Facultad de Ingeniería Mecánica.

Colectivo de Mecánica Aplicada.
Refinería de Petróleo "Camilo Cienfuegos"

TRABAJO DE DIPLOMA

MÉTODO DE CÁLCULO DE LA VELOCIDAD CRÍTICA DEL ÁRBOL DE UNA BOMBA CENTRÍFUGA MULTIETÁPICA CONSIDERANDO LA ELÁSTICIDAD DE LOS APOYOS Y DE LAS EMPAQUETADURAS

Autor: Luis Daniel Morales Ojeda.

Tutores: Dr. Rafael Antonio Goytisolo Espinosa (UCf)

Ing. Abdel Mendoza Fernández (UCf)

Ing. Giory Alemán González (PDV-CUPET S.A.)

Junio 2010

"Año 52 de la Revolución"

DECLARACION DE AUTORIDAD

UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS

Sistema de Documentación y Proyecto.

Hago constar que el presente trabajo constituye la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Cienfuegos, autorizando a que el mismo sea utilizado por el Centro de Estudio Superior para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de dicha institución.

____

Firma del autor.

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura, referido a la temática señalada.

____

Información Científico Técnico

Nombre y Apellidos. Firma.

____________________________ ____________________

Vice Decano. Firma del Tutor

Nombre y Apellidos. Firma.

____

Sistema de Documentación y Proyecto.

Nombre y Apellido. Firma.

Pensamiento

"El ingeniero es un medidor entre el filósofo y el obrero, y como intérprete entre dos extremos, debe entender el lenguaje de ambos, razón por la cual tiene la absoluta necesidad de poseer tanto los conocimientos prácticos como teóricos."

Henry Palmer, 1818.

Agradeciemientos

Este trabajo está dedicado con todo mi corazón a las personas que en mi vida me han motivado a luchar por alcanzar mis sueños y me han guiado por un buen camino, especialmente:

- A mis queridos y adorados padres Idania y Jorge Luis por confiar siempre en mí y enseñarme q ue para ser alguien en la vida se requiere de mucho sacrificio y dedicación, por todos sus consejos durante estos 23 años han formado la persona que hay soy. ¡Gracias por ello!

- A mi hermano por el afecto y el cariño que nos tenemos, por apoyarme en todo.

- A mis abuelos y mis tíos que me siempre me están aconsejando.

- En general a toda esa gran familia que formamos todos juntos.

Dedicatoria

Dedicatoria

Son muchas las personas a las que agradecer por mi formación como persona y como profesional al terminar este trabajo pero especialmente a:

- Mi familia, grandemente a mis padres que siempre me han apoyado en todo y han confiado en mí.
- Mis tutores; Rafael Goytisolo y Abdel Mendoza, gracias por su esmerada dedicación y entrega para conmigo.
- Los profesores que durante los cinco años de carrera fueron capaces de trasmitirme todos sus conocimientos.
- Mis compañeros que compartieron conmigo momentos que en mi vida serán inigualables.
- Las personas que me han brindado su ayuda cuando verdaderamente los necesite.
- Todas las personas que de una forma u otra me han ayudado a lo largo de este camino.
- A todos de todo corazón muchas gracias por todo.

Resumen

En el presente trabajo de diploma se describe un procedimiento general de cálculo de la velocidad crítica de árboles de turbo-máquinas aplicando los nuevos conceptos sobre elasticidad angular de los cojinetes de rodamientos tomando en consideración por primera vez en la práctica, las empaquetaduras de las bombas como apoyos elásticos complementarios, el cálculo fue desarrollado y aplicado al árbol de las bombas BERLIET, donde se estudiaron tres casos fundamentales con diferentes esquemas de análisis, para la determinación de la flecha y la velocidad critica para esta última se emplearon dos criterios fundamentales el de Dobrovosky y el de Birgger dando más acertado por este último autor debido a que esta solución es mucho más exacta y elaborada, y los valores obtenido son más cercando a la realidad. Para el primer caso se estudia el árbol simplemente apoyado con los dos apoyos rígidos donde para este caso la flecha obtenida fue la mayor de todas las estudiadas debido a que este caso el sistema menos rígido y por consiguiente la velocidad crítica calculada es la menor de todas, el otro caso que se analiza es con cuatro apoyos rígidos incluyendo en el la flecha obtenida es la menor de todas y por consiguiente la velocidad critica que se alcanza es la mayor de todas, y por último el caso considerando la elasticidad de las dos empaquetaduras intermedia, esto da una flecha con valores intermedios entre los dos casos antes mencionados y por consiguiente la velocidad critica también da entre los dos valores obtenidos anteriormente.

Índice

Contenido

INTRODUCCIÓN

Introducción

INTRODUCCIÓN

En la literatura de Elementos de Máquinas que se emplea en la Ingeniería Mecánica (Reshetov, 1985; Faires, 1985; Dobrovolski, 1991; Iusilievich, 1988; Ivanov, 1991; Shigley, 1977; Shigley-Mitchell, 1985; Wilson, 1997; Shigley-Mischkie, 2001; Shigley-Mischkie, 2005) se aborda el cálculo de la velocidad crítica en los árboles de máquinas de forma muy simple, con expresiones aproximadas que no consideran todos los factores que intervienen en la velocidad crítica o con esquemas muy simples de cargas, por ejemplo con un rotor simple colocado en la posición media entre los apoyos. Otros autores como por ejemplo (Timoshenko, 1966) no profundizan tampoco en el cálculo de esta propiedad tan importante en los árboles, pero sin embargo, alertan sobre la influencia que tiene en esta velocidad el efecto giroscópico que presenta un rotor cualquiera durante el giro cuando el mismo no está colocado en la posición central entre los apoyos.

La velocidad crítica es una función de la rigidez del árbol, mientras más rígido es el árbol, mayor es la velocidad crítica. Este concepto y esta expresión es la que refieren la enorme mayoría de los autores de Elementos de Máquinas. (Reshetov, 1985) por otro lado da incluso la siguiente Tabla con las expresiones de la frecuencias naturales de vibraciones en árboles para diferentes condiciones en los apoyos, pero todos los casos analizados corresponden a árboles con un simple rotor colocado en una determinada posición del mismo, sin considerar el peso propio de los árboles y con los apoyos rígidos clásicos. (Birger, 1986), sin embargo, profundiza al máximo en el cálculo de la velocidad crítica en rotores de turbomáquinas y da una metodología, basada en la solución por métodos numéricos de las ecuaciones diferenciales e integrales obtenidas para el caso complejo de turbomáquinas, como lo es por ejemplo el árbol siguiente del compresor centrífugo mostrado de cuatro secciones y 10 etapas (Fig. 1).

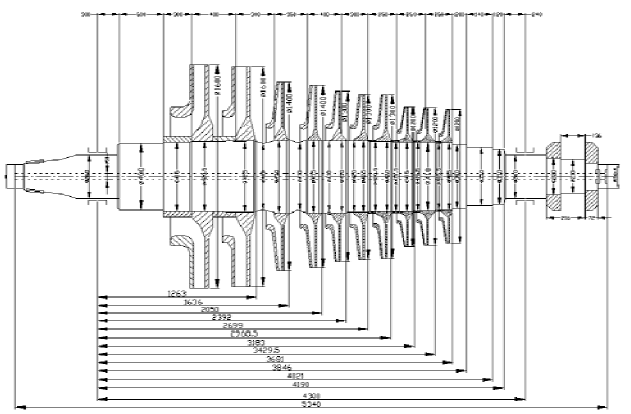


Fig. 1 Árbol de un turbocompresor de cuatro secciones con diez etapas analizado por Birger

INTRODUCCIÓN

Birger incluso da los elementos necesarios para tomar en cuenta la influencia de la elasticidad lineal de los apoyos en la velocidad crítica de los árboles, pero no queda claro como resuelve por métodos numéricos las ecuaciones diferenciales e integrales que aparecen y en ningún momento se refiere a como tomar en cuenta la elasticidad angular de los apoyos. La Situación Problémica concreta con relación a los soportes de los árboles es la siguiente. Los soportes de los árboles de las máquinas históricamente se han idealizado a través de tres esquemas típicos: el apoyo articulado móvil, el apoyo articulado fijo y el apoyo empotrado, sin embargo, estos esquemas idealizados se alejan en cierta medida de la realidad. Los apoyos articulados provocan en los mismos: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes, mucho mayores que los reales y los apoyos empotrados: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho menores que las que existen en la realidad. Muchos de los Esquemas de Análisis y de los Métodos de Cálculo que se han empleado históricamente en el cálculo de los Elementos de Máquinas y Equipos son susceptibles de perfeccionamiento, algunos de ellos hay que reconocer históricamente han sido abordadas en la literatura de forma muy simplificada. El desarrollo de nuevas y potentes herramientas para la Ingeniería en general y para la Ingeniería Mecánica en particular como son los softwares: Mechanical Destok, EXCEL, MatLab y otros y el desarrollo que ha sufrido la Mecánica Computacional con la aplicaciones de Soluciones Numéricas a los problemas de la Mecánica, han propiciado las condiciones para poder perfeccionar estos Esquemas de Análisis y Métodos de Cálculo.

El Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos viene trabajando desde hace varios años en los Esquemas de Análisis de Árboles empleando el Esquema de Apoyos Elásticos. Los soportes de máquinas de los árboles han sido idealizados históricamente a través de tres esquemas de análisis típicos que son: el Apoyo Articulado Móvil, el Apoyo Articulado Fijo y el Apoyo Empotrado. Sin embargo estos apoyos idealizados se alejan de la realidad, puestos que los Apoyos Articulados implican en los elementos fuerzas internas, flechas y pendientes mucho mayores que las reales, mientras que los Apoyos Empotrados, implican por el contrario fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho menores que las que existen en la realidad. En las investigaciones precedentes del Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos (Nodal, 2003; Hidalgo, 2004) se ha planteado un nuevo esquema de análisis para los apoyos de las máquinas y de las estructuras y ha sido desarrollado el procedimiento para la construcción de los diagramas de momentos flectores en árboles y vigas isostáticas con apoyos que tienen una rigidez angular intermedia entre el empotramiento rígido y la articulación pura, denominados en estos trabajos: Empotramientos Elásticos o Empotramientos Parcialmente Elásticos. Se realizó además previamente una investigación para

INTRODUCCIÓN

la determinación experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes tipos de cojinetes de rodamiento comparando el mismo con los casos idealizados de apoyos (la articulación y el empotramiento). De estos experimentos se obtienen los valores del coeficiente de rigidez de algunos de los cojinetes de rodamientos reales considerados como Empotramientos Parcialmente Elásticos (Goytisolo, 2006, Hidalgo, 2008). Estas cualidades de los cojinetes de rodamientos convencionales serán utilizadas en el Perfeccionamiento de los Esquemas de Análisis y de los métodos de Cálculo de los Árboles de las Máquinas en general y en particular de las Bombas Centrífugas. Así por ejemplo una caja de bolas radial de doble hilera autoalineante se comporta a la flexión como una articulación rígida, sin embargo, una caja de bolas radial rígida de simple hilera se comporta a la flexión como un empotramiento parcialmente elástico con un coeficiente de rigidez $\varphi = 0,346$. Por otro lado, en la literatura especializada de Bombas Centrifugas, se dan las particularidades de las fuerzas que provoca el fluido sobre los árboles de acuerdo con el tipo de bombas pero al analizar específicamente el cálculo de los árboles de estas máquinas no se hace referencia alguna acerca de la consideración de las empaquetaduras como apoyos elásticos complementarios, que indudablemente juegan un papel importante en la velocidad crítica de estos árboles, ya que contribuyen a elevar su rigidez, sin embargo ningún autor de la literatura especializada de bombas o de Diseño de Máquinas lo contempla (Cherkasski, 1986; Karasik, 1989; Orlov, 1985).

Por otro lado (Frigiotti, Sauzi y Elvira, 2002), aplican el Método de los Elementos Finitos al árbol cardán de la figura, que por su configuración geométrica posee diferentes condiciones de rigidez en los extremos y demuestran su influencia en la velocidad crítica de este tipo de árboles.

El **Problema Científico** planteado se puede enunciar como sigue:

Existe una excesiva idealización en los Esquemas de Análisis relativos a los Apoyos empleados tradicionalmente en el cálculo de los árboles de las máquinas en general, no existiendo una metodología clara acerca de cómo tomar en cuenta la elasticidad lineal de los apoyos y no se menciona en la literatura como considerar su elasticidad angular, lo que impide calcular con la exactitud adecuada la velocidad crítica de los mismos.

La identificación de este Problema ha permitido formular la siguiente **Hipótesis**: Es posible emplear Esquemas de Análisis en el cálculo de la velocidad crítica de los árboles de las máquinas que consideren aspectos no tomados en cuenta como regla como son: El peso propio de los árboles, la rigidez real de los cojinetes de rodamientos sobre los cuales está montado el árbol, la presencia de apoyos suplementarios elásticos como pueden ser las empaquetaduras en las bombas o sopladores centrífugos, que rompan con los paradigmas clásicos existentes en este sentido y que permitan calcular con una mayor aproximación con la realidad la velocidad crítica en los árboles de las máquinas en general aplicando los nuevos conceptos sobre elasticidad angular de los cojinetes de rodamientos (Goytisolo, 2006, Hidalgo, 2009) y la consideración por primera vez en la práctica de las empaquetaduras de las bombas como apoyos elásticos complementarios (Goytisolo, 2010) desarrollar un procedimiento general de cálculo para árboles de bombas centrífugas, considerando el efecto favorable de estas influencias.

El **Objetivo General** del presente trabajo es por lo tanto:

Desarrollar un procedimiento general de cálculo de la velocidad crítica de árboles de máquinas en el cual, aplicando los nuevos conceptos sobre elasticidad angular de los cojinetes de rodamientos (Goytisolo, 2006, Hidalgo, 2009) y la consideración por primera vez en la práctica de las empaquetaduras de las bombas como apoyos elásticos complementarios (Goytisolo, 2010) desarrollar un procedimiento general de cálculo de la velocidad crítica en árboles de turbo máquinas en general.

Los **Objetivos Específicos** son:

1. Aplicar el procedimiento de cálculo desarrollado al árbol de las bombas BERLIET, sin considerar la elasticidad angular de los cojinetes de apoyos y las empaquetaduras como apoyos suplementarios.
2. Aplicar el procedimiento de cálculo desarrollado al árbol de las bombas BERLIET, sin considerar la elasticidad angular de los cojinetes de apoyos y considerando las empaquetaduras como apoyos rígidos suplementarios.
3. Aplicar el procedimiento de cálculo desarrollado al árbol de las bombas BERLIET, considerando la elasticidad angular de los cojinetes de apoyos y las empaquetaduras como apoyos suplementarios elásticos y comparar los resultados obtenidos con los casos anteriores analizados.

Las **Tareas de Investigación** a desarrollar son las siguientes:

1. Profundizar en la literatura sobre los métodos de cálculo de la velocidad crítica en árboles.
2. Profundizar en los aspectos constructivos y de funcionamiento de las bombas centrífugas y en particular en los aspectos relacionados con las fuerzas radiales y axiales en los impelentes y en la construcción y materiales de las empaquetaduras.
3. Profundizar en las características específicas constructivas de las bombas BERLIET contra incendios del buque “6 de Junio”.
4. Aplicar el procedimiento de cálculo desarrollado al árbol de las bombas BERLIET, sin considera y considerando la elasticidad angular de los cojinetes de apoyos y las

empaquetaduras como apoyos suplementarios elásticos y comparar los resultados obtenidos entre sí, con el objetivo de establecer las influencias.

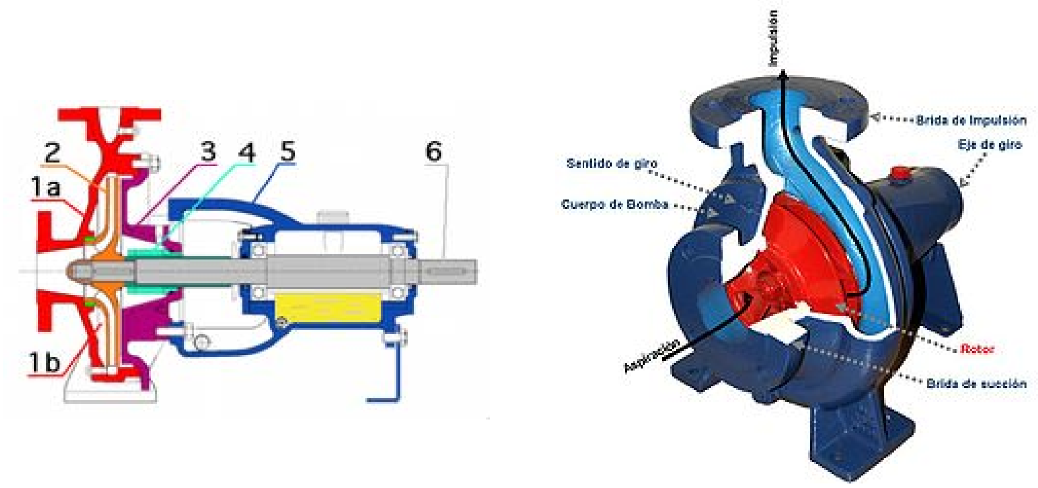
Capítulo I

Capítulo I Particularidades constructivas de las bombas centrífugas de sus árboles y cojinetes y características específicas de los soportes de los árboles de las máquinas en general. Fuerzas en las bombas centrífugas.

1.1 Partes estructurales principales de las bombas centrífugas. Materiales que se emplean.

1.1.1 Características fundamentales de las bombas centrífugas.

Para ilustrar las partes fundamentales de una bomba centrífuga se muestra en la Fig. 1.1 un corte y una vista de una bomba centrífuga de simple etapa, donde se señalan sus partes



fundamentales.

Fig. 1.1 Corte de una bomba centrífuga y partes fundamentales

1a y 1b Cuerpo de bomba, 2 Rodete o impelente, 3 Tapa de impulsión, 4 Empaquetaduras, 5 Soporte de los cojinetes, 6 Árbol.

Una bomba centrífuga es un tipo de dispositivo que transforma la energía cinética del rodete o impulsor rotatorio llamado comúnmente impelente o simplemente rodete, en energía hidráulica de presión del fluido. El fluido entra por el centro del rodete (ojo de succión), que puede disponer de unos álabes guías para conducir el fluido, y por efecto de la fuerza centrífuga es impulsado hacia el exterior, donde es recogido por la carcasa o cuerpo de la bomba, que por el contorno su forma lo conduce hacia las tubuladuras de salida o hacia el siguiente rodete (siguiente etapa en las bombas de múltiples etapas). Aunque la fuerza centrífuga producida depende tanto de la velocidad en la periferia del impulsor como de las características del fluido, la energía que se aplica por unidad de masa del líquido es independiente de la densidad del mismo. Por tanto, en una bomba dada que funcione a cierta velocidad y que maneje un volumen definido de líquido, la energía que se aplica y transfiere al líquido como energía de presión en (Pa, metros de columna de agua, etc.) es la misma para cualquier líquido sin que importe su densidad. Tradicionalmente la presión proporcionada por la bomba en metros de columna de agua se expresa en metros y es por ello que se denomina genéricamente como "altura". Las bombas centrífugas tienen un uso muy extendido en la industria ya que son adecuadas casi para cualquier uso. Las más comunes son las que están construidas con un único rodete, que abarcan capacidades hasta los 500 m^3/h y alturas manométricas hasta los 100 metros con motores eléctricos de velocidad normalizada. Estas bombas se suelen montar horizontales, pero también pueden estar verticales y para alcanzar mayores alturas se fabrican disponiendo varios rodetes sucesivos en un mismo cuerpo de bomba, llamadas bombas multietápicas, de esta forma se suman las presiones parciales que ofrecen cada uno de ellos y la bomba en su conjunto entrega mayor presión, pudiéndose lograr de este modo alturas del orden de los 1200 metros para sistemas de alimentación de calderas. Las bombas centrífugas constituyen no menos del 80% de la producción mundial de bombas, porque es la más adecuada para mover más cantidad de líquido que las bombas de desplazamiento positivo. Los impulsores convencionales de bombas centrífugas se limitan a velocidades en el orden de 60 m/s (200 pie/s).

1.1.2 Principales tipos de bombas centrifugas:

En la gran variedad de bombas centrifugas encontramos los siguientes principales tipos:

1- Radiales, axiales y diagonales
2- De impulsor abierto, semiabierto y cerrado
3- Horizontales y verticales

1.1.3 Campo de aplicación de los distintos tipos de bombas.

El diagrama muestra una relación entre el caudal en litros/minuto y la altura hidráulica de los distintos tipos de bombas, dentro de las cuales se encuentran ubicadas las bombas centrífugas mencionadas. Subiendo en vertical se encuentra el tipo de bomba y potencial necesario para una altura hidráulica determinada.

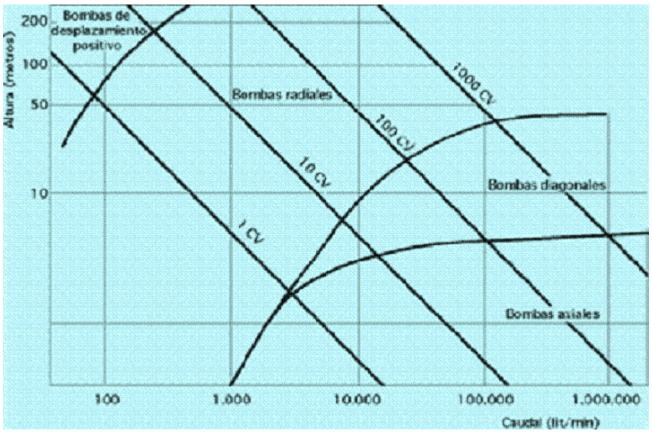


Fig. 1.2 Caudal y altura de los principales tipos de bombas

1.1.4 Características fundamentales de los cuerpos, arboles y apoyos de los árboles de las bombas centrífugas.

Las partes principales de una bomba centrífuga son: la rueda de trabajo o impelente, el árbol con las piezas de sujeción de las ruedas y de protección contra el desgaste con ayuda de prensaestopas y sus empaquetaduras, cojinetes, manguito de unión, cuerpo, dispositivos guías, tubuladuras de aspiración y de descarga, tornillos de apriete y de sujeción. Las ruedas de trabajo se fabrican de distintas tipos de hierro fundido, acero al carbón y aleados, aleaciones de metales no ferrosos y de materiales cerámicos. El empleo de uno u otro material se determina por las condiciones de trabajo, las dimensiones y la frecuencia de rotación, así por el género del líquido que se trasiega.

Las ruedas de las bombas pequeñas para agua pura y líquidos no agresivos de baja temperatura se funden de hierro gris para construcciones. Las bombas centrífugas para la alimentación de las calderas de alta presión tienen dimensiones considerables y alta frecuencia de rotación. Ellas suministran agua a cierta temperatura, por lo cual las ruedas de trabajo de estas bombas se confeccionan de acero al cromo-níquel. Las ruedas de las bombas para el desplazamiento de mezclas de tierra con escoria se hacen de función blanca. Las bombas para la industria tienen ruedas fabricadas de aleaciones especiales, de cerámica o de plásticos. Las bombas para el trasiego de agua de mar se hacen por ejemplo de bronce.

Las ruedas de grandes dimensiones tiene un cubo de longitud considerable; esto dificulta su ajuste preciso sobre el árbol. Para facilitar el encaje el cubo se mandrina por dentro en dos diámetro, y se ajusta cada diámetro interior por separado, esto facilita el arme y desarme.

A las superficies fundidas de las ruedas se les plantean exigencias especiales: estas superficies deben poder pequeña rigurosidad para disminuir las pérdidas internas. Las superficies interiores y testal del cubo, así como las superficies de los anillos de empaquetaduras deben ser sometidas a tratamientos térmicos.

El árbol de la bomba es una pieza de gran importancia; en el caso de alta frecuencia de rotación él experimenta la acción de grandes fuerzas trasversales. Al calcular la resistencia y la rigidez del árbol se toman en consideración las siguientes cargas exteriores: el momento torsor transmitido desde el motor, el propio peso del árbol y las piezas montadas sobre él, las fuerzas transversales, condicionadas por el suministro y la descarga asimétrica del líquido y la inexactitud del equilibrado de las ruedas. Los árboles se fabrican de productos laminados o forjados. En ambos casos se puede realizar o no tratamientos térmicos. Como material para los árboles sirven como regla los aceros al carbono para construcciones y aleados especiales, en usos muy específicos se usan también los aceros inoxidables.

El árbol con las piezas encajadas en él lleva el nombre de rotor de la bomba. Los rotores de las bombas centrífugas se equilibran, con la particularidad de que en las bombas pequeñas se realiza el equilibrio estático y el dinámico.

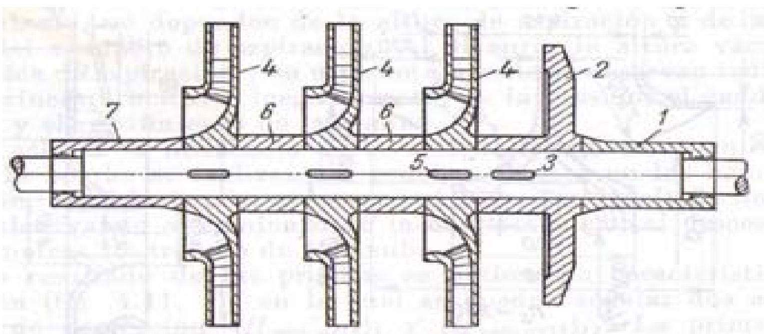


Fig. 1.3 Rotor de una bomba centrífuga Multietápica.

En la Fig. 1.3 se muestra el corte longitudinal del rotor de una bomba de tres etapas con equilibrado de la fuera axial con la ayuda de un disco de descarga. El encaje de las piezas sobre el árbol se realiza aquí de la manera siguiente. En la rosca del extremo derecho del árbol se coloca el casquillo cilíndrico 1, que protege el árbol del desgaste con ayuda de una empaquetadura de prensaestopas. En el extremo izquierdo del casquillo 1 se apoya la superficie testal del disco de descarga 2. El cual se retiene contra el giro en el árbol con auxilio de la chaveta insertada 3. Directamente en el extremo izquierdo del cubo de este disco se apoya el extremo del cubo de la tercera rueda de trabajo 4. Esta última se fija en el árbol con ayuda de la chaveta insertada 5, calculada para trasmitir del árbol a la rueda una potencia igual a la suma de la potencia interna de la rueda y la potencia de rozamiento del disco. Las ruedas de trabajo se separan una de otra con ayuda de los manguitos separadores 6. Con el cubo de la primera rueda de trabajo linda el casquillo de protección izquierdo 7, el cual, con ayuda del casquillo roscado 1, aprieta compactamente contra el árbol todas las piezas encajadas en él. El rotor armado de tal modo, al apretar fuertemente los casquillos forma como si fuera una sola pieza. El árbol como se aprecia queda prácticamente aislado del contacto con el líquido, pero esto no lo exime de la posible erosión y corrosión del mismo. El tratamiento de las superficies testales de todas las piezas encajadas sobre el árbol debe ser especialmente preciso. De lo contrario, al apretar los casquillos 1 y 7 surge inevitablemente la flexión del árbol, que provoca el encorvamiento del rotor y la vibración de la bomba durante el servicio, producto de dicha deflexión.

Los cojinetes de las bombas centrífugas se seleccionan de distintos estructura. Las bombas de pequeña potencia, como regla, van dotadas de cojinetes radiales rígidos de bolas y soportes de modelos normales. El engrase de estos se realiza, habitualmente, con grasa consistente y, con menos frecuencia, con lubricante líquido del baño en el cuerpo del cojinete. Las bombas centrífugas de mayores dimensiones se construyen con el empleo de cojinetes de rodillos cilíndricos o cónicos. Las grandes bombas con gran caudal se hacen con cojinetes de deslizamiento. En unos casos se emplea la lubricación por aro, con ayuda de anillos que cuelgan libremente del árbol y que elevan el aceite lubricante al árbol desde el depósito en el cuerpo del cojinete; en otros casos el aceite lubricante se suministra a los cojinetes con ayuda de una bomba, por circulación. Se conocen casos cuando en las bombas centrífugas grandes se emplean cojinetes de deslizamiento segmentados.

Para acoplar los árboles de las bombas y motores lo más cómodo es el empleo de acoplamientos elásticos de distintas estructuras, que previenen la transmisión de las excentricidades y las vibraciones del árbol de la bomba al árbol del motor y viceversa. El acoplamiento elástico se debe encajar en los árboles de la bomba y el motor con la mayor precisión, sin apriete excesivo y deformaciones. Esto se exige porque las superficies exteriores tratadas del acoplamiento durante el montaje se efectúan los ajustes de la coincidencia de los ejes geométricos de los árboles.

El cuerpo de la bomba se hace de dos formas constructivas principales: 1) En secciones. 2) Con acoplamiento horizontal. El cuerpo en secciones consta de varias secciones principales y dos de cierre, en las cuales se encuentran las tubuladuras de aspiración y de impulsión. La última etapa de presión se dispone ordinariamente en la sección de cierre, que lleva la tubuladuras de impulsión de la bomba. Cada sección representa una envoltura cilíndrica de de paredes gruesas de hierro colado, de fundición de acero o de metales no ferrosos, que incluye el diafragma separador, y también los dispositivos guía directo e inverso. Una gran ventaja del cuerpo en secciones es la posibilidad de crear de las secciones iguales bombas de distintas presiones. En este caso varían solamente las dimensiones del árbol, de los tornillos de apriete y de la placa.

Los defectos del cuerpo en secciones son la complejidad del montaje y el pequeño acceso en las ruedas de trabajo para su revisión. Para la inspección y reparación de las ruedas de una bomba en secciones es necesario retirar los tornillos de apriete y quitar sucesivamente todas las secciones, desmontando simultáneamente el rotor.

El cuerpo con desacoplamiento horizontal consta de dos mitades enteramente fundidas de hierros colado o acero, la inferior de las cuales lleva las tubuladuras de aspiración o de impulsión. La última a propósito, no es obligatoria, pese a que crea una gran comodidad durante el desmontaje y la reparación de la bomba.

En las bombas de etapas múltiples, en las mitades del cuerpo van montados los diafragmas y las paletas de los dispositivos guía directos e inversos y los anillos de empaquetaduras. A veces se encuentran bombas de múltiples etapas con un cuerpo que consta de dos mitades, con dispositivos guías sin paletas. En estos casos las mitades enteramente fundida de los cuerpos se hacen con canales directrices espirales. Ambas mitades del cuerpo tienen bridas. Los planos de las bridas que lindan unos con otros están cepillados y bien rectificados. Los tornillos de sujeción aprietan las bridas con una junta fina o mástique colocado entre ellas. La gran comodidad del cuerpo de semejante construcción consiste en que al quitar la parte superior del cuerpo (la tapa), sin alterar las uniones de la bomba con las tuberías, se puede inspeccionar todas las ruedas de trabajo del rotor y sacar este último del cuerpo para su reparación. El cuerpo de la bomba dividida en el plano horizontal se muestra en corte transversal en la Fig. 1.4

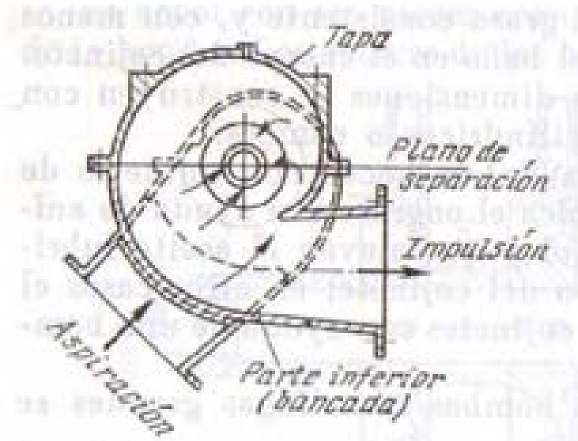


Fig. 1.4 Cuerpo de una bomba dividida en el plano horizontal

Además de los dos cuerpos principales examinados, en la energética, en las industrias de elaboración del petróleo y químicas se emplean bombas de dos cuerpos. Estas bombas representan una estructura en secciones o con desacoplamiento en el plano meridional, encerrada en una envoltura de paredes gruesas forjadas de acero. El empleo de semejantes estructuras está condicionado por las exigencias especiales en lo que se refiere a la fiabilidad y seguridad del servicio.

1.1.5 Empaquetaduras de las bombas centrífugas.

Al existir presión excesiva o vacío en las cavidades interiores de la bomba o los lugares por donde pasa el árbol a través de las paredes del cuerpo se emplean dispositivos especiales de empaquetadura, llamados a veces prensaestopas o empaquetaduras de rozamiento por contacto. Si no existen prensaestopas o estos están averiados tiene lugar las fugas del líquido desplazado por la bomba al exterior en la parte de impulsión o de succión del aire exterior hacia dentro de la bomba en la parte de aspiración.

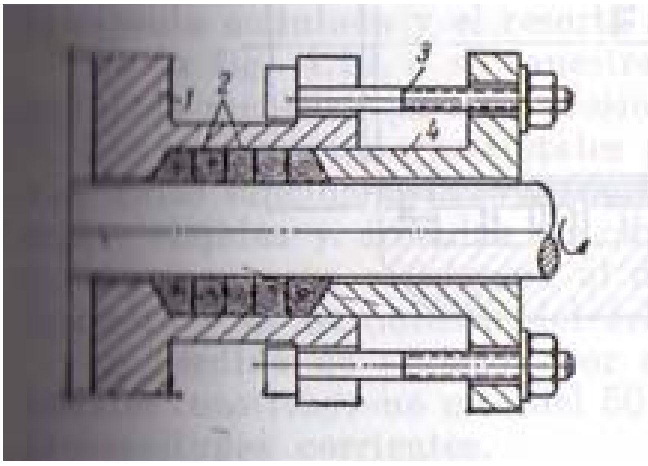
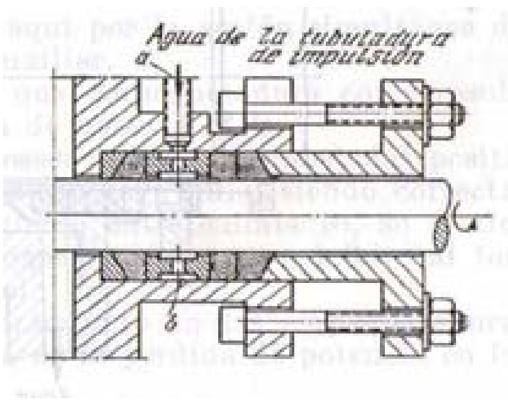


Fig. 1.5 Prensaestopas de una bomba centrífuga con empaquetaduras blandas.

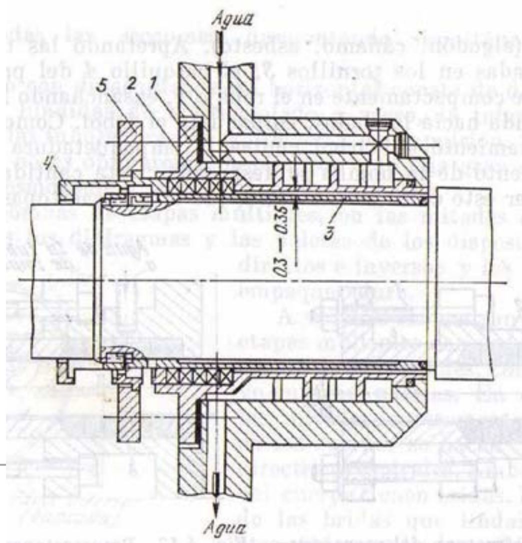
En la Fig. 1.5 se representa la estructura elemental de un prensaestopas con relleno blando. El rebajo cilíndrico practicado en el metal de cuerpo 1 se llena de anillos de cordón 2 de material



blando ingresado (algodón, cáñamo, asbesto). Apretando las tuercas, que son enroscadas en los tornillos 3, el casquillo 4 del prensaestopas se introduce completamente en la cavidad y, ensanchando la empaquetadura blanda hacia los lados, empaqueta el árbol, logrando el sellaje. Como consecuencia del rozamiento del árbol contra la empaquetadura durante el funcionamiento de la bomba se desprende cierta cantidad de calor. Para extraer este calor es necesario que el prensaestopas deje pasar cierta cantidad de líquido, que luego se descarga a la canalización. Por la parte de la aspiración se emplean frecuentemente prensaestopas con empaquetaduras con agua (Fig. 1.6)

Fig. 1.6 Prensaestopas de una bomba centrífuga con empaquetaduras blandas y sello de agua.

En las bombas que suministran agua caliente se emplean empaquetaduras con refrigeración intensiva por agua. En la Fig. 1.7 se muestra la estructura de semejante empaquetadura, empleadas en bombas de alimentación de calderas. En la tapa de la bomba se instala un casquillo nervado de paredes finas 1, que se empaqueta con ayuda de un anillo de plástico termo resistente. La empaquetadura 2 se coloca en la cavidad anular, formada por el casquillo 1 y el casquillo protector 3, y se aprieta con el vaso 4. El agua pasa a la empaquetadura por la rendija anular con una dimensión radial de 0.3 mm, donde se enfría intensamente al hacer



contacto con la superficie fría del casquillo 1. De este modo el casquillo y el árbol se protegen contra el recalentamiento.

Fig. 1.7 Empaquetadura de prensaestopas del árbol de una bomba que suministra agua caliente.

En la construcción de bombas contemporáneas halla amplia aplicación las empaquetaduras frontales. En la Fig. 1.8 se muestran los tipos principales de semejantes empaquetaduras. En la Fig. 1.8 a) se puede ver una empaquetadura de anillos de goma para la presión de 10 MPa. En esta empaquetadura el par de rozamiento consta del anillo 1 y del anillo metálico de perfil 2. El mantenimiento de la empaquetadura se alcanza con la ayuda del resorte 3 y una parte con el anillo elástico interior 4. En la fig. 1.8 b), se representa una empaquetadura análoga, con la única diferencia de que el anillo plástico fluorocarbúrico 1 del par de rozamiento y el anillo de goma interior 4 se han confeccionado cónicos. Las empaquetaduras de este tipo se emplean para una presión de hasta 0.5 MPa para agua y líquidos agresivos. En la Fig. 1.8, c) se representa un empaquetadura con capsula ondulada de plástico fluorocarbúrico o de propileno que se emplea para ácidos y álcalis para la presión de hasta 0.3 MPa. La apretura de la empaquetadura se crea aquí por la acción simultánea de la cápsula ondulada y el resorte auxiliar.

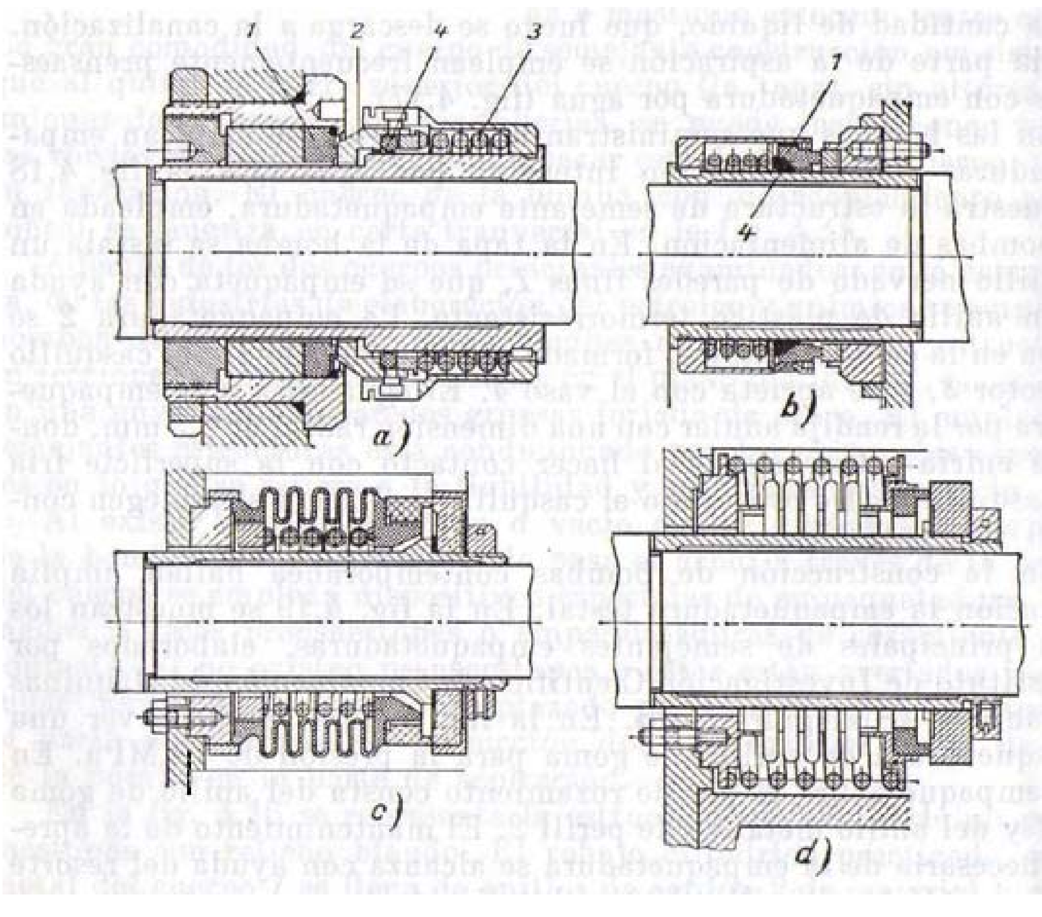


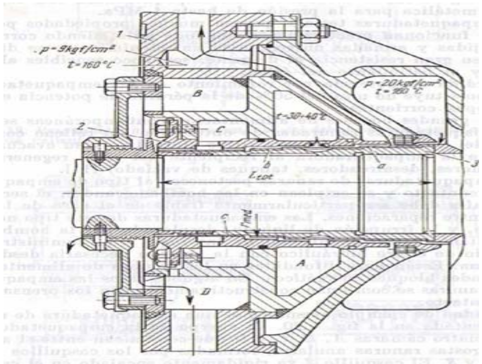
Fig. 1.9 Sistemas con empaquetaduras frontales.

Finalmente en la fig. 1.8, d) se muestra una empaquetadura con cápsula ondulada metálica para la presión de hasta 1 MPa. Las empaquetaduras frontales poseen muchas cualidades positivas. Ellas funcionan prácticamente con fugas nulas, si están correctamente seleccionadas y armadas no requieren mantenimiento, se distinguen por su gran resistencia al desgaste, son poco sensibles a las deformaciones y al batimiento del árbol. La pérdida de potencia por rozamiento en las empaquetaduras frontales constituye no más del 50% de la pérdida de potencia en los prensaestopas corrientes.

En las grandes bombas de alimentación contemporáneas se emplean empaquetaduras laberínticas de obstrucción sin relleno con el suministro del condensado frio para cierre hidráulico y su evacuación al salir de la empaquetadura al recipiente del ciclo regenerativo (condensadores, dearieadores, tanques de vacío., etc.). Las empaquetaduras laberínticas pertenecen al tipo de empaquetaduras sin contacto y se emplean en las bombas grandes, el servicio de las cuales deben ser particularmente fiable en el caso de largos períodos entre reparaciones. Las empaquetaduras de este tipo no son herméticas, y la irrupción de líquido, desplazado por la bomba se evita mediante la estrangulación de las fugas y el suministro de líquido frío de cierre hidráulico con la presión necesaria desde una fuente ajena. Están muy difundidas en las bombas de alimentación de los grandes bloques energéticos. En algunos casos las empaquetaduras de ranuras se combinan constructivamente con los prensaestopas de contactos.

En calidad de ejemplo examinemos una empaquetadura de ranura representada en la Fig. 1.9. El cuerpo de la empaquetadura 1 contiene cuatro cámaras A, B, C y D que comunican entre sí a través de angostas ranuras anulares, formada por los casquillos escalonados 2 y 3. El casquillo 2 va rígidamente encajado en el cuerpo 3, gira junto con el árbol. La cámara B se comunica con el reservorio de presión de evacuación, la D, con el reservorio sin presión, la C, con el condensador. El concentrado frío de cierro hidráulico se suministra a la cámara A a presión algo mayor que en la cámara B y, pasando a través de los orificios del casquillo fijo 2, se propaga por la ranura anular en ambas direcciones. En el espacio anular entre los casquillos el condensado se mezcla con la infiltración a través del sector de la ranura a y se evacúa el reservorio de presión. La otra parte de condensado se dirige por el sector de la ranura b a la cámara C y luego al condensador. Una parte insignificante de condensado pasa a través del sector de la ranura c y se vierte el reservorio sin presión. Para disminuir las infiltraciones y el gasto de condensado de cierre hidráulico la dimensión radial de la ranura se hace no mayor de 0.3 mm.

Fig. 1.9 Empaquetadura frontal de laberinto.



Las pérdidas de potencia por las empaquetaduras de ranuras es considerablemente menor que en las empaquetaduras de contacto.

1.1.6 Álabes guías y conductos de aspiración y descarga.

Los dispositivos guías se hacen sin paletas o con paletas. En el primer caso ellos representan unos canales espirales en la fundición del cuerpo, y en el segundo, son piezas recambiables que se fijan en las cavidades de las secciones o en las mitades superior o inferior del cuerpo. En algunas estructuras el flujo pasa de etapa o de un grupo de etapas no por canales en el cuerpo de la bomba, sino por tubos de pasos especiales, ubicados fuera del cuerpo de la bomba. Las tubuladuras de aspiración y de impulsión forman ordinariamente una sola pieza con la mitad inferior del cuerpo de la bomba o con sus secciones. En casi todas las estructuras están hechas con una ligera inclinación hacia el cuerpo (con un ángulo de hasta 12^0).

1.1.7 Bases de cimentación.

Las bases de cimentación están destinadas para instalar y fijar a ellas la bomba y el motor, y en algunos casos solamente para sujetar la bomba. Ellas representan una estructura plana nervada fundida con salientes horizontales cepillados, en los cuales se apoyan y se fijan las patas del cuerpo de la bomba. Las bases de cimentación se funden de hierro colado o se sueldan de perfiles laminados de acero. El empleo de las bases de cimentación crea grandes comodidades durante el montaje y los ajustes de las bombas y los motores. No obstante, en las grandes bombas las bases de cimentación comunes para la bomba y el motor a veces no se utilizan.

1.2 Los soportes de los árboles de las máquinas.

Los soportes de los árboles de las máquinas históricamente se han idealizado a través de tres esquemas de análisis típicos: el apoyo articulado móvil, el apoyo articulado fijo y el apoyo empotrado, sin embargo, estos esquemas idealizados se alejan en cierta medida de la realidad. Los apoyos articulados provocan en los mismos: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho mayores que los reales y los apoyos empotrados: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho menores que las que existen en la realidad. Estas insuficiencias de los esquemas de análisis se han asimilado históricamente a través del controvertido factor de seguridad, encargado de llevar sobre su espalda todas las imprecisiones e incertidumbres de los cálculos. Los esquemas de análisis de los apoyos rígidos clásicos utilizados en los sistemas planos en la literatura de Mecánica Teórica se muestran en las Fig. 1.8. En la literatura técnica se utilizan otros apoyos articulados que consideran las propiedades elásticas de los apoyos. Estos modelos se muestran en las Fig. 1.9. En la literatura de Mecánica Teórica (Bedford and Fowler, 2002; Beer and Johnston, 1884; Meriam, 2003) sólo se hace referencia a los apoyos rígidos clásicos, ningún autor hace referencia a ningún otro tipo de apoyo que contemple una rigidez intermedia entre los apoyos articulados y los empotrados.

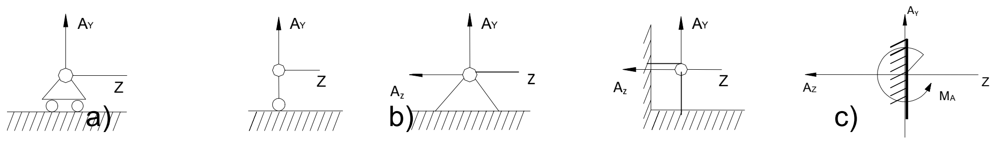
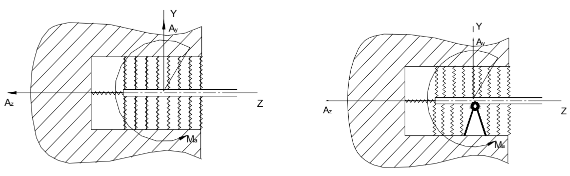


Fig. 1.8 Esquemas de Análisis Clásicos a) Apoyo Articulado Rígido Móvil
b) Apoyo Articulado Rígido Fijo. c) Empotramiento Rígido.

a) b)

Fig. 1.9 Esquema de Análisis del Apoyo Articulado a) Móvil Elástico y b) Móvil fijo.

En la literatura de Mecánica de Materiales, la mayoría de los autores se refieren también exclusivamente a los apoyos rígidos clásicos, sin contemplar en ningún caso la elasticidad de los apoyos (Fitzgerald, 1986; Fogiel, 1988; Mott, 1996; Spiegel and Limbrunner, 1999).Otro grupo de autores trata de alguna manera los apoyos elásticos mencionados anteriormente (Birger, 1966; Feodosiev, 1985; Pisarenko, 1989) y sólo en (Olsen, 1965) se menciona la posibilidad de que los empotramientos no sean perfectamente rígidos, pero sin profundizar en las cualidades ni en el modelo físico – matemático de este tipo de Esquema de Análisis y mucho menos en los procedimientos de cálculo. En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles Esquemas de Análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo: (Wilson, 1999) al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar: cajas de bolas, rolletes, cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión. Más adelante expresa: “Si el soporte de la viga no permite movimiento relativo a lo largo del eje de la misma, entonces surgirá una restricción adicional que provocara una fuerza axial como resultado de dicha restricción”. Este efecto axial se desprecia siempre en los problemas de Diseño de Máquinas y continua diciendo: “El apoyo empotrado, proporciona cómo reacciones una fuerza y un momento que no permiten rotación alguna en el plano de la deflexión del elemento. La pendiente de la curva elástica del elemento es cero en el apoyo empotrado, los que son utilizados para representar soportes muy rígidos”. Cuando se refiere a las reacciones en los cojinetes en el diseño de árboles, explica que: “generalmente los mismos están soportados por dos cojinetes, como regla, los cuales son considerados como soportes simples o simple apoyos”. Al construir diagramas de momentos flectores, tanto en elementos sometidos a flexión como en el diseño de árboles, sólo se refiere a los apoyos clásicos y sus reacciones correspondientes. Los autores que abordan el Diseño por el Método de los Elementos Finitos (MEF) (Hawkers, 1989; Volmir, 1986; Wilson, 1997) emplean diferentes tipos de elementos que se diferencian por su forma, a través de las posiciones relativas de sus nodos y por los grados de libertad, es decir por las posibles direcciones del movimiento de cada nodo, Eligiendo adecuadamente estos elementos en las zonas de apoyo es posible modelar apoyos con diferente rigideces y lograr una mayor aproximación a la realidad que en los clásicos apoyos articulados y empotrados. Esta cualidad del Método de los Elementos Finitos puede ser utilizada en la práctica para lograr aproximaciones más exactas. El Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos ha definido un Nuevo Tipo de Apoyo Elástico: El Empotramiento Elástico (Fig. 1.10 a) y el Empotramiento Parcialmente Elástico (Fig. 1.10 b) y ha determinado experimentalmente (Nodal, 2004; Goytisolo, 2006; Hidalgo 2009) el coeficiente de rigidez de los cojinetes de rodamientos más comunes al ser utilizados como apoyos en árboles. Una caja de bolas radial de doble hilera autoalineante se comporta a la flexión como una articulación rígida, sin embargo, una caja de bolas radial rígida de simple hilera se comporta como un empotramiento parcialmente elástico con un coeficiente de rigidez φ = 0,346.



a) b)

Fig. 1.10 a) Empotramiento Elástico b) Empotramiento Parcialmente Elástico

1.3 Investigación experimental del coeficiente de rigidez de los cojinetes de rodamientos.

Para la determinación de los desplazamientos reales que se producen en el centro de la luz en un árbol con diferentes cojinetes de rodamientos en los apoyos, se construyó la instalación experimental que se muestra en la Fig. 1.11 a) y b) para aplicar carga se utilizó la prensa neumática de la Fig. 1.11 a) (Goytisolo, 2006; Hidalgo, 2009)

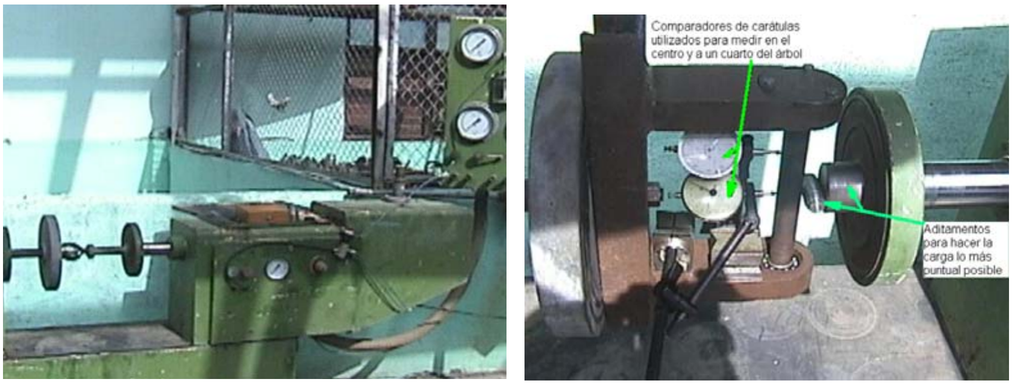


Fig. 1.11Instalación Experimental. a) Prensa Neumática b) Medición de las flechas

En la determinación experimental de la flecha real en árboles con apoyos con diferentes tipos de rodamientos se realizaron dos mediciones para cada valor de la carga y diez valores de carga por cada rodamiento Utilizando la ecuación siguiente obtenida en el trabajo para la flecha en el centro de la luz en el caso de un árbol sobre empotramientos elásticos y los resultados de las mediciones se determinó el coeficiente de rigidez despejándolo de la siguiente ecuación obtenida para la flecha.

$$\varphi = \left(\frac{y_{\frac{l}{2}} \cdot 48 \cdot E \cdot I_x}{P \cdot l^3} + 1 \right) \cdot \frac{P \cdot l}{6 \cdot M_{emp}}$$

Al aplicar esta ecuación hay que tener en cuenta que la flecha obtenida en la medición experimental $y_{l/2}$ es negativa por convenio de signos y hay que sustituirla en la ecuación con su correspondiente signo negativo. Los resultados se obtuvieron en una Hoja de Cálculo de EXCEL y se muestran en la Tabla 2.

Tabla 1.1. Valores del coeficiente φ de rigidez de los apoyos

Caja de Bolas Radial de	Caja de Bolas Radial de Doble	Rollete Cónico

Simple Hilera	Hilera	
0,314492907	0,711912932	0,45900928
0,30107353	0,703654853	0,447654422
0,345202637	0,625203108	0,421073732
0,361862163	0,599511309	0,418062974
0,347731673	0,590519179	0,421435023
0,355877141	0,581848197	0,397918268
0,355439213	0,543310497	0,395181215
0,362850309	0,52959997	0,376190282
0,357847819	0,524041648	0,356815559
0,360256425	0,526931975	0,348695116
Media o promedio de los resultados		
0,34626338	0,59365337	0,40420359
Desviación promedio de los resultados		
0,01560421	0,05313375	0,0292435

En el siguiente gráfico se muestra el diagrama de P v_s y obtenido, donde se aprecia, tal como era de esperar los desplazamientos medidos ocupan una posición intermedia entre los apoyos articulados y empotrados. La caja de bolas radial de simple hilera (6204) es el rodamiento menos rígido, le sigue el rollete cónico (7204) y el rodamiento con mayor coeficiente de rigidez es la caja de bolas radial de doble hilera rígida (2204).

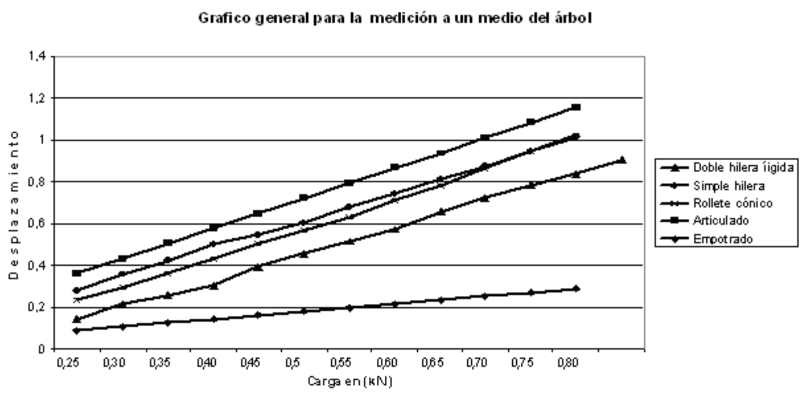


Fig. 1.12 Comportamiento experimental desplazamiento en el centro de la luz para diferentes cojinetes de rodamientos comparados con los apoyos idealizados articulado y empotrado.

Los valores del coeficiente de rigidez para cada uno de los cojinetes investigados, obtenidos en los experimentos se muestran en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Valores del coeficiente de rigidez		
Simple Hilera	Doble Hilera	Rollete Cónico
0,314492907	0,711912932	0,45900928
0,30107353	0,703654853	0,447654422
0,345202637	0,625203108	0,421073732
0,361862163	0,599511309	0,418062974
0,347731673	0,590519179	0,421435023
0,355877141	0,581848197	0,397918268
0,355439213	0,543310497	0,395181215
0,362850309	0,52959997	0,376190282
0,357847819	0,524041648	0,356815559
0,360256425	0,526931975	0,348695116

Los valores medios de los coeficientes de rigidez de los cojinetes investigados fueron:

1. Caja de bolas radial de simple hilera: $\varphi_{cbrsh} = 0,346$
2. Rollete cónico de simple hilera: $\varphi_{rcsh} = 0,404$
3. Caja de bolas radial de doble hilera rígida: $\varphi_{cbrdhr} = 0,60$

En los trabajos (Nodal, 2004; Goytisolo, 2006; Hidalgo 2009) se demuestra que el momento de reacción en un empotramiento elástico o en un empotramiento parcialmente elástico se puede calcular como el producto del coeficiente φ del cojinete correspondiente por el momento que surge en el empotramiento rígido correspondiente, o sea:

$$\mathbf{M_{empotramiento.\ elástico} = \varphi_{cojinete} \cdot M_{empotramiento.\ rígido}}$$

1.4 Fuerzas axiales y radiales sobre los impelentes de las bombas centrífugas.

1.4.1 Fuerzas axiales.

Estas fuerzas surgen en las máquinas centrífugas como resultado de las presiones, de igual valor y dirección, que actúan sobre las ruedas de trabajo por los lados delantero (dirigido hacia la admisión) y trasero, además, la fuerza axial surge como resultado de la acción dinámica del flujo que entra entre las ruedas de trabajo. En las grandes máquinas centrífugas multietápicas las fuerzas axiales pueden alcanzar varias decenas de toneladas. Durante el cálculo de las fuerzas centrífugas que actúan sobre las superficies curvilíneas de la rueda de trabajo se deben examinar las proyecciones de estas superficies sobre un plano perpendicular al eje geométrico de la máquina. Supongamos que en la cavidad de entrada a la rueda de trabajo la presión es igual a p1, Fig. 1.13. Si existe la empaquetadura a en el diámetro de entrada de la rueda la presión final p2 se propaga a través de las holguras a las cavidades b y c delante y detrás de las rueda. La presión axial real p en cualquier punto de la superficie exterior de las rueda, que se encuentra a una distancia arbitraria del centro, es el resultado de la acción de los presiones: P_1 y P_w, creada por la acción de la fuerzas centrífuga del líquido que gira en la cavidad entre la superficie exterior de la rueda y el cuerpo, es decir:

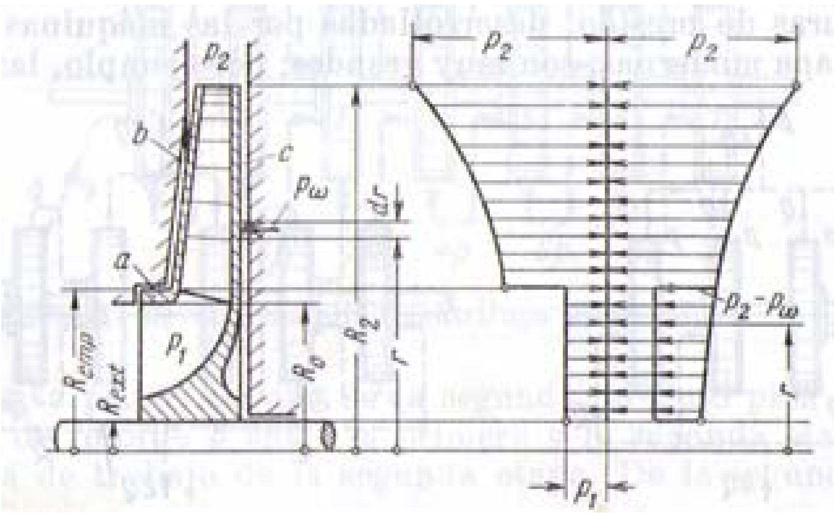


Fig. 1.13 Distribución de las presiones axiales por las superficies exteriores de la rueda de una máquina centrífuga.

$P = P_2 - P_w$

Por vía experimental se ha demostrado que en ausencia de gasto a través de las holguras la velocidad angular de la rueda del trabajo. A base de este razonamiento se puede calcular P_w. Separemos en la cavidad c volumen angular del líquido con una anchura igual a la unidad, y los radios r y $r+d_r$. Al girar este volumen anular con una velocidad angular $w/2$ en su superficie cilíndrica interior actúa la fuerza centrífuga del líquido.

$$dP_c = \rho * 2\pi r * dr * \frac{w^2}{4} r$$

La presión, condicionada por esta fuerza centrífuga, es

$$dP_w = -\frac{dP_c}{2\pi rl} = -\rho \frac{w^2}{4} r *$$

El signo negativo de dP_w indica que bajo la influencia de la fuerza centrífuga del líquido en las secciones cilíndricas de la cavidad c surge rarificación (disminuye la presión):

$$P_w = -\int_t^{R_2} \rho \frac{w^2}{4} rdr = -\rho \frac{w^2}{8} (R_2^2 - r^2)$$

De donde::

$$P = P_2 - P \frac{w^2}{8} (R_2^2 - r^2)$$

La empaquetadura hidráulica a la entrada en la rueda en la circunferencia de radio R_2 condiciona el equilibrio de las presiones exteriores sobre las ruedas de trabajo por los lados delantero y trasero. Entre los límites de R_{ext} a E_{emp} las presiones sobre las rueda no están equilibradas, puestos que por el lado posterior, la presión p, distribuida según la ley expresada por la fórmula (1.4). Evidentemente, la fuerza condicionada por estas presiones, que actúan sobre la rueda, es igual a:

$$P_p = \int_{R_{ext}}^{R_{emp}} 2\pi rdr \left[P_2 - \rho \frac{w^2}{8} \left(R_2^2 - r^2 \right) - \pi \left(R_{emp}^2 - R_{ext}^2 \right) * P_1 \right]$$

La integración y la transformación algebraica llevan a esta última ecuación a la forma:

$$P_p = \pi (R_{emp}^2 - R_{ext}^2) * (P_2 - P_1) - \frac{\pi \rho w^2}{8} (R_{emp}^2 - R_{ext}^2) \left[R_2^2 - 0.5 (R_{emp}^2 + R_{ext}^2) \right]$$

El flujo en la rueda de una máquina centrífuga radial cambia la dirección de movimiento. Al entrar en la dirección axial él abandona la rueda, moviéndose en los planos, perpendiculares al eje de la máquina, gracias a lo cual surge presión dinámica sobre la rueda. La fuerza condicionada por esta presión se puede determinar aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$P_{din}\Delta t = \left(m_s c_o - m_s c_2 \cos\frac{\pi}{2} \right)\Delta t$$

Donde $\Delta t = 1$ s. Entonces:

$$P_{din} = \rho Q c_o$$

La dirección de acción de la fuerzas P_{din} corresponde a la dirección de la velocidad c_o a la entrada de la rueda de la máquina. La fuerza axial que actúa sobre una rueda de trabajo de la máquina centrífuga se obtiene por adicción algebraica de las fuerzas: P_p y P_{din} :

$$P'_{ax} = \pi(R_{emp}^2 - R_{ext}^2)*(P_2 - P_1) - \frac{\pi\rho w^2}{8}(R_{emp}^2 - R_{ext}^2)\left[R_2^2 - 0.5(R_{emp}^2 - R_{ext}^2) \right] - \rho Q c_o$$

Como se ven en la expresión, las fuerzas axiales dependen de distintos factores los principales de estos son: las dimensiones radiales de la rueda R_2 y R_{emp} , la frecuencia de rotación y la presión a la salida de la rueda. La fuerzas axial es tanto mayor, cuanto menos cargada está la máquina, es decir, cuanto menor es la alimentación de la máquina, que se alcanza por estrangulación. El valor máximo de la fuerzas axial es en marcha en vació de la máquina (cierre total del estrangulador de regulación). Este se explica por la ausencia de la fuerza dinámica axial y la elevación de P_2 al disminuir la alimentación de la máquina.

La fórmula anterior se refiere a una etapa de la máquina centrífuga. Si la máquina centrífuga consta de i etapas iguales de presión, entonces la fuerza axial en el rotor será igual a:

$$P_{ax} = iP'_{ax}$$

En las condiciones reales, merced a las fugas a través de las empaquetaduras, los valores de la fuerza axial se diferencian algo de los calculados por las expresiones. La fuerza axial en las máquinas multietápicas puede alcanzar altos valores, y si es alta la frecuencia de rotación se soporta con dificultad por los cojinetes de empuje. Solamente en las máquinas de pequeñas dimensiones y con pequeño número de etapas se puede admitir que la fuerza axial sea soportada por los cojinetes de empuje.

La causa principal del surgimiento de las fuerzas radiales es la asimetría del flujo a la salida de la rueda de trabajo, condicionada principalmente por la influencia del conducto de descarga (de evacuación). Al cambiar la velocidad en el conducto de evacuación según la ley de conservación de la energía tiene lugar la correspondiente variación de la presión proporcionan en total la fuerza radial que actúa sobre el rotor de la bomba. La presión en el conducto de evacuación en espiral es constante por la longitud únicamente en el régimen calculado de la bomba con la alimentación óptima Q_o. Naturalmente que regular la bomba siendo $Q \leq Q_o$ el conducto de descarga espiral trabajo como difusor, mientras que para $Q \geq Q_o$, como confusor, y la velocidad en el disminuye o aumenta respectivamente. De este modo, la fuerza radial surge únicamente al desviarse el régimen del óptimo. Sobre la base de las premisas y experimentos teóricos la fuerza radial en una bomba con conducto de descarga espiral se calcula valiéndose de la fórmula:

$$P_r = k_r\left(1 - \frac{Q}{Q_o}\right)\rho g H D_2 b_2$$

De la fórmula se desprende que el valor máximo de la fuerza radial $(P_r)_{\max} = k_r \rho g H D_2 b_2$ se alcanza siendo $Q = 0$, y el mínimo, cuando $Q = Q_o$.

Para las bombas con conducto de descarga anular se emplea la fórmula:

$$P_r = k_r \frac{Q}{Q_o}\rho g H D_2 b_2$$

En los cálculos aproximados se toma $k_r = 0.36$.

Las fuerzas radiales son originadas también por el desequilibrio estático y dinámico del rotor a causa de la inexactitud de la tecnología y el montaje de la bomba. Un procedimiento radical de disminución de la fuerza radial consiste en emplear en las bombas multietápicas canales difusores. En estos casos se puede despreciar la fuerza radial originada por el líquido. Las fuerzas radiales se soportan por los cojinetes de la bomba e influyen esencialmente en su fiabilidad y duración.

1.5 Conclusiones del Capítulo.

1. Se profundizó en la estructura y en los detalles constructivos de las distintas partes de una bomba como son: cuerpo, árbol, cojinetes, empaquetaduras y base de cimentación, así como los materiales más comunes y de funcionamiento de las mismas y en particular en los aspectos relacionados con las fuerzas radiales y axiales en los impelentes.
2. Se profundizó en la literatura acerca de los apoyos clásicos empleados en los árboles de las máquinas y en el empleo de los esquemas de análisis con apoyos elásticos.
3. Se profundizó en los nuevos conceptos de empotramiento elástico y empotramiento parcialmente elástico y en los resultados precedentes obtenidos por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la UCf acerca del comportamiento de los cojinetes de rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos.

4. Se profundizó en las expresiones de cálculo de las fuerzas axiales y radiales de las bombas centrífugas y en particular el hecho de que en las bombas centrífugas multietápicas con difusores, las fuerzas radiales provocadas por el líquido se pueden despreciar.

Capítulo II

Capítulo II Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet de la embarcación contra incendios "6 de Junio"

2.1 Características de la Bomba Berliet del buque "6 de Junio".

La única embarcación contra incendios del país el buque "6 de Junio" del MININT después de 30 años de servicio fue sometida a una reparación general, pues su casco se había deteriorado sensiblemente y las dos bombas contra incendios de la misma habían sufrido deterioros provocadas por la acción corrosiva y erosiva del agua de mar que impedían su funcionamiento. La Bomba Objeto de Estudio es de tres etapas con difusores destinada a combatir incendio en los buques de abasto de petróleo crudo a la Refinería de Petróleo "Camilo Cienfuegos" de la ciudad de Cienfuegos, en los muelles de atraque de la misma o en cualquier otra instalación próxima al mar. La misma es completamente de bronce, pues bombea agua de mar, sin embargo, el árbol estaba fabricado de un acero aleado ferrítico - perlítico al cromo – níckel – molibdeno con buenas propiedades mecánicas y anticorrosivas en general, pero no era inoxidable. La corrosión después de un período prolongado de trabajo atacó íntegramente la superficie del mismo en las zonas de contacto con el agua de mar, destruyó casi todas las piezas de acero existente en la misma y se provocó definitivamente la avería del árbol mediante un proceso agresivo de corrosión bajo tensión. Se plantea analizar la posibilidad de construir el árbol de acero AISI 316, cuya resistencia a la tracción es inferior a la resistencia máxima del acero del cual estaba construido el mismo. Para poder precisar los cálculos se plantea la necesidad de utilizar un esquema de análisis más exacto incluyendo las cualidades como empotramientos elásticos de los cojinetes de apoyo y las cualidades como apoyos elásticos de las empaquetaduras y poder precisar la posibilidad de emplear dicho acero inoxidable de menor resistencia mecánica pero de gran resistencia a la corrosión que había sido precisamente la causa de su deterioro. Mientras que el trabajo de recuperación del casco fue llevado a cabo por el personal de la Empresa Nacional de Astilleros en el Varadero de "Punta Cotica", la recuperación de ambas bombas era ejecutada por un grupo de especialistas de la Refinería de Petróleo "Camilo Cienfuegos" perteneciente a la Empresa PDV-CUPET S.A y los obreros de su Taller Central. y simultáneamente se desarrollaba el presente trabajo en la Universidad "Carlos Rafael Rodríguez" de Cienfuegos en el cual se aplica un nuevo esquema de análisis de los árboles de las bombas centrífugas que incorpora la rigidez angular de los cojinetes de rodamientos y a las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios. En el presente Capítulo II se realiza el cálculo de la velocidad crítica de dicha bomba sin tomar en cuenta las particularidades de dicho Esquema de Análisis con Apoyos y Empotramientos Elásticos, que considera la influencia favorable de las empaquetaduras y la elasticidad angular de los cojinetes de rodamientos empleados en la resistencia del árbol, con el objetivo de poder comparar los resultados obtenidos en dicha velocidad con los que serán obtenidos en el Capítulo III donde serán consideradas dichas particularidades.

2.2 Esquema de la bomba centrífuga objeto de estudio y de su árbol.

En la Fig. 2.1 se muestra el esquema de la bomba centrifuga multietápica objeto de estudio. Se puede apreciar la ubicación de los cojinetes de apoyo y la ubicación de las empaquetaduras, las cuales serán consideradas como apoyos elásticos complementarios.

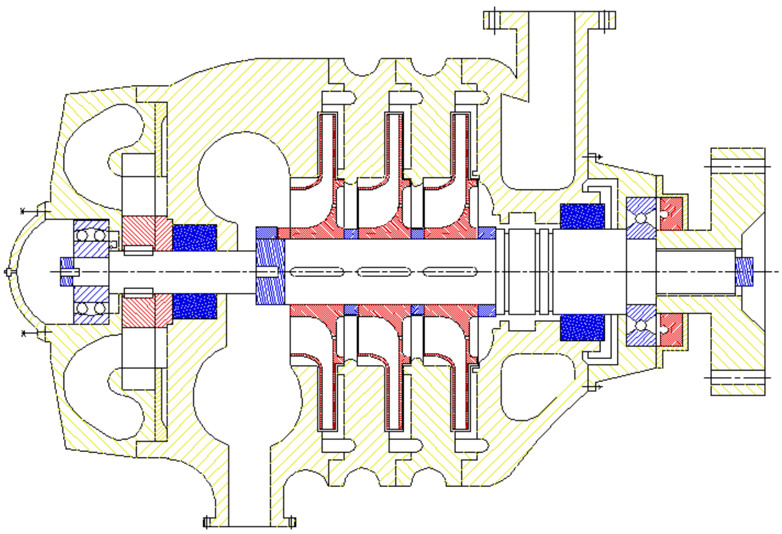


Fig. 2.1 Disposición de los apoyos y empaquetaduras en la bomba centrífuga multietápica con difusores objeto de estudio

En la Fig. 2.2 se muestra el esquema del árbol, los cojinetes de apoyo y las empaquetaduras.

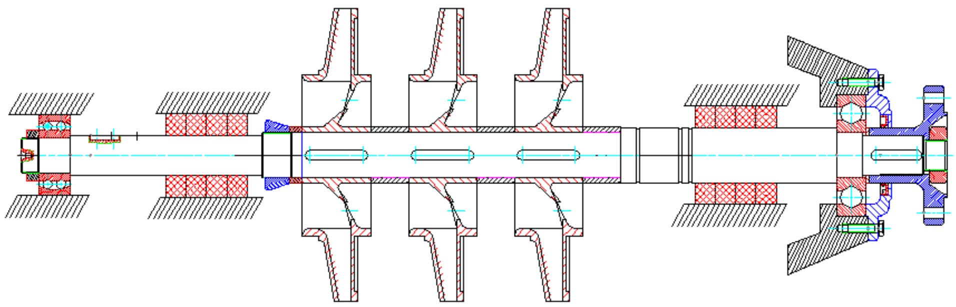


Fig. 2.2 Esquema del árbol con los tres impelentes, las empaquetaduras y los tipos de cojinetes de rodamientos en cada apoyo

Capítulo II: Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet

Las bombas centrífugas con difusores tienen la particularidad que las fuerzas radiales provocadas por el fluido en los impelentes se pueden despreciar y considerar exclusivamente las fuerzas originadas por el propio peso de los impelentes y la fuerza distribuida que representa el peso propio del árbol.

2.3 Método de cálculo propuesto por Dobrovolski para el cálculo de la velocidad crítica en árboles.

Durante el funcionamiento de un árbol, a causa de la presencia de las deformaciones y de las excentricidades lógicas existentes en los centros de masa de los elementos colocados sobre los mismos se originan vibraciones. El cálculo de un árbol a las vibraciones consiste en comprobar la posible condición de resonancia, o sea aquella situación en la cual la amplitud de las oscilaciones transversales se incrementa bruscamente y puede alcanzar tales valores que conducen al árbol a la rotura.

La resonancia aparece a un número de revoluciones por minuto que se conoce como velocidad crítica que no es más que aquella velocidad a la cual la frecuencia del cambio de las fuerzas externas coincide con las oscilaciones propias del sistema consistente en el árbol y las piezas colocadas sobre el mismo. La resonancia puede aparecer también cuando la frecuencia de los cambios de las fuerzas exteriores es múltiplo entero de la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema.

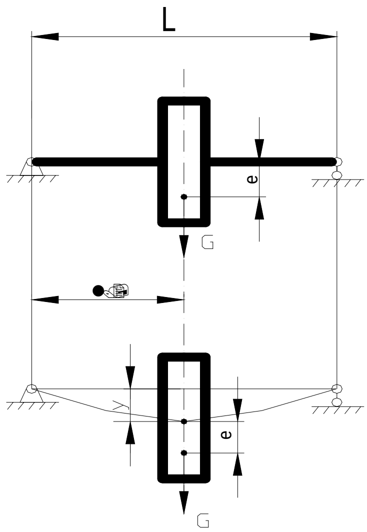


Fig. 2.3. Fuerza centrífuga en el árbol.

Supongamos que sobre un árbol Fig. 2.3 está colocado en posición simétrica con relación a los apoyos un disco de peso G, el centro de masa del cual está desplazado con relación al eje geométrico de magnitud e. Durante el giro aparece una fuerza centrifuga inicial debido a la excentricidad *e*, cuya magnitud es:

$$C_0 = m \cdot \omega^2 \cdot e \qquad (2.1)$$

Donde:

$m = \frac{G}{g}$

Bajo la acción de esta fuerza (sin considerar la influencia del peso propio) el árbol se pandeará una magnitud "y" (Fig. 3.2) lo que a su vez aumentará el valor de la fuerza centrífuga hasta una magnitud:

$$C = m \cdot \omega^2 (y + e) \qquad (2.2)$$

La magnitud de la flecha originada por una fuerza de magnitud ***C*** dispuesta simétricamente entre los dos apoyos, según el esquema de la Fig. 3.2**,** será igual a:

$$y = \frac{l^3}{48EI} \qquad (2.3)$$

De donde la fuerza C requerida para provocar una deflexión en el árbol de magnitud y será:

$$C = \frac{48\,EI}{l^3}\,y = ky \qquad (2.4)$$

Donde *k* es la rigidez a flexión de dicho árbol, o sea la fuerza que provoca una deflexión "e" igual a la unidad.

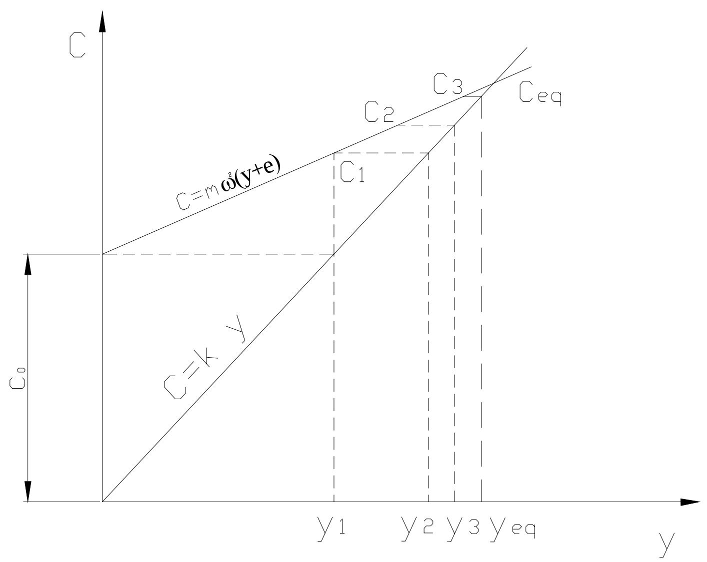


Fig. 2.4. Valor de la flecha de equilibrio en un árbol.

El proceso ocurrirá de la siguiente forma. La fuerza centrifuga inicial C_0 originará una fuerza centrifuga de magnitud:

$C_1 = m \cdot \omega^2 (y_1 + e)$ (2.5)

La fuerza $C_1 > C_0$ originará entonces una flecha $\boldsymbol{y_2}$ y esta aumentará la fuerza centrifuga un valor:

$C_2 = m\omega^2 (y_2 + e)$ (2.6)

y así sucesivamente hasta que alcance la flecha de equilibrio y_{eq}, para lo cual se cumplirá que la fuerza centrífuga originada para esta flecha (Fig. 2.4)

$C_{eq} = m\omega^2 (y_{eq} + e)$ (2.7)

Será igual a la fuerza requerida para provocar una flecha de magnitud y_{eq}

$C_{eq} = k \cdot y_{eq}$ (2.8)

Igualando ambas expresiones y despejando $\boldsymbol{y_{equilibrio}}$

$$y_{eq} = \frac{e}{\frac{k}{m\omega^2} - 1} \quad (2.9)$$

En la medida que aumenta la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$; crece la magnitud del pandeo para el cual se produce el equilibrio y la velocidad angular alcanza el valor $\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ resulta que $\boldsymbol{y \to \infty}$**,** o sea que a una velocidad angular de esta magnitud el árbol se debe romper. Esta velocidad se conoce como velocidad crítica (Dobrovolski, 1991):

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

Puesto que $\omega_{crit} = \frac{\pi n_{crit}}{30}$ en $\frac{rad}{s}$, entonces el número crítico de revoluciones por minuto del árbol será:

$$n_{crit} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{k_g}{G}} \quad (2.11)$$

Y como $g = 981 cm/s^2$ y $f = \frac{G}{k} - cm$, es el pandeo estático del árbol bajo la acción del peso propio G de la pieza colocada sobre el árbol. Se tiene aquí:

$$n_{crítica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/min \quad (2.12)$$

Esta conclusión es válida incluso si se tiene en cuenta el pandeo del árbol por el peso propio de sistema. La aproximación del número de revoluciones del árbol al valor crítico se manifiesta con un incremento de la vibración transversal del árbol. Como se aprecia este método de cálculo de la velocidad crítica es extremadamente simple pero ofrece dudas acerca de su exactitud.

La zona de las velocidades de giro entre: $0{,}7 n_{crit} \leq n \leq 1{,}3 n_{crit}$ no deben utilizarse pues la probabilidad de rotura del árbol es extremadamente alta. Sin embargo, causa de las distintas resistencias que surgen durante las vibraciones (rozamiento interno, rozamiento en los cojinetes, influencia del medio exterior, etc.) el incremento de las deformaciones en el árbol no es instantánea y si se pasa rápidamente por esta velocidad de giro del árbol resulta nuevamente estable, tal como se muestra en la (Fig. 2.5).

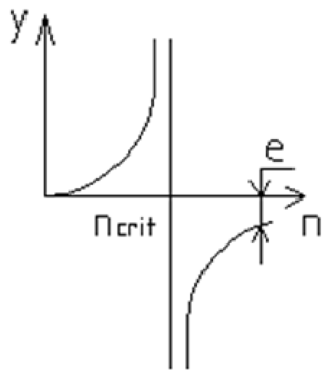


Fig. 2.5. Estabilización de giro del árbol para $n > n_{crit}$.

Los árboles que trabajan a velocidades de giro mayores que la velocidad crítica, usualmente $n \geq (2 \div 3)n_{crit}$ se llaman flexibles. O sea, si $\omega \rightarrow \infty,\ \ y \rightarrow -e$.

El paso por la zona de velocidades críticas se debe hacer rápido para evitar un incremento peligroso de las deformaciones y en estos casos es aconsejable incluso el empleo de un sistema de amortiguaciones especiales de las oscilaciones.

De este modo el peligro de la resonancia en los árboles se puede eliminar por dos vías:

- Utilizando arboles rígidos par los cuales $n << n_{crit.}$
- Utilizando árboles flexibles finos con velocidad crítica baja, que se pandean ligeramente bajo la acción de la fuerza centrífuga y que adquieran de nuevo el equilibrio estático cuando $n > n_{crit.}$

A muy grandes velocidades de giro por ejemplo en las centrifugas con $n = 20000 - 40000\ r/min$, el empleo de árboles flexibles es la única solución posible. Además su construcción se hace más barata y sencilla.

De la expresión se concluye también que en la medida que aumenta e, la inflexión del árbol aumenta y la zona de velocidades peligrosas del árbol se hace más amplia, de aquí que el balanceo dinámico del árbol junto con todas las piezas que van a estar colocadas sobre él, es un aspecto imprescindible en aquellos árboles de marcha rápida.

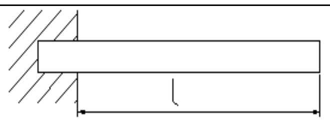
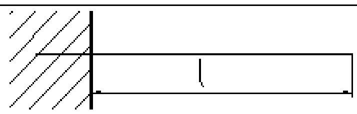
2.4 Método de cálculo propuesto por Reshetov para el cálculo de la velocidad crítica en árboles.

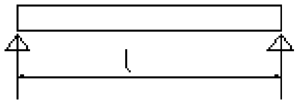
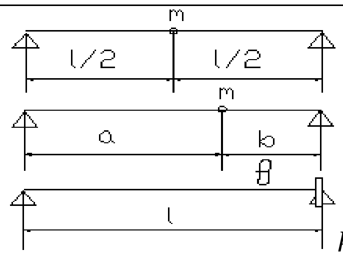
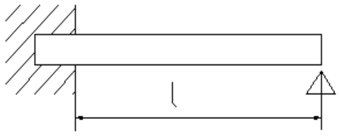
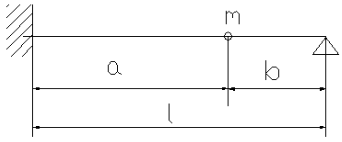
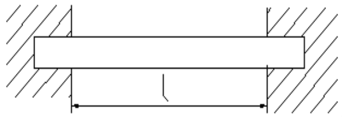
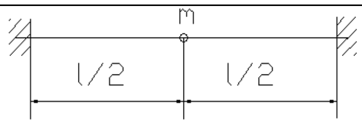
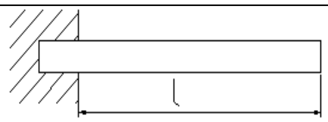
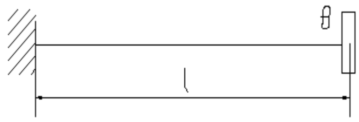
En las vibraciones que tienen lugar en las máquinas, generalmente participa una parte notable del sistema, en particular la cadena cinemática principal de la máquina y las piezas portantes principales. Las vibraciones independientes de árboles aislados de las transmisiones, por ejemplo, los árboles de las cajas de velocidad, no desempeñan un papel importante en la dinámica de las máquinas y por eso, tales vibraciones no se consideran separadamente. Al contrario, las vibraciones de los árboles principales con los conjuntos y apoyos unidos (rotores de turbinas, árboles cigüeñales de los motores, husillos de tornos con las piezas a elaborar) pueden tener una importancia decisiva.

Una gran importancia práctica para los árboles la tienen principalmente los cálculos de frecuencia de las vibraciones propias, para evitar la resonancia, es decir, el incremento de las amplitudes de vibraciones con la coincidencia o multiplicidad de frecuencia de las fuerzas excitadoras y de la frecuencia propia de la vibración. En los árboles se producen: vibraciones transversales o de flexión y angulares o torsionales, así como producto de la combinación de vibraciones transversales y torsionales. Las frecuencias de vibraciones propias de los árboles y los ejes sencillos se calculan, según (Reshetov, 1985) por las fórmulas que se dan en la Tabla 2.1. Los más extendidos son los cálculos de las frecuencias principales de vibraciones, ya que éstas por lo general, son mucho más peligrosas.

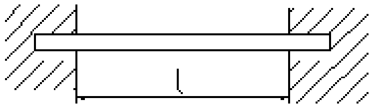
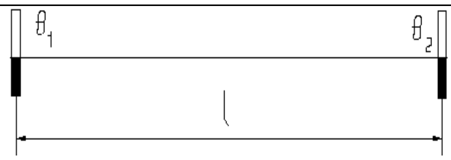
La frecuencia principal de vibraciones propias del árbol con masa concentrada, teniendo en cuenta la masa propia del mismo, se determina con mayor facilidad, si a la masa concentrada se le añade la masa reducida del árbol. El coeficiente de reducción, en caso de vibraciones torsionales para un eje voladizo de sección constante, con la masa en su extremo, es de 33/140; para un árbol con dos apoyos o un eje con la masa en su centro, 17/35; en caso de vibraciones torsionales de un árbol que tiene un extremo empotrado y el otro tiene un disco en voladizo se toma 1/3.

Tabla 2.1 Frecuencia de vibraciones propias de los árboles (Hz)

Vibraciones transversales de los árboles semejantes $f = a_n \sqrt{\frac{gEJ}{wl^3}} \qquad n = 1; 2; 3$	Vibraciones transversales de los árboles ligeros con las masas concentradas $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gk}{w}}$
 $a_1 = 0.56$ $a_2 = 3.57$ $a_3 = 9.84$	 $k = \frac{3EJ}{l^3}$

 $a_1 = 1.57$ $a_2 = 6.28$ $a_3 = 14.1$	 $k = \frac{48EJ}{l^3}$ $k = \frac{3EJl}{a^2b^2}$ $k = \frac{3EJ}{l\rho^2}$
 $a_1 = 2.45$ $a_2 = 7.96$ $a_3 = 16.6$	 $k = \frac{12EJl^3}{a^3b^3(3l+b)}$
 $a_1 = 3.57$ $a_2 = 9.84$ $a_3 = 19.3$	 $k = \frac{192EJ}{l^3}$
Vibraciones torsionales de los árboles semejantes $f = a_n\sqrt{\frac{GJ_0}{\theta\rho}}$	Vibraciones torsionales de los árboles ligeros con discos
 $a_1 = 0.25$ $a_2 = 0.75$ $a_3 = 1.25$	 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\theta}} \quad donde\ k = \frac{GJ_0}{l}$
Vibraciones torsionales de los árboles $f = a_n\sqrt{\frac{GJ_0}{\theta l}}$	Vibraciones torsionales de los árboles ligeros con discos

Capítulo II: Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet

 $a_1 = 0.5$ $a_2 = 1$	 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(\theta_1+\theta_2)}{\theta_1\theta_2}}$ donde $k = \frac{GJ_0}{l}$
Designaciones: **W** $\Rightarrow$ masa de los árboles o de las piezas encajadas en los mismos $\boldsymbol{\theta}$ $\Rightarrow$ momentos de inercia de los discos, para el cilindro circular de espesor constante, diámetro D y masa W $\theta = \frac{WD^2}{8g}$ **g** es la aceleración de la gravedad. **E, G** $\Rightarrow$ módulo de elasticidad del material y módulo de cizallamiento $\boldsymbol{J_1}$; $\boldsymbol{J}$ $\Rightarrow$ momentos ecuatorial y polar de inercia de las secciones de los árboles **l** $\Rightarrow$ longitud del árbol **ρ** $\Rightarrow$ radio de inercia de la masa respecto al eje de vibraciones Aquí la masa en kg; las longitudes en cm; aceleraciones en cm/s^2; módulos de elasticidad en kgf/cm^2.	 $f^2 = \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{k_1}{\theta_1} + \frac{k_1+k_2}{\theta_2} + \frac{k_2}{\theta_3} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{\theta_1} + \frac{k_1+k_2}{\theta_2} + \frac{k_2}{\theta_2}\right) - \frac{4k_1k_2}{\theta_1\theta_2\theta_3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}\right]$ Donde $k_1 = \frac{GJ_{01}}{l_1}$; $k_2 = \frac{GJ_{02}}{l_2}$

Al fin de determinar las frecuencias principales de las vibraciones de los árboles de sección variable, con frecuencia se utiliza el Método de la Viga Equivalente. La frecuencia se determina por la condición de igualdad de los valores máximos de las energías cinética y potencial de las vibraciones. Previamente se fija la forma de la línea elástica en las vibraciones, como tal casi siempre de adopta la línea elástica con masa propia considerada como una carga uniformemente distribuida.

La frecuencia principal de vibraciones propia de los árboles y de los ejes, según (Reshetov, 1985) puede determinarse por la fórmula:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sum W_i y_i}{\sum W_i {y^2}_i}} \qquad (2.13)$$

Donde W_i es la masa de las piezas colocadas sobre el árbol y los pesos propios del mismo; e y_i son las flechas de los árboles producidas por toda la carga (teniendo en cuenta los desplazamientos elásticos en los apoyos) en las secciones de acción de la masa W_i; g es la aceleración de la gravedad. Las fuerzas excitadoras principales en la mayoría de los árboles rápidos son fuerzas originadas por el desequilibrio de las piezas giratorias, cuya frecuencia de acción es igual a la velocidad de rotación de los árboles. En caso de coincidencia o de multiplicidad de las frecuencias de vibraciones propias de los árboles con su velocidad de rotación se produce la resonancia. Las correspondientes velocidades de rotación de los árboles se llaman críticas. La velocidad crítica de rotación del árbol, a la cual se produce la resonancia, se calcula entonces por la expresión: $n_c = 60 \cdot f \quad r.p.m$, donde f es la frecuencia de vibraciones transversales propias, en Hz. Se conoce que en régimen de resonancia o en zonas de trabajo cercanas a esta condición la amplitud de las oscilaciones se incrementa bruscamente y puede alcanzar valores que provoquen la rotura del árbol y de los elementos vinculados a él. La siguiente figura muestra el efecto de la resonancia en la amplificación de las vibraciones laterales de los árboles y ejes en dependencia del coeficiente de amplitud de resonancia.

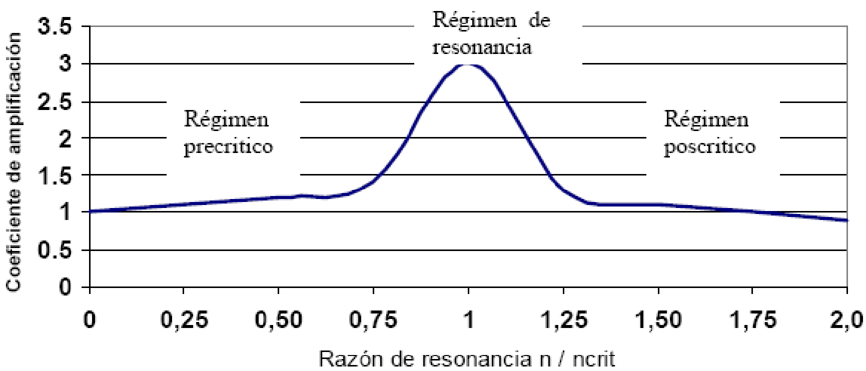


Fig. 2.6 Comportamiento de la amplificación de la amplitud de las oscilaciones en dependencia de la razón de resonancia, para un nivel constante de amortiguación.

La resonancia en el árbol aparece a una frecuencia de rotación determinada, denominada número crítico de revoluciones, con la cual la frecuencia del cambio de las cargas externas coincide con la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema conformado por el árbol y los elementos a él vinculados. Como se sabe la teoría de vibraciones, después de pasar la zona de velocidades críticas de rotación comienza el centraje dinámico del árbol. La mayoría de los árboles trabajan dentro de la zona de prerresonancia, y para aminorar el peligro de la resonancia se debe elevar su rigidez y, por consiguiente, las frecuencias de vibraciones propias. En caso de altas velocidades de rotación, por ejemplo, en las turbinas y centrífugas rápidas, se emplean árboles que pueden trabajar dentro de las zonas de trasresonancia. A fin de alejarse de la zona de resonancia los árboles se hacen con elevada flexibilidad. El paso por la zona de velocidades críticas de rotación se realiza lo más rápidamente posible para evitar averías, se utilizan amortiguadores especiales de las amplitudes de vibraciones, las piezas que giran con altas velocidades se someten a un balanceo minucioso.

De las posibles vibraciones torsionales, generalmente, las de mayor importancia son las vibraciones del mando en todo su conjunto. Al determinar la frecuencia de vibraciones propias, el sistema o el árbol en cálculo se reduce a un árbol de diámetro constante con masas concentradas. Al determinar la flexibilidad, es necesario tener en cuenta las deformaciones por contacto en las uniones por chavetas y por estrías, así como la influencia de las flechas en los árboles, que llevan las transmisiones, al ángulo de torsión del sistema. Las masas pequeñas se sustituyen por una resultante, aplicada al centro de gravedad de dichas masas. El sistema en la medida de lo posible se reduce a un sistema de dos o tres masas, que para determinar la frecuencia de vibraciones permite utilizar las fórmulas dadas en la Tabla 2.1. Los cálculos de las frecuencias de vibraciones propias de los sistemas complejos se realizan utilizando las computadoras electrónicas.

Como se aprecia en este epígrafe, Reshetov da expresiones de cálculo un poco más elaboradas para el cálculo de la velocidad crítica, e incluso menciona la posibilidad de considerar la elasticidad de los apoyos al incorporar los desplazamientos elásticos que se produzcan en estos.

2.5 Método de cálculo propuesto por Birger para el cálculo de velocidad crítica en árboles de Turbo máquinas.

En (Birger, 1986) se examina un árbol con una carga no uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud entre apoyos determinada por el peso propio del árbol y los discos colocados sobre él, tal como se muestra en la Fig. 2.7.

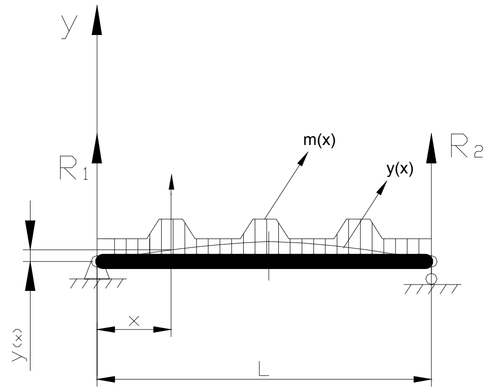


Fig. 2.7 Esquema de análisis del árbol.

En este caso:

$m(x) \rightarrow$ es la masa de la unidad de longitud del árbol en la sección $\boldsymbol{x}$.

Por lo que para este análisis $\boldsymbol{m(x)}$ hay que calcularla como la suma de la masa del árbol y la del disco en el tramo correspondiente. Por ejemplo si en un tramo del árbol de longitud $\Delta l = 10cm$ se distribuye un disco de peso $W_d = 20kg$ y el peso propio del tramo del árbol es $W_a = 2kg$ entonces:

$$m(x) = \frac{W_a + W_d}{g \cdot \Delta l} = \frac{2 + 20}{9.81 \cdot 10} = 2{,}24 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot s^2/cm^2$$

La masa $m(x)$ se toma constante por tramos. La fuerza centrífuga en cada tramo será:

$$q(x) = m(x) \cdot \omega^2 y(x) \qquad (2.14)$$

La fuerza de cortante transversal en la sección $\boldsymbol{x}$.

$$Q(x_1) = R_1 + \int_0^x q(x) dx_1 \qquad (2.15)$$

Donde $\boldsymbol{x_1}$ es la variable de integración $(0 \leq x_1 \leq x)$.

Como la fuerza de cortante está relacionada con el momento flector a través de la relación:

$$Q(x) = \frac{dM_{(x)}}{d_x} \qquad M_x = \int_0^x dM_{(x)} \qquad (2.16)$$

$$M_x = \int_0^x Q_{(x_2)} dx_2 = R_{1x} + \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2)\, dx_2 \cdot dx_1 \qquad (2.17)$$

$\boldsymbol{x_2}$ es una variable de integración.

Como para $x = l$, $M_{(x)} = 0$. Se tiene que:

$$M_{(l)} = R_1 \cdot l + \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2)\, dx_2 \cdot dx_1 = 0 \qquad (2.18)$$

De donde:

$$R_1 = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2)\, dx_2 \cdot dx_1 \qquad (2.19)$$

Introduciendo este valor de R_1 en la expresión de $\boldsymbol{M_{(x)}}$.

$$M_{(x)} = \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2)\, dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2)\, dx_2 \cdot dx_1 \qquad (2.20)$$

Sustituyendo la expresión de $q_{(x_2)} = \omega^2 m_{(x_2)} \cdot\ y_{(x_2)}$

$$M_{(x)} = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)} \cdot\ y_{(x_2)}\, dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m_{(x_2)} \cdot\ y_{(x_2)}\, dx_2 \cdot dx_1 \right\} \quad (2.21)$$

Esta última expresión la escribiremos de la siguiente forma.

$$M_{(x)} = \omega^2 \cdot A_y(\mathrm{x}) \quad (2.22)$$

De donde:

$$A_y(\mathrm{x}) \quad = \int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)} \cdot\ y_{(x_2)}\, dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m_{(x_2)} \cdot\ y_{(x_2)}\, dx_2 \cdot dx_1 \quad (2.23)$$

De la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \quad (2.24)$$

Integrando en el tramo de 0 a y.

$$\frac{d_y(x)}{d_x} = \int_0^x \frac{M_{(x_1)}}{EI_{(x_1)}} dx_1 + y'_{(0)} \quad (2.25)$$

Integrando nuevamente

$$y_{(x)} \quad = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M_{(x_2)}}{EI_{(x_2)}} dx_2 \cdot dx_1 + y'_{(0)} \cdot x + y_{(0)} \quad (2.26)$$

Para el caso analizado $y_{(0)} = 0$ y de la condición que $x = l,\ \ y_{(l)} = 0$. Se tiene que:

$$\int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M_{(x_2)}}{EI_{(x_2)}} \cdot dx_2 \cdot dx_1 + y'_{(0)} \cdot l = 0 \quad (2.27)$$

Se obtiene que:

$$y'_{(0)} = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M_{(x_2)}}{EI_{(x_2)}} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la (2.26):

$$y_{(x)} \quad = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M_{(x_2)}}{EI_{(x_2)}} dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M_{(x_2)}}{EI_{(x_2)}} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (2.29)$$

Si se toma en cuenta la ecuación (2.22), la ecuación (2.29) se puede escribir como sigue:

$$y_{(x)} = \omega^2 \cdot K_y \qquad \text{y} \quad \omega_{crit} = \sqrt{\frac{y_{(x)max}}{k_{y(x)max}}} \quad (2.30)$$

Donde:

$$K_y = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_{y(x_2)}}{EI_{(x_2)}} dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{A_{y(x_2)}}{EI_{(x_2)}} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) constituye la ecuación integral para la determinación de la velocidad crítica. La misma se resuelve por aproximaciones sucesivas. En la práctica generalmente no se requieren más de dos aproximaciones. La aproximación de partida se puede tomar como la de una función flecha que satisfaga en principio las condiciones en los apoyos. Para el caso analizado:

$$y_o(x) = sen\frac{\pi \cdot x}{l} \quad (2.32)$$

O también

$y_o(x) = c \cdot x \cdot (l - x)$ de donde: $c = \frac{y_{máx}}{x_{ymáx}(l - x_{ymáx})}$ (2.33)

$y_o(x) = \frac{4x \cdot (l-x)}{l^2}$

Esta ecuación fue la que se utilizó definitivamente en este capítulo del presente trabajo

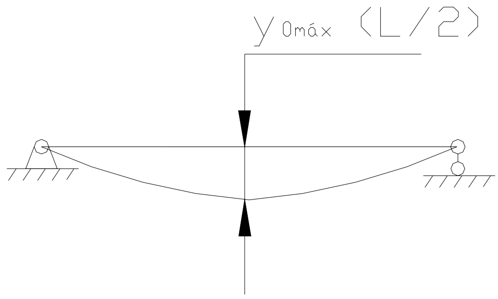


Fig. 2.8 Árbol con los dos apoyos en los extremos.

En el caso de dos apoyos en los extremos volados puede ser una función del tipo Fig. 2.9.

$y_o(x) = c(x - a_1)(x - a_2)$ (2.34)

Donde si se toma**:**

$y_{o\,máx} = 1$, para $x = l.$

$c = \frac{y_{máx}}{(l-a_1)(l-a_2)}$ (2.35)

Según Birger, el resultado final no depende de la aproximación inicial elegida.

La siguiente aproximación para

$y_{(1)} = \omega^2_{(1)} \cdot K_{y(0)}$ (2.36)

La comprobación se realiza en aquella sección donde la flecha es máxima. En el caso analizado se puede tomar $x = \frac{l}{2}$ de donde:

$\omega_1^2 = \left.\frac{y_{(0)}}{K_{y(0)}}\right|_{x=\frac{l}{2}}$ y $\omega_2^2 = \left.\frac{y_{(1)}}{K_{y(1)}}\right|_{x=\frac{l}{2}}$

De esta forma se determina, según Birger, la velocidad crítica en los árboles de turbo máquinas. Como se aprecia este método de cálculo de la velocidad crítica es sofisticado pero parte de una función flecha muy simple en la cual sólo se considera que la misma satisfaga las condiciones de apoyo. Birger se ocupa de aclarar que la función flecha de partida, si cumple esta condición, los resultados finales después de las iteraciones correspondientes son los mismos. En el presente trabajo se utilizará una función de partida de la flecha real para comprobar si las iteraciones convergen rápidamente.

2.6 Aplicación del método de cálculo de velocidad crítica en turbo máquinas propuesto por Birger al árbol de un Turbocompresor.

Birger ilustra el método propuesto calculando la velocidad crítica del árbol de un turbocompresor de cuatro secciones con 10 etapas. La potencia en el eje del mismo es de $N = 15\,300\ kW \quad a \quad n = 3\,000 \frac{r}{min}$, o sea, se trata de una turbo máquina de gran potencia y que gira a relativamente alta velocidad.

El caudal y la presión de descarga:

$Q = 160\,000\, m^3/h$ y $p = 10\, kg/cm^2$.

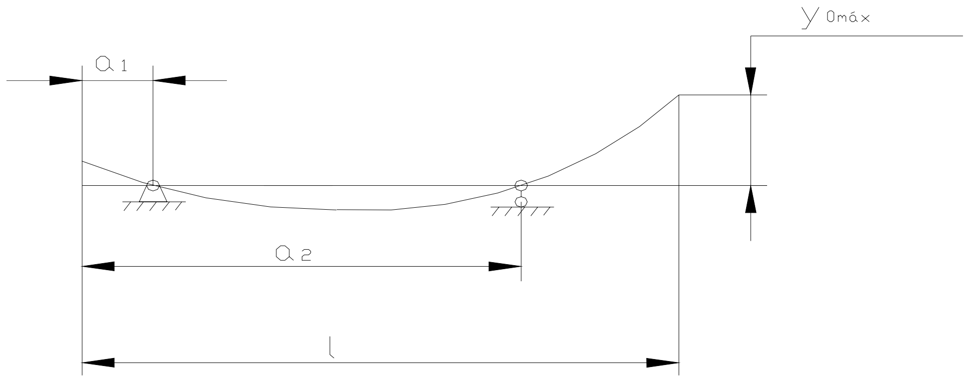


Fig. 2.9 Árbol con dos apoyos y extremos en voladizo.

La condición de partida de la flecha es la mostrada en la Fig. 2.8, se utiliza el método de iteraciones sucesivas y las integrales de las ecuaciones serán resueltas por métodos numéricos. El árbol es necesario dividirlo en partes en las cuales se considera la carga uniformemente distribuida y la rigidez constante. Se dividió en 16 secciones para el cálculo según el diámetro y los elementos colocados sobre él. En la columna **0** aparecen numeradas estas partes. En la columna **1** la cota $\boldsymbol{x_i}$ de la sección de cálculo con relación al apoyo izquierdo. En la columna **2**, la magnitud $\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. En la columna **3** la masa del tramo. O sea, digamos para la sección **0.**

$$m_i = \frac{\gamma_{ac} \cdot \frac{\pi}{4}(D_e^2 - d_i^2)\Delta x}{y \cdot \Delta x \cdot\ 10^3} = \frac{7{,}8\frac{\pi}{4}(26^2 - 6^2)}{9{,}81 \cdot 10^3}$$

$$m_i = 0.0040\ \frac{kg - s^2}{cm^2}$$

En la columna **4** se sitúa la rigidez del árbol en la sección de acuerdo con el diámetro de la sección, o sea, el producto de $E \cdot I_{(x)_i}$, donde $\boldsymbol{E}$ es el módulo de elasticidad del material del árbol en kg/cm^2 e $I_x = 0.05 d_i^4\left(1 - C_i^4\right)$ en cm^4 .

Capítulo II: Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet

En la columna **5** la flecha en la sección **i** de acuerdo con la suposición inicial elegida. En el caso analizado:

$y_{0(x)} = \frac{4x(l-x)}{l^2}$ donde $l = 430cm$

Por ejemplo, para $x = 30cm$, $y_{0(30)} = \frac{4 \cdot 30(430-30)}{430^2} = 0{,}26cm.$

En la columna **6** el producto de la columna **3** por la **5.**

En la **7** el producto de $[6_i + 6_{i+1}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i = 7_i$

En la **8** es la solución numérica de la integral por la regala de los trapecios. Para $i = 0$, la integral $8_i = 0$ y para $i \geq 1$ en adelante $\left[7_{(i-1)} + 8_{(i-1)}\right] = 8_i$.

En la **9** $\left[8_{(i)} + 8_{(i+1)}\right] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i = 9_i$.

En la **10** para $i = 0$, $10_i = 0$ y para $i \geq 1$; $\left[9_{(i-1)} + 10_{(i-1)}\right] = 10_i$.

En la **11,** $\frac{x_i}{l} \cdot 10_{(15)} = 11_i$.

En la **12,** $[10_i - 11_i] = 12_i$.

En la **13,** $\frac{12_i}{4_i} = 13_i$.

En la **14,** $\left[13_{i_1} + 13_{(i+1)}\right] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i = 14_i$.

En la **15,** para $i = 0$, $15_i = 0$ y para $i \geq 1$, $15_i = \left[14_{(i-1)} + 15_{(i-1)}\right]$

En la **16,** $\left[15_{(i)} + 15_{(i+1)}\right] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i = 16_i$.

En la **17,** para $i = 0$, $17_i = 0$ y para $i \geq 1$, $17_i = \left[16_{(i-1)} + 17_{(i-1)}\right]$.

En la **18,** $18_i = \frac{x_i}{l} \cdot 17_{(15)}$.

En la **19,** $K_{y_{(0)}} = 18_i + 17_i$**.**

La primera aproximación de la velocidad crítica se obtiene como:

$$\omega_{1_{crit}} = \sqrt{\frac{y_{o_{(x)}}}{K_{y_{(0)}}}}$$

$$\omega_{1_{crit}} = \sqrt{\frac{1{,}00}{29{,}33 \cdot 10^{-6}}} \approx 184{,}6\, rad/s$$

$$n = \frac{30 \cdot \omega_{1_{crit}}}{\pi} = \frac{30 \cdot 184{,}6}{\pi} = 1\,763{,}3 \text{ r/min}$$

Ahora se halla la columna **20**

$$y_1(x) = \frac{K_{y(0)_i}}{K_{y(0)_{MAX}}}$$

y se repite todo el proceso con los valores de $y_1(x)$ en lugar de $y_0(x)$. El resultado obtenido en la segunda aproximación es:

$\omega_{2_{crit}}$ = $187{,}1\ rad/s$

$$\%\ dif = \frac{187{,}1 - 184{,}6}{184{,}6} \cdot 100 = 1{,}35\%$$

La velocidad crítica definitivamente dio: n_{crit} = 1 786 r/min, inferior a la velocidad de trabajo, se trata de un árbol flexible. El proceso de solución numérico por método iterativo se muestra en la Tabla 2.2 y en la Fig. 2.10 se muestra el árbol del turbocompresor de cuatro secciones:

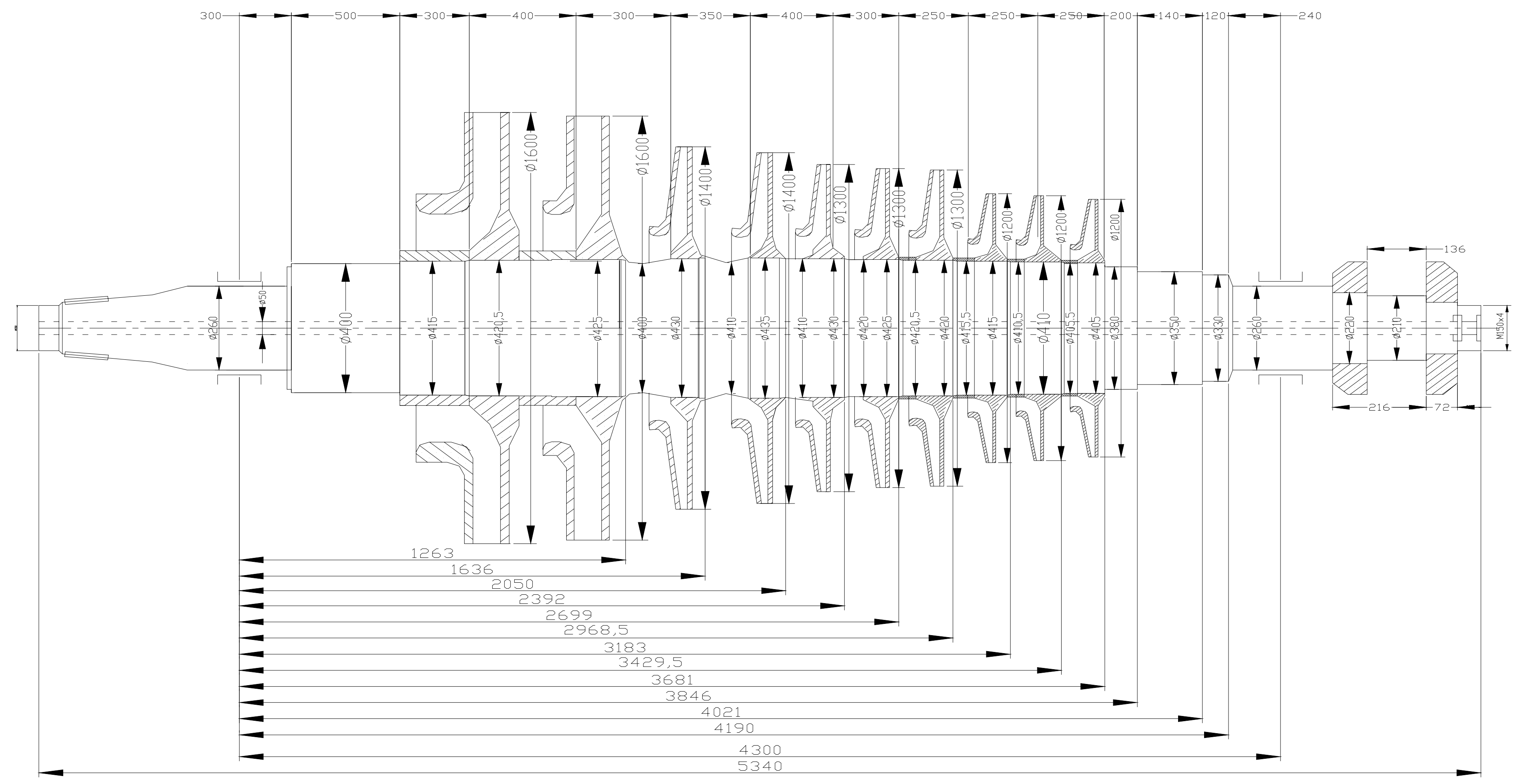


Fig. 2.10 Compresor centrífugo de cuatro secciones con diez etapas

Tabla. 2.2. Cálculo de velocidad crítica en un árbol de un Turbocompresor de cuatro secciones mediante método numérico iterativo.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$	$m_{(x)i} - kg \cdot S^2/_{cm^1}$	$E \cdot I_{(x)i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{yo_{(x)}}{y_{máx}}$	$m_{(x)i} yo_{(x)}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)1} yo_{(x)1} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)} yo_{(x)1} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	15	0,004	0,045	0	0	0,038	0	0,57	0
1	30	25	0,00976	0,251	0,26	0,00253	0,506	0,038	14,56	0,57
2	80	15	0,0293	0,283	0,606	0,0177	0,584	0,5443	25,08	15,13
3	110	20	0,0279	0,313	0,761	0,0212	0,897	1,128	63,06	40,21
4	150	15	0,026	0,293	0,908	0,0236	0,707	2,025	71,35	103,3
5	180	17,5	0,0241	0,293	0,973	0,0235	0,845	2,732	110,4	174,6
6	215	20	0,0248	0,305	1	0,0248	0,958	3,577	162,2	285
7	255	15	0,0239	0,313	0,965	0,0231	0,668	4,535	146	447,2
8	285	12,5	0,0239	0,306	0,894	0,0214	0,521	5,202	136,6	593,2
9	310	12,5	0,0252	0,297	0,805	0,0203	0,447	5,724	148,7	729,8
10	335	12,5	0,0224	0,278	0,688	0,0154	0,346	6,171	158,6	878,5
11	360	10	0,0224	0,264	0,545	0,0122	0,158	6,516	131,9	1037
12	380	7	0,0088	0,204	0,411	0,00361	0,0412	6,674	93,72	1169
13	394	6	0,0074	0,147	0,307	0,00228	0,022	6,715	80,71	1263
14	406	12	0,0066	0,116	0,211	0,00138	0,0167	6,737	162	1343
15	430	-	0,004	0,045	0	0	-	6,754	-	1505

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)} y_0 dx_1 d_x$	$A_{y(x)}$	$\frac{A_{y(x)}}{E\cdot I_{(x)}}\cdot 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I} dx \cdot 10^6$	$[15_i + 15_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I} dx_2 dx_1 \cdot 10^6$	$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I} dx_2 dx_1 \cdot 10^6$	$K_{y(0)}\cdot 10^6$	$y_{1(x)}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,006235	0	-0,09352	0	0	0	0
105	-104,4	-415,7	-0,03379	-0,00623	-1,156	-0,0935	6,58	6,48	0,221
279,9	-264,8	-936,1	-0,03054	-0,04002	-1,659	-1,249	17,54	16,29	0,555
384,8	-344,6	-1100	-0,05076	-0,07056	-3,837	-2,908	24,11	21,2	0,723
524,8	-421,5	-1438	-0,04486	-0,1213	-4,312	-6,745	32,88	26,13	0,891
629,8	-455,2	-1553	-0,05402	-0,1662	-6,762	-11,06	39,46	28,4	0,9683
752,3	-467,3	-1534	-0,05916	-0,2202	-9,992	-17,82	47,15	29,33	1
892,3	-445,1	-1424	-0,04117	-0,2794	-8,998	-27,82	55,91	28,1	0,958
997,2	-404	-1321	-0,03169	-0,3205	-8,409	-36,81	62,48	25,67	0,875
1084	-354,2	-1214	-0,02839	-0,3522	-9,16	-45,22	67,96	22,74	0,775
1172	-293,5	-1057	-0,02375	-0,3806	-9,811	-54,38	73,45	19,07	0,65
1260	-223	-843,2	-0,01631	-0,4043	-8,25	-64,19	78,93	14,74	0,502
1330	-161	-787,6	-0,01098	-0,4207	-5,966	-72,44	83,31	10,87	0,37
1378	-115	-781,8	-0,008667	-0,4316	-5,231	-78,4	86,38	7,98	0,272
1420	-77	-662,7	-0,007952	-0,4403	-10,66	-83,64	89,01	5,37	0,183
1505	0	0	-	-0,4483	-	-94,3	94,3	0	0

2.7 Cálculo de la velocidad crítica del árbol de la bomba contra incendios del buque “6 de Junio”, sin considerar la rigidez angular de los cojinetes de rodamientos y las empaquetaduras como apoyos suplementarios rígidos.

2.7.1 Datos disponibles de las Bombas Berliet.

Del motor de las bombas se conoce que es de fabricación rusa, Modelo YAV 206 (Fig. 3.7), pero no se dispone de documentación técnica sobre el mismo. Debido a la no existencia de documentación alguna sobre el motor de estas bombas, ni datos sobre las curvas características de las bombas se hizo necesario calcular analíticamente sus parámetros. Se conocen las dimensiones, cantidad y geometría de sus impelentes Fig. 2.11.

Fig. 2.11 Vista del Motor YAV 206 de las Bombas

En la Fig. 2.11 se muestra una vista del impelente con sus dimensiones fundamentales y a continuación se dan los parámetros conocidos..

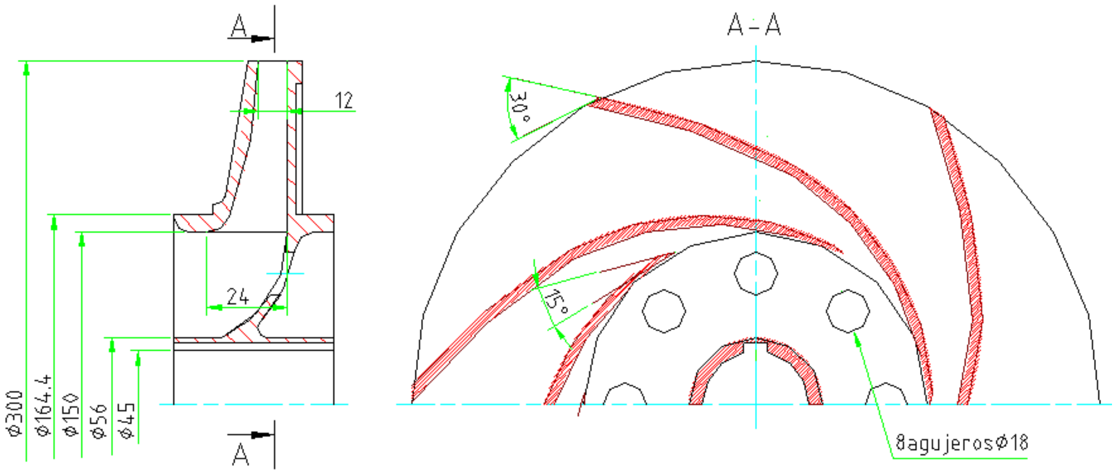


Fig. 2.12 Geometría y dimensiones de uno de los impelentes de la bomba.

Los Datos necesarios para el presente trabajo son:

Q = ?......................Caudal entregado por la bomba (m^3/s)

H = ? ………………Carga de impulsión, (m)

N_{eje} = ?...................Potencia mecánica a transmitir, (kW)

M_t = ?.....................Momento torsor a transmitir, N-m

n = 1750……..........Velocidad de giro, r/min.

β_1 = 15˚……………Inclinación a la entrada del alabe

β_2 = 30˚……………Inclinación a la salida del alabe

D_1 = 150mm………ø del ojo de succión

D_2 = 300mm…….....ø exterior del impelente

b_1 = 24mm……….Ancho a la entrada del canal

b_2 = 12mm……….Ancho a la salida del canal

δ = 3mm…………Espesor de los alabes

Z = 3..……………..No. de impelentes

α = 90˚……………No posee aparato de regulación a la entrada

z = 7……………….No. de alabes por impelente

Nota: Cada vez que se refiera a la entrada, o al ojo de succión del impelente se utilizará el subíndice 1 y 2 para la zona de descarga del impelente.

2.7.2 Cálculo según la expresión de Dobrovolski.

En este caso se necesita conocer la flecha máxima del árbol. El mismo se analizará como si estuviera simplemente apoyado en los cojinetes de bolas exteriores con el objetivo de poder calcular la flecha del árbol en este caso y poder comparar los resultados del cálculo de la velocidad critica con los restantes casos que serán analizados.

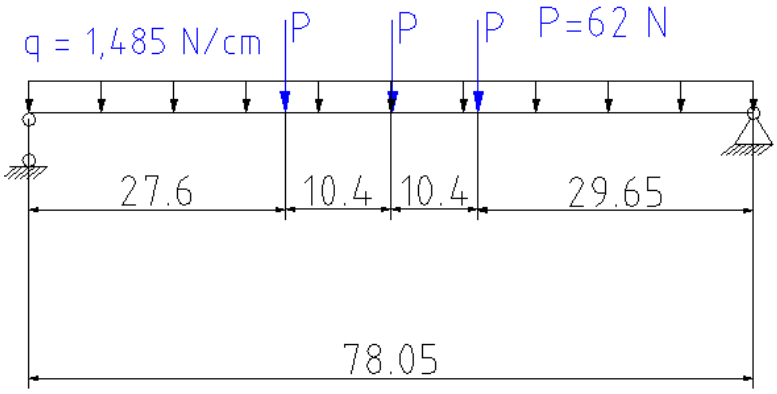


Fig. 2.13 Esquema árbol simplemente apoyado.

Las cargas son en este caso e peso de cada uno de los impelentes P = 62 N y el peso propio del árbol considerado como una carga distribuida q = 1,485 N/ cm. Para poder calcular los valores de flecha para este caso se necesita conocer al menos la reacción en el apoyo R_A, esta se halla por la ecuación de equilibrio haciendo momento en el punto B.

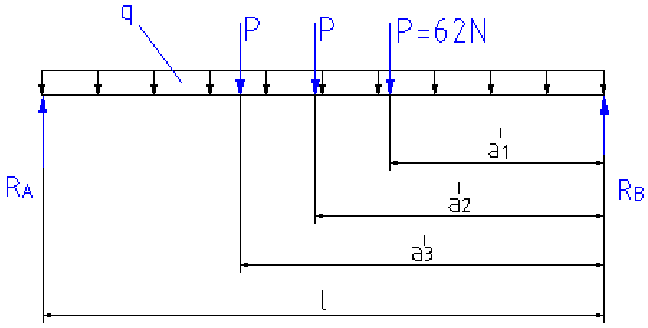


Fig. 2.14 Esquema para determinar la reacción R_A

$$\sum M_B = -\frac{ql^2}{2} - Pa_1^/ - Pa_2^/ - Pa_3^/ + R_A l = 0$$

$$R_A = \frac{ql^2 + Pa_1^/ + Pa_2^/ + Pa_3^/}{2l}$$

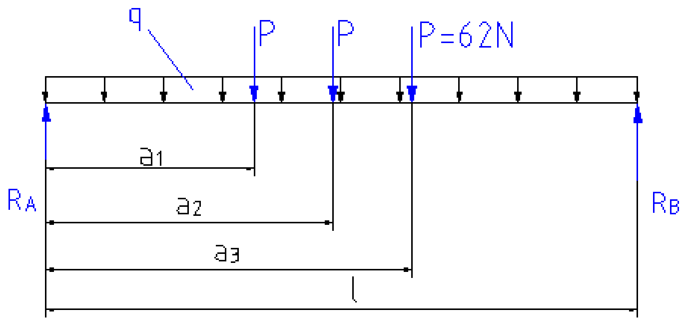


Fig. 2.15 Esquema de árbol para la determinación de la flecha.

$$EIy_{z=l} = EI\theta Z + \frac{R_A(Z-0)^3}{6} - \frac{q(Z-0)^4}{24} - \frac{P(Z-a_1)^3}{6} - \frac{P(Z-a_2)^3}{6} - \frac{P(Z-a_3)^3}{6} = 0$$

$$EI\theta_A = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{P(Z-a)^3}{6} - \frac{R_A Z^3}{6} + \frac{qZ^4}{24}}{Z}$$

$$y_z = \frac{EI\theta Z + \frac{R_A Z^3}{6} - \frac{qZ^4}{24} - \sum_{i=1}^{n}\frac{P(Z-a)^3}{6}}{EI}$$

Tabla 2.3 Calculo de la flecha del árbol simplemente apoyado en los cojinetes de rodamientos.

Tramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Secciones (cm)	0	1,5	14,2	20,3	30,7	41,1	51,1	55,45	69,55	76,55	78,05
Flechas (cm)	0	4,58E-03	4,17E-02	5,71E-02	7,71E-02	**8,73E-02**	8,71E-02	8,43E-02	6,70E-02	5,56E-02	0

Con la obtención de estos datos se está listo para realizar el cálculo de la velocidad crítica. Es importante destacar que este tipo de análisis, bajo estas condiciones sólo tendrá el único propósito la comparación debido a que este esquema se aleja bastante de lo que realmente ocurre en este árbol. Para realizar este cálculo se consideran los dos cojinetes de rodamientos como articulaciones rígidas, tres cargas concentradas en la posición donde están ubicados los impelentes con las cargas sobre estos. Como la bomba posee difusores la carga radial del líquido es cero y estas cargas se corresponden con el peso propio de los impelentes P = 62 N y se consideró una carga uniformemente distribuida, correspondiente al peso propio del árbol que se calculó dividiendo el peso del árbol entre su longitud, igual a q = 1,485 N/cm. La flecha máxima obtenida fue: f = 8,73E-02 cm.

$$n_{crítica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/\min$$

$$n_{critica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{8.73*10^{-2}}}$$

$$n_{critica} \cong 1015.3\, r/min$$

La zona de las velocidades de giro

$$0,7n_{crit} \leq n \leq 1,3n_{crit}$$

$$0,7 * 1015.3 \leq n \leq 1,3 * 1015.3$$

$$710.7 \leq n \leq 1319.9$$

La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea que si este cálculo fuera cierto, el árbol de la bomba estaría clasificado como flexible pues trabaja a una velocidad mayor que la crítica. La experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de haber pasado por la velocidad crítica, por lo que es de esperar que su velocidad crítica este por encima de la velocidad de trabajo.

2.7.3 Cálculo según la metodología dada por Birger.

Para realizar el cálculo de la velocidad crítica de este árbol se brindan las diez secciones de cálculo y los diámetros en estas secciones en la Tabla 2.3 y las longitudes de cada tramo se dan en la Fig. 2.13.   Para el acero:

$E_{ac} = 2{,}0 \cdot 10^6 kgf/cm^2$ (Según (Pisarenko, 1989)

$\gamma_{ac} = 7.8 \cdot 10^{-3} kgf/cm^3$

Tabla. 3.2. Diámetro del árbol para cada tramo.

Tramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ø árbol (cm	3.5	4	4	4.5	4.5	4.5	4.5	5.5	5.5	4.5

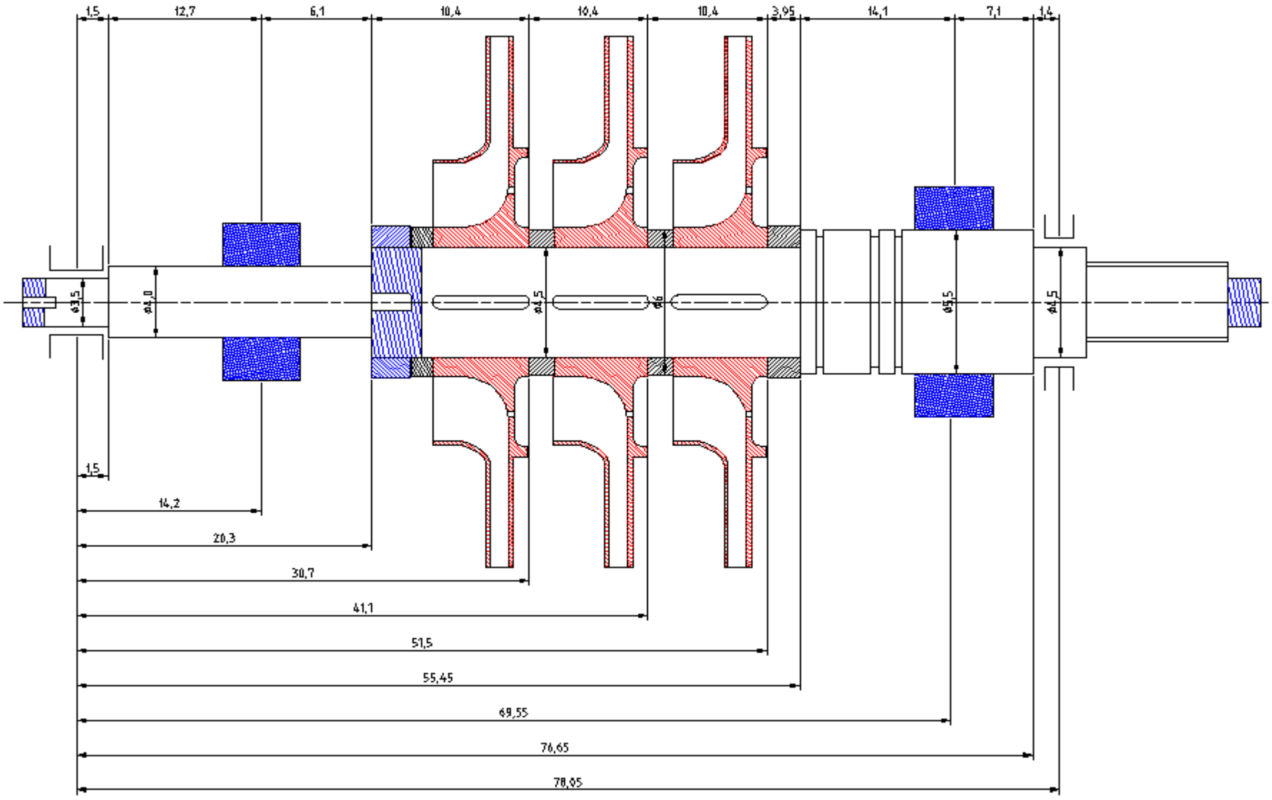


Fig. 2.16 Esquema de los diferentes tramos del árbol

En la Tabla 2.5 se dan los resultados de los cálculos según la metodología de Birger.

- **Columna 1**

  x_i - Cota a partir del apoyo izquierdo en (cm).

- **Columna 2**

  La magnitud $\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ en (cm)

- **Columna 3**

  Cálculo de la masa para las distintas secciones del árbol:

  $m_i = \frac{\gamma_{ac} * \frac{\pi}{4} d_i^2 *}{981}$

  Cuando hay impelentes la masa se calcula como:

$$m_i = \frac{\gamma_{ac} * \frac{\pi}{4} d_i^2 *}{981} + \frac{m_{casquillo}(Kg)}{\Delta x(cm)} + \frac{m_{impelente}(Kg)}{981 * \Delta x(cm)}$$

Donde la masa del casquillo es: $m_{casquillo} = \frac{\gamma * \frac{\pi}{4} * (d_e^2 - d_i^2)}{981}$

- **Columna 4**

Cálculo de la rigidez de cada parte del árbol:

$$Rigidez = EI_{x_i}$$

$$E_{ac} = 2{,}0 \cdot 10^6 \quad \left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$$

$$I_{x_i} = \frac{\pi * d^4}{64} \approx 0.05 d^4 \quad \left[cm^4\right]$$

$$EI_x = 0.1 \cdot 10^6 \cdot d^4 \quad \left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$$

- **Columna 5**

  Cálculo de la flecha: $\frac{y_{o_x}}{y_{máx}}$

  Donde $\boldsymbol{y_o} = \frac{4 \cdot x \cdot (L - x)}{L^2}$ y L = longitud total del árbol en (cm)

En el resto de las columnas de la Tabla. 2.5 se obtuvieron según la metodología antes expuesta en el epígrafe 2.6 para la solución de las integrales por método numérico iterativo.

Tabla 2.5 Cálculo de la velocidad crítica según la metodología de Birger

Primera iteración de la velocidad crítica.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,6498E-05	14,7361375	0	0	3,93575E-06	0	2,95181E-06	0
1	1,5	6,35	9,9916E-05	25,1392	0,052520557	5,24766E-06	0,000336382	3,93575E-06	0,00218601	2,95181E-06
2	14,2	3,05	9,9916E-05	25,1392	0,477658563	4,77259E-05	0,001703828	0,000340318	0,007272614	0,002188962
3	20,3	5,2	0,00078091	40,2681375	0,654244351	0,000510906	0,006246554	0,002044146	0,053741196	0,009461576
4	30,7	5,2	0,00078091	40,2681375	0,884037508	0,000690354	0,007650576	0,0082907	0,126006268	0,063202771
5	41,1	5	0,00078091	40,2681375	1	0,00078091	0,00453569	0,015941275	0,182091201	0,18920904
6	51,1	2,175	0,00012646	40,2681375	0,99818881	0,000126228	0,000671424	0,020476965	0,090535146	0,371300241
7	55,45	7,05	0,0001889	89,8591375	0,965955953	0,000182473	0,002308461	0,021148389	0,314466941	0,461835386
8	69,55	3,5	0,0001889	89,8591375	0,767415265	0,000144968	0,000789574	0,02345685	0,166961464	0,776302327
9	76,55	0,75	0,00012646	40,2681375	0,637567593	8,06246E-05	6,04685E-05	0,024246425	0,036414989	0,943263791
10	78,05			40,2681375	0	0		0,024306893		0,97967878

`

$\frac{x}{l}\int_0^l \int_0^x m_{(x)}\, y_0\, d\, x_1\, d_x$	$A_{y(x)}$	$\frac{A_{y(x)}}{E \cdot I_{(x)}}\ 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I}\, dx \cdot 10^6$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l \int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I}\, dx_2\, dx_1 \cdot 10^6$	$\frac{x}{l}\int_0^l \int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I}\, dx_2\, dx_1 \cdot 10^6$	$K_{y(0)} \cdot 10^6$	$y_{2(x)}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,0005616	0	-0,00042122	0	0	0	0
0,0188279	-0,018824	-0,000748	-0,049223	-0,0005616	-0,31970369	-0,000421	0,3192109	0,318789694	0,06997848
0,1782375	-0,176048	-0,007003	-0,0399418	-0,0497854	-0,42551358	-0,320124	3,0218633	2,701738371	0,5930667
0,2548043	-0,245342	-0,006092	-0,0732817	-0,0897272	-1,31422829	-0,745638	4,3199876	3,57434916	0,78461611
0,3853445	-0,322141	-0,007999	-0,0837846	-0,1630089	-2,13097334	-2,059866	6,5331833	4,473316513	0,98195114
0,5158847	-0,326675	-0,008112	-0,0741007	-0,2467935	-2,83843938	-4,190840	8,7463789	4,55553881	1
0,641404	-0,270103	-0,006707	-0,0202570	-0,3208942	-1,43994927	-7,029279	10,874452	3,845172162	0,84406528
0,696005	-0,234169	-0,002606	-0,0259575	-0,3411513	-4,99323495	-8,469228	11,800163	3,330934529	0,73118344
0,8729873	-0,096684	-0,001076	-0,0052944	-0,3671089	-2,58829317	-13,46246	14,800746	1,338282131	0,29377033
0,9608509	-0,017587	-0,000436	-0,0003275	-0,3724034	-0,55885079	-16,05075	16,290397	0,239639877	0,05260407
0,9796788	0	0	0	-0,3727309	0	-16,60960	16,609608	0	0

La primera aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{1\ crit} = \sqrt{\frac{y_{0\ (x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{1\ crit} = \sqrt{\frac{1}{4{,}56 * 10^{-6}}}$$

$$w_{1\ crit} = 468.3\ \ rad/s$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * w_{1\ crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * 468.3}{3.1416}$$

$$n_{Crit\ 1} = 4472\ \ \mathrm{r/min}$$

Segunda iteración de la velocidad crítica.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0(x)}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0(x)}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0(x)_1} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0(x)_2} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,650E-05	14,7361	0	0	5,244E-06	0	3,9330E-06	0
1	1,5	6,35	9,992E-05	25,1392	0,069978	0,0000070	4,207E-04	0,0000052	2,7379E-03	3,933E-06
2	14,2	3,05	9,992E-05	25,1392	0,593067	0,0000593	2,050E-03	0,0004259	8,8492E-03	0,002741859
3	20,3	5,2	7,809E-04	40,2681	0,784616	0,0006127	7,174E-03	0,0024754	6,3047E-02	0,011591023
4	30,7	5,2	7,809E-04	40,2681	0,981951	0,0007668	8,048E-03	0,0096490	1,4220E-01	0,07463811
5	41,1	5	7,809E-04	40,2681	1	0,0007809	4,438E-03	0,0176972	1,9916E-01	0,216838228
6	51,1	2,175	1,265E-04	40,2681	0,844065	0,0001067	5,326E-04	0,0221354	9,7447E-02	0,416001197
7	55,45	7,05	1,889E-04	89,8591	0,731183	0,0001381	1,365E-03	0,0226680	3,2924E-01	0,513448608
8	69,55	3,5	1,889E-04	89,8591	0,29377	0,0000555	2,175E-04	0,0240330	1,6899E-01	0,84269058
9	76,55	0,75	1,265E-04	40,2681	0,052604	0,0000067	4,989E-06	0,0242505	3,6380E-02	1,011682866
10	78,05			40,2681	0	0,0000000		0,0242555		1,048062375

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\,y_0\,d\,x_1\,d_x$	$A_{y(x)}$	$\frac{A_{y(x)}}{E\cdot I_{(x)}}\ 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx \cdot 10^6$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx_2\,dx_1 \cdot 10^6$	$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx_2\,dx_1 \cdot 10^6$	$K_{y(0)}\cdot 10^6$	$y_{3(x)}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,0006008	0	-0,000451	0	0	0	0
0,0201421	-0,020138201	-0,0008011	-0,05255846	-0,0006008	-0,341376	-0,000451	0,3338	0,3333	0,0709
0,1906789	-0,18793701	-0,0074759	-0,04257003	-0,05315926	-0,454110	-0,341827	3,1597	2,8179	0,5995
0,2725902	-0,260999191	-0,0064815	-0,07730027	-0,09572929	-1,397546	-0,795937	4,5170	3,7211	0,7916
0,4122423	-0,337604234	-0,0083839	-0,08686358	-0,17302955	-2,251198	-2,193483	6,8312	4,6377	0,9866
0,5518945	-0,335056245	-0,0083206	-0,07515004	-0,25989313	-2,974682	-4,444681	9,1453	4,7007	1,0000
0,6861754	-0,27017417	-0,0067094	-0,02018751	-0,33504317	-1,501346	-7,419363	11,3705	3,9511	0,8405
0,7445876	-0,231138948	-0,0025722	-0,02529206	-0,35523068	-5,187062	-8,920708	12,3384	3,4177	0,7271
0,9339236	-0,091233036	-0,0010153	-0,00496482	-0,38052274	-2,681036	-14,107770	15,4759	1,3681	0,2910
1,0279202	-0,016237375	-0,0004032	-0,00030242	-0,38548756	-0,578458	-16,788806	17,0335	0,2447	0,0521
1,0480624	0	0	0	-0,38578999	0,000000	-17,367264	17,3673	0	0

La segunda aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{2\,crit} = \sqrt{\frac{y_{0\,(x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{2\,crit} = \sqrt{\frac{1}{4{,}7 * 10^{-6}}}$$

$$w_{2\,crit} = 461.3\ rad/s$$

$$n_{Crit\,2} = \frac{30 * w_{1\,crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\,2} = \frac{30 * 461.3}{3.1416}$$

$$n_{Crit\,2} = 4405.1\ \mathrm{r/min}$$

Porciento de diferencia:

$$\%dif = \frac{w_{2\,crit} - w_{1\,crit}}{w_{1\,crit}} * 100$$

$$\%dif = \frac{461.3 - 468.3}{461.3} * 100$$

$$\%dif = -1.5$$

El % de diferencia es adecuado. La velocidad crítica de la bomba es del orden de:

$n_{crit.}$= 4405 r/min

Este valor es mucho más lógico que el obtenido por la expresión de Dobrovolski, la velocidad crítica es mayor que la velocidad de trabajo de la bomba, lo que era de esperar de acuerdo con su comportamiento en la práctica.

2.8 Conclusiones Parciales del Capítulo II.

1. Se profundizó en las particularidades estructurales de la Bomba BERLIET objeto de estudio con vistas a realizar el cálculo de la velocidad crítica.
2. Se profundizó en las diferentes expresiones y métodos descritos en la literatura para el cálculo de la velocidad crítica en los árboles de las máquinas.
3. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski y se obtuvo $n_{critica} \cong 1015.3\,\frac{r}{min}$. La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea, que si este cálculo fuera cierto, el árbol de la bomba estaría clasificado como flexible pues trabaja a una velocidad mayor que la crítica. La experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de pasar por la velocidad crítica, por lo que esta debe estar por encima de la velocidad de trabajo.
4. Aplicando la metodología descrita por Birger, mucho más exacta y elaborada, se obtuvo un valor de $n_{crit.}$=4405 r/min, lo que indudablemente es un valor más adecuado.

Capítulo III

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet de la embarcación contra incendios “6 de Junio”, considerando la rigidez angular de las cajas de bolas y las empaquetaduras como apoyos suplementarios.

3.1 Esquema de análisis del árbol de la Bomba Berliet con apoyos elásticos.

En la Fig. 3.1 se muestra de nuevo el esquema del árbol de la Bomba Berliet, sus cojinetes de apoyo y las empaquetaduras. El apoyo izquierdo es una caja de bolas radial de doble hilera autoalineante, cuya rigidez a flexión se puede considerar nula, o sea, ese apoyo será considerado como una articulación rígida y el apoyo de la derecha es una caja de bolas radial de simple hilera que será considerado como un empotramiento parcialmente elástico de coeficiente de rigidez φ = 0,346. El esquema de análisis considerando además las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios se da en la Fig. 3.2.

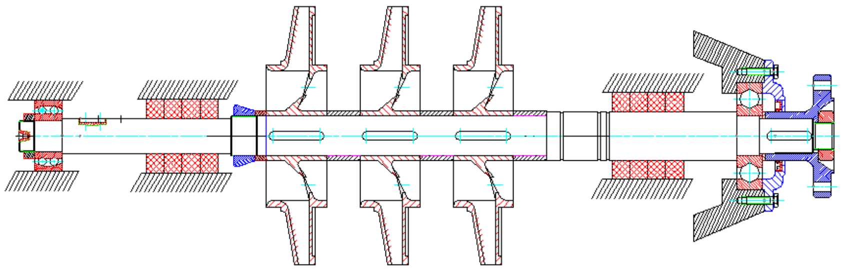


Fig. 3.1 Esquema del árbol con los tres impelentes, las empaquetaduras y los tipos de cojinetes de rodamientos en cada apoyo en cada apoyo

Las bombas centrífugas con difusores tienen la particularidad que las fuerzas radiales provocadas por el fluido en los impelentes se pueden despreciar y considerar exclusivamente las fuerzas originadas por el propio peso de los impelentes y la fuerza distribuida que representa el peso propio del árbol.

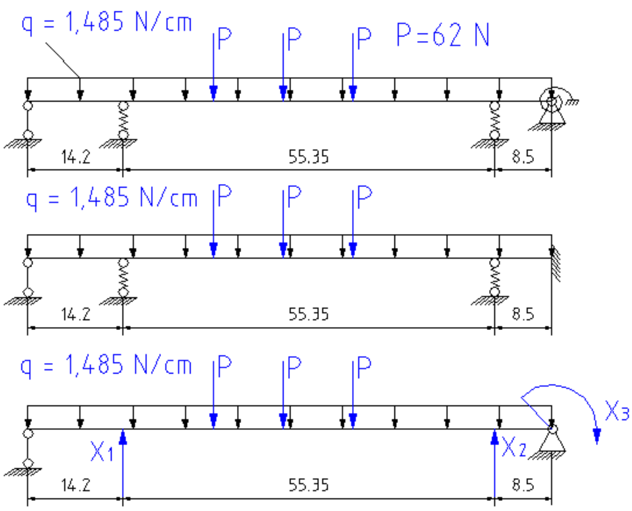


Fig. 3.2 Esquema del árbol con las cargas y reacciones con las empaquetaduras como apoyos elásticos y la caja radial de bolas del apoyo derecho como empotramiento parcialmente elástico.

3.2 Cálculo según la expresión de Dobrovolski para el caso de que las empaquetaduras sean consideradas como apoyos rígidos.

Para realizar este cálculo se consideran los dos cojinetes de rodamientos como articulaciones rígidas, tres cargas concentradas en la posición donde están ubicados los impelentes con las cargas sobre estos. Como la bomba posee difusores la carga radial del líquido es cero y estas cargas se corresponden con el peso propio de los impelentes P = 62 N y se consideró una carga uniformemente distribuida, correspondiente al peso propio del árbol que se calculó dividiendo el peso del árbol entre su longitud, igual a q = 1,485 N/cm.

En este caso se analiza el árbol como si estuviera apoyado en sobre cuatros apoyos rígidos también con el objetivo de comparar los resultados de la flechas y su respectivo valor de velocidad crítica.

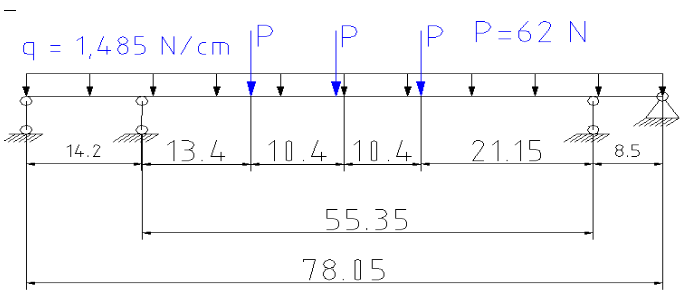


Fig. 3.3 Esquemas con los cuatros apoyos rígidos.

Para determinar los valores de flecha máxima bajo estas condiciones de apoyos se aplicó el Método de los Parámetros de Origen al tramo central entre apoyos el procedimiento fue el siguiente:

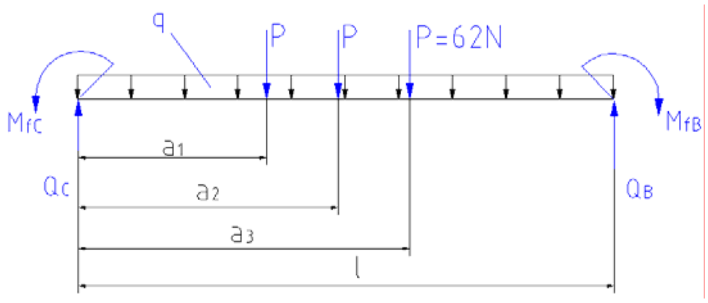


Fig. 3.4 Esquemas del tramo central con los cuatros apoyos rígidos.

Aplicando la elástica para la determinación de las flechas para los diferentes tramos.

$$EIy_B = EI\theta_C l - \frac{M_{fC}l^2}{2} + \frac{Q_C l^3}{6} - \frac{P(l-a_1)^3}{6} - \frac{P(l-a_2)^3}{6} - \frac{P(l-a_3)^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0$$

Despejando la pendiente en C.

$$EI\theta_C = \frac{\frac{M_{fC}l^2}{2} + \frac{P(l-a_1)^3}{6} + \frac{P(l-a_2)^3}{6} + \frac{P(l-a_3)^3}{6} + \frac{ql^4}{24} - \frac{Q_C l^3}{6}}{l}$$

La ecuación de la flecha para el último tramo:

$$y_z = \frac{EI\theta_C z + \sum_{i=1}^{n}\frac{M_{fC}l^2}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{P(Z-a)^3}{6} + \sum_{i=1}^{n}\frac{q(Z-a)^4}{2}}{EI}$$

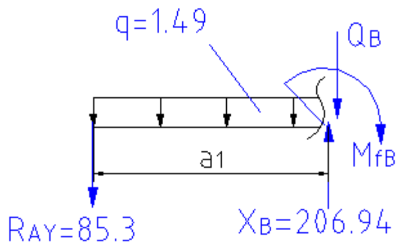


Fig. 3.5 Tramo de la izquierda

$$EIY_{z=14.2} = EI\theta_B a_1 + \frac{M_{fB}{a_1}^2}{2} - \frac{Q_B{a_1}^3}{6} + \frac{X_B{a_1}^3}{6} - \frac{q{a_1}^4}{24} = 0$$

$$EI\theta_B = \frac{-\frac{M_{fB}{a_1}^2}{2} + \frac{Q_B{a_1}^3}{6} - \frac{X_B{a_1}^3}{6} + \frac{q{a_1}^4}{24}}{a_1}$$

$$y_{z=12.7} = \frac{EI\theta_B a_1 - \frac{M_{fB}{a_1}^2}{2} - \frac{Q_B{a_1}^3}{6} + \frac{X_B{a_1}^3}{6} - \frac{q{a_1}^4}{24}}{EI}$$

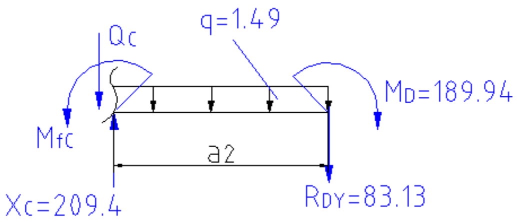


Fig. 3.6 Tramo entre C y la primera carga P.

$$EIY_{z=8.5} = EI\theta_C a_2 - \frac{M_{fC}{a_2}^2}{2} - \frac{Q_C{a_2}^3}{6} + \frac{X_C{a_2}^3}{6} - \frac{q{a_2}^4}{24} = 0$$

$$EI\theta_C = \frac{\frac{M_{fC}{a_2}^2}{2} + \frac{Q_C{a_2}^3}{6} - \frac{X_C{a_2}^3}{6} + \frac{ql^4}{24}}{a_2}$$

$$y_{z=7} = \frac{EI\theta_C a_2 - \frac{M_{fC}{a_2}^2}{2} - \frac{Q_C{a_2}^3}{6} + \frac{X_C{a_2}^3}{6} - \frac{q{a_2}^4}{24}}{EI}$$

Los valores de la flecha como obtenidos se muestran en la Tabla 3.1 y se puede calcular la velocidad crítica.

Tabla 3.1 Valores de flecha con los cuatro apoyos rígidos

Tramos	Secciones	Flechas
	0	0
a1	1,5	5,22E-04
	14,2	0
	20,3	-1,77E-03
	30,7	-5,62E-03
L-a1-a2	41,1	**-7,38E-03**
	51,1	-6,12E-03
	55,45	-4,82E-03
	69,55	0
a2	76,55	1,17E-03
	78,05	0

Aplicando la expresión de Dobrovolski.

$n_{crítica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/\min$

$n_{critica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{7.38*10^{-3}}}$

$n_{critica} \cong 3492.2\ r/min$

La zona de las velocidades de giro

$0,7n_{crit} \leq n \leq 1,3n_{crit}$

$0,7 * 3492.2 \leq n \leq 1,3 * 3492.2$

$2444.5 \leq n \leq 4539.9$

La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea que este cálculo se ajusta mucho mejor a lo que se ha observado en la realidad, a experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de haber pasado por la velocidad crítica, por lo que es de esperar que su velocidad crítica este por encima de la velocidad de trabajo, como ha ocurrido en este caso. Ahora bien aquí se han considerado las empaquetaduras como apoyos rígidos, o sea, lo que tampoco es cierto, pues estas son apoyos elásticos. Las empaquetaduras influyen favorablemente en la velocidad crítica, pero la influencia no será tan marcada como se ha observado aquí. Se aplicará ahora el procedimiento de Birger para ver qué ocurre.

3.3 Cálculo según la metodología dada por Birger, para el caso de que las empaquetaduras sean consideradas como apoyos rígidos.

Para realizar el cálculo de la velocidad crítica de este árbol se utilizarán las mismas nueve secciones de cálculo y los diámetros en estas secciones en la Tabla 3.2 y las longitudes de cada tramo se dan en la Fig. 3.7

Para el acero:

$E_{ac} = 2,0 \cdot 10^6 kgf/cm^2$ (Según (Pisarenko, 1989)

$\gamma_{ac} = 7.8 \cdot 10^{-3} kgf/cm^3$

Tabla. 3.2. Diámetro del árbol para cada tramo.

Tramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ø árbol (cm	3.5	4	4	4.5	4.5	4.5	4.5	5.5	5.5	4.5

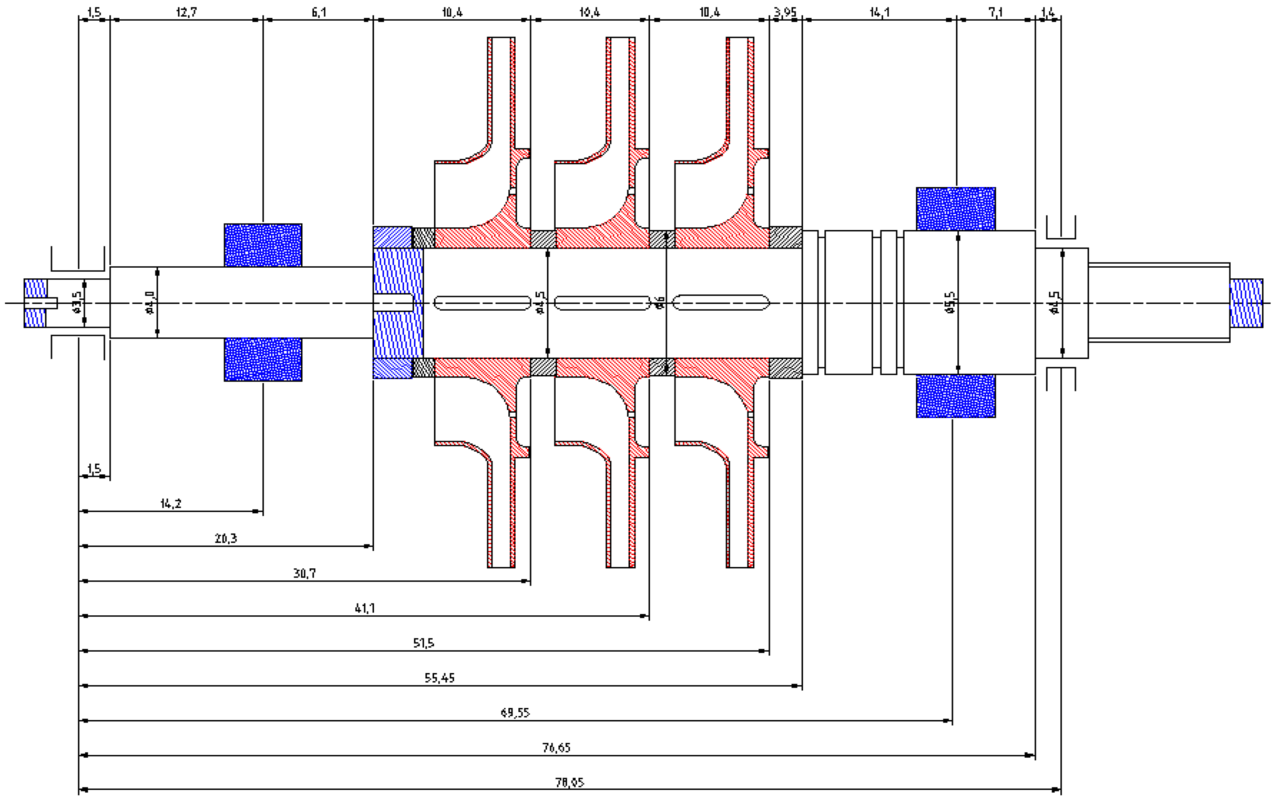


Fig. 3.7 Esquema de los diferentes tramos del árbol

Los resultados del cálculo se dan en las Tablas 3.3.

Tabla 3.3 Primera iteración de la velocidad crítica considerando cuatro apoyos rígidos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,650E-05	14,73614	0	0	5,302E-06	0	3,976E-06	0
1	1,5	6,35	9,992E-05	25,13920	0,0708	0,0000071	4,489E-05	0,0000053	3,524E-04	0,000004
2	14,2	3,05	9,992E-05	25,13920	0	0,0000000	5,725E-04	0,0000502	2,052E-03	0,000356
3	20,3	5,2	7,809E-04	40,26814	0,2404	0,0001877	4,070E-03	0,0006227	2,764E-02	0,002409
4	30,7	5,2	7,809E-04	40,26814	0,7620	0,0005951	7,155E-03	0,0046931	8,601E-02	0,030050
5	41,1	5	7,809E-04	40,26814	1	0,0007809	4,429E-03	0,0118482	1,406E-01	0,116065
6	51,1	2,175	1,265E-04	40,26814	0,8297	0,0001049	4,965E-04	0,0162774	7,189E-02	0,256694
7	55,45	7,05	1,889E-04	89,85914	0,6529	0,0001233	8,696E-04	0,0167739	2,426E-01	0,328580
8	69,55	3,5	1,889E-04	89,85914	0	0,0000000	7,041E-05	0,0176434	1,238E-01	0,571222
9	76,55	0,75	1,265E-04	40,26814	0,1591	0,0000201	1,509E-05	0,0177138	2,658E-02	0,694972
10	78,05			40,26814	0	0		0,0177289		0,721554

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\,\boldsymbol{y_0 d}\,x_1 d_x$	$\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}$	$\frac{\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}}{\boldsymbol{E\cdot I_{(x)}}}\ \boldsymbol{10^{-12}}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx}\cdot\boldsymbol{10^6}$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx_2\,dx_1} \cdot\boldsymbol{10^6}$	$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}}\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx_2\,dx_1} \cdot\boldsymbol{10^6}$	$\boldsymbol{K_{y_{(0)}}\cdot 10^6}$	$\boldsymbol{y_{2_{(x)}}}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0,000000	0,000000	0,000000	-0,000414	0,000000	-0,000310	0,000000	0,000000	0,0000	0,0000
0,013867	-0,013863	-0,000551	-0,036571	-0,000414	-0,237479	-0,000310	0,246927	0,2466	0,0687
0,131276	-0,130919	-0,005208	-0,029916	-0,036985	-0,316850	-0,237790	2,337577	2,0998	0,5853
0,187669	-0,185260	-0,004601	-0,056693	-0,066901	-0,990569	-0,554640	3,341748	2,7871	0,7769
0,283814	-0,253764	-0,006302	-0,066848	-0,123594	-1,632981	-1,545209	5,053777	3,5086	0,9780
0,379960	-0,263895	-0,006553	-0,059552	-0,190441	-2,202171	-3,178190	6,765805	3,5876	1,0000
0,472408	-0,215714	-0,005357	-0,016106	-0,249993	-1,122500	-5,380361	8,411987	3,0316	0,8450
0,512623	-0,184043	-0,002048	-0,020069	-0,266099	-3,893481	-6,502861	9,128075	2,6252	0,7317
0,642974	-0,071752	-0,000798	-0,003900	-0,286168	-2,016824	-10,396342	11,449191	1,0528	0,2935
0,707687	-0,012715	-0,000316	-0,000237	-0,290068	-0,435279	-12,413166	12,601518	0,1884	0,0525
0,721554	0,000000	0	0,000000	-0,290304	0,000000	-12,848445	12,848445	0,0000	0,0000

Capítulo II: Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet

La primera aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{1\,crit} = \sqrt{\frac{y_{0\,(x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{1\,crit} = \sqrt{\frac{1}{3.58 * 10^{-6}}}$$

$$w_{1\,crit} = 528.5\ \ rad/s$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * w_{1\,crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * 528.5}{3.1416}$$

$$n_{Crit\ 1} = 5046.8\ \ \mathrm{r/min}$$

Tabla 3.3 Segunda iteración de la velocidad crítica considerando cuatro apoyos rígidos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,65E-05	14,736	0	0	5,15E-06	0	3,86E-06	0
1	1,5	6,35	9,99E-05	25,139	0,06874	0,000007	4,15E-04	0,000005	2,70E-03	0,00000386
2	14,2	3,05	9,99E-05	25,139	0,58529	0,000058	2,03E-03	0,000420	8,75E-03	0,0027043
3	20,3	5,2	7,81E-04	40,268	0,77687	0,000607	7,13E-03	0,002449	6,25E-02	0,0114545
4	30,7	5,2	7,81E-04	40,268	0,97797	0,000764	8,03E-03	0,009575	1,41E-01	0,0739769
5	41,1	5	7,81E-04	40,268	1,00000	0,000781	4,44E-03	0,017607	1,98E-01	0,2153204
6	51,1	2,175	1,26E-04	40,268	0,84503	0,000107	5,33E-04	0,022046	9,71E-02	0,4135819
7	55,45	7,05	1,89E-04	89,859	0,73174	0,000138	1,37E-03	0,022579	3,28E-01	0,5106395
8	69,55	3,5	1,89E-04	89,859	0,29347	0,000055	2,17E-04	0,023944	1,68E-01	0,8386240
9	76,55	0,75	1,26E-04	40,268	0,05250	0,000007	4,98E-06	0,024161	3,62E-02	1,0069924
10	78,05			40,268	0	0		0,024166		1,0432380

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\, \boldsymbol{y_0 d}\, x_1 d_x$	$\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}$	$\frac{\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}}{\boldsymbol{E \cdot I_{(x)}}}\ \mathbf{10^{-12}}$	$\left[13_i + 13_{(i+1)}\right] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E \cdot I}}\, \boldsymbol{dx} \cdot \mathbf{10^6}$	$\left[15_i + 15_{(i+1)}\right] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E \cdot I}}\, \boldsymbol{dx_2\, dx_1} \cdot \mathbf{10^6}$	$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}}\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E \cdot I}}\, \boldsymbol{dx_2\, dx_1} \cdot \mathbf{10^6}$	$\boldsymbol{K_{y_{(0)} \cdot 10^6}}$	$\boldsymbol{y_{3_{(x)}}}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,00060	0	-0,000449	0	0	0	0
0,02005	-0,0200	-0,00080	-0,05232	-0,000598	-0,339845	-0,00045	0,332507	0,33206	0,071
0,18980	-0,1871	-0,00744	-0,04238	-0,052921	-0,452087	-0,34029	3,147731	2,80744	0,599
0,27134	-0,2599	-0,00645	-0,07700	-0,095304	-1,391545	-0,79238	4,499926	3,70755	0,791
0,41034	-0,3364	-0,00835	-0,08657	-0,1723	-2,242099	-2,18393	6,805306	4,62138	0,986
0,54935	-0,3340	-0,00830	-0,07493	-0,258872	-2,96338	-4,42602	9,110687	4,68466	1,000
0,68302	-0,2694	-0,00669	-0,02013	-0,333804	-1,495834	-7,38940	11,3274	3,938	0,841
0,74116	-0,2305	-0,00257	-0,02523	-0,353936	-5,16834	-8,88524	12,29167	3,40643	0,727
0,92962	-0,0910	-0,00101	-0,00495	-0,379162	-2,671464	-14,05358	15,41723	1,36366	0,291
1,02319	-0,0162	-0,00040	-0,00030	-0,384114	-0,576397	-16,72504	16,96893	0,24389	0,052
1,0432380	0	0	0	-0,384415	0	-17,30144	17,30144	0	0

La segunda aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{2\,crit} = \sqrt{\frac{y_{0\,(x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{2\,crit} = \sqrt{\frac{1}{4{,}68 * 10^{-6}}}$$

$$w_{2\,crit} = 462.3 \;\; rad/s$$

$$n_{Crit\;2} = \frac{30 * w_{1\,crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\;2} = \frac{30 * 462.3}{3.1416}$$

$$n_{Crit\;2} = 4414.6 \;\; \mathrm{r/min}$$

Porciento de diferencia:

$$\%dif = \frac{w_{2\,crit} - w_{1\,crit}}{w_{1\,crit}} * 100$$

$$\%dif = \frac{462.3 \;\; - 528.5}{528.5} * 100$$

$$\%dif = -12.5$$

Tabla 3.3 Tercera iteración de la velocidad crítica considerando cuatro apoyos rígidos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \overline{x_{i+1} - x_i}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} d$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,65E-05	14,736	0	0	5,31E-06	0,000000	3,98E-06	0
1	1,5	6,35	9,99E-05	25,139	0,07088	0,0000071	4,25E-04	0,000005	2,77E-03	0,00000398
2	14,2	3,05	9,99E-05	25,139	0,59928	0,0000599	2,07E-03	0,000431	8,93E-03	0,0027715
3	20,3	5,2	7,81E-04	40,268	0,79142	0,0006180	7,22E-03	0,002498	6,35E-02	0,0117038
4	30,7	5,2	7,81E-04	40,268	0,98649	0,0007704	8,07E-03	0,009718	1,43E-01	0,0752264
5	41,1	5	7,81E-04	40,268	1,00000	0,0007809	4,44E-03	0,017784	2,00E-01	0,2182376
6	51,1	2,175	1,26E-04	40,268	0,84061	0,0001063	5,30E-04	0,022220	9,78E-02	0,4182617
7	55,45	7,05	1,89E-04	89,859	0,72715	0,0001374	1,36E-03	0,022750	3,30E-01	0,5160732
8	69,55	3,5	1,89E-04	89,859	0,29109	0,0000550	2,16E-04	0,024106	1,69E-01	0,8464141
9	76,55	0,75	1,26E-04	40,268	0,05206	0,0000066	4,94E-06	0,024322	3,65E-02	1,0159136
10	78,05			40,268	0	0		0,024327		1,0524003

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\,\boldsymbol{y_0 d}\,x_1 dx$	$\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}$	$\boldsymbol{\frac{A_{y_{(x)}}}{E\cdot I_{(x)}}\,10^{-12}}$	$[13_i + 13_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\boldsymbol{\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\,dx\cdot 10^6}$	$[15_i + 15_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\boldsymbol{\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\,dx_2\,dx_1 \cdot 10^6}$	$\boldsymbol{\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\,dx_2\,dx_1 \cdot 10^6}$	$\boldsymbol{K_{y_{(0)}}\cdot 10^6}$	$\boldsymbol{y_{4_{(x)}}}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,00060	0	-0,000452	0	0	0	0
0,0202255	-0,0202	-0,00080	-0,05277	-0,000603	-0,34276	-0,00045	0,334895	0,33444	0,071
0,1914681	-0,1887	-0,00751	-0,04274	-0,053375	-0,45594	-0,34321	3,170337	2,82712	0,600
0,2737185	-0,2620	-0,00651	-0,07758	-0,096114	-1,402977	-0,79915	4,532242	3,73309	0,792
0,4139486	-0,3387	-0,00841	-0,08712	-0,17369	-2,259407	-2,20213	6,854179	4,65205	0,987
0,5541787	-0,3359	-0,00834	-0,07533	-0,260812	-2,984777	-4,46154	9,176116	4,71458	1,000
0,6890154	-0,2708	-0,00672	-0,02023	-0,336144	-1,506225	-7,44631	11,40875	3,96244	0,840
0,7476694	-0,2316	-0,00258	-0,02534	-0,356374	-5,203507	-8,95254	12,37994	3,42741	0,727
0,9377891	-0,0914	-0,00102	-0,00497	-0,381713	-2,689391	-14,15604	15,52795	1,37191	0,291
1,0321748	-0,0163	-0,00040	-0,00030	-0,386685	-0,580255	-16,84544	17,0908	0,24536	0,052
1,0524003	0	0	0	-0,386988	0	-17,42569	17,42569	0	0

La tercera aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{3\,crit} = \sqrt{\frac{y_{0\,(x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{3\,crit} = \sqrt{\frac{1}{4.71 * 10^{-6}}}$$

$$w_{3\,crit} = 460.8\,rad/s$$

$$n_{Crit\,3} = \frac{30 * w_{1\,crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\,3} = \frac{30 * 460.8}{3.1416}$$

$$n_{Crit\,3} = 4400.3\ \text{r/min}$$

Porciento de diferencia:

$$\%dif = \frac{w_{3\,crit} - w_{2\,crit}}{w_{2\,crit}} * 100$$

$$\%dif = \frac{460.8 \quad - 462.3}{462.3} * 100$$

$$\%dif = -0.3\%$$

3.4 Cálculo según la expresión de Dobrovolski para el caso de que las empaquetaduras sean consideradas como apoyos elásticos.

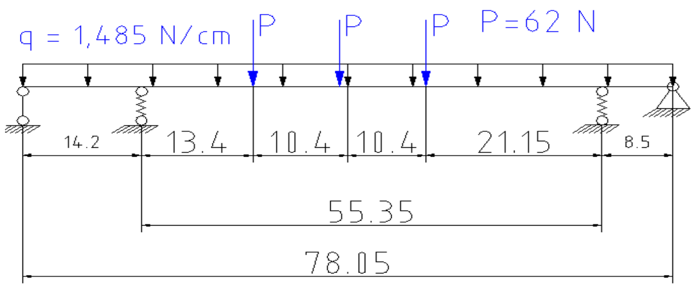


Fig. 3.8 Esquema del árbol con las empaquetaduras como apoyos elásticos.

Aplicando el Programa desarrollado por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la UCf, se obtuvieron los siguientes datos.

Ra = 83.5 N

$X_B = 206.94\,N$

$X_C = 209.4\,N$

Rd = 83.13 N

$Y_B = 1.09 \cdot 10\text{-}03$ cm

$Y_C = 8.70 \cdot 10\text{-}4$ cm

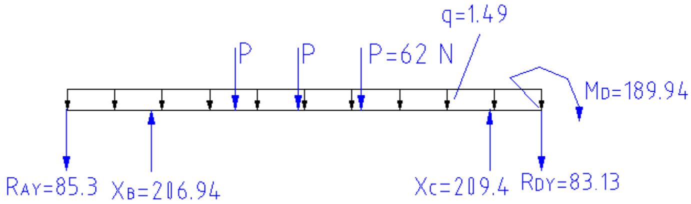


Fig. 3.9 .Esquema del árbol con apoyos elásticos con sus cargas.

Para nuestro caso fue necesario obtener la flecha máxima del árbol de esta bomba la cual es provocada por las distintas fuerzas a las cuales está sometido para ello se calcula por la ecuación de la elástica la flechas en ambos extremos considerando una rigidez intermedia constante a lo largo de su longitud, como se plantea a continuación.

$$EIy_B = EI\theta_A a_1 - \frac{R_{AY}a_1^3}{6} - \frac{qa_1^4}{24}$$

$$EI\theta_A = \frac{EIy_B + \frac{R_{AY}a_1^3}{6} + \frac{qa_1^4}{24}}{a_1}$$

$$EIy_C = EI\theta_D a_2 - \frac{M_D a_2^2}{2} - \frac{R_{DY}a_2^3}{6} - \frac{qa_2^4}{24}$$

$$EI\theta_D = \frac{EIy_C + \frac{M_D a_2^2}{2} + \frac{R_{DY}a_2^3}{6} + \frac{qa_2^4}{24}}{a_2}$$

Para el caso del tramo medio fue necesario hallar las fuerzas internas que provocaban las cargas en los puntos B y C las cuales se determinaron por el método de las secciones.

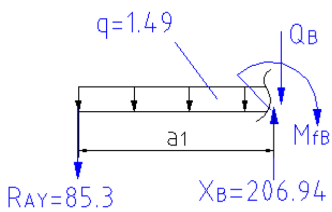


Fig. 3.10 Tramo de la izquierda..

$$\sum F = Q + A_y + qa_1 - X_b = 0 \qquad Q_b = X_b - A_y - qa_1$$

$$\sum M_f = A_y * l + \frac{q * {a_1}^2}{2} - M_f = 0 \qquad M_f = A_y * a_1 + \frac{q * {a_1}^2}{2}$$

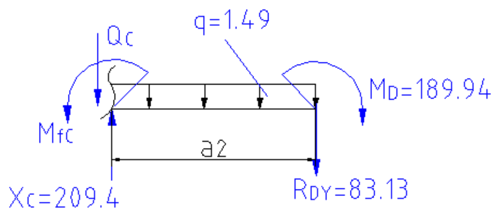


Fig. 3.11 Tramo de la derecha.

$$\sum F = R_{Dy} + qa_2 - X_c - Q = 0 \qquad Q_c = R_{Dy} + qa_2 - X_c$$

$$\sum M_f = R_{Dy} * a_2 + \frac{q * a_2{}^2}{2} + M_D - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Dy} * a_2 + \frac{q * a_2{}^2}{2} + M_D$$

Luego de haber obtenido las fuerzas internas provocadas por las fuerzas en los extremos aplicando La Ley de Acción y Reacción de Newton el esquema del tramo central queda de esta forma lista para calcular la flecha en este tramo intermedio.

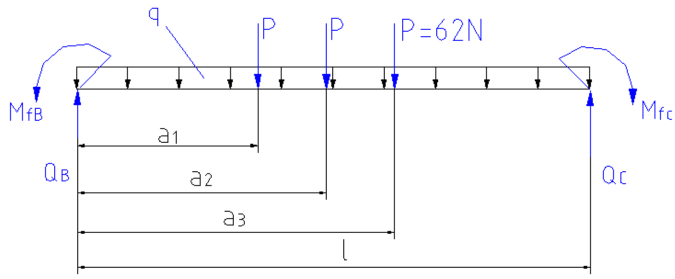


Fig. 3.12 Análisis del tramo intermedio.

Para poder obtener la flecha máxima tomando en cuenta la rigidez en los apoyos fue necesario aplicar superposición de efecto por lo que primero se analiza los desplazamiento provocados producto a la elasticidad de los apoyos y cuyos desplazamientos se determinan por propiedad de proporcionalidad de triangulo y luego se aplica el método de la elástica para las fuerzas internas y externas de este tramos intermedio.

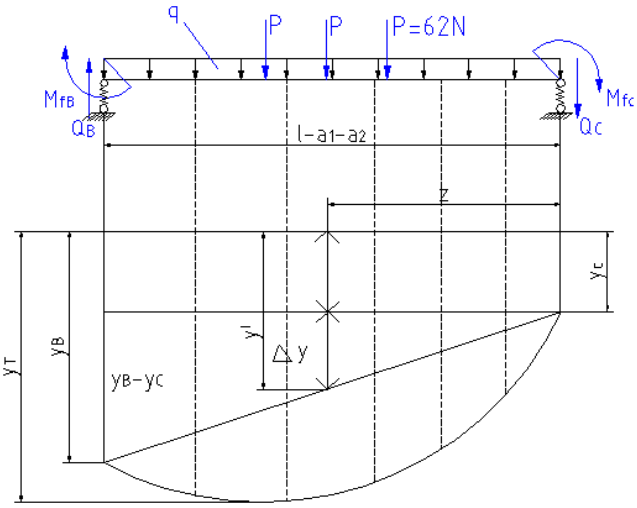


Fig. 3.13 Esquema de la superposición de las dos flechas en el tramo intermedio.

Calculo de trapecio y aplicación de la proporcionalidad de triangulo para determinar las flechas.

$y' = y_c + \Delta y$

$\frac{\Delta y}{z} = \frac{y_b - y_c}{l - a_1 - a_2}$

$y_b = \frac{X_1}{C_1}$ $\quad X_1 = 260.9 \quad C_1 = 4787188.8 \quad y_b = 5.45 * 10^{-5}$

$y_c = \frac{X_2}{C_2}$ $\quad X_2 = 209.4 \quad C_2 = 6582384.6 \quad y_c = 3.18 * 10^{-5}$

$$y' = y_c + \frac{(y_b - y_c) * z}{l - a_1 - a_2}$$

Tabla 3.4 Valores de flecha del trapecio.

Secciones	Flechas
55,35	1,09E-03
49,25	1,03E-03
38,85	1,02E-03
28,45	9,77E-04
18,45	9,36E-04
14,1	8,94E-04
0	8,70E-04

Aplicación de la elástica para determinar los demás puntos de la flecha y poder aplicar la superposición.

$$EIy_{z=l} = EI\theta_C l - \frac{M_{fC} l^2}{2} + \frac{Q_C l^3}{6} - \frac{P(l-a_1)^3}{6} - \frac{P(l-a_2)^3}{6} - \frac{P(l-a_3)^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0$$

$$EI\theta_C = \frac{\frac{M_{fC} l^2}{2} + \frac{P(l-a_1)^3}{6} + \frac{P(l-a_2)^3}{6} + \frac{P(l-a_3)^3}{6} + \frac{ql^4}{24} - \frac{Q_C l^3}{6}}{l}$$

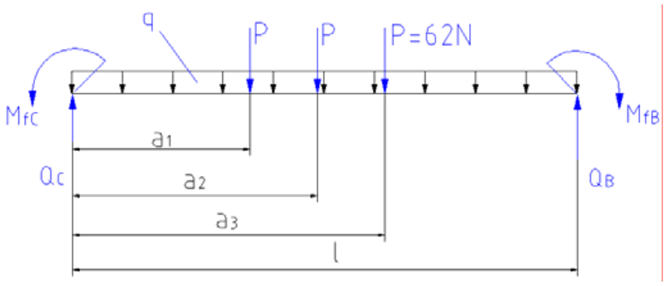


Fig. 3.14 Esquema invertido del tramo intermedio.

Para cuando la z tienen los valores que se muestran a continuación como se puede ver se puede apreciar el esquema fue necesario invertirlo para ser consecuente con la semejanza de triangulo.

Tabla 3.5 Valores de flecha aplicando la elástica.

secciones		flecha
55,35	Z=L-a1-a2	0
z=49,25	0<z<L-a2-a0	-1,77E-03
z=38,85	0<z<L-a2-a1	-5,62E-03
z=28,45	0<z<L-a2-a1	-7,38E-03
z=18,45	0<z<L-a2-a1	-6,12E-03
z=14,1	0<z<L-a2-a1	-4,82E-03
0	Z=0	0

$$y_z = \frac{EI\theta_C z + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{fC} l^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P(Z-a)^3}{6} + \sum_{i=1}^{n} \frac{q(Z-a)^4}{2}}{EI}$$

La superposición de estos dos casos da el valor total de la flecha resultante como se muestra en la Tabla 3.6, con lo que se puede aplicar la metodología propuesta por Birger, y calcular la velocidad critica.

Tabla 3.6. Valores de la flecha resultante

Tramos	Secciones	Flechas
a1	0	0
	1,5	2,25E-04
	14,2	1,09E-03
L-a1-a2	20,3	-2,81E-03
	30,7	-6,64E-03
	41,1	**-8,35E-03**
	51,1	-7,06E-03
	55,45	-5,71E-03
a2	69,55	8,70E-04
	76,55	2,15E-04
	78,05	0

Aplicando la expresión de Dobrovolski.

$$n_{crítica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/\min$$

$$n_{critica} \cong 300\sqrt{\frac{1}{8.35*10^{-3}}}$$

$$n_{critica} \cong 3\,283.1 \;\; r/min$$

La zona de las velocidades de giro

$$0{,}7n_{crit} \leq n \leq 1{,}3n_{crit}$$

$$0{,}7 * 3283.1 \;\leq n \leq 1{,}3 * 3283.1$$

$$2298.2 \leq n \leq 4268$$

La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea que este cálculo se ajusta correctamente a lo que se ha observado en la realidad y a los cálculos anteriormente realizados, la experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de haber pasado por la velocidad crítica, por lo que es de esperar que su velocidad crítica este por encima de la velocidad de trabajo, como ha ocurrido en este caso. Ahora bien aquí se han considerado las empaquetaduras como apoyos elásticos, y como se aprecia la flecha máxima ha dado mayor que el caso en que se consideraron los apoyos rígidos Las empaquetaduras influyen favorablemente en la velocidad

crítica, pero la influencia no es tan marcada como se la que se observó con los apoyos rígidos, la velocidad crítica es un poco menor pero aun muy alejada de la de trabajo de la bomba.
Se aplicará ahora el procedimiento de Birger para ver si se confirma este resultado.

3.5 Cálculo según la metodología dada por Birger, para el caso de que las empaquetaduras sean consideradas como apoyos rígidos.

Para realizar el cálculo de la velocidad crítica de este árbol se utilizarán las mismas nueve secciones de cálculo. Los resultados de los cálculos se dan en las Tablas 3.7.

Tabla 3.7 Primera iteración de la velocidad crítica considerando la elasticidad en los apoyos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,650E-05	14,73614	0	0	2,021E-06	0,0000000	1,516E-06	0
1	1,5	6,35	9,992E-05	25,13920	0,026969	0,000003	9,988E-05	0,0000020	6,599E-04	0,0000015
2	14,2	3,05	9,992E-05	25,13920	0,130461	0,000013	8,400E-04	0,0001019	3,184E-03	0,0006614
3	20,3	5,2	7,809E-04	40,26814	0,336004	0,000262	4,591E-03	0,0009419	3,367E-02	0,0038452
4	30,7	5,2	7,809E-04	40,26814	0,794614	0,000621	7,287E-03	0,0055331	9,544E-02	0,0375154
5	41,1	5	7,809E-04	40,26814	1,000000	0,000781	4,439E-03	0,0128205	1,504E-01	0,1329543
6	51,1	2,175	1,265E-04	40,26814	0,844654	0,000107	5,132E-04	0,0172592	7,619E-02	0,2833528
7	55,45	7,05	1,889E-04	89,85914	0,683626	0,000129	1,049E-03	0,0177724	2,580E-01	0,3595464
8	69,55	3,5	1,889E-04	89,85914	0,104129	0,000020	8,022E-05	0,0188215	1,320E-01	0,6175328
9	76,55	0,75	1,265E-04	40,26814	0,025699	0,000003	2,437E-06	0,0189017	2,835E-02	0,7495638
10	78,05			40,26814	0	0		0,0189041		0,7779181

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\,\boldsymbol{y_0 d}\,x_1 d_x$	$\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}$	$\frac{\boldsymbol{A_{y_{(x)}}}}{\boldsymbol{E\cdot I_{(x)}}}\,\boldsymbol{10^{-12}}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx} \cdot \boldsymbol{10^6}$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx_2\,dx_1} \cdot \boldsymbol{10^6}$	$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}}\int_0^l\int_0^x \frac{\boldsymbol{A_y}}{\boldsymbol{E\cdot I}}\,\boldsymbol{dx_2\,dx_1} \cdot \boldsymbol{10^6}$	$\boldsymbol{K_{y_{(0)}\cdot 10^6}}$	$\boldsymbol{y_{2_{(x)}}}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,00045	0	-0,00033	0	0	0	0
0,014950	-0,01494887	-0,00059	-0,03936	-0,000446	-0,25559	-0,000334	0,262285	0,261950	0,06917
0,141530	-0,14086883	-0,00560	-0,03212	-0,039805	-0,34079	-0,255925	2,482961	2,227036	0,58807
0,202328	-0,19848329	-0,00493	-0,06030	-0,071929	-1,06162	-0,596712	3,549585	2,952873	0,77974
0,305984	-0,26846904	-0,00667	-0,07040	-0,132229	-1,74125	-1,658331	5,368092	3,709761	0,97960
0,409640	-0,27668611	-0,00687	-0,06241	-0,202627	-2,33833	-3,399579	7,186599	3,787020	1,00000
0,509310	-0,22595682	-0,00561	-0,01688	-0,265039	-1,18963	-5,737907	8,935163	3,197256	0,84427
0,552666	-0,19311939	-0,00215	-0,02109	-0,281918	-4,12371	-6,927537	9,695788	2,768251	0,73098
0,693199	-0,07566656	-0,00084	-0,00411	-0,303006	-2,13543	-11,051247	12,161264	1,110017	0,29311
0,762968	-0,01340398	-0,00033	-0,00025	-0,307118	-0,46086	-13,186679	13,385258	0,198579	0,05244
0,777918	0	0	0	-0,307368	0	-13,647543	13,647543	0	0

Capítulo II: Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol de la Bomba Berliet

La primera aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{1\ crit} = \sqrt{\frac{y_{0\ (x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{1\ crit} = \sqrt{\frac{1}{3.79 * 10^{-6}}}$$

$$w_{1\ crit} = 513.7\ rad/s$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * w_{1\ crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\ 1} = \frac{30 * 513.7}{3.1416}$$

$$n_{Crit\ 1} = 4905.5\ \mathrm{r/min}$$

Tabla 3.7 Segunda iteración de la velocidad crítica considerando la elasticidad en los apoyos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i$ $x_{i+1}-x_i$	$m_{(x)_i}-kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E\cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i}\, y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1}\, y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}\, y_{0_{(x)_2}} d$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0,75	7,650E-05	14,7361	0	0	5,18E-06	0	3,89E-06	0
1	1,5	6,35	9,992E-05	25,1392	0,06917	0,0000069	4,17E-04	0,0000052	2,71E-03	0,0000039
2	14,2	3,05	9,992E-05	25,1392	0,58807	0,0000588	2,04E-03	0,0004222	8,79E-03	0,0027177
3	20,3	5,2	7,809E-04	40,2681	0,77974	0,0006089	7,14E-03	0,0024585	6,27E-02	0,0115039
4	30,7	5,2	7,809E-04	40,2681	0,97960	0,0007650	8,04E-03	0,0096027	1,42E-01	0,0742226
5	41,1	5	7,809E-04	40,2681	1,00000	0,0007809	4,44E-03	0,0176414	1,99E-01	0,2158919
6	51,1	2,175	1,265E-04	40,2681	0,84427	0,0001068	5,33E-04	0,0220797	9,72E-02	0,4144974
7	55,45	7,05	1,889E-04	89,8591	0,73098	0,0001381	1,36E-03	0,0226123	3,28E-01	0,5117025
8	69,55	3,5	1,889E-04	89,8591	0,29311	0,0000554	2,17E-04	0,0239761	1,69E-01	0,8401509
9	76,55	0,75	1,265E-04	40,2681	0,05244	0,0000066	4,97E-06	0,0241931	3,63E-02	1,0087434
10	78,05			40,2681	0	0		0,0241981		1,0450368

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\, y_0 d\, x_1 d_x$	$A_{y_{(x)}}$	$\frac{A_{y_{(x)}}}{E\cdot I_{(x)}}\; 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\, dx \cdot 10^6$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\, dx_2\, dx_1 \cdot 10^6$	$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}\, dx_2\, dx_1 \cdot 10^6$	$K_{y_{(0)}}{\cdot}10^6$	$y_{3_{(x)}}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0,00060	0	-0,00045	0	0	0	0
0,0200840	-0,02008	-0,00080	-0,05241	-0,00060	-0,34042	-0,00045	0,33298	0,3325	0,0709
0,1901284	-0,18741	-0,00745	-0,04245	-0,05301	-0,45284	-0,34087	3,15217	2,8113	0,5994
0,2718033	-0,26030	-0,00646	-0,07711	-0,09546	-1,39379	-0,79371	4,50628	3,7126	0,7915
0,4110523	-0,33683	-0,00836	-0,08668	-0,17257	-2,24550	-2,18750	6,81491	4,6274	0,9865
0,5503013	-0,33441	-0,00830	-0,07501	-0,25925	-2,96758	-4,43299	9,12355	4,6906	1
0,6841945	-0,26970	-0,00670	-0,02015	-0,33426	-1,49788	-7,40057	11,34339	3,9428	0,8406
0,7424381	-0,23074	-0,00257	-0,02525	-0,35442	-5,17526	-8,89845	12,30902	3,4106	0,7271
0,9312276	-0,09108	-0,00101	-0,00496	-0,37966	-2,67499	-14,07371	15,43899	1,3653	0,2911
1,0249528	-0,01621	-0,00040	-0,00030	-0,38462	-0,57716	-16,74870	16,99288	0,2442	0,0521
1,0450368	0	0	0	-0,38492	0	-17,32586	17,32586	0	0

La segunda aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{2\ crit} = \sqrt{\frac{y_{0\ (x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{2\ crit} = \sqrt{\frac{1}{4{,}69 * 10^{-6}}}$$

$$w_{2\ crit} = 461.8\ \ rad/s$$

$$n_{Crit\ 2} = \frac{30 * w_{1\ crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\ 2} = \frac{30 * 461.8}{3.1416}$$

$$n_{Crit\ 2} = 4409.9\ \ \mathrm{r/min}$$

Porciento de diferencia:

$$\%dif = \frac{w_{2\ crit} - w_{1\ crit}}{w_{1\ crit}} * 100$$

$$\%dif = \frac{461.8 \quad - 513.7}{513.7} * 100$$

$$\%dif = -10$$

Tabla 3.7 Tercera iteración de la velocidad crítica considerando la elasticidad en los apoyos.

sección i	x_i-cm	$\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$	$m_{(x)_i} - kg \cdot S^2/_{cm^2}$	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12} kg - cm^2$	$\frac{y_{0_{(x)}}}{y_{máx}}$	$m_{(x)_i} y_{0_{(x)}}$	$[6_i + 6_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x m_{(x)_1} y_{0_{(x)_1}} dx$	$[8_i + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2}\Delta x_i$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)} y_{0_{(x)_2}} dx$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0.75	7.650E-05	14.7361	0	0	5.31E-06	0.00000	3.98E-06	0.0000000
1	1.5	6.35	9.992E-05	25.1392	0.07089	0.0000071	4.25E-04	0.00001	2.77E-03	0.0000040
2	14.2	3.05	9.992E-05	25.1392	0.59936	0.0000599	2.07E-03	0.00043	8.93E-03	0.0027718
3	20.3	5.2	7.809E-04	40.2681	0.79150	0.0006181	7.22E-03	0.00250	6.35E-02	0.0117051
4	30.7	5.2	7.809E-04	40.2681	0.98654	0.0007704	8.07E-03	0.00972	1.43E-01	0.0752331
5	41.1	5	7.809E-04	40.2681	1.00000	0.0007809	4.44E-03	0.01779	2.00E-01	0.2182531
6	51.1	2.175	1.265E-04	40.2681	0.84059	0.0001063	5.30E-04	0.02222	9.78E-02	0.4182867
7	55.45	7.05	1.889E-04	89.8591	0.72711	0.0001374	1.36E-03	0.02275	3.30E-01	0.5161023
8	69.55	3.5	1.889E-04	89.8591	0.29107	0.0000550	2.15E-04	0.02411	1.70E-01	0.8464556
9	76.55	0.75	1.265E-04	40.2681	0.05206	0.0000066	4.94E-06	0.02432	3.65E-02	1.0159610
10	78.05			40.2681	0	0		0.02433		1.0524489

$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x m_{(x)}\, y_0 d\, x_1 d_x$	$A_{y_{(x)}}$	$\frac{A_{y_{(x)}}}{E\cdot I_{(x)}}\cdot 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx\cdot 10^6$	$[15_i+15_{(i+1)}]\cdot\frac{1}{2}\Delta x_i\cdot 10^6$	$\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx_2\,dx_1 \cdot 10^6$	$\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^x \frac{A_y}{E\cdot I}dx_2\,dx_1\cdot 10^6$	$K_{y(0)}\cdot 10^6$	$y_{4(x)}$
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0	0	-0.00060	0	-0.00045	0	0	0	0
0.0202264	-0.02022	-0.00080	-0.05277	-0.00060	-0.34278	-0.00045	0.33491	0.3345	0.071
0.1914769	-0.18871	-0.00751	-0.04274	-0.05338	-0.45596	-0.34323	3.17046	2.8272	0.600
0.2737311	-0.26203	-0.00651	-0.07758	-0.09612	-1.40304	-0.79919	4.53241	3.7332	0.792
0.4139677	-0.33873	-0.00841	-0.08713	-0.17370	-2.25950	-2.20223	6.85444	4.6522	0.987
0.5542044	-0.33595	-0.00834	-0.07533	-0.26082	-2.98489	-4.46172	9.17646	4.7147	1.000
0.6890473	-0.27076	-0.00672	-0.02023	-0.33616	-1.50628	-7.44661	11.40918	3.9626	0.840
0.7477039	-0.23160	-0.00258	-0.02534	-0.35639	-5.20369	-8.95289	12.38041	3.4275	0.727
0.9378324	-0.09138	-0.00102	-0.00497	-0.38173	-2.68949	-14.15659	15.52854	1.3720	0.291
1.0322225	-0.01626	-0.00040	-0.00030	-0.38670	-0.58028	-16.84607	17.09144	0.2454	0.052
1.0524489	0	0	0	-0.38700	0	-17.42635	17.42635	0	0

La tercera aproximación de la velocidad crítica es:

$$w_{3\ crit} = \sqrt{\frac{y_{0\ (x)}}{Ky_0}}$$

$$w_{3\ crit} = \sqrt{\frac{1}{4.71 * 10^{-6}}}$$

$$w_{3\ crit} = 460.8\ rad/s$$

$$n_{Crit\ 3} = \frac{30 * w_{1\ crit}}{\pi}$$

$$n_{Crit\ 3} = \frac{30 * 460.8}{3.1416}$$

$$n_{Crit\ 3} = 4400.3\ \text{r/min}$$

Porciento de diferencia:

$$\%dif = \frac{w_{3\ crit} - w_{2\ crit}}{w_{2\ crit}} * 100$$

$$\%dif = \frac{460.8\ \ - 462.3}{462.3} * 100$$

$$\%dif = -0.3\%$$

3.6 Conclusiones Parciales del Capítulo III.

5. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski para el caso en que se consideraran las empaquetaduras como apoyos suplementarios rígidos y se obtuvo $n_{critica} \cong 3492.2\, r/min$. La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea, o sea que este cálculo se ajusta mucho mejor a lo que se ha observado en la realidad, la experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de haber pasado por la velocidad crítica, por lo que era de esperar que su velocidad crítica este por encima de la velocidad de trabajo, como ha ocurrido en este caso. Ahora bien aquí se han considerado las empaquetaduras como apoyos rígidos, o sea, lo que tampoco es cierto, pues estas son apoyos elásticos. Las empaquetaduras influyen favorablemente en la velocidad crítica, pero la influencia no será tan marcada como se ha observado aquí.
6. Aplicando la metodología descrita por Birger, mucho más exacta y elaborada, se obtuvo para el caso de considerar las empaquetaduras como apoyos rígidos, un valor de: $n_{Crit\,3} = 4400.3\ \mathrm{r/min}$ lo que indudablemente es un valor más exacto que el de Dobrovolski y también es lógico.
7. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski para el caso en que se consideraran las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y se obtuvo $n_{critica} \cong 3\,283.1\ r$. La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea, o sea que este cálculo se ajusta aun mucho mejor a lo que se ha observado en la realidad, la experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de haber pasado por la velocidad crítica, por lo que era de esperar que su velocidad crítica este por encima de la velocidad de trabajo, como ha ocurrido en este caso. Ahora bien aquí se han considerado las empaquetaduras como apoyos elásticos como son ellas en la realidad, la flecha es mayor y en consecuencia la velocidad crítica es menor. Las empaquetaduras influyen favorablemente en la velocidad crítica, pero la influencia no es tan marcada como si se consideran ellas como apoyos rígidos.
8. Aplicando la metodología descrita por Birger, mucho más exacta y elaborada, se obtuvo para el caso de considerar las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios, un valor de: $n_{Crit\,3} = 4400.3\ \mathrm{r/min}$ lo que implicaría que no

influyen el hecho de que las empaquetaduras sean rígidas o elásticas, lo que es ilógico, debe haber un error, pero no hubo tiempo de detectar donde.

Conclusiones Generales

Conclusiones Generales

Conclusiones Generales

1. Se profundizó en las diferentes expresiones y métodos descritos en la literatura para el cálculo de la velocidad crítica en los árboles de las máquinas.
2. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski y se obtuvo $n_{critica} \cong 1015.3 \frac{r}{min}$. La velocidad de giro del árbol de la bomba BERLIET es de 1750 r/min, o sea, que si este cálculo fuera cierto, el árbol de la bomba estaría clasificado como flexible pues trabaja a una velocidad mayor que la crítica. La experiencia de trabajo con esta bomba después de su reparación es que trabaja muy suave sin vibraciones, y no se observaron síntomas de pasar por la velocidad crítica, por lo que esta debe estar por encima de la velocidad de trabajo.
3. Aplicando la metodología descrita por Birger, mucho más exacta y elaborada, se obtuvo un valor de $n_{crit.}$= 4434 r/min, lo que indudablemente es un valor más adecuado.
4. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski para el caso en que se consideraran las empaquetaduras como apoyos suplementarios rígidos y se obtuvo $n_{critica} \cong 3492.2\ r/min$. Valor en este caso lógico pues como era de esperar la velocidad crítica debe estar este por encima de la velocidad de trabajo.
5. Aplicando la metodología descrita por Birger, se obtuvo para el caso de considerar las empaquetaduras como apoyos rígidos, un valor de: $n_{Crit\ 3} = 4400.3\ \mathrm{r/min}$ lo que indudablemente es un valor más exacto que el de Dobrovolski y también es lógico.
6. Se calculó la velocidad crítica de la Bomba BERLIET utilizando la expresión de Dobrovolski para el caso en que se consideraran las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y se obtuvo $n_{critica} \cong 3283.1\ r$. Lo que es un valor muy lógico pues al ser los apoyos elásticos la flecha es mayor y la velocidad crítica menor.
7. Aplicando la metodología descrita por Birger, se obtuvo para el caso de considerar las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios, un valor de: $n_{Crit\ 3} = 4400.3\ \mathrm{r/min}$ lo que implicaría que no influyen el hecho de que las empaquetaduras sean rígidas o elásticas, lo que no es lógico.

Resomendaciones

Recomendaciones

Recomendaciones

Se recomienda continuar la investigación incorporando en las ecuaciones el efecto giroscópico que introducen los impelentes al estar ubicados a la izquierda o a la derecha del centro de la luz del árbol, los impelentes se inclinan y tienden a enderezar el árbol, la flecha tiende a ser menor y la velocidad crítica aumenta. En el presente trabajo se trató de incorporar este efecto pero las ecuaciones dan muy complejas y no se pudieron resolver las integrales por métodos numéricos.

Referencias Bibliográficas

Referencia Bibliográfica

Trabajos citados

Beer F.P. , Jonhston E.R. (1884). *Mecánica Vectorial para Ingenieros. 2T.* México: Mc Graw-Hill.

Birger, I. S. (1966). *Cálculo de resistencia d piezas de Máquinas.* Moscú: Mashinostroenie.

Birger, I. S. (1986). *Cálculo de Resistencia de Piezas de Máquinas.* Moscú: Mashinostroenie.

Cherkasski. (1986). *Bombas Ventiladores y Compresores.* Moscú: MIR.

Dobrovolski, V. (1991). *Elementos de máquinas.* Moscú: MIR.

Faires, V. (1985). *Diseño de Elementos de Máquinas.* México: UTEHA.

Feodosiev, V. I. (1985). *Resistencia de Materiales.* Moscú: MIR.

Fitzgerald, F. (1986). *Mecánica de Materiales.* Máxico: Alfaomega S.A.

Fogiel, M. (1988). *Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids.* New Jersey: REA.

Hawkers, B. (1989). *Cadcam.* Madrid: Paraninfo S.A.

Iusilievich, G. (1988). *Elementos de Máquinas.* Moscú: Mashinostroenie.

Merian, J. (2003). *Mecánica.* La Habana: E.R.

Mott, R. (1996). *Resistencia de Materiales Aplicada.* México: Printice-Hall Hispanoamericana S.A. 3. E.D.

Olsen, G. (1965). *Elements of Mechanics of materials.* La Habana: Editorial de la Asociación de estudiantes de Ingeniería.

Orlov, P. (1985). *Ingeniería de diseño 2* . Moscú: MIR.

Pisarenko, G. (1989). *Manual de resistencia de materiales.* Moscí: MIR.

Reshetov, D. (1985). *Elementos de Máquina.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Shigley J.E., M. (2005). *Diseño de Ingeniería Mecánica.* México: Mc Graw Hill.

Shigley J.E., M. (2001). *Diseño en Ingeniería Mecánica.* México: McGraw Hill Interamericana.

Shigley, J. E., & Mitchell, L. D. (1985). *Diseño de Ingeniería Mecánica.* México: Mc Graw Hill.

Spiegel, L. L. (1999). *Applied Statics and Strength of Materials Third Edition.* New Jersey: Prentice Hall.

Timoshenko, S. (1966). *Resistencia de Materiales.* Madrid: Espasa_Calpe. S.A.

Volmir, A. (1986). *Problemas de Resistencia de Materiales.* Moscú: MIR.

Wilson, C. (1997). *Computer Integred Maschine Design.* New Jersey: Prentice Hall.

Anexo

ANEXOS A: Plano del árbol rediseñado.