



UNIVERSIDAD  
**CIENFUEGOS**  
Carlos Rafael Rodríguez

REPÚBLICA DE CUBA.  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR.  
FACULTAD DE INGENIERÍA.  
COLECTIVO DE MECÁNICA APLICADA.

# *Trabajo de Diploma*

**Título: Solución de Sistemas Hiperestáticos Complejos y su Validación por el Método de los Elementos Finitos.**

**Autor: Ridel Pérez Navarro**

**Tutores: Dr. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa.**

**Ing. Abdel Mendoza Fernández.**

**“Año 55 de la Revolución.”**

**Curso 2012-2013**



**DECLARACION DE AUTORIDAD.  
FACULTAD DE INGENIERÍA.**

**Sistema de Documentación y Proyecto.**

Hago constar que el presente trabajo constituye la culminación de los estudios de quinto año en la especialidad de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Cienfuegos, autorizando a que el mismo sea utilizado por el Centro de Estudio Superior para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de dicha institución.

---

**Firma del autor.**

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura, referido a la temática señalada.

---

**Información Científico – Técnica, Firma.**

---

**Firma del Decano.**

---

**Firma del Tutor.**

---

**Sistema de Documentación y Proyecto.**

***Pensamiento***

## *“Pensamiento”*

- *La naturaleza benigna provee de manera que en cualquier parte halles algo que aprender.*

*Leonardo Da-Vinci*

- *El genio se hace con 1 por ciento de talento y un 99 por ciento de trabajo.*

*Albert Einstein.*

- *Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber.*

*Albert Einstein.*

# ***Dedicatoria***

## *“Dedicatoria”*

- *Dedico esta obra a mis padres, que tanto me han apoyado en mi vida de estudiante, a los cuales le agradezco infinitamente por encontrarse siempre a mi lado para guiarme por los senderos de la vida.*
- *A mis abuelos que siempre han estado orgullosos de mí y de que yo ejerza esta profesión.*
- *A todas aquellas personas que de una forma u otra me han ayudado a finalizar mis estudios y han estado siempre a mi lado en los buenos y malos momentos de la vida.*

# ***Agradecimientos***

## *“Agradecimientos”*

- *A mis padres y abuelos nuevamente, que siempre se han encontrado a mi lado para brindarme apoyo cuando más lo he necesitado.*
- *A mis tutores Abdel Mendoza Fernández y Rafael Antonio Goytisoló por brindarme la oportunidad de ser alumno y por hacer posible la culminación de esta obra.*
- *A mis compañeros de aula y amigos, por ser tan especiales conmigo y estar presente en los mejores momentos de mi vida de estudiante.*
- *A la vida y a la revolución por darme la oportunidad de ejercer una vida profesional.*

# ***Resumen***

## *Resumen*

En el Trabajo se profundiza en los Métodos descritos en la literatura para resolver Sistemas Hiperestáticos Complejos compuestos por núcleo, rayos y llanta: se verifica que el método más adecuado para resolver este tipo de Sistema es el Teorema del Trabajo Mínimo.

En el Trabajo se aplica el Segundo Teorema de Castigliano o Teorema del Trabajo Mínimo para resolver cualquier volante con rayos rectos, independientemente del número de rayos, para determinar las fuerzas internas en la llanta y en los rayos. Se calculan las tensiones que surgen en la llanta aplicando las ecuaciones para el cálculo de las tensiones en barras curvas, ya que cualquier tramo de la llanta constituye una barra curva y las tensiones en los rayos que constituye un elemento a tracción. El volante analizado se modeló utilizando el software ANSYS 13.0 y los resultados coinciden con bastante aproximación con los obtenidos por las ecuaciones analíticas deducidas.

En el Trabajo se aplica también el Teorema del Trabajo Mínimo para resolver cualquier volante con rayos curvos, con determinada geometría de los rayos e independientemente también del número de rayos, se determinan las fuerzas internas en la llanta y en los rayos en este sistema mucho más complejo. Se calculan las tensiones que surgen en la llanta aplicando las ecuaciones para el cálculo de las tensiones en barras curvas, ya que cualquier tramo de la llanta constituye una barra curva y las tensiones en los rayos que constituye un elemento en este caso a tracción y a flexión. El volante analizado se modeló también por el Método de los Elementos Finitos utilizando el software INVENTOR obteniéndose una concordancia satisfactoria con los obtenidos por las ecuaciones analíticas deducidas.

# ***Índice***

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>16</b>
<b>Capítulo I. Métodos de Solución de Sistemas Hiperestáticos complejos.</b>	<b>20</b>
<b>1.1 Introducción al capítulo I</b>	<b>20</b>
<b>1.2 Teorema del Trabajo Mínimo.</b>	<b>20</b>
<b>1.3 Solución de un Sistema Hiperestático Complejo mediante el Segundo Teorema de Castigliano o Teorema del Trabajo Mínimo.</b>	<b>22</b>
<b>1.4 Solución de un Sistema Hiperestático Complejo mediante el Método de la Superposición de Esquemas, para el cálculo de las fuerzas sobre los rayos.</b>	<b>24</b>
1.4.1 Esquema de Análisis para el Cálculo.	24
1.4.2 Cálculo del desplazamiento radial del cubo por la acción de la presión del ajuste por interferencia.	25
1.4.3 Cálculo del desplazamiento radial del cubo por la acción de las fuerzas concentradas que surgen en los rayos.	26
1.4.4 Demostración del cálculo del desplazamiento en los rayos.	27
1.4.5 Cálculo del desplazamiento en la llanta.	27
Para la llanta el esquema de análisis es el de un anillo cargado en su plano como el de la Figura 1.6.	27
1.4.6 Aplicación del Principio de la Superposición para el cálculo de la fuerza interna P en los rayos.	28
1.4.7 Cálculo de las tensiones y evaluación de la resistencia del rayo.	28
1.4.8 Cálculo de las tensiones y evaluación de la resistencia de la llanta.	29
<b>Conclusiones del Capítulo I.</b>	<b>31</b>
<b>Capítulo II. Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo al cálculo de las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos rectos.</b>	<b>33</b>
<b>2.1 Introducción al capítulo II</b>	<b>33</b>

<b>2.2 Demostración de las ecuaciones de cálculo de un volante con rayos rectos.</b>	<b>33</b>
2.2.1 Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo.	34
<b>2.3 Cálculos realizados para un volante de rayos rectos.</b>	<b>40</b>
2.3.1 Área de la sección transversal de la llanta $A_o$ ( $m^2$ ).	40
2.3.2 Velocidad angular $w$ (rad/s).	40
2.3.3 Fuerza de inercia en cualquier parte de la llanta, $q$ (kN/m).	40
2.3.4 Momento de inercia centroidal en la sección de la llanta $I_o$ ( $m^4$ ).	40
2.3.5 Cálculo de las funciones $f_{1(\alpha)}$ y $f_{2(\alpha)}$ . Ec. (2. 18) y Ec. (2. 19).	40
2.3.6 Área de la sección transversal del rayo $A_1$ ( $m^2$ ), volante de sección rectangular.	41
2.3.7 Fuerza interna del rayo, $N_r$ (kN) .	41
2.3.8 Momento flector en la sección transversal de la llanta, $M_o$ (kN-m).	41
2.3.9 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta, $N_o$ (kN).	41
2.3.10 Fuerza interna $N$ y Momento flector $M$ que actúan en una sección cualquiera de la llanta $N$ (kN) y $M$ (kN-m).	42
2.3.11 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta $Y_{máx}$ (m).	42
2.3.12 Parámetro geométrico $z$ (m) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta rectangular, con radio primitivo $R_p$ .	42
2.3.13 Cálculo de la tensión resultante en la llanta $\sigma$ (MPa).	43
2.3.14 Cálculos realizados para determinar la tensión resultante en el rayo.	44
2.3.15 La tensión en una sección cualquiera del rayo $\sigma_1$ (MPa).	44
<b>2.4 Resultados numéricos de la aplicación.</b>	<b>44</b>
2.4.1 Comportamiento de la fuerza $N$ , el momento flector $M$ y la tensión $\sigma$ en la llanta.	45
<b>2.5 Modelación del Estado Tensional del volante de rayos rectos por el Método de Elementos Finitos.</b>	<b>46</b>
<b>Fig. 2.7 Tensiones por la 4ta Teoría de Resistencia de Hubber-Von Mises-Hencky en la llanta.</b>	<b>48</b>
<b>Conclusiones del Capítulo II.</b>	<b>51</b>

## Capítulo III. Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo al cálculo de las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos curvos.53

<b>3.1 Introducción al capítulo III</b>	<b>53</b>
<b>3.2 Demostración de las ecuaciones de cálculo de un volante con rayos curvos.</b>	<b>53</b>
3.3 Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo.	54
<b>3.4 Cálculos realizados para un volante de rayos curvos.</b>	<b>63</b>
3.4.1 Área de la sección transversal de la llanta $A_0$ ( $m^2$ ).	63
3.4.3 Fuerza de inercia en cualquier parte de la llanta, $q$ ( $kN/m$ ).	63
3.4.4 Momento de inercia centroidal en la sección de la llanta $I_0$ ( $m^4$ ).	63
3.4.5 Cálculo de las funciones $f_{1(\alpha)}$ y $f_{2(\alpha)}$ . $\alpha=0.523$ $m^2$ .	63
3.4.6 Área de la sección transversal del rayo $A_1$ ( $m^2$ ), volante de sección rectangular.	64
3.4.7 Fuerza interna del rayo, $N_r$ ( $kN$ ).	64
3.4.8 Momento flector en la sección transversal de la llanta, extremo izquierdo, $M_0$ ( $kN\cdot m$ ).	64
3.4.9 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta, extremo izquierdo, $N_0$ ( $kN$ ).	64
3.4.10 Fuerza interna $N$ y Momento flector $M$ que actúan en el extremo izquierdo de la llanta $N$ ( $kN$ ) y $M$ ( $kN\cdot m$ ).	65
3.4.11 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta $Y_{m\acute{a}x}$ ( $m$ ).	65
3.4.12 Parámetro geométrico $z$ ( $m$ ) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta como rectangular con radio primitivo $R_p$ .	66
3.4.13 Cálculo de la tensión resultante en la llanta por el extremo izquierdo $\sigma$ ( $MPa$ ).	66
3.4.14 Momento flector en la sección transversal de la llanta, extremo derecho, $M_0'$ ( $kN\cdot m$ ).	67
3.4.15 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta extremo derecho, $N_0'$ ( $kN$ ).	67

3.4.16 Fuerza interna $N'$ y Momento flector $M'$ que actúan en el extremo derecho de la llanta $N$ (kN) y $M$ (kN-m).	67
3.4.17 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta $Y_{\text{máx}}$ (m).	68
3.4.18 Parámetro geométrico $z$ (m) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta como rectangular con radio primitivo $R_p$ .	68
3.4.19 Cálculo de la tensión resultante en la llanta por el extremo derecho $\sigma$ (Mpa).	68
3.4.20 Cálculo de la tensión resultante en el rayo.	69
3.4.21 La fuerza en cualquier parte del rayo es:	69
3.4.22 Momento flector en cualquier parte del rayo.	70
3.4.23 Comportamiento de la tensión $\sigma$ en la llanta.	71
3.4.24 Comportamiento de la tensión en el rayo $\sigma_1$ .	72
<b>3.4 Modelación del Estado Tensional del volante de rayos curvos por el Método de Elementos Finitos.</b>	<b>72</b>
<b>Conclusiones del Capítulo III.</b>	<b>76</b>
<b>Conclusiones Generales:</b>	<b>78</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>80</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>
<b>Anexos</b>	<b>85</b>

# ***Introducción***

## **Introducción**

En la literatura de Ingeniería Mecánica en general no se aportan esquemas de Análisis ni ecuaciones para el cálculo de las fuerzas internas y las tensiones en la llanta y en los rayos de los Elementos de Máquinas compuestos por una llanta, como regla de sección rectangular y determinado número de rayos que conectan la llanta con el cubo.

Estos Elementos, como son: volantes, poleas, engranes, etc. se dimensionan sobre la base de recomendaciones sobre sus proporciones que aparecen en los Atlas de Diseño de Máquinas (Reshetov, 1976); (Kurmaz, 1999) En la literatura propia de Diseño de Elementos de Máquinas (Birger, 1966); (Dobrovolski, 1970); (Reshetov, 1985); (Iusilievich, 1988), (Ivanov, 1991); (Shigley, 2001) sólo se ofrecen algunas recomendaciones acerca de los diámetros interior de la llanta y exterior del cubo y algunas recomendaciones para las dimensiones de los rayos.

Estas insuficiencias de los Esquemas de Análisis de este tipo de elemento se han asimilado históricamente través del controvertido factor de seguridad, encargado de llevar sobre su espalda todas las imprecisiones e incertidumbres de los cálculos o simplemente con el sobreconsumo de metal, ya que las proporciones y dimensiones típicas de la literatura como regla implican factores de seguridad excesivos.

En la literatura especializada de Mecánica de Materiales (Pisarenko, 1989) se dan algunos Esquemas de Análisis y sus Soluciones para sistemas Hiperestáticos con esa configuración pero siempre se hace necesario combinar las diferentes cargas sobre el Sistema por el Principio de la Superposición.

En la literatura de Mecánica de Materiales Avanzada (Goytisoló, 2000), (Solecki y Conant, 2003) se aborda el Teorema del Trabajo Mínimo como un método para enfrentar Esquemas con estas características. El tutor del presente trabajo ha utilizado este esquema en la solución de algunos problemas prácticos concreto (Rios, 1990). (Goytisoló, 2006); (Goytisoló, 2008),

El surgimiento y desarrollo de la Mecánica de la Fractura en los últimos 40 años, ha proporcionado un nuevo enfoque de la Mecánica de los Materiales y del Diseño y una necesidad de perfeccionar los Esquemas de Análisis. La aplicación de la Metodología

de Gestión de Vida obliga a realizar cálculos exactos de tensiones con el propósito de pronosticar con adecuada exactitud la vida del elemento de máquina o estructura.

**Problema Científico:**

No existe en la literatura una metodología de cálculo para volantes de rayos rectos ni curvos que permita determinar las tensiones en sus distintas partes.

**Hipótesis:**

Es posible desarrollar una metodología de cálculo partiendo de los conceptos energéticos como el Teorema de Castigliano que permita obtener las tensiones en cualquier parte de un volante de rayos rectos o curvos.

**Objetivo general:**

Desarrollar una metodología de cálculo para la determinación de las tensiones en volantes de rayos rectos y curvos para la validación de los resultados por el método de elementos Finitos.

Estos antecedentes han motivado la realización del presente trabajo cuyos:

**Objetivos Específicos son:**

1. Investigar en la literatura los diferentes procedimientos y métodos utilizados para solucionar Sistemas Hiperestáticos Complejos, como lo constituye el cálculo de las fuerzas internas y las tensiones en la llanta y en los rayos de los elementos de máquinas compuestos por una llanta, como regla de sección rectangular y determinado número de rayos que conectan la llanta con el cubo, los cuales pueden tener diferentes secciones y configuraciones.
2. Profundizar específicamente en el Segundo Teorema de Castigliano o Teorema del Trabajo Mínimo y su aplicación a este tipo de Elemento de Máquina.
3. Aplicar dicho Teorema al cálculo de las fuerzas internas de volantes con diferentes números de rayos, secciones de los rayos y configuración rectilínea y curvilínea y comparar los resultados analíticos obtenidos con los obtenidos mediante la aplicación del Método de los Elementos Finitos.

# *Capítulo I*

# Capítulo I. Métodos de Solución de Sistemas Hiperestáticos complejos.

## 1.1 Introducción al capítulo I

Este capítulo tiene como objetivo realizar un estudio sobre el teorema del trabajo mínimo para la solución de sistemas hiperestáticos complejos tales como volantes llantas y poleas de rayos con diferentes configuraciones.

## 1.2 Teorema del Trabajo Mínimo.

Consideremos un sistema sobre el cual actúa el sistema de carga exteriores  $P_j$ , compuesto por las cargas  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$  y las reacciones de apoyo  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Si se cumple la Ley de Hooke y el Principio de Superposición se pueden hallar las reacciones de apoyo partiendo del Teorema de Castigliano.

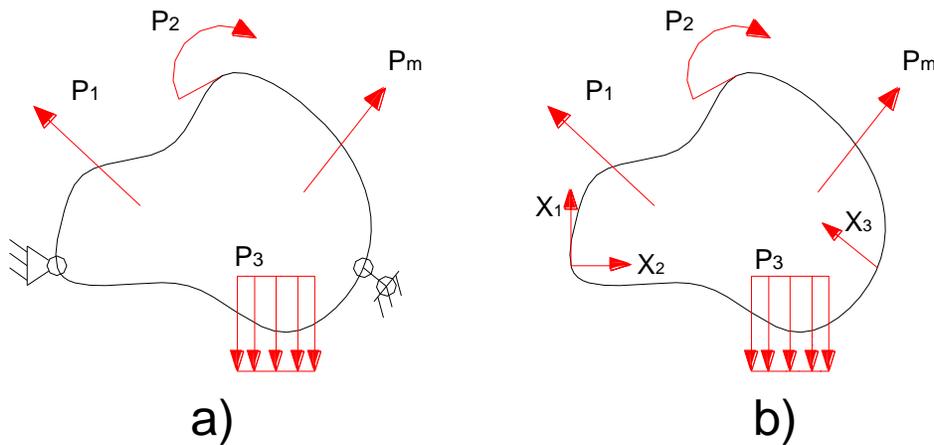


Figura 1.1 Sistema Isostático y su Sistema Equivalente.

En la Figura.1 b) se muestra el sistema de cargas y reacciones de apoyo correspondientes al sistema isostático de la Fig. 1.1 a). La energía potencial de deformación que se acumula en el sólido será una función del sistema de cargas exteriores  $P_j$  y de las reacciones de apoyo  $X_i$ , de manera que:

$$U = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P_1, P_2, P_3, \dots, P_m) \quad (1.1)$$



positivo; lo que demuestra el signo positivo de la segunda derivada y la condición de mínimo de la energía potencial de deformación de las expresiones (1.2).

Se concluye en definitiva que: En los sistemas isostáticos o hiperestáticos las reacciones en los apoyos toman tales valores que garantizan que la energía potencial de deformación del sistema tenga un valor mínimo. Este teorema es conocido como Teorema del Trabajo Mínimo porque en vez de la energía potencial se puede hablar del trabajo de las fuerzas exteriores numéricamente igual a esta. Del mismo se desprende que al añadir a un sistema ligaduras suplementarias, las reacciones en estas se redistribuyen de manera que la energía potencial de deformación del sistema siempre disminuye. El Teorema del Trabajo Mínimo también es conocido como Segundo Teorema de Castigliano o también Teorema de Menabrea.

### 1.3 Solución de un Sistema Hiperestático Complejo mediante el Segundo Teorema de Castigliano o Teorema del Trabajo Mínimo.

Se verá a continuación un ejemplo de aplicación del Segundo Teorema de Castigliano o Teorema del Trabajo Mínimo para solucionar un sistema hiperestático de cierta complejidad.

Se pretende calcular el valor de la fuerza normal de tracción que se origina en la barra vertical de rigidez  $E_1 \cdot A_1$  del sistema hiperestático mostrado en la Figura 1.2 a).

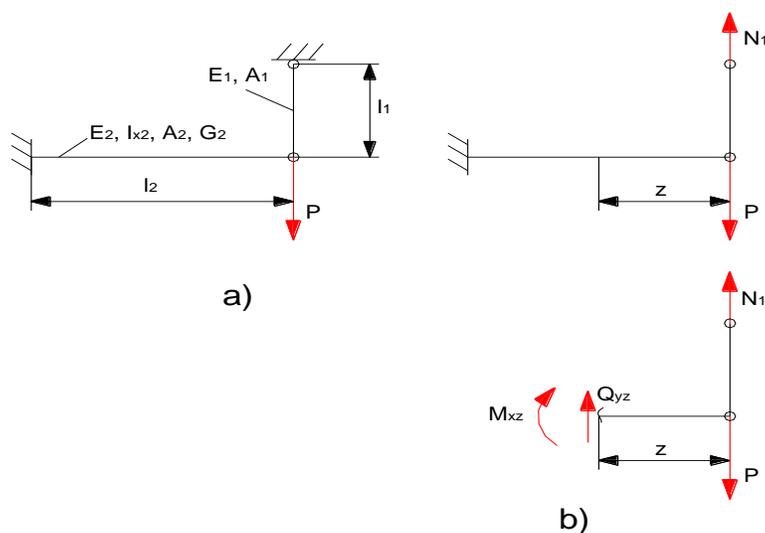


Figura 1.2 Sistema Hiperestático Simple.

## Capítulo I

La barra 1 está soportando tracción y la barra 2 flexión transversal, o sea, cortante y flexión. La energía potencial de deformación del sistema será:

$$U = U_{(M_x(z))} + U_{(Q_y(z))} + U_{N1} \quad (1.6)$$

O sea:

$$U = \int_0^{l_2} \frac{M_x^2(z)}{2 \cdot E_2 \cdot I_{x2}} \cdot dz + k_y \cdot \int_0^{l_2} \frac{Q_y^2(z)}{2 \cdot G_2 \cdot A_2} \cdot dz + \int_0^{l_1} \frac{N_1^2}{2 \cdot E_1 \cdot A_1} \cdot dz \quad (1.7)$$

Y como en la dirección de  $N_1$  sobre el apoyo el desplazamiento es cero.

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \int_0^{l_2} \frac{2 \cdot M_x(z) \cdot \frac{\partial M_x(z)}{\partial N_1}}{2 \cdot E_2 \cdot I_{x2}} \cdot dz + k_y \cdot \int_0^{l_2} \frac{2 \cdot Q_y(z) \cdot \frac{\partial Q_y(z)}{\partial N_1}}{2 \cdot G_2 \cdot A_2} \cdot dz + \int_0^{l_1} \frac{2 \cdot N_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_1}}{2 \cdot E_1 \cdot A_1} \cdot dz = 0 \quad (1.8)$$

Para una sección  $z$  cualquiera en la barra 2 (Figura 1.2 b).

$$M_x(z) = (N_1 - P) \cdot z \quad \text{y} \quad \frac{\partial M_x(z)}{\partial N_1} = z \quad (1.9)$$

$$Q_y(z) = P - N_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_y(z)}{\partial N_1} = -1 \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.9) y (1.10) en (1.8) y simplificando:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{1}{E_2 \cdot I_{x2}} \cdot \int_0^{l_2} (N_1 - P) \cdot z \cdot z \cdot dz - \frac{k_y}{G_2 \cdot A_2} \cdot \int_0^{l_2} (P - N_1) \cdot dz + \frac{1}{E_1 \cdot A_1} \cdot \int_0^{l_1} N_1 \cdot dz = 0 \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{(N_1 - P) \cdot z^3}{3 \cdot E_2 \cdot I_{x2}} \right|_0^{l_2} - \left. \frac{k_y \cdot (P - N_1) \cdot z}{G_2 \cdot A_2} \right|_0^{l_2} + \left. \frac{N_1 \cdot z}{E_1 \cdot A_1} \right|_0^{l_1} = 0 \quad (1.12)$$

Efectuando:

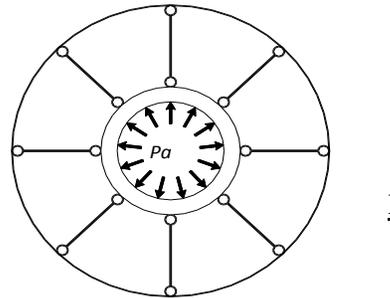
$$\frac{N_1 \cdot l_2^3}{3 \cdot E_2 \cdot I_{x2}} + \frac{k_y \cdot N_1 \cdot l_2}{G_2 \cdot A_2} + \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{P \cdot l_2^3}{3 \cdot E_2 \cdot I_{x2}} + \frac{k_y \cdot P \cdot l_2}{G_2 \cdot A_2}$$

$$N_1 = \frac{P \cdot l_2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot \left( l_2^2 \cdot G_2 \cdot A_2 + 3 \cdot k_y \cdot E_2 \cdot l_{x2} \right)}{l_2^3 \cdot G_2 \cdot A_2 \cdot E_1 \cdot A_1 + 3 \cdot k_y \cdot l_2 \cdot E_2 \cdot l_{x2} \cdot E_1 \cdot A_1 + 3 \cdot l_1 \cdot E_2 \cdot l_{x2} \cdot G_2 \cdot A_2} \quad (1.13)$$

## 1.4 Solución de un Sistema Hiperestático Complejo mediante el Método de la Superposición de Esquemas, para el cálculo de las fuerzas sobre los rayos.

### 1.4.1 Esquema de Análisis para el Cálculo.

Se trata de un Rolo de Apoyo de un Horno de Cemento, compuesto por tres elementos: La llanta, los rayos y el cubo el cual será prensado a su árbol. ¿Qué fuerzas internas y que tensiones surgen durante el proceso de prensado en los diferentes elementos integrantes? Producto del ajuste prensado en el rolo se originan fuerzas internas en el cubo, en los rayos y en la llanta. Para el análisis y cálculo de dichas fuerzas se adoptará el esquema de análisis mostrado en la Figura 1.3.



**Figura 1.3 Esquema de análisis para el cálculo de las fuerzas internas en los elementos.**

Las fuerzas internas que se origina en los tres elementos se determinan mediante un sistema de ecuaciones que se obtiene vinculando las expresiones de desplazamiento para cada elemento por separado.

El esquema de análisis del cubo corresponde con la superposición de un cilindro de pared gruesa que está solicitado a una presión interior  $P_a$ , como se muestra en la Figura 1.4 a), que se superpone con un anillo cargado en su plano con fuerzas concentradas dirigidas hacia el centro ver Figura 1.4 b).

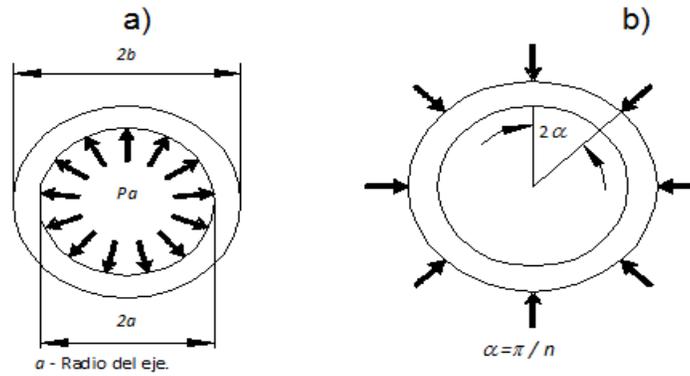


Figura 1.4 Esquema de análisis del cubo y de la llanta.

### 1.4.2 Cálculo del desplazamiento radial del cubo por la acción de la presión del ajuste por interferencia.

La expresión para el cálculo del desplazamiento radial cuando el tubo de pared gruesa (cubo) está sometido a presión interior es:

$$u_1 = \frac{1 - \mu}{E} \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} \quad (1.14)$$

Dónde:

$\mu$  - Coeficiente de Poisson.

$E$  - Módulo de elasticidad.

$P_a$  - Presión interior.

$P_b$  - Presión exterior.

$r$  - Radio para el cual se analizan los desplazamientos.

Como los desplazamientos se analizan para la periferia del cubo  $r = b$  y la presión exterior  $P_b = 0$  debido a que este elemento está sometido a cargas concentradas por la presencia de los rayos, la expresión anterior se simplificará.

La presión interior  $P_a$ , depende de la interferencia del ajuste que se selecciones para el prensado y se calcula por la expresión:

$$P_a = \frac{\delta}{d \left( \frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right)} \times 10^3 \quad (1.15)$$

Dónde:

$\delta$  - Interferencia del ajuste en *mm*.

$d$  - Diámetro nomina

Cuando no se conoce la interferencia real bajo la cual se realizó el ajuste el cálculo se realiza para la interferencia máxima.

### 1.4.3 Cálculo del desplazamiento radial del cubo por la acción de las fuerzas concentradas que surgen en los rayos.

Para calcular el desplazamiento cuando el cubo está sometido a fuerzas concentradas dirigidas hacia el centro el desplazamiento se puede calcular por la expresión dada por (Pisarenko, 1989) en la página 379 cuya expresión es la siguiente:

$$u_2 = \frac{P R^3}{4 E I_{xc}} \left( \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\text{sen} \alpha} - \frac{\alpha \cos \alpha}{\text{sen} \alpha} \right) \quad (1.16)$$

Dónde:

$R$  - Radio del cubo.

$I_{xc}$  - Momento de inercia de la sección del cubo.

$P$ - Fuerza que origina la interferencia.

Aplicando el principio de superposición el desplazamiento en el cubo se calcula como:

$$u = u_1 - u_2 \quad (1.17)$$

Sustituyendo en (1.17) las expresiones (1.14) y (1.16) se obtiene la ecuación del desplazamiento total en el cubo:

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} - \frac{P R^3}{4 E I_{xc}} \left( \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\text{sen} \alpha} - \frac{\alpha \cos \alpha}{\text{sen} \alpha} \right) \quad (1.18)$$

#### 1.4.4 Demostración del cálculo del desplazamiento en los rayos.

El rayo se considera como un elemento a dos fuerzas que está sometido a compresión el esquema de análisis se muestra en la Figura 1.5.

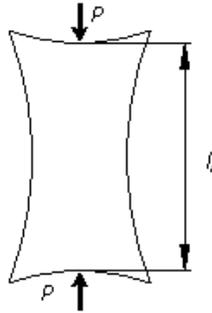


Figura 1.5 Esquema de análisis del rayo

La ecuación que se utiliza para calcular el desplazamiento radial es la siguiente, que no es más que la Ley de Hooke.

$$\Delta l = \frac{P \times l_r}{E \times A_s} \quad (1.19)$$

$l_r$  – Longitud radial del rayo.

$A_s$  – Área de la sección del rayo.

Los valores de  $l_r$  y  $A_s$  son conocidos, el desplazamiento queda en función de ellos.

#### 1.4.5 Cálculo del desplazamiento en la llanta.

Para la llanta el esquema de análisis es el de un anillo cargado en su plano como el de la Figura 1.6.

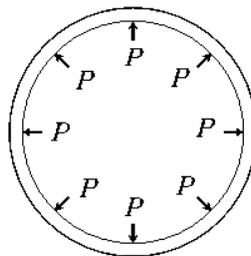


Figura 1.6 Esquema de Análisis de la llanta.

## Capítulo I

El desplazamiento radial del punto de aplicación de la fuerza dirigida desde el centro es según (Pisarenko, 1989) página 379 es:

$$\delta = \frac{P \times R^3}{2 \times E \times J} \left[ \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] \quad (1.20)$$

$R$  – Radio de la llanta.

$J$  – Momento de inercia de la sección de la llanta.

El radio de la llanta y el momento de inercia también varían en dependencia del tipo de rolo por lo que el desplazamiento queda en función de ellos.

### 1.4.6 Aplicación del Principio de la Superposición para el cálculo de la fuerza interna $P$ en los rayos.

Aplicando el principio de composición de los desplazamientos se llega a que la expresión que vincula los desplazamientos de la llanta, los rayos y el cubo:

$$\Delta l = u - \delta \quad (1.21)$$

Sustituyendo los valores de  $u$ ,  $\Delta l$  y  $\delta$  en esta expresión se puede despejar el valor de la carga  $P$  para un rolo de dimensiones dadas.

### 1.4.7 Cálculo de las tensiones y evaluación de la resistencia del rayo.

El rayo es un elemento que está sometido a compresión solamente, las tensiones normales se determinan:

$$\sigma_c = \frac{P}{A_s} \quad (1.22)$$

Dónde:

$P$ - Fuerza aplicada

$A_s$  – Área de la sección del rayo

$$\sigma_c \leq [\sigma_{ad}]$$

$$[\sigma_{ad}] = \frac{\sigma_f}{n} \quad (1.23)$$

Dónde:

$\sigma_f$  - Límite de fluencia del material.

n - Factor de seguridad para cargas estáticas.

#### 1.4.8 Cálculo de las tensiones y evaluación de la resistencia de la llanta.

Considerando el esquema de análisis propuesto para el cálculo de las tensiones y esfuerzos en la llanta, producto del ajuste por interferencia, la misma está sometida al efecto de tensiones de tracción, de flexión y tangenciales.

La tensión normal resultante será:

$$\sigma_{res} = \sigma_{trac} + \sigma_{flex} \quad (1.24)$$

$$\sigma_{res} = \frac{N}{A_o} + \frac{M \times y_{max}}{I_x} \leq [\sigma_{adm}] = \frac{\sigma_f}{n} \quad (1.25)$$

La tangencial:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{Q}{A_o} \leq [\tau_{adm}] = \frac{\tau_f}{n} \quad (1.26)$$

$$\tau_f = 0.6 \times \sigma_f$$

Los valores de  $N$ ,  $M$  y  $Q$  se determinan por las expresiones siguientes:

$$N = \frac{P}{2 \times \text{sen} \alpha} \times \cos \alpha \quad (1.27)$$

$$Q = \frac{P}{2 \times \text{sen} \alpha} \times \text{sen} \varphi \quad (1.28)$$

$$M = \frac{P \times R}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\text{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (1.29)$$

Dónde:

$R$ - Radio del centroide de la llanta.

## Capítulo I

Es necesario conocer para qué ángulo  $\varphi$  el valor de las tensiones normales es máximo.

$$\sigma_{res} = \frac{P}{2 \times \tan \alpha} + \frac{P \times R}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (1.30)$$

Derivando respecto a  $\varphi$  e igualando a cero se obtienen los extremos de la función.

$$\frac{\delta \sigma_{res}}{\delta \varphi} = -\frac{P \times R}{2} \times \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} = 0 \quad (1.31)$$

Se obtiene que para  $\varphi = 0$  la primera derivada es cero por tanto  $\varphi = 0$  es un extremo de la función, para determinar si es máximo o mínimo se calcula la segunda derivada.

$$\frac{\delta^2 \sigma_{res}}{\delta^2 \varphi} = -\frac{P \times R}{2} \times \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (1.32)$$

La segunda derivada es negativa, por tanto es un máximo y las tensiones normales resultantes son máximas para  $\varphi = 0$ .

Para el cálculo de las tensiones tangenciales también es necesario conocer para qué valor de  $\varphi$  son máximas.

Aplicando el mismo procedimiento anterior.

La primera derivada es:

$$\frac{\delta \tau}{\delta \varphi} = -\frac{P}{2} \times \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} = 0 \quad (1.33)$$

Se obtiene que para  $\varphi = \pi / 2$  la primera derivada es 0 por tanto en  $\varphi = \pi / 2$  la función tiene un extremo; calculando la segunda derivada.

$$\frac{\delta^2 \tau}{\delta^2 \varphi} = -\frac{P}{2} \times \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (1.34)$$

Se obtiene que es negativa por tanto  $\varphi = \pi / 2$  es un máximo y las tensiones tangenciales serán máximas en  $\varphi = \pi / 2$ .

Como  $\varphi$  varía entre  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  las tensiones tangenciales serán máximas para  $\varphi = \alpha$ .

## **Conclusiones del Capítulo I.**

1. En la literatura consultada sólo se describen dos métodos de solución de sistemas hiperestáticos de elementos compuestos por núcleo, rayos y llanta, estos métodos son:
  - El Método del Trabajo Mínimo o Segundo Teorema de Castigliano.
  - El Método de Superposición de soluciones obtenidas para carga por separado de manuales o de diferentes esquemas de análisis.
2. En el capítulo se describen ambos métodos con ejemplos concretos, donde se aprecian las ventajas y desventajas de cada uno.
3. Indudablemente que el Método del trabajo Mínimo es el Método ideal para la solución de este tipo de Sistema Hiperestático.
4. En el presente trabajo se aspira a aplicar el Teorema del Trabajo Mínimo y validar los resultados obtenidos por un tercer posible método: El Método de los Elementos Finitos.

# *Capítulo II*

## Capítulo II. Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo al cálculo de las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos rectos.

### 2.1 Introducción al capítulo II

Emplear el Teorema del Trabajo Mínimo, permitirá desarrollar una metodología de cálculo en la que se pueda determinar las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos rectos.

### 2.2 Demostración de las ecuaciones de cálculo de un volante con rayos rectos.

Se considerará en este epígrafe un volante compuesto por la llanta de masa por unidad de longitud  $q$  (kg/m) y dimensiones en la sección transversal caracterizadas por  $A_0$ ,  $I_0$  y  $n$  rayos de masa por unidad de longitud  $q_1$  (kg/m) y área de la sección transversal  $A_1$  que gira a una velocidad angular constante  $\omega$  tal como se muestra en la Fig. 2.1 a).

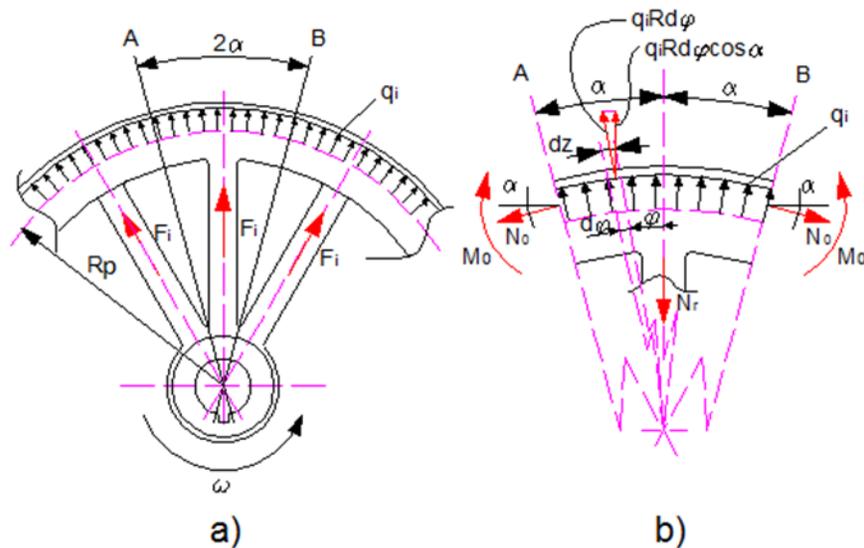


Fig. 2.1 Volante con rayos rectos.

La carga que soporta el volante son las fuerzas de inercia uniformemente distribuida provocada por la masa distribuida de la llanta y la aceleración normal provocada por el giro del volante con  $\omega = \text{cte.}$ ,  $q_i$  y las fuerzas de inercia que se originan en los rayos. Por simetría en la secciones A y B no existen tensiones tangenciales, o sea, fuerzas internas de cortante. Solo existen fuerzas normales  $N_0$  y los momentos flectores  $M_0$ .

Analicemos el tramo de llanta limitado por las secciones A y B que abarcan un ángulo

$$2\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n}, \text{ donde } n \text{ es el número de rayos.}$$

### 2.2.1 Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo.

Sobre el tramo de llanta actúa la fuerza de inercia  $q_i$ ,  $N_0$ ,  $M_0$  y la fuerza que ejerce el rayo sobre la llanta  $N_r$  (Fig. 2.1 b). La fuerza de inercia  $q_i$  es igual a:

$$q_i = q \cdot a_n = q \cdot \omega^2 \cdot R_p \quad \text{Ec. (2.1)}$$

La sumatoria de fuerzas en la dirección del eje y-y es igual a cero.

$$\sum F_y = 2 \cdot N_0 \cdot \text{sen} \alpha + N_r - 2 \cdot \int_0^\alpha q \cdot \omega^2 \cdot R_p \cdot R_p \cdot d\varphi \cdot \cos \varphi = 0 \quad \text{Ec. (2.2)}$$

$$2 \cdot N_0 \cdot \text{sen} \alpha + N_r - 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen} \varphi \Big|_0^\alpha = 0$$

$$N_0 = q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \frac{N_r}{2 \cdot \text{sen} \alpha} \quad \text{Ec. (2.3)}$$

Para hallar las ecuaciones complementarias necesarias para determinar las fuerzas  $N_0$ ,  $M_0$  y  $N_r$  se aplica el Teorema del Trabajo Mínimo. O sea:

$$\frac{\partial U}{\partial N_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial M_0} = 0 \quad \text{Ec. (2.4)}$$

Ya que los desplazamientos en estas direcciones son cero.

Para ello se necesita hallar la energía potencial de deformación del sistema, y para ello se precisa determinar las fuerzas internas que surgen en una sección cualquiera de la llanta y del rayo en función de  $q$ ,  $N_0$ ,  $M_0$ ,  $N_r$  y  $\varphi$ .

En la Fig. 2.2 se muestran las fuerzas internas  $N$  y  $M_f$  que actúan en una sección  $s$  cualquiera de la llanta. Aplicaremos las ecuaciones de equilibrio para el tramo separado  $\sum F_n = 0$  y  $\sum M_0 = 0$  para hallar las expresiones de  $N$  y  $M_f$ .

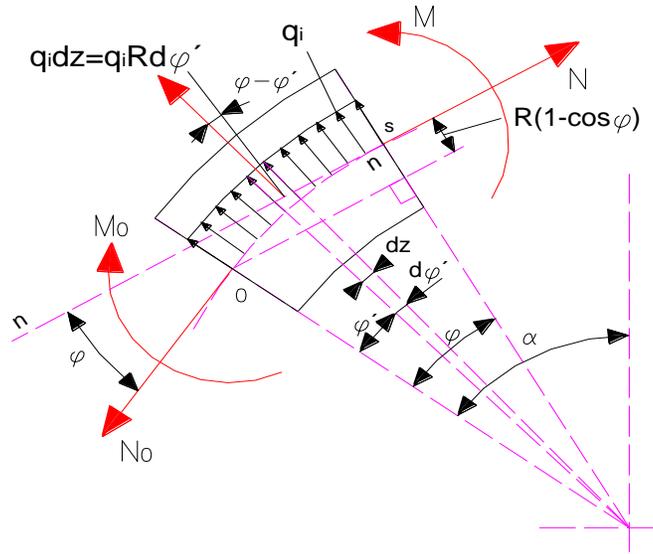


Fig. 2.2 Sección de un tramo de la llanta.

$$\sum F_n = N - N_0 \cdot \cos \varphi - q \cdot \omega^2 \cdot R_p \cdot \int_0^\varphi R_p \cdot d\varphi' \cdot \text{sen}(\varphi - \varphi') = 0 \quad \text{Ec. (2.5)}$$

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \int_0^\varphi \text{sen}(\varphi - \varphi') \cdot d\varphi'$$

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \int_0^\varphi (\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi' - \cos \varphi \cdot \text{sen} \varphi') \cdot d\varphi'$$

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos \varphi)$$

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{Ec. (2.6)}$$

$$\sum M_0 = M - M_0 - N \cdot R_p \cdot (1 - \cos \varphi) + q \cdot \omega^2 \cdot R_p \cdot R_p \cdot \varphi \cdot \frac{R_p \cdot \varphi}{2} = 0 \quad \text{Ec. (2.7)}$$

$$M = M_0 + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) - q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (2.8)}$$

La fuerza interna  $N_1$  en una sección cualquiera del rayo se obtiene del equilibrio del rayo (Fig. 2.3).

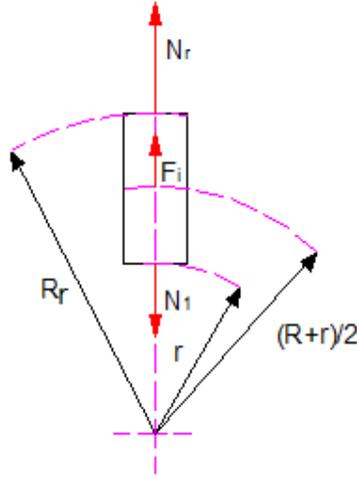


Fig. 2.3 Esquema de análisis del rayo.

$$\sum F_y = N_r - N_1 + \int_r^R q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R_r + r}{2} \right) \cdot dr = 0 \quad \text{Ec. (2.9)}$$

$$N_1 = N_r + \frac{q_1 \cdot \omega^2 \cdot (R_r + r) \cdot (R_r - r)}{2}$$

$$N_1 = N_r + \frac{q_1 \cdot \omega^2 \cdot (R_r^2 - r^2)}{2} \quad \text{Ec. (2.10)}$$

La energía potencial de deformación del tramo analizado, se calcula por:

$$U = 2 \cdot U_0 + U_1 \quad \text{Ec. (2.11)}$$

$$U_0 = \int_0^\alpha \frac{M^2 \cdot R_p \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot I_0} + \int_0^\alpha \frac{N^2 \cdot R_p \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot A_0} \quad \text{Ec. (2.12)}$$

$$U_1 = \int_0^R \frac{N_1^2 \cdot dr}{2 \cdot E \cdot A_1} \quad \text{Ec. (2.13)}$$

Sustituyendo (2.6) y (2.8) en (2.12), la ecuación (2.10) en (2.13) y las expresiones obtenidas en (2.11), se obtiene que:

$$U = 2 \cdot \int_0^{\alpha} \frac{\left( M_0 + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot I_0} \cdot R_p \cdot d\varphi +$$

$$2 \cdot \int_0^{\alpha} \frac{\left( N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot R_p \cdot d\varphi + \int_0^R \frac{\left( N_r + \frac{q_1 \cdot \omega^2}{2} \cdot (R_r^2 - r^2) \right)^2}{2 \cdot E \cdot A_1} \cdot dr$$

Ec. (2.14)

Hallando las derivadas:

$$\frac{\partial U}{\partial N_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial M_0} = 0$$

Y simultaneando las ecuaciones obtenidas con la ecuación (2.3) se obtiene finalmente que:

$$M_0 = -\frac{N_r \cdot R_p}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Ec. (2.15)

El signo negativo (-) indica que el momento  $M_0$  es contrario.

$$N_r = \frac{2}{3} \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_r^2 \cdot \frac{1}{\frac{A_0}{A_1} \cdot f_{1(\alpha)} + \frac{A_0 \cdot R_r^2}{I_0} \cdot f_{2(\alpha)}}$$

Ec. (2.16)

$$N_0 = q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 - \frac{N_r}{2 \cdot \text{sen} \alpha}$$

Ec. (2.17)

Dónde:

$$f_{1(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

Ec. (2.18)

$$f_{2(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}$$

Ec. (2.19)

## Capítulo II

Los valores de las funciones  $f_{1(\alpha)}$  y  $f_{2(\alpha)}$  para diferentes números de rayos se dan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Valores de  $f_{1(\alpha)}$  y  $f_{2(\alpha)}$

n	3	4	5	6	7	8
$\alpha^\circ$	120°	90°	72°	60°	52°	45°
$2\alpha$	1,047	0,785	0,628	0,524	0,449	0,393
$f_{1(\alpha)}$	0,493	0,643	0,799	0,957	1,115	1,274
$f_{2(\alpha)}$	0,01594	0,00608	0,00298	0,00168	0,00104	0,00069

$$\alpha^\circ = \frac{360}{n} \text{ Ángulo entre rayos}$$

La tensión de tracción en una sección cualquiera  $\varphi$  de la llanta (Fig. 2.2) se halla por la expresión de la tensión en barras curvas (Ecuación de Winkler - Bach).

$$\sigma = \frac{N}{A_0} + \frac{M}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{\max}}{z \cdot (R_p + y_{\max})} \right] \quad \text{Ec. (2.20)}$$

Donde N se calcula por la expresión (2.6). O sea:

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{Ec. (2.21)}$$

Para M, teniendo en cuenta que en el cálculo de barras curvas el momento flector es positivo cuando cierra la curvatura, se calcula por la expresión (2.8) invirtiendo el sentido de los momentos, o sea:

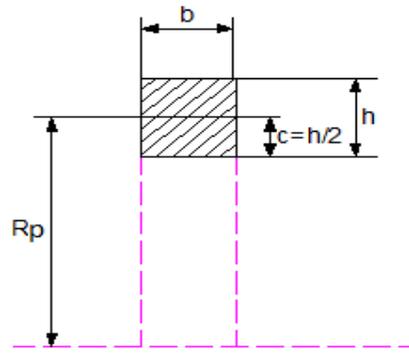
$$M = M_0 + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (2.22)}$$

Y  $M_0$ ,  $N_r$  y N se hallan por las expresiones (2.15), (2.16) y (2.17), (tomando  $M_0$  positivo).

O sea:

$$M_0 = \frac{N_r \cdot R_p}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{Ec. (2.23)}$$

Para un volante de sección rectangular (Fig. 2.4)



**Fig. 2.4 Sección transversal de la llanta del volante.**

Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta  $Y_{\text{máx}}$  (m).

$$y_{\text{max}} = c = \frac{h}{2} \quad \text{Ec. (2.24)}$$

Área de la sección transversal de la llanta o el rayo.

$$A = b \cdot h \quad \text{Ec. (2.25)}$$

Parámetro geométrico de la sección de la llanta.

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{c}{R_p} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{c}{R_p} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{c}{R_p} \right)^6 + \dots \quad \text{Ec. (2.26)}$$

La tensión en una sección cualquiera del rayo.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \quad \text{Ec. (2.27)}$$

Fuerza interna en cualquier parte del rayo.

$$N_1 = N_r + \frac{q_1 \cdot \omega^2}{2} \cdot (R_r^2 - r^2) \quad \text{Ec. (2.28)}$$

Fuerza de inercia en cualquier parte de la llanta o el rayo.

$$q = \frac{A \cdot l \cdot \rho_{ac}}{l} \quad \text{Ec. (2.29)}$$

Velocidad angular

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} \quad \text{Ec. (2.30)}$$

Momento de inercia centroidal en la sección de la llanta

$$I_0 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \quad \text{Ec. (2.31)}$$

## 2.3 Cálculos realizados para un volante de rayos rectos.

### 2.3.1 Área de la sección transversal de la llanta $A_0$ ( $m^2$ ).

$$A_0 = b \cdot h = 0,615 \cdot 0,100 = 0,0615 \text{ m}^2 \quad \text{Ec. (2. 25)}$$

b- Ancho de la llanta (m).

h- Espesor de la llanta (m).

### 2.3.2 Velocidad angular $w$ (rad/s).

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} \quad \text{Ec. (2. 30)}$$

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 243}{60} = 25,4 \text{ rad/s}$$

$n_r = 243$  rpm.

- Durante el giro de la polea a una velocidad angular  $w$  se produce una fuerza de inercia  $q_i$  distribuida uniformemente a lo largo de todo el perímetro de la llanta.

### 2.3.3 Fuerza de inercia en cualquier parte de la llanta, $q$ (kN/m).

$$q = \rho_{ac} \cdot A_0 = 7800 \cdot 0,0615 = 479,7 \text{ kg/m} = 0,4797 \text{ kN/m} \quad \text{Ec. (2. 29)}$$

$\rho_c$ - densidad del acero  $\text{kg/m}^3$ .

### 2.3.4 Momento de inercia centroidal en la sección de la llanta $I_0$ ( $m^4$ ).

$$I_0 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 0,615 \cdot 0,100^3 = 0,00005125 \text{ m}^4 \quad \text{Ec. (2. 31)}$$

b- Ancho de la llanta (m).

h- Espesor de la llanta (m).

### 2.3.5 Cálculo de las funciones $f_{1(\alpha)}$ y $f_{2(\alpha)}$ . Ec. (2. 18) y Ec. (2. 19).

$$f_{1(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 0,523} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2 \cdot 0,523)}{4} + \frac{0,523}{2} \right) = 0,9576$$

$$f_{2(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} = 0,9576 - \frac{1}{2 \cdot 0,523} = 0,0016$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n} = 0,523 \text{ rad}$$

**2.3.6 Área de la sección transversal del rayo  $A_1$  ( $m^2$ ), volante de sección rectangular.**

$$A_1 = b \cdot l = 0,615 \cdot 0,100 = 0,0615 \text{ m}^2 \quad \text{Ec. (2. 25)}$$

b- Ancho del rayo (m).

l- Espesor del rayo (m).

**2.3.7 Fuerza interna del rayo,  $N_r$  (kN) .**

$$N_r = \frac{2}{3} \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_r^2 \cdot \frac{1}{\frac{A_0}{A_1} \cdot f_{1(\alpha)} + \frac{A_0 \cdot R_r^2}{I_0} \cdot f_{2(\alpha)}} \quad \text{Ec. (2.16)}$$

$$N_r = \frac{2}{3} \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,705^2 \cdot \frac{1}{\frac{0,0615}{0,0615} \cdot 0,957 + \frac{0,0615 \cdot 0,705^2}{0,00005125} \cdot 0,00168} = 52,33 \text{ kN}$$

**2.3.8 Momento flector en la sección transversal de la llanta,  $M_0$  (kN-m).**

$$M_0 = -\frac{N_r \cdot R_p}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{Ec. (2.15)}$$

$$M_0 = -\frac{52,33 \cdot 0,755}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} 30^\circ} - \frac{1}{0,523} \right) = -1,75 \text{ kN} - m$$

**2.3.9 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta,  $N_0$  (kN).**

$$N_0 = q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 - \frac{N_r}{2 \cdot \text{sen} \alpha} \quad \text{Ec. (2.17)}$$

$$N_0 = q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 - \frac{N_r}{2 \cdot \text{sen} \alpha} = 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^2 - \frac{52,33}{2 \cdot \text{sen} 30^\circ} = 124,9 \text{ kN}$$

**2.3.10 Fuerza interna N y Momento flector M que actúan en una sección cualquiera de la llanta N (kN) y M (kN-m).**

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Ec. (2.21)}$$

$$N = 124,9 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = 131,10 \text{ kN}$$

$$M = M_0 + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (2.22)}$$

$$M = -1,75 + 2 \cdot 131,10 \cdot 0,755 \cdot \text{sen}^2(30^\circ) + 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^3 \cdot \frac{0,523^2}{2} = 3,22 \text{ kN-m}$$

- El cálculo de la fuerza N y Momento flector M que actúan en una sección cualquiera de la llanta se calcula para un ángulo de inclinación de 30° donde se encuentra la mayor tensión y momento flector.
- A continuación se muestran los valores que puede tomar la fuerza N y Momento flector M respecto a la variación del ángulo  $\varphi$  que actúa en una sección cualquiera de la llanta.

Tabla 2.2. Valores de N y M respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	N (kN)	M (kN-m)
0	124,09	-1,75
5	124,28	-1,60
10	124,88	-1,16
15	125,87	-0,43
20	127,24	0,56
25	128,99	1,78
30	131,10	3,22

**2.3.11 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta  $Y_{\text{máx}}$  (m).**

$$y_{\text{máx}} = c = \frac{h}{2} = \frac{100}{2} = 50\text{mm} = 0,050\text{m} \quad \text{Ec. (2.24)}$$

**2.3.12 Parámetro geométrico z (m) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta rectangular, con radio primitivo  $R_p$ .**

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{c}{R_p} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{c}{R_p} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{c}{R_p} \right)^6 + \dots \quad \text{Ec. (2. 26)}$$

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^6 = 0,00147\text{m}$$

### 2.3.13 Cálculo de la tensión resultante en la llanta $\sigma$ (MPa).

$$\sigma = \frac{N}{A_0} + \frac{M}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{\max}}{z \cdot (R_p + y_{\max})} \right] \quad \text{Ec. (2.20)}$$

- La tensión resultante en la llanta se calculará tomando los mayores valores de la acción de la fuerza normal N y el momento flector M.

O sea:

$$\sigma = \frac{131,10}{0,0615} + \frac{3,22}{0,755 \cdot 0,0615} \cdot \left[ 1 + \frac{0,05}{0,00147 \cdot (0,755 + 0,05)} \right] = 5137,3 \text{ kN-m} = 5,14 \text{ Mpa}$$

- A continuación se muestran los valores que puede tomar la tensión  $\sigma$  respecto a una variación del ángulo  $\varphi$  en la llanta, es una sección cualquiera m-n, es una barra curva sometida a la acción de una fuerza normal N y un momento flector M que también varían respecto al ángulo  $\varphi$ .

Tabla 2.3. Valores de  $\sigma$  respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	N (kN)	M (kN-m)	$\sigma$ (MPa)
0	124,09	-1,75	0,38
5	124,28	-1,60	0,52
10	124,88	-1,16	0,95
15	125,87	-0,43	1,64
20	127,24	0,56	2,59
25	128,99	1,78	3,76
30	131,10	3,22	5,14

### 2.3.14 Cálculos realizados para determinar la tensión resultante en el rayo.

### 2.3.15 La tensión en una sección cualquiera del rayo $\sigma_1$ (MPa).

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \quad \text{Ec. (2. 27)}$$

Dónde:

$$N_1 = N_r + \frac{q_1 \cdot \omega^2}{2} \cdot (R_r^2 - r^2) \quad \text{Ec. (2. 28)}$$

$$N_1 = 52,33 + \frac{0,4797 \cdot 25,4^2}{2} \cdot (0,705^2 - 0,213^2) = 122,22 \text{ kN}$$

Y:

$$q_1 = \frac{A_1 \cdot l \cdot \rho_{ac}}{l} \quad \text{Ec. (2. 29)}$$

$$q_1 = A_1 \cdot \rho_{ac}$$

$$q_1 = 0,0615 \cdot 7800 = 479,7 \text{ kg/m} = 0,4797 \text{ kN/m}$$

Entonces:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{122,22}{0,0615} = 1987,3 \text{ kN-m} = 1,99 \text{ MPa}$$

- La expresión para el cálculo de  $A_1$  depende de la forma geométrica de la sección del rayo.

## 2.4 Resultados numéricos de la aplicación.

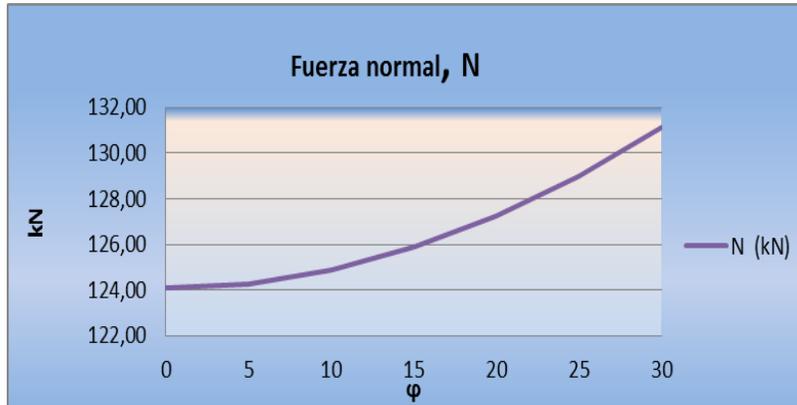
Los mayores resultados obtenidos para la llanta son:

Fuerza interna en la llanta **N (kN)**: 131,10 kN.

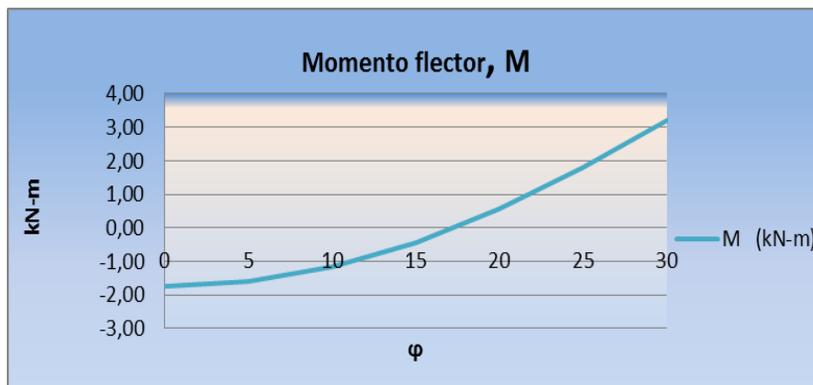
Momento flector **M (kN-m)**: 3,22 kN-m.

Tensión en el rayo  **$\sigma_1$  (MPa)**: 5,14 MPa.

2.4.1 Comportamiento de la fuerza N, el momento flector M y la tensión  $\sigma$  en la llanta.



Gráfica 1. Comportamiento de la fuerza N según la variación del ángulo  $\varphi$ .



Gráfica 2. Comportamiento del momento flector M según la variación del ángulo  $\varphi$ .



Gráfica 3. Comportamiento de la tensión  $\sigma$  en la llanta, según la variación del ángulo  $\varphi$ , la fuerza N y el momento flector M.

## **2.5 Modelación del Estado Tensional del volante de rayos rectos por el Método de Elementos Finitos.**

Para la presentación de los resultados de Modelación por Elementos Finitos, se utilizó el Software INVENTOR. El valor de la tensión equivalente se calculó por la 4ta Hipótesis de Huber-Von Mises-Hencky y de esta forma se obtuvo el valor de la tensión real en cualquier sección de la llanta y el rayo. En la Figura 2.9 se muestra el cuadro de tensiones y de forma exagerada las deformaciones que sufre el volante durante el giro.



**Fig.2.3 Esquema del volante de rayos rectos.**

Se presenta primeramente un modelo del volante en tres dimensiones realizadas en el software inventor 2012. Para este estudio se emplea un material ofrecido en la biblioteca del mismo software. Sus propiedades se muestran a continuación:

## Capítulo II

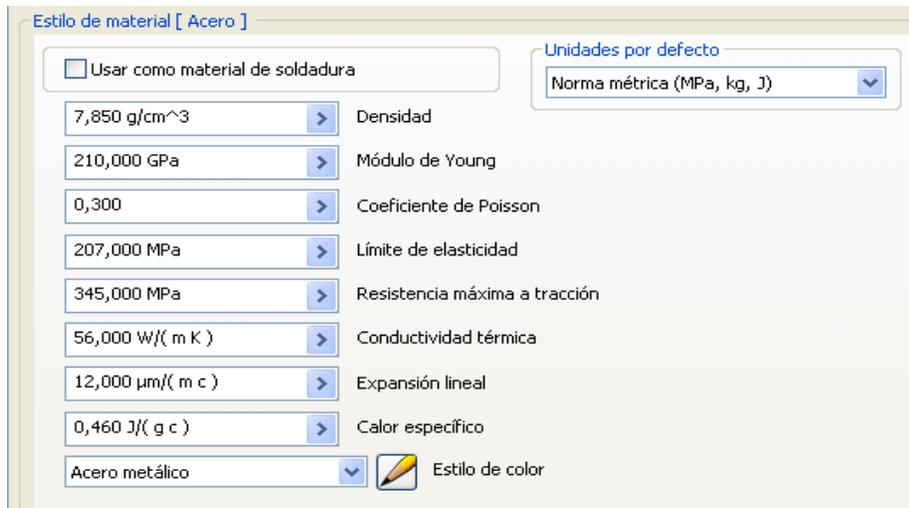


Fig.2.4 Propiedades del material utilizado en el análisis.

Otros de los aspectos que se toman en cuenta es la ubicación de las restricciones, que para este caso se ubican en el centro del volante donde se acoplaría con el eje, al igual que la fuerza angular y la dirección a la que van a trabajar dichos elementos. A continuación se muestra una figura donde se puede apreciar el valor introducido para este caso.

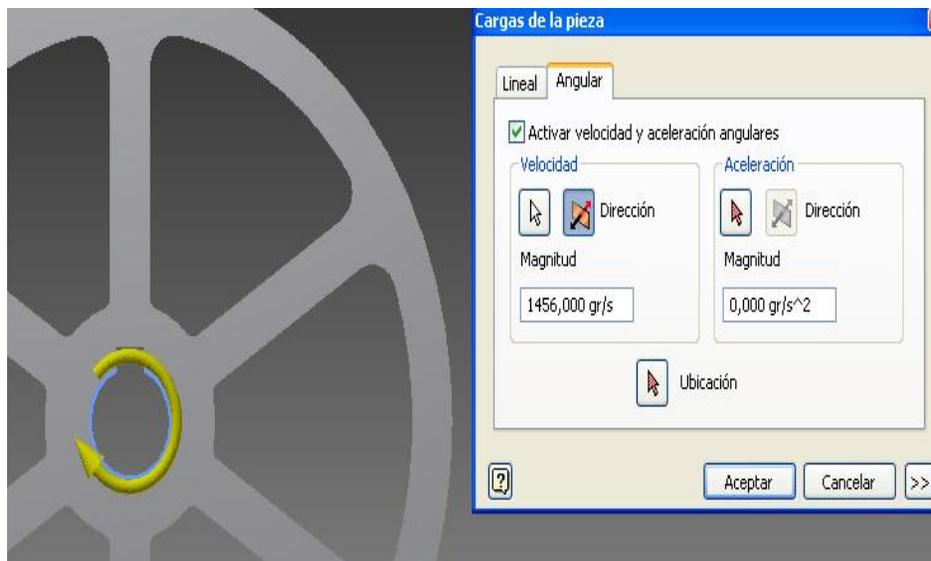


Fig.2.5 Valor y ubicación de la velocidad angular introducida.

## Capítulo II

Para el análisis del Modelo Físico, se utiliza un análisis Lineal - Elástico para materiales Isotrópicos. En este estudio también se introduce el tipo de mallado con elementos curvos debido a las superficies redondeadas presentes en el modelo del cuerpo en 3D. El Mallado Sólido que se muestra no posee gran complejidad, por lo que solo se utiliza un mapeado en las superficies donde existen transiciones en la geometría. Para esto se emplean elementos 3D tetraédricos.

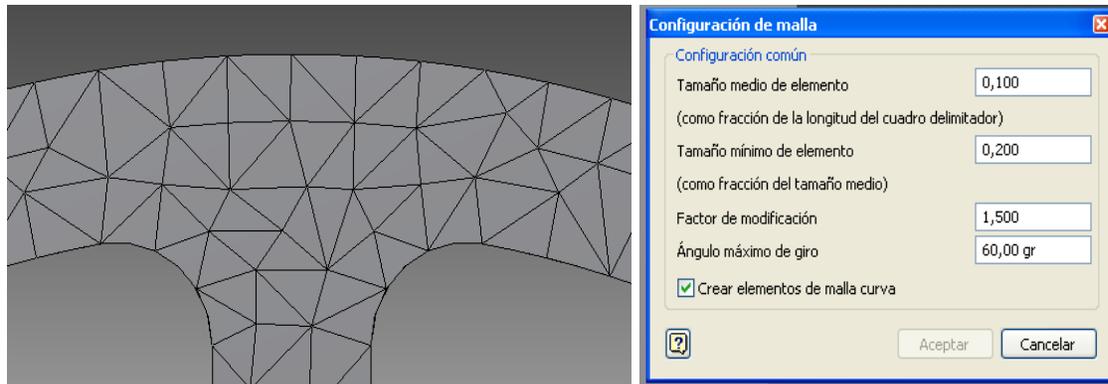


Fig. 2.6 Representación del mallado de la geometría.

Para representar los resultados de Modelación por el método de los Elementos Finitos se muestra en la figura 2.7 el valor de la tensión equivalente brindadas por el software que se refiere a la 4ta Hipótesis de Huber-Von Mises-Hencky. De esta forma se obtiene un valor de tensión real en la zona por la teoría más exacta para el cálculo de tensiones; donde se toman en cuenta las concentraciones de tensiones reales.

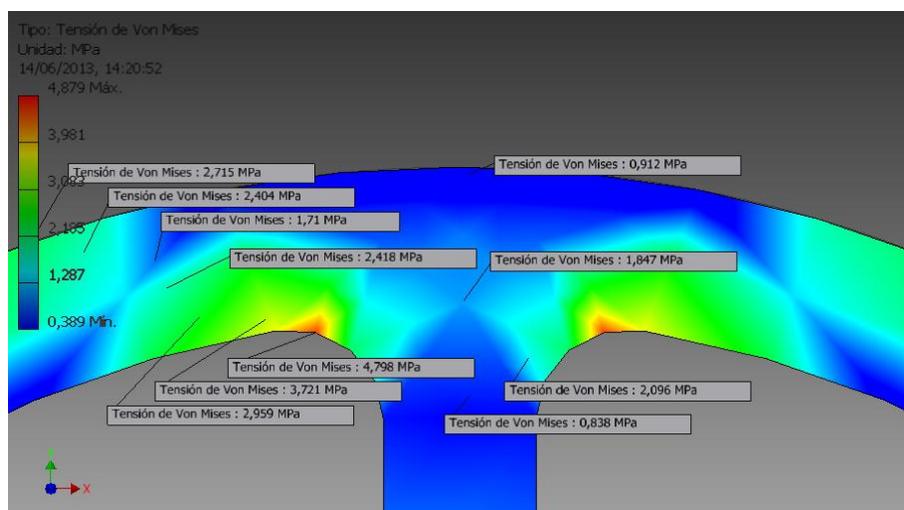


Fig. 2.7 Tensiones por la 4ta Teoría de Resistencia de Huber-Von Mises-Hencky en la llanta.

Como se puede apreciar la tensión resultante en la llanta varía desde 0,838 a 4,798 MPa, muy cercanas a las obtenidas en los cálculos analíticos que oscilan 0,38 a 5,14 MPa.

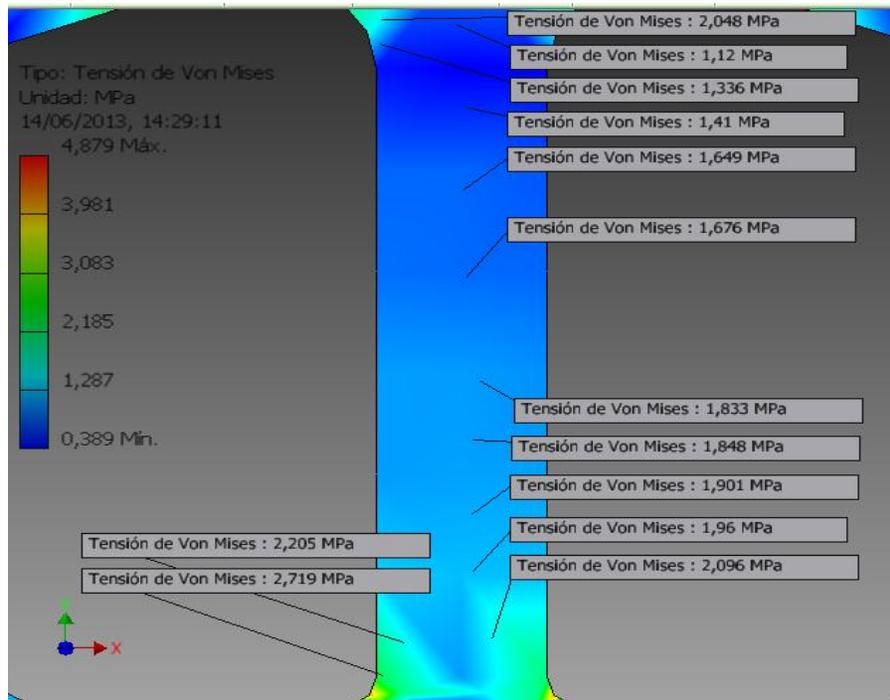
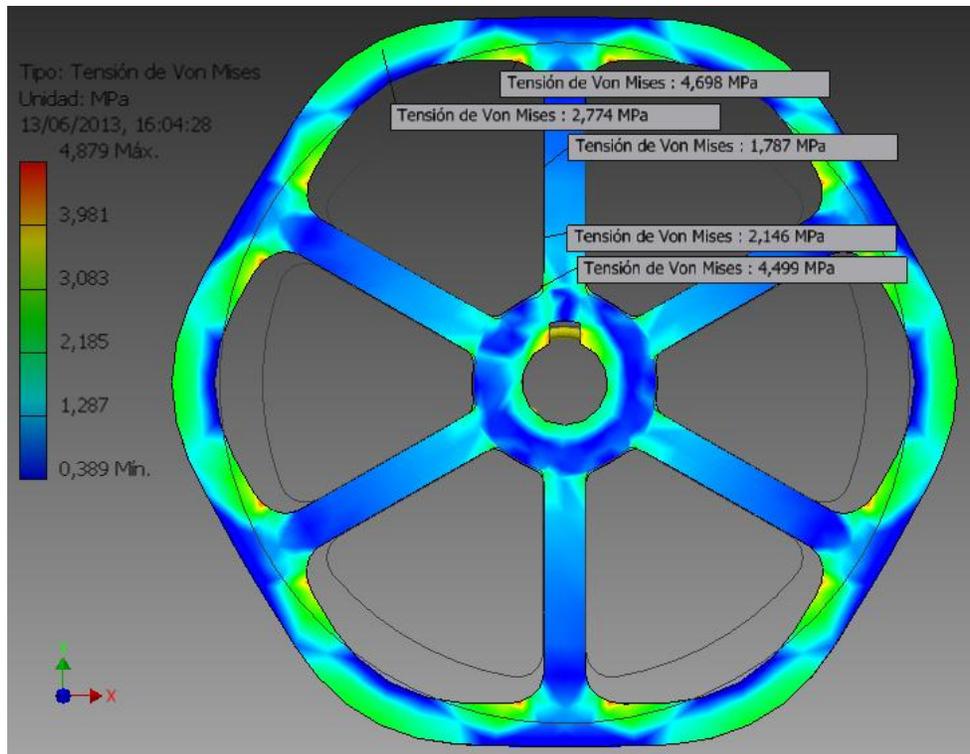


Fig. 2.8 Tensiones del rayo.

Para el caso del rayo los resultados que ofrece el software son los que se muestran en la figura. 2.8. Como se puede apreciar los valores se encuentran en el orden de 1,12 a 2,719 MPa, también cercanos a los obtenidos por el método de cálculo analítico donde se obtuvo una tensión de 1,99 MPa .

A continuación se muestra una vista completa del modelo donde se puede apreciar las posibles deformaciones de forma exagerada.



**Fig. 2.9 Distribución de las tensiones en una llanta con rayos rectos.**

Según el Modelo Matemático elaborado la tensión a un ángulo de  $25^\circ$  da  $\sigma = 3.76$  MPa y para un ángulo de  $30^\circ$  da  $\sigma = 5,14$  MPa. El Método de los Elementos Finitos da una tensión  $\sigma$  en el punto más crítico donde existe la mayor concentración de tensiones de  $\sigma = 4,532$  MPa a un ángulo de aproximadamente  $25^\circ$ , ya que los  $30^\circ$  son en el centro del rayo. La tensión por el Método de los Elementos Finitos da un poco mayor, debido a la concentración de tensiones que si la contempla este Método.

En el caso del rayo la tensión obtenida por el Modelo elaborado da  $\sigma_1 = 1,99$  MPa, la tensión en el centro de la sección del rayo da  $\sigma_1 = 1,945$  MPa, pero en los laterales da  $\sigma_1 = 3.945$  MPa.

## **Conclusiones del Capítulo II.**

1. El Teorema del Trabajo Mínimo puede ser aplicado para la solución de Sistemas hiperestáticos Complejos del tipo llanta - rayos – cubo y se obtienen ecuaciones no muy complejas que permiten obtener las fuerzas internas y tensiones en cualquier sección de la llanta y el rayo.
2. Se calcularon las fuerzas internas y tensiones en diferentes secciones de la llanta y en los rayos, para un volante con rayos rectos de determinadas dimensiones, de acero y con determinada velocidad de giro obteniéndose resultados muy lógicos.
3. Ese mismo volante de ese mismo material, con las mismas dimensiones y la misma velocidad de giro se modeló por el Método de los Elementos Finitos con el Software Inventor, obteniéndose una concordancia muy satisfactoria en comparación con el Modelo Analítico Elaborado.

# *Capítulo III*

## Capítulo III. Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo al cálculo de las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos curvos.

### 3.1 Introducción al capítulo III

Emplear el Teorema del Trabajo Mínimo, permitirá desarrollar una metodología de cálculo en la que se pueda determinar las fuerzas internas y tensiones en un volante con rayos curvos.

### 3.2 Demostración de las ecuaciones de cálculo de un volante con rayos curvos.

Se considerará en este epígrafe un volante compuesto por la llanta de masa por unidad de longitud  $q$  (kg/m) y dimensiones en la sección transversal caracterizadas por  $A_0$ ,  $I_0$  y  $n$  rayos de masa por unidad de longitud  $q_1$  (kg/m) y área de la sección transversal  $A_1$  que gira a una velocidad angular constante  $\omega$  tal como se muestra en la Fig. 3.1 a).

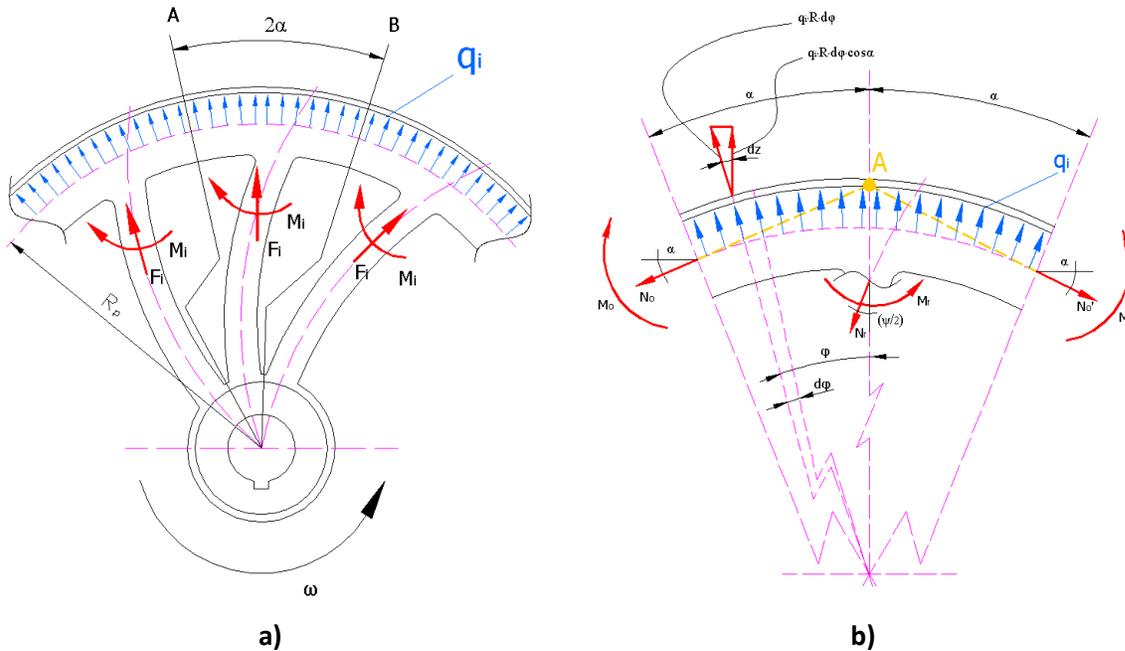


Fig. 3.1 Esquema de análisis del volante de rayos curvos.

La carga que soporta el volante son las fuerzas de inercia uniformemente distribuida provocada por la masa distribuida de la llanta y la aceleración normal provocada por el giro del volante con  $\omega = \text{cte.}$ ,  $q_i$  y las fuerzas de inercia que se originan en los rayos.

### Capítulo III

Por simetría en la secciones A y B no existen tensiones tangenciales, o sea, fuerzas internas de cortante. Solo existen fuerzas normales  $N_0$  y los momentos flectores  $M_0$ . Analicemos el tramo de llanta limitado por las secciones A y B que abarcan un ángulo

$$2\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n}, \text{ donde } n \text{ es el número de rayos.}$$

#### 3.3 Aplicación del Teorema del Trabajo Mínimo.

Sobre el tramo de llanta actúa la fuerza de inercia  $q_i$ ,  $N_0$ ,  $M_0$  y la fuerza que ejerce el rayo sobre la llanta  $N_r$  (Fig. 3.1 b). La fuerza de inercia  $q_i$  es igual a:

$$q_i = q \cdot a_n = q \cdot \omega^2 \cdot R_p$$

La sumatoria de fuerzas en la dirección del eje x-x es igual a cero.

$$\sum F_x = N_0 \cdot \cos \alpha + N_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) - N_0' \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \int_0^\alpha q \cdot \omega^2 \cdot R \cdot R \cdot d\varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$N_0 \cdot \cos \alpha + N_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) - N_0' \cdot \cos \alpha - 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = 0$$

$$N_0' = \frac{-2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + N_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + N_0 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{Ec. (3.1)}$$

La sumatoria de fuerzas en la dirección del eje y-y es igual a cero.

$$\sum F_y = N_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha - N_0' \cdot \operatorname{sen} \alpha + N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - 2 \cdot \int_0^\alpha q \cdot \omega^2 \cdot R \cdot R \cdot d\varphi \cdot \cos \varphi = 0$$

$$(N_0 - N_0') \cdot \operatorname{sen} \alpha + N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$N_0 = \frac{2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha - N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + N_0' \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{Ec. (3.2)}$$

La sumatoria de momento en el punto A es igual a cero.

$$\sum M_A = M_0 - M_r - M_0' + N_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cdot (R_e - R_i) = 0$$

$$M_0 = M_r + M_0' - N_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cdot (R_e - R_i) \quad \text{Ec. 3.3)}$$

### Capítulo III

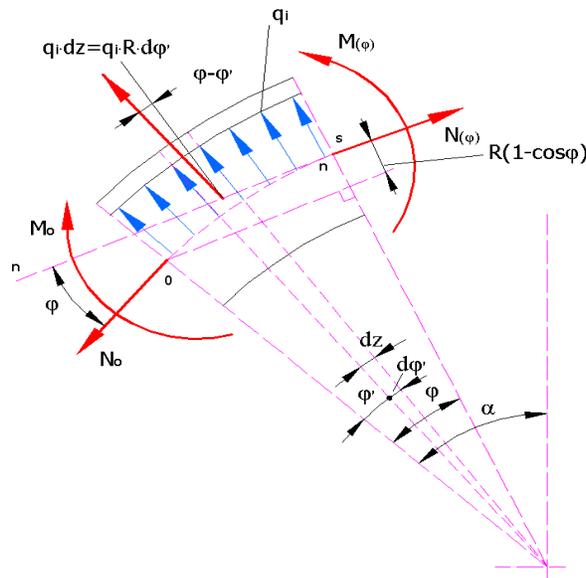
Para hallar las ecuaciones complementarias necesarias para determinar las fuerzas  $N_o$ ,  $M_o$  y  $N_r$  se aplica el Teorema del Trabajo Mínimo. O sea:

$$\frac{\partial U}{\partial N_o} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial M_o} = 0 \quad \text{Ec. (3.4)}$$

Ya que los desplazamientos en estas direcciones son cero.

Para ello se necesita hallar la energía potencial de deformación del sistema, y para ello se precisa determinar las fuerzas internas que surgen en una sección cualquiera de la llanta y del rayo en función de  $q$ ,  $N_o$ ,  $M_o$ ,  $N_o'$ ,  $M_o'$ ,  $N_r$ ,  $M_r$  y  $\varphi$ .

En la Fig. 3.5 se muestran las fuerzas internas  $N$  y  $M_f$  que actúan en una sección  $s$  cualquiera de la llanta. Aplicaremos las ecuaciones de equilibrio para el tramo separado  $\sum F_n = 0$  y  $\sum M_o = 0$  para hallar las expresiones de  $N$  y  $M_f$ .



**Fig. 3.2 Tramo del lado izquierdo de la llanta, para hallar las fuerzas internas en cualquier parte de esta sección.**

$$\sum F_n = N - N_o \cdot \cos \varphi - q \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \int_0^\varphi R \cdot d\varphi' \cdot \text{sen}(\varphi - \varphi') = 0$$

$$N = N_o \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \int_0^\varphi \text{sen}(\varphi - \varphi') \cdot d\varphi'$$

$$N = N_o \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \int_0^\varphi (\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi' - \cos \varphi \cdot \text{sen} \varphi') \cdot d\varphi'$$

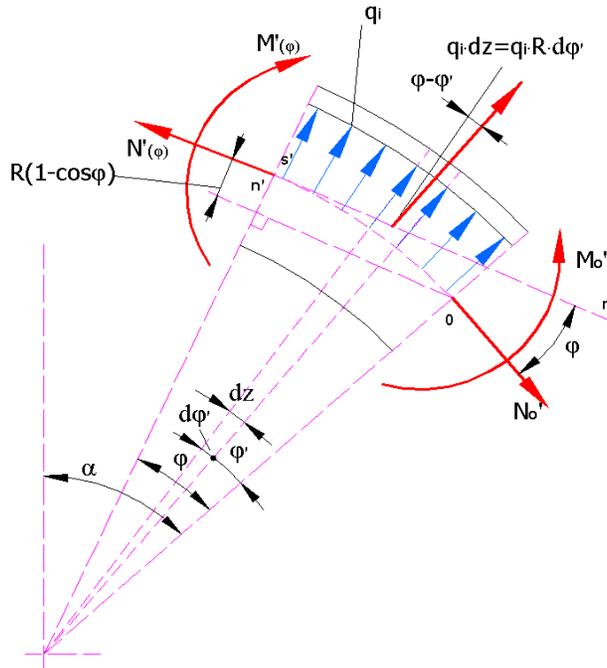
$$N = N_o \cdot \cos \varphi + q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos \varphi)$$

### Capítulo III

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Ec. ( 3.5)}$$

$$\sum M_0 = M - M_0 - N \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + q \cdot \omega^2 \cdot R \cdot R \cdot \varphi \cdot \frac{R \cdot \varphi}{2} = 0$$

$$M = M_0 + 2 \cdot N \cdot R \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - q \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (3.6)}$$



**Fig.3.3 Tramo del lado derecho de la llanta, para hallar las fuerzas internas en cualquier parte de esta sección.**

Realizando un análisis análogo al realizado anteriormente pero en este caso por la derecha se obtienen las siguientes ecuaciones

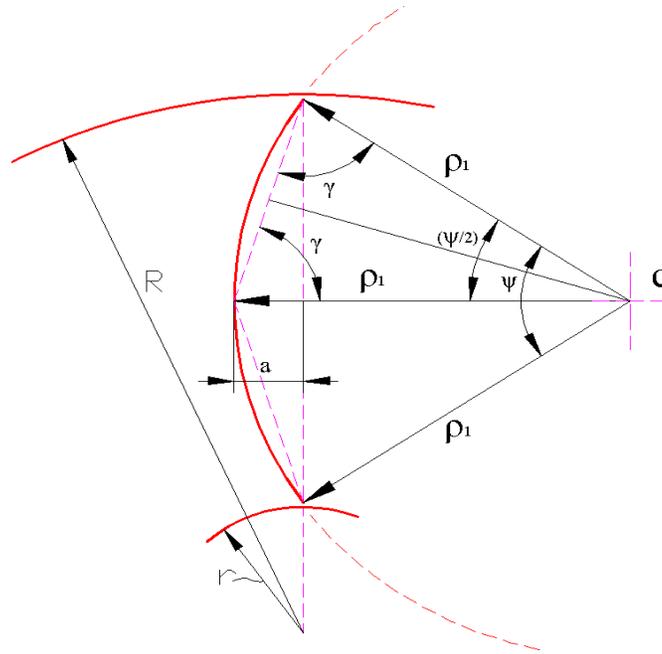
$$N' = N_0' \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Ec.( 3.7)}$$

$$M' = M_0' + 2 \cdot N \cdot R \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - q \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (3.8)}$$

Para la determinación de las fuerzas internas en el rayo es necesario realizar un análisis geométrico que permita conocer a través de parámetros medibles o conocidos

### Capítulo III

a ( $R$ ,  $r$ ), y otros parámetros que definan la geometría y que se quedan empleados en los cálculos son ( $\psi$ ,  $\rho_1$ ).



**Fig.3.4 Esquema de Análisis del rayo curvo.**

$$\frac{\psi}{2} = 180 - 2(\gamma) \qquad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{(R-r)}{2 \cdot a}\right) \qquad \rho_1 = \frac{(R-r)}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Por tanto podemos plantear las siguientes ecuaciones

$$\frac{\psi}{2} = 180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(R-r)}{2 \cdot a}\right) \qquad \text{Ec. (3.9)}$$

$$\rho_1 = \frac{(R-r)}{2 \cdot \text{sen}\left(180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(R-r)}{2 \cdot a}\right)\right)} \qquad \text{Ec. (3.10)}$$

La fuerza interna  $N_1$  en una sección cualquiera del rayo se obtiene del equilibrio del rayo (Fig. 3.5).

### Capítulo III

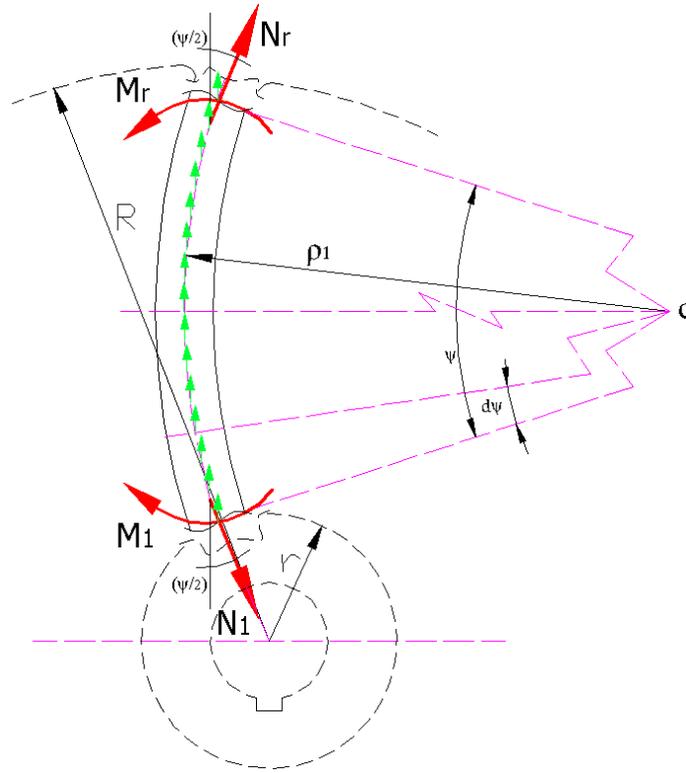


Fig. 3.5 Fuerza interna  $N_r$  en una sección cualquiera del rayo.

La sumatoria de fuerzas en la dirección del eje y-y es igual a cero.

$$\sum F_y = N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - N_1 \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \int_0^\psi q_1 \cdot \omega^2 \left(\frac{R+r}{2}\right) \cdot d\psi = 0$$

$$\sum F_y = N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - N_1 \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + q_1 \cdot \omega^2 \left(\frac{R+r}{2}\right) \cdot \psi \Big|_0^\psi = 0$$

$$N_1 = \frac{q_1 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{R+r}{2}\right) \cdot \psi \Big|_0^\psi + N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Ec. (3.11)

La sumatoria de momento en el punto C es igual a cero.

$$\sum M_C = N_r \cdot \rho - N_1 \cdot \rho + F_1 \cdot \rho \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - M_r + M_1 = 0$$

$$M_1 = M_r - N_r \cdot \rho + N_1 \cdot \rho - [q_1 \cdot \omega^2 \cdot (R-r) \cdot \psi] \cdot \rho \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

### Capítulo III

$$M_1 = M_r + \rho \cdot \left( N_1 - N_r - q_1 \cdot \omega^2 \cdot (R - r) \cdot \psi \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right) \quad \text{Ec. (3.12)}$$

En la Fig. 3.6 se muestran las fuerzas internas N y M que actúan en una sección s cualquiera del rayo, lo que permitirá conocer los valores de estas fuerzas a través de todo el largo del rayo. Aplicando las ecuaciones de equilibrio para el tramo separado  $\sum F_n = 0$  y  $\sum M_0 = 0$  para hallar las expresiones de  $N_1$  y  $M_1$ .

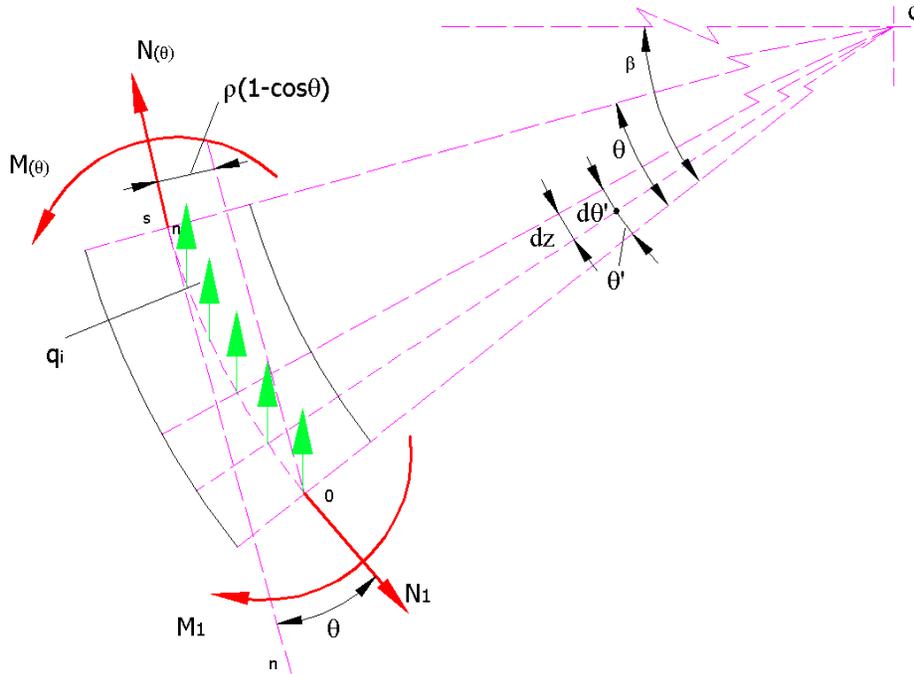


Fig. 3.6 Fuerza de tracción y momento flector en el rayo.

La sumatoria de fuerzas en la dirección del eje n-n es igual a cero.

$$\sum F_n = N - N_1 \cdot \cos \theta + q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right) \int_0^\theta \left( \frac{R+r}{2} \right) \cdot d\theta' \cdot \cos(\theta - \theta') = 0$$

$$N = N_1 \cdot \cos \theta - q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \int_0^\theta \cos(\theta - \theta') \cdot d\theta'$$

$$N = N_1 \cdot \cos \theta - q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \int_0^\theta (\cos \theta \cdot \text{sen} \theta' - \text{sen} \theta \cdot \cos \theta') \cdot d\theta'$$

### Capítulo III

$$N = N_1 \cdot \cos \theta - q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \cdot (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta - \text{sen} \theta)$$

$$N_{ray} = N_1 \cdot \cos \theta - 2 \cdot q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{Ec. (3.13)}$$

La sumatoria de momento en el punto 0 es igual a cero.

$$\sum M_0 = M - M_1 - N \cdot \rho \cdot (1 - \cos \theta) + q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot \rho \cdot \theta \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{2} = 0$$

$$M_{ray} = M_1 + 2 \cdot N \cdot \rho \cdot \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) - q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho^3 \cdot \frac{\theta^2}{2} \quad \text{Ec. (3.14)}$$

La energía potencial de deformación del tramo analizado, se calcula por:

$$U = U_0 + U_0' + U_1 \quad \text{Ec. (3.15)}$$

$$U_0 + U_0' = \int_0^\alpha \frac{M^2 \cdot R \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot I_0} + \int_0^\alpha \frac{N^2 \cdot R \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot A_0} + \int_0^\alpha \frac{M'^2 \cdot R \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot I_0} + \int_0^\alpha \frac{N'^2 \cdot R \cdot d\varphi}{2 \cdot E \cdot A_0} \quad \text{Ec. (3.16)}$$

$$U_1 = \int_0^\psi \frac{M_1^2 \cdot d\psi}{2 \cdot E \cdot I_1} + \int_0^\psi \frac{N_1^2 \cdot d\psi}{2 \cdot E \cdot A_1} \quad \text{Ec. (3.17)}$$

Sustituyendo (3.5) y (3.6) en (3.16), la ecuación (3.23) en (3.17) y las expresiones obtenidas en (3.15), se obtiene que:

Capítulo III

$$\begin{aligned}
 U = & \int_0^{\alpha} \frac{\left( M_0 + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot I_0} \cdot R \cdot d\varphi \\
 & + \int_0^{\alpha} \frac{\left( N_0 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot R \cdot d\varphi \\
 & + \int_0^{\alpha} \frac{\left( M_0' + 2 \cdot N \cdot R \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - q \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \right)^2}{2 \cdot E \cdot I_0} \cdot R \cdot d\varphi \\
 & + \int_0^{\alpha} \frac{\left( N_0' \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot R \cdot d\varphi \\
 & + \int_0^{\psi} \frac{\left( M_1 + 2 \cdot N \cdot \rho \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho^3 \cdot \frac{\theta^2}{2} \right)^2}{2 \cdot E \cdot I_1} \cdot \rho \cdot d\psi \\
 & + \int_0^{\psi} \frac{\left( N_1 \cdot \cos \theta - 2 \cdot q_1 \cdot \omega^2 \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2}{2 \cdot E \cdot A_1} \cdot \rho \cdot d\psi
 \end{aligned}$$

Ec. (3.18)

Hallando las derivadas:

$$\frac{\partial U}{\partial N_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial M_0} = 0$$

Y simultaneando las ecuaciones obtenidas con la ecuación (3.6) se obtiene finalmente que:

$$M_o = \frac{R_p \left( -6N \cdot \alpha + q \cdot R_p^2 \cdot \omega^2 \cdot \alpha^3 + 6N \cdot \text{sen}(\alpha) \right)}{6\alpha}$$

Ec. (3.20)

### Capítulo III

$$N_o = \frac{q \cdot R_p^2 \cdot w^2 (\alpha - 2\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha))}{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad \text{Ec. (3.21)}$$

$$M_o' = \frac{R_p (-6N \cdot \alpha + q \cdot R_p^2 \cdot w^2 \cdot \alpha^3 + 6N \cdot \text{sen}(\alpha))}{6\alpha} \quad \text{Ec. (3.22)}$$

$$N_o' = \frac{q \cdot R_p^2 \cdot w^2 (\alpha - 2\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha))}{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad \text{Ec. (3.23)}$$

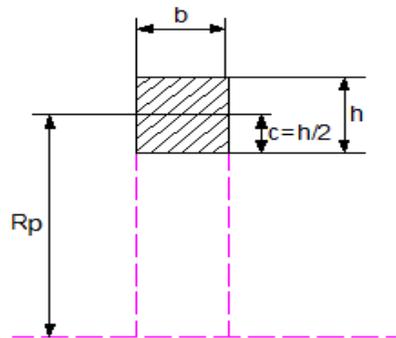
$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( q_1 \cdot w^2 \cdot \rho^2 \cdot \theta^2 - 4N_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad \text{Ec. (3.24)}$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot (R_e + R_i)^2 \cdot w^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec(\theta) \quad \text{Ec. (3.25)}$$

La tensión de tracción en una sección cualquiera  $\varphi$  de la llanta (Fig. 3.2) se halla por la expresión de la tensión en barras curvas (Ecuación de Winkler - Bach).

$$\sigma = \frac{N}{A_0} + \frac{M}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{\max}}{z \cdot (R_p + y_{\max})} \right]$$

Para un volante de sección rectangular (Fig. 3.7)



**Fig. 3.7** Sección transversal del volante.

Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta  $Y_{\max}$  (m).

### 3.4 Cálculos realizados para un volante de rayos curvos.

#### 3.4.1 Área de la sección transversal de la llanta $A_0$ ( $m^2$ ).

$$A_0 = b \cdot h = 0,615 \cdot 0,100 = 0,0615 \text{ m}^2 \quad \text{Ec. (3. 26)}$$

b- Ancho de la llanta (m).

h- Espesor de la llanta (m).

#### 3.4.2 Velocidad angular $w$ (rad/s)

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} \quad \text{Ec. (3. 27)}$$

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 243}{60} = 25,4 \text{ rad/s}$$

$n_r=243$  rpm.

- Durante el giro de la polea a una velocidad angular  $w$  se produce una fuerza de inercia  $q_i$  distribuida uniformemente a lo largo de todo el perímetro de la llanta.

#### 3.4.3 Fuerza de inercia en cualquier parte de la llanta, $q$ (kN/m).

$$q = \rho_{ac} \cdot A_0 = 7800 \cdot 0,0615 = 479,7 \text{ kg/m} = 0,4797 \text{ kN/m} \quad \text{Ec. (3. 28)}$$

$\rho_c$ - densidad del acero  $\text{kg/m}^3$ .

#### 3.4.4 Momento de inercia centroidal en la sección de la llanta $I_0$ ( $m^4$ ).

$$I_0 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 0,615 \cdot 0,100^3 = 0,00005125 \text{ m}^4$$

b- Ancho de la llanta (m).

h- Espesor de la llanta (m).

#### 3.4.5 Cálculo de las funciones $f_{1(\alpha)}$ y $f_{2(\alpha)}$ . $\alpha=0,523$ m<sup>2</sup>.

$$f_{1(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 0,523} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2 \cdot 0,523)}{4} + \frac{0,523}{2} \right) = 0,9576 \quad \text{Ec.(3. 29)}$$

### Capítulo III

$$f_{2(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} = 0,9576 - \frac{1}{2 \cdot 0,523} = 0,0016 \quad \text{Ec. (3. 30)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n} = 0,523 \text{ rad}$$

**3.4.6 Área de la sección transversal del rayo  $A_1$  ( $m^2$ ), volante de sección rectangular.**

$$A_1 = b \cdot l = 0,615 \cdot 0,100 = 0,0615 \text{ m}^2 \quad \text{Ec. (3. 31)}$$

b- Ancho del rayo (m)

l- Espesor del rayo (m).

**3.4.7 Fuerza interna del rayo,  $N_r$  (kN) .**

$$N_r = \frac{2}{3} \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_r^2 \cdot \frac{1}{\frac{A_0}{A_1} \cdot f_{1(\alpha)} + \frac{A_0 \cdot R_r^2}{I_0} \cdot f_{2(\alpha)}} \quad \text{Ec. (3.32)}$$

$$N_r = \frac{2}{3} \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,705^2 \cdot \frac{1}{\frac{0,0615}{0,0615} \cdot 0,957 + \frac{0,0615 \cdot 0,705^2}{0,00005125} \cdot 0,00168} = 52,33 \text{ kN}$$

**3.4.8 Momento flector en la sección transversal de la llanta, extremo izquierdo,  $M_0$  (kN-m).**

$$M_o = \frac{R_p \left( -6N \cdot \alpha + q \cdot R_p^2 \cdot \omega^2 \cdot \alpha^3 + 6N \cdot \text{sen}(\alpha) \right)}{6\alpha} \quad \text{Ec. (3.33)}$$

$$= \frac{0,755 \cdot \left( -6 \cdot 130,63 \cdot 0,52 + 0,4797 \cdot 0,755^2 \cdot 25,4^2 \cdot 0,52^3 + 6 \cdot 130,63 \cdot \text{sen}(30) \right)}{6 \cdot 0,52}$$

$$= 4,17 \text{ kN} - m$$

**3.4.9 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta, extremo izquierdo,  $N_0$  (kN).**

$$N_o = \frac{q \cdot R_p^2 \cdot \omega^2 (\alpha - 2\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha))}{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad \text{Ec. (3.34)}$$

### Capítulo III

$$N_o = \frac{0,4797 \cdot 0,755^2 \cdot 25,4^2 \cdot (0,52 - 2\text{sen}(30) + \cos(30) \cdot \text{sen}(30))}{0,52 + \cos(30) \cdot \text{sen}(30)}$$

$$= 177,62 \text{ kN}$$

#### 3.4.10 Fuerza interna N y Momento flector M que actúan en el extremo izquierdo de la llanta N (kN) y M (kN-m).

$$N = N_o \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Ec. (3.35)}$$

$$N = 177,52 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = 130,63 \text{ kN}$$

$$M = M_o + 2 \cdot N \cdot R_p \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (3.36)}$$

$$M = 4,17 + 2 \cdot (130,63) \cdot 0,755 \cdot \text{sen}^2(30^\circ) + 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^3 \cdot \frac{0,523^2}{2} = 7,92 \text{ kN-m}$$

- El cálculo de la fuerza N y Momento flector M que actúan en una sección cualquiera de la llanta se calcula para un ángulo de inclinación de 30° donde se encuentra la mayor tensión y momento flector.
- A continuación se muestran los valores que puede tomar la fuerza N y Momento flector M respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

Tabla 3.1. Valores de N y M respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	N (kN)	M (kN-m)
0	57,04	1,82
5	67,70	2,09
10	78,61	2,95
15	90,03	4,40
20	102,25	6,44
25	115,64	7,25
30	130,63	7,92

#### 3.4.11 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta $Y_{\text{máx}}$ (m).

$$y_{\text{máx}} = c = \frac{h}{2} = \frac{100}{2} = 50\text{mm} = 0,050\text{m} \quad \text{Ec. (3.37)}$$

**3.4.12 Parámetro geométrico z (m) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta como rectangular con radio primitivo  $R_p$ .**

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{c}{R_p} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{c}{R_p} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{c}{R_p} \right)^6 + \dots \quad \text{Ec. (3. 38)}$$

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^6 = 0,00147\text{m}$$

**3.4.13 Cálculo de la tensión resultante en la llanta por el extremo izquierdo  $\sigma$  (MPa).**

$$\sigma = \frac{N}{A_0} + \frac{M}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{\max}}{z \cdot (R_p + y_{\max})} \right] \quad \text{Ec. (3.39)}$$

- La tensión resultante en la llanta se calculará tomando los mayores valores de la acción de la fuerza normal N y el momento flector M.

O sea:

$$\sigma = \frac{130,63}{0,0615} + \frac{7,95}{0,755 \cdot 0,0615} \cdot \left[ 1 + \frac{0,05}{0,00147 \cdot (0,755 + 0,05)} \right] = 6,52 \text{ MPa}$$

- A continuación se muestran los valores que puede tomar la tensión  $\sigma$  respecto a una variación del ángulo  $\varphi$  en la llanta, es una sección cualquiera m-n, es una barra curva sometida a la acción de una fuerza normal N y un momento flector M que también varían respecto al ángulo  $\varphi$ .

Tabla 3.2. Valores de  $\sigma$  respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	N (kN)	M (kN-m)	$\sigma$ (MPa)
0	57,04	1,82	2,63
5	67,70	2,09	0,06
10	78,61	2,95	1,04
15	90,03	4,40	2,58
20	102,25	6,44	4,68
25	115,64	7,25	5,65
30	130,63	7,92	6,52

**3.4.14 Momento flector en la sección transversal de la llanta, extremo derecho,  $M_0'$  (kN-m).**

$$M_0' = \frac{R_p \left( -6 \cdot N' \cdot \alpha + q \cdot R_p^2 \cdot w^2 \cdot \alpha^3 + 6 \cdot N' \cdot \text{sen}(\alpha) \right)}{6\alpha} \quad \text{Ec. (3.40)}$$

$$= \frac{0,755 \cdot \left( -6 \cdot (146,96) \cdot 0,52 + 0,4797 \cdot 0,755^2 \cdot 25,4^2 \cdot 0,52^3 + 6 \cdot (146,96) \cdot \text{sen}(30) \right)}{6 \cdot 0,52} = 5,24 \text{ kN-m}$$

**3.4.15 Fuerza normal en la sección transversal de la llanta extremo derecho,  $N_0'$  (kN).**

$$N_0' = \frac{-2 \cdot q \cdot R_p^2 \cdot w^2 \left( 1 - \cos(\alpha) + N_r \cdot \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + N_0 \cdot \text{sen}(\alpha) \right)}{\cos(\alpha)} \quad \text{Ec. (3.41)}$$

$$N_0' = \frac{-2 \cdot 0,4797 \cdot 0,755^2 \cdot 25,4^2 \left( 1 - \cos(30) + 52,33 \cdot \text{sen}(22,97) + 177,62 \cdot \text{sen}(30) \right)}{\cos(30)} = 150,20 \text{ kN}$$

**3.4.16 Fuerza interna  $N'$  y Momento flector  $M'$  que actúan en el extremo derecho de la llanta  $N$  (kN) y  $M$  (kN-m).**

$$N' = N_0' \cdot \cos \varphi + 2 \cdot q \cdot \omega^2 \cdot R_p^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Ec. (3.42)}$$

$$N' = 150,20 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = 146,96 \text{ kN}$$

$$M' = M_0' + 2 \cdot N' \cdot R_p \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + q \cdot \omega^2 \cdot R_p^3 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{Ec. (3.43)}$$

$$M' = 5,24 + 2 \cdot (146,96) \cdot 0,755 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{30^\circ}{2}\right) + 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,755^3 \cdot \frac{0,523^2}{2} = 5,92 \text{ kN-m}$$

- El cálculo de la fuerza  $N'$  y Momento flector  $M'$  que actúan en una sección cualquiera de la llanta se calcula para un ángulo de inclinación de  $30^\circ$  donde se encuentra la mayor tensión y momento flector.
- A continuación se muestran los valores que puede tomar la fuerza  $N'$  y Momento flector  $M'$  respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

### Capítulo III

Tabla 3.3 Valores de N y M respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	N' (kN)	M' (kN-m)
0	64,17	1,73
5	76,16	1,84
10	88,44	2,18
15	101,28	2,76
20	115,03	3,58
25	130,09	4,63
30	146,96	5,92

#### 3.4.17 Distancia del plano centroidal al borde más alejado de la llanta $Y_{\max}$ (m).

$$y_{\max} = c = \frac{h}{2} = \frac{100}{2} = 50\text{mm} = 0,050\text{m} \quad \text{Ec. (3.44)}$$

#### 3.4.18 Parámetro geométrico z (m) de la sección que se calculará considerando la sección de la llanta como rectangular con radio primitivo $R_p$ .

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{c}{R_p} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{c}{R_p} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{c}{R_p} \right)^6 + \dots \quad \text{Ec. (3.45)}$$

$$z = \frac{1}{3} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^4 + \frac{1}{7} \left( \frac{0,050}{0,755} \right)^6 = 0,00147\text{m}$$

#### 3.4.19 Cálculo de la tensión resultante en la llanta por el extremo derecho $\sigma$ (MPa).

$$\sigma' = \frac{N'}{A_0} + \frac{M'}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{\max}}{z \cdot (R_p + y_{\max})} \right] \quad \text{Ec. (3.46)}$$

- La tensión resultante en la llanta se calculará tomando los mayores valores de la acción de la fuerza normal N y el momento flector M.

O sea:

$$\sigma' = \frac{146,96}{0,0615} + \frac{5,92}{0,755 \cdot 0,0615} \cdot \left[ 1 + \frac{0,05}{0,00147 \cdot (0,755 + 0,05)} \right] = 7,92 \text{ MPa}$$

### Capítulo III

- A continuación se muestran los valores que puede tomar la tensión  $\sigma$  respecto a una variación del ángulo  $\varphi$  en la llanta, es una barra curva sometida a la acción de una fuerza normal  $N'$  y un momento flector  $M'$  que también varían respecto al ángulo  $\varphi$ .

Tabla 3.4. Valores de  $\sigma$  respecto a la variación del ángulo  $\varphi$ .

$\varphi$ (grado)	$N'$ (kN)	$M'$ (kN-m)	$\sigma'$ (MPa)
0	64,17	1,73	2,66
5	76,16	1,84	2,96
10	88,44	2,18	3,48
15	101,28	2,76	4,23
20	115,03	3,58	5,21
25	130,09	4,63	6,44
30	146,96	5,92	7,92

#### 3.4.20 Cálculo de la tensión resultante en el rayo.

$$\sigma_{rayo} = \frac{N_{rayo}}{A_0} + \frac{M_{rayo}}{R_p \cdot A_0} \cdot \left[ 1 + \frac{y_{max}}{z \cdot (R_p + y_{max})} \right] \quad \text{Ec. (3.47)}$$

Dónde:

#### 3.4.21 La fuerza en cualquier parte del rayo es:

$$N_{ray} = N_1 \cdot \cos \theta - 2 \cdot q_1 \cdot \omega^2 \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{Ec. (3.48)}$$

$$N_{ray} = 125,46 \cdot \cos(30) - 2 \cdot 0,4797 \cdot 25,4^2 \left( \frac{0,705 + 0,213}{2} \right)^2 \cdot \cos^2(30) = 137,62 \text{ kN}$$

Y:

$$q_1 = \frac{A_1 \cdot l \cdot \rho_{ac}}{l} \quad \text{Ec. (3.49)}$$

$$q_1 = A_1 \cdot \rho_{ac}$$

$$q_1 = 0,0615 \cdot 7800 = 479,7 \text{ kg/m} = 0,4797 \text{ kN/m}$$

### Capítulo III

$$N_1 = \frac{q_1 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{R+r}{2}\right) \cdot \psi + N_r \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot \left(\frac{0,705+0,213}{2}\right) \cdot 0,4 + 52,33 \cdot \cos(22,97)}{\cos(22,97)} = 125,46 \text{ kN}$$

Dónde:

$$\frac{\psi}{2} = 180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(R-r)}{2 \cdot a}\right) = 180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(0,705-0,213)}{2 \cdot 0,05}\right) = 22,98^\circ$$

Los cálculos se realizan con  $\Theta=30^\circ$

#### 3.4.22 Momento flector en cualquier parte del rayo.

$$M_{ray} = M_1 + 2 \cdot N_{rayo} \cdot \rho_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho_1^3 \cdot \frac{\theta^2}{2}$$

$$M_{ray} = 1,27 + 2 \cdot (137,62) \cdot 0,63 \cdot \text{sen}\left(\frac{30}{2}\right) - q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho_1^3 \cdot \frac{0,52^2}{2} = 6,13 \text{ kN} \cdot m$$

Dónde:

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot \left( q_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho_1^2 \cdot \theta^2 - 4N_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,63 \cdot \left( 0,4797 \cdot 25,4^2 \cdot 0,63^2 \cdot 0,20^2 - 4 \cdot 125,46 \cdot \text{sen}\left(\frac{22,98}{2}\right) \right) = 1,27 \text{ kN} \cdot m$$

Y:

$$\rho_1 = \frac{(R-r)}{2 \cdot \text{sen}\left(180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(R-r)}{2 \cdot a}\right)\right)} = \frac{(0,705-0,213)}{2 \cdot \text{sen}\left(180 - 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{(0,705-0,213)}{2 \cdot 0,05}\right)\right)} = 0,63$$

$$a = 0,05 \text{ m}$$

Los cálculos se realizan con  $\Theta=30^\circ$

Entonces:

$$\sigma_{rayo} = \frac{137,62}{0,0615} + \frac{6,13}{0,705 \cdot 0,0615} \cdot \left[ 1 + \frac{0,05}{0,00147 \cdot (0,705+0,05)} \right] = 7,96 \text{ MPa}$$

### Capítulo III

- A continuación se muestran los valores que puede tomar la tensión  $\sigma$  respecto a una variación del ángulo  $\Theta$  en el rayo, sometida a la acción de una fuerza normal  $N_{\text{rayo}}$  y un momento flector  $M_{\text{rayo}}$  que también varían respecto al ángulo  $\Theta$ .

Tabla 3.5. Valores de  $\sigma$  respecto a la variación del ángulo  $\Theta$ .

$\Theta$ (grado)	$N_{\text{rayo}}$ (kN)	$M_{\text{rayo}}$ (kN-m)	$\sigma'$ (Mpa)
0	71,30	1,12	2,21
5	84,63	1,13	2,43
10	98,28	1,14	2,66
15	112,57	2,59	4,25
20	127,86	4,63	6,40
22,98	137,62	6,13	7,96

#### 3.4.23 Comportamiento de la tensión $\sigma$ en la llanta.



Gráfica 1. Comportamiento de la tensión  $\sigma$  según la variación del ángulo  $\phi$



Gráfica 2. Comportamiento de la tensión  $\sigma'$  según la variación del ángulo  $\phi$

### 3.4.24 Comportamiento de la tensión en el rayo $\sigma_1$ .



Gráfica 3. Comportamiento de la tensión en el rayo  $\sigma_1$ , según la variación del ángulo  $\varphi$ .

### 3.4 Modelación del Estado Tensional del volante de rayos curvos por el Método de Elementos Finitos.

Para la presentación de los resultados de Modelación por Elementos Finitos, se utilizó el Software INVENTOR el valor de la tensión equivalente se calculó por la 4ta Hipótesis de Huber-Von Mises-Hencky y de esta forma se obtuvo el valor de la tensión real en cualquier sección de la llanta y el rayo. En la Figura 3.12 se muestra el cuadro de tensiones y de forma exagerada las deformaciones que sufre el volante durante el giro. En este caso las tensiones por el Método Analítico dan ligeramente mayores.

Para el caso de los rayos curvos se procede análogamente a los rayos rectos. Primeramente se crea un modelo al que se le aplican las mismas restricciones y valores de velocidad angular. Para este caso se emplearon las mismas dimensiones que el anterior de forma que ambos se puedan comparar.



Fig. 3.8 Valor y ubicación de la velocidad angular introducida.

Para realizar el análisis del Modelo Físico, se emplea un análisis Lineal - Elástico para materiales Isotrópicos. En este caso se utiliza también un mallado con elementos curvos debido a las superficies redondeadas presentes en el modelo del cuerpo en 3D. El Mallado Sólido que se muestra no posee gran complejidad, por lo que solo se utiliza un mapeado en las superficies donde existen transiciones en la geometría. Para este caso se emplean elementos 3D tetraédricos similares al caso de volantes con rayos rectos.

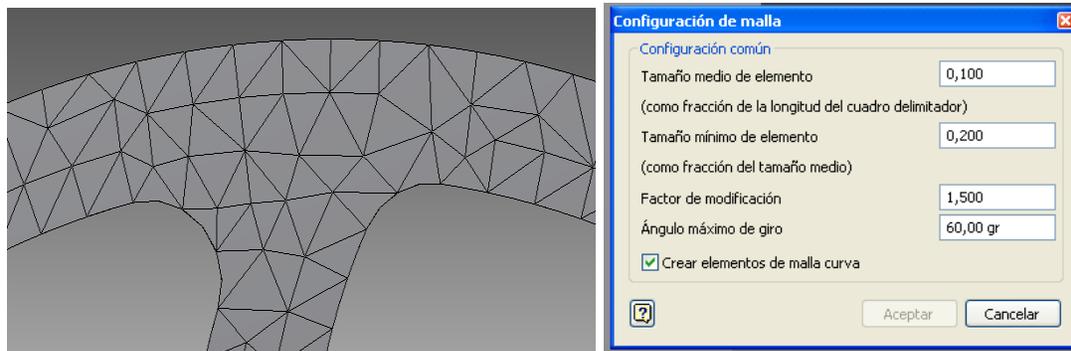
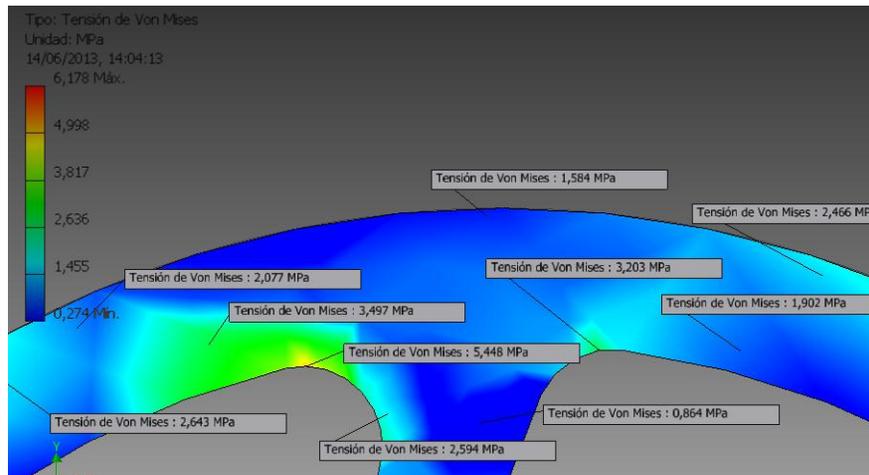


Fig. 3.9 Representación del mallado de la geometría.

La presentación de los resultados de Modelación por el método de los Elementos Finitos se muestran en la figura 3.10 el valor de la tensión equivalente brindadas por el software son referidas a la 4ta Hipótesis de Huber-Von Mises-Hencky, con este método se consideran las concentraciones de tensiones reales producidas durante el funcionamiento del volante.

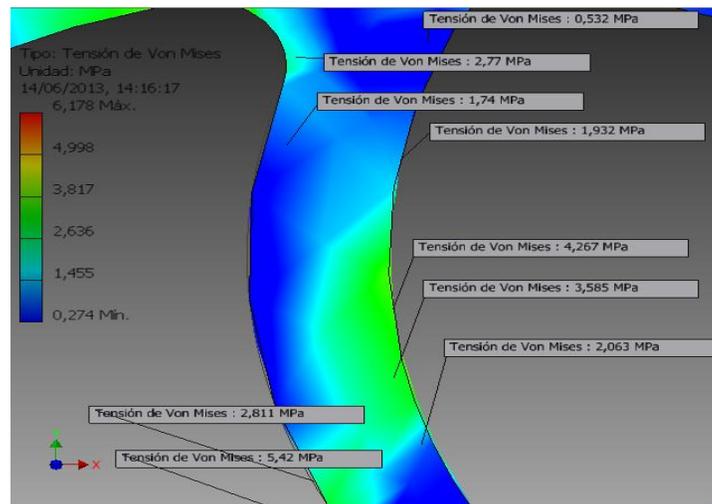
### Capítulo III



**Fig. 3.10 Tensiones por la 4ta Teoría de Resistencia de Hubber-Von Mises-Hencky en la llanta.**

Como se puede apreciar la tensión resultante en la llanta varía desde 0,864 a 5,448 MPa, cercanas a las obtenidas en los cálculos analíticos que oscilan 0,38 a 5,14 MPa. De la figura anterior al igual que los resultados obtenidos en los cálculos analíticos las tensiones no siguen la misma distribución en ambos extremos para la rueda con rayos curvos.

El comportamiento de las tensiones para el caso del rayo se muestra en la figura siguiente:

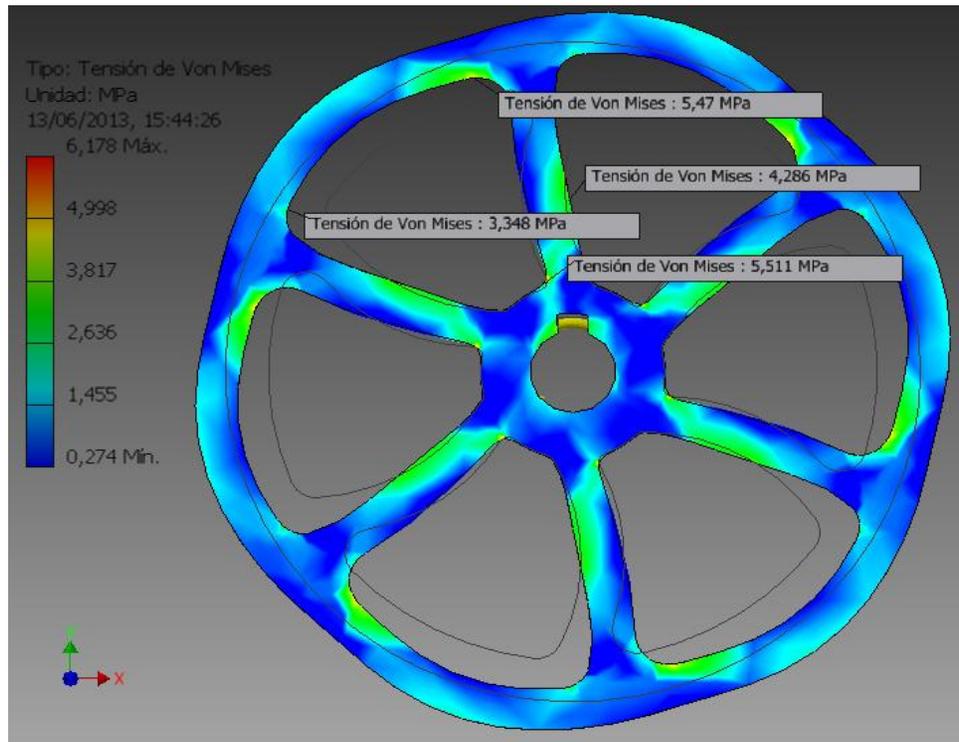


**Fig. 3.11 Tensiones en el rayo.**

Se puede apreciar que los valores se encuentran en el orden de 0,532 a 4,267 MPa, los valores obtenidos por el método de cálculo analítico que oscilan entre 2,21 a 7,96 MPa.

### Capítulo III

Una vista completa del modelo se representa a continuación, donde las posibles deformaciones se muestran de forma exagerada.



**Fig. 3.12 Distribución de las tensiones en una llanta con rayos curvos.**

## **Conclusiones del Capítulo III.**

1. El Teorema del Trabajo Mínimo puede ser aplicado para la solución de Sistemas hiperestáticos Complejos del tipo llanta - rayos – cubo y se obtienen ecuaciones no muy complejas que permiten obtener las fuerzas internas y tensiones en cualquier sección de la llanta y el rayo.
2. Se calcularon las fuerzas internas y tensiones en diferentes secciones de la llanta y en los rayos, para un volante con rayos curvos de determinadas dimensiones, de acero y con determinada velocidad de giro obteniéndose resultados muy lógicos.
3. Ese mismo volante de ese mismo material, con las mismas dimensiones y la misma velocidad de giro se modeló por el Método de los Elementos Finitos con el Software Inventor, obteniéndose una concordancia muy satisfactoria en comparación con el Modelo Analítico Elaborado.

# *Conclusiones*

## **Conclusiones Generales:**

1. El Teorema del Trabajo Mínimo puede ser aplicado para la solución de Sistemas hiperestáticos Complejos del tipo llanta - rayos – cubo y se obtienen ecuaciones no muy complejas que permiten obtener las fuerzas internas y tensiones en cualquier sección de la llanta y el rayo lo mismo para rayos rectos como para rayos curvos.
2. El Teorema puede ser utilizado para otros tipos de elementos con rayos como son poleas y engranajes.
3. La Modelación por Elementos Finitos arrojó resultados satisfactorios las pequeñas diferencias se deben a la presencia de los concentradores de tensiones.
4. Hay que añadir que se puede combinar el Teorema del trabajo Mínimo con el Método de la Superposición de cargas para Sistemas Hiperestáticos mucho mas complejos.

# *Recomendaciones*

## **Recomendaciones**

1. Se recomienda continuar la investigación con otro tipo de elementos con rayos como son: poleas, engranes, motores hidráulicos de pistones axiales, etc.
2. Emplear El Teorema del Trabajo Mínimo a los cálculos de los elementos de máquinas como son: poleas, engranes, volantes y otros.
3. Emplear esta metodología de cálculo para realizar el diseño de estos elementos de máquinas.

# ***Bibliografía***

## **Bibliografía**

- Mukanov K. (1968). *Design of metal structures*. Moscú: MIR.
- Anuriev, V.I. (1987). *Manual del Constructor de Maquinarias*. Moscú: MIR.
- Arquero Esteban, Francisco. (1970). *Cálculo Práctico del Hormigón Armado* (Vol. I).  
Barcelona: CEAC.
- Arzola N. (2003). *Esquema de análisis de los árboles de los molinos de caña de azúcar y aplicación de la Mecánica de la Fractura en la determinación del período entre inspecciones* (Doctor en Ciencias Técnicas).
- Barsom, J. M. (1988). *Fracture and Fatigue Control in Structures*.
- Bedford A., Fowler W. (2002). *Engineering Mechanics. Statics* (p. 583). New Jersey.
- Beer F.P., Jonhston. (1984). *Mecánica Vectorial para Ingenieros* (Vol. 2, p. 972).  
México.
- Birger I.A, Shorr B.F, & Shneiderovich R.M. (1966). *Cálculo de Resistencia de Piezas de Máquinas*. Mashinostroenie.
- Birger J.A, & Schneiderovich R.M. (1966). *Cálculo de la Resistencia de Piezas de Máquinas*. Moscú: Mashinostroenie.
- Bubnikzet A. (n.d.). *Sugar Technologists Manual*. Berlin: Luckhoff.
- Chen and Chou. (1993). *Cane Sugar Handbooks*.
- Diez conferencias sobre Resistencia de Materiales. (1993). MIR.
- Dobrovolski V. (1970). *Elementos de Máquinas*. Moscú: MIR.
- Dowling, N. E. (1999). *Mechanical behaviour of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue*.
- Faires V.M. (1985). *Diseño de Elementos de Máquinas*. México: UTEHA.
- Feodosiev V.I. (1985). *Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
- Fernández Levy, Gilda S. (1983). *Resistencia de Materiales*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Fitzgerald F. (1996). *Mecánica de Materiales*. México: Alfaomega S.A. de C.V.
- Fogiel M. (1988). *Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids*. New Jersey: REA.
- Fong, J. T. (1979). *Fatigue Mechanisms*.

## *Bibliografía*

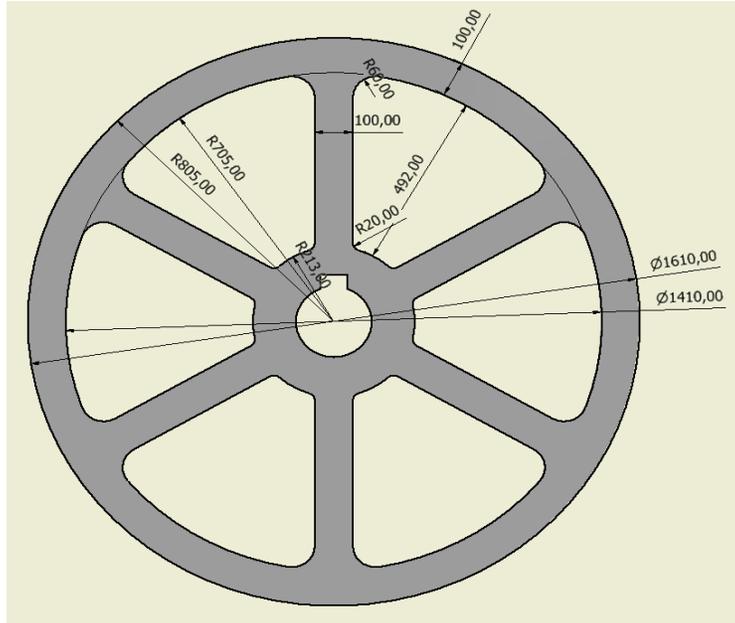
- Goytisoló ,R. (2005). Análisis y solución de la Avería del molino de Planta de Plástico Mixto de Cienfuegos.
- Goytisoló R. (1973). *Diseño de Elementos de Máquina*. Las Villas.
- Goytisoló R. (2001). *Mecánica de la Fractura*. Maestría en Mecánica Aplicada, Universidad de Cienfuegos.
- Goytisoló R., Cabello J.J, & Hernández R. (1996). *Análisis de la falla del Trunium de salida del Molino No. 1 de crudo de la Empresa de Cemento "Karl Marx."* XI Forum Nacional de Ciencia y Técnica.
- Grahan Kelly S. (1993). *Fundamentals of Mechanical Vibratios*. New York.
- Hawkes B. Cadcam. (1989). *Paraninfo S.A*. Madrid.
- Hugot, E. (1974). *Manual para Ingenieros Azucareros*.
- Hurd, N. J. (1982). *Factors influencing propagation of mode III fatigue cracks under torsional loading*.
- Iusilievich G.B. (1988). *Elementos de Máquinas*. Mashinostroenie.
- Ivanov, M. N. (1991). *Elementos de Máquinas*. Moscú: Vichaya Schkola.
- Ivanov, M.N. (1991). *Elementos de Máquinas*. Vischaya Schkola.
- Merian J.L. (1972). *Mecánica*. La Habana.
- Miroliubov I. (1985). *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
- Mott R.L. (1990). *Applied Strength of Materials* (2nd ed.). New Jersey: Prentice- Hall.
- Mott R.L. (1996). *Resistencia de Materiales Aplicada*. México: Prentice- Hall Hispanoamericana.
- Olsen G.A. (1962). *Elements of Mechanics of Materials*. La Habana.
- Orlov, P. (1985). *Ingeniería del Diseño*. Moscú: MIR.
- Partón V.Z. (1990). *Mecánica de la Destrucción*. Moscú.
- Pisarenko G.S, Yakovlev A.P, & Matveev V.K. (1989). *Manual de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
- Reshetov, D. (1985). *Elementos de Máquinas*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Roylance, T.F. (1966). *Engineering Desing*. Great Britain.
- Shigley J.E. (1969). *El Proyecto en Ingeniería Mecánica*. La Habana: Revolucionaria.
- Shigley, J. E. (1977). *Diseño en Ingeniería*. México: Mc Graw Hill.

## *Bibliografía*

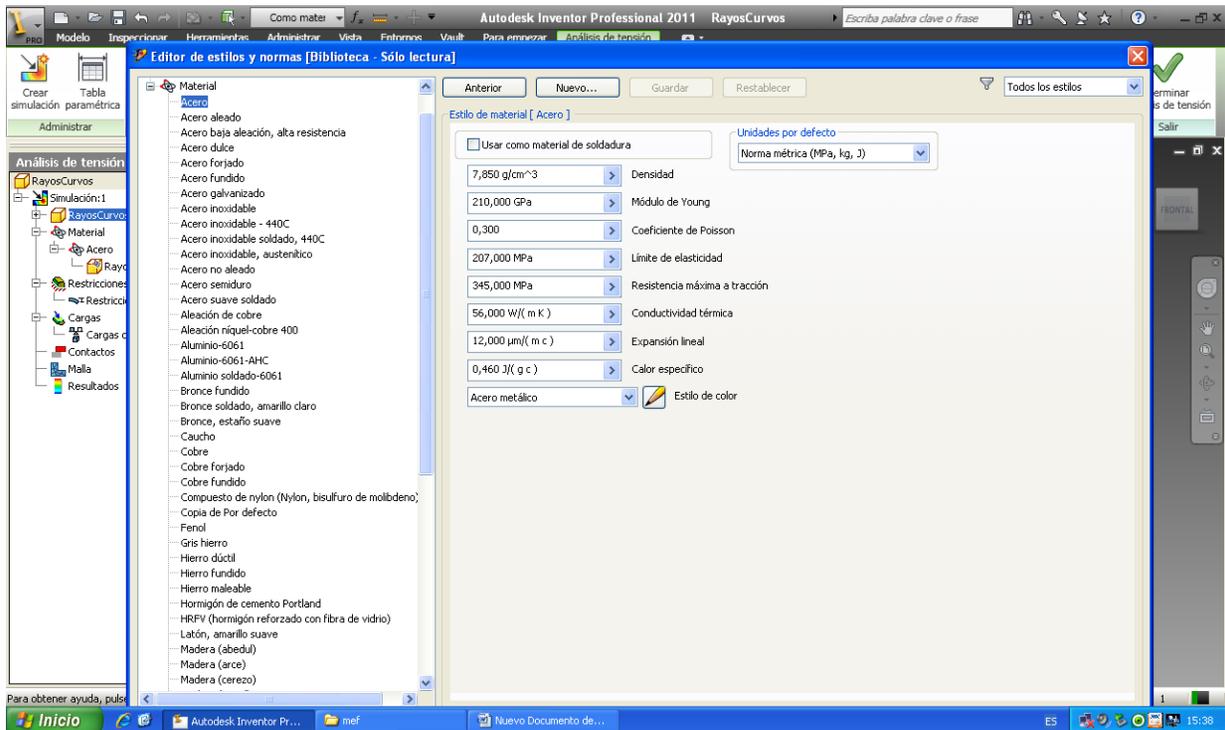
- Shigley, J. E. & Mitchell, L. D. (1985). *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: Mc Graw Hill.
- Shigley, J.E. & Mischkie, C. (2001). *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: McGraw Hill Interamericana.
- Spiegel L, & Limbrunner G.F. (1999). *Applied Statics and Strength of Materials*. New Jersey.
- Stiopin, P.A. (1985). *Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
- Tada, H. Paris. (1973). *The stress analysis of cracks handbook*.
- Timoshenko S. (1961). *Teoría de la Estabilidad Elástica*. Buenos Aires: EDIAR.
- Timoshenko S. (1965). *Resistencia de Materiales*. Moscú: Nauka.
- Troshenko, V.I. (1987). *Resistencia a la fatiga de los metales y aleaciones*. Naukova Dumka.
- Volmir A. (1986). *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
- Wilson Ch. (1997). *Computer Integred Maschine Design*. New Jersey.

***Anexos***

Anexos

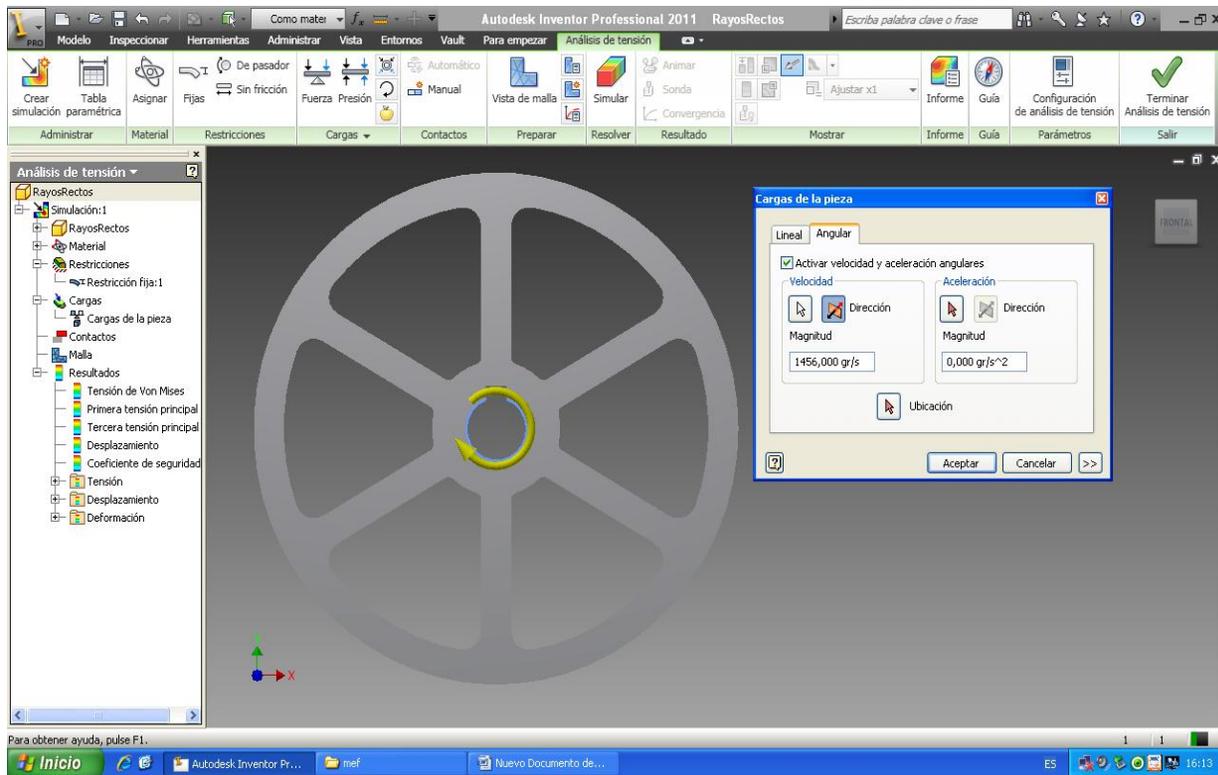


Anexo1. Dimensiones del volante de inercia de rayos rectos.

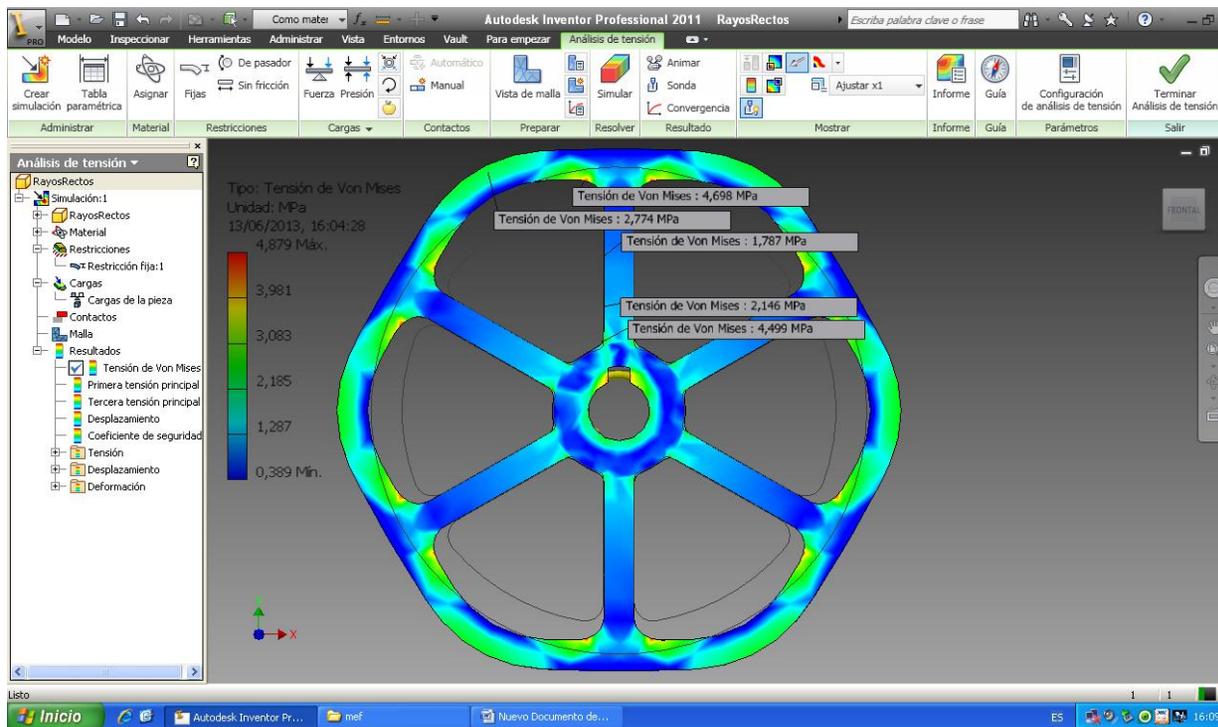


Anexo2 Propiedades del material usado obtenido por el Software Inventor 2012.

# Anexos

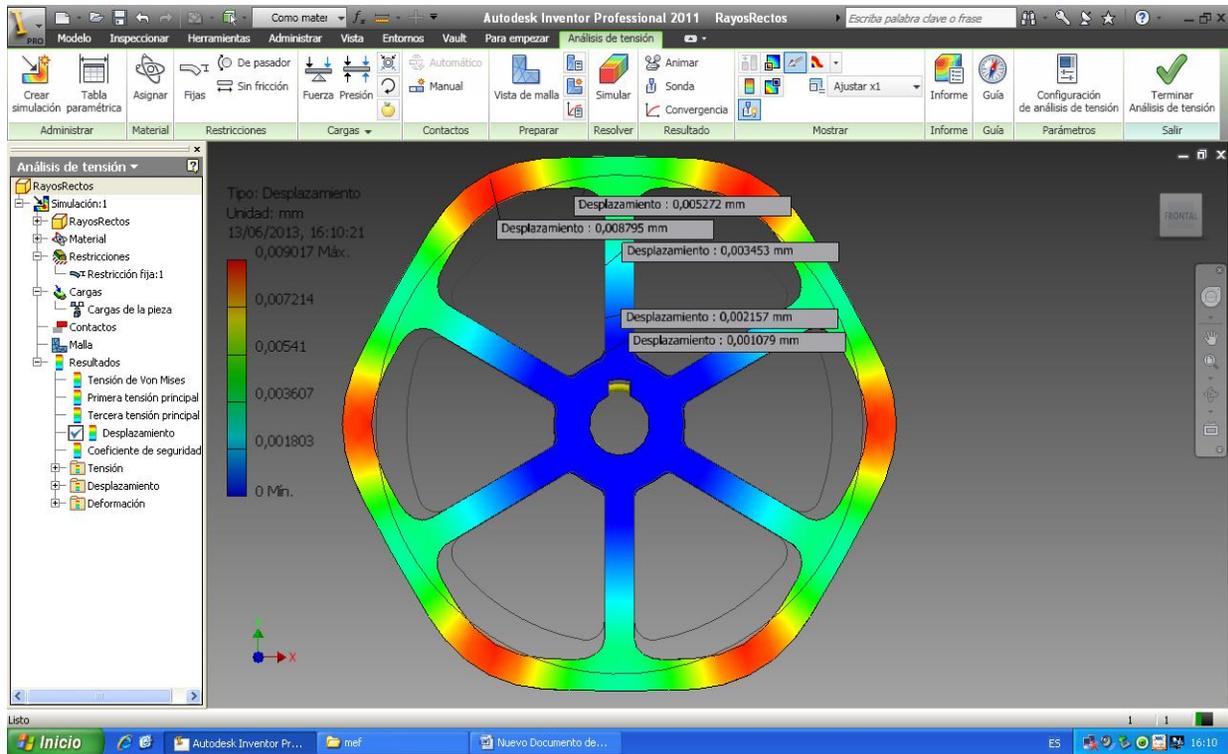


Anexo3. Aplicación y sentido de la velocidad angular.

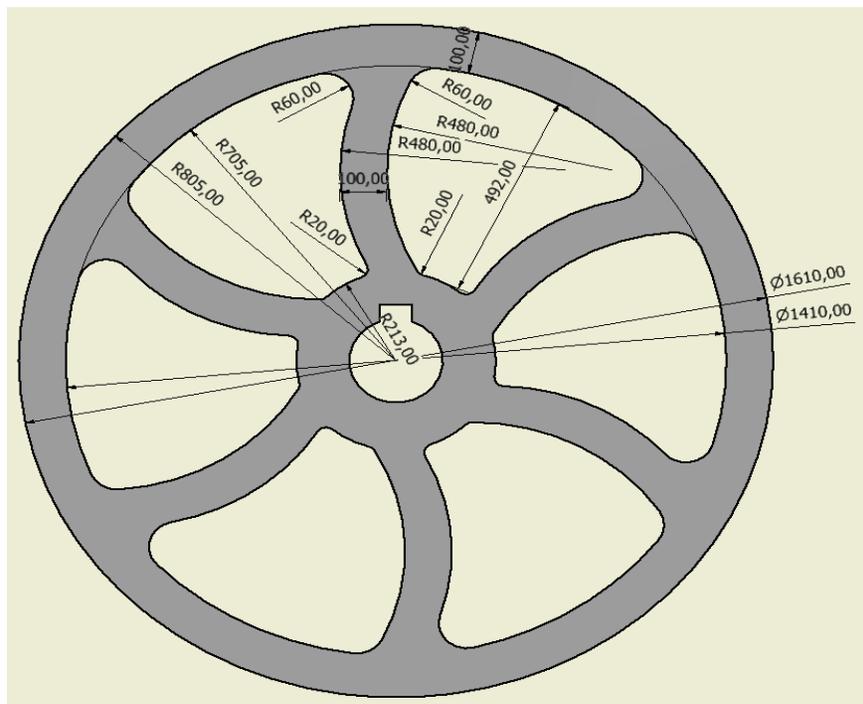


Anexo4. Representación de las tensiones.

## Anexos

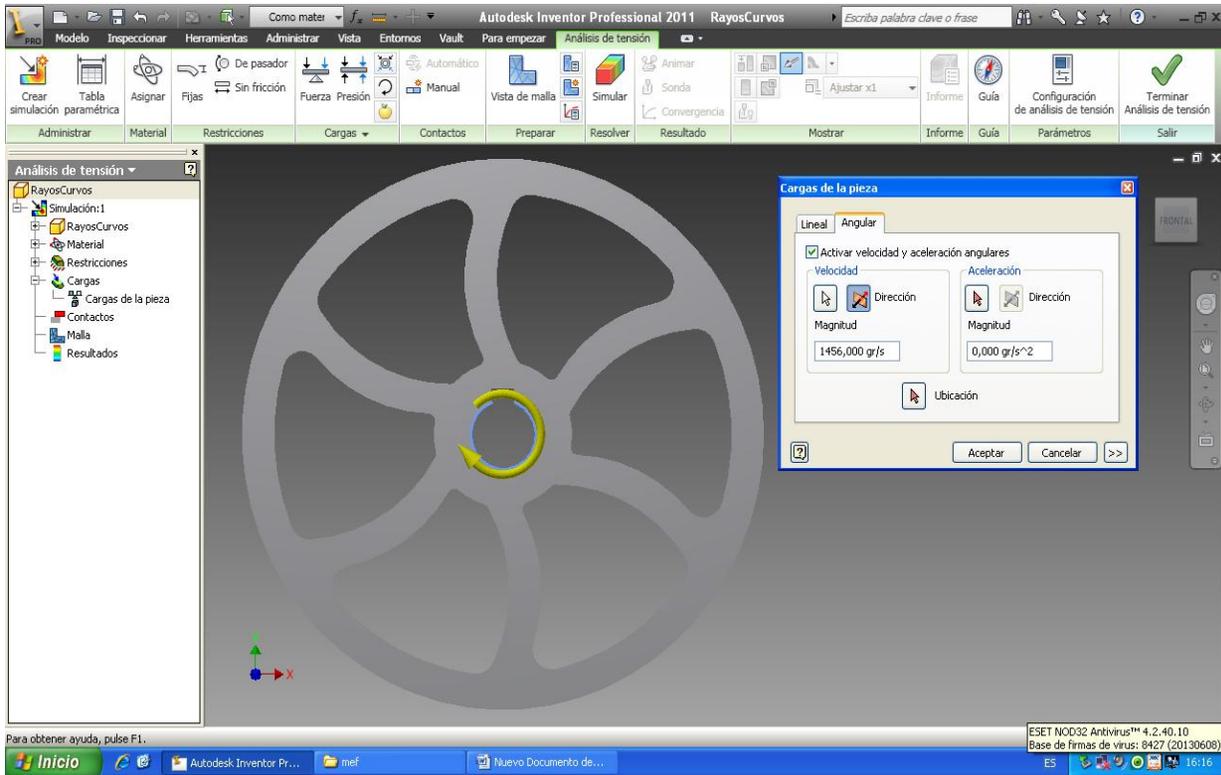


Anexo5. Representación del desplazamiento o deformación del volante.

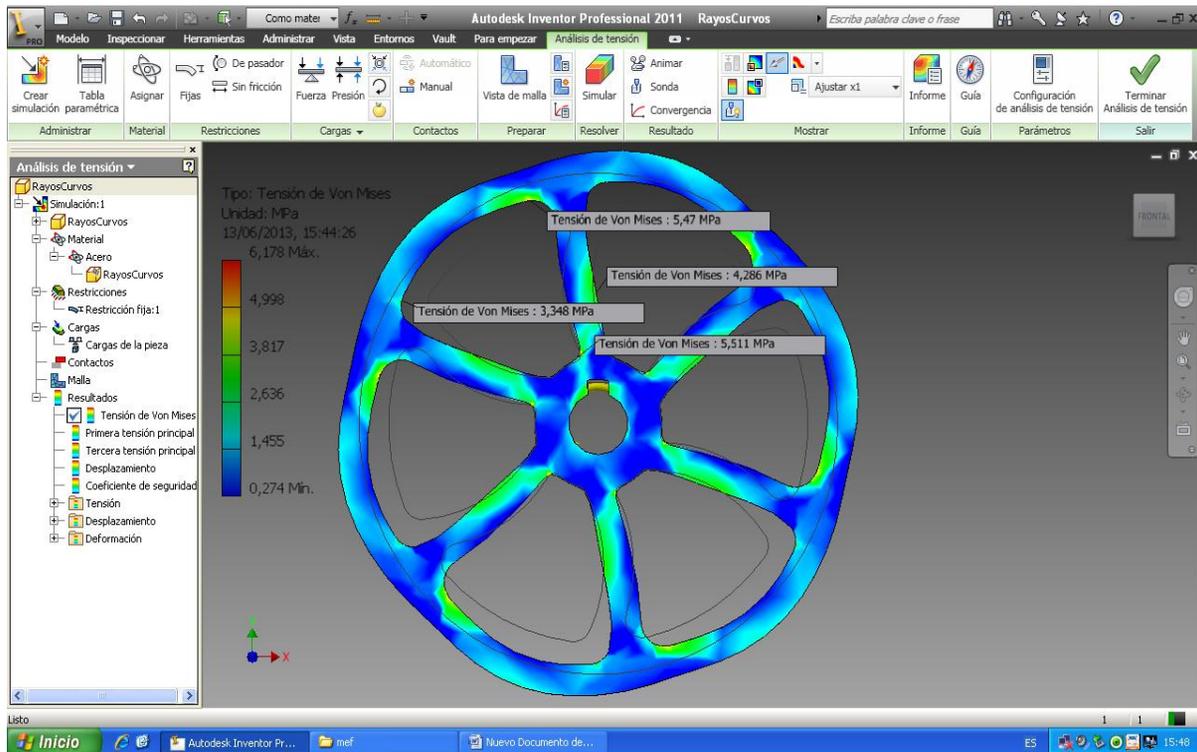


Anexo6. Dimensiones del volante de inercia de rayos curvos.

# Anexos

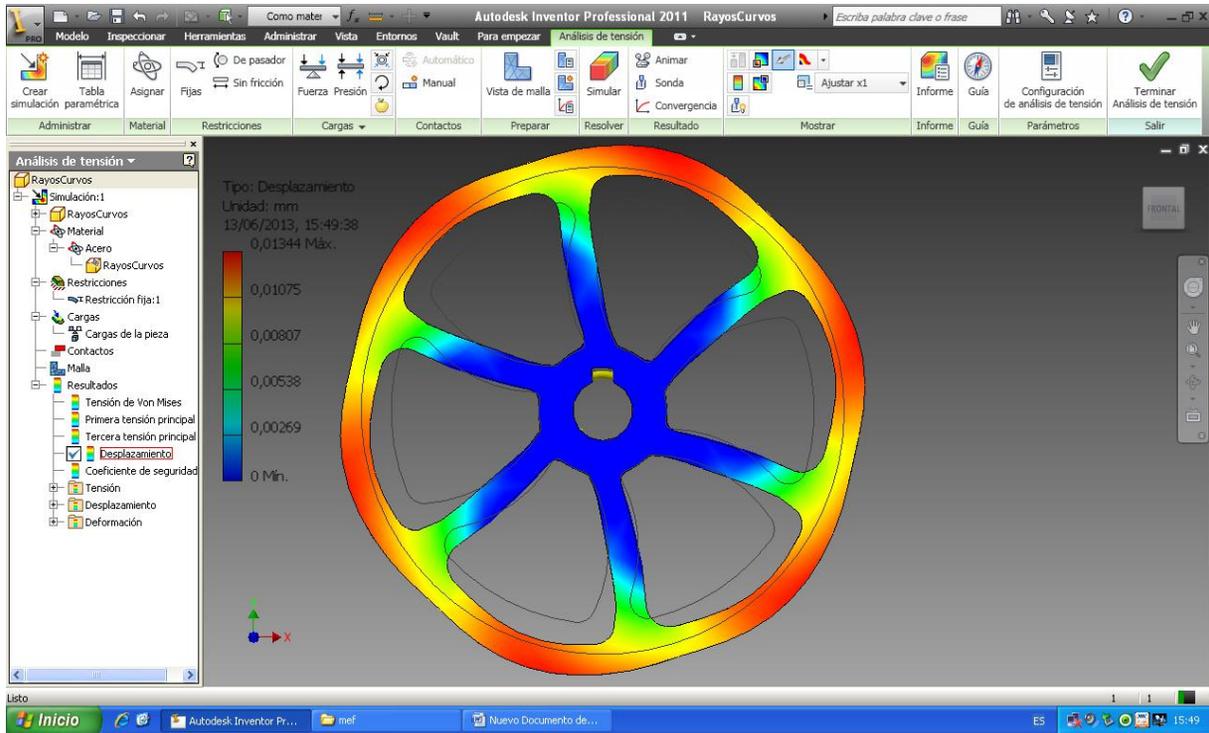


## Anexo7. Aplicación y sentido de la velocidad angular.



## Anexo8. Representación de las tensiones.

# Anexos



**Anexo9. Representación del desplazamiento o deformación del volante.**