

REPÚBLICA DE CUBA.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR.
FACULTAD DE INGENIERÍA.



UNIVERSIDAD
C I E N F U E G O S
Carlos Rafael Rodríguez

COLECTIVO DE MECÁNICA APLICADA.

TRABAJO DE DIPLOMA

TÍTULO: Modelos para considerar la rigidez de los apoyos de las máquinas y en particular los árboles de las bombas centrífugas, considerando la rigidez al giro de los cojinetes y las empaquetaduras como apoyos elásticos y su modelación por Elementos Finitos.

Autor: Osmel Domingo Medina Martínez.

Tutores: Dr. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa.

Ing. Raúl Alfonso Rodríguez

Ing. Mario Jesús Espín Pérez

Junio 2014

“Año 56 de la Revolución”

Declaración de autoridad.



Facultad de Ingeniería Mecánica.

Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad de Cienfuegos, como parte de la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica; autorizando a que el mismo sea utilizado para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total, y además no podrá ser presentado en eventos ni publicado sin la aprobación de la Universidad de Cienfuegos.

Firma del Autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido revisado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esa envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico – Técnica, Firma

Firma del Vicedecano

Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyectos

Agradecimiento

Especialmente a mi madre por siempre alentarme y apoyarme en esta y todas las etapas de mi vida, a la que le debo lo que soy y lo que seré en el futuro.

A mi abuela, mi hermana, mi papá, mi novia, en general a todos mis familiares que de una forma u otra me mostraron siempre su apoyo incondicional.

A mis tutores: Rafael Goytísolo, Raúl Alfonzo y Mario Espín, gracias por su esmerada dedicación, entrega y paciencia para conmigo.

A José Pepe Quintero, gracias por haberme mostrado el camino hacia mi formación profesional.

A todos mis profesores durante toda la carrera, gracias por sus enseñanzas.

A mis compañeros de aula, gracias por haber hecho estos seis años de intenso estudio y sacrificio, mucho más a menos y divertidos.

A mis amigos y a todos las personas que no olvidaré y que significaron mucho en mi vida como universitario. A todos.

¡Muchas Gracias!

Dedicatoria

A mi mamá, por ser la persona más importante en mi vida, porque su amor, su educación y entrega, han hecho de mí la persona que hoy soy.

A mi abuela, por creer siempre en mí, por enseñarme que para ser alguien en la vida se requiere mucho esfuerzo y sacrificio.

A la memoria de mi tío Clemente, gracias por todo, tus consejos y enseñanzas me han servido para alcanzar muchas metas en mi vida.

A mi hermana, por su apoyo, por siempre estar ahí cuando más lo necesito.

A mi papá, por su guía, su entrega y dedicación.

A todos los que de una forma u otra me han brindado su amor, respeto y cariño.

*“No es grande el que siempre triunfa, sino
el que jamás se desalienta.”*

Martín Descalzo

Resumen

En el trabajo se realizó una profunda búsqueda bibliográfica que abarca los principales aspectos de las empaquetaduras como conceptos, propiedades, características, ventajas, inconvenientes y aplicaciones; así como la metodología de selección de la misma, además se indagó en los apoyos elásticos, la rigidez de los rodamientos, así como las ventajas de utilizar el MEF. Se hallaron las dependencias teóricas entre el desplazamiento radial y la carga aplicada a un prensa estopas con seis empaquetaduras de material teflón. Se creó un Modelo por Elementos Finitos para condiciones similares a las analíticas y se realizó una comparación de los resultados.

Índice

Introducción.....	1
Capítulo I: Tendencias, conceptos y metodologías de cálculo descritas en la literatura, para los apoyos elásticos y su efecto en las máquinas, así como lo rigidez de los cojinetes, propiedades y aplicaciones de las empaquetaduras.	4
1.1 INTRODUCCIÓN.....	4
1.2 APOYOS ELÁSTICOS	4
1.2.1 TIPOLOGÍA DE APOYOS ELÁSTICOS	5
1.2.1.1 Apoyo Elástico de Desplazamiento.	5
1.2.1.2 Apoyo Elástico de Giro.	5
1.2.1.3 Apoyo Articulado Móvil Elástico.	6
1.2.1.4 Apoyo Articulado Elástico Fijo.....	6
1.2.1.5 Fundación Elástica.....	7
1.2.1.6 Empotramiento Elástico.....	7
1.2.1.7 Empotramiento Parcialmente Elástico.....	8
1.2.2 METODOLOGIAS DE CÁLCULO PARA EL TRABAJO CON APOYOS ELÁSTICOS	8
1.2.2.1 Influencia de la rigidez en el diseño de apoyos flexibles para equipos industriales (Canle, 2011).	8
1.2.2.2 Vigas rectas continuas, ecuaciones angulares, ecuación de tres momentos y aplicaciones (Morquio & Delacoste, 2014).	12
1.2.2.3 Solución de un árbol hiperestático con un empotramiento parcialmente elástico por el Método de las Fuerzas (Hidalgo, 2009).	15
1.3 ELEMNTOS FINITOS EN EL ANÁLISIS Y SOLUCIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS.....	19
1.3.1 El método de los elementos finitos (FEM) como método de discretización.	20
1.3.2 El proceso de análisis e interpretación.	20
1.3.3 La física del FEM.	21
1.3.4 Aplicaciones prácticas del FEM.	22
1.4 RIGIDEZ DE LOS RODAMIENTO	23
1.4.1 Precarga de rodamientos	25
1.4.2 METODOLOGIAS PARA EL CÁLCULO DE LA RIGIDEZ DE LOS RODAMIENTOS	26
1.4.2.1 Fundamentos de la rigidez de los rodamientos (SCHEFFLER, 2014).	26
1.4.2.2 Cálculo de la matriz de rigidez de los rodamientos mediante elemento finito/modelo de mecánica de contacto (Guo & Parker, 2012).	29
1.5 PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LAS EMPAQUETADURAS	40

1.5.1 ¿QUE ES LA EMPAQUETADURA Y PORQUE SE NECESITAN?	41
1.5.1.1 Empaquetadura del prensaestopas	41
1.5.2 TIPOS DE EMPAQUETADURAS MECÁNICAS	41
1.5.3 PROPIEDADES DE LAS EMPAQUETADURAS.....	44
1.5.3.1 Propiedades básicas de las empaquetaduras (ERICA, 2014).	45
1.5.4 Ventajas e Inconvenientes de las empaquetaduras.	49
1.5.5 Apriete de la empaquetadura.	50
1.5.6 SELECCIÓN DE LA EMPAQUETADURA	51
1.6 Conclusiones parciales del capítulo I.....	52
Capítulo II Desarrollo del método general de cálculo de los árboles de las bombas centrífugas considerando los cojinetes de rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos y las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios.	53
2.1 Utilización del Método de las Fuerzas en la solución de árboles hiperestáticos.	53
2.2 Utilización del Método de las Fuerzas en el caso de apoyos linealmente elásticos.	55
2.3 Las empaquetaduras como apoyos linealmente elásticos.....	55
2.4 Esquema de Análisis del árbol de una bomba centrífuga multietápica considerando los dos cojinetes de apoyos como empotramientos parcialmente elásticos y las dos empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios.....	57
2.5 Solución por el Método de las Fuerzas	59
2.6 Conclusiones parciales del Capítulo II.	64
Capítulo III: Comportamiento del Modelo Analítico elaborado para el desplazamiento lineal elástico de una empaquetadura blanda y su validación por el Método de los Elementos Finitos.	65
3.1 Modelo Matemático para el desplazamiento lineal de una empaquetadura blanda.	65
3.2 Análisis de las empaquetaduras por el Método de los Elementos Finitos.	68
3.3 Conclusiones parciales del capítulo III	75
Conclusiones Generales	76
Recomendaciones	77
Bibliografía.....	78

Introducción

Una parte importante en el proceso de diseño de una instalación industrial cualquiera es el cálculo de los soportes del equipo industrial o máquina de la que se trate. Habitualmente estas estructuras se diseñan como entramados compuestos por elementos flexibles, pero los apoyos de la misma se consideran rígidos. Una práctica común durante el proceso de cálculo, con el objetivo de considerar la rigidez de los apoyos, es que se asume que la rigidez de los soportes, sobre la cual se apoyan los equipos industriales es igual en todos los puntos de apoyo, con el fin de distribuir las cargas gravitatorias proporcionalmente al número de soportes del equipo. Esta práctica puede conducir a diseños inseguros, tanto para el propio equipo como para la estructura soporte del mismo, si no se tiene en cuenta el efecto que la rigidez tiene sobre la reacción en los apoyos (Canlé, 2011). En esta investigación se hace una llamada de atención sobre este hecho, precisamente buscando en la literatura científica aquellos ejemplos, métodos de cálculo, criterios, etc. donde se muestra la influencia de la rigidez de los apoyos en el diseño, y se aportan propuestas de soluciones y metodologías de cálculo recomendadas para este tipo de problemas.

Un caso particular muy importante de esta Investigación lo constituyen los árboles de máquinas. Los árboles de las máquinas constituyen su soporte principal, son precisamente los elementos que posibilitan el giro de la misma y existen diferentes criterios en la bibliografía de cómo considerar su rigidez y la de sus apoyos. Los soportes de los árboles de las máquinas históricamente se han idealizado a través de tres esquemas de análisis típicos: el apoyo articulado móvil, el apoyo articulado fijo y el apoyo empotrado, sin embargo, estos esquemas idealizados se alejan en cierta medida de la realidad. Los apoyos articulados provocan en los mismos: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho mayores que los reales y los apoyos empotrados: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho menores que las que existen en la realidad. Estas insuficiencias de los esquemas de análisis se han asimilado históricamente a través del controvertido factor de seguridad, encargado de llevar sobre su espalda todas las imprecisiones e incertidumbres de los cálculos. En el presente trabajo se describe una nueva metodología para el cálculo de árboles de bombas centrífugas utilizando un esquema de análisis con apoyos y empotramientos elásticos en el cual se consideran las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y se toma en cuenta la rigidez angular real de los cojinetes de rodamientos. La metodología desarrollada se ha aplicado en la práctica en la recuperación de los árboles de las dos bombas centrífugas multietápicas de la embarcación contra incendios "6 de Junio", donde se recuperaron los árboles con

acero inoxidable, mucho menos resistente a las cargas que el acero original y su cálculo, para evaluar su resistencia fue necesario hacerlo por dicha nueva metodología que considera el efecto favorable de las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y se aplicó también a una de las bombas de alimentación de agua desmineralizada a las Calderas de la Central Termoeléctrica de Cienfuegos que había fallado por desgaste en la zona de la empaquetadura. Si no se aplica dicha metodología elaborada en el trabajo no se hubiera podido hallar la fuerza radial que ejerce la empaquetadura sobre el árbol, no se hubiera podido hallar el par de fricción que provoca esa reacción radial sobre el árbol, tomando en cuenta el coeficiente de fricción que introduce la empaquetadura en la zona de contacto con el árbol y por lo tanto no se hubiera podido hallar la capacidad de la unión por interferencia del casquillo que se prensó en el árbol en la zona de la empaquetadura para restablecer esa zona desgastada.

El **Problema Científico** fundamental a resolver en la presente Investigación en que en la mencionada metodología se emplea un Modelo Matemático acerca de la rigidez como Apoyo Elástico de las empaquetaduras. La Novedad Científica del presente trabajo es la de evaluar analíticamente dicho Modelo Matemático y compararlo con los resultados obtenidos con un Modelo Numérico elaborado por el Método de los Elementos Finitos., de aquí que la **Hipótesis** formulada es la siguiente: Resulta posible, aplicando la novedosa consideración práctica de considerar las empaquetaduras de las bombas como apoyos elásticos suplementarios (Goytisolo y Alfonso, 2010) procesar analíticamente el modelo Matemático elaborado para dicha consideración y comparar los resultados analíticos obtenidos con los que resultan de la aplicación de un Modelo Numérico elaborado sobre la base de la utilización del Método de los Elementos Finitos.

El **Objetivo General** del presente trabajo es por lo tanto:

Desarrollar un Modelo Numérico de la rigidez a cargas radiales de un prensa estopas con empaquetadura blanda, elaborado sobre la base del Método de los Elementos Finitos y comparar los resultados con los obtenidos con el Modelo Analítico creado.

Los **Objetivos Específicos** son:

1. Investigar en la literatura las particularidades del cálculo de los apoyos elásticos en las máquinas en general y sobre la rigidez de los árboles, cojinetes y de las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios.
2. Procesar analíticamente el Modelo Matemático creado para un prensaestopas con empaquetadura blanda y graficar los resultados para diferentes rigideces de las empaquetaduras y diferentes cargas radiales.

3. Desarrollar un Modelo Numérico elaborado utilizando el Método de los Elementos Finitos para comparar sus resultados con los analíticos y obtener conclusiones.

Las **Tareas de Investigación** se pueden sintetizar como sigue:

1. Profundizar en la literatura científica en todo lo relacionado con la elasticidad de los elementos soportes de las máquinas en general y en la de los árboles de las máquinas en particular, así como en lo referente a la rigidez al giro de los cojinetes de rodamientos y la rigidez lineal de las empaquetaduras y sellos mecánicos utilizados en las bombas centrífugas y equipos herméticos en general.
2. Profundizar en las características específicas constructivas de los prensaestopas con empaquetadura blanda, en la rigidez de las empaquetaduras para procesar analíticamente el Modelo Matemático creado para considerar las empaquetaduras como apoyos elásticos complementarios.
3. Desarrollar un Modelo Numérico utilizando el Método de los Elementos Finitos de la empaquetadura seleccionada como base de referencia y procesarlo para las mismas condiciones que el Modelo Analítico.
4. Obtener conclusiones acerca de la validez del Modelo Analítico creado.

Capítulo I: Tendencias, conceptos y metodologías de cálculo descritas en la literatura, para los apoyos elásticos y su efecto en las máquinas, así como lo rigidez de los cojinetes, propiedades y aplicaciones de las empaquetaduras.

1.1 INTRODUCCIÓN

En nuevas investigaciones ya se empieza a tomar en cuenta, incluso a implementar metodologías de cálculo, a la elasticidad de los soportes, logrando de esta manera resultados más reales y diseños mucho más seguros. Elementos como las empaquetaduras y los cojinetes debido a sus características físicas han sido objeto de estudios recientes debido a sus aplicaciones en las máquinas dinámicas, lo cual ha dado lugar al desarrollo de nuevos esquemas y modelos de análisis que toman en consideración la elasticidad de estos apoyos.

1.2 APOYOS ELÁSTICOS

Los apoyos son condiciones de contorno que se aplican a los nudos, de tal manera que se fija o se condiciona uno o varios grados de libertad del nudo apoyado. Los apoyos siempre van asociados a grados de libertad de los nudos.

Existen tres tipos de apoyos: (Llamando **d** al desplazamiento de un grado de libertad)

1. **Apoyos fijos:** Se impide el desplazamiento del grado de libertad correspondiente

$$d = 0$$

2. **Apoyos elásticos:** El desplazamiento depende de la reacción obtenida. La definición de un apoyo elástico se realiza mediante el valor de su constante elástica **K** (ud de fuerza/ud de longitud)

$$d = R / K \quad (\text{siendo } R \text{ la reacción})$$

3. **Desplazamiento fijo:** Permiten fijar el movimiento de un grado de libertad.

$$d = df(\text{siendo } df \text{ dato})$$

Los apoyos que se definen en una estructura son los mismos para todos los estados de carga. La introducción de apoyos fijos o apoyos elásticos, no introducen esfuerzos en la estructura, mientras que los desplazamientos fijos, generan unos esfuerzos y deformaciones sobre la estructura.

Por ello, solo debería usarse el apoyo de desplazamiento fijo en estructuras con un único estado de carga ya que el desplazamiento dado y los esfuerzos generados por dicho desplazamiento quedarán asignados a cada estado de carga (STR Ingeniería, 2012).

1.2.1 TIPOLOGÍA DE APOYOS ELÁSTICOS

1.2.1.1 Apoyo Elástico de Desplazamiento.

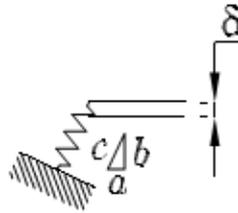
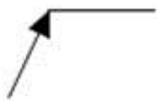


Figura. 1.1. Modelo del Apoyo Elástico de Desplazamiento

El Modelo matemático se expresa como:



$$R = -k \frac{c}{b} \delta \quad (1.1)$$

1.2.1.2 Apoyo Elástico de Giro.

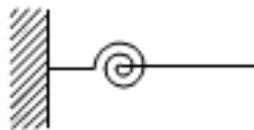


Figura. 1.2. Modelo del Apoyo Elástico de Giro

El Modelo matemático se expresa como:



$$M = -k\theta \quad (1.2)$$

1.2.1.3 Apoyo Articulado Móvil Elástico.

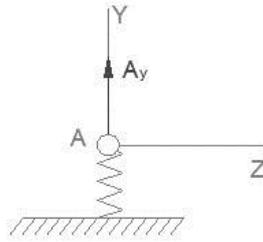


Figura. 1.3. Modelo del Apoyo Articulado Elástico Móvil

El Modelo matemático se expresa como:

$$\begin{aligned}
 A_z &= 0 & \delta_{Az} &\neq 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{Ay} &= -\frac{A_y}{C_A} \neq 0 \\
 M_A &= 0 & \phi_A &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

1.2.1.4 Apoyo Articulado Elástico Fijo.

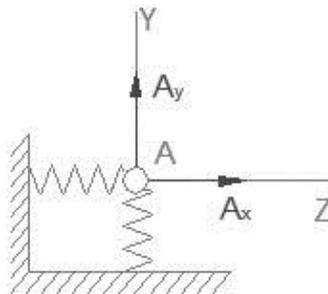


Figura. 1.4. Modelo del Apoyo Articulado Elástico Fijo

El Modelo matemático en este caso es:

$$\begin{aligned}
 A_z &\neq 0 & \delta_{Az} - \frac{A_z}{C_A} &\neq 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{Ay} = -\frac{A_y}{C_A} &\neq 0 \\
 M_A &= 0 & \phi_A &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

1.2.1.5 Fundación Elástica.

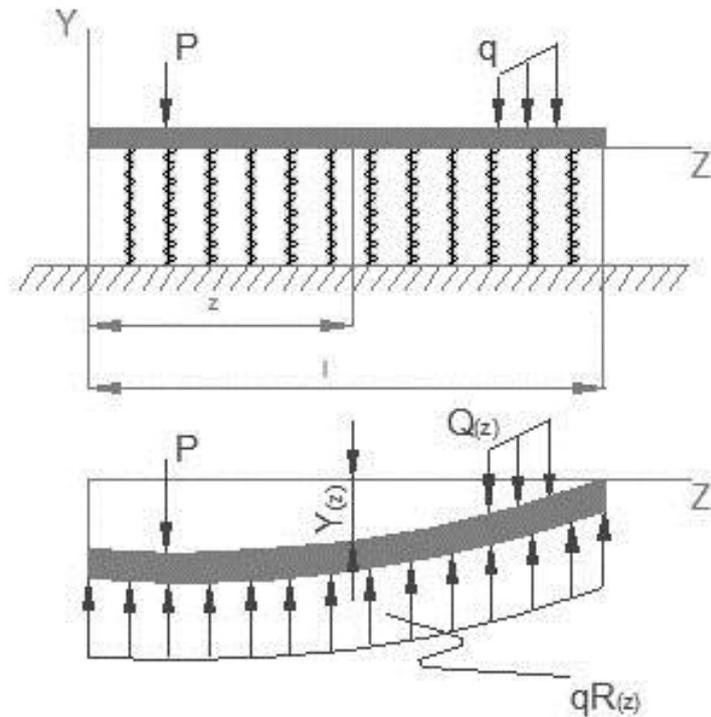


Figura. 1.5. Esquema de Análisis de una Viga sobre Fundación Elástica.

El Modelo matemático se expresa en este caso como:

$$q_{R(z)} = -\alpha Y_{(z)} \quad \text{kgf / cm} \quad (1.5)$$

1.2.1.6 Empotramiento Elástico.

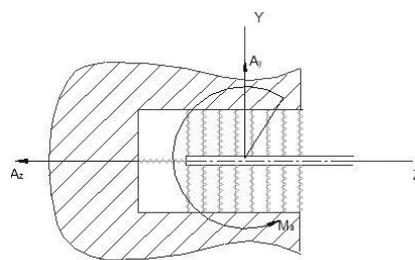


Figura. 1.6. Esquema de Análisis de un Empotramiento Elástico.

El Modelo matemático de este apoyo se puede expresar como sigue.

$$\begin{aligned}
 A_z \neq 0 & \quad \delta_{AZ} - \frac{A_z}{C_A} \neq 0 \\
 A_y \neq 0 & \quad \delta_{Ay} = -\frac{A_y}{C_A} \neq 0 \\
 M_A \neq 0 & \quad \phi_A - \frac{\Delta_A}{CB''} \neq 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2.1.7 Empotramiento Parcialmente Elástico (modelo simplificado del Empotramiento Elástico)

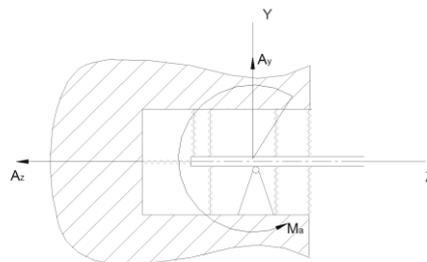


Fig. 1.7. Esquema de Análisis de un Empotramiento Parcialmente Elástico.

El Modelo matemático de este apoyo se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
 A_z \neq 0 & \quad \delta_{AZ} = 0 \\
 A_y \neq 0 & \quad \delta_{Ay} = 0 \\
 M_A \neq 0 & \quad \phi_A - \frac{M_A}{CA} \neq 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2.2 METODOLOGIAS DE CÁLCULO PARA EL TRABAJO CON APOYOS ELÁSTICOS

1.2.2.1 Influencia de la rigidez en el diseño de apoyos flexibles para equipos industriales (Canle, 2011).

El apoyo de equipos sobre estructuras flexibles es una práctica muy extendida en la industria. Es difícil imaginarse un proyecto industrial en el que no se realice un diseño de equipos soportados en estructuras flexibles, pues son casos habituales en la industria química, petroquímica, minería, farmacéutica, energética y un largo etcétera.

Cuando el calculista estructural realiza el reparto de cargas de los equipos soportados en una plataforma estructural, es regla común asumir que la rigidez del piso es igual para todos los puntos de apoyo y simplemente se divide la carga del equipo entre el número de soportes del mismo para obtener la carga por punto de apoyo.

Otras veces es el propio fabricante del equipo el que suministra en el plano de conjunto del equipo las acciones a considerar en los apoyos (figura 1.8).

El fabricante del equipo no suele disponer de información de la estructura donde se apoyará el equipo y, por tanto, asumirá que no tiene efecto la influencia de la rigidez (normalmente asumirá rigidez infinita en los puntos de apoyo).

Reacciones en apoyos elásticos

El cálculo de las reacciones sobre apoyos elásticos está ampliamente cubierto en los textos específicos de mecánica estructural, resistencia de materiales y diseño estructural avanzado.

Los apoyos elásticos quedan definidos por su constante de resorte (fuerza resultante dividida por el desplazamiento). Una forma de resolver el problema de apoyos elásticos es sustituir el apoyo elástico, en el modelo estructural, por barras que produzcan el mismo efecto.

Por ejemplo, para la viga continua de la figura 1.9, se podría sustituir el apoyo R2 por una columna de inercia despreciable frente a la de la viga, pero con sección transversal y longitud tal que su acortamiento elástico sea el mismo que el del resorte:

$$\frac{P_2}{k_2} = \frac{P_2 \cdot L_{25}}{E \cdot F_{25}} ; \text{ es decir, } \frac{L_{25}}{F_{25}} = \frac{E}{k_2} \quad (1.8)$$

Dónde:

P_2 = Reacción del apoyo 2.

k_2 = Constante de muelle.

E = Módulo elástico.

L_{25} = Longitud de la barra.

F_{25} = Área de la barra.

Un ejemplo sencillo de cálculo de reacciones en apoyos elásticos es el de una viga continua, cargada uniformemente, con un apoyo elástico interior. La viga estará rígidamente soportada en los puntos A y C y elásticamente en el punto B (figura 1.10).

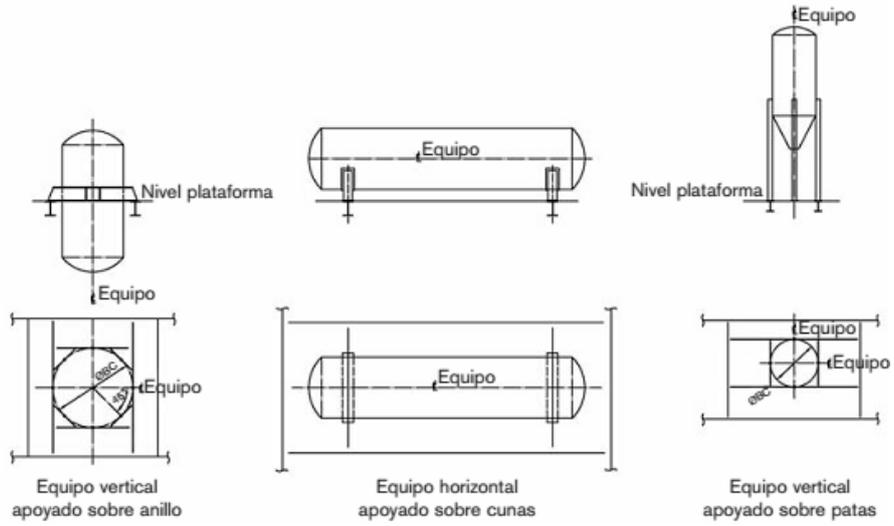


Figura. 1.8. Equipos en plantas industriales.

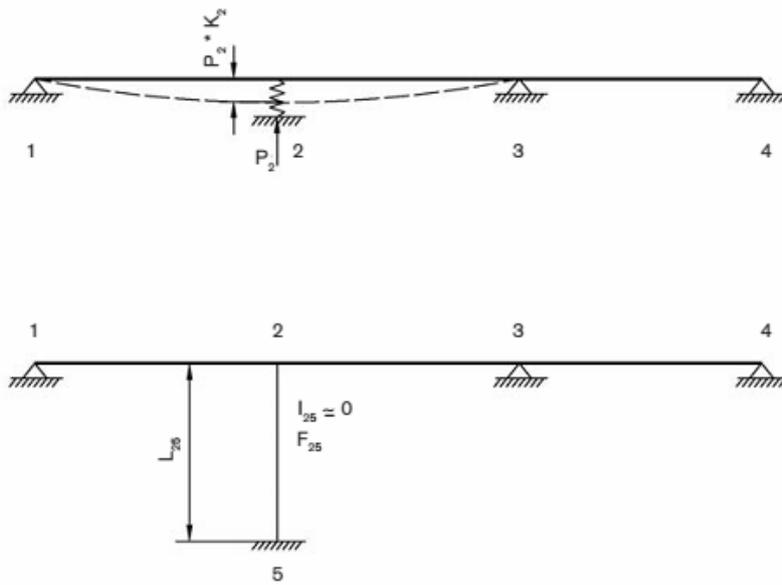


Figura. 1.9. Viga continua de cuatro apoyos.

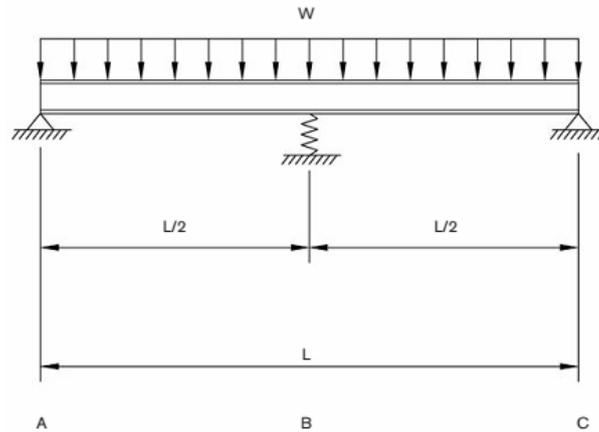


Figura. 1.10. Viga continua con carga uniforme y un apoyo elástico.

Definiendo:

W = Carga uniforme kN/m.

L = Longitud total de la viga (m).

K = Constante del muelle (kN/m).

E = Módulo de elasticidad (kN/m²).

I = Inercia de la viga (m⁴).

Para determinar la reacción en el punto B se procede de la siguiente forma:

1. Inicialmente se asume que no hay apoyo en B; la viga se comporta como biapoyada, y la deformación se produce en el punto B:

$$\delta_{bd} = \frac{5.WL^4}{384.E.I} \tag{1.9}$$

2. La deformación en B causada por la reacción en el apoyo elástico será:

$$\delta_{bu} = \frac{R_b L^3}{48.E.I} \tag{1.10}$$

3. La deformación neta en B será la determinada por:

$$\delta_b = \delta_{bd} - \delta_{bu} \quad (1.11)$$

Es decir:

$$\delta_b = \frac{5.WL^4}{384.E.I} - \frac{R_b.L^3}{48.E.I} \quad (1.12)$$

con $R_b = K.\delta_b$

Sustituyendo, tenemos:

$$\frac{R_b}{K} = \frac{5.WL^4}{384.E.I} - \frac{R_b.L^3}{48.E.I} \quad (1.13)$$

Operando con la ecuación anterior llegamos a:

$$R_b = \frac{5.WKL^4}{384.E.I + 8.K.L^3} \quad (1.14)$$

1.2.2.2 Vigas rectas continuas, ecuaciones angulares, ecuación de tres momentos y aplicaciones (Morquio & Delacoste, 2014).

Viga continua sobre apoyos elásticos

A continuación se presenta el caso que los apoyos no sean totalmente rígidos sino que tengan un cierto descenso cuando son cargados. Esta es una situación relativamente frecuente. Supondremos que los apoyos se comportan como elásticos (ver figura 1.11) o sea que se cumplirá que:

$$R_n = k_n \cdot v_n \quad (1.15)$$

Donde k_n será la constante elástica del apoyo n.

En este problema dejan de ser datos los descensos de los apoyos y pasan a ser incógnitas.



Figura 1.11: Viga continua sobre apoyos elásticos

Se cumplirá que:

$$\psi^n = \frac{v_n - v_{n-1}}{L^n} \quad (1.16)$$

$$\psi^{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{L^{n+1}} \quad (1.17)$$

Y sustituyendo los descensos por su expresión en función de las reacciones se tiene:

$$\psi^n = \frac{\frac{R_n}{k_n} - \frac{R_{n-1}}{k_{n-1}}}{L^n} = \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{k_n L^n} \left(R_{0n} + \frac{M_{n-1}}{L^n} - \frac{M_n}{L^n} - \frac{M_n}{L^{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{L^{n+1}} \right) - \frac{1}{k_{n-1} L^n} \left(R_{0n-1} + \frac{M_{n-2}}{L^{n-1}} - \frac{M_{n-1}}{L^{n-1}} - \frac{M_{n-1}}{L^n} + \frac{M_n}{L^n} \right) = \psi^n$$

Análogamente obtengo ψ^{n+1}

Observar que:

$$\psi^n = f_1(M_{n-2}, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, R_{0n}, R_{0n-1}) \quad (1.19)$$

$$\psi^{n+1} = f_2(M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, R_{0n}, R_{0n+1}) \quad (1.20)$$

siendo ambas ecuaciones lineales.

Sustituyendo en la ecuación de tres momentos,

$$M_{n-1}\beta^n + M_n(\alpha_n^n + \alpha_n^{n+1}) + M_{n+1}\beta^{n+1} + \alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1} - \psi^n + \psi^{n+1} = 0 \quad (1.21)$$

ésta queda de la forma:

$$A \cdot M_{n-2} + B \cdot M_{n-1} + C \cdot M_n + D \cdot M_{n+1} + E \cdot M_{n+2} + F \cdot R_{0,n-1} + G \cdot R_{0,n} + H \cdot R_{0,n+1} + \alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1} = 0 \quad (1.22)$$

con

$$A = \frac{1}{k_{n-1}L^{n-1}L^n} \quad (1.23)$$

$$B = \beta^n - \frac{1}{k_n(L^n)^2} - \frac{1}{k_{n-1}L^{n-1}L^n} - \frac{1}{k_{n-1}(L^n)^2} - \frac{1}{k_nL^nL^{n+1}} \quad (1.24)$$

$$C = \alpha_n^n + \alpha_n^{n+1} + \frac{1}{k_n(L^n)^2} + \frac{2}{k_nL^nL^{n+1}} + \frac{1}{k_{n-1}(L^n)^2} + \frac{1}{k_{n+1}(L^{n+1})^2} + \frac{1}{k_n(L^{n+1})^2} \quad (1.25)$$

$$D = \beta^{n+1} - \frac{1}{k_nL^nL^{n+1}} - \frac{1}{k_{n+1}(L^{n+1})^2} - \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}L^{n+2}} - \frac{1}{k_n(L^{n+1})^2} \quad (1.26)$$

$$E = \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}L^{n+2}} \quad (1.27)$$

$$F = \frac{1}{k_{n-1}L^n} \quad (1.28)$$

$$G = -\frac{1}{k_nL^n} - \frac{1}{k_nL^{n+1}} \quad (1.29)$$

$$H = \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}} \quad (1.30)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de los cinco momentos.

Si un apoyo es fijo (no es elástico) $kn = \infty$ y se van todos los términos que lo tienen como divisor. En el caso que todos los apoyos sean rígidos se eliminan todos estos términos y quedan los mismos coeficientes que en la ecuación de tres momentos. Si analizamos, por ejemplo, la ecuación del segundo apoyo ($n=1$):

$$R_{n-1} = R_0 = R_{0,0} + \frac{M_1}{L^1} \quad (1.31)$$

$$R_n = R_1 = R_{0,1} - \frac{M_1}{L^1} - \frac{M_1}{L^2} + \frac{M_2}{L^2} \quad (1.32)$$

En este caso (similar al de la ecuación de tres momentos) hay términos que no aparecen pues no existe el tramo 0, ni el momento M_0 , ni tampoco el apoyo -1 .

Los momentos M_0 y M_{-1} no aparecen en la ecuación de 5 momentos por lo que se puede tomar la expresión general y eliminar todos los términos que no tienen sentido, pues los tramos o los apoyos correspondientes no existen.

En la ecuación del tercer apoyo ($n = 2$) también hay términos que se eliminan. Lo mismo sucede para los apoyos $N-2$ y $N-1$ donde también hay términos que pierden sentido.

De manera similar al caso de la ecuación de tres momentos, si aparece un empotramiento, aparece una incógnita adicional (el momento de empotramiento en ese apoyo) pero también surge una ecuación adicional (giro nulo en ese apoyo).

1.2.2.3 Solución de un árbol hiperestático con un empotramiento parcialmente elástico por el Método de las Fuerzas (Hidalgo, 2009).

Los árboles con Empotramientos Elásticos o Empotramientos Parcialmente Elásticos constituyen Sistemas Hiperestáticos cuya solución se puede lograr por el Método de las Fuerzas. Para ilustrar la aplicación del Método de las Fuerzas en el caso de árboles hiperestáticos con Empotramientos Elásticos su utilizará, a modo de ejemplificación, un árbol con un Empotramiento Elástico y un Apoyo Articulado Móvil, bajo la acción de una carga simple como la mostrada en la figura. 1.12

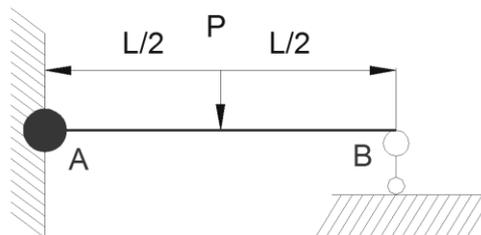


Figura. 1.12 Árbol Hiperestático con un Empotramiento Parcialmente Elástico.

En este caso el Empotramiento parcialmente Elástico representa tres ligaduras, pues aunque permite el giro en el apoyo, este es limitado, por lo tanto existe una ligadura suplementaria y en consecuencia un grado de hiperestaticidad.

Para resolver Sistemas Hiperestáticos con Empotramientos Elásticos o Parcialmente Elásticos es necesario elegir como Sistema Base aquel que resulta de eliminar las ligaduras suplementarias, pero sustituyendo los Empotramientos Elásticos por articulaciones fijas o móviles según sea necesario en el Sistema en particular. El Sistema Equivalente se construye entonces como es clásico, sustituyendo las ligaduras eliminadas por las fuerzas que las representan. En la figura. 1.13 se muestra el Sistema Equivalente correspondiente al Sistema mostrado en la figura. 1.12.

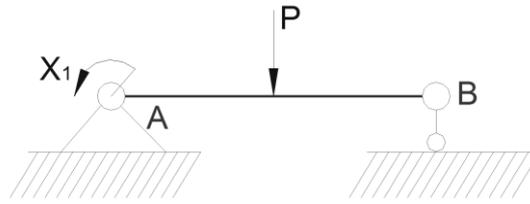


Figura. 1.13. Sistema Equivalente.

Las ecuaciones canónicas, en el caso de los Empotramientos Elásticos, se plantean partiendo de las condiciones de que los desplazamientos en las direcciones de las fuerzas X_i no necesariamente son iguales a cero, por tratarse precisamente de Empotramientos Elásticos, donde los desplazamientos reales dependerán de la rigidez del apoyo. En los análisis se utilizará el Modelo Matemático Simplificado de Empotramiento Elástico, al cual se le denominará también como Empotramiento Parcialmente Elástico, para el cual:

$$\delta_{Ax} = 0 \quad \delta_{Ay} = 0 \quad \theta_A \neq 0 \quad (1.33)$$

Por lo tanto, la ecuación canónica en este caso se escribirá como sigue:

$$\theta_{(x1, p)} = -\theta_A \quad (1.34)$$

De donde:

$$\delta_{1X} + \delta_{1P} = -\theta_A \quad (1.35)$$

Ecuación que se puede escribir de la forma:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_P = -\theta_A \quad (1.36)$$

El signo menos del término de la derecha indica que la pendiente del apoyo A será en sentido contrario a la dirección del momento X_1 ubicado como momento equilibrante. Se hallarán a continuación los coeficientes de la ecuación canónica. Para esto construiremos el gráfico unitario de la fuerza X_1 y el gráfico de P.

El gráfico unitario de X_1 se muestra en la figura. 1.14 y el de la carga P en la figura.1.15.

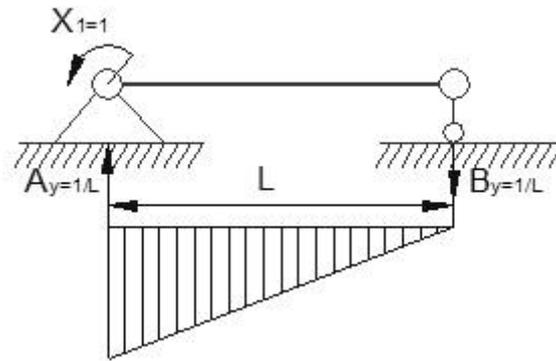


Figura. 1.14 Grafico Unitario de la Fuerza (X_1)

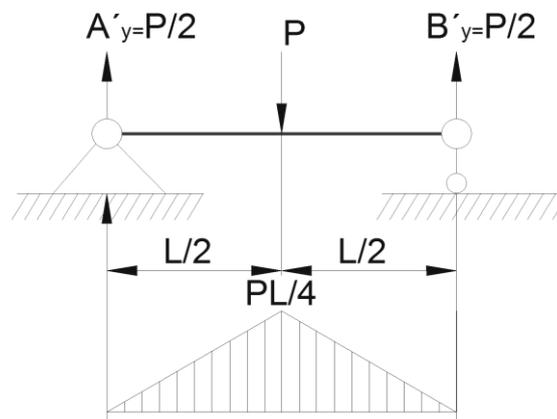


Figura. 1.15 Grafico de la Carga P

El coeficiente δ_{11} será:

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} 1 \cdot 1 \cdot L \right) = \frac{L}{3EI} \quad (1.37)$$

El coeficiente δ_{1P} será:

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{L \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{PL}{4}}{6} \right] = -\frac{3PL^2}{48EI} \quad (1.38)$$

Sustituyendo en la Ecuación Canónica correspondiente

$$\frac{L}{3EI} X_1 - \frac{3PL^2}{48EI} = -\theta_A \quad (1.39)$$

Despejando X_1 se tiene que:

$$M_A = X_1 = \frac{3PL^2 - 48EI\theta_A}{16L} \quad (1.40)$$

Si se tratara de un empotramiento rígido $\theta_A = 0$ y el momento en el empotramiento sería:

$$M_A = X_{1\theta_A=0} = \frac{3}{16}PL \quad (1.41)$$

Que es precisamente el valor que se da en Pisarenko[27] para esta viga hiperestática con carga en el centro de la luz.

Como se trata de un empotramiento elástico en el cual la restricción al giro en el empotramiento es menor que la ideal, el momento en el empotramiento será menor, o sea, una fracción φ del valor de M_A donde:

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

Si $\varphi = 0$ entonces la rigidez a la flexión del empotramiento es mínima y el momento que surgirá en el mismo será cero, o sea coincidirá con el apoyo articulado, si $\varphi = 1$ el empotramiento será perfectamente rígido.

En general para el empotramiento elástico se tiene que:

$$M_{Ac} = \varphi_A M_A \quad (1.42)$$

En el caso analizado:

$$M_{Ac} = \frac{3}{16}PL\varphi_A \quad (1.43)$$

Igualando las expresiones (1.40) y (1.43) y despejando φ_A se obtiene la expresión del coeficiente de rigidez del empotramiento elástico en función de la pendiente en el mismo. Para el ejemplo analizado

$$\varphi_A \frac{3PL^2 - 48EI\theta_A}{3PL^2} \quad (1.44)$$

$$\varphi_A = 1 - \frac{16EI}{PL^2} \cdot \theta_A \quad (1.45)$$

El valor de θ_A se puede estimar, se puede calcular aproximadamente o se puede medir experimentalmente.

Así por ejemplo, según Pisarenko[27] para una viga con apoyos articulados la pendiente en los apoyos se puede calcular por la expresión:

$$\theta_A = \frac{P L^2}{16 E I} \text{ rad} \quad (1.46)$$

Si se sustituye este valor en la Ecuación 1.45 para calcular el coeficiente φ del apoyo se obtendrá $\varphi_A = 1$, lo cual se corresponde con el coeficiente de rigidez del apoyo articulado.

1.3 ELEMENTOS FINITOS EN EL ANÁLISIS Y SOLUCIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS.

La mecánica como ciencia derivada de la física que estudia los efectos de la fuerza y la energía en los cuerpos físicos ha desarrollado la ciencia del diseño en ingeniería en la construcción de elementos de máquinas y estructuras. Esta se ha orientado hacia la ingeniería en cuatro objetivos que la distinguen; *Mecánica teórica* con leyes fundamentales y estudios científicos con sus valores intrínseco. *Mecánica aplicada* que transfiere los conocimientos teóricos y científicos a aplicaciones ingenieriles, especialmente mediante la construcción de modelos matemáticos de un fenómeno físico. *Mecánica computacional* resuelve problemas específicos basados en la simulación de modelos a través de la implementación de métodos numéricos en ordenadores digitales. *Mecánica experimental* objeto derivado del conocimiento teórico, aplicaciones y simulaciones para concluir con el análisis de las observaciones.

La mecánica computacional como herramienta utilizada en este estudio representa las bases y la integración de varias disciplinas que pueden distinguir el fenómeno físico, figura 1.16.

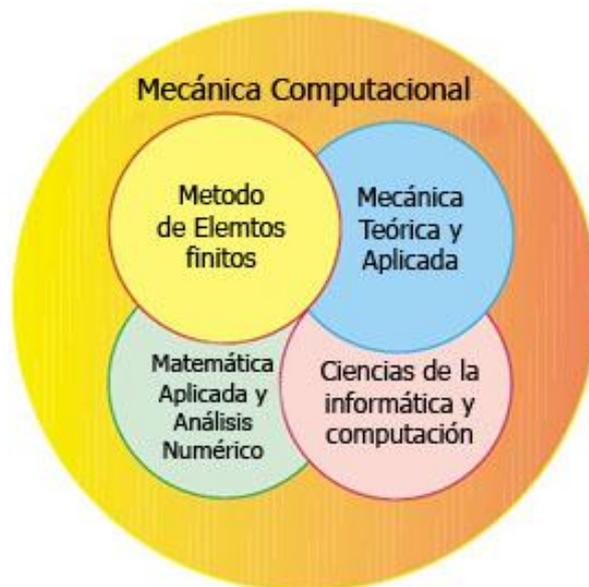


Figura. 1.16. Cuatro disciplinas que integran la mecánica computacional.

Esta representa la interconexión de varias ramas de la ingeniería acorde con la escala física a la que se le presta atención. Ya sean los fenómenos de la *nanomecánica*, *micromecánica*, *sistemas* y la *mecánica continua*. Esta última que estudia los cuerpos a nivel macroscópicos, usando modelos continuos en los cuales la micro estructura es homogénea. Las dos aéreas tradicionales de aplicación son los sólidos y la mecánica de los fluidos. La mecánica estructural es en conjunto una rama de la mecánica de los sólidos (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001).

1.3.1 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM) COMO MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN.

Una clasificación final de la mecánica estructural y los sólidos computacionales es el análisis estático basado en los métodos de discretización para la cual los modelos de la matemática continua es discretizada en el espacio, o sea, se convierte un modelo discreto a un número finito de grados de libertad. Donde se encuentran los siguientes métodos:

- Método de los elementos de frontera (BEM).
- Método de las diferencias finitas (FDM).
- Método de los volúmenes finitos (FVM).
- Método espectral.
- Método Mesh-Free.
- Método de los elementos finitos (FEM).

Para problemas lineales el método de los elementos finitos (FEM) actualmente ha dominado la escena de los análisis numéricos. En problemas no lineales el dominio de los FEM es abrumador (MACKIE, 2001).

1.3.2 EL PROCESO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN.

FEM usa un proceso de análisis que lleva a cabo una secuencia de pasos. Estas secuencias toman dos configuraciones fundamentales, dependiendo, primero del ambiente en el cual FEM es utilizado y segundo el objeto principal: modelos basados en la simulación del sistema físico, o la aproximación numérica al problema matemático.

El concepto básico de interpretación física del método FEM es descomponer un sistema mecánico en simples partes llamadas elementos finitos o simplemente elementos. La respuesta mecánica de un elemento es caracterizada en términos de un número finito de grados de libertad. Estos grados de libertad son representados como

valores de funciones desconocidas en los puntos de uniones. La respuesta del elemento se define por ecuaciones construidas a partir de argumentos matemáticos o experimentales. Esta respuesta corresponde con el sistema original considerado para ser aproximada por el modelo discreto construido por conexiones o ensamblajes de los elementos coleccionados. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 1.17 y 1.18 (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001).

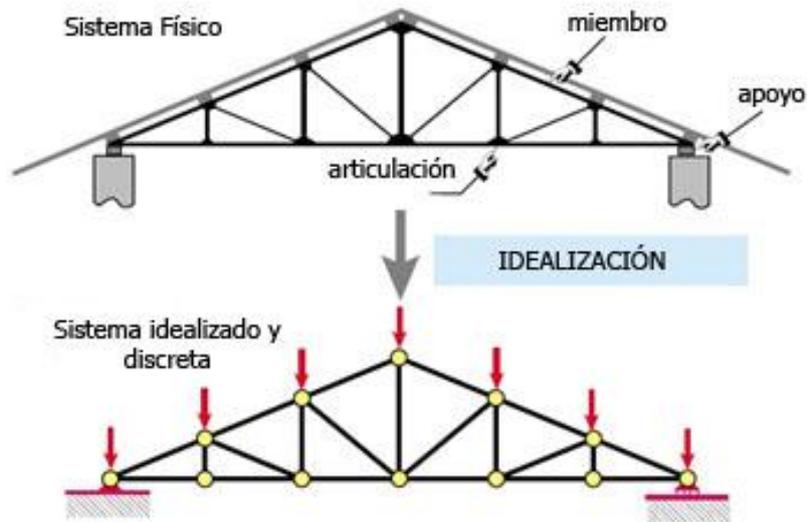


Figura. 1.17 Ejemplo de idealización de una simple estructura.

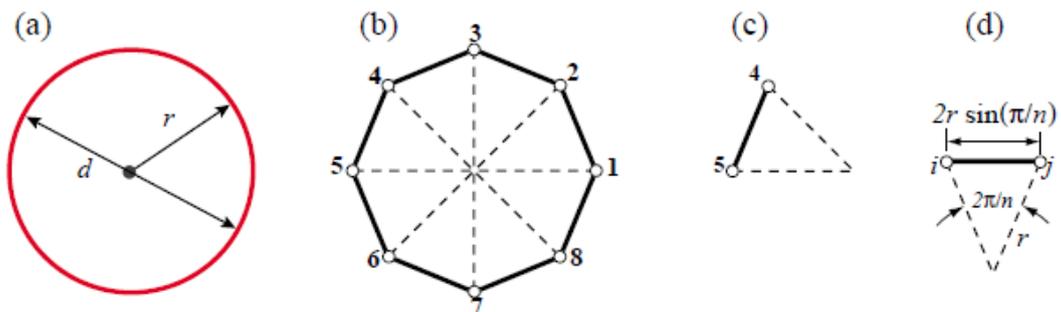


Figura. 1.18. Problema de ejemplo para encontrar π mediante el concepto de FEM. a) Objeto continuo, b) aproximación discreta al inscribir un polígono regular, c) desconexión del elemento, d) elemento genérico.

1.3.3 LA FÍSICA DEL FEM.

La modelación del sistema físico por el método de los elementos finitos requiere modelos como sistemas. Consecuentemente la metodología es frecuentemente llamada simulación del modelo-base. Este proceso se muestra en la figura 1.19



Figura. 1.19. La física del FEM. El sistema físico es la fuente del proceso de simulación.

Así mismo el concepto de error se crea en el modelo físico de dos maneras. Estas se conocen como verificación y validación. La verificación se hace por la sustitución de la solución discreta en el modelo discreto para conseguir el error de la solución. Este error generalmente no es importante.

La validación intenta comparar la solución discreta contra la observación computando el error simulado, en el cual se combina el modelo y el error de la solución (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001).

1.3.4 APLICACIONES PRÁCTICAS DEL FEM.

La realización del análisis mediante FEM de una pieza o un ensamblaje mecánico en la fase de diseño puede ayudar a sacar al mercado un mejor producto en menos tiempo. Debido a que nos ayuda a:

- Determinar si la pieza o el ensamblaje es lo suficientemente fuerte para resistir las vibraciones o las cargas previstas sin romperse ni deformarse de una forma inadecuada.
- Obtener una mejor comprensión del diseño en una fase inicial cuando el coste del rediseño es pequeño.
- Determinar si la pieza se puede rediseñar de manera más rentable y seguir funcionando satisfactoriamente cuando se someta al uso previsto.

En este sentido, el análisis por el FEM es una herramienta que permite comprender el comportamiento que tiene un diseño en determinadas condiciones. Un especialista

con formación cualificada puede tener que dedicar gran cantidad de tiempo a un análisis detallado para obtener una respuesta exacta sobre la realidad. A menudo es posible predecir y mejorar un diseño con la información de su comportamiento y su tendencia, que se obtienen a partir de un análisis básico o fundamental. Si efectúa este análisis básico al principio de la fase de diseño, puede mejorar sustancialmente el proceso general de ingeniería (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001).

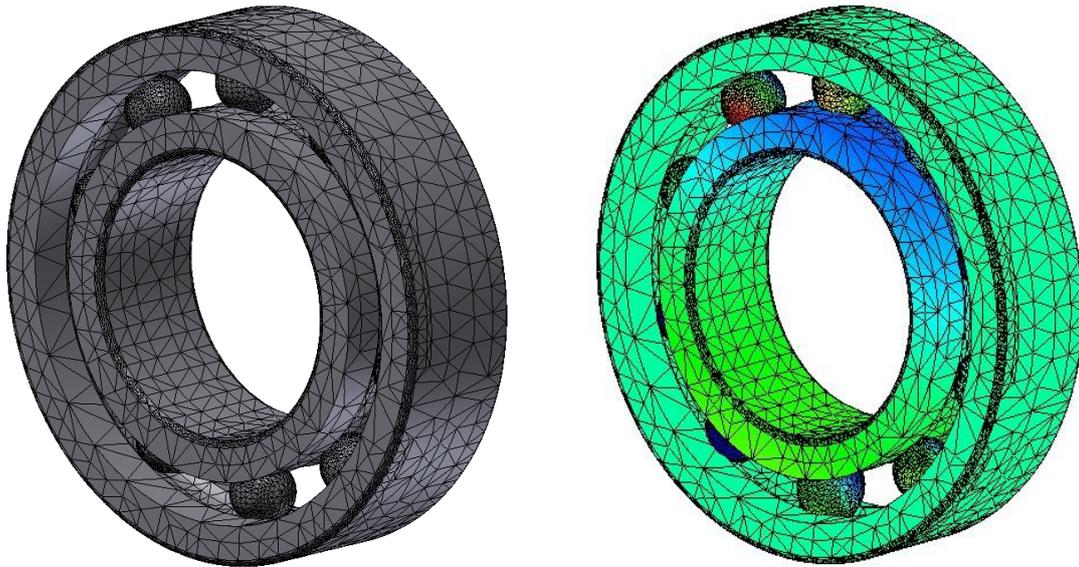


Figura. 1.20. a) Ejemplo del mayado en un rodamiento de bola y b) la deformación volumétrica.

En este momento es preciso señalar que el uso de este método conlleva a crear herramientas para el diseño de soportes o piezas únicas, donde la deformación de la pieza puede afectar en gran medida a la alineación de componentes críticos, lo que provoca fuerzas que inducen a un desgaste acelerado. Además al evaluar los efectos de las vibraciones, la geometría desempeña un papel crucial en la frecuencia natural de una pieza o un ensamblaje. La posibilidad de evitar o, en ciertos casos, alcanzar frecuencias críticas puede suponer la diferencia entre fracasar y obtener el rendimiento esperado.

1.4 RIGIDEZ DE LOS RODAMIENTOS

La rigidez de un rodamiento se caracteriza por la magnitud de la deformación elástica (flexión) del rodamiento bajo una carga. Se expresa como la relación entre la carga y la flexión, y depende del tipo, diseño y tamaño del rodamiento. Los parámetros más importantes son:

- Tipos de elementos rodantes; los rodamientos de rodillos presentan un mayor grado de rigidez que los rodamientos de bolas debido a las condiciones de contacto entre los elementos rodantes y los caminos de rodadura.
- Material de los elementos rodantes (Fig. 1.19)
- Número y tamaño de los elementos rodantes
- Ángulo de contacto (Fig. 1.20)
- Clase de precarga (Fig. 1.21)

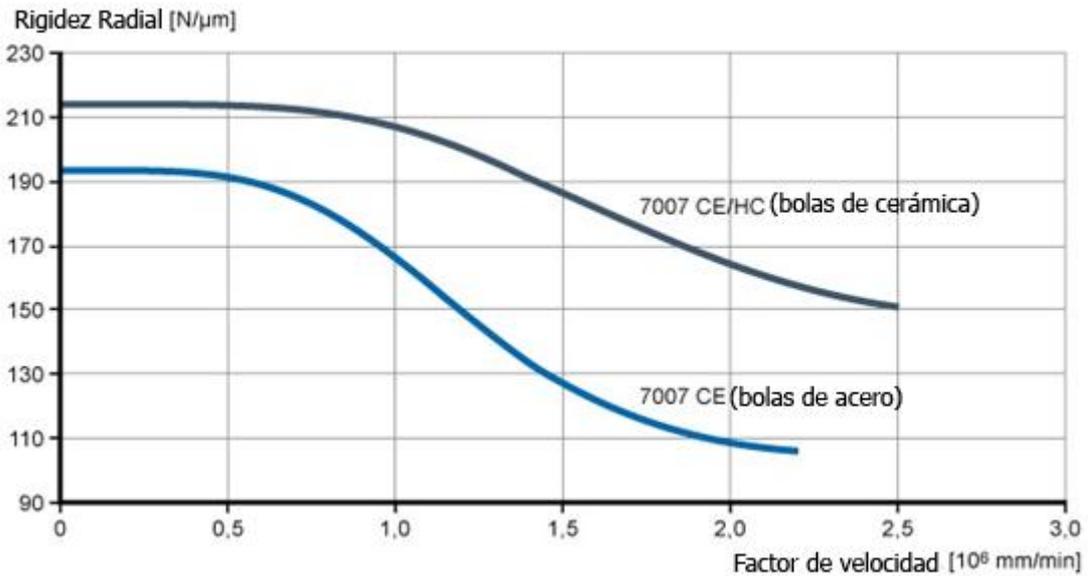


Figura 1.21. Diagrama de rigidez radial de los rodamientos precargados mediante muelles.

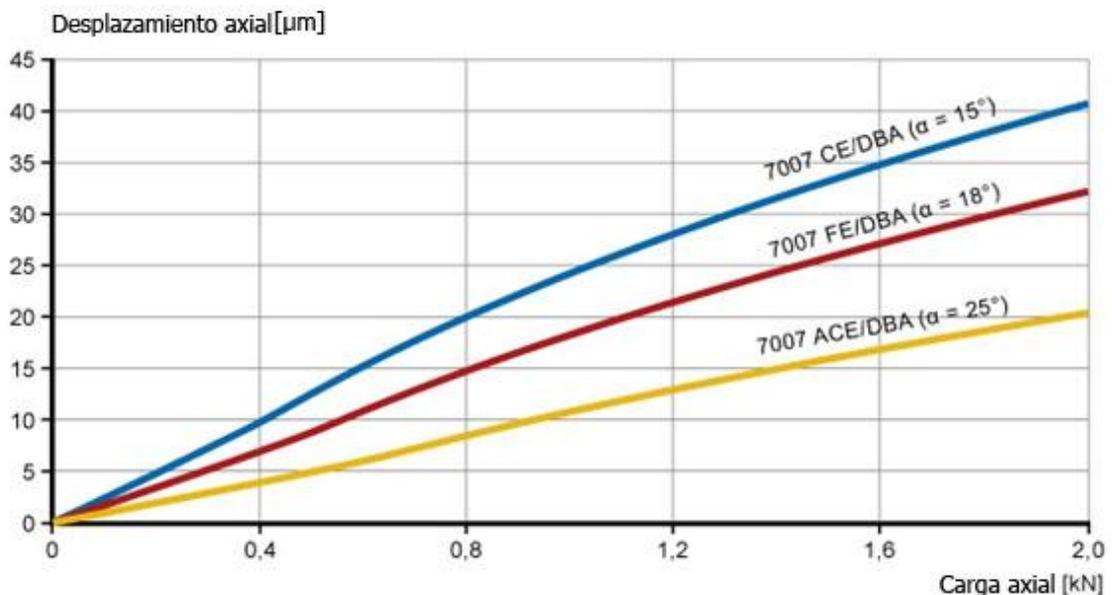


Figura 1.22. Diagrama de desplazamiento axial de los conjuntos de rodamientos dispuestos espalda con espalda con distintos ángulos de contacto.

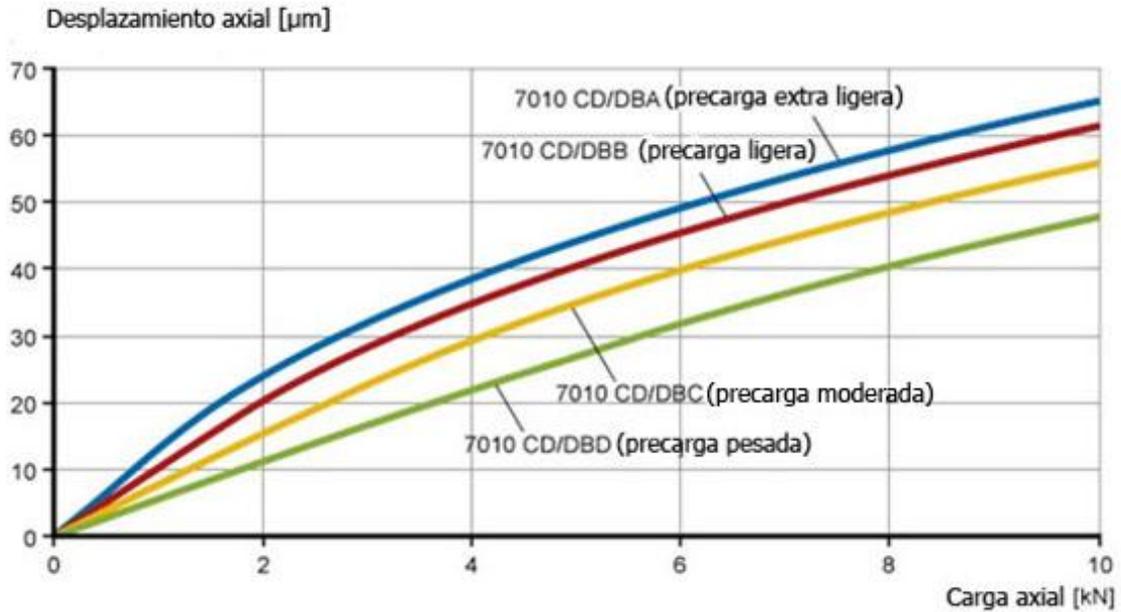


Figura 1.23. Diagrama de desplazamiento axial de los conjuntos de rodamientos dispuestos espalda con espalda con distintas precargas (SKF, 2014).

1.4.1 PRECARGA DE RODAMIENTOS

La precarga es una fuerza que actúa entre los elementos rodantes y los aros de los rodamientos, y que no se debe a una carga externa. La precarga se puede considerar como un juego interno negativo. Las razones para aplicar una precarga incluyen:

- Mayor rigidez
- Menos ruido
- Mejor guiado del eje
- Mayor vida útil para los rodamientos
- Mayor exactitud de giro
- Evitar el deslizamiento en las aplicaciones de alta velocidad durante los arranques y paradas rápidos y bajo condiciones de carga muy ligera o sin carga

En la mayoría de las aplicaciones de alta precisión, la precarga es necesaria para mejorar la rigidez del sistema (SKF, 2014).

1.4.2 METODOLOGIAS PARA EL CÁLCULO DE LA RIGIDEZ DE LOS RODAMIENTOS

1.4.2.1 Fundamentos de la rigidez de los rodamientos (SCHEFFLER, 2014).

El tipo constructivo, el tamaño y el juego de funcionamiento determinan la rigidez. La rigidez aumenta con el número de elementos rodantes que soportan la carga. Los rodamientos con contacto lineal son más rígidos que aquellos con contacto puntual

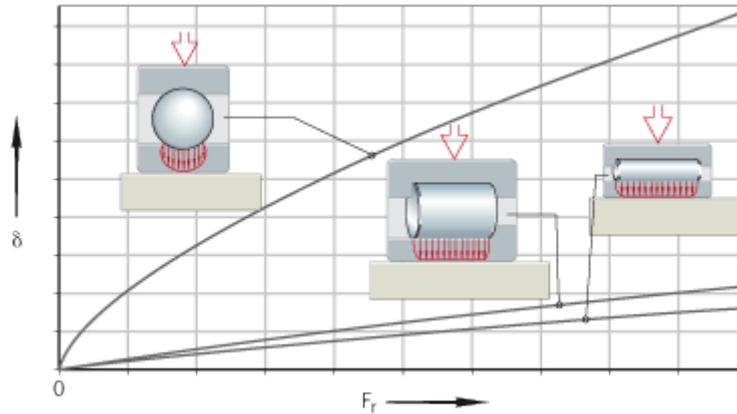


Figura 1.24. Rigidez, en función del tipo de rodamiento

Dónde:

δ = Desplazamiento

F_r = Carga radial sobre el rodamiento

Los rodamientos se caracterizan por un factor de elasticidad progresivo. Los valores de desplazamiento pueden calcularse con las ecuaciones simplificadas siguientes.

¡Las ecuaciones son válidas para montajes sin errores de alineación, en un entorno rígido! ¡En caso de rodamientos axiales, con carga axial centrada!

$$\delta_r = \frac{1}{C_s} \cdot F_r^{0.84} + \frac{S}{2} \quad (1.47)$$

$$\delta_a = \frac{1}{C_s} \cdot [(F_{av} + F_a)^{0.84} - F_{av}^{0.84}] \quad (1.48)$$

$$C_s = K_c \cdot d^{0.65} \quad (1.49)$$

Dónde:

C_s $N^{0.84} / \mu m$
Factor de rigidez

D mm
Diámetro del agujero del rodamiento

δ_r μm
Desplazamiento radial entre el eje geométrico y el centro del agujero del rodamiento (Fig. 1.24)

δ_a μm
Desplazamiento axial entre el disco-eje y el disco-alojamiento (Fig. 1.25)

S μm
Juego radial de funcionamiento del rodamiento, montado y sin carga

F_r N
Carga Radial

F_a N
Carga Axial

F_{av} N
Fuerza de precarga axial

K_c
Coeficiente para la determinación del factor de rigidez, (Tabla 1.1).

Tabla 1.1 Coeficiente K_c

Serie del rodamiento	Coeficiente K_c	Serie	Coeficiente K_c
SL1818	12,8	NJ2..-E	11,1
SL1829, SL1830, SL1923	16	NJ3..-E	11,3
SL1850, SL0148, SL0248, SL0249	29,2	NJ22..-E	15,4
NA48	24,9	NJ23..-E	16,9
NA49	23,5	NU10	9,5
NA69	37,3	NU19	11,3
NKIS	21,3	NN30..-AS-K	18,6
NKI	$4,4 \cdot B^{0,8}/d^{0,2}$	ZNR31-22	21,1
HK, BK	$4,2 \cdot C^{0,8}/d^{0,2}$	ZNR31-23	23,2
K811, 811, K812, 812	36,7	ZNR31-30	30
K893, 893, K894, 894	59,7	ZNR31-31	29,3
		ZNR31-32	28,9

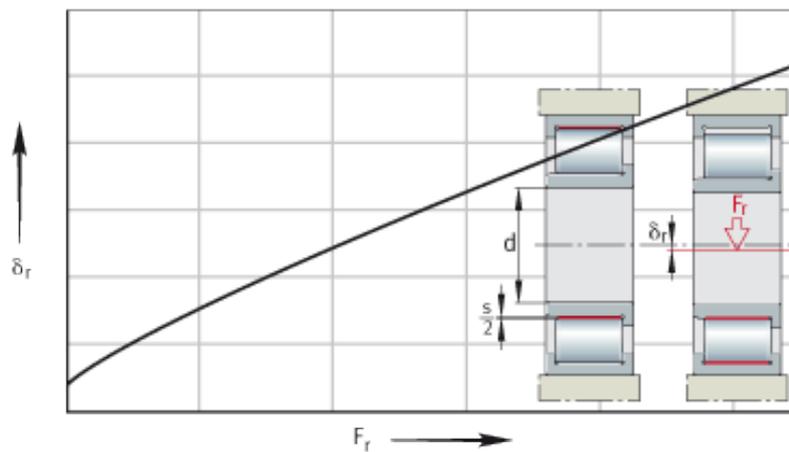


Figura 1.25. Desplazamiento radial

Rodamiento radial de rodillos cilíndricos

Dónde:

δ_r = Desplazamiento radial

F_r = Carga radial

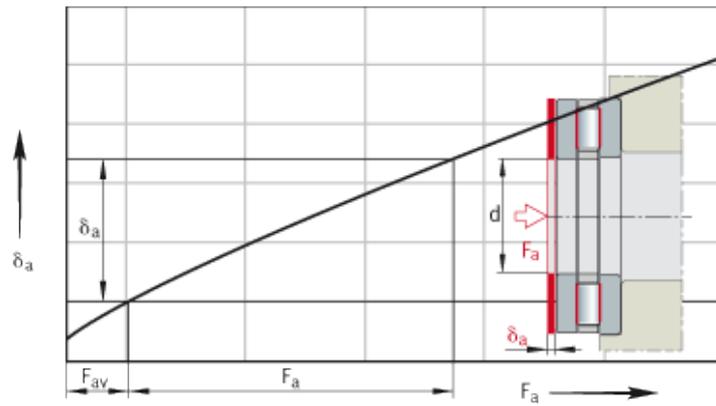


Figura. 1.26. Desplazamiento axial

Rodamiento axial de rodillos cilíndricos

Dónde:

δ_a = Desplazamiento axial

F_a = Carga axial

F_{av} = Fuerza de precarga axial

1.4.2.2 Cálculo de la matriz de rigidez de los rodamientos mediante elemento finito/modelo de mecánica de contacto (Guo & Parker, 2012).

Elemento Finito / modelo de la mecánica de contacto del rodamiento

Para la mecánica de contacto mediante el modelo de elemento finito en los rodamientos, (Fig. 1.27) son de vital importancia para un diseño de manera más exacta los siguientes detalles: coronaciones de carreras radial interna y juegos axiales, ángulo de contacto, la longitud del rodillo, la anchura de las bolas, la longitud y

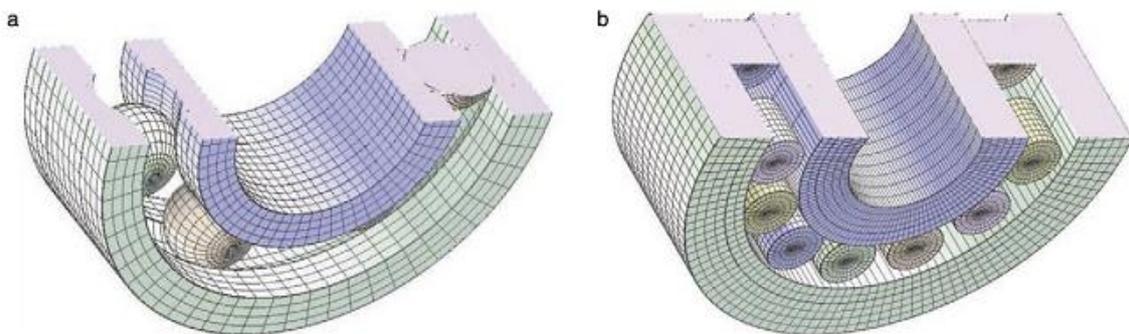


Figura. 1.27. Corte de malla mediante elementos finitos de un rodamiento de bolas radial, las dimensiones se detallan en la (tabla 1.2), y otro rodamiento cilíndrico de doble hilera.

diámetro de la pista de rodadura para rodamientos de bolas, y así sucesivamente. Estos parámetros afectan las rigideces significativamente y sin embargo, no se incluye en muchos modelos de rodamientos teóricos. Además, el modelo de los elementos finitos se aplica a la mayoría de los tipos de rodamientos, incluyendo cilíndricos, cónicos, rodamientos de rodillos o rótula, radial, rodamientos de bolas de contacto angular, rodamientos de empuje y de agujas. La solución de contacto es una característica crítica. Este enfoque utiliza un método integral de superficie y de elementos finitos combinado. El método integral de superficie analiza el elemento rodante de campo cercano, la mecánica de contacto mediante la integración, en el estilo de una función de Green. La solución para una carga puntual en un espacio de más de la mitad del área de contacto. Este supuesto requiere normalmente el tamaño de la zona de contacto a ser órdenes de magnitudes más pequeñas que los cuerpos en contacto. El contacto de los elementos rodantes considerado en este estudio no satisface esta condición debido a que los tamaños de las áreas de contacto no son lo bastante pequeñas en comparación con las dimensiones de los rodamientos. Esta suposición, no es necesaria para predecir con precisión los desplazamientos relativos de puntos en el área de contacto de campo próximo. El análisis por elementos finitos predice de manera fiable el campo lejano de deformaciones elásticas a partir de una pequeña distancia de la zona de contacto, lo que coincide con las soluciones integrales de superficie y de elementos finitos. En la superficie correspondiente (Fig. 1.28) se obtiene una solución de contactos combinada para deformaciones de la superficie de campo cercano y campo lejano del elemento rodante y deformaciones de carrera debido a la laminación en el elemento de contacto. El desplazamiento $d_{r,c}$ reincide en el área de contacto debido a una carga aplicada a una rejilla tridimensional al punto con el contacto de superficie

$$\mathbf{d}_{r,c} \approx \left\{ \mathbf{d}_{r,c}^S - \mathbf{d}_{r,m}^S \right\} + \mathbf{d}_{r,m}^{FE} \quad (1.50)$$

donde se encuentra el punto M (Fig. 5.2) En la superficie coincidente que se define el límite del desplazamiento relativo $\mathbf{d}_{r,c}^S - \mathbf{d}_{r,m}^S$ en el campo cercano donde se calcula por el método integral de superficie basado en el semi-espacio de Bousinesq; solución que no se ve afectada significativamente por la de formación del cuerpo fuera del campo cercano. El último término $\mathbf{d}_{r,m}^{FE}$ se obtiene por análisis de elementos finitos convencional; que depende de todo el sistema de deformación elástica y no se ve afectada significativamente por las deformaciones de contacto de campo cercano. Se

obtiene $d_{r,c}$ minimizando el error de discretización parcial de acuerdo con los

$$\sum_r \left[\mathbf{d}_{r,c} - \left(\mathbf{d}_{r,c}^S - \mathbf{d}_{r,m}^S \right) - \mathbf{d}_{r,m}^{FE} \right]^2 \approx 0 \quad (1.51)$$

parámetros de contacto esenciales para controlar la forma y el tamaño, y por lo tanto la exactitud, de la presión de contacto en todas las superficies de contacto. Estos parámetros incluyen la tolerancia de separación (ϵ), número (N) y la anchura (δ) de parches de contacto en la dirección del elemento de perfil laminado (es decir, la dirección en el plano del cojinete), y el número de parches de contacto (M) en la dirección axial ϵ para controlar el tamaño de la zona donde el contacto potencial se busca en el estado deformado, y el tamaño del área ϵ buscando la correcta selección de estos parámetros de contacto donde es fundamental para equilibrar la eficiencia computacional para una solución eficiente. Calculando las presiones de contacto en las zonas de contacto entre cada elemento rodante y pista de cojinete que se utilizan para comprobar la corrección de los parámetros de contacto. Se espera que la forma de la presión de contacto sea paralela a la dirección del perfil. La forma de la presión de contacto en la dirección axial depende de las condiciones de carga. Por ejemplo, si un cojinete cilíndrico tiene movimiento de inclinación, la presión de contacto en la dirección axial es similar a un triángulo con cargas aplicadas radialmente, donde se espera una presión de contacto casi rectangular en la dirección axial. Los ejemplos de la presión de contacto correcta, de un cilindro cargado radialmente, de un cojinete cilíndrico con plena coronación y las bolas de un rodamiento de bolas radial, se muestran en la figura 1.29. Un estudio paranéfrico a fondo demostró que es necesario determinar opciones adecuadas para los parámetros de contacto. Estos elementos rodantes que dependen del método de elementos finitos con un esquema de análisis que se ha validado con varios experimentos. La fuerza de contacto del rodamiento varía debido a tolerancias internas calculadas por este método que se ha correlacionado con la integración del modelo numérico y analítico.

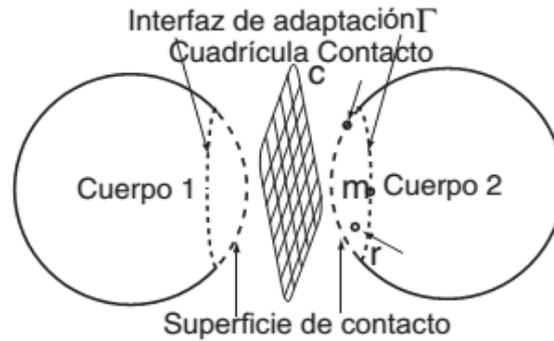


Figura. 1.28. Dos contactos con órganos elásticos con interfaces (--).

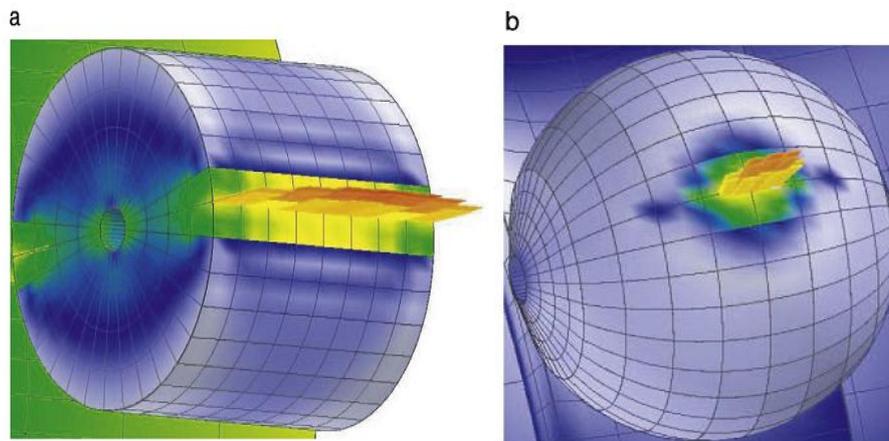


Figura 1.29. Presión de contacto distribuida en las zonas de contacto de un (a) cilindro de un rodamiento de rodillos cilíndricos, y (b) la bola de un rodamiento de bolas radial cuando se aplican cargas radiales.

Método numérico de estimación rigidez del rodamiento

Los modelos tradicionales de los rodamientos sólo incluyen rigidez axial y radial. Estos modelos no toman en cuenta la rigidez de inclinación, lo cual es importante cuando los engranajes helicoidales, la flexión del eje, u otros efectos relacionados con la inclinación relativa están presentes. Para algunos sistemas de transmisión como por ejemplo, vibraciones fuera del plano de cubierta estrechamente conectados a la inclinación de la deformación en los cojinetes, son dominantes en los experimentos. Para explicar este tipo de modelaciones, las condiciones de acoplamiento cruzado fuera de la diagonal de la matriz de rigidez se deben incluir en el modelo de rodamiento. Las matrices de rigidez totalmente pobladas son necesarias para abordar adecuadamente la transmisión de vibraciones a través de los rodamientos en las circunstancias similares anteriores y otras. La matriz de rigidez de los rodamientos de elementos rodantes, donde X y Y denotan ejes en el plano del cojinete y Z es la dirección axial,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\theta_x} & k_{x\theta_y} & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} & k_{y\theta_x} & k_{y\theta_y} & 0 \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} & k_{z\theta_x} & k_{z\theta_y} & 0 \\ k_{\theta_x x} & k_{\theta_x y} & k_{\theta_x z} & k_{\theta_x \theta_x} & k_{\theta_x \theta_y} & 0 \\ k_{\theta_y x} & k_{\theta_y y} & k_{\theta_y z} & k_{\theta_y \theta_x} & k_{\theta_y \theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

θ_x , θ_y son las deflexiones angulares fuera de plano sobre los ejes X y Y , respectivamente. Los términos de la diagonal de la matriz de rigidez incluyen rigideces radiales k_{ii} , rigidez axial k_{zz} y la rigidez de inclinación $k_{\theta_i \theta_i}$, donde $i = x, y$. Los términos de acoplamiento cruzado fuera de la diagonal se dividen en cuatro categorías: acoplamiento entre radial y deflexiones axiales k_{iz} , k_{zi} , $i = x, y$; acoplamiento entre radial y hacia fuera del plano angular de deflexiones $k_{i\theta_j}$, $k_{\theta_j i}$, $i, j = x, y$ acoplamiento entre axial y hacia fuera del plano deflexiones angulares $k_{z\theta_i}$, $k_{\theta_i z}$, $i = x, y$ y otros términos de acoplamiento k_{ij} , $k_{\theta_i \theta_j}$ $i \neq j = x, y$. La sexta fila y columna son ceros debido a la rotación libre a lo largo del eje. Sin cualquier hipótesis previa acerca de la relación de carga-deflexión, la desviación relativa $q = \{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}$ entre las pistas interiores y exteriores con las fuerzas aplicadas y momentos $F = \{F_x, F_y, F_z, M_{\theta_x}, M_{\theta_y}\}$ se obtiene computacionalmente a través de elementos finitos y el contacto analizado en este estudio. El contacto entre los elementos rodantes y las carreras no es lineal. La rigidez del cojinete se define así como $K = \frac{\partial F}{\partial q}$ (en lugar de $\frac{F}{q}$) y calculado para determinada constante de carga del vector F_0 , dando

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_y} & 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_y} & 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_y} & 0 \\ \frac{\partial M_{\theta_x}}{\partial x} & \frac{\partial M_{\theta_x}}{\partial y} & \frac{\partial M_{\theta_x}}{\partial z} & \frac{\partial M_{\theta_x}}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_{\theta_x}}{\partial \theta_y} & 0 \\ \frac{\partial M_{\theta_y}}{\partial x} & \frac{\partial M_{\theta_y}}{\partial y} & \frac{\partial M_{\theta_y}}{\partial z} & \frac{\partial M_{\theta_y}}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_{\theta_y}}{\partial \theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

La matriz de rigidez es simétrica porque el sistema de cojinetes es conservador. Se utiliza la simetría de la matriz de rigidez más tarde como uno de verificación para validar el método de determinación de la rigidez propuesto. La matriz de rigidez $\frac{\partial F}{\partial q}$ se calcula numéricamente a través de diferencias finitas para primero, segundo, cuarto, y sexto orden, respectivamente, por.

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_0)}{\delta\mathbf{q}} \quad (1.54)$$

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_0 - \delta\mathbf{q})}{2\delta\mathbf{q}} \quad (1.55)$$

$$\frac{8\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 + \frac{\delta\mathbf{q}}{2}\right) - 8\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 - \frac{\delta\mathbf{q}}{2}\right) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_0 - \delta\mathbf{q})}{6\delta\mathbf{q}} \quad (1.56)$$

$$\frac{256\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 + \frac{\delta\mathbf{q}}{4}\right) - 256\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 - \frac{\delta\mathbf{q}}{4}\right) - 40\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 + \frac{\delta\mathbf{q}}{2}\right) + 40\mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0 - \frac{\delta\mathbf{q}}{2}\right) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_0 - \delta\mathbf{q})}{90\delta\mathbf{q}} \quad (1.57)$$

donde \mathbf{q}_0 es el cojinete vector de desviación calculado en F_0 , carga determinada sobre la que se desea la matriz de rigidez y $\delta\mathbf{q} = \{\delta q_x, \delta q_y, \delta q_z, \delta q_{\theta x}, \delta q_{\theta y}\}$ es el pequeño vector de perturbaciones especificadas en \mathbf{q}_0 . Se denota la reacción calculada por el vector de fuerza por \mathbf{F} . El esfuerzo computacional se concentra en estos cálculos de \mathbf{F} . Cada fórmula de diferencias finitas requiere una serie de evaluaciones \mathbf{F} , igual a su exactitud final excepto la fórmula de diferencia de primer orden, que requiere dos evaluaciones. En consecuencia, el número total de evaluaciones es 25 veces la fórmula de precisión, o 25 veces dos de primer orden, diferencias finitas. Utilizando las fórmulas anteriores, cada elemento de rigidez diagonal y acoplamiento cruzado en la matriz de rigidez totalmente poblada es determinado como por ejemplo, las rigideces de acoplamiento cruzado que se determina a continuación se basan en la fórmula de diferencia de segundo orden,

$$\begin{aligned}
 k_{xy} &\approx \frac{[F_x(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}_y\mathbf{e}_y) - F_x(\mathbf{q}_0 - \delta\mathbf{q}_y\mathbf{e}_y)]}{2\delta q_y} \\
 k_{\theta_x z} &\approx \frac{[M_x(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}_z\mathbf{e}_z) - M_x(\mathbf{q}_0 - \delta\mathbf{q}_z\mathbf{e}_z)]}{2\delta q_z}
 \end{aligned}
 \tag{1.58}$$

donde \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z son los vectores unitarios a lo largo de las direcciones \mathbf{X} y \mathbf{Z} .

El orden de las diferencias finitas elegido debe tener la misma exactitud que el método de elementos finitos y análisis de mecánica de contacto.

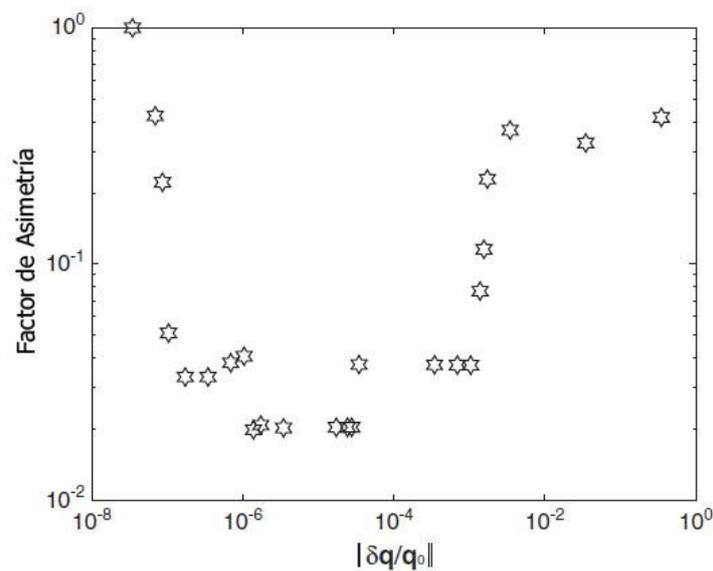


Figura. 1.30. Factor de asimetría, el máximo de $\frac{2\|k_{ij} - k_{ji}\|}{\|k_{ij} + k_{ji}\|}$, $i \neq j = x, y, z, \theta_x, \theta_y$ de rodamiento cilíndrica \mathbf{C} para diversos $\frac{\delta q}{\|q_0\|}$ at $\mathbf{q}_0 = (10, 26, 0, -0.7, 0.3)\mu\mathbf{m}$.

Rodamiento \mathbf{C} .

Para obtener el orden de exactitud de los análisis de elementos finitos, examinamos el error de discretización $e_h = V_h - V$, donde h indica el tamaño medio de los elementos y V , V_h denotan las medidas de las soluciones exactas de elementos finitos, respectivamente. V_h se aproxima como

$$V_h = V + \mathbf{C}_1 h^{p1} + \mathbf{C}_2 h^{p2} + \dots
 \tag{1.59}$$

donde $\mathbf{C}_1 h^{p1}$ representa el error de truncamiento al principio de V_h y los exponentes $p1$, $p2$ denotan las órdenes de precisión; \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 denotan los coeficientes de las

órdenes de precisión correspondientes, que son independientes de h . Debido a que V es desconocida, el orden de exactitud estudiado mediante la evaluación de e_h con diferentes mallas con $h_1 > h_2 > h_3 \dots$ al ignorar los mayores errores de truncamiento al final de $V_{h_1}, V_{h_2}, V_{h_3}$, se deriva de la siguiente ecuación

$$\frac{e_{h_3} - e_{h_2}}{e_{h_2} - e_{h_1}} = \frac{V_{h_3} - V_{h_2}}{V_{h_2} - V_{h_1}} \approx \frac{h_2^{p_1} - h_3^{p_1}}{h_1^{p_1} - h_2^{p_1}} \quad (1.60)$$

En consecuencia, el fin principal de la precisión es

$$p_1 = \frac{\log \left\{ \left(\frac{V_{h_3} - V_{h_1}}{V_{h_3} - V_{h_2}} \right) \frac{\log \frac{h_2}{h_3}}{\log \frac{h_1}{h_3}} \right\}}{\log \left(\frac{h_1}{h_2} \right)} \quad (1.61)$$

Tabla 1.2 Rodamientos Parámetros A (basados en SKF rodamiento EEB3-2Z).

Parámetros Valores (mm, grados)	(mm, grados)
Número de filas	1
Número de elementos de rodadura	7
El ángulo de contacto	0
Diámetro primitivo	15.75
Diámetro del orificio	9.525
Diámetro de la bola	3.969
Ancho del cojinete	7.144
Diámetro exterior	22,23
Diámetro exterior del anillo interior	13.06
Diámetro interior de la superficie de rodamiento exterior	18.21
Juego radial	0, 10,00 × 10 ⁻³
Curvatura de la corona de rodadura interior	0.520
Curvatura corona pista exterior	0.520

Tabla 1.3 Oscilantes de rodamientos de bolas parámetros B (basado en rodamientos SKF 1303EM).

Parámetros Valores	(mm, grados)
Número de filas	2
Número de elementos de rodadura	15
Desplazamiento axial entre hileras	10.70
Ángulo de contacto	12.70
Posición angular de los rodillos primero (primera fila)	0
Posición angular de los rodillos de primera (segunda fila)	12.00
Diámetro primitivo	35.24
El diámetro del agujero	17.00
Diámetro de la bola	7.131
Ancho del cojinete	14
Diámetro exterior	47.00
Diámetro exterior del anillo interior	28.90
Diámetro interior de la superficie de rodamiento exterior	41.00
Juego radial	15,00 × 10 ⁻³
Corona de rodadura interior factor de curvatura 0.526	0.526

Al reducir h sucesivamente de acuerdo con $h_2/h_1 = h_3/h_2 = r$, la ecuación anterior se simplifica a:

$$p_1 = \frac{\log\left(\frac{v_{h_3} - v_{h_1}}{v_{h_3} - v_{h_2}}\right)}{\log(r)} \quad (1.62)$$

Este método proporciona la precisión del algoritmo sin saber V .

Siguiendo los pasos anteriores, se han realizado dos estudios independientes para determinar el orden de precisión de la solución: a) análisis por elementos finitos de la deformación del disco, y b) elementos finitos y análisis de contacto de uno de cuatro rodillos del elemento de rodadura del rodamiento. El tamaño promedio de los elementos es el que se utiliza porque las mallas de elementos finitos no están uniformemente distribuidas en el disco real. Al reducir el tamaño del elemento en los pasos por los factores de dos, $p1$ converge a 1,11 cuando $H3 \approx 0.983 \text{ mm}$ y el diámetro exterior del disco y el grosor son $27,0 \text{ mm}$ y $10,0 \text{ mm}$, respectivamente. Del mismo modo, el análisis de elementos finitos y análisis de contacto se realiza en el rodamiento del cojinete, mientras que el tamaño medio de elemento se redujo a la mitad en cada iteración. En este caso, $P1 = 1,94$ cuando $H3 \approx 0.470 \text{ mm}$ y el diámetro exterior del cojinete es de 52 mm . Con base en los análisis anteriores, se estima que los resultados tuvieron segundo orden de precisión. Por lo tanto, la fórmula de diferencias finitas de segundo orden es apropiado para determinar K en este estudio. Es fundamental utilizar δq de un modo adecuado en la diferencia finita **Ec. (8)**. Idealmente, la magnitud de $\delta q = (\delta q_x, \delta q_y, \delta q_z, \delta q_{\theta_x}, \delta q_{\theta_y})$ es lo más pequeño posible. Si es demasiado pequeño, sin embargo, daña el error de aproximación. El tamaño del paso se selecciona basándose en $\frac{\delta q}{\|q_0\|} = E^{m+1} = 5 \times 10^{-6}$ cuando F se evalúa a la precisión de la máquina completa, donde el orden y la fórmula es la unidad de redondeo (10^{-16}). Estudios numéricos se han realizado para confirmar esta selección de δq por la igualdad de las amplitudes de las direcciones $x, y, z, \theta_x, \theta_y$. La figura. 4 muestra el efecto de δq en el factor de asimetría, se define como el máximo de $\frac{2\|k_{ij} - k_{ji}\|}{\|k_{ij} + k_{ji}\|}$, $i \neq j = x, y, z, \theta_x, \theta_y$ de la matriz de rigidez del cojinete. La matriz de rigidez debe ser simétrica porque los sistemas que llevan elementos rodantes son conservadores.

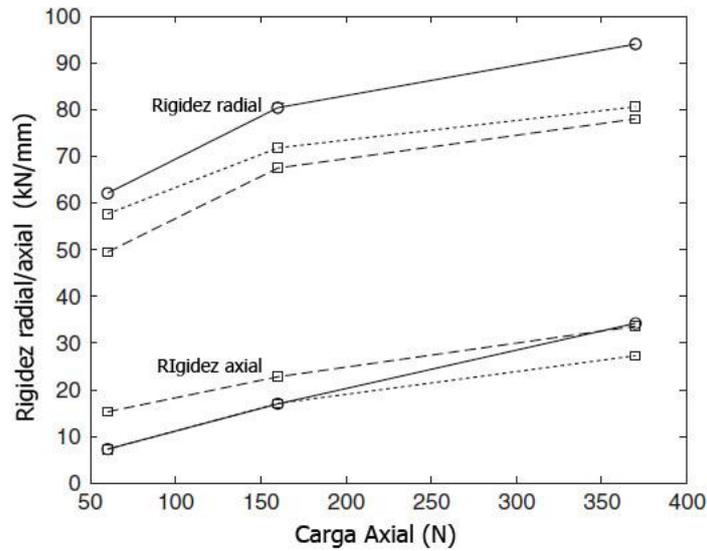


Figura. 1.31. Comparación entre el método propuesto con 0 (· · · □ · · ·) y 0,01 mm (-□-). Juegos radiales y (Kraus) experimento (-o-) radial y rigideces axiales de rodamiento A bajo precargas axiales. Las dimensiones de rodamiento A se describen la Tabla 1.2

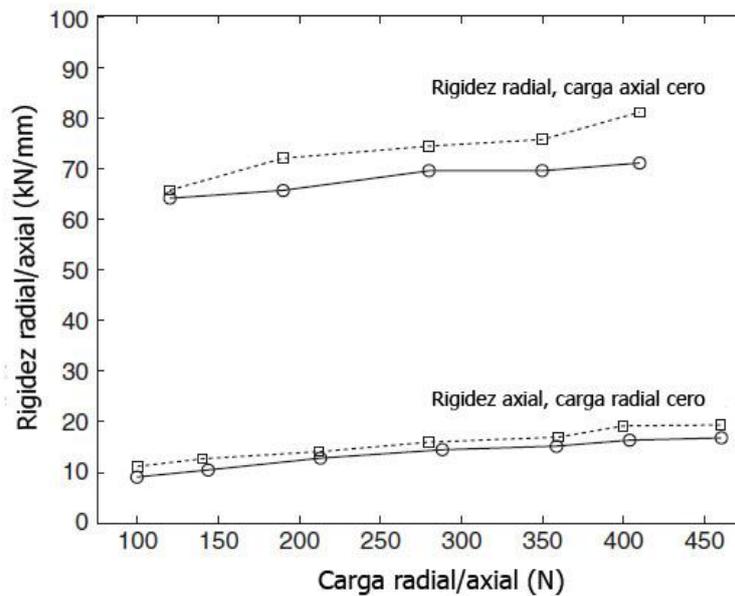


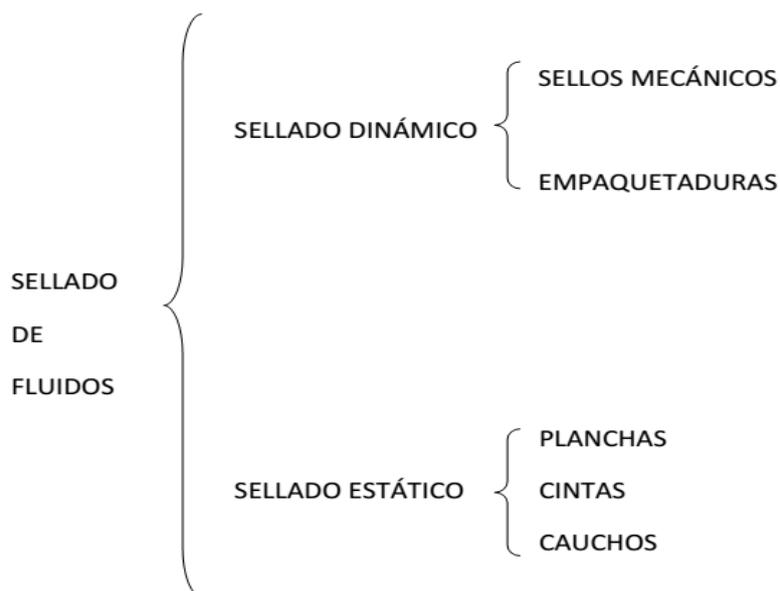
Figura. 1.32. Comparación entre el método propuesto (· · · □ · · ·) y (Royston y Basdogan) experimento (-o-) de las rigideces radial y axial de alineación automática de rodamiento B rodamiento de bolas radial y axial de los pre ajustes. Las dimensiones de rodamiento B se describen en la Tabla 1.3.

Utilizando δq de forma inadecuada, la matriz de rigidez calculada se convierte en asimétrica. En la figura. 1.30, el factor de asimetría cae significativamente de 40% a 2% cuando $\frac{\delta q}{\|q_0\|}$ es menor que 3×10^{-5} . El error entra en juego cuando $\frac{\delta q}{\|q_0\|}$ es menor que $0,1 \times 10^{-6}$. El rango óptimo de $\frac{\delta q}{\|q_0\|}$ para minimizar el error numérico es de $0,1 \times 10^{-6}$ y 30×10^{-6} , que incluye la estimación teórica por encima de 5×10^{-6} . Si se requiere mayor precisión, la solución individual es δq_m , $m = x, y, z, \theta x, \theta y$. Puede ajustarse en torno a la óptima δq determinada anteriormente para llevar el análisis similar del tamaño de paso. El método de determinación de la rigidez anterior, da estimaciones de rigidez para muchas condiciones de contornos posibles. Por ejemplo, los anillos de rodadura se pueden conectar a la carcasa / eje o fijados al suelo. Por lo tanto, este método proporciona estimaciones de rigidez cuando los rodamientos son partes de un sistema general o son aislados.

1.5 PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LAS EMPAQUETADURAS

Con el avance de la tecnología en la industria cada vez encontramos más procesos para obtener un determinado producto, junto a esto por lo general siempre se tiene que trasladar un elemento en estado líquido de un lugar a otro y es ahí donde nos encontramos con serios problemas al tratar de evitar que haya desperdicios de fluidos que muchas veces resulta ser un producto terminado.

Los estudios realizados para solucionar los problemas de fugas nos dan como resultado una clasificación de elementos para obtener un sellado óptimo, la misma que detallamos a continuación (Figuroa, 2001).



1.5.1 ¿QUE ES LA EMPAQUETADURA Y PORQUE SE NECESITAN?

Si se aplican cera o petrolato en un carbón de cáñamo torcido, se tiene una empaquetadura mecánico primitiva, que servirá para impedir la entrada de agua, a una lancha en el lugar en que el árbol de la hélice sale del casco al agua. La cavidad donde se pone la empaquetadura se llama prensaestopas o estopero. Este ejemplo presenta los elementos primarios de una empaquetadura mecánica: un material fibroso al cual se le agrega un lubricante.

Con el tiempo se arrastrará la cera y el cáñamo se puede pudrir por la inmersión. Para que esta empaquetadura tenga un buen resultado en la lancha, se deben buscar materiales que no se pudran con facilidad en el agua dulce o salada y que no se pegue en el árbol cuando no se utilice la lancha por algún tiempo.

En la industrial hay muchas aplicaciones similares a las de la lancha, pero mucho más complejas. Las empaquetaduras se utilizan casi con cualquier líquido conocido, con todos los equipos y en diversas condiciones de servicio. Por ejemplo, se requiere que sellen a temperaturas desde -300 oF hasta 2000 oF y con presiones desde un vacío hasta 1000 psig. Ahora se utilizan empaquetaduras hidráulicas para presiones mayores de 15000 psig. La empaquetadura está compuesta por fibras que primeramente se trenzan, retuerceno mezclan en tiras y, luego, se conforman como espirales o anillos (Figuroa, 2001).

1.5.1.1 Empaquetadura del prensaestopas

Las empaquetaduras del prensaestopas, facilita un manguito elástico con ajuste muy apretado alrededor de un eje o vástago para evitar el escape de un fluido bajo presión contenido en una cavidad como por ejemplo una bomba, válvula. Se coloca en un prensaestopas o en una caja estancadora que se cierran en un extremo por una tuerca ajustable (Figuroa, 2001).

1.5.2 TIPOS DE EMPAQUETADURAS MECÁNICAS

Se utilizan los términos empaquetaduras blandas, empaquetaduras de bloqueo, empaquetaduras de compresión y empaquetadura trenzada para describir parte o todos los tipos de ellas. Las definiciones de metálicas o plásticas son para productos específicos.

La mayoría de las empaquetaduras están destinadas para equipo rotatorio. También se utilizan en válvulas y otras aplicaciones como en juntas para puertas, en mezcladoras, para juntas de expansión y bombas reciprocantes. Si se utilizan en una bomba debe haber escurrimiento. En las válvulas, juntas de expansión o juntas para puertas generalmente no hay escurrimiento ni infiltraciones.

En este artículo sólo se mencionará las empaquetaduras mecánicas utilizadas en las bombas y con referencia ocasional a las empleadas en las válvulas. No se describirán las juntas y empaquetaduras automáticas ni las hidráulicas.

Los cuatro tipos de empaquetaduras son entretejida cuadrada, plegada, cuadradas, trenzado sobre trenzado y trenzada sobre un núcleo. Los más utilizados son la entretejida cuadrada y la trenzada sobre un núcleo. Las diferencias en el trenzado depende del tipo de máquina en que se fabrican las empaquetaduras.

La empaquetadura entretejida se hace en una máquina llamada trenzadora de celosía. Los hilos se forman en diagonal en la empaquetadura. Es la mejor para retener su forma cuadrada y para controlar tolerancias de manufactura. La de trenzado cuadrado y plegada también retiene su forma cuadrada pero suele ser una estructura trenzada absorbente que puede absorber una gran cantidad de lubricante. El tipo de trenzado sobre trenzado se trenza en forma redonda y después se pasa por una prensa escuadradora o una calandria para darle su forma cuadrada. La empaquetadura trenzada sobre un núcleo también se trenza redonda y se le da la forma cuadrada con una calandria. Los materiales básicos para estas cuatro empaquetaduras son fibras animales, vegetales, minerales y varias sintéticas que se describirán con mayor detalle.

Las empaquetaduras metálicas se hacen con plomo o babbitt, cobre o aluminio y son de envoltura en espiral o de construcción plegada, torcida; se pueden utilizar otros materiales pero éstos son los más se emplean. Estas empaquetaduras suelen tener un núcleo de material elástico comprensible y algún lubricante. El núcleo es un cordón de caucho sintético o mecha de asbesto. Las empaquetaduras metálicas se emplean por su resistencia física, no absorbencia, resistencia al calor o cualquier combinación de ellas.

Las empaquetaduras de plástico pueden ser de construcción homogénea o, a veces están formadas sobre un núcleo. Con frecuencia, tienen una camisa de asbesto u otro Material trenzado para ayudar a mantenerles la forma. Estas empaquetaduras se suelen hacer con materiales a base de fibra de asbesto, con grafito o con mica y aceite

o grasa; a veces se agregan otros materiales para obtener un producto terminado con las propiedades deseadas.

Otros dos tipos son las empaquetaduras de caucho y lona y de caucho y asbesto. Las empaquetaduras de caucho y lona son capas laminadas de lona de algodón que se trata con un compuesto de caucho sin curar, la cura produce la forma, tamaño y resistencia finales deseados y después se impregnan con lubricantes secos, sólidos o húmedos. Las empaquetaduras de asbesto y telas son similares a las de caucho y lona. Ambos tipos se utilizan también con anillos de extremo para bombas de baja velocidad que manejan líquidos muy viscosos. En este servicio, las empaquetaduras suelen tener refuerzos de alambre.

Los lubricantes para empaquetaduras mecánicas son sólidos, secos o líquidos. Los sólidos o secos pueden ser el tetrafluoroetileno (TFE), grafito, mica y disulfuro de molibdeno. Los líquidos incluyen aceites, refinados y sintéticos, grasas minerales y animales y diversas ceras. Algunas empaquetaduras incluyen su propio lubricante y son la de tipo grafitico.

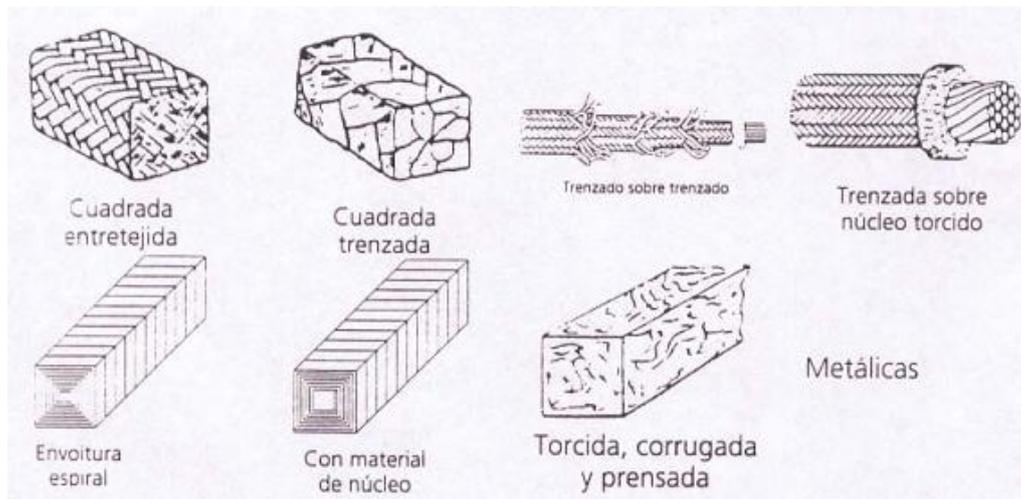


Figura 1.33 Tipología de empaquetaduras.

La falta de lubricación hace que las empaquetaduras se endurezcan y pierdan elasticidad, de modo que aumenta la fricción, se acorta su vida útil y se elevan los costos de operación.

Las empaquetaduras se cortan para formar anillos cerrados, que se albergan en la estopera (espacio libre que queda entre el eje y la carcasa de la bomba). La longitud a la que se cortan debe ser la adecuada para que rodeen completamente al eje del equipo.

La forma de la junta del anillo depende del material con el que están fabricados:

- Generalmente, los empaques metálicos trenzados y flexibles tienen juntas de ajuste o de ensamble (fig. 1.33a).
- En el resto, la experiencia muestra que el uso de las juntas sesgadas o biseladas es más eficaz (fig. 1.33b).

Las juntas biseladas permiten un pequeño deslizamiento/ capaz de absorber parte de la dilatación del anillo (Rodríguez, 2007)

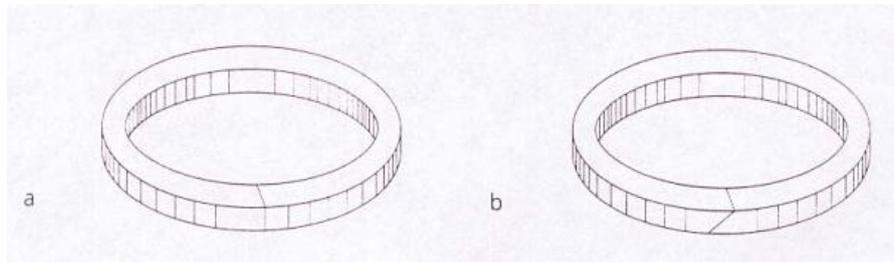


Figura. 1.33: Empaquetaduras. a. Juntas por ensamble. b. Juntas por biselado.

1.5.3 PROPIEDADES DE LAS EMPAQUETADURAS

Las propiedades deseables en la empaquetadura mecánica son elasticidad, resistencia a los productos químicos y resistencia física.

- La elasticidad permite colocar la empaquetadura en un prensaestopas y que sufra una ligera deformación para adaptarse en el mismo. También permitirá que se deforme cuando haya flexión del eje durante el funcionamiento.
- La resistencia a los productos químicos evitará el ataque por los líquidos que se sella con la empaquetadura; esta resistencia debe incluir la del lubricante. Las pérdidas de lubricante por ataque o “lavado” por los productos químicos a menudo son toleradas por los usuarios. Por ejemplo, un disolvente podría disolver un lubricante de petróleo en la empaquetadura, por lo cual se necesita un tipo diferente. Cuando se pierde el lubricante, el material trenzado ya no sella, se vuelve abrasivo y hay que reemplazar la empaquetadura para evitar daños al eje o camisa.
- La resistencia física protege la empaquetadura contra daños mecánicos en particular cuando hay “chicoteo” del eje o cualquier acción mecánica producida por el líquido, por ejemplo, cuando el líquido se cristaliza en la empaquetadura y se produce desgaste mecánico entre ella y el eje o camisa. Para estos casos, se deben utilizar un anillo de cierre hidráulico y lavado (Figuroa, 2001).

1.5.3.1 Propiedades básicas de las empaquetaduras (ERICA, 2014).

Aramida

Tipo	Aramida AR.101	Aramida AR.102	Aramida Mixta PTFE AR.103	Aramida Mixta PTFE GRAF AR.104
Temp. Max °C	260	260	260	260
Temp. Min °C	-175	-175	-175	-175
Presión (bar)	150	100	500	100
Velocidad (mt/seg.)	15	10	4	15
Resistencia Química (pH)	(2 - 12)	(2 - 12)	(2 - 12)	(2 - 12)

Tabla 1.4 Propiedades básica de las empaquetaduras de Aramida y sus derivados.

Aplicaciones:

- Vapor, tratamiento de aguas, pasta de papel, solventes, ácidos débiles, álcalis, aceites, uso universal.
- Fábricas de cartón y papel, industria química en mezcladores, petroquímicas y centrales eléctricas.
- Bombas centrífugas y alternativas, válvulas a baja presión, ejes de pistón.
- Aplicaciones donde se requiera una gran flexibilidad y óptima resistencia.

Politetrafluoetileno

Tipo	PTFE (Politetrafluoetileno) LUBRICADO PT.201	PTFE (Politetrafluoetileno) SECO PT.202	PTFE (Politetrafluoetileno) FDA PT.207A	PTFE (Politetrafluoetileno) SECO PT.208A
Temp. Max °C	260	260	260	260
Temp. Min °C	-175	-175	-175	-175
Presión (bar)	40	300	40	300
Velocidad (mt/seg.)	8	2	8	2
Resistencia Química (pH)	(0 - 14)	(0 - 14)	(0 - 14)	(0 - 14)

Tabla 1.5 Propiedades básica de las empaquetaduras de Politetrafluoetileno

y sus derivados.

Aplicaciones:

- Ácidos concentrados, vapor, productos químicos oxidantes y agresivos excepto metales alcalinos.
- Bombas centrífugas, válvulas con aire y gas.
- Apta para la industria química, petrolífera, industria del papel y cartón e industria alimentaria.

Algodón y Lino

Tipo	Algodón Teflonado AL.501	Algodón Grafitado AL.502	Lino Teflonado LI.501
Temp. Max °C	120	100	120
Temp. Min °C	-50	-50	-50
Presión (bar)	50	50	50
Velocidad (mt/seg.)	10	10	10
Resistencia Química (pH)	(5 - 14)	(6 - 9)	(5 - 11)

Tabla 1.6 Propiedades básica de las empaquetaduras de Lino Teflonado, Algodón Grafitado y Algodón Teflonado.

Tipo	Algodón Ensebado TAS.350
Composición (%)	
Algodón	60
Sebo	40
Temp. Max (°C)	85
Temp. Min (°C)	-30
Presión (bar)	9,8
Velocidad (mt/seg.)	6
Resistencia Química (pH)	(6 - 8)

Tabla 1.7 Propiedades básica de las empaquetaduras de Algodón Ensebado.

Aplicaciones:

- Agua fría, agua salada, combustibles, aceites, grasas y solventes.
- Industria pesquera, alimentación (productores de cerveza, azucareras), fábricas de cartón y papel, refinerías.
- Tapas de cisternas, válvulas y bombas, bombas a pistón, hélices de cola, etc...

GRAFITO y CARBONO

Tipo	CARBONO 4135 CGR.301	GRAFITO PURO 4134 GR.302	GRAFITO MINERAL 4168 GR.303	GRAFITO INCONEL 4169 3001
Temp. Max °C	500	70	650	650
Temp. Min °C	-50	-100	-100	-100
Presión (bar) Bombas Centrifugas	45	40	-	-
Presión (bar) Bombas Alternativas	100	20	-	-
Presión Válvulas (bar)	200	200	300	300
Velocidad Bombas Centrifugas (mt/seg.)	20	25	-	-
Velocidad Bombas Alternativas (mt/seg.)	2	2	-	-
Velocidad Válvulas. (mt/seg.)	1	1,5	1	1
Resistencia Química (pH)	(2 - 12)	(0 - 14)	(0 - 14)	(0 - 14)

Tabla 1.8 Propiedades básica de las empaquetaduras de Grafito, Carbono y sus derivados.

Aplicaciones:

- Petróleo, agua, vapor, aire, álcalis, productos orgánicos e inorgánicos, aguas saladas, fosfatos.
- Bombas, válvulas, agitadores, bombas de alimentación de calderas y bombas de gas corrosivo.
- Es inerte en presencia de agentes químicos fuertes, a excepción del ácido sulfúrico deshidratado, ácido fumante, de la trementina y del flúor.
- Resiste al ácido fluorhídrico y al clorhídrico.
- Industria petroquímica, refinerías, centrales eléctricas, alcantarillas

Eritherm

Tipo	Eritherm Grafitada ECO.460
Composición (%)	
Fibra de Vidrio	36
Fibra Visil® (viscosilla)	25
Aceite mineral	(25 - 30)
Grafito	(8 - 10)
Temp. Max (°C)	250
Temp. Min (°C)	-50
Presión (bar)	60
Velocidad (mt/seg.)	10
Resistencia Química (pH)	(4 - 10)

Tabla 1.9 Propiedades básica de las empaquetaduras de Eritherm Grafitada.

Tipo	Eritherm Teflonada ECO.701
Composición (%)	
Fibra de Vidrio	45
Fibra Visil® (viscosilla)	25
PTFE Politetrafluoretileno	20
Lubricante alta temperatura (grasa)	10
Temp. Max (°C)	280
Temp. Min (°C)	-100
Presión (bar)	100
Velocidad (mt/seg.)	15
Resistencia Quimica (pH)	(1 - 3)

Tabla 1.10 Propiedades básica de las empaquetaduras de Eritherm Teflonada.

Aplicaciones:

- Agua, alcoholes, solventes, productos químicos. No apta para peróxido de hidrógeno.
- Bombas, válvulas, juntas de escotilla en camiones cisterna, contenedores, depósitos.
- Industria papelera, química, azucarera, farmacéutica, alimentaria.

Acrílica y Fenólica

Tipo	Acrílica Teflonada SI .601
Temp. Max (°C)	260
Temp. Min (°C)	-100
Presión (bar)	
Bombas Centrifugas	20
Válvulas	100
Velocidad (mt/seg.)	15
Resistencia Quimica (pH)	(2 - 13)

Tabla 1.11 Propiedades básica de las empaquetaduras de Acrílica Teflonada.

Tipo	Fenólica Teflonada SI .602
Temp. Max (°C)	260
Temp. Min (°C)	-100
Presión (bar)	
Bombas Centrifugas	20
Válvulas	100
Velocidad (mt/seg.)	10
Resistencia Química (pH)	(2 - 13)

Tabla 1.12 Propiedades básica de las empaquetaduras de Fenólica Teflonada.

Tipo	Acrílica Grafitada SI .603
Temp. Max (°C)	250
Temp. Min (°C)	-50
Presión (bar)	
Bombas Centrifugas	20
Válvulas	60
Velocidad (mt/seg.)	10
Resistencia Química (pH)	(3 - 12)

Tabla 1.13 Propiedades básica de las empaquetaduras de Acrílica Grafitada.

Aplicaciones:

- Agua, alcoholes, solventes, productos químicos. No apta para peróxido de hidrógeno.
- Bombas, válvulas, juntas de escotilla en camiones cisterna, contenedores, depósitos.
- Industria papelera, química, azucarera, farmacéutica, alimentaria.

1.5.4 VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LAS EMPAQUETADURAS.

Ventajas de las empaquetaduras

- Facilidad para realizar su ajuste y su sustitución.
- Bajo coste.

Inconvenientes de las empaquetaduras

- Vida útil relativamente corta.

- Requieren reajustes frecuentes.
- En muchas ocasiones, necesitan una entrada de refrigeración.

Una empaquetadura se utiliza cuando se bombean productos inocuos y las fugas son mínimas. Su gran ventaja es su bajo coste.

Sin embargo, no son aptas para manejar productos químicos peligrosos. En este caso, se usan en combinación con anillos de cierre o sellado, denominados anillos linterna (Rodríguez, 2007).

1.5.5 APRIETE DE LA EMPAQUETADURA.

Los anillos que forman la empaquetadura se introduce en el estopero. Luego, se aprietan con los tornillos del prensaestopas, de manera que los anillos de empaquetadura comprimen al eje (figura 8.4).

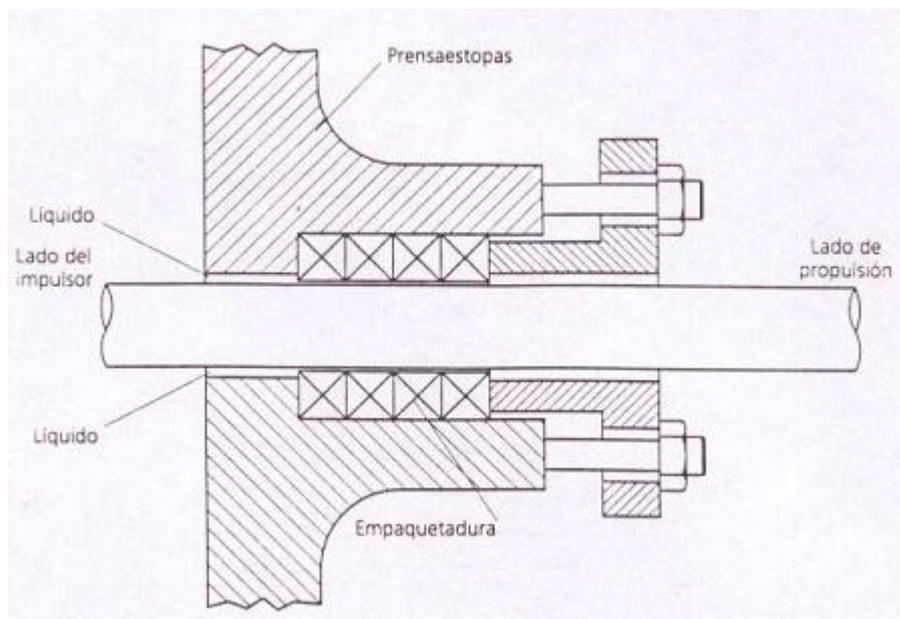


Figura 1.34. Empaquetadura Mecánica.

- Se recomienda apretar paulatinamente las tuercas, de manera que el prensaestopas no quede inclinado.
- Se deben apretar las tuercas de los pernos por igual; en primer lugar, se aprieta una tuerca 1 / 6 de vuelta, y luego, la otra; se repite la operación hasta conseguir el apriete adecuado.

La holgura de la estopera permite:

- Que el eje gire libremente, y se mueve en el sentido axial (atrás y adelante). Por tanto, las pérdidas por rozamiento en el empaque serán mínimas.
- El ajuste y la expansión del empaque. Cuando el equipo está en funcionamiento, la empaquetadura se dilata debido al incremento de temperatura (originada por la fricción) y por la absorción de líquido.
- Que la empaquetadura contenga aceite lubricante, para suavizar la fricción con el eje.

En condiciones reales de funcionamiento, la empaquetadura no evita totalmente las fugas, ya que los anillos circulares no pueden estar completamente comprimidos.

Con la bomba en funcionamiento, se suele fugar una mínima parte del fluido. Siempre que el producto sea inocuo y barato, se aceptan estas pequeñas pérdidas, ya que actúan como un lubricante y refrigerante adicional.

Por otra parte, si una bomba funciona en condiciones de vacío, a través de la empaquetadura puede entrar aire al interior del equipo. En estos casos, es posible que se originen problemas de descebado (Rodríguez, 2007).

1.5.6 SELECCIÓN DE LA EMPAQUETADURA

Cada fabricante de empaquetadura publica sus guías para la selección; ésta es más bien un arte que una ciencia. Los factores que se deben considerar en la selección incluyen todas las condiciones del líquido como temperatura, lubricidad y presión y los del equipo como velocidad, condiciones físicas, material del eje o camisa y aspectos diversos como dimensiones, espacio disponible, servicio continuo o intermitente y cualquier combinación de ellos. Por tanto, se necesita adiestramiento del personal de la planta.

Los dos factores más comunes para la selección de la empaquetadura son P V y el pH. El factor P V es la presión (P.psig) en el prensaestopas multiplicada por la velocidad (V, ft/min) en el superficie del eje e indica la dificultad relativa de la aplicación; cuanto más alto sea el número más difícil será. Por ejemplo, un eje de 1 7/8 in que gire a 1800 rpm y trabaje con 50 psi, tiene un factor PV calculado como sigue:

PV = Presión (diámetro del eje $\pi/12$) número de revoluciones

$$PV = 50 (1,875 \pi/12) (1800) = 44178$$

Un eje de 4 in a 1200 rpm y 50 psig. tiene un factor PV de 62 832; sería la aplicación más difícil, con todas las demás condiciones iguales.

El pH es una medición de la acidez o alcalinidad de un líquido. La escala es de 0 a 14, en donde 0 representa un ácido fuerte, 7 es neutro o sea agua destilada y 14 es un álcali o caústico fuerte. Las guías para selección incluyen los valores del pH.

También se deben tener en cuenta muchos otros factores. Por ejemplo, se puede requerir lavado de un anillo de cierre hidráulico o agregar un sistema de enfriamiento y drenaje de la empaquetadura o calentar o enfriar el eje respectivo (Figuroa, 2001).

1.6 CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO I

1. En el capítulo se han descrito conceptos, tipologías y metodologías de cálculo descritas en la literatura para el trabajo con apoyos elásticos, donde se demuestra que tomar en cuentas la elasticidad en los soportes da al traste con resultados más reales.
2. A efectos del análisis por el MEF es crucial tener presente la naturaleza de las aproximaciones, estudiar los resultados y probar el diseño final. La correcta utilización del análisis por el método de los elementos finitos reduce en gran medida el número de pruebas físicas necesarias. Se puede experimentar con una amplia variedad de opciones de diseño y mejorar el producto final.
3. Se profundizo en los conceptos de rigidez de los rodamientos, así como también en nuevas metodologías para el cálculo de la matriz de rigidez de los cojinetes de rodamientos mediante nuevas técnicas computacionales como el método numérico de MEF y las diferencias finitas.
4. En el capítulo se han descrito los conceptos, propiedades, características, ventajas e inconvenientes, y aplicaciones de las empaquetaduras; así como la metodología de selección de la misma.

Capítulo II Desarrollo del método general de cálculo de los árboles de las bombas centrífugas considerando los cojinetes de rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos y las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios.

2.1 UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FUERZAS EN LA SOLUCIÓN DE ÁRBOLES HIPERESTÁTICOS.

El sistema que posee un número de ligaduras superior a las necesarias es un sistema hiperestático y el número de ligaduras suplementarias es igual al grado de hiperestaticidad. La hiperestaticidad puede ser exterior o interior en dependencia de que las ligaduras suplementarias sean exteriores o interiores. En los sistemas hiperestáticos con ligaduras exteriores suplementarias no es posible la determinación de las reacciones de apoyo mediante las ecuaciones de equilibrio y si la hiperestaticidad es interior no es posible determinar las fuerzas internas en las barras por el método de las secciones, de donde se puede definir un Sistema Hiperestático como (Feodosiev, 1985). Durante la solución de los sistemas hiperestáticos por el Método de las Fuerzas es necesario elegir un Sistema Base y conformar lo que se conoce como Sistema Equivalente. El Sistema Base es el sistema hiperestático dado en el cual se han eliminado todas las ligaduras suplementarias tanto exteriores como interiores y el Sistema Equivalente es el sistema base en el cual las ligaduras suplementarias eliminadas han sido sustituidas por las fuerzas que las representan. En un sistema equivalente dado, las fuerzas se designan por X_1, X_2, \dots, X_n .

Los desplazamientos originados por el sistema de fuerzas aplicado al Sistema Equivalente, en el caso de apoyos rígidos, en la dirección de cada una de las ligaduras eliminadas, tienen que ser cero. O sea:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1]} &= 0 \\
 \delta_{2[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1]} &= 0 \\
 \vdots & \\
 \delta_{n[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1]} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Puesto que cada uno de los desplazamientos δ_{iX_k} es proporcional a la fuerza correspondiente se puede escribir que:

$$\delta_{i X_k} = \delta_{i k} \cdot X_k \tag{2.2}$$

Donde $\delta_{i k}$ es el desplazamiento en la dirección i provocada por una fuerza unitaria colocada en la posición de X_k . Las expresiones anteriores quedarán entonces escritas como:

$$\begin{array}{rcccccccc} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots & & & & & \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{1P} & = & 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \dots & & & & & \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \delta_{2P} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \delta_{n3} \cdot X_3 + \dots & & & & & \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{nP} & = & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones canónicas del Método de las Fuerzas pues en las mismas las incógnitas son las fuerzas $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ y existirán tantas ecuaciones como fuerzas X_k desconocidas existan. Para resolver el sistema de ecuaciones es necesario hallar los desplazamientos $\delta_{i k}$ que constituyen los coeficientes de las incógnitas X_k y además los términos independientes de las diferentes ecuaciones δ_{iP} . Según el Método de Mohr (Feodosiev, 1985), para hallar el desplazamiento en una dirección i determinada es necesario colocar una fuerza unitaria en esa dirección y obtener las acciones interiores provocadas por dicha fuerza unitaria y después obtener la integral del producto de las acciones interiores provocadas por esta fuerza unitaria y las acciones originadas por las cargas que provocan el desplazamiento. Pero en este caso, como cada uno de los desplazamientos $\delta_{i k}$ es originado por una fuerza unitaria colocada en la posición X_k , el desplazamiento $\delta_{i k}$ es la integral del producto de dos funciones unitarias, una originada por una fuerza unitaria colocada en la dirección i la otra por una fuerza unitaria colocada en la dirección X_k . Los coeficientes δ_{iP} se hallan resolviendo las integrales correspondientes a los productos de la fuerza unitaria colocada en la dirección i , o sea, de las acciones interiores originadas por esta fuerza unitaria por las acciones interiores originadas por las cargas externas P .

Este Método de Solución de Sistemas Hiperestáticas se conoce como Método de las Fuerzas y es la Base Teórica de la casi totalidad de los Métodos de Solución de Árboles Hiperestáticas.

2.2 UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FUERZAS EN EL CASO DE APOYOS LINEALMENTE ELÁSTICOS.

La diferencia esencial de un sistema hiperestático con apoyos rígidos con relación a uno con apoyos elásticos es que al plantear las ecuaciones canónicas del Método de las Fuerzas, en el caso de los apoyos rígidos, los desplazamientos resultantes en la dirección de cada una de las incógnitas es igual a cero, sin embargo en el caso de los apoyos elásticos el desplazamiento en la dirección de estos apoyos no es igual a cero sino será igual al desplazamiento que provoque la fuerza en dicho apoyo en el mismo, pues ya el apoyo no es rígido, sino elástico.

El desplazamiento general en la dirección del apoyo i será en general:

$$\delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \delta_{i3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{iP} = - X_i / C_{\text{apoyo elástico}} \quad (2.4)$$

2.3 LAS EMPAQUETADURAS COMO APOYOS LINEALMENTE ELÁSTICOS

En el caso de considerar las empaquetaduras de la bomba como apoyos lineales elásticos se necesita hallar la constante de rigidez de la empaquetadura. Para ello se parte de que la distribución de presiones que ejerce el árbol sobre la misma tiene una distribución sinusoidal tal como se muestra en la Fig. 2.1

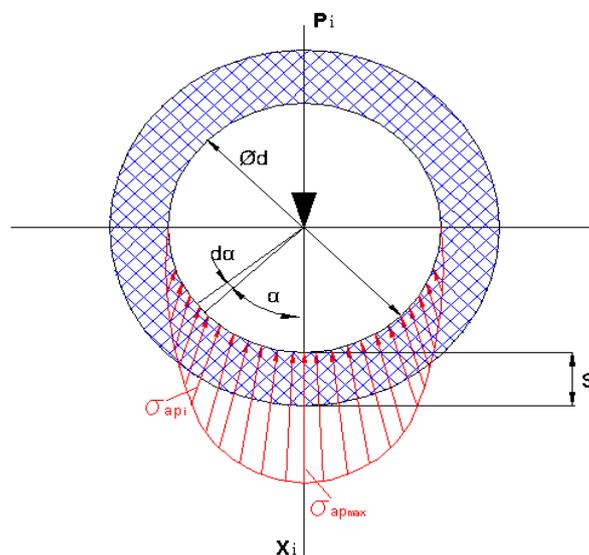


Figura 2.1 Distribución de presiones en el contacto empaquetadura árbol.

Se cumple entonces que:

$$\sigma_{api} = \sigma_{ap_{max}} \cdot \cos\alpha \quad (2.5)$$

Un diferencial de la reacción vertical X_i , o sea: d_{X_i} se puede escribir como sigue:

$$d_{X_i} = \sigma_{api} \cdot d \cdot A \cdot \cos\alpha = \sigma_{ap_{max}} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d}{2} \cdot d \cdot \alpha \cdot l \cdot \cos\alpha \quad (2.6)$$

Integrando.

$$X_i = \int d_{X_i} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{ap_{max}} \cdot \frac{d}{2} \cdot l \cdot \cos^2 d \cdot \alpha \quad (2.7)$$

$$X_i = \sigma_{ap_{max}} \cdot d \cdot l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d \cdot \alpha \quad (2.8)$$

$$X_i = \sigma_{ap_{max}} \cdot d \cdot l \cdot \frac{\pi}{4} \quad (2.9)$$

Despejando $\sigma_{ap_{max}}$.

$$\sigma_{ap_{max}} = \frac{4 \cdot X_i}{\pi \cdot d \cdot l} \quad (2.10)$$

Y el desplazamiento será igual a la variación del espesor de la empaquetadura, según la Ley de Hooke:

$$\delta_{emp_i} = \Delta S_{max} = \frac{\sigma_{ap_{max}} \cdot S_{emp}}{E_{emp}} \quad (2.11)$$

$$\delta_{emp_i} = \frac{4 \cdot X_i \cdot S}{\pi \cdot d \cdot l \cdot E_{emp}} \quad (2.12)$$

Y como

$$\delta_{emp_i} = \frac{X_i}{C_{empi}} \quad (2.13)$$

Se deduce que:

$$C_{emp} = \frac{\pi \cdot d \cdot l \cdot E_{emp}}{4 \cdot S_{emp}} \quad kN/cm \quad (2.14)$$

d y l - Diámetro y longitud del árbol en la zona del árbol donde está la empaquetadura (cm)

S_{emp} – Espesor radial de la empaquetadura (cm)

E_{emp} – Módulo de elasticidad del material de la empaquetadura en kN/cm^2

2.4 ESQUEMA DE ANÁLISIS DEL ÁRBOL DE UNA BOMBA CENTRÍFUGA MULTITÁPICA CONSIDERANDO LOS DOS COJINETES DE APOYOS COMO EMPOTRAMIENTOS PARCIALMENTE ELÁSTICOS Y LAS DOS EMPAQUETADURAS COMO APOYOS ELÁSTICOS SUPLEMENTARIOS.

En la Fig. 2.2 se muestra una bomba centrífuga cuya estructura será objeto de análisis para el desarrollo de un nuevo método de cálculo de los árboles de dichas bombas.

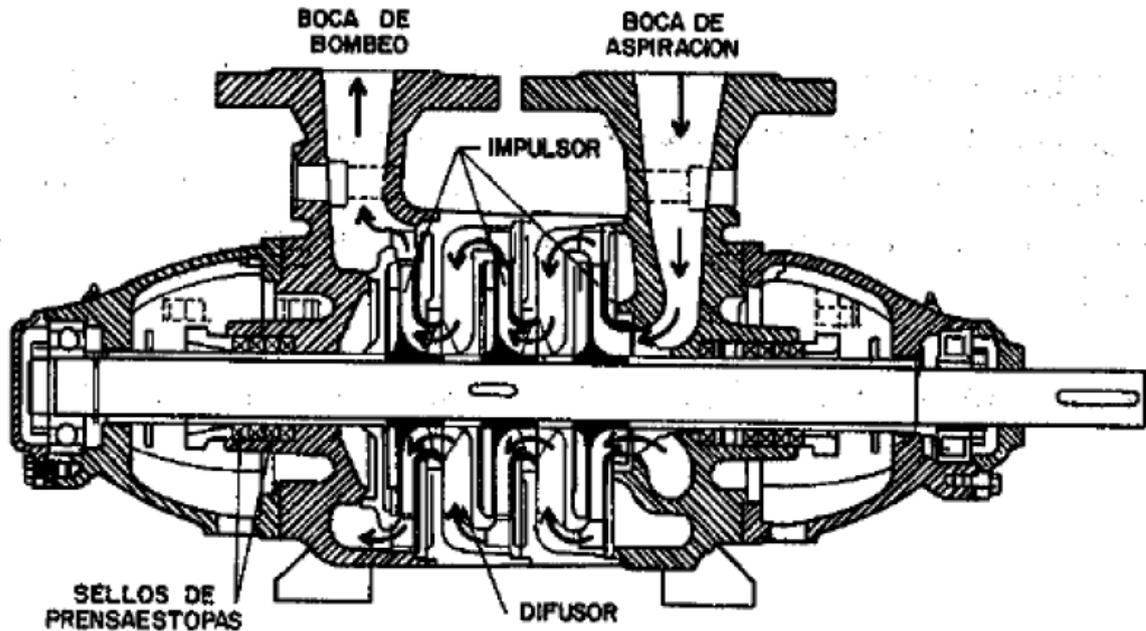


Figura 2.2 Esquema de una bomba centrífuga similar a la de objeto de análisis

Se trata de bombas centrífugas multitápicas, de hasta diez etapas, cuya estructura es tal que posee cojinetes de rodamientos en los puntos más exteriores del árbol, posee los impelentes ubicados en su parte central y posee empaquetaduras que limitan las fugas de líquido colocadas entre los cojinetes y los impelentes. Como se dijo anteriormente los cojinetes de rodamientos serán considerados como empotramientos parcialmente elásticos, cuyo coeficiente de rigidez angular ϕ fue investigado anteriormente (Goytisoló, 2006; Hidalgo 2009) y un nuevo elemento en el cálculo de estos árboles, la consideración de las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios.

En la Fig. 2.3 se muestra el esquema de análisis del árbol, con los dos empotramientos parcialmente elásticos en la posición de los cojinetes de rodamientos y dos apoyos linealmente elásticos en la posición de las empaquetaduras.

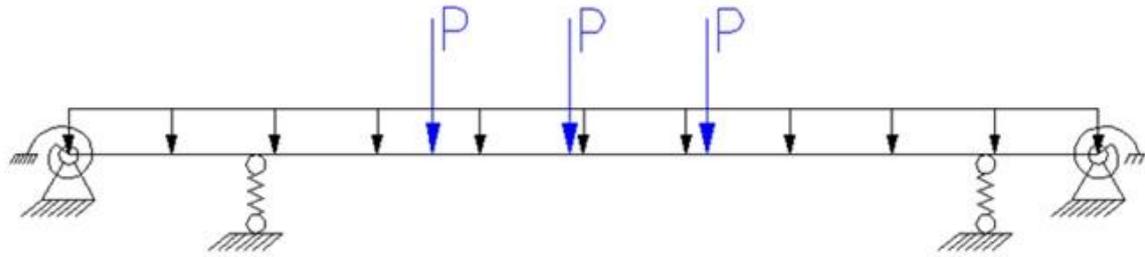


Figura 2.3 Esquema de análisis del árbol de una bomba centrífuga Multitápica.

Para resolver este árbol hiperestático con empotramientos parcialmente elástico se hace necesario resolver el árbol hiperestático con empotramientos clásicos rígidos, ya que como se demostró en los trabajos (Nodal, 2004; Goytisoló, 2006; Hidalgo 2009):

$$M_{\text{empotramiento elástico}} = \varphi \cdot M_{\text{empotramiento rígido}}$$

El esquema del árbol con empotramientos rígidos se muestra en la Fig. 2.4

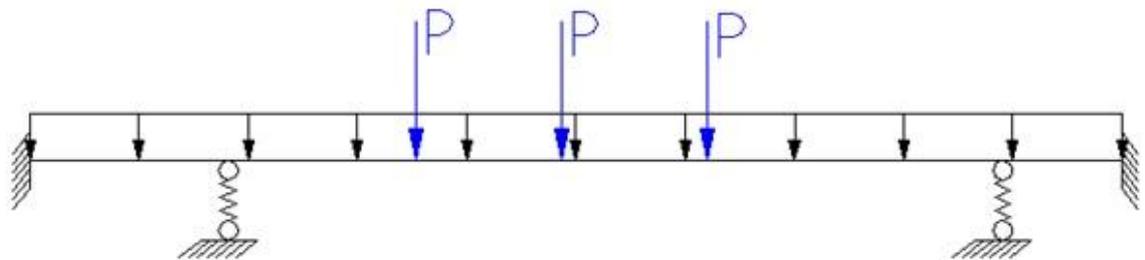


Figura 2.4 Esquema del árbol de la bomba centrífuga con empotramientos rígidos.

El paso que viene a continuación es resolver el sistema hiperestático con empotramientos rígidos para hallar los momentos en los empotramientos y poder calcular entonces los momentos en los empotramientos parcialmente elásticos. El sistema equivalente del árbol con empotramientos rígidos se muestra en la Fig. 2.5

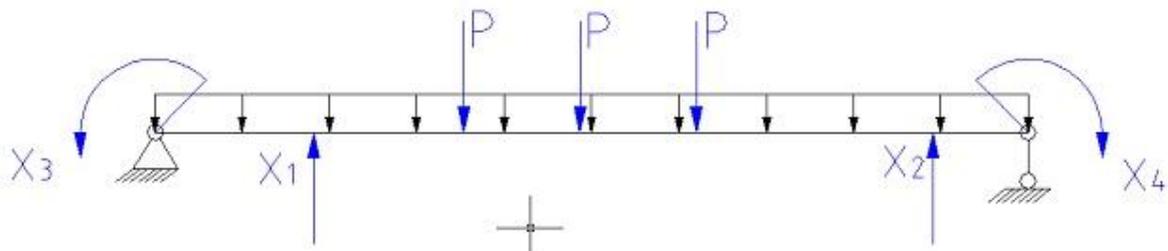


Figura 2.5 Sistema Equivalente del árbol con empotramientos rígidos.

2.5 SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

La solución se llevará a cabo por el Método de las Fuerzas. El Sistema de Ecuaciones Canónicas para dicho Sistema Equivalente será:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{1q} + \sum_{K=1}^n \delta_{1k}P_k &= -\frac{X_1}{C_1} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{2q} + \sum_{K=1}^n \delta_{2k}P_k &= -\frac{X_2}{C_2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{3q} + \sum_{K=1}^n \delta_{3k}P_k = 0$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{4q} + \sum_{K=1}^n \delta_{4k}P_k = 0$$

La constante de rigidez de las empaquetaduras es:

$$C = \frac{\pi \cdot d \cdot l \cdot E_{emp}}{4 \cdot S_{emp}} \quad (\text{kN/cm}) \quad (2.13)$$

Los diagramas unitarios de las incógnitas son:

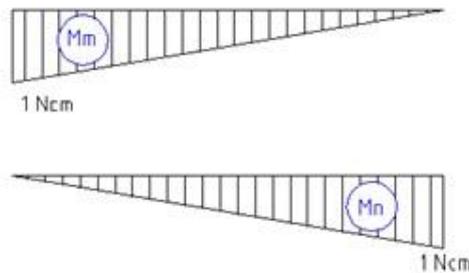


Figura 2.6 Diagramas unitarios de las fuerzas X_1 y X_2 .

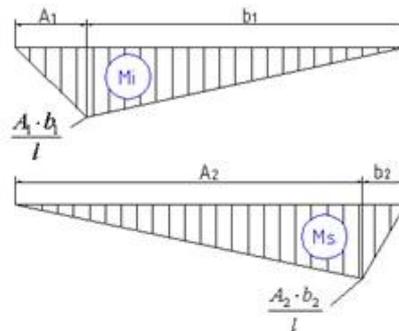


Figura 2.7 Diagramas unitarios de las fuerzas X_3 y X_4 .

Los coeficientes de las incógnitas y términos independientes de las ecuaciones canónicas se calculan de acuerdo a la Regla de Vereschaguin (Pisarenko, 1989), como:

$$\bar{\delta}_{ii} = \bar{\delta}_{ss} = \frac{A_i^2 \cdot b_i^2}{3 \cdot l^2} \cdot l = \frac{A_i^2 \cdot b_i^2}{3 \cdot l} \quad (2.14)$$

$$\bar{\delta}_{is} = \frac{A_1 \cdot b_2}{6 \cdot l^2} (2 \cdot A_1^2 \cdot b_1 + 2 \cdot A_2 \cdot b_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot b_1 \cdot C + A_1 \cdot b_2 \cdot C + A_2 \cdot b_1 \cdot C + 2 \cdot A_2 \cdot b_2 \cdot C) \quad (2.15)$$

$$\bar{\delta}_{nn} = \bar{\delta}_{mm} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot l = \frac{l}{3} \quad (2.16)$$

$$\bar{\delta}_{nm} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot l = \frac{l}{6} \quad (2.17)$$

$$\bar{\delta}_{im} = \bar{\delta}_{sn} = \frac{1}{6} \cdot \frac{A_1 \cdot b_1}{l} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{b_1}{l}\right) \cdot l = \frac{A_1 \cdot b_1}{6} \left(\frac{l+b_1}{l}\right) \quad (2.18)$$

$$\bar{\delta}_{in} = \bar{\delta}_{sm} = \frac{1}{6} \cdot \frac{A_2 \cdot b_2}{l} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{A_2}{l}\right) \cdot l = \frac{A_2 \cdot b_2}{6} \left(\frac{l+A_2}{l}\right) \quad (2.19)$$

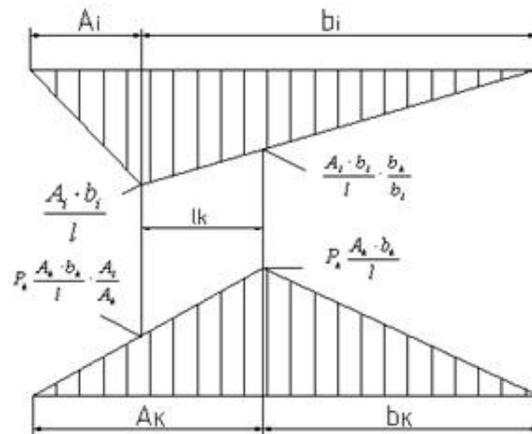


Figura 2.8 Producto de Vereschaguin de la fuerza unitaria i y una carga P cuando la carga unitaria está a la izquierda de P

La multiplicación de trapecio por trapecio de la parte central no aparece en la Tabla de Vereschaguin y se obtuvo en el presente trabajo y se da en los Anexos.

$$\delta_{ipk} = -\left\{ \frac{1}{3} \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{A_i}{A_k} \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot A_i + \frac{1}{3} \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot \frac{b_k}{b_i} \cdot b_k + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left[P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{A_i}{A_k} \cdot \left(2 \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} + \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot \frac{b_k}{b_i} \right) \cdot l_k + P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \left(\frac{A_i \cdot b_i}{l} + 2 \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot \frac{b_k}{b_i} \right) \cdot l_k \right] \right\} \quad (2.20)$$

$$\delta_{ipk} = - \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{A_i^2}{A_k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{b_k^2}{b_i} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{2 \cdot A_i \cdot l_k}{A_k} + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{A_i \cdot b_k \cdot l_k}{A_k \cdot b_i} + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot l_k +$$

$$\left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{2 \cdot b_k \cdot l_k}{b_i} \right\} \quad (2.21)$$

$$\delta_{ipk} = - \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \left[\frac{2 \cdot A_i^2}{A_k} + \frac{2 \cdot b_k^2}{b_i} + \frac{2 \cdot A_i \cdot l_k}{A_k} + \frac{A_i \cdot b_k \cdot l_k}{A_k \cdot b_i} + l_k + \frac{2 \cdot b_k \cdot l_k}{b_i} \right] \quad (2.22)$$

$$\bar{\delta}_{ipk} = - \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot A_i^2 \cdot b_i + 2 \cdot A_k \cdot b_k^2 + 2 \cdot A_i \cdot b_i \cdot l_k + A_i \cdot b_k \cdot l_k + A_k \cdot b_i \cdot l_k + 2 \cdot A_k \cdot b_k \cdot l_k}{A_k \cdot b_i} \right] \quad (2.23)$$

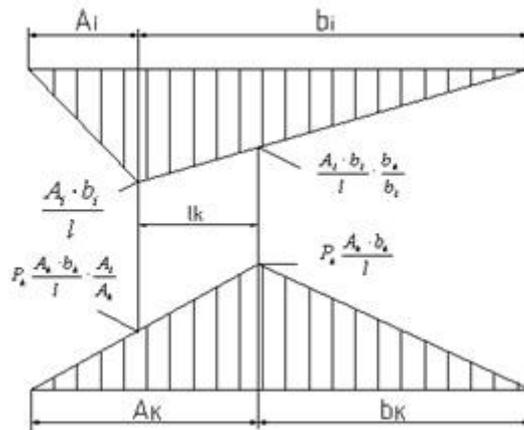


Figura 2.9 Producto de Vereschaguin de la fuerza unitaria i y una carga P cuando la carga unitaria está a la derecha de P

$$\bar{\delta}_{ipk} = - \frac{P_k \cdot A_i \cdot b_k}{6 \cdot l^2} (2A_i^2 \cdot b_i + 2A_k \cdot b_k^2 + 2A_i \cdot b_i \cdot l_k + A_i \cdot b_k \cdot l_k + A_k \cdot b_i \cdot l_k + 2 \cdot A_k \cdot b_k \cdot l_k) \quad (2.24)$$

$$\bar{\delta}_{spk} = - \left\{ \frac{1}{3} \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot \frac{A_k}{A_i} \cdot A_k + \frac{1}{3} \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{b_i}{b_k} \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot b_i + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \left[\frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot \frac{A_k}{A_i} \cdot \left(2 \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} + \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{b_i}{b_k} \right) \cdot s_k + \right.$$

$$\left. + \frac{A_i \cdot b_i}{l} \left(P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} + 2 \cdot P_k \cdot \frac{A_k \cdot b_k}{l} \cdot \frac{b_i}{b_k} \right) \cdot s_k \right\} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{spk}} = & - \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i \cdot A_k^2}{l^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i \cdot b_i^2}{l^2} + \right. \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot 2 \cdot \frac{A_k \cdot s_k}{A_i} + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot \frac{A_k \cdot b_i}{A_i \cdot b_k} \cdot s_k + \\ & \left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot s_k + \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \cdot 2 \cdot \frac{b_i}{b_k} \cdot s_k \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\delta_{\text{spk}} = - \frac{1}{6} \cdot \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_k \cdot A_i \cdot b_i}{l^2}$$

$$\left[\frac{2 \cdot A_k^2 \cdot b_k + 2 \cdot A_i \cdot b_i^2 + 2 \cdot A_k \cdot b_k \cdot s_k + A_k \cdot b_i \cdot s_k + A_i \cdot b_k \cdot s_k + 2 \cdot A_i \cdot b_i \cdot s_k}{A_i \cdot b_k} \right] \quad (2.27)$$

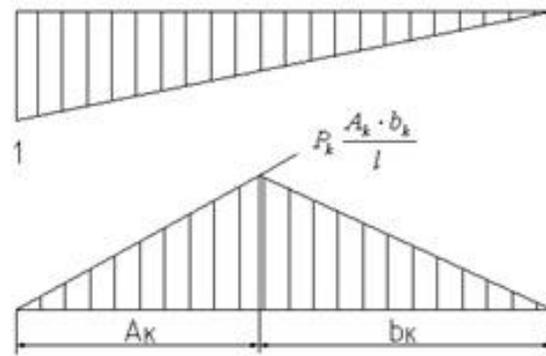


Figura 2.10 Producto de Vereschagin de la fuerza unitaria de X_3 por la fuerza P.

$$\delta_{\text{spk}} = - \frac{P_k \cdot A_k \cdot b_i}{6 \cdot l^2} (2A_k^2 \cdot b_k + 2A_i \cdot b_i^2 + 2A_k \cdot b_k \cdot s_k + A_k \cdot b_i \cdot s_k + A_i \cdot b_k \cdot s_k + 2A_i \cdot b_i \cdot s_k) \quad (2.28)$$

$$\delta_{\text{mpk}} = - \frac{A_k \cdot P_k \cdot b_k}{6 \cdot l} \cdot (l + b_k) \quad (2.29)$$

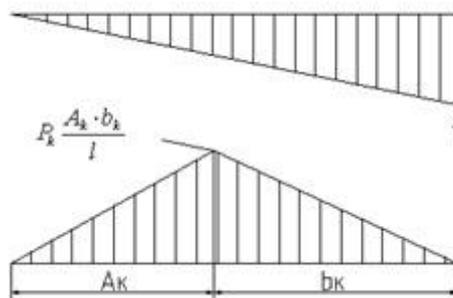


Figura 2.11 Producto de Vereschagin de la fuerza unitaria de X_4 por la fuerza P.

$$\delta_{npk} = -\frac{A_k \cdot P_k \cdot b_k}{6 \cdot l} \cdot (l + A_k) \quad (2.30)$$

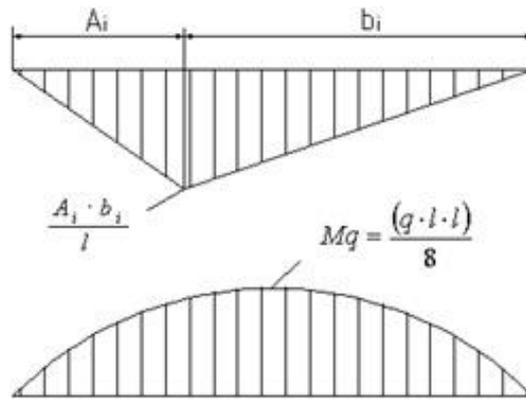


Figura 2.12 Producto de Vereschaguin de la fuerza unitaria de \$X_1\$ o \$X_2\$ por la carga distribuida \$q\$.

$$\delta_{iq} = \delta_{sq} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{A_i}{l} + \frac{b_i}{l} \right) \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{A_i \cdot b_i}{l} \cdot l \quad (2.31)$$

$$\delta_{iq} = \delta_{sq} = -\frac{1}{3} \left(\frac{l^2 \cdot A_i \cdot b_i}{l^2} \right) \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot A_i \cdot b_i \quad (2.32)$$

$$\delta_{iq} = \delta_{sq} = -\frac{q}{24} \cdot A_i \cdot b_i (l^2 \cdot A_i \cdot b_i) \quad (2.33)$$

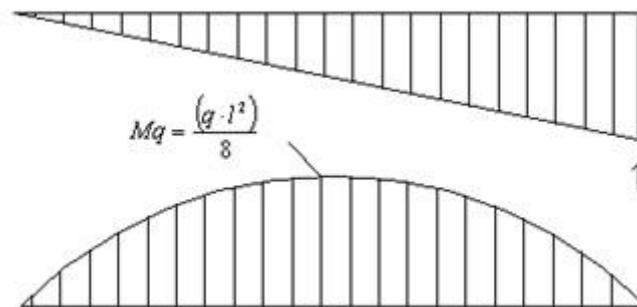


Figura 2.13 Producto de Vereschaguin de la fuerza unitaria de \$X_3\$ o \$X_4\$ por la carga distribuida \$q\$.

$$\delta_{mq} = \delta_{nq} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot l \quad (2.34)$$

$$\delta_{mq} = \delta_{nq} = -\frac{q \cdot l^3}{24} \quad (2.35)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones con los coeficientes numéricos obtenidos se elaboró un Programa en MatLab mediante el cual se pueden hallar los coeficientes y resolver las ecuaciones canónicas para un número de impelentes de hasta diez y con cualquier variación en las dimensiones.

2.6 CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO II.

1. En el Capítulo se desarrolló una metodología de solución del sistema complejo hiperestático de apoyos del árbol de una bomba centrífuga multietápica considerando los cojinetes de rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos y la las empaquetaduras como apoyos suplementarios elásticos.
2. Se hallaron las ecuaciones de aquellos productos de Veresshiaguin que no aparecen en la Tabla de Pisarenko.

Capítulo III: Comportamiento del Modelo Analítico elaborado para el desplazamiento lineal elástico de una empaquetadura blanda y su validación por el Método de los Elementos Finitos.

En el presente capítulo se expone el análisis numérico de una empaquetadura blanda mediante el modelo matemático expuesto en el capítulo anterior. Además, como evaluación general se validan los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos. Para este fin se utiliza como sistema CAD (diseño asistido por ordenador) el software Inventor de Autodesk que a su vez utiliza el motor de cálculo del software ANSYS, como sistema CAE (ingeniería asistida por ordenador). El objetivo de las simulaciones creadas con estos programas digitales es modelar el comportamiento de la empaquetadura bajo la acción de las cargas producidas por el árbol de una bomba centrífuga y determinar la deformación y los valores de los desplazamientos para diferentes magnitudes de carga, y así comparar el método analítico con los valores arrojados por el método numérico.

3.1 MODELO MATEMÁTICO PARA EL DESPLAZAMIENTO LINEAL DE UNA EMPAQUETADURA BLANDA.

En el caso de considerar las empaquetaduras de la bomba como apoyos lineales elásticos se necesita hallar la constante de rigidez de la empaquetadura. Para ello se parte de que la distribución de presiones que ejerce el árbol sobre la misma que tiene una distribución sinusoidal tal como se muestra en la Fig. 3.1

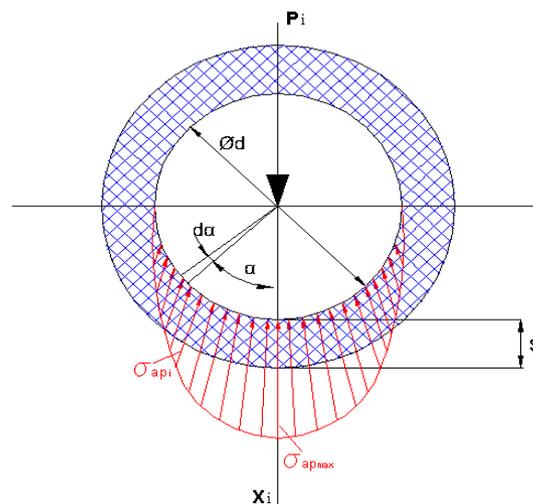


Figura 3.1 Distribución de presiones en el contacto empaquetadura árbol

Se cumple entonces que:

$$\sigma_{api} = \sigma_{ap_{max}} \cdot \cos\alpha \quad (3.1)$$

Un diferencial de la reacción vertical F, o sea: d_{x_i} se puede escribir como sigue:

$$d_F = \sigma_{api} \cdot d \cdot A \cdot \cos\alpha = \sigma_{ap_{max}} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{d}{2} \cdot d \cdot \alpha \cdot l \cdot \cos\alpha \quad (3.2)$$

Integrando.

$$F = \int d_{x_i} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{ap_{max}} \cdot \frac{d}{2} \cdot l \cdot \cos^2 d \cdot \alpha \quad (3.3)$$

$$F = \sigma_{ap_{max}} \cdot d \cdot l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d \cdot \alpha \quad (3.4)$$

$$F = \sigma_{ap_{max}} \cdot d \cdot l \cdot \frac{\pi}{4} \quad (3.5)$$

Despejando $\sigma_{ap_{max}}$.

$$\sigma_{ap_{max}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot l} \quad (3.6)$$

Y el desplazamiento será igual a la variación del espesor de la empaquetadura, según la Ley de Hooke:

$$\delta_{emp_i} = \Delta S_{max} = \frac{\sigma_{ap_{max}} \cdot S_{emp}}{E_{emp}} \quad (3.7)$$

$$\delta_{emp_i} = \frac{4 \cdot F \cdot S}{\pi \cdot d \cdot l \cdot E_{emp}} \quad (3.8)$$

Dónde:

d y l - Diámetro y longitud del árbol en la zona del árbol donde está la empaquetadura (cm)

S_{emp} – Espesor radial de la empaquetadura (cm)

E_{emp} – Módulo de elasticidad del material de la empaquetadura en kN/cm²

δ_{emp} – Desplazamiento de la empaquetadura (cm)

Estos valores σ procesados en Excel para empaquetaduras de teflón con módulo de elasticidad 30 kN/cm² (Kreith, 1999) donde se fue aumentando la carga desde 2 hasta 30 kN. En la tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos para una empaquetadura de teflón.

Tabla 3.1. Valores de los desplazamientos para empaquetadura de teflón.

Fuerza	d arbol	l zona emp	S Esp Emp	E Mod Elas	δ desplazam	δ desplazam
kN	cm	cm	cm	kN/cm ²	cm	μm
2	7,95	10,5	1,5	30	0,0015	15,253
4	7,95	10,5	1,5	30	0,0031	30,506
6	7,95	10,5	1,5	30	0,0046	45,759
8	7,95	10,5	1,5	30	0,0061	61,012
10	7,95	10,5	1,5	30	0,0076	76,265
12	7,95	10,5	1,5	30	0,0092	91,517
14	7,95	10,5	1,5	30	0,0107	106,770
16	7,95	10,5	1,5	30	0,0122	122,023
18	7,95	10,5	1,5	30	0,0137	137,276
20	7,95	10,5	1,5	30	0,0153	152,529
22	7,95	10,5	1,5	30	0,0168	167,782
24	7,95	10,5	1,5	30	0,0183	183,035
26	7,95	10,5	1,5	30	0,0198	198,288
28	7,95	10,5	1,5	30	0,0214	213,541
30	7,95	10,5	1,5	30	0,0229	228,794

A continuación en la figura 3.2 se muestran los valores de los desplazamientos que muestran el comportamiento lineal del modelo matemático utilizado.

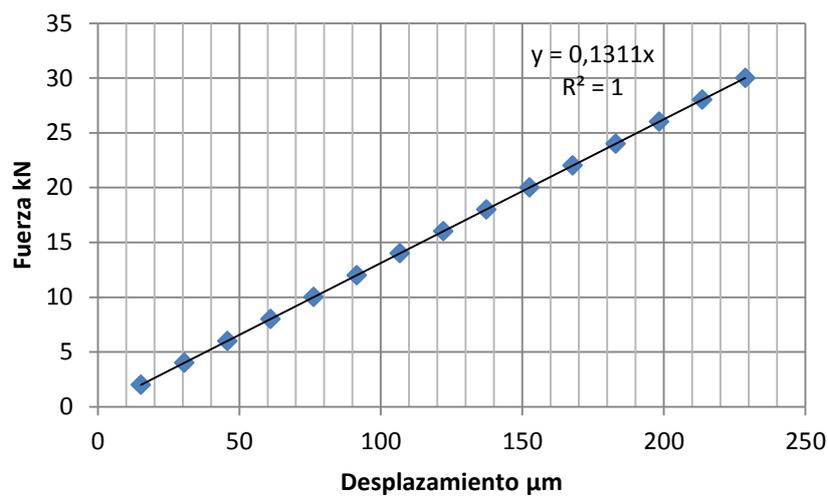


Figura 3.2. Diagrama que muestra la correlación fuerza vs desplazamientos para empaquetaduras de Teflón.

3.2 ANÁLISIS DE LAS EMPAQUETADURAS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

El modelo se elabora a partir de las consideraciones geométricas que caracterizan el ensamblaje de la empaquetadura, el soporte base y el árbol. Elementos que conforman el esquema de análisis, que se diseñó para modelar el comportamiento de los desplazamientos, figura 3.3.

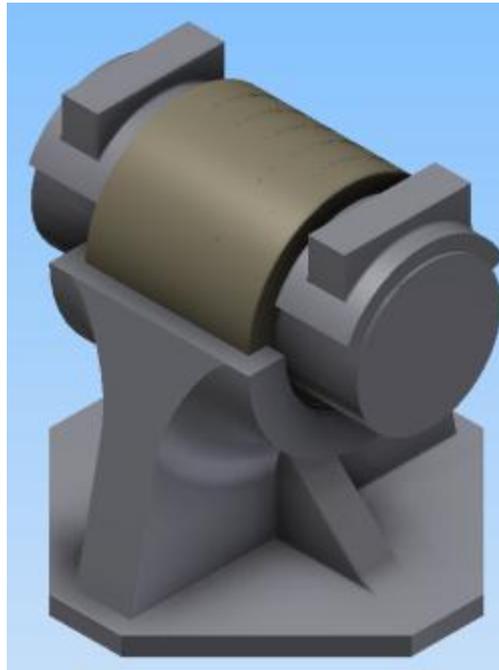


Figura 3.3 Presentación del modelo CAD que representa el ensamblaje del esquema de análisis.

El concepto matemático principal de la simulación se basa en la linealidad del modelo donde es válida la Ley Hooke (Fedosiev, 1985), esto quiere decir que para nuestro análisis utilizamos el concepto de carga estática universal. Las tensiones son directamente proporcional a la fuerza aplicada y las deformaciones que surgen en el modelo son también directas a los desplazamientos, la ecuación utilizada en el modelo numérico en su forma matricial se muestra en la ecuación 3.9.

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix} = K^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \end{Bmatrix} = K^{(e)} a^{(e)} \quad (3.9)$$

Donde $K^{(e)}$ se denomina matriz de rigidez del elemento infinitesimal y es función únicamente de la geometría del mismo y de sus propiedades mecánicas; $a^{(e)}$ y $q^{(e)}$ son los vectores de desplazamiento y de fuerzas de los nodos que conjunto a la geometría de los elementos conforman la maya del modelo CAD.

La mayoría de los métodos de análisis tensional y deformacional por el MEF se basan en el uso de los valores de rigidez para establecer los desplazamientos nodales de la malla cargada y por consiguiente la determinación de las tensiones en cada elemento. El proceso de análisis es el siguiente.

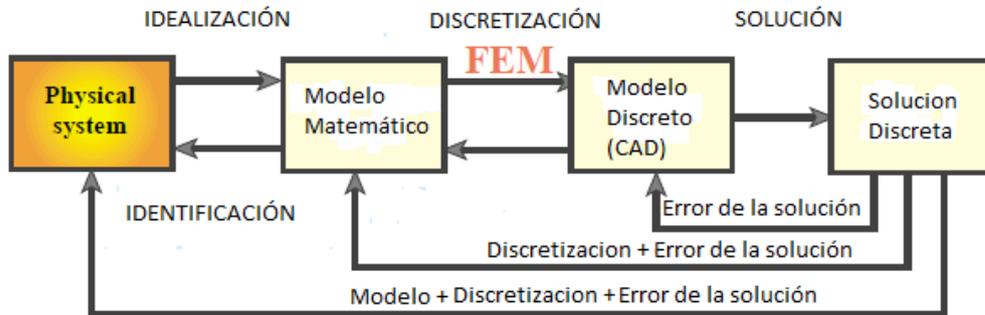


Figura 3.4. Proceso de simulación.

El elemento que va a ser analizado dentro del ensamblaje, figura 3.3, es dividido en pequeñas regiones o geometrías, por ejemplo tetraedros, paralelepípedos, etc., denominados elementos finitos de un cuerpo tridimensional, dentro de los cuales se impone que las tensiones son constantes o varían de acuerdo a una ley conocida, ecuación 3.1. Estos elementos se conectan entre sí a través de puntos, generalmente situados en los vértices de los elementos y denominados nodos. El conjunto de elementos con sus nodos se denomina Malla de Elementos Finitos. Esta malla más todos los datos que describen el problema se conoce como modelo de cálculo por elementos finitos. La construcción de este modelo físico y su implementación en un Software de Elementos Finitos, consume alrededor del 80 % del tiempo total de solución de un problema. En la figura 3.5 se muestra el primer mayado del modelo.

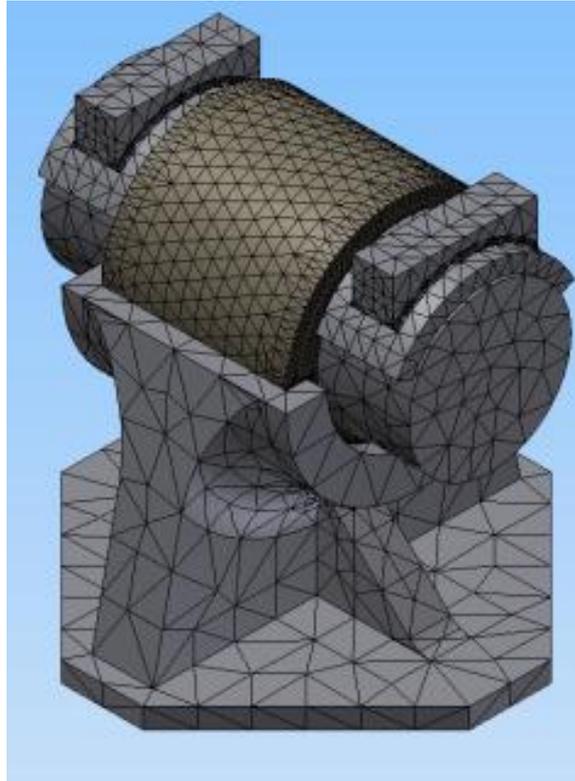


Figura 3.5. Maya del ensamblaje.

Como se muestra en la figura anterior el modelo muestra un mayado grueso para el cual, el software identifica por si solo la densidad de maya en cada región de la geometría. Actualmente estos software con una primera aproximación determinan las características y la densidad de la maya, además de identificar las regiones curvas de cada uno de los elementos. Por eso vemos en la figura 3.5 como la geometría de la maya varía según la superficie de la pieza.

A continuación en la figura 3.6, 3.7, 3.8 se exponen los valores obtenidos de las tensiones y las deformaciones de la primera simulación del sistema global y las condiciones de fronteras donde se pueden apreciar las cargas del modelo.

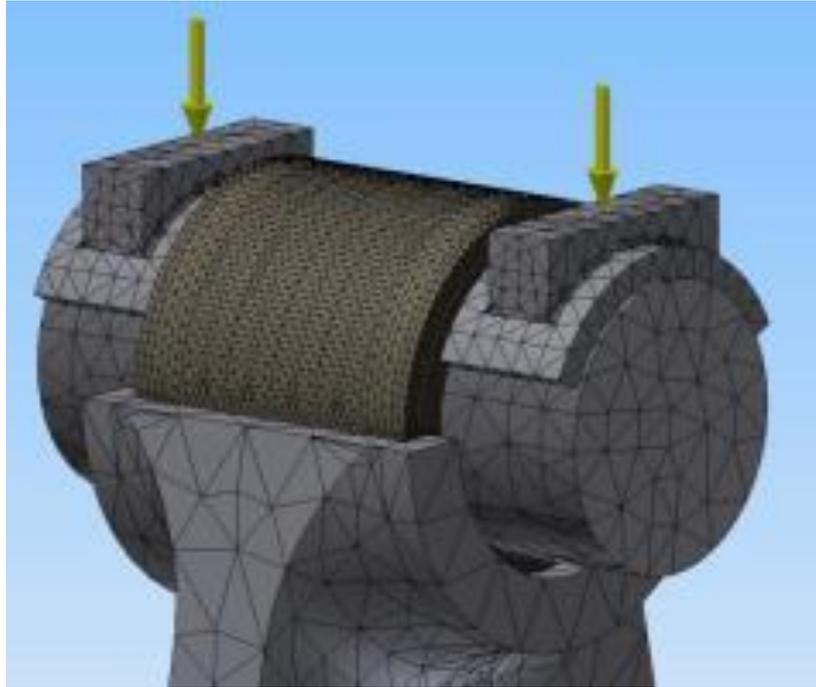


Figura 3.6. Condiciones de fronteras.

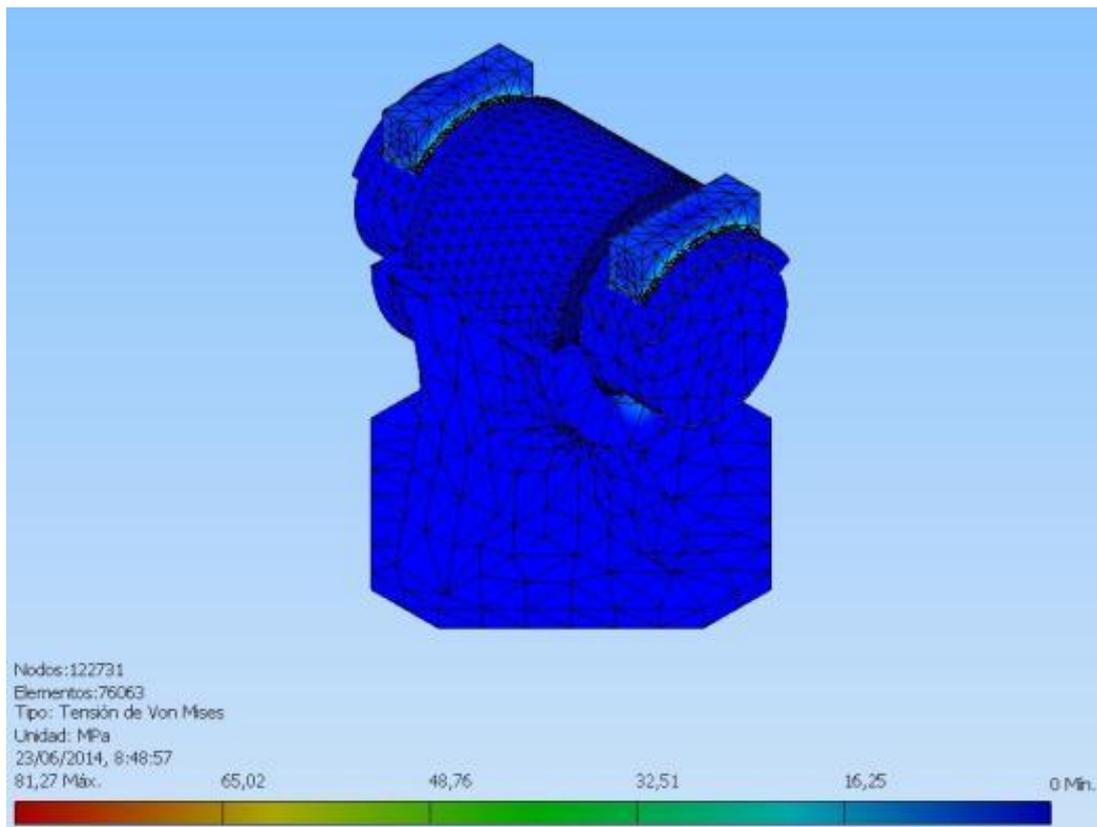


Figura 3.7. Análisis de tensión del ensamblaje.

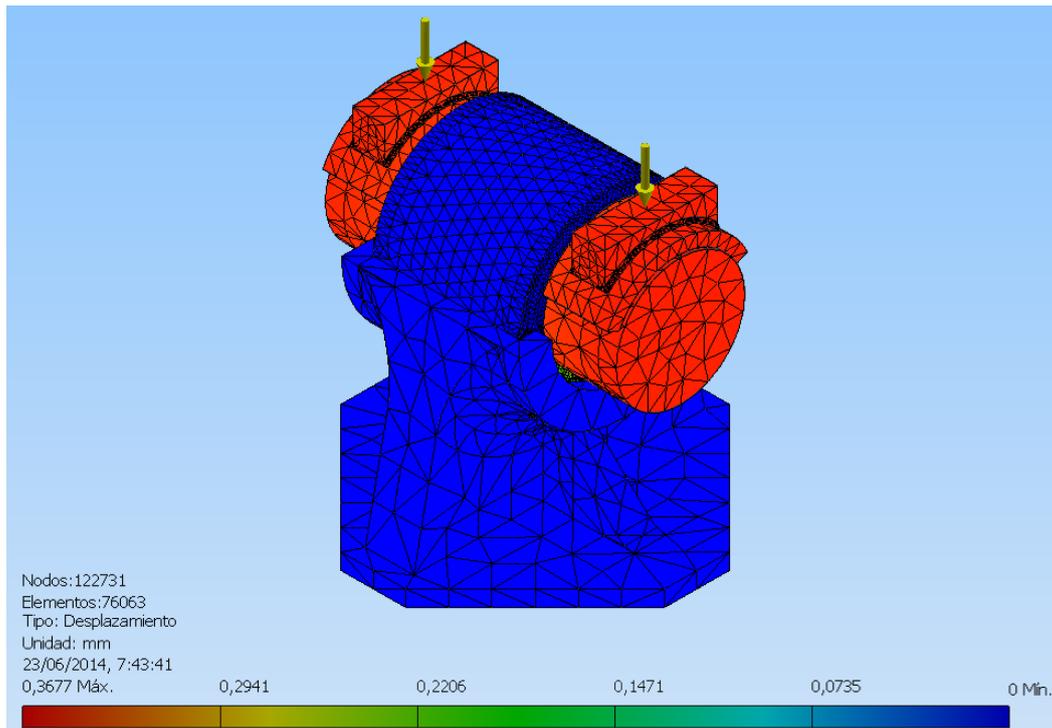


Figura 3.8. Desplazamientos del ensamblaje.

Tras la primera simulaci3n se procede al análisis de la empaquetadura que es la pieza del ensamblaje a la cual se le desea estudiar el comportamiento de las deformaciones.

Para el siguiente análisis se mantiene el grueso del mado en los elementos poco importantes del ensamblaje con el objetivo de reducir el número de ecuaciones y así el tiempo de cálculo por el ordenador. El refinado de la maya se concentra solamente en las áreas de contacto de las empaquetaduras, así como en toda su geometría, figura 3.9.

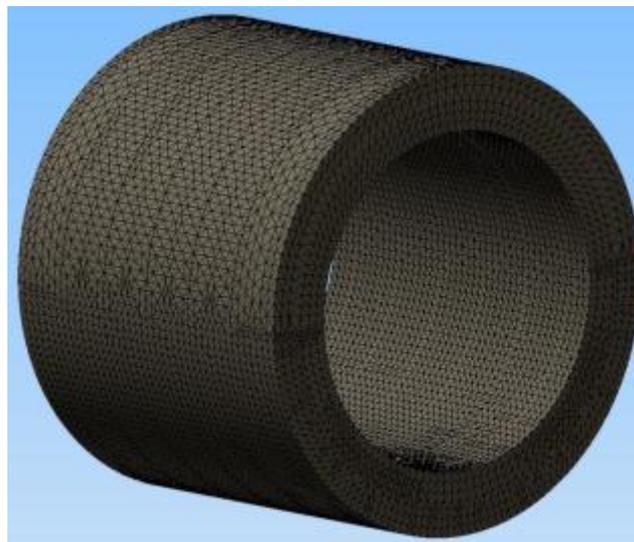


Figura 3.9. Refinado de la maya en la zonas de la empaquetadura.

Simulación de la empaquetadura para el refinado de la maya y un tamaño del elemento de 2 mm, figura 3.10.

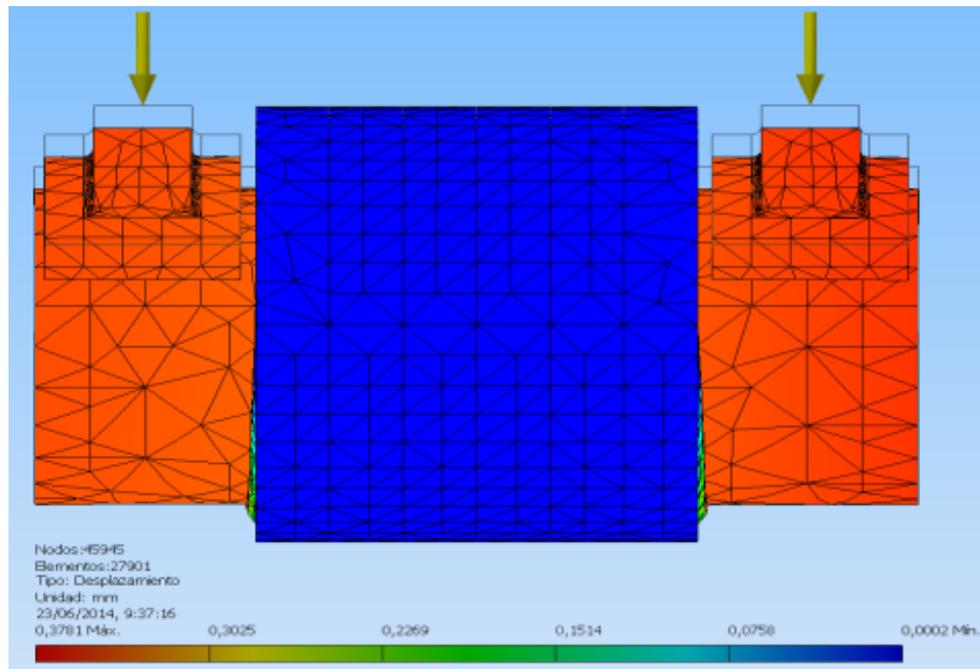


Figura 3.10. Desplazamientos producidos en la empaquetadura, vista lateral.

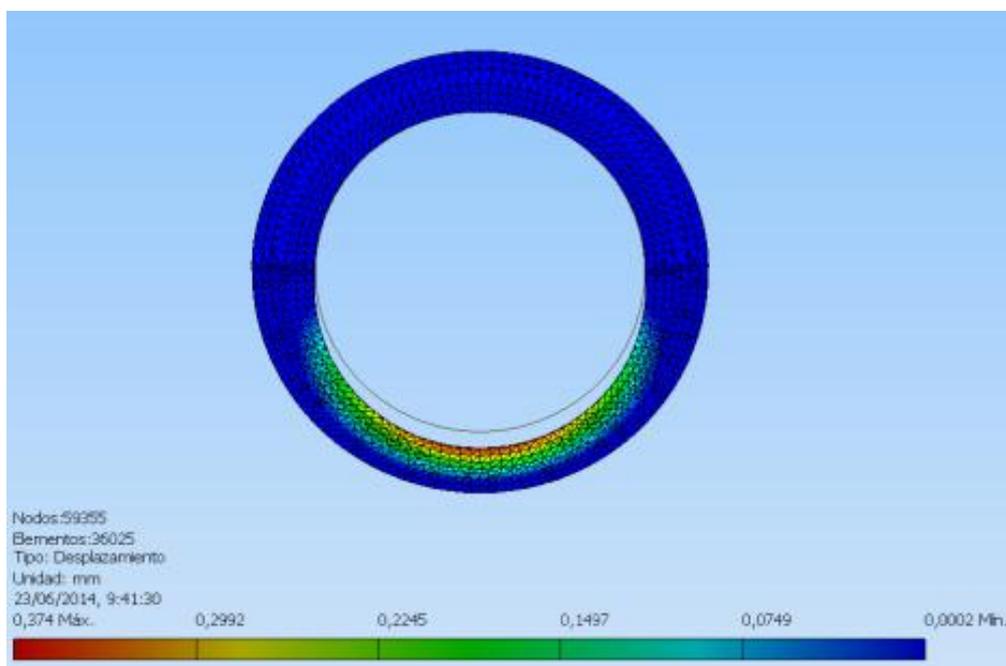


Figura 3.11. Desplazamientos producidos en la empaquetadura, vista frontal.

Como se muestra en la figura 3.10 y 11 la simulación muestra perfectamente el comportamiento de los desplazamientos en la empaquetadura y como esta pierde la circularidad debido a las cargas producidas por el eje.

Seguidamente en la tabla 3.2 se muestran los valores arrojados por la simulación conjunto con los valores analíticos obtenidos por el modelo matemático desarrollado en capítulos anteriores. Es preciso señalar que el modelo corrido muestra una convergencia de los resultados por debajo del 10 %, parámetro fundamental para validar los resultados obtenidos en función del número de simulaciones y los valores da la densidad de maya en la empaquetadura.

Tabla 3.2. Resultados comparativos entre el modelo matemático y MEF.

Fuerza	Modelos		Fuerza	Modelos	
	Analítico	MEF		Analítico	MEF
	($\bar{\delta}$) desplazamientos	($\bar{\delta}$) desplazamientos		($\bar{\delta}$) desplazamientos	($\bar{\delta}$) desplazamientos
kN	μm	μm	kN	μm	μm
2	15,253	24,99	18	137,276	224,9
4	30,506	49,98	20	137,276	249,9
6	45,759	74,98	22	167,782	274,9
8	61,012	99,97	24	183,035	299,9
10	76,265	125	26	198,288	324,5
12	91,517	150	28	213,541	350
14	106,770	174,9	30	228,794	374,9
16	122,023	199,9			

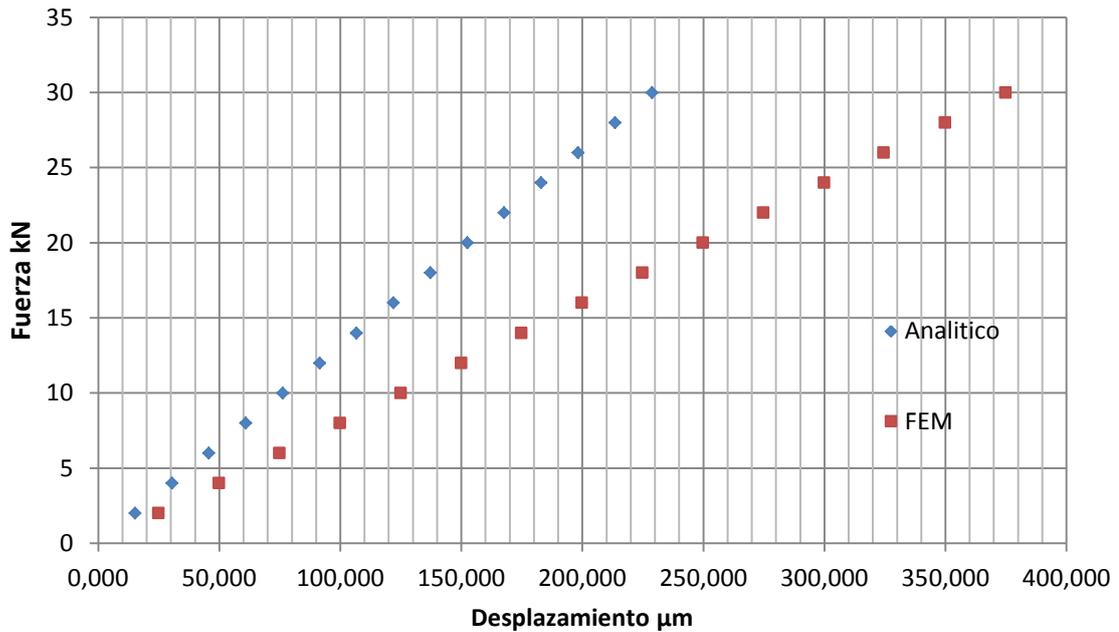


Figura 3.11. Gráficos de comparación de los resultados.

3.3 CONCLUSIONES PARCIALES DEL CAPÍTULO III

1. El desarrollo de este capítulo demostró que el modelo lineal desarrollado por el método analítico para determinar el comportamiento de los desplazamientos en las empaquetaduras con características elásticas corresponde con linealidad donde es válida la ley de Hooke.
2. Los análisis por el MEF permitieron efectuar rápidamente diversas simulaciones usando la innovadora tecnología CAD y CAM. Mediante el software utilizado se pudo llevar a cabo estudios de cotas paramétricas en los modelos para examinar los efectos de las variables geométricas en los diseños. Las simulaciones ayudan a identificar los problemas de rendimiento y a encontrar alternativas de diseño mejores.
3. Al comparar los resultados obtenidos por el MEF de los obtenidos analíticamente se puede concluir que estos no se distancia mucho. La diferencia está dada en que en los cálculos analíticos se tomó un estado tensional lineal que no se aleja mucho de la realidad pero no toma en cuenta el apriete que se le aplica a la empaquetadura.

Conclusiones Generales

1. En el trabajo se realizó una profunda búsqueda bibliográfica que abarca los principales aspectos de las empaquetaduras como conceptos, propiedades, características, ventajas, inconvenientes y aplicaciones; así como la metodología de selección de la misma, además se indagó en los apoyos elásticos, la rigidez de los rodamientos, así como las ventajas de utilizar el MEF.
2. Se hallaron las dependencias teóricas entre el desplazamiento radial y la carga aplicada a un prensa estopas con seis empaquetaduras de material teflón.
3. Se creó un Modelo por Elementos Finitos para condiciones similares a las analíticas que tomaban en cuenta la rigidez de la empaquetadura.
4. Al comparar los resultados obtenidos por el MEF de los obtenidos analíticamente se puede concluir que estos no se distancian mucho. La diferencia está dada en que en los cálculos analíticos se tomó un estado tensional lineal que no se aleja mucho de la realidad pero no toma en cuenta el apriete que se le aplica a la empaquetadura.

Recomendaciones

Se recomienda para futuras investigaciones revisar el modelo analítico, analizando el estado tensional triaxial y no lineal como se tuvo en cuenta en este trabajo.

Bibliografía

- Alemán. (5 de Marzo de 2010). Rediseño y Recuperación de dos Bombas Multietapas Marca Berliet Pertencientes a la Embarcación "6 de Junio" del Departamento de Bomberos de la Provincia de Cienfuegos. XVII Forum de ciencia y técnica. *XVII Forum de ciencia y técnica*, 25.
- Ayagon. (2014). AYAGON. Chile. Obtenido de <http://www.ayagon.cl/>
- Bedford, A., & Fowler, W. (2002). Engineering Mechanics. Statics. *Prentice Hall*, 583.
- Beer, F., & Jonhston, E. (1984). Mecánica Vectorial para Ingenieros. *Mc Graw – Hill*, 972.
- Birger, I., Shorr, B., & Shneiderovich, R. (1966). Cálculo de Resistencia de Piezas de Máquinas. Moscú: Mashinostroenie.
- Canle, R. (2011). Influencia de la rigidez en el diseño de apoyos flexibles para equipos industriales. *Técnica Industrial*, 42-46.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2001). Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4ª Ed.,. *John Wiley & Sons, Inc.*
- Dobrovolski, V. (1970). Elementos de Máquinas. Moscú: MIR.
- ERICA. (2014). *ERICA*. Obtenido de: <http://www.eric.es>
- Feodosiev, V. (1985). Resistencia de Materiales. Moscú: MIR.
- Figueroa, J. F. (2001). Sellado de fluidos. Ecuador.
- Fitzgerald, F. (1996). Mecánica de Materiales. México: Alfaomega S.A. de C.V.
- Fogiel, M. (1988). Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids. New Jersey: REA.
- Goytisoló, R., Hidalgo, C., Nodal, F., & J.G., N. (20 al 22 de Septiembre de 1989). Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes cojinetes de rodamientos. Memorias del Tercer Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y Primero de Mecatrónica. Bogotá, Colombia.

- Guo, Y., & Parker, R. G. (2012). Cálculo de la matriz de rigidez de los rodamientos mediante Elemento Finito/modelo de mecánica de contacto. *Mechanism and Machine Theory*, 32–45.
- Hawkes, B. (1989). Cadcam. *Paraninfo S.A*, 336.
- Hidalgo, C. (Marzo de 2009). Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes tipos de cojinetes de rodamientos. Cienfuegos, Cuba.
- Kreith, F. (1999). *Mechanical Engineering Handbook*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- Mackie, R. (2001). Object-Oriented Methods and Finite Element Analysis. *Saxe-Coburg Pub*.
- Manrique, R., & Jim, A. (2011). Diseño de un recipiente a presión con un sistema de agitación para el procesamiento de biodiesel de 3 m³ de capacidad . Peru.
- Morquio, A., & Delacoste, L. (2014). Vigas rectas continuas, ecuaciones de tres momentos y aplicaciones . Uruguay.
- Mott, R. (1996). Resistencia de Materiales Aplicada. México: Hall Hispanoamericana S.A. 3^a. Ed.
- Nodal Ordoñez, F. (2004). Estudio teórico y experimental del Empotramiento Elástico. Tesis en opción del Título de Master en Ciencias Técnicas.
- Olsen, G. (1962). Elements of Mechanics of Materials. La Habana: Editora de la Asociación de Estudiantes de Ingeniería.
- Pisarenko, G., Yakovlev, A., & Matveev, V. (1989). Manual de Resistencia de Materiales. MIR.
- Rodríguez, J. A. (2007). Desarrollo de un programa LDAR para control de emisiones fugitivas en una planta de refinería. Sevilla, España.
- Scheffler. (2014). *SCHEFFLER*. Obtenido de <http://medias.schaeffler.com/>
- SKF. (2014). *SKF Uruguay*. Obtenido de: <http://www.skf.com/>
- Spiegel, L., & Limbrunner, G. (1999). Applied Statics and Strength of Materials. Third Edition. *Prentice Hall*, 644.

Bibliografía

STR Ingeniería. (2012). STR Cálculo de Estructuras. Madrid, España.

Volmir, A. (1986). Problemas de Resistencia de Materiales. Moscú: MIR.

Wilson, C. (1999). Compute Integred Machine Design. *Prentice Hall*, 646.