie del diente como consecuencia del contacto del par engranado, así como en la falla por fractura en la base del diente, producto de las tensiones de flexión en esta zona. La norma (ISO 6336-1, 1996) basa los cálculos de la capacidad de carga previendo los efectos de la fatiga superficial y de la fatiga por flexión.

Las normas (ANSI/AGMA 1010-E95, 1995) agrupa los principales modos de falla, en siete clases generales: desgaste, se caracteriza por la disminución del espesor del diente en la zona de la cabeza y del pie, que es donde existe la mayor velocidad de deslizamiento, agarramiento, deformación plástica, fatiga por contacto, agrietamiento, rotura y fatiga por flexión.

En las normas (GOST 21354-87, 1989); (ANSI – AGMA, 2101-C95, 1995); (ANSI - AGMA, 908-B89 1995); (DIN, 1987) y en las Normas (ISO 6336-1, 2,3, 1996) se describe la Metodología para evaluación de la resistencia a la fractura de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.

1.3 Tensiones de flexión en la base del diente, formas de reducir las tensiones y de evaluar la capacidad de carga.

Para el mejoramiento de la capacidad de carga a las tensiones producidas por la flexión en la base del diente, se destacan dos maneras de solucionar el problema:

1. Modificando las propiedades mecánicas del material utilizado en la construcción del engrane, por ejemplo mejorando la resistencia de los dientes a través de tratamientos térmicos o de la calidad superficial, con técnicas como la carburación y el granallado (Matsumoto, 1989); (Masuyama, 2002).
2. Reduciendo la tensión de tracción máxima en la raíz del diente, modificando convenientemente la geometría del perfil del diente del engranaje en la fase de diseño y mecanizado del mismo. Entre las variantes para lograr este efecto se encuentran:
 - La corrección del dentado: (Goytisoló y Moya, 1976); (Goytisoló y Moya, 1977); (Goytisoló, Cabello y Moya, 1997);

- El empleo de engranajes de una geometría más favorable a la flexión, donde se encuentran los engranajes asimétricos: (Kapelevich, 1997); (Velázquez, 2004); (Moya et. al, 2009); (Cárdenas et. al, 2010); (Cardenas et. al, 2012); (Goytisoló et. al, 2013)

En la estimación de las tensiones de flexión en la base del diente, es clásico el estudio de (Wilfred Lewis, 1893), quien crea un modelo de cálculo para evaluar el esfuerzo en la zona elástica, debido a la flexión en la base del diente recto con perfil de evolvente, tratando al mismo como una viga empotrada en su base y en voladizo y con las hipótesis simplificativas siguientes:

- a) La carga está uniformemente distribuida a lo largo del ancho del diente.
- b) La tensión de compresión producida por la componente radial de la carga puede ser despreciada.
- c) La carga actúa en la cabeza del diente.

El esquema de análisis de Lewis era una carga de flexión actuando en el vértice de una parábola de ancho constante produce la misma tensión de flexión en cada sección de la parábola. De esta manera, la sección crítica de un diente, en la que la tensión de flexión es máxima, se puede localizar en el punto de tangencia entre el perfil del diente y una parábola cuyo vértice está situado en la intersección del eje del diente y la línea de acción cuando la carga está aplicada en la cabeza.

El problema según las anteriores consideraciones, es que el esfuerzo en la base del diente puede subvalorarse si se aplica la hipótesis de Bernoulli-Navier para las vigas (Goncalves, 2002), al no tomar en cuenta:

- a) Las variaciones de curvatura del perfil que describe a la sección transversal del diente en la base, lo cual origina concentración de esfuerzos.
- b) El diente de un engrane es un pequeño elemento, desde el punto de vista de longitud contra sección. Por otra parte se viola igualmente el principio de Saint Venant ya que se aplica la teoría de la viga elemental al engranaje, sin considerar que la misma puede ser aplicada solamente para secciones de la viga a distancias de la carga y del soporte, grandes en comparación con el ancho de la misma.

Dicha situación, donde los cambios de curvatura originan concentración de esfuerzos, fue corregida desde los estudios fotoelásticos de (Black, 1936) y (Dolan y Broghamer, 1942), quienes complementaron los iniciales de William Lewis, cuyos resultados son referenciados en textos de diseño básicos actuales para Ingeniería Mecánica como son: (Shigley and Mischke, 2008); (Norton, 1989); (Faires, 1990); (Mott, 2006); (Mabie, 2000); (Juvinal, 1997). En el trabajo (Quiñones, 2005) se aplicó un nuevo Modelo Matemático para el cálculo de las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos y determinó la influencia de la corrección y la fricción en los engranajes evaluados aplicando el

Método de los Elementos Finitos. Después de Lewis el primero que consideró la componente radial de la carga fue (Dobrovolski, 1970). En ese trabajo Quiñones contemplo también la influencia de la componente radial de la carga en las tensiones en el pie. Hay que destacar que hasta la fecha nadie había contemplado este fenómeno para los dientes asimétricos, hasta que (Cárdenas, 2012), utilizó el estudio de Dolan y Broghamer para tomarlo en cuenta.

1.4 Modelos empleados para el cálculo del factor geométrico de forma y_f y las tensiones en el pie.

(AGMA 908-B89, 1989), mejora al tratamiento original de Lewis, incorporando el factor geométrico de resistencia J , fundamental en la estimación de la tensión de flexión en la base del diente. Dicho factor es adimensional y engloba los efectos de la forma del diente, la posición de la carga, la concentración de esfuerzo y la distribución de carga entre las líneas oblicuas de contacto (en los casos de engranes helicoidales). AGMA considera la carga normal actuando en el punto de contacto único superior y con distribución uniforme a lo largo de la línea de contacto, tiene en cuenta la tensión de compresión causada por la componente radial de la carga. Además (para los engranes helicoidales), la tensión de flexión se corrige por un factor helicoidal propuesto por (Wellauer y Seireg, 1960) que considera la reducción de la tensión de flexión en la base del diente producida por la inclinación de la línea de aplicación de la carga respecto a la cabeza del diente. Para los engranes de dientes rectos asimétrico al existir la excentricidad y estar desplazado el eje medio del diente la componente de compresión de la carga actúa con un momento flector contrario al de la carga tangencial disminuyendo la tensión de tracción en la base del diente.

Finalmente, en el cálculo de la tensión resultante se toma en cuenta el efecto de la concentración de tensiones de (Dolan y Broghamer, 1942). Este método es general y proporciona resultados muy precisos, pero involucra un proceso iterativo para la determinación de la sección crítica donde se sugiere la utilización del método de Newton, técnica de aproximación más eficaz en tiempo y más eficiente en niveles de precisión cuando se utilizan herramientas computacionales.

(AGMA 908 B89, 1989) proporciona un total de 66 tablas, en las cuales se presenta el factor geométrico de resistencia J para 8 números de dientes (z) diferentes (12, 14, 17, 21, 26, 35, 55, 135), considerando siempre la distancia entre centros nominal. Recomiendan no interpolar cuando no se encuentre el factor J para los parámetros geométricos del engranaje considerado y proponiendo en estos casos la utilización del método de cálculo general. El otro modelo de cálculo de la tensión de flexión lo presenta la norma ISO 6336-3-1996 [39], en donde se adoptan las siguientes hipótesis:

- La tensión de compresión producida por la componente radial de la carga que se transmite, es despreciable. La sección crítica del diente en la que se presenta la tensión de flexión máxima, es aquella cuya tangente forma un ángulo de 30° con el eje del diente.
- La tensión de flexión nominal en la sección crítica, viene dada por la Ley de Navier y es afectada por un factor de concentración de tensiones. Esta tensión nominal se habrá de corregir por aplicación de sobrecargas dinámicas, desigual distribución de la carga a lo ancho del diente y desigual reparto de la misma entre los dientes simultáneamente en contacto.
- ISO expresa la tensión de flexión nominal en función del factor geométrico de forma. Cuando se determinan las condiciones críticas para la tensión de flexión, se habrá de determinar el punto de contacto en el que la tensión de flexión nominal es máxima. ISO propone que dicho punto es el punto de contacto único superior.
- ISO propone tres métodos, el método A, que aconseja la evaluación directa de la tensión máxima en la base del diente por métodos aproximados de cálculo como pueden ser el método de los elementos finitos, ecuaciones integrales o experimentalmente, utilizando, por ejemplo, la técnica de la fotoelastometría.
- El método B, cuando la carga se supone aplicada en el punto de contacto único superior, para la determinación de la tensión máxima en la base del diente.
- El procedimiento adoptado por ISO en su método C, es el más simple y por consiguiente más utilizado. Consiste en calcular la carga aplicada en la cabeza del diente, y corregir el resultado con un factor llamado factor de conducción, función del grado de recubrimiento del engranaje virtual, que aproxime el resultado a las condiciones efectivas con la carga aplicada en el punto de contacto único superior. Los factores de forma y de concentración de esfuerzos para la carga aplicada en la cabeza, aparecen representados como familias de curvas para diferentes parámetros de tallado, en función del número virtual de dientes del piñón, siendo el parámetro de las familias el coeficiente de desplazamiento del mismo (ISO 6336-1, 2006)

Los valores del factor geométrico de resistencia J proporcionados por las tablas de la AGMA resultan limitados, situación apreciada por (Hernández, 2006), precisando que las tablas que brinda la norma para la selección del factor J , ignoran sistemáticamente las variantes de diseño que presentan socavado. El planteamiento anterior se explica en el criterio del debilitamiento del diente cuando existe penetración, situación considerada inconveniente dado que si se tiene

menos sección transversal se origina inevitablemente un aumento del esfuerzo en la base del diente. Existen autores que han analizado las alternativas de evitar o de aprovechar el fenómeno del socavado, como (Pedrero y García Masiá, 2003), (Pleguezuelos y Pedrero, 2009) y respecto a la manipulación del factor de corrección (Bozan y Gavrila, 2008); (Alemán et. al, 2011); (Moya, 1994). En el caso de los dientes asimétricos, cuando el perfil está socavado por el lado del ataque, el lado de respaldo compensa el debilitamiento en la sección crítica, lo cual es positivo.

Respecto a la norma ISO, la dificultad se presenta cuando los valores deben ser calculados mediante un software, especialmente en estudios de análisis paramétricos, en los que se presenta a menudo la necesidad de realizar cálculos repetitivos, siendo necesario para su programación interpolar entre los valores normados.

Para los modos normados de cálculo, (Moya, 1994) formula un estudio de comparación y ordenamiento alrededor de las diferentes normas más usadas, en cuanto al rango de capacidad de carga estimado por las normas AGMA, ISO, DIN y CAME. Está satisfactoriamente determinado, (Buckingham, 1949), así como (Dudley, 1973), (Spotts, 1973); (Michalec, 2003); (Fuentes, 1995), que en la construcción por generación con cremallera o fresa madre, el diente tiene dos perfiles, una evolvente a partir del círculo básico (si no hay interferencia de tallado) hasta el límite del adendo o punta y una trocoide iniciada en la intersección con la evolvente, finalizando en el círculo mínimo del dedendo.

El principal problema para la obtención del factor geométrico de forma y_f , es la determinación del punto de tangencia de la parábola de Lewis y el perfil del diente, que define la sección crítica del diente y la altura hasta la intersección de la carga con el eje de simetría.

Generalmente, el punto de tangencia de la parábola de Lewis y el perfil del diente, está situado sobre la curva evolvente, en la intersección del círculo del pie, o en la trocoide en la raíz del diente, que ha sido generada en el proceso constructivo, como lo ponen de manifiesto los trabajos desarrollados por (Mitchiner y Mabie, 1982) y los autores ya mencionados Buckingham, Dudley y Fuentes. Sin embargo al diseñar engranes cilíndricos de dientes asimétricos, la parábola de Lewis no se puede aplicar, debido a que no se encuentra inscrita en el perfil del diente.

Se conocen propuestas para aumentar la resistencia a la flexión en la base, basadas en el cambio del perfil del diente evolvente - trocoide a dientes con perfil evolvente -circunferencia, (Sankar et. al, 2010) o alrededor del establecimiento de un modelo matemático para la generación del perfil asimétrico, (Spitas et. al, 2005) incorporando modificaciones circulares en la raíz.

También se han elaborado estudios de reducción de esfuerzos en el perfil de la base del diente, practicando taladros (orificios) que sirven como alivio de tensiones internas (Saini et. al, 2006); (Hebbal et. al, 2009). Otra alternativa es el MEF que ha sido ampliamente usado en el análisis de error de engranajes de evolvente creados con herramientas CAD, (Ming et. al, 1997); (Wang et. al, 2006); (Jevgenijs Butans, 2007).

Además son extensos los estudios que utilizan el método de elementos finitos para determinar las tensiones críticas en el perfil del diente en disposiciones exteriores e interiores: (Cotaquispe, 2007 (Kawaleck y Rzeszow, 2004); (Rosic, 2002); (Mahbub et. al, 2004); (Zang et. al, 2008), pero todos estos trabajos han sido desarrollados para engranajes simétricos.

1.5 Engranés asimétricos

En el caso específico de los engranes asimétricos, por lo reciente de su estudio y utilización, existe poca información. No existen normas y casi no hay información para la selección de los factores geométricos de forma y para el cálculo de las tensiones en el pie. Sólo desde 1987 se conoce que una solución viable para mejorar la capacidad portante del engrane es la creación de dientes de perfil asimétrico, como plantean: (Kapelevich, 1987); (Kapelevich, 2000); (Kapelevich, 2009), (Novikov, et. al, 2008); (Litvin, 1997) Kapelevich Alexander desarrolla un procedimiento de diseño directo del engrane (*Direct Design Gear*) para la síntesis del par asimétrico del engranaje, proponiendo un área de existencia. Simultáneamente sintetiza los parámetros de la herramienta de cremallera para generar los perfiles asimétricos deseados del diente del engranaje.

Para el cálculo de las tensiones de flexión en la base del diente asimétrico con perfil de evolvente, se ha hecho uso del método de elementos finitos (MEF), (Koilaraj et. al, 2007); (Prásil et. al, 2008), obviándose el cálculo de la tensión por flexión en la base mediante el uso de los factores geométricos de forma y resistencia, sencillamente porque estas expresiones analíticas no se han desarrollado, para los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos de perfil evolvente y trocoide.

Para utilizar el método de análisis (MEF), es necesario generar el modelo, empleando técnicas de generación en CAD, alternativa establecida en la década de los 90 del siglo pasado: (Chang et. al, 1984), (Huston et. al, 1989); (Huston et. al, 1994); (Sabah et. al, 2008).

En particular en los engranajes asimétricos, se observa una tendencia para la creación del modelo a través de la aplicación del método de diseño directo del engrane, así en el 2002 (Kapelevich y Kleiss, 2002) desarrollan engranajes de

dientes rectos asimétricos y los pares helicoidales del engranaje, en el 2003 (Kapelevich y Shekhtman, 2003) y en el 2004 (Kapelevich, 2004), ya utilizó el análisis por elementos finitos MEF en la optimización de la tensión de flexión del diente recto asimétrico, reafirmando que el aumento del coeficiente de asimetría produce un aumento de la resistencia del diente a la flexión. (Novikok, et. al, 2008), cita las ventajas del uso de los engranajes asimétricos, como alternativa de mayor capacidad de carga, reducción de costos, extensión de vida útil, reducción de tamaño, peso, ruido, vibración, alta eficiencia de transmisión, mayor confiabilidad, aumento del grado de recubrimiento y mejor compatibilidad operacional con otros mecanismos.

(Kapelevich et. al, 2009) y (Malleth et. al, 2009) ilustran las bondades del método no tradicional de diseño directo de engranajes asimétricos (Kapelevich, 2011) analizando paraméricamente los cambios en la sección crítica para diferentes casos de asimetría, así como el efecto del espesor en la base, respecto a la tensión de flexión.

En el 2011, (Cárdenas et. al, 2011). Plantean las consecuencias del uso de la asimetría en engranajes cilíndricos de dientes rectos y (Kapelevich y Shekhtman, 2010), presentan además la metodología para definir los límites de selección de los parámetros del engranaje, generando áreas de existencia para los pares de engranajes, incluyendo los casos de engranajes con dientes asimétricos.

Como casos de aplicación práctica se ha propuesto por (Kapelevich y Taye, 2010) el uso del engrane asimétrico en engranajes auto bloqueantes.

En esa línea, también destacan aportes de otros autores como (Muni et. al, 2007) quienes utilizando el método de diseño directo, en la optimización del piñón y la corona logran conseguir un mejor balance de los esfuerzos en los perfiles asimétricos respectivos. Posteriormente (Kumar et. al, 2008) obtienen la geometría de una herramienta cremallera asimétrica, considerando un ángulo de presión estándar del lado del diente de ataque, trabajando con: módulo unitario, no usan el método de áreas de existencia, ajustan el radio de finalización de la herramienta de corte, la corrección y la razón de contacto necesaria, a fin de generar los dientes rectos con los perfiles asimétricos de evolvente y trocoide de las variantes deseadas. En otros estudios (Chira et. al, 2006 y 2007), usando el software *MatLab* y el lenguaje de programación *Lisp* logran el modelo geométrico del engrane de diente recto asimétrico, sin establecer las consecuencias de uso de los perfiles asimétricos, en cuanto a: la resistencia a flexión, al contacto o cambios en la eficiencia de la transmisión.

(Deng et. al, 2003) propusieron un modo de cálculo de la tensión máximo en la base del diente asimétrico, donde toman en cuenta la carga normal, el espesor del diente y el módulo, aportando tres factores de corrección, uno para la posición de

la carga (ecuación empírica de Tobe, con ángulo de presión fijo de 20° en el lado del ataque). Los otros dos factores, influencia del número de dientes e influencia del factor de asimetría, los obtienen por métodos de regresión con los valores de la tensión de flexión calculadas por el Método de Elementos Finitos.

Otra alternativa al método de diseño directo, es publicada por (Litvin y Fuentes, 2004) donde modelan el engrane a través de un método de transformación de coordenadas, en la geometría de la herramienta de corte y el proceso cinemático de generación de los perfiles asimétricos. También han abordado el problema, utilizando ese criterio (Nastase et. al, 2003) y (Spitas et. al, 2005).

(Cavdar et. al, 2005), realizan un estudio para ajustar el método C DIN, usado en el cálculo por MEF de los esfuerzos a flexión máximos en la base del diente simétrico a los dientes con perfiles asimétricos.

(Yang y Cheng, 2005) utilizan la teoría de la generación de la evolvente para formular un modelo matemático que permite obtener perfiles asimétricos helicoidales y efectúa un análisis de tensiones en el modelo del diente, usando el Método de Elementos Finitos.

(Fetvaci e Imrak, 2008) partiendo del perfil de la herramienta de corte y considerando el movimiento cinemático en el proceso de generación, obtienen el perfil del diente asimétrico (evolvente y trocoide) como el locus de la evolvente en la superficie de la herramienta igualmente asimétrica, luego someten a cálculos MEF el perfil generado, ratificando la disminución de la tensión por flexión en la base del diente asimétrico, este estudio no consigue ecuaciones generales para el cálculo directo de la resistencia a través del factor geométrico de resistencia J .

En los artículos publicados se encuentra una tercera tendencia que integra las teorías clásicas con herramientas computacionales, calculando el diente asimétrico o no, mediante la generación gráfica de las curvas evolvente y trocoide a partir de sus intersecciones, (González, 2005); (Cárdenas, et. al, 2010 y 2011).

(Moya et. al, 2006), en un análisis continuado al respecto, realizan proposiciones de estimación analítica del factor geométrico de forma y_f , obtienen resultados en engranajes con geometría especial, utilizados, en los centrales azucareros de Cuba, análisis sobre la influencia de la geometría de los dientes asimétricos de material plástico en su resistencia (Moya, Velázquez, Goytisoló, 2005 y 2007), proponiendo posteriormente en 2007 y 2010, un modelo para la determinación del factor de forma para dientes rectos de perfil asimétricos, desde 10 hasta 100 dientes, donde se utiliza la norma DIN, así como las características particulares de los dientes asimétricos, estableciendo relaciones para calcular y_f en función de los parámetros geométricos intrínsecos del engrane, el número de dientes y el coeficiente de asimetría, sin embargo en este modelo se despreció la componente radial de la carga y no se contempló el coeficiente de fricción ni el coeficiente de

corrección. Utilizando el algoritmo desarrollado por (González et. al, 2002), para la solución por elementos finitos del problema planteado. (Cárdenas et. al, 2011). proponen modos de cálculo para los factores de forma YF y resistencia J basados directamente en la geometría del diente asimétrico. En los dientes rectos asimétricos la carga es aplicada en una de las caras ya que el giro del engrane debe mantener un solo sentido, por otra parte se escoge el lado que transmite la carga o perfil de ataque, al de menor ángulo.

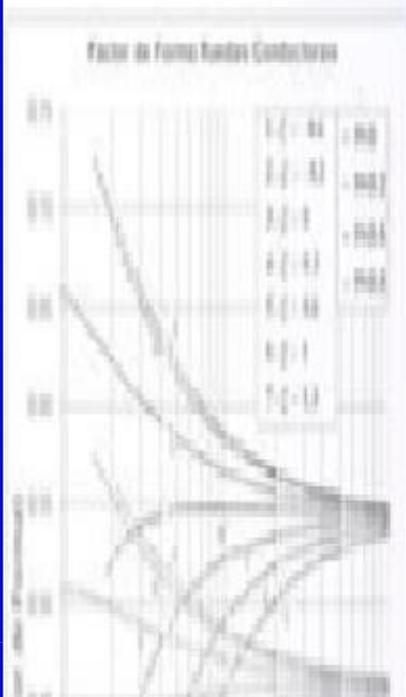
(Brown et. al, 2010), realizan análisis y simulaciones de resistencia a fatiga por flexión y contacto, combinados con el cambio del perfil del diente mostrando las ventajas de la asimetría.

En la evolución de los estudios de las ruedas dentadas asimétricas, pueden observarse publicaciones que van desde la síntesis, simulación de funcionamiento y análisis estructural por MEF, (Di Francesco et. al, 1997); (Chira et, al, 2008); (Di Francesco et. al, 2007); (Ravai et. al, 2010); (Wang et. al, 2011); (Kapelevich 2011); (Mora et. al, 2011).

1.6 Conclusiones del Capítulo I:

1. En el caso de los engranajes de perfil asimétrico, sucede, que siendo esta transmisión muy novedosa y actual no se conocen aun completamente la influencia de todos los parámetros geométricos en la resistencia a la fractura.
2. A pesar de que sus propios creadores Kapelevich y Novikov y numerosos investigadores en todo el mundo y de México, Venezuela y Cuba han hecho aportes en este sentido, sin embargo, hay que destacar que en estos trabajos realizados sobre la influencia de la geometría en la resistencia a la fractura no se ha incluido en la expresión del factor de forma la tensión de compresión provocada por la componente radial de la carga, ni se ha investigado la influencia en los factores de forma de las ruedas conductora y conducida de la fuerza de fricción la corrección del dentado.
3. El cálculo de la tensión normal resultante es aun incompleto pues en todos los modelos elaborados no se contempla la componente radial de la carga sobre el diente.
4. Los intentos por obtener el coeficiente de concentración de tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil asimétricos no han sido muy felices.

CAPITULO 2



Capítulo II. Nuevo modelo matemático para evaluar la influencia de la componente radial de la carga, la fuerza de fricción y la corrección del dentado en el factor de forma y en las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos

2.1 Modelo matemático desarrollado por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos para calcular el factor de forma y las tensiones en el pie en los dientes evolventes de perfil simétrico.

2.1.1 Cálculo del factor de forma.

Con anterioridad a esta investigación el Colectivo de Mecánica Aplicada desarrolló en el año 2005 el modelo matemático que se describirá a continuación para tomar en cuenta la influencia de los coeficientes de fricción y de corrección en los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil simétrico (Goytisolo, Moya, Quiñones, 2005); (Quiñones et. al, 2005).

En la Figura 2.1 a) se muestran las cargas que actúan sobre un diente de la rueda conductora en el instante en que sale del contacto con la rueda conducida y en la Figura 2.1 b) se muestran las cargas sobre un diente de la rueda conducida en el instante en que entra en contacto con un diente de la rueda conductora. Al producirse el engranaje entre dos ruedas, primeramente entra en contacto el extremo o vértice de la cabeza del diente de la rueda conducida con el pie del diente de la rueda conductora, terminando con el contacto del vértice de la rueda conductora con el pie del diente de la rueda conducida. En ambos casos la carga normal, expresada por q_n , actúa a lo largo de la línea de engranaje, como es conocido y perpendicularmente a ésta actúa la fuerza de rozamiento dirigida hacia el vértice del diente, en el caso de las ruedas conductoras, o hacia al pie del diente, en el caso de las ruedas conducidas. La composición de las fuerzas normal y de fricción, forman la carga resultante q_r , inclinada un ángulo ρ respecto a la dirección de q_n , siendo este el ángulo de fricción.

Al trasladar la carga q_r a lo largo de su línea de acción, intercepta el eje de simetría del diente en el punto K. Se descompone en este punto en sus componentes rectangulares q_{rx} y q_{ry} . El ángulo que forma la carga q_r con el eje x es δ . Como se puede observar además, el punto K de acción de la carga resultante se encuentra desplazado del borde exterior de la cabeza del diente una distancia x. Esta distancia tiene gran importancia para el cálculo de resistencia a la

fractura de las transmisiones analizadas, pues el momento flector en la base del diente depende proporcionalmente de la altura h . El espesor del diente en la base se tomó como S donde termina teóricamente el perfil evolvente y comienza a medirse la altura h .

El segmento x se puede calcular por simples relaciones trigonométricas, obteniéndose:

$$x = r_e \left[1 - \frac{\text{sen}(\theta - \delta)}{\text{sen}(\theta + \delta)} \right] \quad (2.1)$$

Donde (Véase Figura 2.1):

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \frac{S_e}{4 \cdot r_e} \\ \delta &= \alpha_e - \gamma_e \pm \rho, \\ \gamma_e &= 180 - 2 \cdot \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

El ángulo ρ es el ángulo de fricción y el signo: “+” o “-” se toman en dependencia, si la rueda analizada es conducida o conductora respectivamente.

Tomando en cuenta la fuerza de fricción el factor de forma queda definido por la siguiente expresión (Dobrovolski, 1970):

$$\frac{1}{y} = \left[\frac{6 \cdot \cos \delta \cdot (h/m)}{\cos \rho \cdot (s/m)^2} - \frac{\text{sen} \delta}{\cos \rho \cdot (s/m)} \right] \quad (2.3)$$

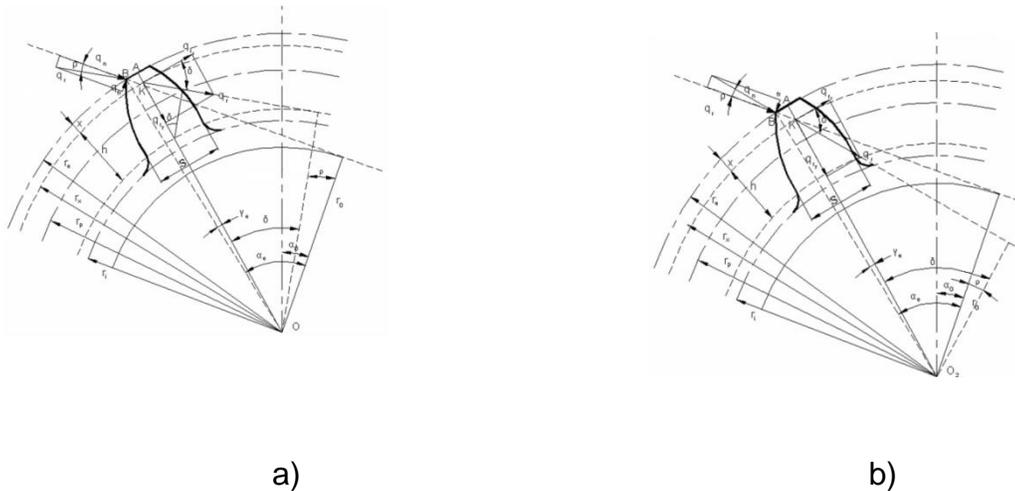


Figura 2.1- Cargas actuantes en la circunferencia exterior en el momento final e inicial de contacto para la rueda conductora (a) conducida (b) respectivamente.

El espesor del diente en la circunferencia exterior se calcula por la expresión:

$$S_e = 2 \cdot r_e \cdot \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_e \right) \quad (2.4)$$

$$S_p = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \xi \cdot \tan \alpha \right) \quad (2.5)$$

$$r_p = \frac{m \cdot Z}{2}$$

Considerando que el coeficiente de cizallamiento invertido sea cero, pues su influencia en el Factor de Forma es despreciable; la expresión para calcular el radio exterior será:

$$r_e = \frac{m}{2} \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2) \quad (2.6)$$

Donde: m , Z , ξ ; constituyen el módulo, el número de dientes y el coeficiente de corrección respectivamente.

Sustituyendo (2.5) y (2.6) en la expresión (2.4) del espesor del diente en la circunferencia exterior:

$$S_e = m \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2) \cdot \left(\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{2 \cdot Z} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_e \right) \quad (2.7)$$

el ángulo θ se calcula como:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{4 \cdot Z} + \frac{\text{inv} \alpha}{2} - \frac{\text{inv} \alpha_e}{2} \right) \quad (2.8)$$

Por la teoría básica de los engranajes se conoce que:

$$\begin{aligned} \text{inv} \alpha_e &= \tan \alpha_e - \alpha_e \\ \alpha_e &= \cos^{-1} \frac{r_0}{r_e} = \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \\ \rho &= \tan^{-1} f \end{aligned} \quad (2.9)$$

La involuta del ángulo α es una constante pues se considera $\alpha = 20^\circ$ (cremallera básica) y su valor es: $\text{inv} \alpha = 0.0149083$. La involuta de α_e se puede calcular como:

$$\text{inv} \alpha_e = \tan \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] - \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 1} \right] \quad (2.10)$$

Finalmente la expresión final para el ángulo δ es:

$$\delta = \cos^{-1} \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] + 2 \cdot \theta - 180^\circ \pm \tan^{-1} f \quad (2.11)$$

Teniendo los valores del coeficiente de fricción f se puede calcular el ángulo δ .

A continuación se calculará la magnitud de la relación h/m . En la Figura 2.1 se puede apreciar que la altura h se encuentra entre una circunferencia por encima de la circunferencia interior una magnitud de $c \cdot m$ y otra circunferencia por debajo de la exterior una magnitud x . Como la altura total de un diente es $2.25 m$:

$$h = 2.25 \cdot m - c \cdot m - x \quad (2.12)$$

Sustituyendo x (1) se obtiene:

$$h = 2.25 \cdot m - c \cdot m - r_e \left[1 - \frac{\text{sen} \cdot (\theta - \delta)}{\text{sen} \cdot (\theta + \delta)} \right] \quad (2.13)$$

Conocido el valor de r_e (6):

$$h/m = 2.25 - c - \left(\frac{Z}{2} + \xi + 1 \right) \cdot \left[1 - \frac{\text{sen} \cdot (\theta - \delta)}{\text{sen} \cdot (\theta + \delta)} \right] \quad (2.14)$$

La relación S/m se calcula teniendo en cuenta que S es el espesor del diente en el pie, en la circunferencia que se encuentra a una magnitud $c \cdot m$ por encima del radio interior. Vale aclarar además que el cálculo se realizará teniendo en cuenta que la circunferencia base tenga un radio menor que la circunferencia antes mencionada. Para el cálculo de esta relación se toma como base la expresión del espesor de un diente para una circunferencia cualquiera con radio r_n :

$$S_n = 2 \cdot r_n \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + \text{inv} \alpha + \text{inv} \alpha_n \right) \quad (2.15)$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_n &= r_i + c \cdot m \quad (\text{según el planteamiento anterior}) \\ r_i &= r_p + \xi \cdot m - 1.25 \cdot m \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$r_n = m \cdot \left(\frac{Z}{2} + \xi + c - 1.25 \right) = \frac{m}{2} \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25) \quad (2.17)$$

$$\alpha_n = \cos^{-1} \frac{r_0}{r_n} = \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \quad (2.18)$$

Luego con r_n (2.17) y los conocidos valores de S_p y r_p de (2.5) la magnitud de la relación S/m será:

$$S_n / m = S / m = (Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.5) \cdot \left[\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{2 \cdot Z} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_n \right] \quad (2.19)$$

Conociendo el valor de α_n (2.18); la $\text{inv} \alpha_n$ será:

$$\text{inv} \alpha_n = \tan \alpha_n - \alpha_n \quad (2.20)$$

$$\text{inv} \alpha_n = \tan \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] - \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] \quad (2.21)$$

De esta forma han sido obtenidas las ecuaciones que completan el Nuevo Modelo Matemático para el cálculo del Factor de Forma en Engranajes Cilíndricos de

Dientes Rectos de perfil simétrico. En las ecuaciones antes mencionadas “ c ” es el Coeficiente de Curvatura del pie del diente ($c = 0.4$ para el análisis de este trabajo). El coseno del ángulo de fricción se calcula como sigue:

$$\cos \rho = \sqrt{\frac{1}{1+f^2}} \quad (2.22)$$

Las restricciones del Nuevo Modelo Elaborado se exponen a continuación:

El Coeficiente de Corrección mínimo para estas nuevas condiciones se obtiene de la siguiente expresión:

$$1.- \operatorname{inv} \alpha_n \geq 0 \Rightarrow \xi_{\min} = 1.25 - c - \frac{Z}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (2.23)$$

De la condición $S_e \geq 0.25 \cdot m$ se obtiene que:

$$2.- \theta < \arccos\left(\frac{1}{8 \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2)}\right) \quad (2.24)$$

El ángulo de fricción debe encontrarse dentro de los siguientes límites:

$$3.- 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{5} \quad (2.25)$$

Por último el Coeficiente de Recubrimiento debe mantenerse en los límites conocidos:

$$4.- \varepsilon \geq 1.3 \quad (2.26)$$

Estas expresiones se procesaron en Microsoft EXCEL para las ruedas conductora y conducida respectivamente en sendas hojas de cálculo para números de dientes desde 10 hasta 1000. Se evaluaron tres condiciones diferentes desde el punto de vista del coeficiente de fricción:

- Ausencia total de fricción, $f=0$. Esta situación idealizada se corresponde con el caso de la lubricación hidrodinámica de los dientes, donde las condiciones geométricas, cinemáticas y de viscosidad del lubricante son tan favorables que el espesor de la película excluye totalmente el contacto

metal – metal y el valor del coeficiente de fricción es del orden de las milésimas, prácticamente cero. O el caso de la lubricación elastohidrodinámica propia de los contactos bien lubricados excesivamente cargados donde las cualidades de la película lubricante no solo dependen de parámetros geométricos, cinemáticos y viscosos, sino de la elasticidad de los materiales en contacto, que provoca deformaciones de las superficies y de la dependencia de la viscosidad del aceite no sólo de la temperatura sino del comportamiento viscosidad - presión del mismo, aspectos estos que conducen finalmente a que la película de lubricante que se origina entre los pares en contacto sea muy fina, pero extremadamente resistente limitando sensiblemente el contacto metálico y reduciendo el valor del coeficiente de fricción a valores muy pequeños en dependencia de la rugosidad superficial del par de superficies en contacto.

- Coeficientes de fricción de $f = 0,2$ y $f = 0,5$. Estos valores son típicos del rango en el que se mueve el coeficiente de fricción en el caso de la lubricación de película límite donde las condiciones de lubricación son más desfavorables producto de: bajas velocidades de deslizamiento, grandes cargas, elevadas rugosidades superficiales, altas temperaturas de contacto, baja viscosidad, escasos volúmenes de lubricante, etc. Transmisiones por lo regular o cerradas, con una lubricación no muy eficiente, o abiertas a la atmósfera, de poca importancia en las cuales dadas las mencionadas condiciones, el espesor de la película de lubricante no excluye el contacto metálico entre las irregularidades aunque si es capaz de limitar, en mayor o menor medida, el efecto adhesivo del contacto reduciendo el valor del coeficiente de fricción al orden de las décimas.
- Coeficiente de fricción $f = 0,8$, próximo a la unidad. Esta situación también idealizada se corresponde con la situación extrema opuesta, o sea, ausencia casi total de lubricante, superficies idealmente secas, con pares de contacto poco compatibles (por ejemplo acero con acero), lo que permitió evaluar el espectro completo de valores de coeficiente de fricción posibles en las transmisiones por engranajes.

Se evaluaron siete condiciones desde el punto de vista del coeficiente de corrección del dentado que son. $\xi = -0,6; -0,3; 0,0; 0,3; 0,6; 1,0$ y $1,4$.

Como resultado del procesamiento se obtuvieron las Familias de Curvas que se muestran en las Figuras. 2.2 a) y b) donde se puede apreciar la influencia simultánea de los coeficientes de corrección y de fricción en el Factor de Forma para las ruedas conductoras y para las ruedas conducidas de perfil simétrico respectivamente.

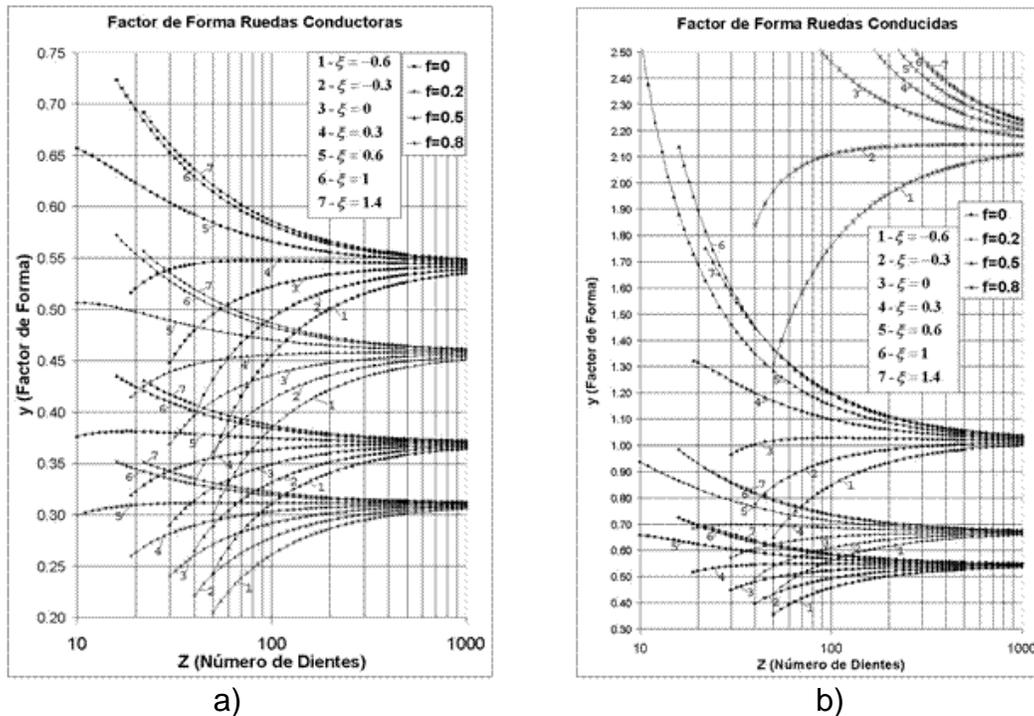


Figura 2.2 Valores del factor de forma para las ruedas conductoras y conducidas de perfil simétrico para diferentes coeficientes de fricción y de corrección del dento.

2.1.2 Cálculo de las tensiones en el pié.

2.1.2.1 Expresiones utilizadas para el cálculo de las tensiones.

El cálculo de las tensiones volumétricas se realizará a través de la expresión:

$$\sigma' = \sigma_f - \sigma_c = \frac{q_n}{m \cdot y} \quad (2.27)$$

Obtenida mediante el análisis de las tensiones provocadas por las cargas: tangencial (flexión) y radial (compresión) de donde se obtiene la expresión para el

cálculo del Factor de Forma, en la cual la carga q_n se calcula mediante la expresión (Dobrovolski, 1970):

$$q_n = \frac{M_t \cdot (i+1)}{A \cdot b \cdot i \cdot \cos \alpha} \quad (2.28)$$

Donde:

M_t - Momento torsor correspondiente a la rueda conductora,

i - Relación de transmisión,

A - Distancia entre centros,

b - Ancho del Engranaje,

Sustituyendo las expresiones de la Distancia entre Centros, la Relación de Transmisión en la ecuación (2.28) y haciendo corresponder el torque correspondiente a par de ruedas engranadas, se obtienen dos expresiones para el cálculo de la carga distribuida q_n para la rueda conductora (piñón, subíndice: p) y la conducida (corona, subíndice: c) respectivamente:

$$q_{np} = \frac{2 \cdot M_{tp}}{b \cdot m \cdot Z_p \cdot \cos \alpha} \quad (2.29)$$

$$q_{nc} = \frac{2 \cdot M_{tc}}{b \cdot m \cdot Z_c \cdot \cos \alpha}$$

Para obtener la tensión volumétrica sustituyendo (2.29) en la expresión (2.27):

$$\sigma'_p = \frac{2 \cdot M_{tp} \cdot k_\sigma}{b \cdot m^2 \cdot Z_p \cdot y \cdot \cos \alpha} \quad (2.30)$$

$$\sigma'_c = \frac{2 \cdot M_{tc} \cdot k_\sigma}{b \cdot m^2 \cdot Z_n \cdot y \cdot \cos \alpha}$$

y - Factor de forma.

k_σ - Coeficiente de concentración de tensiones.

2.1.2.2 Expresiones para el cálculo de las tensiones volumétricas en el pie del diente dadas en las normas internacionales.

A continuación se reflejan las expresiones de las distintas normas mencionadas para el cálculo de las tensiones volumétricas en el pie del diente. En estas

expresiones sólo se tomarán en cuenta el coeficiente que involucra la geometría del diente de los engranajes (Factor de Forma) y el coeficiente que toma en cuenta la concentración de tensiones.

- **Expresión de la Norma AGMA.**

La expresión de cálculo de las tensiones según el método AGMA es transformada de forma adecuada, sustituyendo las magnitudes utilizadas en el epígrafe 3 de este trabajo:

$$\sigma_{AGMA} = \frac{2 \cdot M_t}{b \cdot m^2 \cdot Z \cdot J} \quad (2.31)$$

El factor Geométrico J , obtenido gráficamente, tiene por objeto introducir el efecto de la forma del diente en la ecuación de cálculo y contempla un factor modificado de Lewis (Y), la posición del diente en la que se aplica la carga crítica, el factor de concentración de tensiones por fatiga (K_f) según el método de Dolan-Broghamer, sin reducción por sensibilidad a la concentración de tensiones en el pie, y una relación de repartición de carga entre uno o más pares de dientes según (ANSI/AGMA Standard 908-B89, 1995) No se toma en cuenta por esta Norma el efecto de la Corrección del Dentado, ni la variación del Coeficiente de Fricción.

- **Expresión de las Normas ISO y DIN.**

Se utilizara para el análisis a realizar en este trabajo la expresión de la tensión nominal que toma en cuenta la máxima fuerza tangencial aplicada en el vértice superior del diente. (DIN 3990 Teil 3, 1987); (ISO 6336-1, 2, 3, 1996)

$$\sigma_{ISO-DIN} = \frac{2 \cdot M_t}{b \cdot m^2 \cdot Z} \cdot Y_{Fa} \quad (2.32)$$

Las Normas ISO y DIN consideran para el cálculo de las tensiones sólo la componente tangencial de la carga normal aplicada al vértice del diente, no tomando en cuenta el efecto favorable de la componente radial; por lo que las tensiones obtenidas por este método dan mayores que las que realmente aparecen. No considera el efecto de la concentración de tensiones en el pie del diente, ni el efecto de la fuerza de fricción.

- **Expresión de la Norma GOST.**

De igual manera que en los subepígrafes anteriores, se adecua la expresión de la Norma (GOST 21354-87, 1989) obteniendo para el análisis posterior la siguiente:

$$\sigma_{GOST} = \frac{2 \cdot M_t}{b \cdot m^2 \cdot Z} \cdot Y_{FS} \quad (2.33)$$

El factor de forma Y_{FS} de esta Norma integra (al igual que la Norma AGMA) el efecto de la concentración de tensiones en el pie del diente. Toma en cuenta además, el efecto favorable de la componente radial de la fuerza normal aplicada en el vértice del diente y el efecto de la corrección del dentado. Como las anteriores, no toma en cuenta el efecto de la fuerza de fricción.

2.2 Nuevo modelo matemático desarrollado para calcular el factor de forma y las tensiones en el pie en los dientes evolventes de perfil asimétrico considerando la componente radial de la carga y los coeficientes de corrección y de fricción.

2.2.1 Fuerzas y tensiones que serán consideradas.

Se verá primero cuál es la expresión del factor de forma de un diente de una rueda de dientes asimétricos incorporando la tensión de compresión provocada por la componente radial de la carga y la fuerza de fricción. La carga específica normal por unidad de ancho de la rueda ha sido expresada por q_n y actúa a lo largo de la línea de engranaje, como es conocido y perpendicularmente a ésta actúa la fuerza de rozamiento dirigida hacia el vértice del diente, en el caso de las ruedas conductoras, o hacia al pie del diente, en el caso de las ruedas conducidas. La composición de las fuerzas normal y de fricción, forman la carga resultante q_r inclinada un ángulo ρ respecto a la dirección de q_n , siendo éste el ángulo de fricción. En la Figura 2.3 se muestra un diente de la rueda conductora sobre la cual actúan la carga específica q_n y la fuerza resultante q_r al componer ésta con la carga específica de fricción q_{fr} .

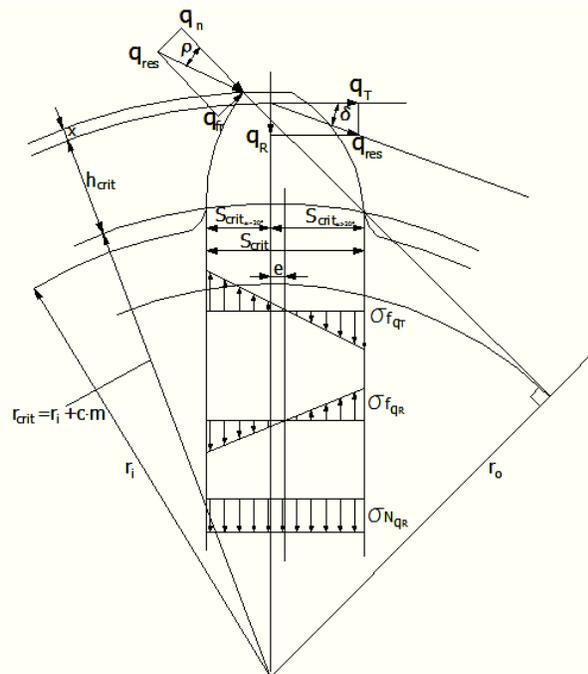


Figura 2.3 Cargas actuantes en la circunferencia exterior en el momento final del contacto para la rueda conductora y tensiones que surgen en el pie del diente

La carga específica resultante considerando la fuerza de fricción es: $q_r = \frac{q_n}{\cos \rho}$. La

componente tangencial de esta carga es: $q_T = q_r \cdot \cos \delta = \frac{q_n \cdot \cos \delta}{\cos \rho}$ y la

componente radial es: $q_R = q_r \cdot \sin \delta = \frac{q_n \cdot \sin \delta}{\sin \rho}$

La tensión resultante en el pie está compuesta por la tensión de flexión provocada por la componente q_T : $\sigma_{f_{q_T}}$; la tensión de flexión provocada por la componente q_R : $\sigma_{f_{q_R}}$ y la tensión de compresión directa provocada por la componente radial de la carga q_R : $\sigma_{N_{q_R}}$, o sea:

$$\sigma_{res} = \sigma_{f_{q_T}} - \sigma_{f_{q_R}} - \sigma_{N_{q_R}}$$

La tensión de flexión provocada por la componente tangencial de la carga específica será:

$$\sigma_{fq_T} = \frac{q_T \cdot h_{crit}}{w} = \frac{q_n \cdot h_{crit} \cdot \cos \delta}{\frac{1}{6} \cdot S_{crit}^2 \cdot \cos \rho} = \frac{6 \cdot q_n \cdot h_{crit} \cdot \cos \delta}{S_{crit}^2 \cdot \cos \rho}$$

La tensión de flexión provocada por la componente radial de la carga específica será:

$$\sigma_{fq_R} = \frac{q_R \cdot e}{w} = \frac{q_n \cdot e \cdot \text{sen} \delta}{\frac{1}{6} \cdot S_{crit}^2 \cdot \cos \rho} = \frac{6 \cdot q_n \cdot e \cdot \text{sen} \delta}{S_{crit}^2 \cdot \cos \rho}$$

Y la tensión de compresión directa provocada por la componente radial es:

$$\sigma_{Nq_R} = \frac{q_R}{A} = \frac{q_n \cdot \text{sen} \delta}{S_{crit} \cdot \cos \rho}$$

Sumando algebraicamente estas tensiones se obtiene la tensión resultante en el pie del diente:

$$\sigma_{res} = \frac{6 \cdot q_n \cdot h_{crit} \cdot \cos \delta}{S_{crit}^2 \cdot \cos \rho} - \frac{6 \cdot q_n \cdot e \cdot \text{sen} \delta}{S_{crit}^2 \cdot \cos \rho} - \frac{q_n \cdot \text{sen} \delta}{S_{crit} \cdot \cos \rho} \quad (2.36)$$

Si se expresa la tensión resultante en función del Factor de Forma según la expresión siguiente:

$$\sigma_{res} = \frac{q_n \cdot Y_F}{m} \quad (2.37)$$

Entonces de la ecuación (2,36) se tiene que:

$$\sigma_{fq_R} = \frac{q_n}{m} \cdot \left[\frac{6 \cdot \left(\frac{h_{crit}}{m} \right) \cdot \cos \delta - 6 \cdot \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta}{\left(\frac{S_{crit}}{m} \right)^2 \cdot \cos \rho} - \frac{\left(\frac{S_{crit}}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta}{\left(\frac{S_{crit}}{m} \right)^2 \cdot \cos \rho} \right] \quad (2.38)$$

Donde el Factor de Forma queda expresado como sigue:

$$Y_F = \frac{6 \cdot \left[\left(\frac{h_{crit}}{m} \right) \cdot \cos \delta - \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta \right] - \left(\frac{S_{crit}}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta}{\left(\frac{S_{crit}}{m} \right)^2 \cdot \cos \rho} \quad (2.39)$$

Si por el contrario se expresa la tensión resultante en función del Factor de Forma según la expresión siguiente:

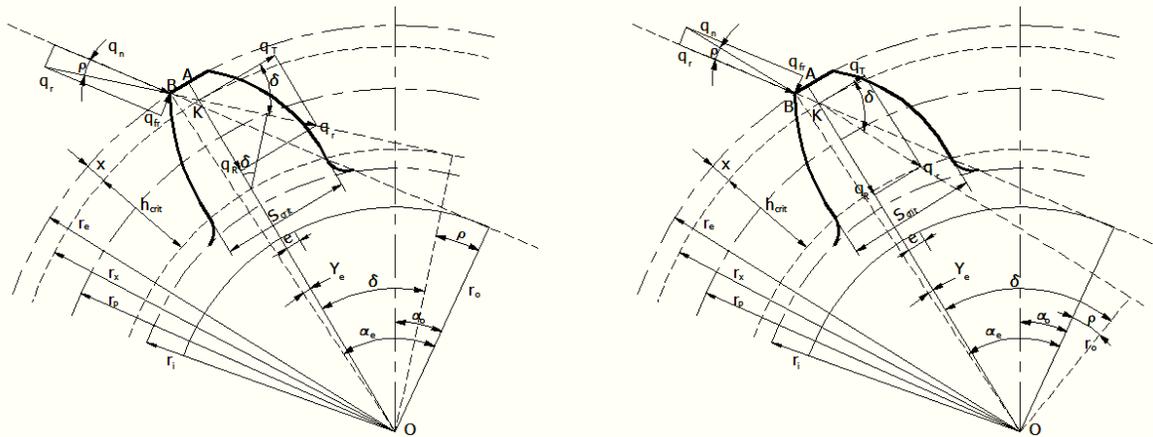
$$\sigma_{res} = \frac{q_n}{m \cdot y_F} \quad (2.40)$$

El Factor de Forma quedará entonces expresado como sigue:

$$y_F = \frac{\left(\frac{S_{crit}}{m} \right)^2 \cdot \cos \rho}{6 \cdot \left[\left(\frac{h_{crit}}{m} \right) \cdot \cos \delta - \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta \right] - \left(\frac{S_{crit}}{m} \right) \cdot \text{sen} \delta} \quad (2.41)$$

Esta última expresión será la utilizada.

En la Figura 2.4 a) se muestran las cargas que actúan sobre un diente de la rueda conductora en el instante en que sale del contacto con la rueda conducida y en la Figura 2-4 b) se muestran las cargas sobre un diente de la rueda conducida en el instante en que entra en contacto con un diente de la rueda conductora. Al producirse el engranaje entre las dos ruedas, primeramente entra en contacto el extremo o vértice de la cabeza del diente de la rueda conducida con el pie del diente de la rueda conductora, terminando con el contacto del vértice de la rueda conductora con el pie del diente de la rueda conducida. En ambos casos la carga específica normal por unidad de ancho de la rueda ha sido expresada, como se expresó anteriormente, por q_n y actúa a lo largo de la línea de engranaje y perpendicularmente a ésta actúa la fuerza de rozamiento dirigida hacia el vértice del diente, en el caso de las ruedas conductoras, o hacia al pie del diente, en el caso de las ruedas conducidas. La composición de las fuerzas normal y de fricción, forman la carga resultante q_r , inclinada un ángulo ρ respecto a la dirección de q_n , siendo éste el ángulo de fricción.



a)

b)

Figura 2.4 Cargas actuantes en la circunferencia exterior en el momento final e inicial de contacto para la Rueda Conducidora (a) y para la Rueda Conducida (b) respectivamente.

Al trasladar la carga q_r a lo largo de su línea de acción, intercepta el eje bisectriz del espesor de la cabeza del diente en el punto K. Esta fuerza se descompone en este punto en sus componentes rectangulares q_T y q_R . El ángulo que forma la carga q_r con el eje T es δ . Como se puede observar además, el punto K de acción de la carga resultante se encuentra desplazado del borde exterior de la cabeza del diente una distancia x . Esta distancia tiene gran importancia para el cálculo de resistencia a la fractura de las transmisiones analizadas, pues el momento flector en la base del diente depende proporcionalmente de la altura h_{crit} . El espesor del diente en la base se tomó como S_{crit} , donde termina teóricamente el perfil evolvente y comienza a medirse la altura h_{crit} .

2.2.2 Cálculo del corrimiento “x” de la carga total q_n en los vértices del diente al ser trasladada la carga resultante hacia el eje del diente.

De la Figura 2.4 a) se obtiene el triángulo AOB mostrado de forma independiente en la Figura 2.5. El lado OA se divide en los segmentos OK y KA. El lado AB se toma como la mitad del espesor del diente en la circunferencia exterior. El triángulo ABC se toma isósceles de base $S_e/2$ y lado r_e .

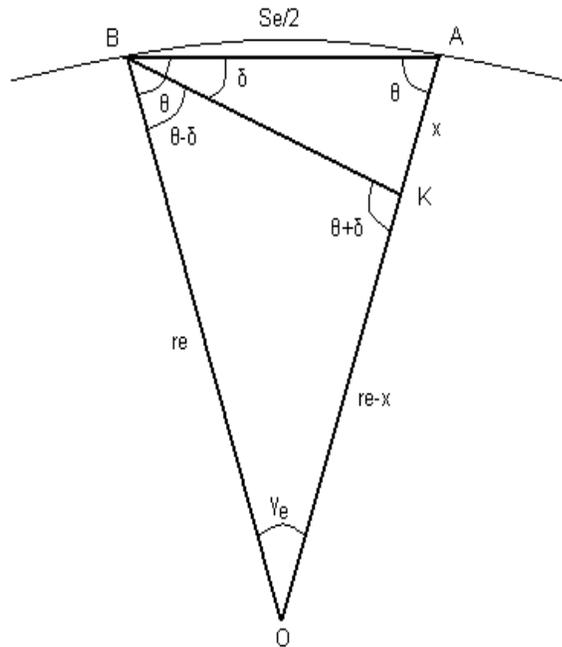
De la Figura 2.4 se tiene que:

$$\overline{OK} = r_e - x \quad , \quad \overline{AK} = x \quad , \quad \overline{OB} = r_e \quad , \quad \overline{AB} = \frac{S_e}{2}$$

Aplicando la ley de los senos se obtiene:

$$\frac{r_e}{\text{sen}(\theta + \delta)} = \frac{r_e - x}{\text{sen}(\theta - \delta)}$$

Se obtiene despejando que x es:



$$x = r_e \left[1 - \frac{\text{sen}(\theta - \delta)}{\text{sen}(\theta + \delta)} \right] \quad (2.42)$$

Figura 2.5 Esquema geométrico para la obtención del corrimiento x.

Donde (Véase Figura 2.4):

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \frac{S_e}{4 \cdot r_e} \\ \delta &= \alpha_e - \gamma_e \pm \rho \\ \gamma_e &= 180 - 2 \cdot \theta \end{aligned} \quad (2.43)$$

El ángulo ρ es el ángulo de fricción y el signo: “+” o “-” se toman en dependencia, si la rueda analizada es conducida o conductora respectivamente.

2.2.3 Otras ecuaciones del nuevo modelo.

El espesor del diente en la circunferencia exterior se calcula por la expresión:

$$S_e = 2 \cdot r_e \cdot \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_e \right) \quad (2.44)$$

$$S_p = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \xi \cdot \tan \alpha \right) \quad (2.45)$$

$$r_p = \frac{m \cdot Z}{2}$$

Considerando que el coeficiente de cizallamiento invertido sea cero, pues su influencia en el Factor de Forma es insignificante; la expresión para el cálculo del radio exterior será:

$$r_e = \frac{m}{2} \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2) \quad (2.46)$$

Donde: m , Z y ξ ; son el módulo, el número de dientes y el coeficiente de corrección respectivamente.

Sustituyendo (2.45) y (2.46) en la expresión (2.44) del espesor del diente en la circunferencia exterior:

$$S_e = m \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2) \cdot \left(\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{2 \cdot Z} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_e \right) \quad (2.47)$$

el ángulo θ se calcula como:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{4 \cdot Z} + \frac{\text{inv} \alpha}{2} - \frac{\text{inv} \alpha_e}{2} \right) \quad (2.48)$$

Por la teoría básica de los engranajes se conoce que:

$$\begin{aligned} \text{inv} \alpha_e &= \tan \alpha_e - \alpha_e \\ \alpha_e &= \cos^{-1} \frac{r_0}{r_e} = \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \\ \rho &= \tan^{-1} f \end{aligned} \quad (2.49)$$

La involuta del ángulo α es una constante pues se considera $\alpha = 20^\circ$ (cremallera básica) y su valor es: $inv\alpha = 0.0149083$. La involuta de α_e se puede calcular como:

$$inv\alpha_e = \tan \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] - \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] \quad (2.50)$$

Finalmente la expresión para el ángulo δ es:

$$\delta = \cos^{-1} \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] + 2 \cdot \theta - 180^\circ \pm \tan^{-1} f \quad (2.51)$$

Teniendo los valores de f se puede calcular el valor del ángulo δ .

A continuación se calculará la magnitud de la relación $h_{crit.}/m$. En la Figura 2.3 se puede apreciar que la altura $h_{crit.}$ se encuentra entre una circunferencia por encima de la circunferencia interior en una magnitud de $c \cdot m$ y otra circunferencia por debajo de la exterior una magnitud x . Como la altura total de un diente es $2.25 m$:

$$h_{crit.} = 2.25 \cdot m - c \cdot m - x \quad (2.52)$$

Sustituyendo x se obtiene:

$$h_{crit.} = 2.25 \cdot m - c \cdot m - r_e \left[1 - \frac{\text{sen} \cdot (\theta - \delta)}{\text{sen} \cdot (\theta + \delta)} \right] \quad (2.53)$$

Conocido el valor de r_e :

$$h_{crit.}/m = 2.25 - c - \left(\frac{Z}{2} + \xi + 1 \right) \cdot \left[1 - \frac{\text{sen} \cdot (\theta - \delta)}{\text{sen} \cdot (\theta + \delta)} \right] \quad (2.54)$$

La relación $S_{crit.}/m$ se calcula teniendo en cuenta que $S_{crit.}$ es el espesor del diente en el pie, en la circunferencia que se encuentra a una magnitud $c \cdot m$ por encima del radio interior. Vale aclarar además que el cálculo se realizará teniendo en cuenta que la circunferencia base tenga un radio menor que la circunferencia antes mencionada. Para el cálculo de esta relación se toma como base la expresión del espesor de un diente para una circunferencia cualquiera con radio r_n

:

$$S_n = 2 \cdot r_n \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + inv\alpha + inv\alpha_n \right) \quad (2.55)$$

Sucede que en el caso de los dientes asimétricos es espesor S_{crit} . Está compuesto por la mitad del espesor del diente con $\alpha = 20^\circ$ y la otra mitad del espesor del diente con α' mayor que 20° . De donde S_{crit} será:

$$S_{crit} = r_n \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + inv \alpha + inv \alpha_n \right) + r_n \left(\frac{S_p}{2 \cdot r_p} + inv \alpha' + inv \alpha'_n \right) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} r_n &= r_i + c \cdot m \quad (\text{según el planteamiento anterior}) \\ r_i &= r_p + \xi \cdot m - 1.25 \cdot m \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$r_n = m \cdot \left(\frac{Z}{2} + \xi + c - 1.25 \right) = \frac{m}{2} \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25) \quad (2.58)$$

$$\alpha_n = \cos^{-1} \frac{r_0}{r_n} = \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \quad (2.59)$$

$$\alpha'_n = \cos^{-1} \frac{r'_0}{r_n} = \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha'}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \quad (2.60)$$

Luego con r_n y los conocidos valores de S_p y r_p la magnitud de la relación S_{crit}/m será:

$$S_n / m = S / m = (Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.5) \cdot \left[\frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{2 \cdot Z} + inv \alpha - inv \alpha_n \right] \quad (2.61)$$

Conociendo el valor de α_n ; la $inv \alpha_n$ será:

$$inv \alpha_n = \tan \alpha_n - \alpha_n \quad (2.62)$$

$$inv \alpha_n = \tan \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] - \left[\cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] \quad (2.63)$$

La excentricidad e se puede calcular como:

$$e = S_{crit \alpha \geq 20^\circ} / 2 - S_{crit \alpha = 20^\circ} / 2 \quad (2.64)$$

De esta forma han sido obtenidas las ecuaciones que completan el Nuevo Modelo Matemático para el cálculo del factor de forma, las componentes de las tensiones en el pie y la tensión resultante en engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil evolvente y círculo, asimétricos. En las ecuaciones antes mencionadas "c" es

el Coeficiente de radio de curvatura del pie del diente ($c = 0.4$ para el análisis de este trabajo). El coseno del ángulo de fricción se calcula como sigue:

$$\cos \rho = \sqrt{\frac{1}{1+f^2}} \quad (2.65)$$

El modelo fue procesado en Microsoft EXCEL para las ruedas asimétricas conductora y conducida respectivamente en sendas hojas de cálculo para números de dientes desde 10 hasta 200 y evaluando tres condiciones diferentes desde el punto de vista del coeficiente de fricción y se obtuvieron los resultados que se muestran a continuación:

- Ausencia total de fricción, $f = 0$. Esta situación idealizada se corresponde con el caso de la lubricación hidrodinámica de los dientes, donde las condiciones geométricas, cinemáticas y de viscosidad del lubricante son tan favorables que el espesor de la película excluye totalmente el contacto metal – metal y el valor del coeficiente de fricción es del orden de las milésimas, prácticamente cero. O el caso de la lubricación elastohidrodinámica propia de los contactos bien lubricados excesivamente cargados donde las cualidades de la película lubricante no solo dependen de parámetros geométricos, cinemáticos y viscosos, sino de la elasticidad de los materiales en contacto, que provoca deformaciones de las superficies y de la dependencia de la viscosidad del aceite no sólo de la temperatura sino del comportamiento viscosidad - presión del mismo, aspectos estos que conducen finalmente a que la película de lubricante que se origina entre los pares en contacto sea muy fina, pero extremadamente resistente limitando sensiblemente el contacto metálico y reduciendo el valor del coeficiente de fricción a valores muy pequeños en dependencia de la rugosidad superficial del par de superficies en contacto. (Goytisolo y Moya, 1976); (Goytisolo y Moya, 1977)
- Coeficientes de fricción de $f = 0,2$ y $f = 0,5$. Estos valores son típicos del rango en el que se mueve el coeficiente de fricción en el caso de la lubricación de los engranajes normales con lubricación hidrodinámica inestable o con lubricación de película límite donde las condiciones de lubricación son más desfavorables producto de: bajas velocidades de deslizamiento, grandes cargas, elevadas rugosidades superficiales, altas temperaturas de contacto, baja viscosidad, escasos volúmenes de lubricante, etc. Transmisiones por lo regular o cerradas, con una lubricación no muy eficiente, o abiertas a la atmósfera, de poca importancia en las cuales dadas las mencionadas condiciones, el espesor de la película de

lubricante no excluye el contacto metálico entre las irregularidades aunque si es capaz de limitar, en mayor o menor medida, el efecto adhesivo del contacto reduciendo el valor del coeficiente de fricción al orden de las décimas. La experiencia de investigación del tutor principal de esta trabajo le ha permitido confirmar que la fuerza de fricción, que depende básicamente de las condiciones de lubricación de los engranajes y de los materiales en contacto, influye sensiblemente en el valor del factor de forma, aunque ninguna norma considera esta sensible influencia, así por ejemplo para los engranajes de perfil simétrico la elevación del coeficiente de fricción desde cero hasta 0,5, eleva el valor del factor de forma de las ruedas conducidas en una magnitud del orden del doble y reduce el valor del factor de forma de las ruedas conductoras en el orden del 33 %. Esta consideración es un elemento más para diferenciar el comportamiento de las ruedas conductoras y conducidas. En el caso de los materiales plásticos, donde las ruedas de dientes rectos de perfil asimétrico tienen un importante campo de aplicación (Moya et. al, 2010) se hace más evidente tomar en cuenta el coeficiente de fricción. En dicho trabajo el colectivo de autores no tomó en cuenta el coeficiente de fricción. Para confirmar la necesidad de considerarlo según (Budinski, 1992) plantea por ejemplo que el coeficiente de fricción para los materiales plásticos varía, en dependencia del tipo de plástico, desde 0,04 a 0,45, por lo que cabe esperar que esta influencia sea significativa con estos materiales.

- Coeficiente de fricción $f = 0,8$, próximo a la unidad. Esta situación también idealizada se corresponde con la situación extrema opuesta, o sea, ausencia casi total de lubricante, superficies idealmente secas, con pares de contacto poco compatibles (por ejemplo acero con acero), lo que permitió evaluar el espectro completo de valores de coeficiente de fricción posibles en las transmisiones por engranajes.

Se evaluaron, igual que para los simétricos, ocho condiciones desde el punto de vista del coeficiente de corrección del dentado que son:

$$\xi = -0,6; -0,3; 0,0; 0,3; 0,6; 1,0; 1,4 \text{ y } 1,8.$$

2.3 Resultados obtenidos en el cálculo de las tensiones en el pie para los dientes de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos obtenidos por el nuevo modelo matemático elaborado en el presente trabajo para diferentes coeficientes de fricción y de corrección, con coeficiente de asimetría

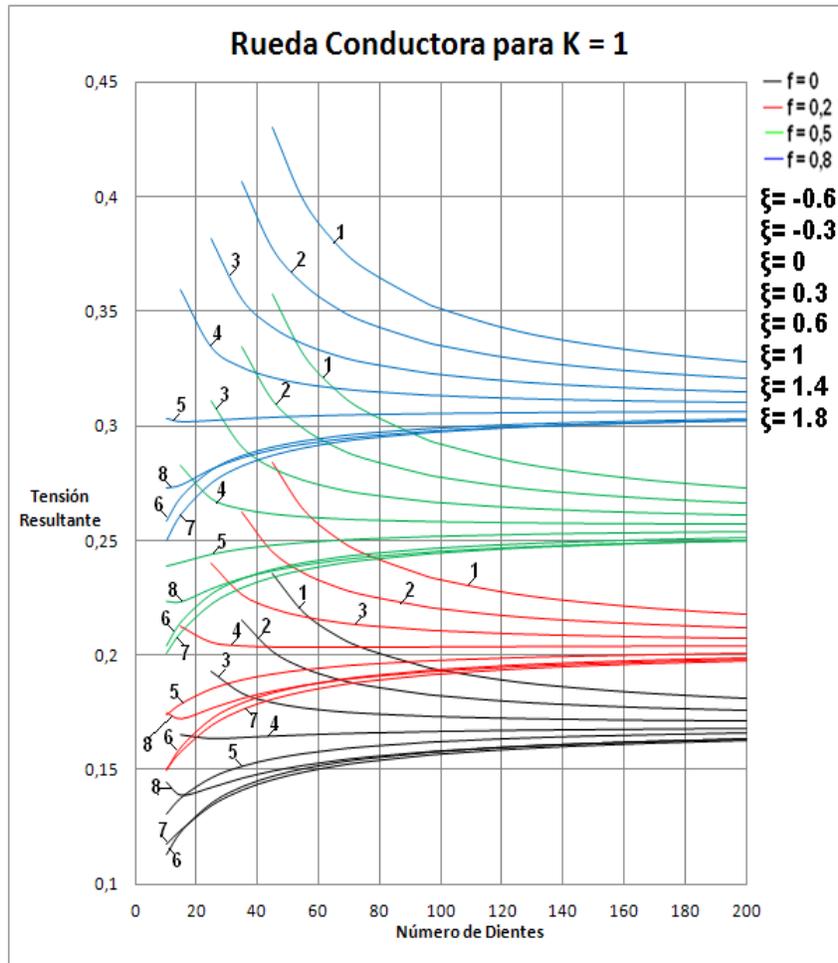
$$c = 1,5 (\alpha = 20^\circ \text{ y } \alpha' = 30^\circ)$$

Las expresiones del nuevo modelo para los dientes de perfil asimétrico se procesaron en Microsoft EXCEL para las ruedas conductoras y conducidas respectivamente en sendas hojas de cálculo para números de dientes desde 10 hasta 200.

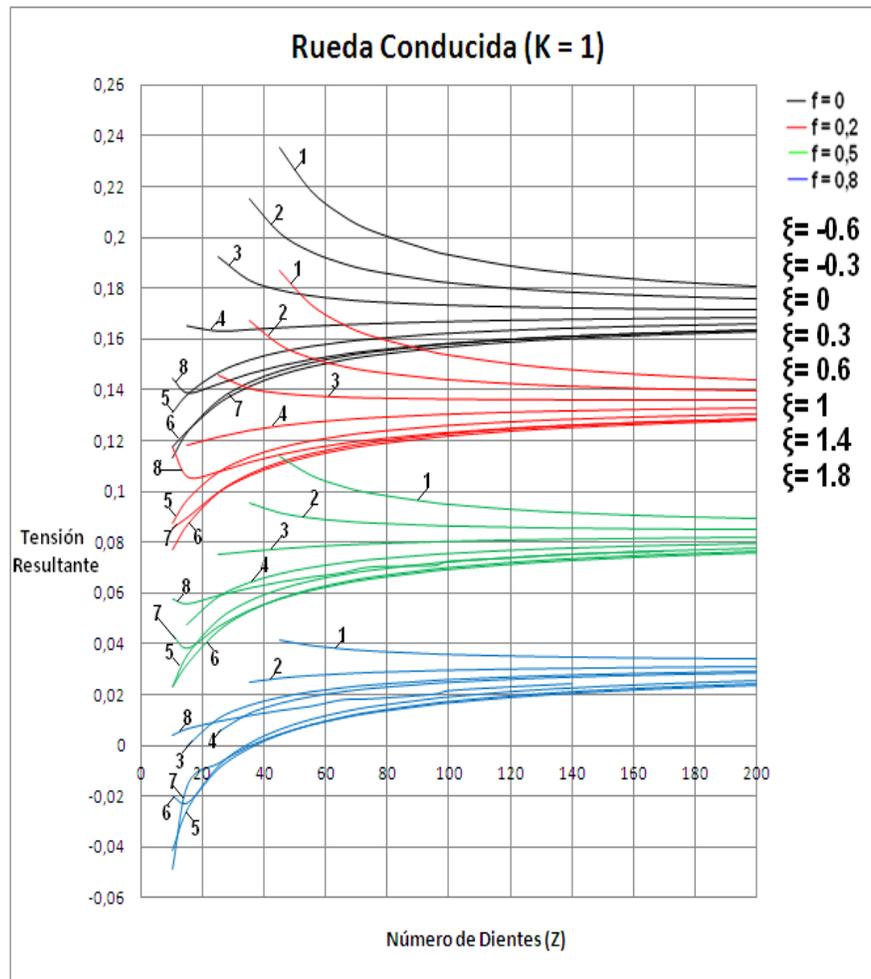
Como resultado del procesamiento se obtuvieron las Familias de Curvas para la tensión resultante en el pie que se muestran en las Figuras. 2.5 a) y b) y 2.6 a) y b). En ellas se puede apreciar la influencia simultánea de los coeficientes de corrección y de fricción en el factor de forma para las ruedas conductoras y para las conducidas de perfil asimétrico.

Otro aspecto importante a considerar es la tensión de compresión en el pie de la componente radial de la carga, que fue considerada por (Quiñones, 2005) para los dientes simétricos, pero que no ha sido considerada por ninguno de los autores que han trabajado los engranajes de dientes rectos de perfil asimétrico.

El término $K = 1$ señalado en la parte superior de las curvas indica que en estos cálculos fueron incluidos los efectos favorables de la componente directa de tensión de compresión provocada por la componente radial de la carga, que no había sido incluida por ninguno de los autores precedentes que han calculado factores de forma en engranajes asimétricos (Velázquez, 2007) y (Cárdenas, 2013). A modo de poder evaluar claramente el efecto favorable de dicha componente radial de tensión de compresión en las Figuras 2.6 a) y b) se dan los mismos resultados anteriores pero despreciando la componente radial de la carga sobre los dientes ($K = 0$)

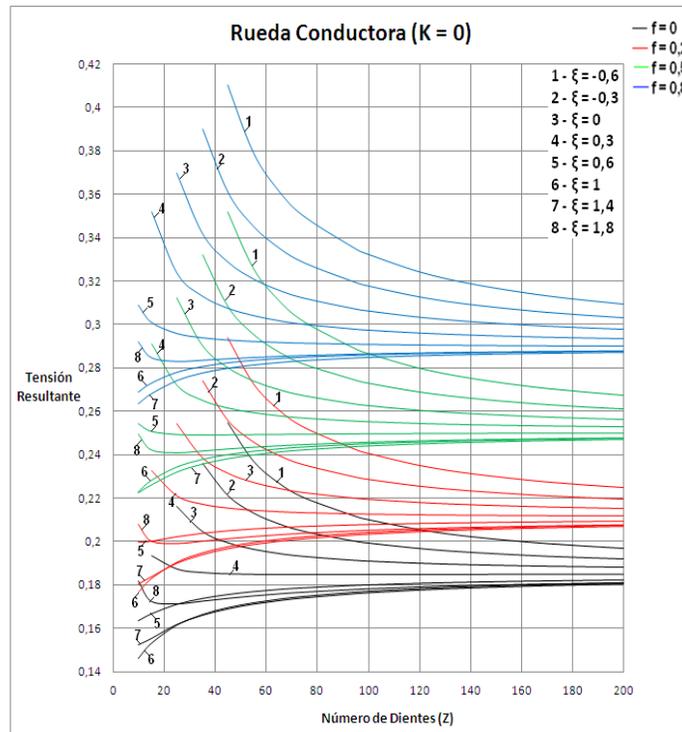


a)

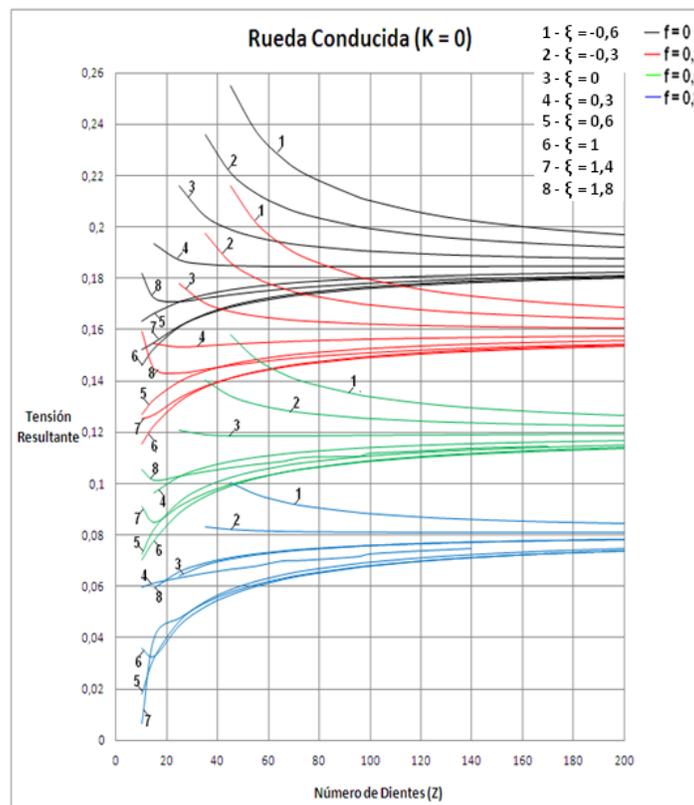


b)

Figura 2.5 Valores de la tensión resultante en el pie para las ruedas conductoras y conducidas de perfil asimétrico para diferentes coeficientes de fricción y de corrección del dentado, obtenidos en el presente trabajo considerando el efecto favorable de la componente directa de compresión de la carga radial sobre el diente (K = 1).



a)



b)

b)

Figura 2.6 Valores del factor de forma para las ruedas conductoras y conducidas de perfil asimétrico para diferentes coeficientes de fricción y de corrección del dentado, obtenidos en el presente trabajo despreciando el efecto favorable de la componente directa de compresión de la carga radial sobre el diente ($K = 0$).

Analizando los resultados del cálculo de la tensión resultante en el pie para las ruedas cilíndricas de las Figuras 2.5 y 2.6 para las ruedas conductoras con dientes asimétricos se tiene lo siguiente:

En la Tabla 2.1 se muestran de forma sintética los resultados obtenidos.

Tabla 2.1 Resultados del modelo matemático elaborado para el cálculo de la tensión resultante en los engranajes con dientes de perfil asimétrico para las ruedas conductoras, considerando la tensión de compresión de la componente radial de la carga ($K = 1$) y despreciando dicha componente ($K = 0$)				
Coeficiente de fricción	Valor medio de la tensión en el pie para 200 dientes MPa	Valor mínimo de la tensión en el pie para 20 dientes y $\xi = 1,4$ MPa	Valor de la tensión en el pie para 100 dientes y $\xi = 1,0$ MPa	Valor máximo de la tensión en el pie para 50 dientes y $\xi = - 0,6$ MPa
Nuevo modelo elaborado para $K = 1$				
0	0,17	0,125	0,175	0,225
0,2	0,21	0,165	0,22	0,275
0,5	0,26	0,22	0,27	0,28
0,8	0,32	0,27	0,325	0,34
Nuevo modelo elaborado para $K = 0$				
0	0,19	0,16	0,19	0,245
0,2	0,215	0,187	0,22	0,281
0,5	0,26	0,23	0,262	0,34
0,8	0,30	0,27	0,308	0,388

Cuando se considera la tensión directa de compresión provocada por la componente radial de la carga ($K = 1$) los valores de la tensión en el pie para las ruedas conductoras con dientes asimétricos son mayores en la medida que aumenta el coeficiente de fricción, por lo que su comportamiento a la fractura es mucho más desfavorable en esas condiciones. Esto para un coeficiente de asimetría $c = 1,5$ que fue para el cual se hicieron estos cálculos. En el caso de despreciar la tensión directa de compresión de la componente radial de la carga (K

= 0), con coeficiente de fricción $f = 0$, los valores de la tensión en el pie son mayores que cuando se considera la componente radial de la carga ($K = 1$). Para coeficientes de corrección positiva las diferencias no son tan marcadas y sólo para coeficiente de corrección $\xi = - 0,6$ es que se observa de nuevo que las tensiones se elevan significativamente para ($K = 0$). Es necesario aclarar que la corrección negativa en general afecta la resistencia, tal como se aprecia en general en la tabla, pero lo interesante aquí es que la corrección positiva no mejora tanto la resistencia como para los engranajes simétricos, pues aquí las tensiones no disminuyen significativamente con el incremento tan notable del coeficiente de corrección.

Tabla 2.2 Resultados del modelo matemático elaborado para el cálculo de la tensión resultante en los engranajes con dientes de perfil asimétrico para las ruedas conducidas, considerando la tensión de compresión de la componente radial de la carga ($K = 1$) y despreciando dicha componente ($K = 0$)				
Coeficiente de fricción	Valor medio de la tensión en el pie para 200 dientes MPa	Valor mínimo de la tensión en el pie para 20 dientes y $\xi = 1,4$ MPa	Valor de la tensión en el pie para 100 dientes y $\xi = 1,0$ MPa	Valor máximo de la tensión en el pie para 50 dientes y $\xi = - 0,6$ MPa
Nuevo modelo elaborado para $K = 1$				
0	0,17	0,125	0,175	0,225
0,2	0,135	0,092	0,135	0,18
0,5	0,08	0,04	0,08	0,11
0,8	0,03	- 0,02	0,03	0,04
Nuevo modelo elaborado para $K = 0$				
0	0,19	0,16	0,19	0,245
0,2	0,15	0,128	0,163	0,23
0,5	0,12	0,085	0,119	0,153
0,8	0,08	0,04	0,075	0,10

Analizando la Tabla 3.2 para las ruedas conducidas se aprecia como el incremento del coeficiente de fricción para cualquier coeficiente de corrección mejora la resistencia, incluso para elevados coeficientes de fricción las tensiones en el pie de tracción son tan pequeñas que la posibilidad de falla es nula, incluso estas tensiones pueden llegar a hacerse negativas (de compresión), en este caso la resistencia a la fractura por fatiga es infinita, esto se debe a la inclinación tan grande de la fuerza de fricción que hace que las tensiones de compresión

provocadas por los efectos de la componente radial de la carga sean mayores que los de la componente tangencial.

Para coeficiente de fricción cero las tensiones son idénticas para las ruedas conductoras y conducidas.

Si se desprecia la componente radial de la carga ($K = 0$) las tensiones en el pie dan mayores que si se considera esta componente ($K = 1$) de aquí la imposibilidad de despreciar esta componente para las ruedas de dientes asimétricos, por su importante efecto favorable.

Otro elemento muy significativo en el comportamiento de las ruedas asimétricas conducidas es lo relativo a los valores máximos de los coeficientes de corrección que resultan favorables. Cuando se considera la componente radial directa de la carga los valores de las tensiones para coeficientes de corrección $\xi = 1$ y $\xi = 1,4$, dan muy similares y cuando se emplea un coeficiente de corrección $\xi = 1,8$ los valores de tensiones aumentan, esto mismo sucede como se vio anteriormente para las ruedas conductoras. Esto se debe a que la corrección modifica la forma de la evolvente de los flancos del diente y esas modificaciones de los flancos equivalen a un ángulo del perfil mayor. Hay que concluir que existe un límite superior del coeficiente de corrección que se puede emplear en las ruedas de dientes asimétricos. En el caso de las ruedas conductoras con coeficiente de asimetría $c = 1,5$, según estos resultados parece ser que es límite está muy próximo a $\xi = 1$.

En general se concluye que se necesita hacer un estudio mucho más profundo que el que por razones de tiempo no se ha podido hacer en el presente trabajo para esclarecer aún más este comportamiento

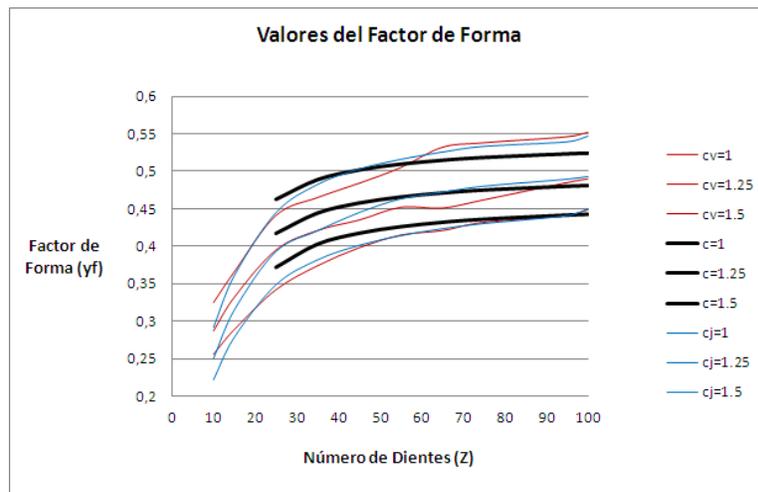
Este comportamiento es contradictorio. Para las ruedas cilíndricas de dientes rectos de perfil simétrico mientras mayor sea el coeficiente de corrección positiva que se emplee mayor es el factor de forma y menores las tensiones, sin embargo aquí se ha demostrado que ese comportamiento no es así para los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil asimétrico. Existe un límite superior del coeficiente de corrección positiva favorable. Hay que investigar qué cambios ocurren en el perfil que conducen a este comportamiento.

Para las ruedas conducidas el comportamiento es similar desde este punto de vista, existe también un límite de coeficiente de corrección máximo. Las tensiones en las ruedas conducidas disminuyen con la elevación del coeficiente de fricción tal como ocurre en la ruedas de dientes simétricos.

2.4 Comparación de los valores del factor de forma obtenidos en el presente trabajo para diferentes números de dientes y coeficientes de asimetría, para coeficiente de fricción $f = 0$, sin corrección del dentado y despreciando la tensión de compresión directa provocada por la componente radial de la carga.

Los autores precedentes que han investigado el factor de forma y las tensiones para engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos (Velázquez, 2007) y (Cárdenas, 2013), lo han hecho para diferentes números de dientes y coeficientes de asimetría, para coeficiente de fricción $f = 0$, sin corrección del dentado y despreciando la tensión de compresión directa provocada por la componente radial de la carga. No han realizado cálculo de tensiones para estas condiciones.

A modo de comparación con el modelo elaborado en el presente trabajo se han calculado los mismos los factores de forma que en dichos trabajos precedentes, despreciando, tal como lo hicieron ellos, el coeficiente de fricción $f = 0$, el coeficiente de corrección $\xi = 0$ y sin considerar la tensión de compresión directa provocada por la componente radial de la carga. Los resultados obtenidos por los tres trabajos se muestran en una sola gráfica en la Figura 2.8. Hay que recordar que el coeficiente de asimetría es la relación entre el ángulo α' de respaldo entre el ángulo α del lado de ataque.



c_v (Velázquez), c_j (Cárdenas), c (Nuevo modelo).

Figura 2.8 Factores de forma para diferentes coeficientes de asimetría. Las curvas superiores corresponden a la asimetría mayor ($c = 1,5$)

Como se aprecia los resultados son muy similares, las diferencias son pequeñas y lo sinuoso de las curvas de los autores precedentes conduce a pensar en algunas

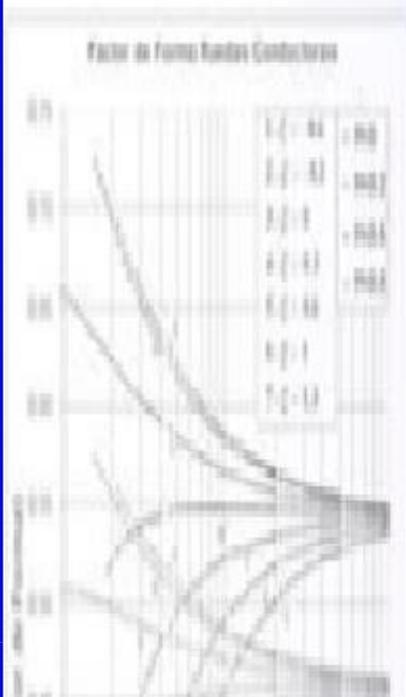
deficiencias en la exactitud de dichos modelos. Las tensiones se comportan de forma inversa que los factores de forma.

2.5 Conclusiones Parciales del Capítulo II.

1. En los cálculos de las tensiones en el pie para engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil simétrico el único que consideró la presencia de la fuerza de fricción en el factor de forma fue (Dobrovolski, 1970), pero su análisis fue realizado sólo para un valor fijo del coeficiente de fricción, aunque da un rango en el cual puede variar, desde 0.0875 a 0.1405 ($\rho = 5^\circ$ a 8°) y en su análisis toma un valor intermedio. De esta forma Dobrovolski no analizó la influencia que tenía en el factor de forma el coeficiente de fricción.
2. El primero que analizó esta influencia para los engranajes cilíndricos de dientes rectos de perfil simétrico fue (Quiñones, 2005) e incorporo también la influencia de los coeficientes de corrección. Sus resultados fueron validados por el Método de los Elementos Finitos.
3. En el caso de los engranajes cilíndricos de dientes rectos sólo (Velázquez, 2007) y (Cárdenas, 2013) en sus respectivas Tesis de Doctorado calculan valores del factor de forma para engranajes cilíndricos rectos de perfil asimétrico, pero ninguno de los dos incorporó en el cálculo los coeficientes de fricción, ni los coeficientes de corrección y ambos despreciaron la componente directa de tensión de compresión provocada por las componente radial de la carga.
4. Con el modelo elaborado en el presente trabajo para calcular los factores de forma en engranajes cilíndricos rectos de perfil asimétrico, que incorpora el valor del coeficiente de fricción, el coeficiente de corrección del dentado, el coeficiente de asimetría para cualquier número de dientes se hicieron numerosos cálculos de los factores de forma tanto para las ruedas conductoras como para las conducidas, obteniéndose las siguientes conclusiones:
 5. En el presente trabajo se elaboró un nuevo Esquema de Análisis y un nuevo Modelo Matemático para el cálculo del factor de forma y de las tensiones en el pie y sus diferentes componentes de los dientes de las ruedas de engranajes de dientes rectos de evolvente de perfil asimétrico. En este modelo se toman en cuenta las influencias favorables de la tensión de flexión provocada por la asimetría y de la tensión directa de compresión de la componente radial de la carga sobre el diente. En las cargas se incorporó la fuerza de fricción sobre el flanco, la cual influye de forma diferente en la rueda conductora y en la rueda conducida. En las ecuaciones del modelo se ha incorporado también el coeficiente de corrección del dentado con el objetivo de poder evaluar su influencia en el factor de forma de estos engranajes.

6. El coeficiente de fricción influye significativamente en la magnitud del factor de forma y en las tensiones de las ruedas cilíndricas de dientes rectos de perfil asimétrico, haciéndose necesario tomarlo en cuenta en los cálculos. Con el incremento del coeficiente de fricción, debido al sentido desfavorable que tiene la fuerza de fricción en las ruedas conductoras, disminuye el factor de forma, elevándose las tensiones y disminuyendo por lo tanto la resistencia a la fractura de los dientes. En las ruedas conducidas, el incremento del coeficiente de fricción, dada la orientación favorable de la fuerza de fricción, produce el efecto contrario, aumentando el factor de forma, lo que reduce las tensiones y favorece la resistencia.
7. El coeficiente de corrección, cuando se considera la componente radial directa de la carga los valores de los factores de forma para coeficientes de corrección $\xi = 1$ y $\xi = 1,4$, dan muy similares y cuando se emplea un coeficiente de corrección $\xi = 1,8$ los valores del factor de forma se reducen. Hay que concluir que existe un límite superior del coeficiente de corrección que se puede emplear en las ruedas de dientes asimétricos. En el caso de las ruedas conductoras con coeficiente de asimetría $c = 1,5$, según estos resultados parece ser que el límite está muy próximo a $\xi = 1$. En el caso de las ruedas conducidas el límite superior del coeficiente de corrección es inferior ya que los valores del factor de forma para $\xi = 0,6$ y $\xi = 1$ son muy similares y ya para $\xi = 1,4$ y $\xi = 1,8$ los valores del factor de forma son inferiores.

CAPITULO 3



Capítulo III. Determinación por el Método de los Elementos Finitos de las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos y estimación del factor de concentración de tensiones en la raíz del diente.

3.1 Determinación del coeficiente de concentración de tensiones en el pie.

3.1.1 Coeficiente de Concentración de Tensiones dado por (Dobrovolski, 1970) para engranajes cilíndricos con dientes simétricos

Según (Dobrovolski, 1970) el coeficiente de concentración de tensiones en la raíz del diente de engranajes cilíndricos de dientes simétricos, depende del número de dientes, de los parámetros del perfil que genera y de la corrección, pues estos influyen directamente en el redondeo del pie del diente. También depende del material utilizado y de la calidad de la superficie. Para ruedas dentadas de acero normalizadas y templadas y con un radio de redondeo del pie del diente igual a $0.4 \cdot m$; transformando su expresión se obtiene:

$$k_{\sigma} = \begin{cases} 1.24 + 0.5 \cdot \xi & ; Z < 20 \\ 2.57 \cdot \xi + (1.5 - 2.505 \cdot \xi) \cdot e^{-\frac{3.8}{Z}} & ; 20 \leq Z \leq 100 \\ 1.45 + 0.15 \cdot \xi & ; Z > 100 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2 Coeficiente de Concentración de Tensiones de Dolan-Broghamer.

El desarrollo de una investigación foto-elástica realizada por (Dolan y Broghamer, 1942) estableció la siguiente expresión para dientes de engranajes cilíndricos de evolvente y 20° de ángulo del perfil de referencia, para dientes de engranajes cilíndricos de perfil simétrico siguiente:

$$K_t = 0.18 + \left(\frac{(S/m)}{r} \right)^{0.156} + \left(\frac{(S/m)}{(h/m)} \right)^{0.45} \quad (3.2)$$

Se observa en esta última expresión que el coeficiente de concentración de tensiones de Dolan-Broghamer no depende del módulo sino que depende del

número de dientes, de la corrección y de las características del perfil generador ($\alpha = 20^0$, $c_f = 0.4$).

3.1.3 Otros Coeficientes de concentración de tensiones encontrados en la literatura para dientes de engranajes cilíndricos de perfil simétrico.

Anteriormente fueron presentados los coeficientes de concentración de tensiones encontrados en la literatura que toman en cuenta las condiciones de carga en la punta del diente y que toman en cuenta el coeficiente de corrección, de acuerdo al enfoque de nuestro trabajo. Además de los CCT antes mencionados se encuentran otros que aunque no cumplen con los requisitos antes mencionados, vale la pena comentarlos.

(Burdón, 1964) en su artículo muestra de forma gráfica valores del CCT para engranajes de evolvente con $\alpha = 20^0$ en función de la relación altura-espesor y del radio de redondeo de la punta de la herramienta que genera el diente. La limitante fundamental es que toma como punto de aplicación de la carga la circunferencia primitiva.

Por otra parte (Pisarenko, 1989) presenta en su manual una gráfica para calcular el coeficiente teórico de concentración de tensiones y otra para calcular el coeficiente de sensibilidad a la concentración de tensiones; para ruedas no corregidas de perfil de evolvente con $\alpha = 20^0$, número de dientes entre 20 y 80 y carga aplicada en la cabeza del diente. El gráfico para el coeficiente teórico de CT depende de las relaciones espesor con altura y radio de redondeo de la cabeza con módulo. Mientras que el gráfico del coeficiente de sensibilidad a la CT depende del radio de redondeo de la cabeza y del tipo de acero con que se trabaje, específicamente de la relación entre límite de fluencia y límite de proporcionalidad.

3.1.4 Factor de concentración de Tensiones obtenido por (Quiñones, 2004) para dientes de engranajes cilíndricos de perfil simétrico.

En el trabajo (Quiñones, 2005) se estimó el factor de concentración de tensiones utilizando un Modelo Matemático elaborado para calcular las tensiones en el pie de los dientes de evolvente con $\alpha = 20^0$, de perfil simétrico y utilizando la modelación por el Método de los Elementos Finitos de los mismos dientes. Se definió el factor de concentración de tensiones como $K_{\sigma MEF}$ como la relación entre la tensión obtenida en el pie de los dientes por el Método de los Elementos Finitos y la tensión en el pie calculada por el Modelo Matemático elaborado.

Está claro que la concentración de tensiones depende de la forma del diente, completamente caracterizada por el número de dientes, la corrección del dentado y de las características del perfil generador ($\alpha = 20^0$, altura completa y $c_f = 0.4$).

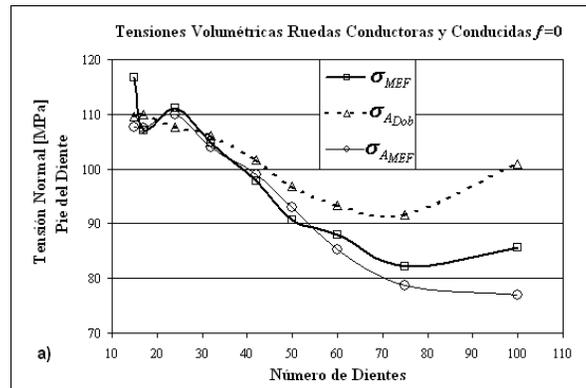
De las magnitudes mencionadas, el número de dientes y la corrección del dentado son variables, no así las características del perfil generador, aunque si dependen de la norma que se utilice para la construcción del engrane.

Analizando los valores obtenidos del CCT y realizando un análisis de Regresión Lineal Múltiple tomando como variable dependiente el CCT ($k_{\sigma_{MEF}}$) y como independientes el número de dientes (Z) y el coeficiente de corrección (ξ); con ayuda del SPSS 11.0 para Windows Quiñones obtuvo la siguiente expresión con un coeficiente de correlación $R_2=0.847$ con buenos niveles de significación y de representatividad de las variables independientes sobre la variable dependiente:

$$k_{\sigma_{MEF}} = 1.497 + 0.126\xi - 0.00393Z \quad (3.3)$$

Otro elemento importante que da validez a la expresión es la distribución de los errores, que para este caso siguen una Distribución Normal con una desviación estándar de 0.96.

Son representados los resultados gráficamente en la Figura 3.1. Como se puede observar, con la nueva expresión para el cálculo del CCT se obtiene un mejor ajuste de los valores obtenidos por el MEF a los valores de tensiones obtenidos por el modelo elaborado por (Quiñones, 2005). Con la expresión 3.3) son calculados los valores del error relativo medio obteniendo magníficos resultados tanto para Ruedas Conductoras como para las Ruedas Conducidas.



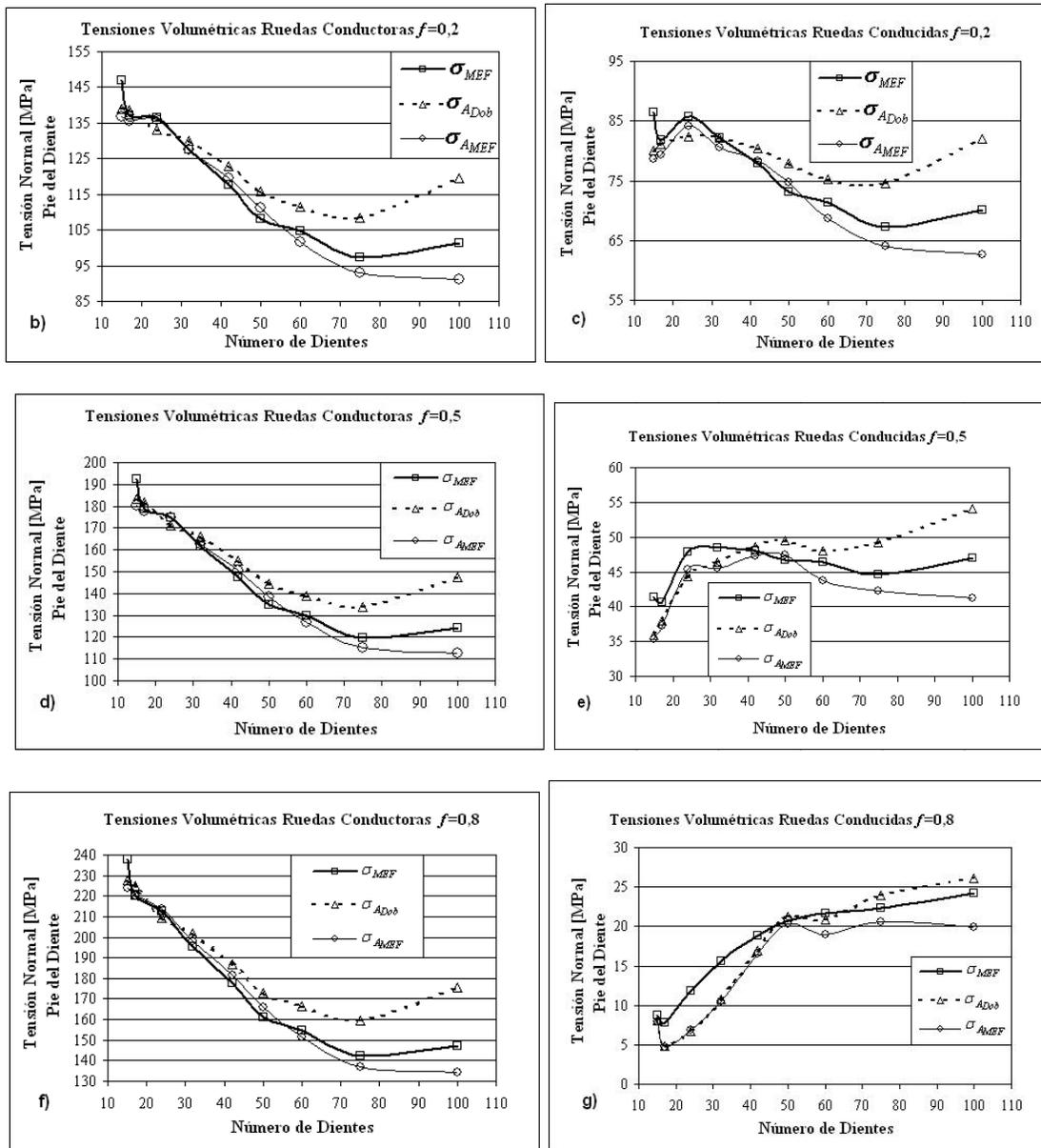


Figura 3.1 Gráficos Comparativos donde se representan los valores de las tensiones obtenidas por el Método de los Elementos Finitos con el Modelo Elaborado por (Quiñones, 2005), que toma en cuenta los Coeficientes de Concentración de Tensiones dados por (Dobrovolski, 1970) y los valores de tensiones obtenidos para el MEF.

Se define como error relativo medio el valor modular de la razón de la diferencia entre el valor patrón a comparar y el valor comparado respecto al valor patrón, expresado en porcentaje. Para este análisis el valor patrón será la tensión obtenida por el MEF (σ_{MEF}) y los valores comparados serán: a) el valor de tensión obtenido

por el nuevo modelo (Quiñones, 2005) y el CCT obtenido en el mencionado trabajo (σ_{AMEF}), y b) el valor de tensión obtenido por el modelo de (Quiñones, 2005) y el CCT dado por (Dobrovolski, 1970) (σ_{ADob}). En la Tabla 3.1 se muestran estos valores

Tabla 3.1. Valores comparativos promedio del error relativo medio entre los obtenidos con los valores de tensiones obtenidos con la expresión (4) y los obtenidos con el CCT de Dobrovolski, 1970

Tabla 3.1. Valores comparativos promedio del error relativo medio entre los obtenidos con los valores de tensiones obtenidos por (Quiñones, 2005) y los obtenidos con el CCT de (Dobrovolski, 1970)				
	Ruedas Conductoras		Ruedas Conducidas	
Coef. Fricción	$\%E_{RA\ MEF}$	$\%E_{RA\ DOB}$	$\%E_{RA\ MEF}$	$\%E_{RA\ DOB}$
0	3,48	6,60	3,48	6,60
0,2	3,32	6,54	4,22	6,22
0,5	3,13	6,81	6,79	7,43
0,8	3,12	6,99	19,60	16,89

3.1.5 Factor de Concentración de Tensiones para dientes de evolvente de perfil asimétrico.

En la literatura consultada no se reporta ningún modelo ni procedimiento para obtener el factor de concentración de tensiones en el pie para dientes de engranajes cilíndricos de dientes de perfil asimétrico. El único intento fue presentado por (Cárdenas, 2012) pero lo que propuso fue calcular el factor de concentración de tensiones de estos engranajes por la ecuación de Dolan – Brogamer, extrapolación ésta que no tiene sentido.

3.2 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Investigación de tensiones.

El Método de los Elementos Finitos constituye en sí un Método Numérico para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan un problema específico. El mismo se ha convertido hoy en día en una potente arma para la investigación ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por los métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado costo tanto económico como en tiempo de desarrollo. El Método de los Elementos Finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, mucho más fácil y económico que diseñar, construir, probar y modificar un prototipo. Sin embargo, por su esencia de ser un procedimiento matemático que discretiza funciones que en la realidad son continuas, constituye en sí un método aproximado de cálculo. El mismo es empleado en las más variadas ramas de la ciencia desde la medicina hasta la ingeniería, es utilizado tanto para determinar valores de fuerzas y tensiones en diferentes piezas de máquinas y estructuras como para modelar diferentes procesos de fabricación. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el Método de los Elementos Finitos, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de Elementos Finitos, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación. Los Fundamentos del Método de los Elementos Finitos aparecen analizados en detalle en las referencias (Armero and Glaser, 1997); (Calfem A.; 2002); (Chandrupatla and Belengundu, 1997); (Felippa, 2001); (Oñate, 1992); (Zienkiewics, 2000). Muchos investigadores trabajan en esta línea general y han estudiado cuidadosamente cuales son los modelos óptimos para las diferentes aplicaciones determinando de esta forma que tipos de elementos a utilizar, características de las sollicitaciones a que estarán sometidas etc., ellos basan sus trabajos en las estimaciones de los errores donde proponen metodologías para los mismos, en sus artículos: (Babuska and Rheinboldt, 1978); (Barthold, Schmidt and Stein, 1998); (Carvajal, 2003); (Gabaldón y Goicolea, 1999); (Ortiz and Quigley, 1991) todos coinciden que los resultados a obtener están determinados por la correspondencia entre el modelo y el sistema real que se haya adoptado y con la calidad que se resuelva el mismo siendo una obligatoriedad la convergencia de

los casos a analizar. La misma puede lograrse de tres maneras: se puede disminuir el tamaño de los elementos, refinamiento la malla, se puede aumentar el grado del polinomio de interpolación, o se pueden hacer simultáneamente las dos cosas, Además, se puede realizar localmente, es decir mejorando la discretización en aquellas zonas en las que se produce un mayor error. Los requisitos de convergencia se plantean sobre la base de la siguiente fundamentación: Si se analiza un problema utilizando cada vez una malla más fina de elementos, se generará una secuencia de soluciones aproximadas. Es importante que tal secuencia converja a la solución exacta, es decir, que el error entre la solución aproximada y la exacta tienda a cero cuando el número de elementos tienda a infinito (o su tamaño tienda a cero). Aunque en los problemas reales no puede obtenerse un valor exacto del error de discretización, se ha demostrado (Bhadeshia, 1998); (Enoki, Aoyama and Hirogaki, 2003); (Zienkiewics, 2000) que existe una convergencia asintótica de la solución del problema en función a los parámetros de "número de grados de libertad", o el "tamaño de los elementos".

3.3 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Investigación de las tensiones en el pie de los dientes de los engranajes de perfil asimétrico.

3.3.1 Modelo de Elementos Finitos para el cálculo de las tensiones en el pie en los dientes de perfil asimétrico..

En la Figura 3.2 se muestra el modelo de malla empleada para calcular las tensiones en el pie de los engranajes cilíndricos con asimetría $c = 1,5$ ($\alpha = 20^\circ$ en el flanco de carga y $\alpha = 30^\circ$ en el flanco de respaldo) al que será colocada una carga resultante entre la fuerza normal al diente y la fuerza de fricción cuya magnitud e inclinación depende precisamente del ángulo de fricción) la misma se aplicará en el punto más crítico de acción de la carga, la punta del diente central, los restantes dos dientes están presentes en el modelo para precisamente tomar en cuenta la influencia de los dientes contiguos en las tensiones y deformaciones de acuerdo con el Principio de Saint Venant. Con modelos similares a este para diferentes números de dientes, coeficientes de fricción y de corrección se realizarán los cálculos de tensiones en el pie del diente por el MEF que serán comparados con los valores obtenidos por el Modelo Matemático, para determinar entonces el Coeficiente de Concentración de Tensiones. Varios autores que han trabajado en la modelación de engranajes (Cotaquispe, 2004); (Velázquez, 2004) asumen como Modelo Físico del Diente cargado, aquella porción del engranaje donde sólo aparece un diente, seccionando el engranaje por los planos de simetría que pasan por sus dos valles contiguos. Luego las condiciones de apoyo o restricciones que consideran los mencionados autores, no toman en cuenta que

todavía en estas secciones existe la presencia de deformaciones para las cuales los apoyos no deben ser rígidos sino elásticos, con el coeficiente de rigidez propio para estas condiciones. Por otra parte, todavía en la zona de corte, existen tensiones representativas provocadas por la acción de las fuerzas; de esta forma existirá influencia de las restricciones en los valores de tensión en el pie del diente que estará muy próximo a la sección de corte.

De igual forma se debe tener cuidado con el diámetro del cubo (agujero central), pues al colocar las restricciones respectivas, las tensiones y deformaciones que estas producen pueden influir en los Estados Tensional y Deformacional, en otras palabras afectan el valor de las tensiones en el pie del diente y por ende el Coeficiente de Concentración de Tensiones en el pie

En la Figura 3.2 se puede apreciar también la malla refinada en el pie buscando la convergencia de las tensiones obtenidas por el MEF en esa zona.

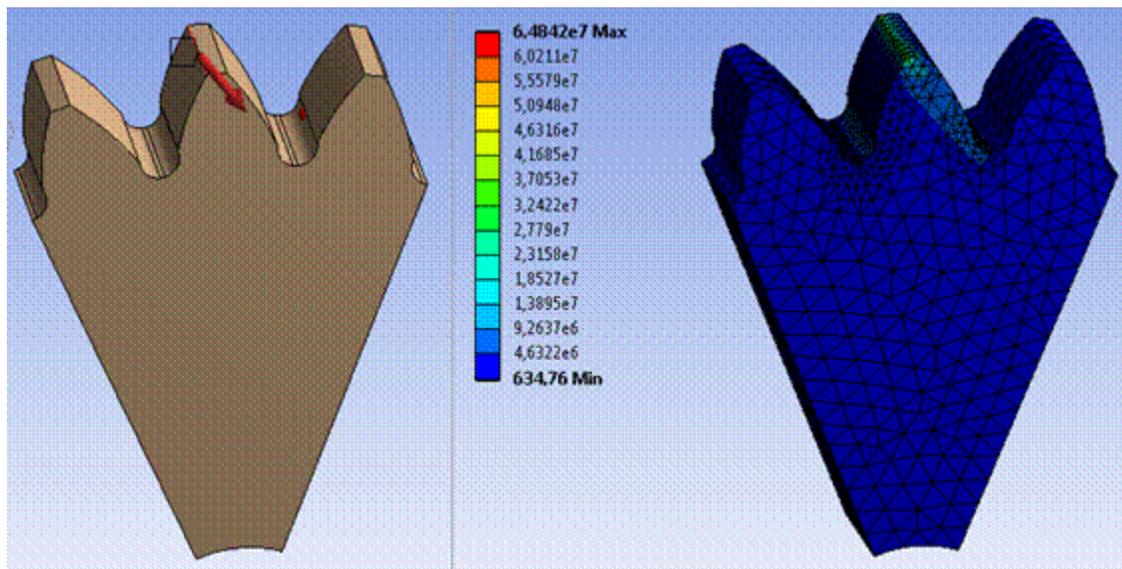


Figura 3.2 Modelo de Elementos Finitos para el cálculo de las Tensiones en engranajes cilíndricos con dientes de perfil asimétrico.

3.3.2 Resultados obtenidos en el procesamiento por el Método de los Elementos Finitos.

Se procesaron un total de 84 Modelos de ruedas por el Método de los Elementos Finitos con diferentes combinaciones de números de dientes, coeficientes de corrección y coeficientes de fricción, 42 para las ruedas conductoras y 42 para las ruedas conducidas, con vistas al cálculo del Coeficiente de Concentración de Tensiones $k_{\sigma MEF}$. Los resultados se dan en la Tabla 3.2

Tabla 3.2 Valores de k_{σ} obtenidos por el Método de los Elementos Finitos						
Z = 12						
	$\xi = -0,6$	$\xi = -0,3$	$\xi = 0$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,6$	$\xi = 1$
k_{σ} (Dobrovolski)	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,74
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	0,72786	0,93393	1,14	1,34607	1,55214	1,8269
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	9,58786	9,79393	10	10,20607	10,41214	10,6869
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	22,87786	23,08393	23,29	23,49607	23,70214	23,9769
k_{σ} (Quiñones)	1,30872	1,34652	1,38432	1,42212	1,45992	1,51032
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	65,662	65,761	65,86	65,959	66,058	66,19
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	45,182	45,281	45,38	45,479	45,578	45,71
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	14,462	14,561	14,66	14,759	14,858	14,99
Z = 15						
	$\xi = -0,6$	$\xi = -0,3$	$\xi = 0$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,6$	$\xi = 1$
k_{σ} (Dobrovolski)	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,74
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	2,22786	2,43393	2,64	2,84607	3,05214	3,3269
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	11,08786	11,29393	11,5	11,70607	11,91214	12,1869
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	24,37786	24,58393	24,79	24,99607	25,20214	25,4769
k_{σ} (Quiñones)	1,36245	1,40025	1,43805	1,47585	1,51365	1,56405
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	64,702	64,801	64,9	64,999	65,098	65,23

k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,2$	44,222	44,321	44,42	44,519	44,618	44,75
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,5$	13,502	13,601	13,7	13,799	13,898	14,03
$z=17$						
	$\xi = -0,6$	$\xi = -0,3$	$\xi = 0$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,6$	$\xi = 1$
k_{σ} (Dobrovolski)	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,74
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	3,22786	3,43393	3,64	3,84607	4,05214	4,3269
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	12,08786	12,29393	12,5	12,70607	12,91214	13,1869
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	25,37786	25,58393	25,79	25,99607	26,20214	26,4769
k_{σ} (Quiñones)	1,35459	1,39239	1,43019	1,46799	1,50579	1,55619
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	64,062	64,161	64,26	64,359	64,458	64,59
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,2$	43,582	43,681	43,78	43,879	43,978	44,11
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,5$	12,862	12,961	13,06	13,159	13,258	13,39
$z=20$						
k_{σ} (Dobrovolski)	0,94	1,09	1,24	1,39	1,54	1,74
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	4,72786	4,93393	5,14	5,34607	5,55214	5,8269
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	13,58786	13,79393	14	14,20607	14,41214	14,6869
k_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	30,42186	30,62793	30,834	31,04007	31,24614	31,5209
k_{σ} (Quiñones)	1,3428	1,3806	1,4184	1,4562	1,494	1,5444
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	63,102	63,201	63,3	63,399	63,498	63,63
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,2$	42,622	42,721	42,82	42,919	43,018	43,15
k_{σ} Asimétrica (conducidas), $f = 0,5$	11,902	12,001	12,1	12,199	12,298	12,43

$z=25$						
	$\xi = -0,6$	$\xi = -0,3$	$\xi = 0$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,6$	$\xi = 1$

$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,01055	1,142775	1,275	1,407225	1,53945	1,71575
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	6,53	12,98	19,43	25,88	32,33	40,93
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	15,61	22,06	28,51	34,96	41,41	50,01
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	29,23	35,68	42,13	48,58	55,03	63,63
K_{σ} (Quiñones)	1,32315	1,36095	1,39875	1,43655	1,47435	1,52475
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	54,155	55,115	56,075	57,035	57,995	59,275
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	36,275	37,235	38,195	39,155	40,115	41,395
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	9,455	10,415	11,375	12,335	13,295	14,575
Z=30						
$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,10064	1,21032	1,32	1,42968	1,53936	1,6856
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	4,78	11,23	17,68	24,13	30,58	39,18
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	13,86	20,31	26,76	33,21	39,66	48,26
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	27,48	33,93	40,38	46,83	53,28	61,88
K_{σ} (Quiñones)	1,3035	1,3413	1,3791	1,4169	1,4547	1,5051
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	53,93	54,89	55,85	56,81	57,77	59,05
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	36,05	37,01	37,97	38,93	39,89	41,17
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	9,23	10,19	11,15	12,11	13,07	14,35
Z=40						
$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,1607	1,25535	1,35	1,44465	1,5393	1,6655
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	1,28	7,73	14,18	20,63	27,08	35,68
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	10,36	16,81	23,26	29,71	36,16	44,76
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	23,98	30,43	36,88	43,33	49,78	58,38
K_{σ} (Quiñones)	1,2642	1,302	1,3398	1,3776	1,4154	1,4658
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	53,48	54,44	55,4	56,36	57,32	58,6
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	35,6	36,56	37,52	38,48	39,44	40,72
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	8,78	9,74	10,7	11,66	12,62	13,9

Z=50						
$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,22076	1,30038	1,38	1,45962	1,53924	1,6454
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0	-2,22	4,23	10,68	17,13	23,58	32,18
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,2	6,86	13,31	19,76	26,21	32,66	41,26
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,5	20,48	26,93	33,38	39,83	46,28	54,88
K_{σ} (Quiñones)	1,2249	1,2627	1,3005	1,3383	1,3761	1,4265
K_{σ} Asimétrica (conducidas), f=0	53,03	53,99	54,95	55,91	56,87	58,15
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), f=0,2	35,15	36,11	37,07	38,03	38,99	40,27
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), f=0,5	8,33	9,29	10,25	11,21	12,17	13,45
Z=70						
$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,28082	1,34541	1,41	1,47459	1,53918	1,6253
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0	-9,22	-2,77	3,68	10,13	16,58	25,18
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,2	-0,14	6,31	12,76	19,21	25,66	34,26
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,5	13,48	19,93	26,38	32,83	39,28	47,88
K_{σ} (Quiñones)	1,1463	1,1841	1,2219	1,2597	1,2975	1,3479
K_{σ} Asimétrica (conducidas), f=0	52,13	53,09	54,05	55,01	55,97	57,25
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), f=0,2	34,25	35,21	36,17	37,13	38,09	39,37
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), f=0,5	7,43	8,39	9,35	10,31	11,27	12,55
Z=100						
$K\sigma$ (Dobrovolski)	1,34088	1,39044	1,44	1,48956	1,53912	1,6052
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0	-19,72	-13,27	-6,82	-0,37	6,08	14,68
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,2	-10,64	-4,19	2,26	8,71	15,16	23,76
K_{σ} Asimétrica (conductoras), f=0,5	2,98	9,43	15,88	22,33	28,78	37,38
K_{σ} (Quiñones)	1,0284	1,0662	1,104	1,1418	1,1796	1,23
K_{σ} Asimétrica (conducidas), f=0	50,78	51,74	52,7	53,66	54,62	55,9
$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), f=0,2	32,9	33,86	34,82	35,78	36,74	38,02

$K\sigma$ Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	6,08	7,04	8	8,96	9,92	11,2
--	------	------	---	------	------	------

z=120						
	$\xi = -0,6$	$\xi = -0,3$	$\xi = 0$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,6$	$\xi = 1$
K σ (Dobrovolski)	1,36	1,405	1,45	1,495	1,54	1,6
K σ Asimétrica (conductoras), f=0	-0,36	3,21	6,78	10,35	13,92	18,68
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,2	1,36	4,93	8,5	12,07	15,64	20,4
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,5	3,94	7,51	11,08	14,65	18,22	22,98
K σ (Quiñones)	0,9498	0,9876	1,0254	1,0632	1,101	1,1514
K σ Asimétrica (conducidas), f=0	32,52	37,71	42,9	48,09	53,28	60,2
K σ Asimétrica (conducidas), f=0,2	10,78	15,97	21,16	26,35	31,54	38,46
K σ Asimétrica (conducidas), f=0,5	-21,83	-16,64	-11,45	-6,26	-1,07	5,85
Z=150						
K σ (Dobrovolski)	1,36	1,405	1,45	1,495	1,54	1,6
K σ Asimétrica (conductoras), f=0	4,74	8,31	11,88	15,45	19,02	23,78
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,2	6,46	10,03	13,6	17,17	20,74	25,5
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,5	9,04	12,61	16,18	19,75	23,32	28,08
K σ (Quiñones)	0,8319	0,8697	0,9075	0,9453	0,9831	1,0335
K σ Asimétrica (conducidas), f=0	38,52	43,71	48,9	54,09	59,28	66,2
K σ Asimétrica (conducidas), f=0,2	16,78	21,97	27,16	32,35	37,54	44,46
K σ Asimétrica (conducidas), f=0,5	-15,83	-10,64	-5,45	-0,26	4,93	11,85
Z=180						
K σ (Dobrovolski)	1,36	1,405	1,45	1,495	1,54	1,6
K σ Asimétrica (conductoras), f=0	9,84	13,41	16,98	20,55	24,12	28,88
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,2	11,56	15,13	18,7	22,27	25,84	30,6
K σ Asimétrica (conductoras), f=0,5	14,14	17,71	21,28	24,85	28,42	33,18
K σ (Quiñones)	0,714	0,7518	0,7896	0,8274	0,8652	0,9156
K σ Asimétrica (conducidas), f=0	44,52	49,71	54,9	60,09	65,28	72,2

K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	22,78	27,97	33,16	38,35	43,54	50,46
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	-9,83	-4,64	0,55	5,74	10,93	17,85
$z=200$						
K_{σ} (Dobrovolski)	1,36	1,405	1,45	1,495	1,54	1,6
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0$	13,24	16,81	20,38	23,95	27,52	32,28
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,2$	14,96	18,53	22,1	25,67	29,24	34
K_{σ} Asimétrica (conductoras), $f=0,5$	17,54	21,11	24,68	28,25	31,82	36,58
K_{σ} (Quiñones)	0,6354	0,6732	0,711	0,7488	0,7866	0,837
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0$	48,52	53,71	58,9	64,09	69,28	76,2
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,2$	26,78	31,97	37,16	42,35	47,54	54,46
K_{σ} Asimétrica (conducidas), $f=0,5$	-5,83	-0,64	4,55	9,74	14,93	21,85

3.3.3 Correlaciones obtenidas entre el Coeficiente de Concentración de tensiones $k_{\sigma\text{MEF}}$ y los números de dientes, los coeficientes de corrección y los coeficientes de fricción para las ruedas conductoras y conducidas con dientes asimétricos.

Con todos los valores de $k_{\sigma\text{MEF}}$ obtenidos se realizó un análisis de Regresión Lineal Múltiple tomando como variable dependiente el Factor de Concentración de Tensiones ($k_{\sigma\text{MEF}}$) calculado como el cociente entre la tensión equivalente real en el pie calculada por el MEF y la tensión analítica calculada por el Modelo Matemático elaborado sin tomar en cuenta el Coeficiente de Concentración de Tensiones, y como variables independientes el número de dientes (Z) y el coeficiente de corrección (ξ) y por primera vez en la práctica se introdujo en estos análisis el coeficiente de fricción de gran importancia para los engranajes asimétricos por la perspectiva que tienen estos engranajes en su empleo con materiales plásticos. Para este Análisis se utilizó el Software Statgraphics, obteniéndose las siguientes ecuaciones de correlación.

- **Para las Ruedas Conductoras**

$$k_{\sigma\text{MEF}} = -4,86068 + 0,686983 \cdot \xi + 44,365 \cdot f + 0,503511 \cdot Z \quad , \quad Z < 20$$

$$k_{\sigma\text{MEF}} = 28,1823 + 21,5112 \cdot \xi + 45,4897 \cdot f - 0,35484 \cdot Z \quad , \quad 20 \leq Z \leq 100$$

$$k_{\sigma\text{MEF}} = -13,6247 + 11,906 \cdot \xi + 8,61666 \cdot f + 0,175715 \cdot Z \quad , \quad Z > 100$$

- **Para las Ruedas Conducidas**

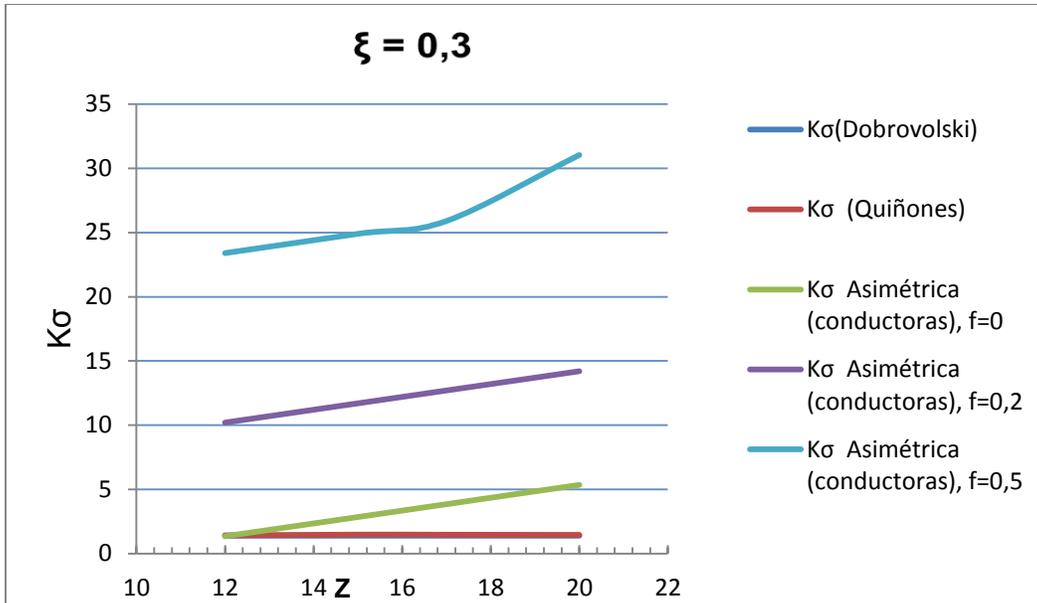
$$k_{\sigma\text{MEF}} = 69,7604 + 0,336424 \cdot \xi - 102,444 \cdot f - 0,32641 \cdot Z \quad , \quad Z < 20$$

$$k_{\sigma\text{MEF}} = 57,2701 + 3,20332 \cdot \xi - 89,4337 \cdot f - 0,045383 \cdot Z \quad , \quad 20 \leq Z \leq 100$$

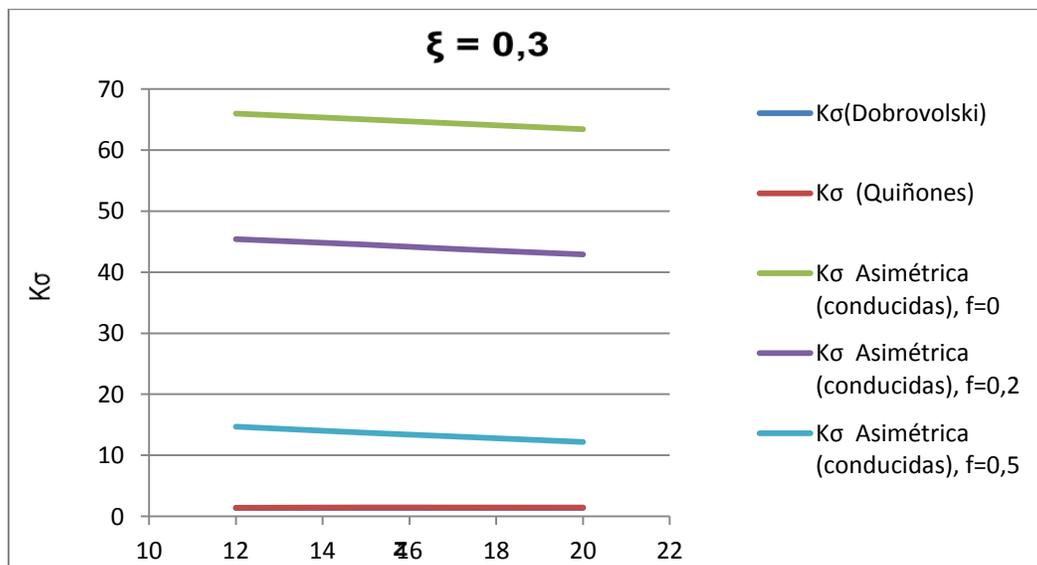
$$k_{\sigma\text{MEF}} = 18,9535 + 17,3758 \cdot \xi - 108,754 \cdot f + 0,286712 \cdot Z \quad , \quad Z > 100$$

3.3.4 Comparación de los Resultados obtenidos con los valores del Coeficiente de Concentración de Tensiones para los dientes simétricos.

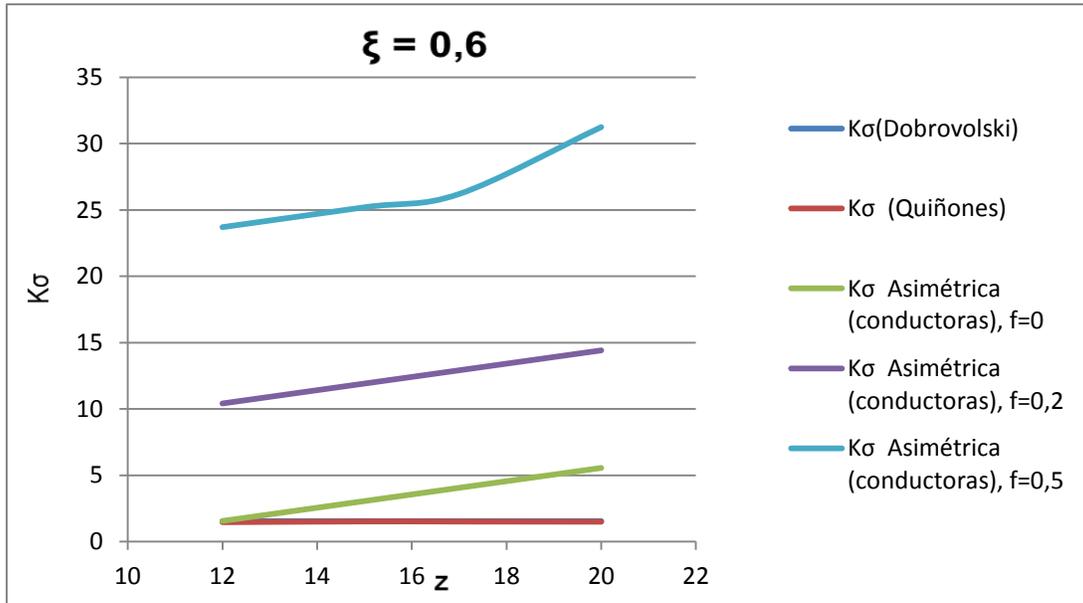
Con estas ecuaciones se obtuvieron los gráficos comparativos dadas en las Figuras 3.3 entre los coeficientes de concentración de tensiones obtenidos por la correlaciones dadas por (Dobrovolski, 1970) y (Quiñones, 2005) para los engranajes cilíndricos con dientes rectos simétricos con vistas a poder sacar algunas conclusiones acerca de las diferencias en los simétricos y asimétricos en lo referente a la concentración de tensiones en el pie.



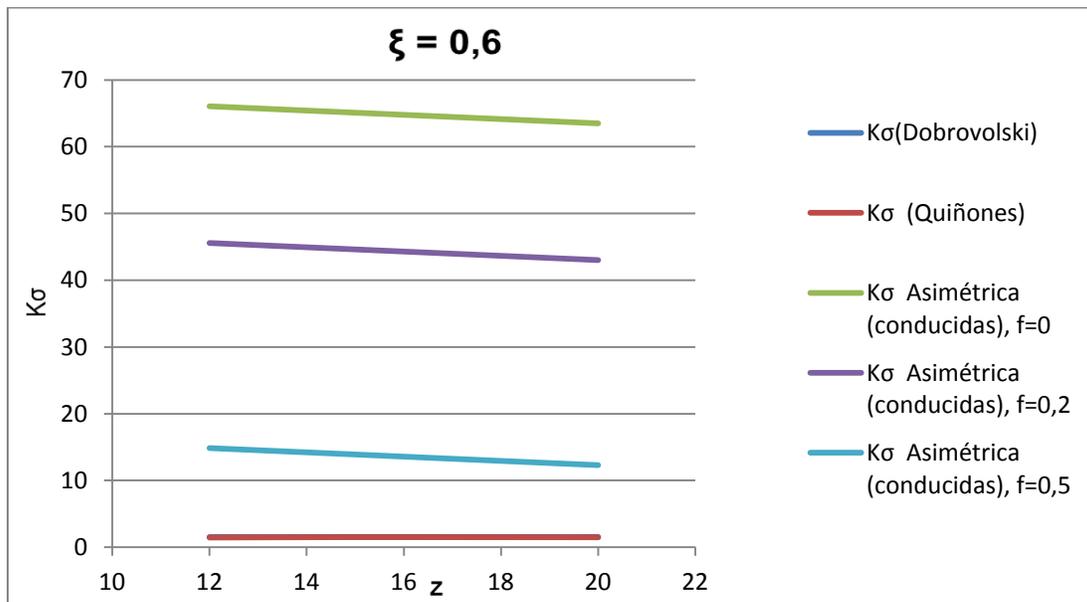
a)



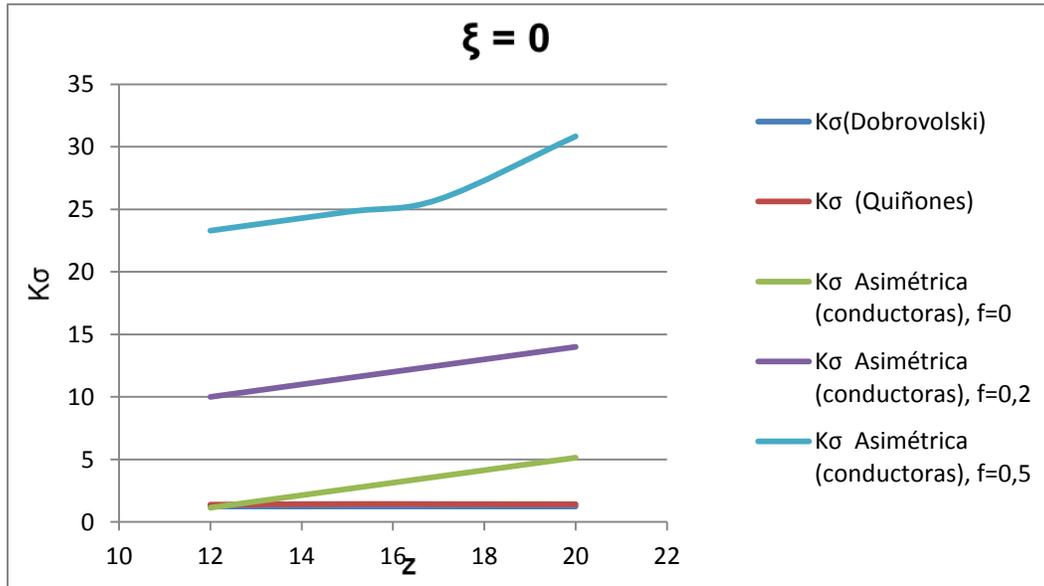
b)



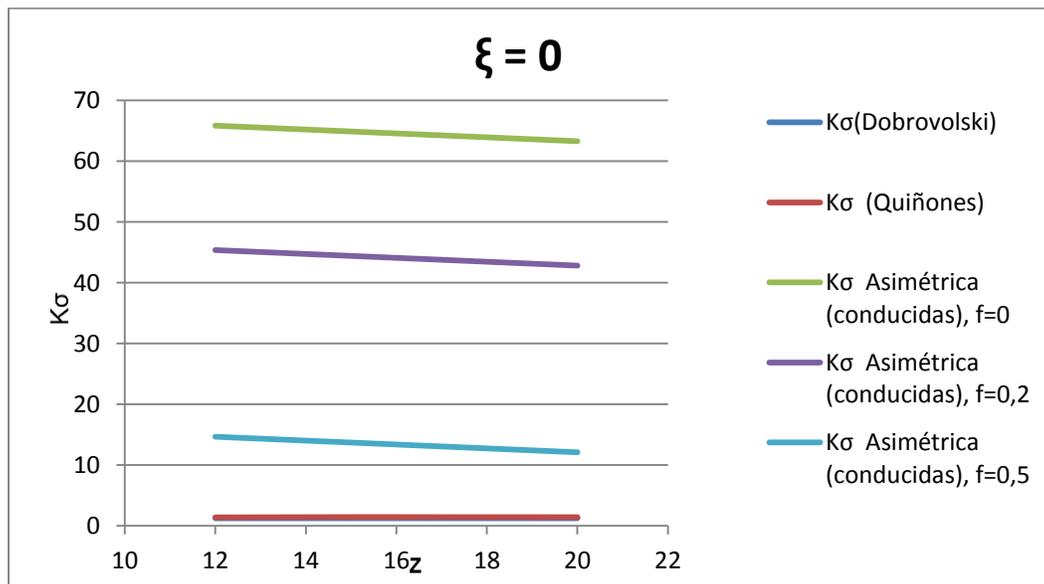
c)



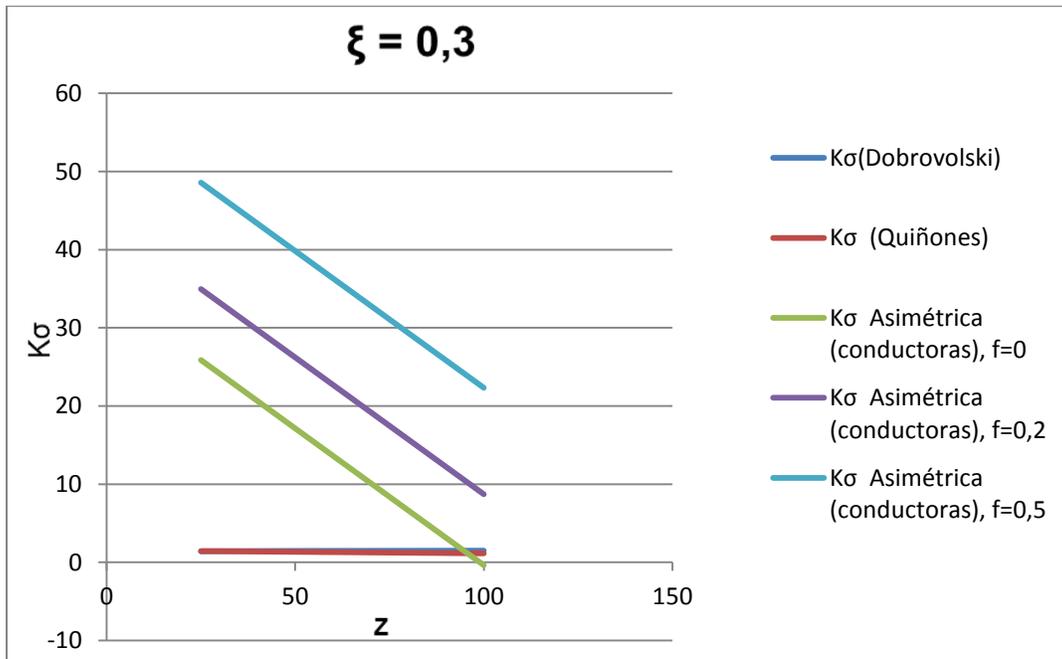
d)



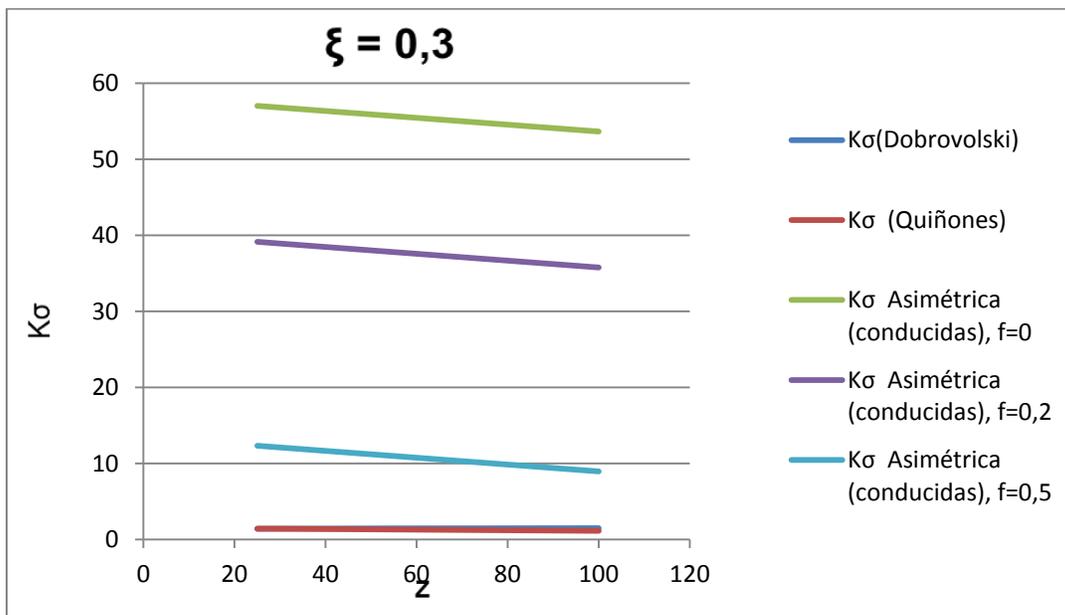
e)



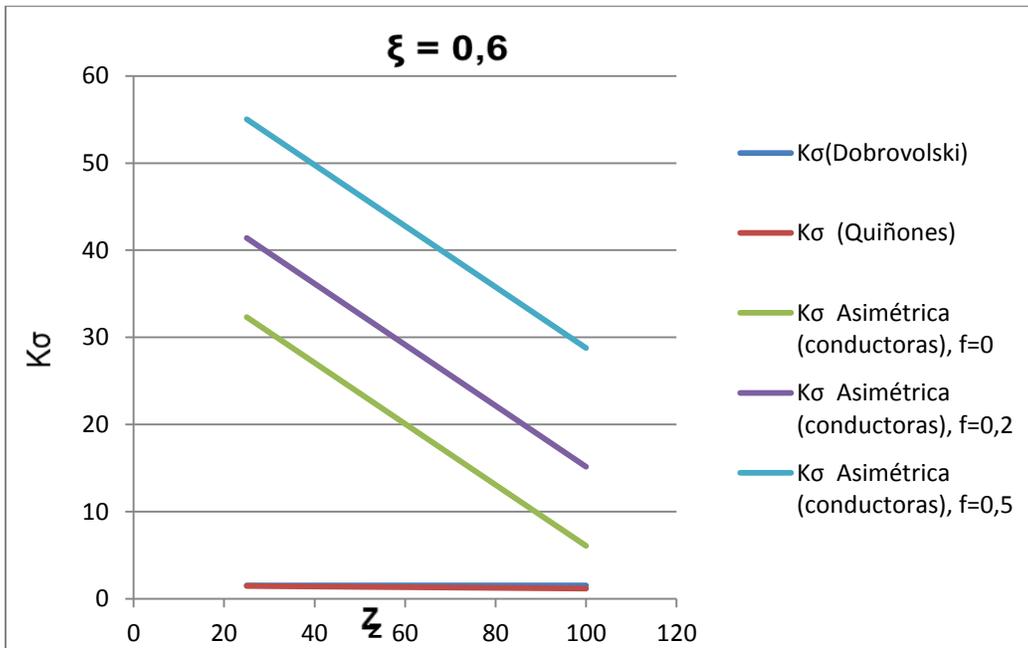
f)



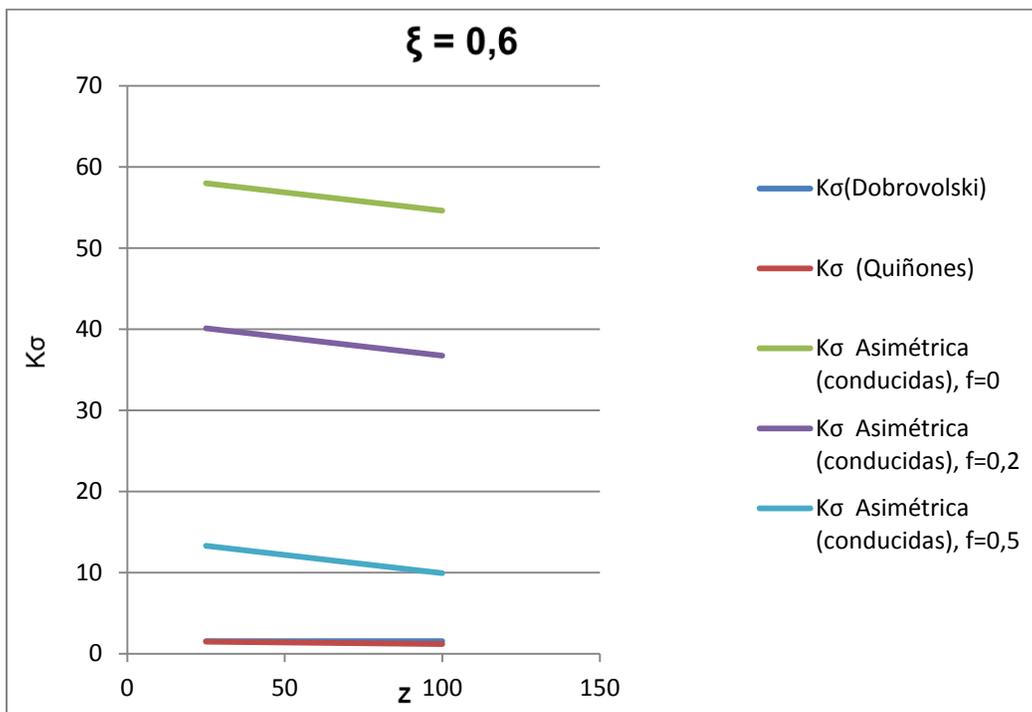
g)



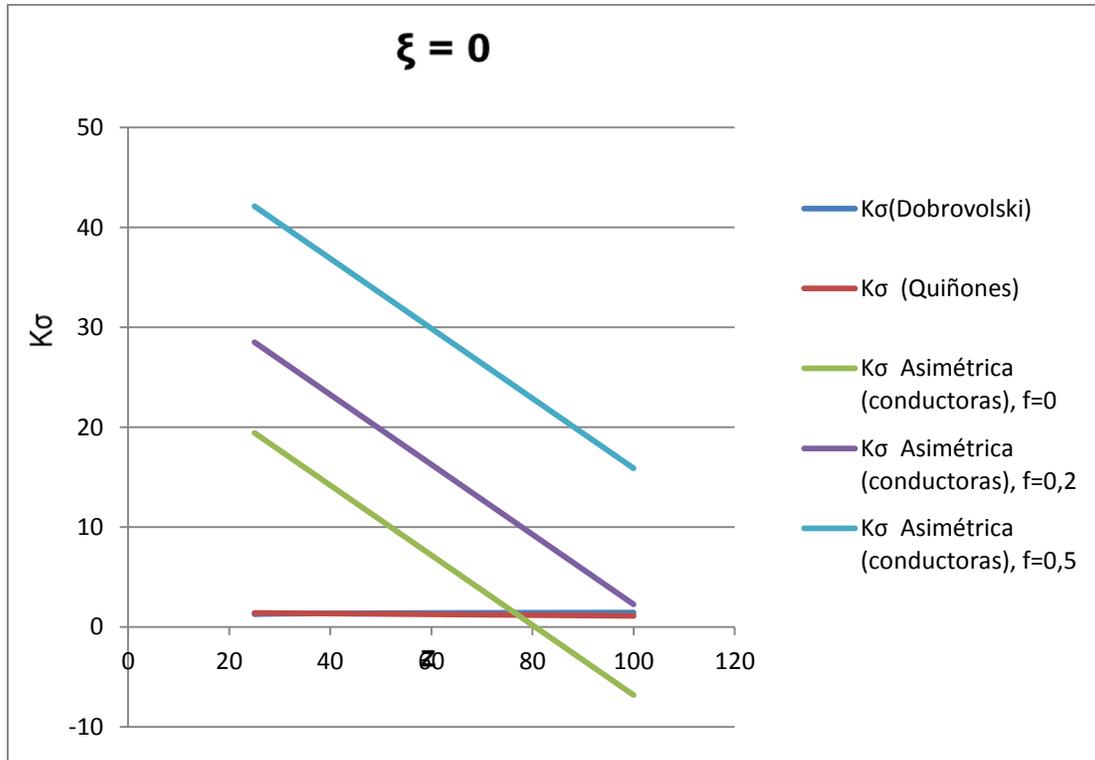
h)



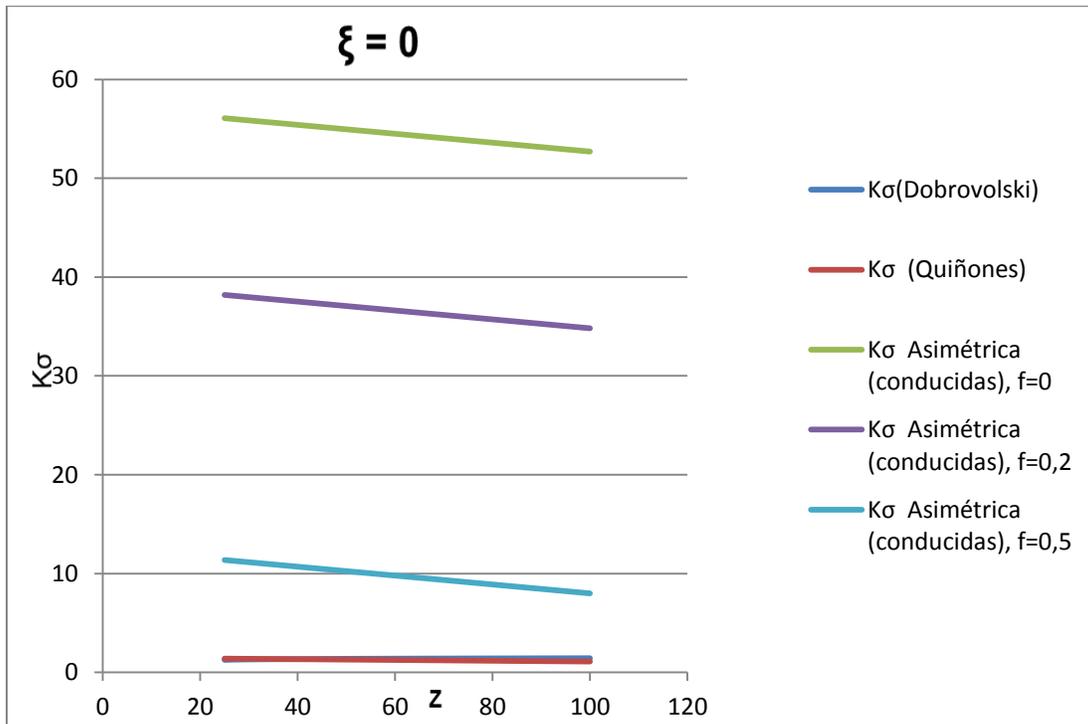
i)



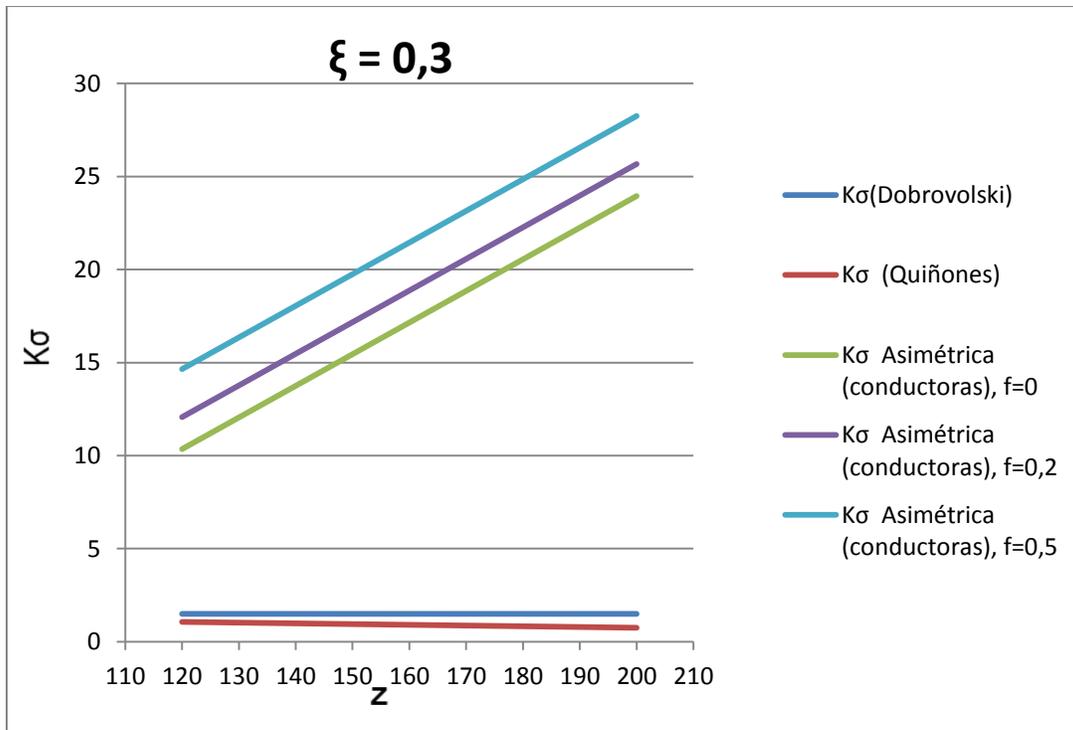
j)



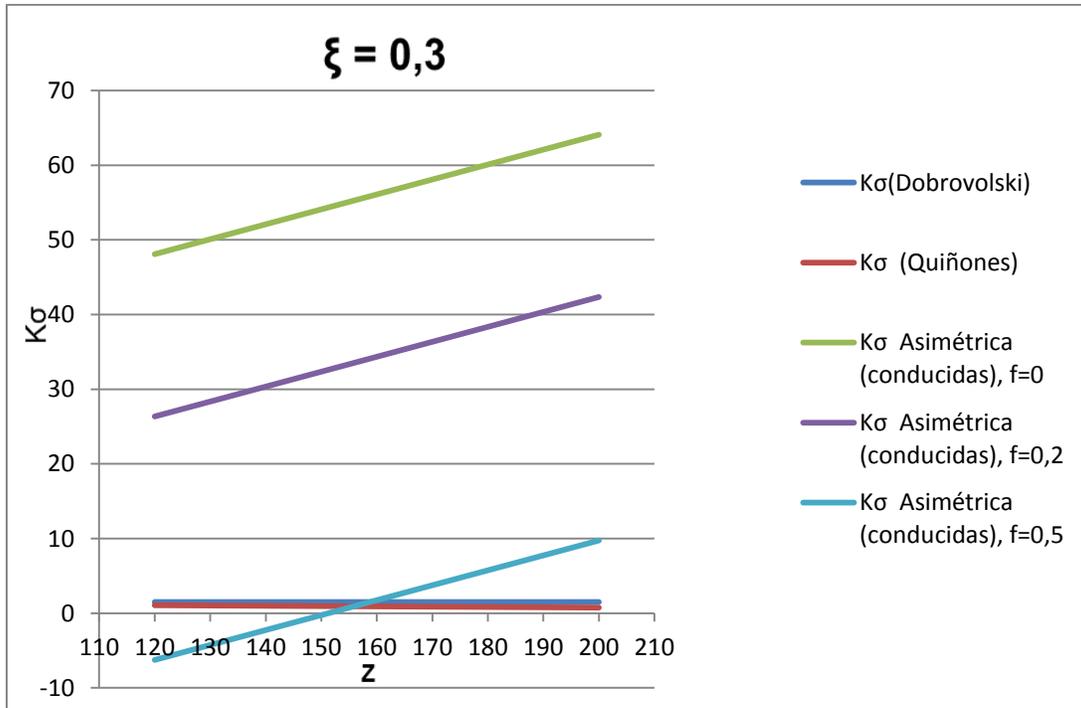
I)



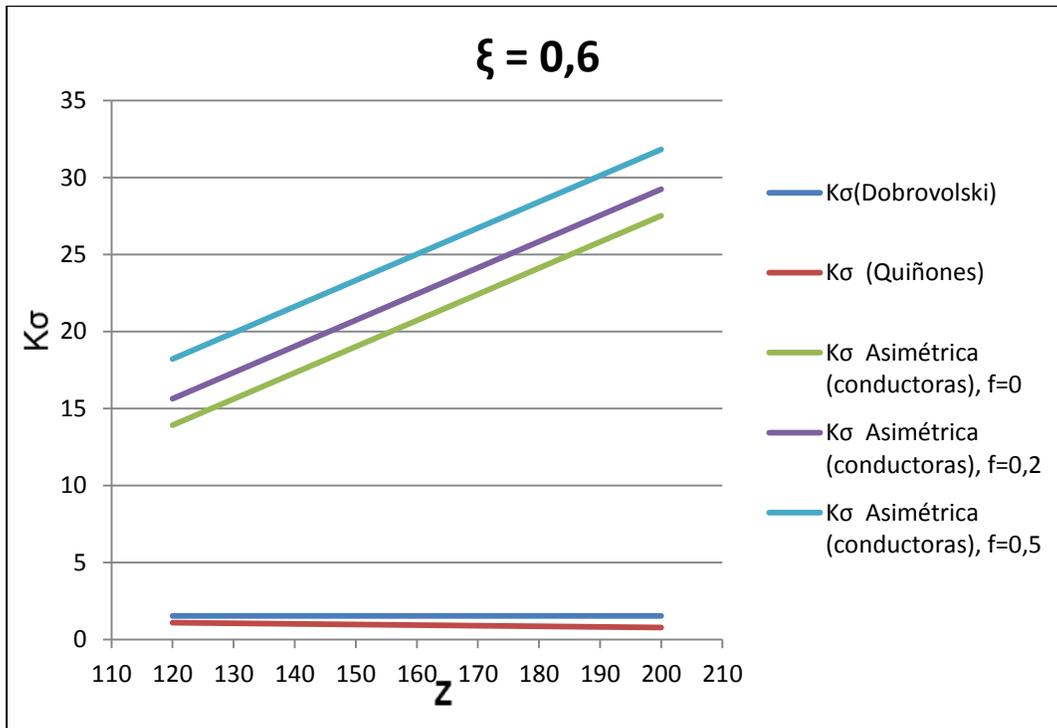
m)



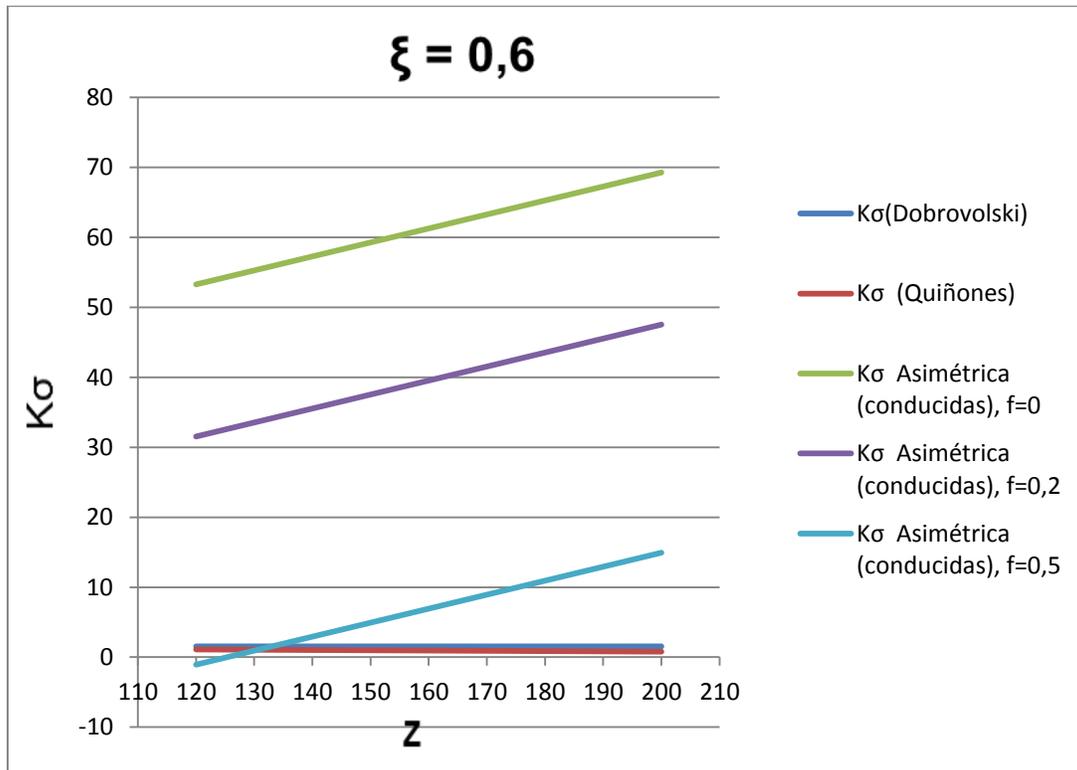
n)



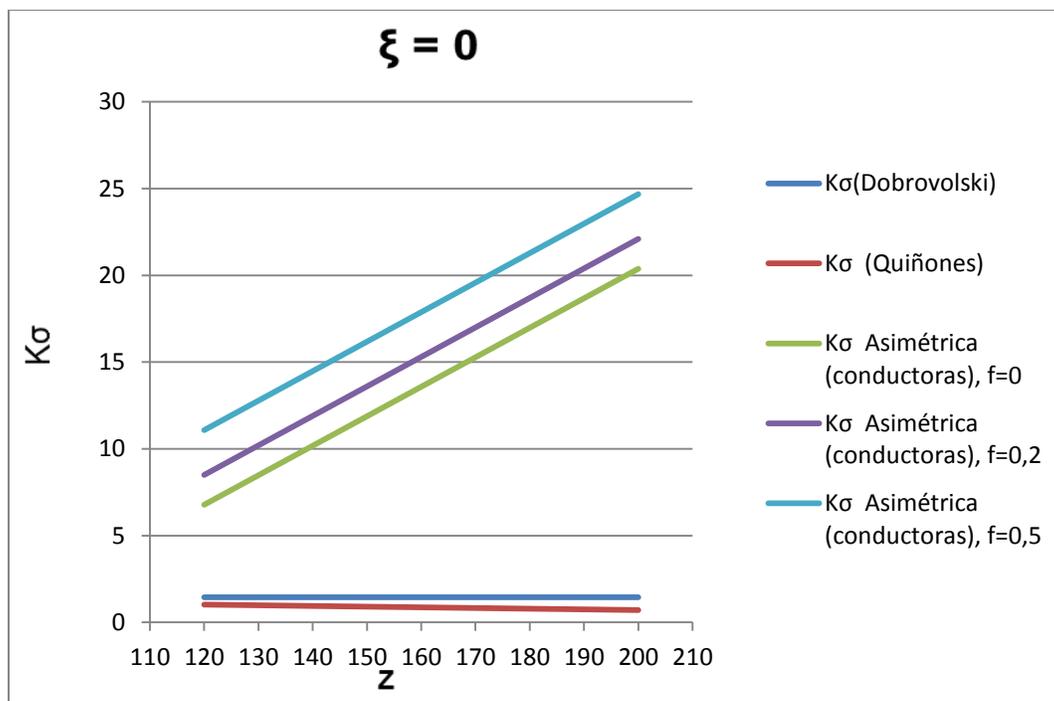
o)



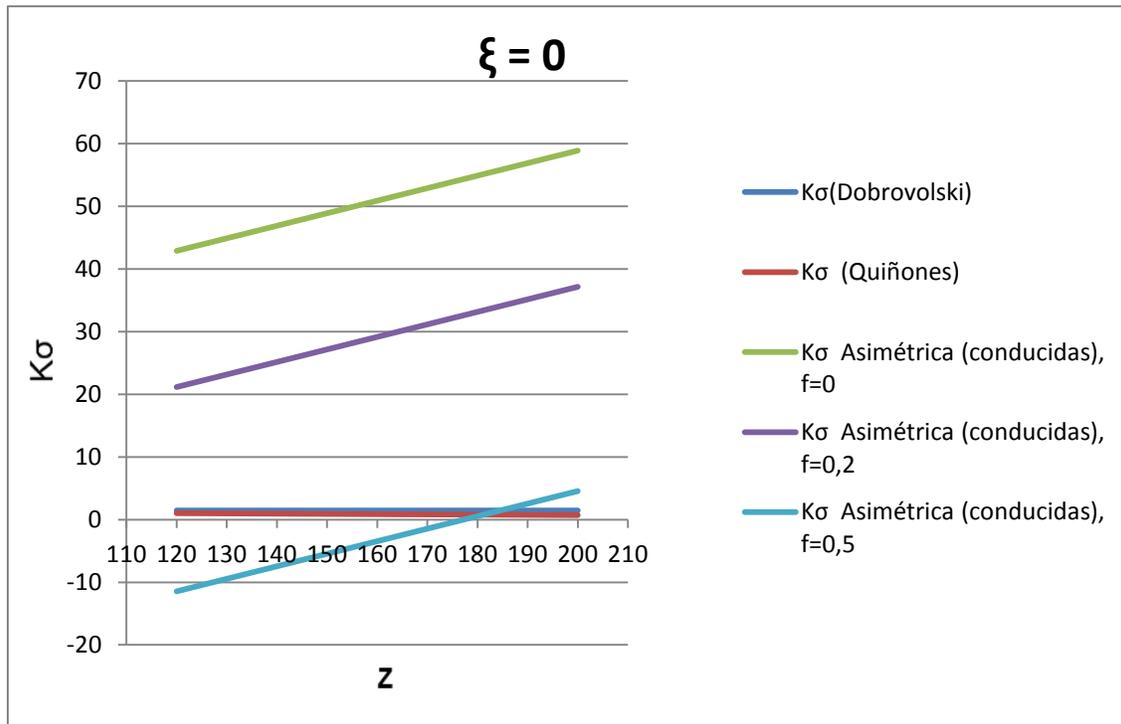
p)



q)



r)



s)

Figura 3.3 Comparación entre los Coeficientes de Concentración de Tensiones para las ruedas de dientes simétricos y los obtenidos para las ruedas de dientes asimétricos.

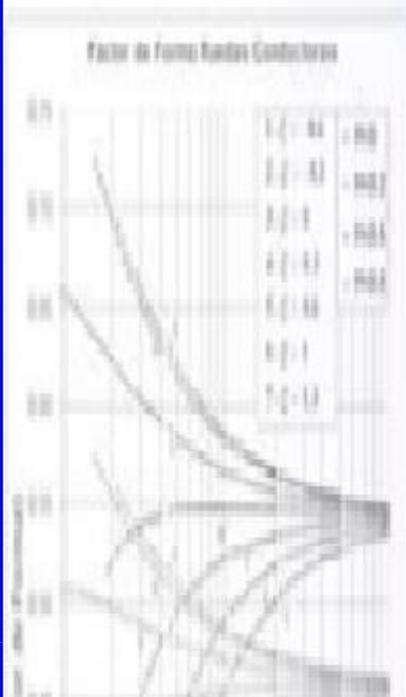
3.4 Conclusiones Parciales del Capítulo III.

1. De los resultados obtenidos se concluye en primer lugar que los Coeficientes de Concentración de Tensiones son mayores para las ruedas de dientes asimétricos que para los simétricos, independientemente del número de dientes y del coeficiente de corrección, pues en el trabajo se demuestra que la correspondencia entre Dobrovolski y Quiñones es muy buena, pero estos dos autores hicieron sus análisis sólo para dientes simétricos. En todas las comparaciones realizadas para dientes asimétricos los valores del CCT dan mayores.
2. En el trabajo no se pudo precisar si esta es una cualidad intrínseca de las ruedas con dientes asimétricos o es una consecuencia de que los Software de los Sistemas CAD no están concebidos para dibujar ruedas con dientes asimétricos y en el presente trabajo en primer lugar fue necesario crear un procedimiento para dibujar estas ruedas el cual pudiera estar influenciando en la forma de los dientes en el pie y dando como resultado Factores de Concentración de Tensiones Mayores.
3. De los gráficos se concluye que el coeficiente de fricción influye decisivamente en el Coeficiente de Concentración de tensiones de las ruedas con dientes asimétricos. En las ruedas conducidas el incremento del Coeficiente de Fricción disminuye el valor del Coeficiente de Concentración de Tensiones, y en las Conductoras lo aumenta. Esto parece una conclusión válida pues la dirección de la fuerza resultante, al incorporar la fricción es perjudicial en la rueda conductora y favorable en la conducida. Realmente hay que tener en cuenta que se está abordando un nuevo concepto la incorporación de la fuerza de fricción en la magnitud de las tensiones en el pie y las conclusiones que se obtengan en esta primera experiencia para los asimétricos no se pueden considerar absolutas.



CONCLUSIONES

GENERALES



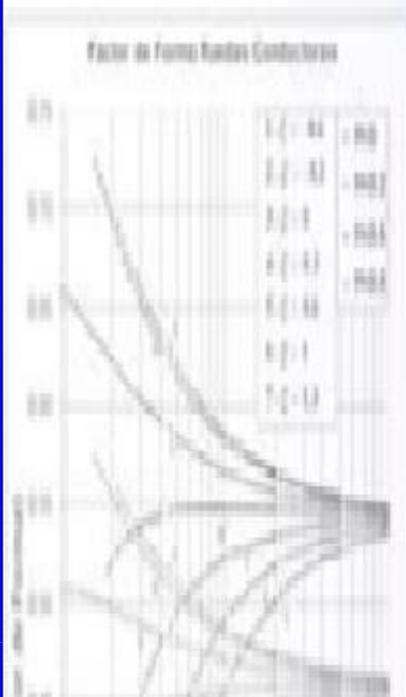
Conclusiones Generales

1. Se elaboró un nuevo Esquema de Análisis y un nuevo Modelo Matemático para el cálculo de las tensiones volumétricas en el pie de los dientes de las ruedas de engranajes de dientes rectos de evolvente de perfil asimétrico. En este modelo se toman en cuenta las influencias favorables de la tensión de flexión y de la tensión directa de compresión de la componente radial de la carga sobre el diente. En las cargas se incorporó la fuerza de fricción sobre el flanco, la cual influye de forma diferente en la rueda conductora y en la rueda conducida. En las ecuaciones del Modelo se ha incorporado también el coeficiente de corrección del dentado con el objetivo de poder evaluar su influencia en el Factor de Forma de estos engranajes.
2. En el trabajo se aprecia que el coeficiente de fricción influye en el Coeficiente de Concentración de Tensiones de las ruedas con dientes asimétricos. En las ruedas conducidas el incremento del Coeficiente de Fricción disminuye el valor del Coeficiente de Concentración de Tensiones, y en las Conductoras lo aumenta, pero en ambos casos mucho mayores que para las ruedas simétricas. Esto parece una conclusión válida al valorar las tensiones, pues la dirección de la fuerza resultante, al incorporar la fricción es perjudicial en la rueda conductora y favorable en la conducida. Realmente hay que tener en cuenta que se está abordando un nuevo concepto la incorporación de la fuerza de fricción en la magnitud de las tensiones en el pie y en el Coeficiente de Concentración de Tensiones, con relación a este último las conclusiones son dudosas y no se pueden considerar absolutas.
3. Se concluye que los Coeficientes de Concentración de Tensiones son mayores para las ruedas de dientes asimétricos que para los simétricos, independientemente del número de dientes y del coeficiente de corrección, pues en el trabajo se demuestra que la correspondencia entre Dobrovolski y Quiñones es muy buena, pero estos dos autores hicieron sus análisis sólo para dientes simétricos. En todas las comparaciones realizadas para dientes asimétricos los valores del CCT dan mayores. En el trabajo no se pudo precisar si esta es una cualidad intrínseca de las ruedas con dientes asimétricos o es una consecuencia de que los Software de los Sistemas CAD no están concebidos para dibujar ruedas con dientes asimétricos y en el presente trabajo en primer lugar fue necesario crear un procedimiento para dibujar estas ruedas el cual pudiera estar influenciando en la forma de los

dientes en el pie y dando como resultado Factores de Concentración de Tensiones mayores, por una razón hasta ahora desconocida.



RECOMENDACIONES

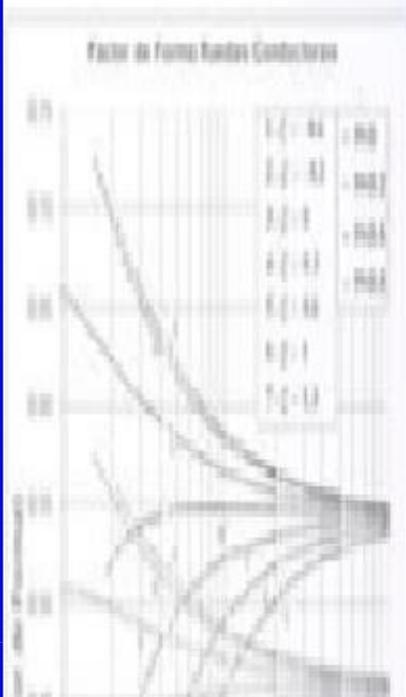


Recomendaciones

1. Se recomienda en primer lugar continuar profundizando en la bibliografía y en los Softwares Profesionales para dibujar engranajes en lo referente a los procedimientos existentes para dibujar ruedas de dientes asimétricos, para esclarecer si este particular está influyendo o no en los resultados obtenidos en el trabajo.
2. Consideramos interesante dibujar los perfiles corregidos para un mismo número de diente uno encima del otro para poder establecer la influencia geométrica de la corrección en las ruedas con dientes asimétricos con diferentes coeficientes de asimetría.
3. Elaborar el Contorno de Bloqueo para las ruedas de dientes asimétricos para definir claramente el Campo de Existencia de la corrección en estas ruedas.



Bibliografía



Bibliografía

- AGMA 908-B89. (1989a). Information sheet, geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth. USA.
- AGMA 908-B89. (1989b). Information sheet, geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth, USA.
- AGMA Information Sheet 912-A04. (2004). Mechanisms of Gear Tooth Failures.
- Alemán, G, Goytisolo, E, & Castellanos, G. (2011). Utilización de la corrección del dentado para la elevación de la resistencia de una corona sin fin durante su recuperación. 9th Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology.
- ANSI/AGMA 1010-E95. (s.d.). Appearance of gear teeth - Terminology of wear and failure USA 1995.
- ANSI/AGMA Standard 2101-C95. (1995). Fundamental Rating and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gears Teeth. American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA.
- ANSI/AGMA Standard 908-B89. (1995). Information Sheet – Geometry Factors for Determining the pitting Resistance and Bending Strength for Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth.
- Black Paul H. (1936). An investigation of relative stresses in solid spur gears by the photoelastic method. University of Illinois. Engineering Experiment Station.
- Bozan Cristina, Andreea, & Gavrila Catalin, Cornel. (2008). Comparative analysis on the main parameters influences for the pinion teeth addendum thickness external and

- internal gears. *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, VII(XVII).
- Brown Frederick, W, Davidson Scott, R, & Hanes David, B. (2010). Analysis and testing of gears with asymmetric involute tooth form and optimized fillet form for potential application in helicopter main drives.
- Buckingham, Earle. (1949). *Trochoids, Tooth Fillets, and Undercut. The involute curve and its properties. involutometry of spur gears*. New York.: Dover Publications Inc.
- Cárdenas Oliveros J. A, Hernández Ochoa D. R, & Babilonia Sánchez, G. A. (2011). Nuevo método para la modelación geométrica de engranes cilíndricos rectos con dientes asimétricos de perfil evolvente-trocoide. *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*, 34(2), 160 -170.
- Cárdenas Oliveros J. A, Moya Rodríguez J. L, & Hernández Ochoa D. R. (2010). Factores geométricos para la determinación de la resistencia a la flexión de engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos con perfil evolvente y trocoide. Presented at the VI Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica, Las Villas.
- Cárdenas Oliveros J. A, Moya Rodríguez, Jorge Laureano, & Hernández Ochoa, Daniel R. (2011). Factores geométricos para calcular a flexión engranajes cilíndricos rectos asimétricos con perfil evolvente – trocoide. *Revista Ingeniería Mecánica*, 14(3), 230-244.
- Cárdenas Oliveros, J. A, Hernández Ochoa, D. R, & Moya Rodríguez, J. L. (2011). Consecuencias de la asimetría en engranes cilíndricos rectos. Presented at the V Conferencia Científico Internacional de la Universidad de Holguín, Holguín.
- Cárdenas, Javier, Moya, Jorge, & Hernández, Daniel. (2011). Determinación de los factores

- geométricos para el cálculo a flexión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos con perfil de evolvente y trocoide. *Revista Ciencia e Ingeniería*, 32(3), 151-162.
- Cárdenas, O, Hernández, O, & Moya, R. (2010). Generación de ruedas dentadas asimétricas de perfil evolvente trocoide. En: Seminario Euro Latinoamericano de Sistemas de Ingeniería.
- Cavdar Kadir, Karpat Fatih, & Babalik Faith, C. (2005). Computer aided analysis of bending strength of involute spur gears with asymmetric profile.
- Cotaquispe, Z, & Luis, O. (2007). Influencia del ángulo de presión en el esfuerzo de flexión del pie de diente para engranajes cilíndricos de dentado recto exterior mediante el método de los elementos finitos.
- Cuneyt Fetvacı and Erdem Imrak. (2008). Mathematical model of a spur gear with asymmetric involute teeth and its cutting simulation.
- Chang, S.H, Huston, R.L, & Coy, J.J. (1984). A computer aided design procedure for generating gear teeth.
- Chira F. (2007). On the elasticity of involutes spur gears with asymmetric teeth. Proceedings of the 15th International conference on manufacturing systems – ICMaS, Bucharest.
- Chira F, Dascalescu A, & Tisan V. (2008). The study of the stress and displacements at the direct asymmetric gears in relation with the coefficient of asymmetry using the finite elements method, VII(XVII).
- Chira Flavia, Banica. (2008). On the advantages of involutes asymmetrical teeth by comparison with the involute symmetrical teeth. Annals of the Oradea University.

- Fascicle of Management and Technological Engineering, VII(XVII), 1274-1279.
- Chira Flavia, Mihai Banica. (2007). A design method for the transmissions with asymmetrical spur gears. 7th international multidisciplinary conference. *Baia Mare, Romania*.
- Chira, Flavia, Tisan, Vasile, & Dascalescu, Anamaria. (2007). Modelling of the asymmetric gears using applications in MATLAB and AUTOLISP, V(XVI).
- Da Vinci, Leonardo. (s.d.). Códice Atlántico. Recuperado a partir de http://www.ambrosiana.eu/cms/descrizione_del_catalogo-251-251.html.
- Deng Gang, & Nakanishi Tsutomu. (2004). Bending capacity enhancement using an asymmetric tooth profile. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 737-742.
- Deng, Gang, & Nakanishi, Tsutomu. (2003). Bending load capacity enhancement using an asymmetric tooth profile.
- Di Francesco, G, & Marini, S. (1997). Structural analysis of asymmetrical teeth: reduction of size and weight. *Gear Technology*, 47-51.
- Di Francesco, Giulio, & Marini, Stefano. (2007). *Asymmetric Teeth: Bending Stress Calculation*. Gear Technology.
- Dudley Darle, W. (1973). *Diseño, Manufactura y Aplicación de Engranajes*. México: Continental, S. A.
- Faires V. M. (1990). *Diseño de Elementos de Máquinas* (4º ed.). México.
- Fernandes, J, & McDuling, C. (1997). Surface contact fatigue failures in gears. Elsevier Science Ltd, *Engineering Failure Analysis*, 4(2).
- Fernández, J.E, & Sierra J.M. (2010). A study in asymmetric plastic spur gears". *Gear*

Solutions Magazine.

- Fuentes Aznar, Alfonso. (1995). *Modelo de cálculo a flexión de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente*. Doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.
- Gang, Liu, & Robert, G. (2009). Impact of tooth friction and its bending effect on gear dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 320.
- García Masiá, C. (1994). *Optimización del Diseño de Engranajes por Análisis Paramétrico*. Doctoral, UNED, Madrid.
- Goncalves, Raúl. (2002). *Introducción al análisis de esfuerzos*. Venezuela: Industria Gráfica Integral, C.A.
- González G. Rey, Frechilla Fernández, P, & García Martín, R. (2011). El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes. *Revista Ingeniería Mecánica*, 5(1), 55-67.
- González Quintero, O. (2010). Análisis de la influencia de la razón de transmisión en la velocidad específica de deslizamiento. *Ingeniería Mecánica*, 13(1), 1-8.
- González Rey G, García Martín R, & Frechilla Fernández P. (2005). Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos. *Revista Ingeniería Mecánica*, (2).
- GOST 21354-87. (1989). *Cálculo de Transmisiones por Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos de Perfil de Evolvente*. Gosudartsviennij Standart. Moscú.
- Goytisolo R. (1977). Máquina experimental para la simulación del contacto en las transmisiones por engranaje. *Tecnología Serie Construcción de Maquinaria*, 2(2).
- Goytisolo, R, & Cabello, J.J. (1997). Correction to Maximize Gear Resistance to Fatigue.

Revista Applied Mechanics. Canada, 4.

Goytisolo, R, & Moya, J. (1977). Máquina Experimental para la Simulación del Contacto en las Transmisiones por Engranajes. *Revista Centro Construcción de Maquinaria*, 2(2).

Goytisolo, R, & Moya, J. (1976). Influencia de la Corrección en la Lubricación de las Transmisiones por Engranajes. Tecnología, Serie: Centro Construcción de Maquinaria.

Goytisolo, R, & Moya, J. (1977). Corrección de la altura para máxima resistencia a la picadura. *Tecnología Serie: Construcción de Maquinaria*.

Goytisolo, R, & Moya, J. (1976). Análisis de la Lubricación en el Reductor PM-400. Tecnología, Serie: Centro Construcción de Maquinaria.

Goytisolo, R, Moya, J, & Pérez, A. (s.d.). Cálculo de la corrección de altura engranajes. *Tecnología Mecánica, 1*, 70-74.

Hebbal, M. S, Math, V. B, & Sheeparamatti, G. (2009). A study on reducing the root fillet stress in spur gear using internal stress relieving feature of different shapes. *International Journal of Recent Trends in Engineering, 1*(5).

Hernández ,O. (2006). *Método para el diseño de engranes cilíndricos con dientes rectos de perfil de evolvente basado en el indicador del grado de socavado*. Doctoral, Holguín.

Hernández, O, & Vega, A. (2006). Análisis del socavado en engranajes cilíndricos de perfil evolvente aplicados en mecanismos de minería, *Minería y Geología*, (3).

Huston, R.L, Mavriplis, D, & Oswald, F.B. (1989). *Computer aided design of spur gear teeth. International Power Transmission and Gearing Conference*.

- Huston, R.L, Mavriplis, D, & Oswald, F.B. (1994). A basis for solid modeling of gear teeth with applications in design and manufacture. *Mechanics and Machine Theory*, 29(5), 713-723.
- Investigation of strenght of gear teeth. *Proceedings of the Engineers' Club of Philadelphia*. (1893). . Recuperado a partir de <http://www2.hsp.org / collections/ manuscripts/e/ ECP3144.html>.
- ISO 6336-3. (1996). Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 3: Calculation of tooth bending strength.
- ISO 6336-1. (1996). Calculation of load capacity of spur and helical gears. Switzerland.
- Jevgenijs, Butans. (2007). Computer aided design of involute gear shaper cutters. MSc by Research Thesis. Cranfield University, School of Applied Sciences.
- Juvinall, Robert. (1997). *Fundamentos de diseño para ingeniería mecánica*.
- Kapelevich, A, & Shekhtman, Y. (2009). Tooth fillet profile optimization for gears with symmetric and asymmetric teeth, 73-79.
- Kapelevich, A. L, & Shekhtman, Y. (2010). Area of existence of involute gears. *Gear Technology*.
- Kapelevich, A.L, & Kleiss, R. E. (2002). Direct gear design for spur and helical involute gears., 29–35.
- Kapelevich, A.L, & Kleiss, R.E. (2002). Direct gear design for spur and helical involute gears”, *Gear Technology*, 29–35.
- Kapelevich, Alexander. (2000). Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth, 117–130.
- Kapelevich, Alexander. (2004). Direct gear design drives performance.

- Kapelevich, Alexander. (2009). Direct design of asymmetric gears: approach and application. Proceedings of MPT2009-Sendai JSME International Conference on Motion and Power Transmissions.
- Kapelevich, Alexander. (2011). Designing asymmetric gears”.
- Kapelevich, Alexander, & Shekhtman, Yuriy V. (2003). Direct gear design: bending stress minimization, 44–47.
- Kapelevich, Alexander, & Taye, Elias. (2011). Locking Gears: Design and potential applications.
- Kapelevich, Alexander L. (2011). Measurement of directly designed gears with symmetric and asymmetric teeth.
- Kawalec A, & Rzeszo W. (2004). Tooth-root stress calculation of internal spur gears. *Engineering Manufacture*, 218.
- Koilraj, M, Muthuveerappan, G, & Pattabiraman, J. (2007). An improvement in gear tooth design methodology using finite element method.
- Kumar Senthil, Muni D.V, & Muthuveerappan G. (2008). Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity, 829–858.
- Litvin Faydor L. (1997). Development of gear technology and theory of gearing. NASA Reference Publication.
- Litvin, Faydor. (1997). Development of gear technology and theory of gearing. NASA Center for Aerospace Information. Recuperado a partir de <http://gltrs.grc.nasa.gov/reports/1997/RP-1406.pdf>.
- Litvin, Faydor L, & Fuentes, Alfonso. (2004). *Gear geometry and applied theory* (second edition.). New York: Cambridge University Press.

- Litvin, Faydor L, & Kapelevich, Alexander L. (2000). Asymmetric modified gear drives: reduction of noise localization of contact simulation of meshing and stress analysis. Elsevier Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 363–390.
- Mabie, H, & Reinholtz, C. (2000). *Mechanisms and dynamics of machinery*. USA: John Wiley.
- Machado Rodríguez, A, Moya Rodríguez, J, & Fernández Rico, J. (2000). Influencia del desplazamiento en la lubricación de engranajes cilíndricos de alto módulo.
- Mahbub Murshed, S. M, Arifeen Wahed, M, & Salam Akanda, M. A. (2004). Parametric solution of spur gear tooth under tip load.
- Mallesh, G, Math, V. B, & Kumar, P. (2009). Effect of rim thickness on symmetric and asymmetric spur gear tooth bending stress.
- Marghitu, Dan B. (2001). *Mechanical Engineer's Handbook* Edited by Department of Mechanical Engineering, Auburn University, Auburn, Alabama. Academic Press.
- Masuyama, T. (2002). Evaluation of bending strength of carburized gears based on inferential identification of principal surface layer defects, 45(3).
- Matsumoto, T. (1989). The relation between shot peening conditions and fatigue strength of carburized gears.
- Michalec, George. (2003). *Manual del ingeniero mecánico* (Vol. 1). Colombia: McGraw Hill.
- Ming-Haung, Tsai, & Ying-Chien, Tsai. (1997). A method for calculating static transmission errors of plastic spur gears using FEM evaluation, *Finite Elements in Analysis And Design*, 27, 345-357.
- Mitchiner, R. G, & Mabie, H. H. (1982). The determination of Lewis form factor and the

- AGMA geometry factor J for external spur gear teeth, ASME Journal of Mechanical Design, *104*, 148-158.
- Mora, P, & Jaime, D. (2011). *Método numérico para mecánica computacional basado en análisis isogeométrico y técnicas multiescala*. Maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado a partir de www.bdigital.unal.edu.co/4107/1/jaimedavidmorapaz.pdf.
- Mott, Robert. (2006). *Diseño de elementos de máquinas*. México: Pearson Educación.
- Moya Rodríguez, J. L, Huapaya Bautista, A, & Goytisol Espinosa, R. A. (2007). Influencia de la corrección del dentado en la resistencia a la picadura de los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores.
- Moya Rodríguez, J. L, Velásquez Pérez, J, & Arencibia Gómez, R. (2007). Influencia en la resistencia de engranajes plásticos de la geometría del diente. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, (3), 13-17.
- Moya, J. L, Machado, A. S, & Velázquez, J.A. (2009). Influence of shift profile on gear lubrication". Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.
- Moya, Jorge. (1994). *Diseño de coronas de molinos de caña de azúcar. Comparación del rango de capacidad de carga de los engranajes evolventes según las normas AGMA*. Doctoral, La Habana.
- Moya, Rodríguez, Jorge, Laureano, & Goytisol, Espinosa. (s.d.). Determinación del factor de forma (Factor de Lewis) en engranajes con geometría especial.
- Muni, D.V, Kumar, Senthil, & Muthuveerappan, G. (2007). Optimization of asymmetric spur gear drives for maximum bending strength using direct gear design method.

Thomas, J, & Edward, L. (1942). A photoelastic study of stresses in gear tooth fillets.

Recuperado a partir de <http://hdl.handle.net/2142/4522>