

*Facultad de Ingeniería Mecánica
Colectivo de Mecánica Aplicada*

Trabajo de Diploma,

*Aplicación de los métodos de cálculo de flechas
en barras de sección variable al cálculo de la velocidad
crítica en el árbol de gases calientes de la Empresa
"Cementos Cienfuegos S.A."*

Diplomante: Yoan Luján Rodríguez.

*Tutores: Dr.C. Rafael Goytisoló Espinosa (CEDON-UCF)
M.Sc. Rohary Padilla Rodríguez. (CEDON-UCF)*

*"Año del 50 aniversario del triunfo de la Revolución"
Curso 2008 - 2009*

AVAL DEL TUTOR

Por este medio, certificamos que el Trabajo de Diploma: ***Aplicación de los métodos de cálculo de la flecha en barra de sección variable al cálculo de la velocidad crítica en el árbol de gases calientes de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”***

Del Autor: **Yoan Luján Rodríguez.**

Tutoreado por: **Dr. Rafael Goytisoló Espinosa, M.Sc. Rohary Padilla Rodríguez,**
Pertenece a Centro de Estudios: **CEDON,** Facultad: **Ingeniería Mecánica,**
Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez.”

Institución donde se aplica el Resultado: **Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”**

Está listo para ser Defendido, habiendo cumplido satisfactoriamente todos los Objetivos Previstos en el Trabajo.

Para que así conste se firma el presente Aval en Cienfuegos el 21 de Junio del 2009.

Tutor: **Dr. Rafael Goytisoló Espinosa.**

DECLARACION DE AUTORIDAD
UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS



“Carlos Rafael Rodríguez”

Sistema de Documentación y Proyecto.

Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” en la provincia de Cienfuegos como parte de la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Universidad de Cienfuegos para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de la Universidad de Cienfuegos.

Firma del autor.

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de este envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico Técnico

Nombre y Apellidos. Firma.

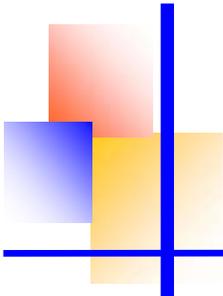
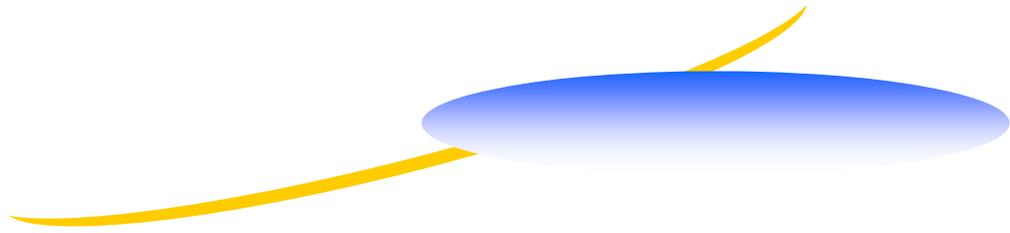
Vice Decano.

Nombre y Apellidos. Firma.

Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyecto.

Nombre y Apellido. Firma.

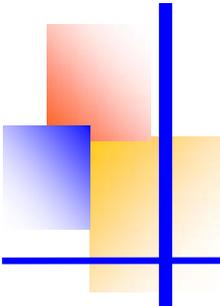
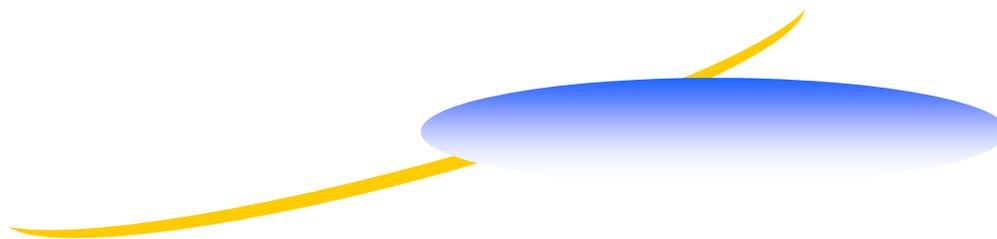


Pensamiento

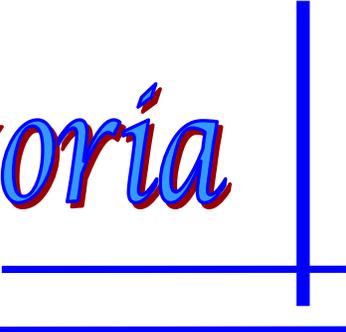


Profundizar en el conocimiento científico es una de las mejores vías para lograr plenitud y libertad.

Pilar Álvarez Pellicero.

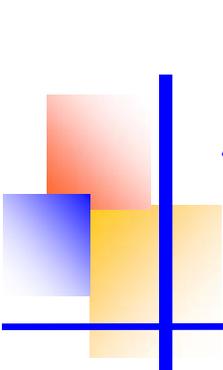
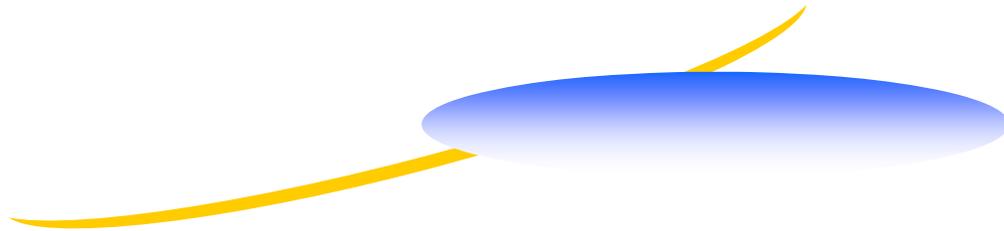


Dedicatoria



Existen personas en nuestras vidas que te muestran el sendero y caminan a tu lado mientras pueden., a estas personas les quiero dedicar con todo mi corazón este trabajo:

- ❖ Especialmente a la memoria de una persona que siempre soñó con este momento y que desafortunadamente no puede estar hoy conmigo, a mi abuela Sara Ortega.*
- ❖ A mi querida abuela Lourdes González que incondicionalmente me apoya, me guía y ha hecho que su mano extendida sea mi mayor aliento y confianza.*
- ❖ Grandemente a mis venerados y adorados padres Teresa y Jorge que durante 24 años han formado la persona que hoy soy. ¡Gracias por ello!*
- ❖ A mi tía Mila y a mis primos Marichelly y Yandry por ofrecerme cada día su confianza y cariño.*
- ❖ A mis suegros Nubia y Omar por su apoyo en los momentos más difíciles.*
- ❖ A mi querida novia por estar cada instante a mi lado, ayudándome, guiándome y dándome fuerza para que este sueño hoy se haga realidad. ¡Gracias por todo!*

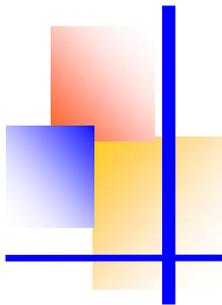
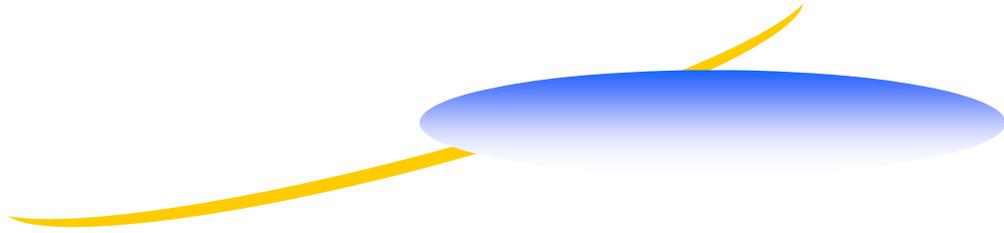


Agradecimientos

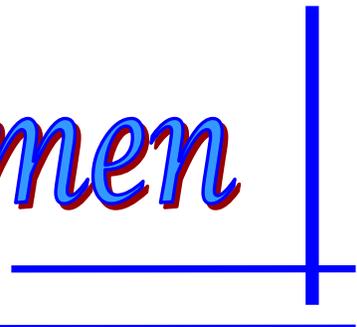
The word "Agradecimientos" is written in a blue, cursive font with a red outline. It is positioned in the lower half of the page. To the left of the text is a decorative graphic consisting of three overlapping squares: a blue square at the bottom left, a red square at the top left, and a yellow square at the bottom right. A vertical blue line runs through the center of these squares. To the right of the text, there is a horizontal blue line and a vertical blue line that meet at a right angle, forming a partial frame.

Especial es el momento en el que sientes que creces profesionalmente y reconocer esto hacen meros mis agradecimientos a muchas personas por ayudarme a realizar este sueño, pero atentamente:

- ❖ A mi familia, especialmente a mis padres que siempre me han apoyado y han confiado en mí.*
- ❖ Fundamentalmente a mi compañero Mario Cabello que me ayudó incondicionalmente.*
- ❖ A mis tutores Rafael Goytisoló y Rohary Padilla por su dedicación y enseñanzas.*
- ❖ A Todos los profesores que estuvieron a mi lado durante los cinco años de la carrera brindándome sus conocimientos.*
- ❖ A mis compañeros de aula que compartieron conmigo momentos que serán inigualables en mi vida.*
- ❖ A las personas que me brindaron su ayuda cuando realmente lo necesité: Luis Santiago y Yeny Souto.*
- ❖ A un amigo que me brindó su fe para seguir hacia delante.*

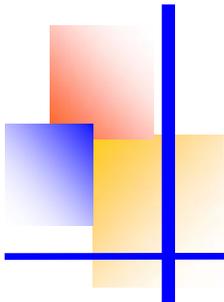
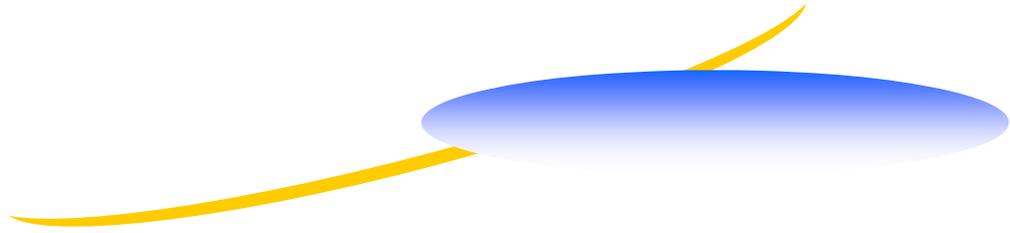


Resumen



Resumen

Al surgir la Empresa Mixta “Cementos Cienfuegos S.A.” la parte extranjera decide rehabilitar una de las tres líneas y como la tendencia mundial en la producción de “clinker” es al empleo de lo que se conoce como Proceso Seco, se propone aplicar esta tecnología. Se escogió la Línea No. 3 se montó un nuevo horno capaz de emplear como combustible carbón de piedra (coke), petróleo o una mezcla de estos y se instaló un torre precalcinadora de “clinker”, tal como lo requería la nueva tecnología la cual emplea para la circulación de los gases un ventilador de grandes dimensiones conocido como “Ventilador de Gases Calientes”. La misma comenzó a operar en Noviembre del 2004 y en el mes de Mayo del 2008 se produjo la fractura por fatiga del árbol del ventilador con la consecuente detención de la Línea No. 3 y con pérdidas millonarias. El Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos evaluó la Fractura e inició el trabajo de rediseño del árbol para su fabricación en México y al mismo tiempo propuso una variante para la Recuperación del mismo. Las dos alternativas fueron evaluadas simultáneamente en el trabajo (Rohary Padilla Rodríguez, 2008) de manera que si se lograba la fabricación en un tiempo relativamente breve se utilizaría la primera alternativa, pero si la fabricación se retrasaba extremadamente no quedaría otra alternativa que montar la segunda alternativa. En el mencionado trabajo se abordaron las acciones y los cálculos que fueron necesarios realizar para cumplimentar ambas alternativas. El rediseño del árbol y su fabricación en México fue la alternativa que se aplicó ya que ambas soluciones se concluyeron pero simultáneamente el árbol recuperado quedó como repuesto. En todo el proceso de rediseño y recuperación del árbol se planteó la preocupación de qué influencia podían tener los cambios propuestos en la rigidez del árbol durante su rediseño y durante la recuperación en los desplazamientos del mismo y por lo tanto en la velocidad crítica tratándose de un árbol de tanta importancia. Identificada esta. En el presente trabajo se describen los métodos de cálculo de la velocidad crítica en árboles y se aplican diferentes variantes en el cálculo de esta en el Ventilador de Gases Calientes llegándose a la conclusión que no existen problemas con ninguna de las variantes analizadas.

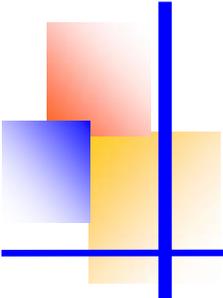
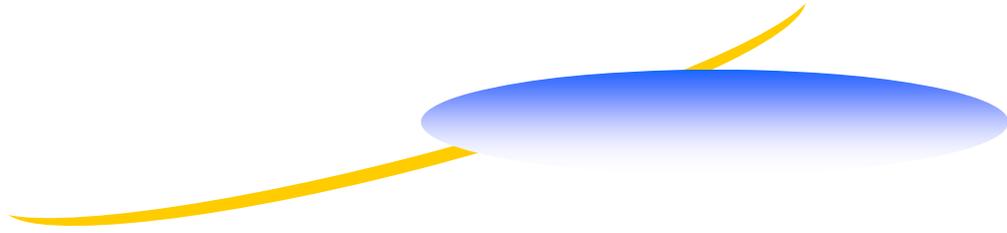


Índice



Introducción	1
Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.	6
1.1 El Proceso Seco de Producción de Clinker.....	6
1.2 Descripción y funcionamiento de la Instalación de Precalcinación de Clinker de la Línea No. 3 de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”	6
Fig. 1.3 Plano de la Instalación de Precalcinación de Clinker de la	8
1.3 Características del Ventilador de Gases Calientes.	9
1.4 Esquemas y dimensiones de la zona espigada y del bisel para la soldadura.	10
1.5 Metodología de Cálculo de la Fuerza Radial sobre el Rotor del Ventilador.....	12
1.5.1 Expresión para el cálculo de la Fuerza Radial sobre los Ventiladores	12
1.5.2 Determinación del ángulo de entrada del impulsor (β_1).	16
1.5.3 Cálculo de la dimensión (b_1) en la entrada del impulsor.	16
1.5.4 Cálculo del diámetro de descarga del impelente (D_d).	16
1.5.5 Cálculo de la dimensión (b_2) de descarga del impelente.	16
1.5.6 Cálculo de la Fuerza Radial (P) utilizando la expresión (1.3)	17
1.6 Conclusiones Parciales del Capítulo I.....	17
Capítulo II. Métodos de Cálculo de Desplazamientos en Barras de Sección Variable y su Comparación.	18
2.1 Método de los Parámetros de Origen. Método de la Viga Equivalente.	18
2.2 Comparación entre el Método de la Viga equivalente y los Métodos Computacionales: Mechanical Desktop y Método de los Elementos Finitos.	28
2.2.1 Esquema de árbol sobre el cual se realizará la comparación.	28
2.2.2 Cálculo de los pesos para cada tramo del árbol.	29
2.2.3 Cálculo de los momentos de inercia para los diferentes tramos.....	30
2.2.4 Cálculo de los coeficientes de reducción.....	30
2.2.5 Cálculo de las cargas distribuidas del peso propio para cada tramo.....	30
2.2.6 Aplicación del Método de la Viga Equivalente.	31
2.2.7 Cálculo de las reacciones (R).....	31
2.2.8 Cálculo de momento flector y cortante en la primera sección.....	31
2.2.9 Cálculo de momento flector y cortante en la segunda sección.....	32
2.2.10 Obtención de la Viga Equivalente.....	32
2.2.11 Cálculo de Flecha por el Método de los Parámetros de Origen.	33
2.2.12 Método numérico Computacional utilizado por el Mechanical Desktop	37
2.3 Conclusiones Parciales del Capítulo II.	38
Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.	39

3.1 Método de Cálculo propuesto por Dobrovolski para el cálculo de la velocidad crítica en árboles.	39
3.2 Método de cálculo propuesto por Birger para el cálculo de velocidad crítica en árboles de Turbo máquinas.....	44
3.3 Aplicación del método de cálculo de velocidad crítica en turbo máquinas propuesto por Birger al árbol de un Turbocompresor.	48
3.4. Cálculo de la velocidad crítica en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.	54
3.5 Cálculo de la velocidad crítica en el árbol rediseñado para el Ventilador de Gases Calientes, que fue fabricado en México.	64
3.6 Cálculo de la velocidad crítica para la variante de recuperación del árbol del Ventilador de Gases Calientes.....	72
3.7 Conclusiones Parciales del Capítulo III.	82
<i>Conclusiones Generales</i>	83
<i>Recomendaciones</i>.....	85
<i>Referencias Bibliográficas</i>	86
<i>Bibliografía</i>	87



Introducción

Introducción

La velocidad crítica en los árboles es proporcional a su rigidez, o sea, a mayor rigidez (mayor diámetro, mayor módulo de elasticidad, menor distancia entre apoyos) mayor frecuencia natural de vibración del mismo. La velocidad crítica es precisamente aquella velocidad de giro que coincide con la frecuencia natural de vibración del sistema árbol y los elementos colocados sobre él. Si la velocidad de giro coincide con la frecuencia natural de vibración ocurre entonces el fenómeno conocido como resonancia y la flecha del árbol aumenta ininterrumpidamente provocándose vibraciones intensas e incluso puede ocurrir la fractura del árbol. En (Dobrovolski, 1975) como en otras fuentes de Elementos de Máquinas se da una ecuación muy simple para calcular la velocidad crítica, donde esta se expresa como inversamente proporcional a la flecha estática máxima del árbol, no se especifica, ni se recomienda ningún método para calcular dicha flecha. Esa ecuación es muy simple pero parece muy arriesgado calcular un parámetro tan importante para un árbol, como lo es la velocidad crítica con una ecuación tan sencilla y solo dependiente de la flecha estática máxima. Esta ecuación se demuestra en demostración que se reproduce en el presente trabajo, pero la misma se obtiene para un árbol de rigidez constante y con un rotor simple colocado en su centro y no se toma en cuenta el peso propio del árbol. En se da una expresión similar pero un poco más sofisticada, donde la velocidad crítica se expresa también como inversamente proporcional a la flecha pero contemplando los pesos del árbol y los elementos colocados sobre él y las flechas del árbol en dichas zonas, contemplando incluso como lo expresa la elasticidad de los apoyos, tampoco recomienda ningún método para calcular estas flechas, por lo que esta ecuación, no obstante no deja de ser muy simple para calcular un parámetro tan importante y riesgoso. En por otro lado enfrenta el cálculo de la velocidad crítica de los árboles de las turbo máquinas, analiza un ejemplo de un compresor de cuatro secciones con 10 etapas en total, de gran complejidad constructiva y de enorme importancia, describe un método de integración numérica para calcular las fuerzas de inercia en cada sección contemplando las masas de cada zona del árbol y la de los elementos colocados sobre él, o sea, un método numérico bien elaborado y complicado, sin embargo, recomienda unos modelos bien simples para

Introducción

calcular la flecha del árbol en una primera aproximación. Está claro que al proponer un método de iteraciones sucesivas esta aproximación inicial de la flecha se va corrigiendo sucesivamente y al final se aceptan los resultados con un % de error mínimo. Esta Situación Problémica de la relación entre la velocidad crítica de un árbol y la flecha estática del mismo y el método empleado para calcular los desplazamientos en un árbol escalonado y con complejidades de diseño en cuanto a los pesos y la distribución de los elementos colocados sobre él ha sido el móvil científico de la presente investigación, no obstante, ha existido una gran motivación práctica que es la necesidad práctica real de calcular la velocidad crítica de un árbol de una industria cienfueguera utilizado en una turbo máquina y en una situación muy singular. Esta situación es la siguiente: La industria mencionada es la antigua Empresa de Cemento “Karl Marx”, la cual fue instalada en Cuba mediante la colaboración con la antigua RDA por la firma VEB ZAB Dessan Veb Sket Magdeburg. Se montó en los años 1976 a 1980 con fecha de puesta en marcha: 16 de febrero de 1980. La Fábrica contaba con tres líneas de producción de lo que se conoce como Proceso Húmedo. Los hornos rotatorios de las líneas fueron modificados durante el Período Especial para quemar crudo cubano con el objetivo de lograr mayores rendimientos y economía de combustible. La tendencia mundial es al empleo de lo que se conoce como Proceso Seco, de aquí que al surgir la Empresa Mixta “Cementos Cienfuegos S.A. la parte extranjera se inclinara a rehabilitar una de las tres líneas con esa tecnología.

La Empresa Mixta “Cementos Cienfuegos S.A.” surgió a partir de la antigua Fábrica de Cementos “Karl Marx” sobre la base de negociaciones que se iniciaron en el año 2000 con la parte extranjera y a mediados del año 2001 se inició la inversión consistente en una rehabilitación general de la antigua Empresa de Cementos “Karl Marx” y el montaje de equipamiento nuevo en la Línea No. 3 que incluyó un nuevo horno capaz de emplear como combustible carbón de piedra (coke), petróleo o una mezcla de estos. Se instaló una planta trituradora de combustibles sólidos para su empleo como combustible en los hornos y se creó un patio de almacenamiento de estos combustibles. Para mejorar la tecnología de producción de clinker, se instaló un Torre Precalcinadora de Clinker, tal como lo requería la nueva tecnología Este Trabajo fue realizado por varias empresas contratistas, la Ingeniería de la Planta en su conjunto fue desarrollada por una Firma Canadiense “Canadian Engineering Group”, la Empresa Cubana de Acero construyó

Introducción

los ciclones, conductos y recipientes de la instalación la puesta en marcha de la instalación se produjo en Noviembre del 2004. Esta Tecnología funciona sobre la base de la recuperación del calor de los gases calientes que salen del horno que son extraídos del mismo por el Ventilador de Gases Calientes, Objeto de Estudio del presente Trabajo. Este es un Ventilador de Grandes Dimensiones de Doble Succión, con un Rodete de 3,512 m de diámetro, el árbol del mismo posee en su zona central un diámetro de 435 mm y el mismo posee una longitud total de 4 702,5 mm, casi 5 m, sin embargo el diámetro de la zona de los Cojinetes del mismo es de 150 mm del lado del motor principal y 140 mm de diámetro del lado contrario del motor, donde el árbol está conectado un motor auxiliar para el giro del ventilador sin carga durante las paradas cortas, evitándose de esta forma las deformaciones del mismo por la acción de la temperatura. En el Anexo 1 se muestra el Plano del Árbol Original.

En la Fig. 1 se Muestra una vista del Ventilador, donde se puede evaluar su tamaño comparado con el de un hombre.

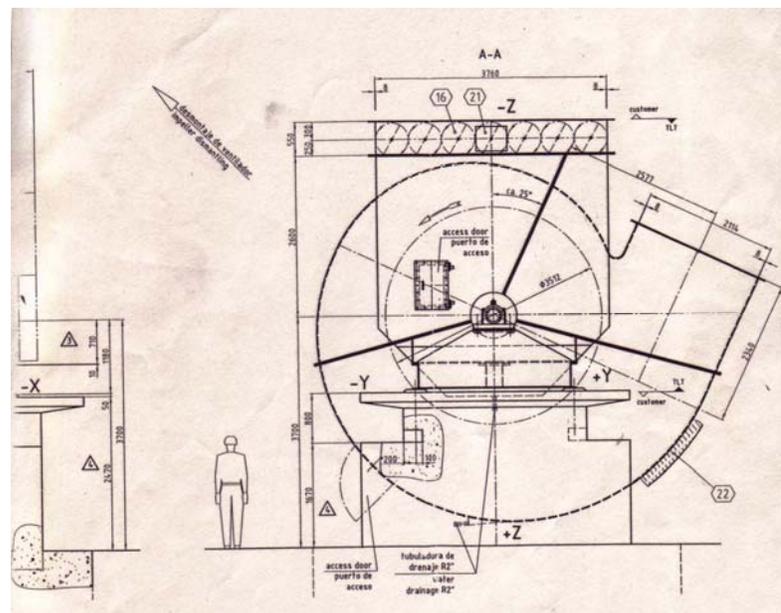


Fig. 1 Vista General del Ventilador con sus dimensiones exteriores.

Introducción

En el mes de Mayo del 2008, con menos de cuatro años de explotación, se produjo la fractura por fatiga del árbol del ventilador por el diámetro de 140 mm de diámetro, en la zona de cambio de diámetro a 146 mm con la consecuente detención de la Línea No. 3 y con pérdidas millonarias (La Empresa Mixta “Cementos Cienfuegos S.A. pierde 10 891 USD por hora de parada). En la Fig. 2 se muestra la Sección de Fractura del Árbol, donde se puede apreciar evidentemente se trata de una Fractura por Fatiga.



Fig. 2 Vista de la Sección de Fractura

Ante esta **Situación Problemática** la Dirección del MINBAS y de la Empresa solicitaron los Servicios del Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos para conducir una Investigación que permitiera resolver la situación de parada de la Línea No. 3 producto de la Avería y reiniciar la producción lo más rápido posible, esclarecer la causas de la fractura y establecer las recomendaciones necesarias para su solución. Durante la investigación preliminar realizada se formularon dos Posibles Alternativas de Solución que fueron llevadas en paralelo:

1. La evaluación de la posibilidad del rediseño de la zona de fractura con vistas a lograr una mayor resistencia a la fatiga y una vida más prolongada, con vistas a gestionar la posibilidad de fabricación del árbol en el extranjero.
2. La evaluación de la posibilidad de recuperar el árbol fracturado.

Las dos alternativas fueron evaluadas simultáneamente en el trabajo (Padilla, 2008) de manera que si se lograba la fabricación en un tiempo relativamente breve se utilizaría la primera alternativa, pero si la fabricación se retrasaba extremadamente no quedaría otra alternativa que probar con la segunda alternativa. En el mencionado trabajo se abordaron las acciones y los cálculos que fueron necesarios realizar para cumplimentar ambas alternativas. El rediseño del árbol y su fabricación en México fue la alternativa que se aplicó ya que ambas soluciones se concluyeron pero simultáneamente. En todo el proceso de rediseño y recuperación del árbol se

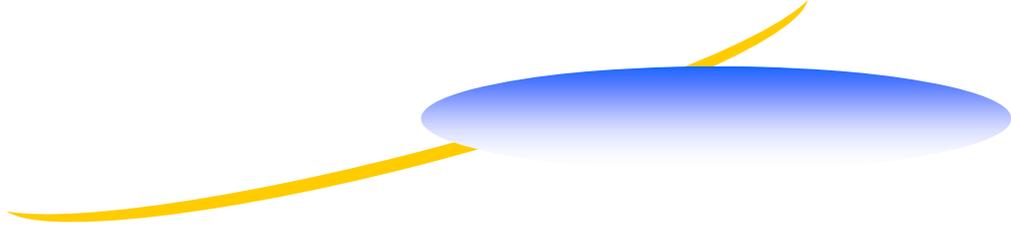
Introducción

planteó la preocupación de qué influencia podían tener los cambios propuestos en la rigidez del árbol durante su rediseño y durante la recuperación en los desplazamientos del mismo y por lo tanto en la velocidad crítica tratándose de un árbol de tanta importancia. Identificada esta última Situación Problemática es que se propuso la presente investigación cuyo **Objetivo General** es:

- Calcular la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Calientes de la Línea No. 3 de la Empresa de “Cementos Cienfuegos S.A.” en sus variantes: árbol original, árbol rediseñado y árbol recuperado para establecer la influencia de los cambios.

Los **Objetivos Específicos** planteados fueron:

- Profundizar en las características del Árbol del Ventilador de Gases Calientes de la Línea No. 3 de la Empresa de “Cementos Cienfuegos S.A.” en sus variantes: árbol original, árbol rediseñado y árbol recuperado e identificar qué aspectos de los mismos pueden modificar su rigidez y por consiguiente su velocidad crítica.
- Profundizar en los métodos de cálculo de los desplazamientos en árboles escalonados: Método de la Viga Equivalente y los Métodos Computacionales: Software Mechanical Desktop y Método de los Elementos Finitos.
- Evaluar las diferencias en el cálculo de los desplazamientos por los Métodos estudiados para poder proponer una vía de cálculo.
- Evaluar la incidencia que tienen los cambios propuestos durante el Rediseño del Árbol y durante la Recuperación del mismo en la Velocidad Crítica del Árbol con relación al diseño original.



Capítulo I



Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



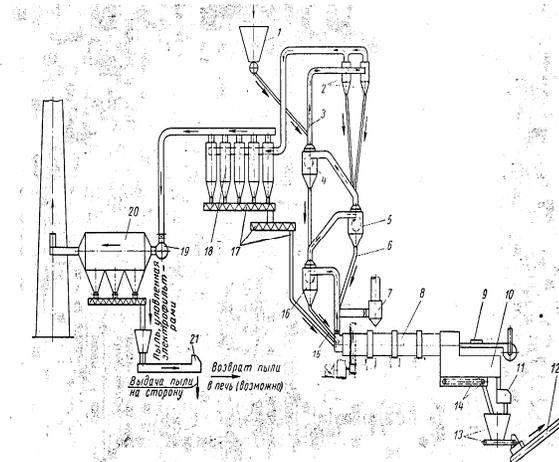
Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.

1.1 El Proceso Seco de Producción de Clinker.

En la Década de los 70 del siglo pasado en la URSS el procedimiento seco de producción de cemento no constituía más del 12 - 15 % (Silenok et al. 1969; Labahn, 1970); de la producción total de cemento, sin embargo entre los países capitalistas, punteros en la producción de cemento, este procedimiento se ha mantenido como el fundamental en los últimos años (Silenok et al. 1969). En EE.UU., Alemania y Japón, por ejemplo, el procedimiento seco en los tiempos actuales constituye el 60 % y hasta del 80% de la producción total de cemento y continúa el crecimiento del mismo. El procedimiento seco en la obtención del clinker de cemento surge desde el mismo comienzo de la elaboración del cemento en hornos de cuba y se desarrolla en el mundo sobre la base del uso de materiales granulados en los hornos "Leopold" con calcinadores convertibles. Estos tipos de hornos, incluso en el empleo moderno no tienen gran producción: Los hornos de Cuba, por ejemplo, hasta 15- 20 t/h , los hornos "Lepold" hasta 40-45 t/h . Las más modernas fábricas que emplean el procedimiento seco utilizan agregados de calcinación con una instalación de intercambio térmico sellada. En calidad de intercambiadores se emplean ciclones los cuales procesan una mezcla pulverizada y secada en un calcinador. Existen construcciones de otros intercambiadores para secar la mezcla pulverizada en un flujo de gases calientes tubular de chorro disperso. La instalación de intercambio térmico sellada permite su empleo en grandes escalas de producción: 3 000 y más hasta una escala de producción de 4 000 t. El gasto específico del calor en estos tipos de agregados alcanza un bajo nivel, alrededor de 730 $kcal/kg$ del clinker. Actualmente existe un desarrollo significativo de fábricas de cemento con procedimiento seco de producción de cemento. En correspondencia con ello ya se fabrican hornos de producción de más de 1 600 t hasta 3 500 t al día, fundamentalmente los del tipo de intercambiadores ciclónicos

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.

sellados. Progresivamente estos agregados además de proporcionar el mejoramiento de la utilización del calor de los gases de escape, permiten alimentar la mezcla a la molienda con muy baja humedad, esto simplifica el esquema de la instalación de molienda y reduce el consumo de energía en este proceso. En la Fig. 2 se muestra un esquema de un sistema con horno 4 m de diámetro por 60 m de longitud montado en la Fábrica de Cemento “Slantsiev” en Rusia, similar a la instalada en la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” Durante la separación la mezcla secada hasta el 1 – 2 % de humedad se descarga en la tolva de alimentación 1 y de ahí se descarga a la salida de los gases del ciclón 4. Para que la mezcla ingresada en la salida de los gases sea insertada en el torrente de gases, la velocidad de los últimos tiene que ser considerablemente mayor. Esto exige una significativa diferencia de presión en el proceso de circulación, o sea, un gran vacío. En los intercambiadores ciclónicos ocurren fuertes cambios en la velocidad de la corriente de los gases debido lo fuertes



cambios del diámetro de las secciones, lo que eleva la caída de presión.

Fig. 1.1 Esquema de una instalación de Precalcinación de Clinker por vía seca montado en la Fábrica de Cemento “Slantsiev” en Rusia

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



1.2 Descripción y funcionamiento de la Instalación de Precalcinación de Clínker de la Línea No. 3 de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”

En las Fig. 1.3 y 1.4 se muestra el Esquema de la Instalación del Precalcinador de Clínker de la Línea No. 3 de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”. El proceso ocurre en dos etapas:

En la Etapa 1 o de alimentación Fig. 1.2, el material sólido o harina, tal como se conoce en las Empresas de Cemento es transportada desde los silos por canaletas hasta el elevador de cadena tipo: ITEM-No.413EC1, con un rendimiento de transporte de 280 t/h y una velocidad de transporte de 1,82 m/s, donde este la eleva hasta la pre-tolva y se descarga en el PFISTER tipo: FRW 3.18/9 para su debida dosificación, de ahí pasa de nuevo por otras canaletas hasta el elevador de cadena tipo: ITEM-No.433EC1, con un rendimiento de transporte de 280 t/h y una velocidad de transporte de 1,83 m/s, donde es transportada hacia la rueda celular doble que es la encargada de regular la entrada del material y de obstruir la salida de los gases calientes, de ahí el material es alimentado a la corriente de gas del conducto ascensional que va desde el ciclón Z 13 a los ciclones conocidos como gemelos Z 14 y Z 15. La corriente de gas que entra a estos ciclones proviene del ciclón Z 13. El material sólido calentado y separado en los ciclones gemelos Z 14 y Z 15 se descarga por la parte inferior de estos en la corriente de gas que entra al ciclón Z 12 proveniente del ciclón Z11. El material sólido separado en este ciclón se desliza por una resbaladera hasta la entrada del Horno es decir la cámara de humo, donde también hay dos precalcinaores que alimentan al horno de carbón o petcoke para aumentar la producción así como la eficiencia. El ciclón Z 11 descarga el material separado a través de resbaladeras directamente al Horno. En estas resbaladeras se descarga también el material recuperado en otras partes de la instalación como se muestra en las Fig. 1.1.

Etapa 2 o circulación de los gases, los gases de escape del Horno, impulsados por el Ventilador de Gases Calientes, se alimentan tangencialmente al ciclón Z 11. Los gases de salida de este ciclón se alimentan tangencialmente al ciclón Z 12, los de salida de

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



este se alimentan tangencialmente al Z 13 y los de este tangencialmente a los gemelos Z 14 y Z 15, mediante un ventilador de gas caliente que es encargado de extraer los gases para que ocurra el proceso ya descrito. La alimentación tangencial crea el efecto de torbellino o ciclónico que provoca la separación del polvo y la asimilación de calor de los gases, el secado correspondiente y se produce de esta forma la precalcinación del clínker, como se muestra en la Fig.1.3.

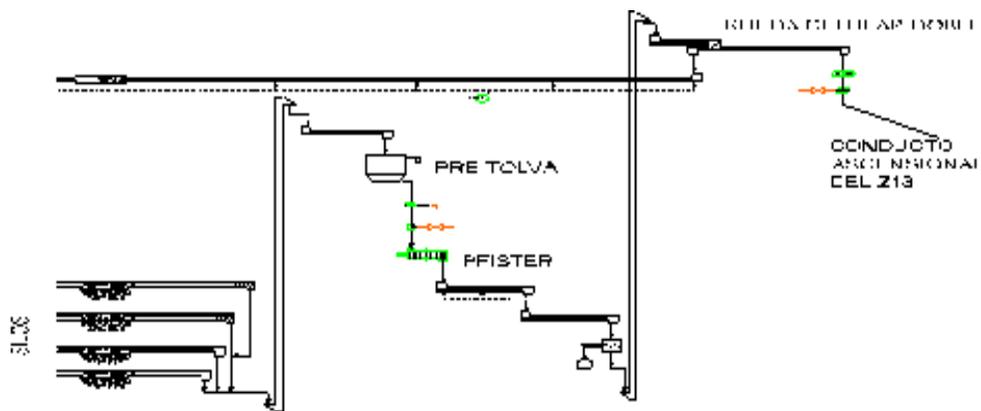


fig. 1.2 Esquema de la primera etapa o etapa de alimentación.

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.

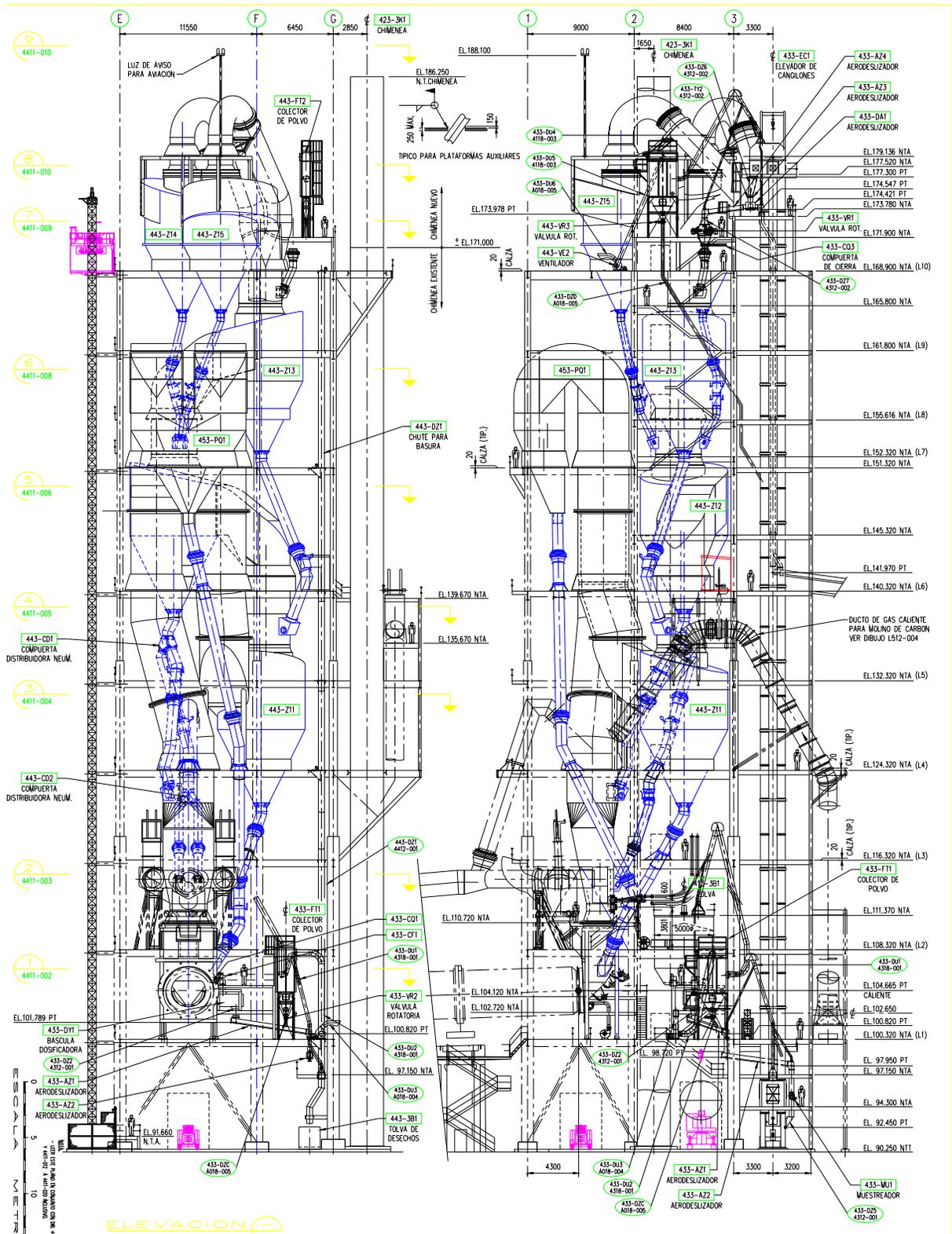


Fig. 1.3 Plano de la Instalación de Precalcinación de Clinker de la

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.

Línea No. 3 de la Empresa Cementos Cienfuegos S.A.

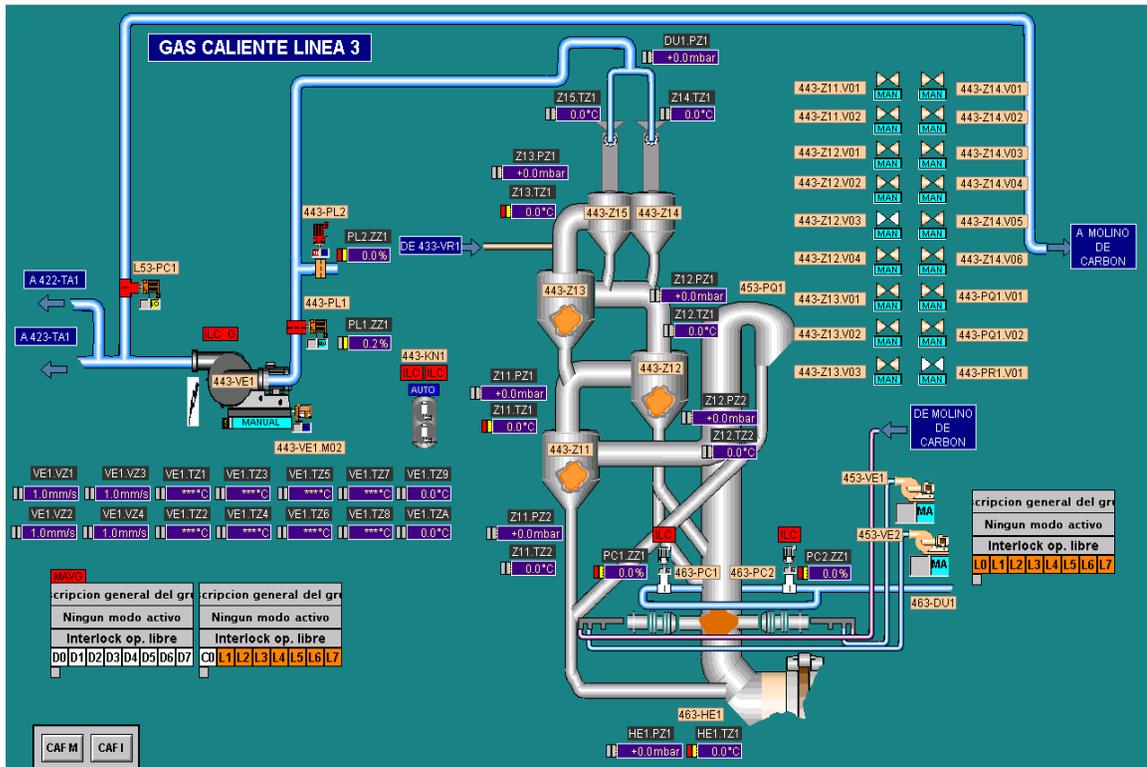


Fig. 1.4 Esquema de circulación de gases del precalcinador.

1.3 Características del Ventilador de Gases Calientes.

Tipo de ventilador: Ventilador Dopol

Denominación: 2516 AZ / 1420

Año de Fabricación: 2002

de Fabricación: 6360

Sentido de Giro: "R" gen. VDMA 24165

Datos de rendimiento:

Caudal volumétrico: 150 m³/s

Temperatura del gas: 380°C

Temperatura máxima del gas: 450°C

Trabajo de traslación específico: 14067 J/kg

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



Densidad en la entrada del ventilador: $0,537 \text{ kg/m}^3$

Aumento total de presión: 7777 Pa

Velocidad del ventilador: 895 rev/min

Velocidad del ventilador $_{m\acute{a}x}$: 950 rev/min

Potencia requerida en el árbol: 1400 kW

Momento de inercia de masa: $J = 0,25 \times GD^2 = 7500 \text{ kgm}^2$

Potencia del motor: 1750 kW

Tipo de emplazamiento: Emplazamiento de hormigón

Tipo de regulación: Válvula estranguladora de torsión en el lado de aspiración

Tipo de acoplamiento: Acoplamiento de casquillo de perfil elástico

Tipo de rodamiento: Rodamiento de rodillos a rótula lubricado por aceite

Peso de la Maquina: (si motor ni aislamiento) 31200 kg

Pesos:

Rotor completo: 9700 kg

Lado de compresión de la carcasa del ventilador: 2200 kg

Lado de aspiración de la carcasa del ventilador: 2800 kg

Parte inferior de la carcasa del ventilador: 6200 kg

Caballote del rodamiento del motor: 2500 kg

Caballote de rodamiento móvil: 1030 kg

Protección del acoplamiento: 20 kg

Cono de aspiración (1 unidad): 165 kg

Estrangulamiento de Torsión (1 unidad): 1200 kg

1.4 Esquemas y dimensiones de la zona espigada y del bisel para la soldadura.

La espiga del árbol recuperado se colocó por interferencia en su posición para evitar los movimientos deslizantes elásticos durante el giro del árbol y evitar el desgaste por ludimento de las partes. El cordón de soldadura contribuye además a soportar las fuerzas de cortante que surgen en esa sección. En las Figs. 1.5, 1.13 a) y 1.13 b) se

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



muestran los elementos de las piezas ensambladas antes y después de soldadas, así como sus dimensiones y tolerancias.

En la fig. 1.5 se muestra el ensamble de la espiga con el árbol así como algunas de sus dimensiones y la tolerancia para el ajuste deslizante entre el agujero y la guía de la espiga.

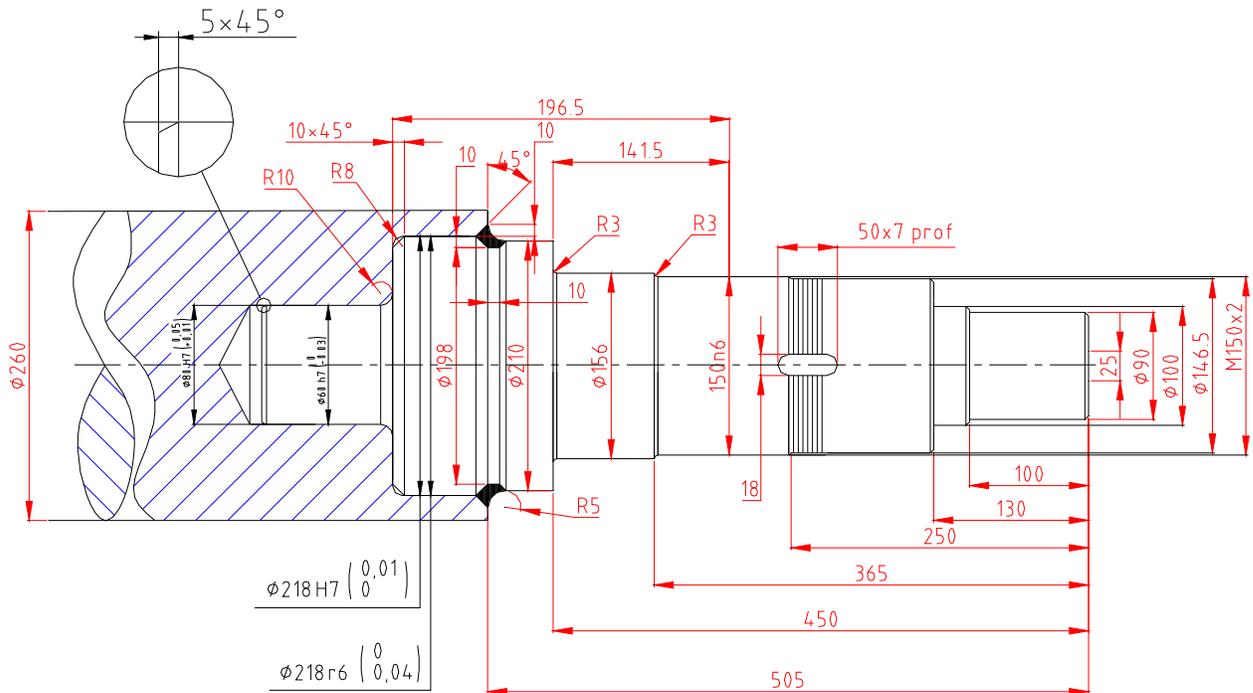


Fig. 1.5 Ensamble de la espiga con el árbol

En la fig. 1.6 a) se muestra el esquema del barreno realizado al árbol original con la preparación de bordes adecuada para el cordón de soldadura y la tolerancia del agujero para el ajuste por interferencia, en la fig. 1.6 b) se ilustra el esquema de la punta de la espiga con la respectiva preparación de borde requerida para la futura soldadura y tolerancia de la misma.

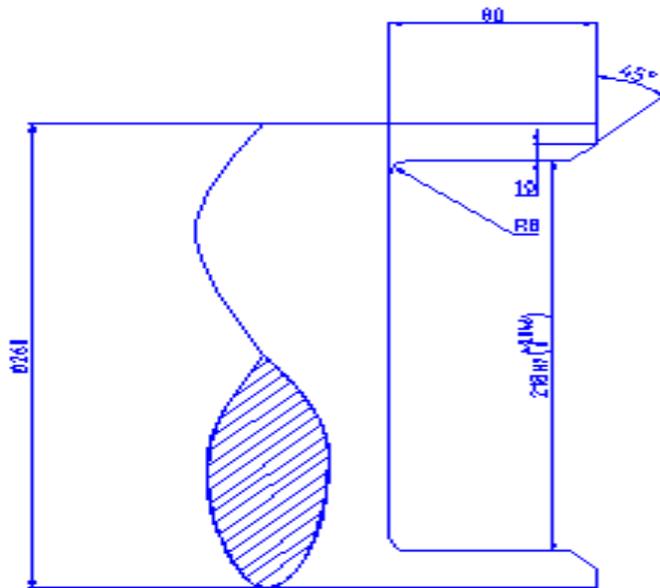


Fig. 1.6 a) Agujero con preparación de bordes para espigar

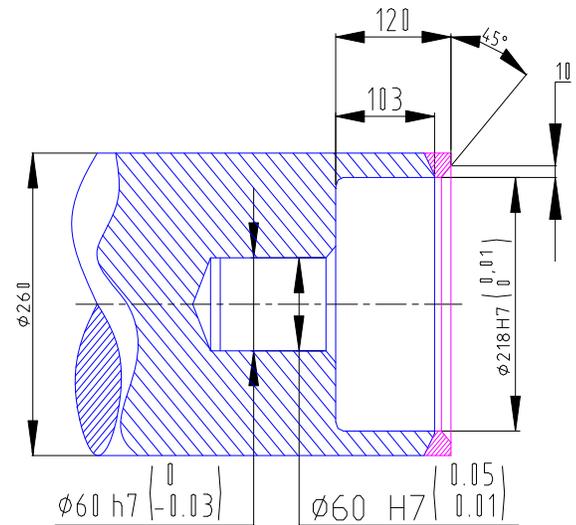


Fig. 1.6 b) Punta de la espiga con dimensiones y tolerancias

1.5 Metodología de Cálculo de la Fuerza Radial sobre el Rotor del Ventilador.

1.5.1 Expresión para el cálculo de la Fuerza Radial sobre los Ventiladores

Las fuerzas radiales aparecen producto de la asimetría de flujo a la salida del impulsor, condicionadas por la influencia del conducto de descarga. Con el cambio de la velocidad en el conducto de evacuación tiene lugar la correspondiente variación de la presión por la longitud del conducto, esta variación de las presiones en su totalidad provocan la fuerza radial que actúa sobre el rotor del ventilador (González, 2008)

La fuerza radial se puede determinar por la expresión (1.1):

$$Fr = k_r \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot Dd \cdot b_2 \quad (1.1)$$

Conociendo que la presión de descarga se determina como:

$$P = \rho \cdot g \cdot H \quad (1.2)$$

Sustituyendo 1.1 en la expresión 1.2 se obtiene que:

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.

$$Fr = k_r \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_o}\right) \cdot P \cdot D_d \cdot b_2 \quad (1.3)$$

Donde:

Q – flujo de gases (m^3/s).

Q_o – flujo de gases óptimo (m^3/s).

k_r – coeficiente, para los cálculos se toma como $k_r \approx 0.36$.

D_d, b_2 – son los parámetros de descarga del impulsor (m).

De la fórmula (1.3) se puede inferir que el ventilador estará sometido a una fuerza radial máxima cuando el flujo de gases sea cero, así como que se anulara cuando el flujo sea igual al óptimo.

Estas fuerzas tienen una gran influencia en la duración y fiabilidad de los cojinetes de rodamiento ya que son quienes la soportan directamente, pueden ser originadas por el desequilibrio que provoca la inexactitud tecnológica y un mal montaje del rotor del ventilador.

Si se quiere obtener el diámetro de entrada para un ventilador de doble succión, el área en la entrada varía como se muestra en la figura 3.3 producto de tener el árbol por el centro del impelente.

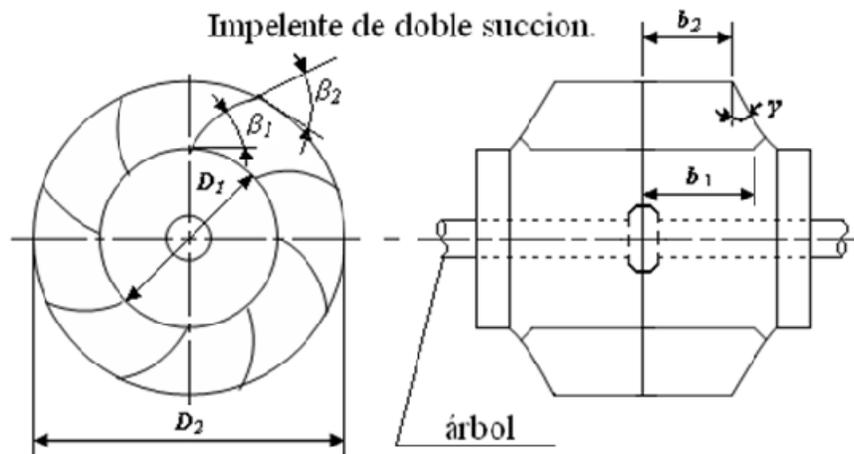


Fig. 1.7 Impelente de doble succión.

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



Teniendo en cuenta esto el área de la región de succión es:

$$A_s = \left(\frac{\pi \cdot D_s^2}{4} - \frac{\pi \cdot Deje^2}{4} \right) \quad (1.4)$$

En la expresión (1.5) se obtiene:

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot (D_s^2 - Deje^2) \cdot V_s \quad \text{y despejando } D_s \text{ queda que:} \quad (1.5)$$

$$D_s = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot V_s} + Deje^2} \quad (1.6)$$

Como no se conoce el diámetro del eje (*Deje*) hay que remitirse a los cálculos de resistencia de materiales donde se plantea que el diámetro crítico de un árbol se determina por la expresión (1.7):

$$Deje = 36.28 \cdot \sqrt[3]{\frac{Nu}{n \cdot \tau_{adm}}} \quad (\text{m}) \quad (1.7)$$

Donde:

- τ_{adm} – Tensión admisible, (para acero 45 la $\tau_{adm} = 11772 \times 10^3$ Pa).
- n – Revoluciones del motor (rpm).
- Nu – Consumo de potencia del ventilador (kW).

$$Nu = m \cdot \frac{Q \cdot Pt}{1000 \cdot \eta \cdot \eta_T} \quad (\text{kW}) \quad (1.8)$$

Donde:

m – Coeficiente de reserva de potencia ($1.05 \leq m \leq 1.2$).

η – Eficiencia del ventilador (Para maquinas centrífugas modernas $0.75 \leq \eta \leq 0.92$)

η_T – Rendimiento de la transmisión, cuando es directa $\eta_T = 1$

Pt – Presión en la salida del ventilador (Pa).

Q – Flujo de gas (m^3/s).

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



1.5.2 Determinación del ángulo de entrada del impulsor (β_1).

En la literatura se recomienda que el ángulo β_1 sea 45° puesto que esto permite obtener un diámetro de succión óptimo.

1.5.3 Cálculo de la dimensión (b_1) en la entrada del impulsor.

Para un cálculo de la dimensión b_1 existen diferentes métodos pero para hacer un cálculo rápido y seguro se recomienda la dada por Ramos:

$$b_1 = (0.28 \div 0.30) \cdot D_s \quad (1.9)$$

1.5.4 Cálculo del diámetro de descarga del impelente (D_d).

$$D_d = \frac{60 \cdot U_2}{\pi \cdot n} \quad (1.10)$$

Para determinar U_2 se utiliza la expresión (1.11):

$$U_2 = \sqrt{\left[\left(\frac{Pt}{\rho} - \frac{1}{2} \cdot V_s \right) + U_1^2 \right]} \quad (1.11)$$

Como se puede apreciar la velocidad tangencial en la descarga está en función de diferentes variables como son:

- Pt – Presión de descarga del ventilador (Pa).
- ρ – Densidad del aire o el gas, depende del ventilador que se calcule (kg/m^3).
- U_1 – Velocidad tangencial en el ojo de succión (m/s).

Se determina por la expresión (1.28):

$$U_1 = \frac{\pi \cdot D_s \cdot n}{60} \quad (1.12)$$

1.5.5 Cálculo de la dimensión (b_2) de descarga del impelente.

Según la metodología de cálculo consultada (Cherkassky, b_2 se determina como:

$$b_2 = b_1 \cdot \frac{D_s}{D_d} \quad (1.13)$$

Capítulo I. Características del Ventilador de Gases Calientes, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador.



1.5.6 Cálculo de la Fuerza Radial (P) utilizando la expresión (1.3)

$$F_r = K_r \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \cdot P \cdot D_d \cdot b_2$$

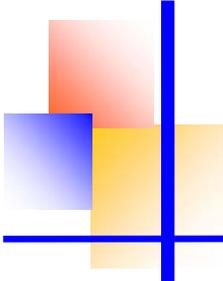
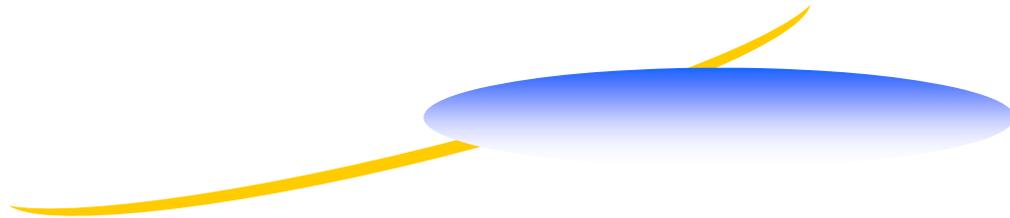
$$F_r = 0,36 \cdot \left(1 - \frac{0}{150}\right) \cdot 0,0008 \cdot 351,2 \cdot 22$$

$$F_r = 2,23 \text{ KN}$$

$$F_r = 2\ 230 \text{ N}$$

1.6 Conclusiones Parciales del Capítulo I.

1. Se dan las características fundamentales de la instalación de la Empresa de Cementos Cienfuegos S.A. donde está instalado el Ventilador de Gases Calientes.
2. Se dan las dimensiones fundamentales del árbol del Ventilador en sus variantes original, rediseñado y recuperado.
3. Se describe la Metodología para el Cálculo de la Fuerza Radial que existe realmente en el Ventilador de Gases Calientes.



Capítulo II



Capítulo II. Métodos de Cálculo de Desplazamientos en Barras de Sección Variable y su Comparación.

2.1 Método de los Parámetros de Origen. Método de la Viga Equivalente.

El Método de los Parámetros de Origen (Pisarenko, 1989); (Feodosiev, 1985), es un método de cálculo de desplazamientos. Su aplicación se ilustrará para la solución de las vigas hiperestáticas, o sea, utilizando lo que se conoce como Ecuaciones Universales de la Curva Elástica de una viga se pueden calcular los desplazamientos tanto lineales como angulares en cualquier punto de una viga, según las ecuaciones (2.1) y (2.2).

$$E \cdot I_x \cdot \theta_z = E \cdot I_x \cdot \theta_o + \sum_{i=1}^{n1} M_i \cdot (z - a_i) + \sum_{i=1}^{n2} \frac{P_i \cdot (z - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n3} \frac{q_i \cdot (z - c_i)^3}{6} \quad (2.1)$$

$$E \cdot I_x \cdot y_z = E \cdot I_x \cdot y_o + E \cdot I_x \cdot \theta_o \cdot z + \sum_{i=1}^{n1} \frac{M_i \cdot (z - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n2} \frac{P_i \cdot (z - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^{n3} \frac{q_i \cdot (z - c_i)^4}{24} \quad (2.2)$$

Plateando las ecuaciones universales de la curva elástica de la viga para calcular los desplazamientos en algunos puntos cuyos desplazamientos son cero, o poseen valores conocidos, es posible obtener las ecuaciones suplementarias requeridas para resolver las vigas hiperestáticas. Veamos la aplicación con un ejemplo concreto

Se desea calcular las reacciones en los apoyos y construir los diagramas de fuerza de cortante y momentos flectores para la viga hiperestática mostrada en la Fig. 2.1.

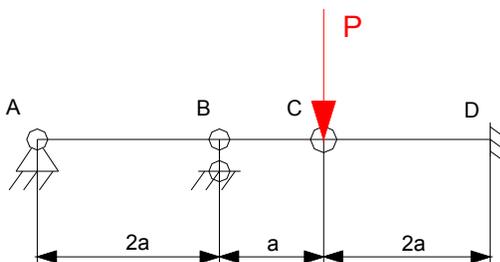


Fig. 2.1 Viga Hiperestática

Capítulo II. Métodos de Cálculo de Desplazamientos en Barras de Sección Variable y su Comparación.



La viga posee dos grados de hiperestaticidad. En el esquema de análisis se considera que la carga P está aplicada en el punto C del tramo ABC de la viga, y sobre el tramo CD solo actúa la acción R_c que el tramo ABC le transmite a través de la articulación C .

Vamos a analizar primero el tramo CD. (Fig. 2.2).

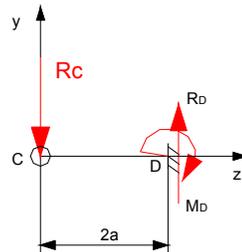


Fig. 2.2 Método de las secciones para el Tramo CD

De las ecuaciones de equilibrio para el tramo se tiene que:

$$\sum F_y = R_D - R_C = 0 \rightarrow R_D = R_C \quad (2.3)$$

$$\sum M_D = M_D - R_C \cdot (2a) = 0 \rightarrow M_D = R_C \cdot (2a) \quad (2.4)$$

Partiendo de que tanto la pendiente como la flecha en D son iguales a cero se puede hallar la flecha en C en función de R_C . Se verá lo anterior colocando el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la viga.

$$E \cdot I_x \cdot \theta_D = E \cdot I_x \cdot \theta_C - \frac{R_C \cdot (2 \cdot a - 0)^2}{2} = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot \theta_C = 2 \cdot R_C \cdot a^2 \quad (2.5)$$

$$E \cdot I_x \cdot y_D = E \cdot I_x \cdot y_C + E \cdot I_x \cdot \theta_C \cdot (2a) - \frac{R_C \cdot (2 \cdot a - 0)^3}{6} = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_C = \frac{8}{6} \cdot R_C \cdot a^3 - 2 \cdot R_C \cdot a^2 \cdot (2a) = -\frac{8}{3} \cdot R_C \cdot a^3 \quad (2.6)$$

Analicemos ahora el tramo ABC, Fig. 2.3.

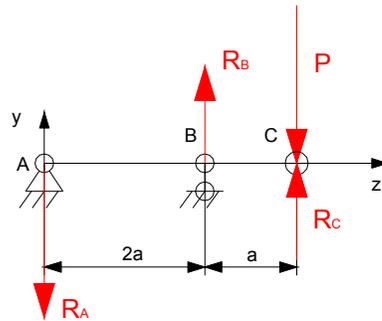


Fig. 2.3 Método de las Secciones para el Tramo ABC.

De las ecuaciones de equilibrio del tramo se tiene:

$$\sum F_y = R_B + R_C - R_A - P = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum M_C = R_B \cdot a - R_A \cdot (3a) = 0 \quad (2.8)$$

$$R_B = 3 \cdot R_A$$

Se han planteado cuatro ecuaciones de equilibrio, es necesario encontrar una ecuación complementaria. En este caso conocemos, por ejemplo, que la flecha en el punto B para el tramo ABC es igual a cero. Plantearemos la ecuación de la flecha en B y la igualaremos a cero.

$$E \cdot I_x \cdot y_B = E \cdot I_x \cdot y_A + E \cdot I_x \cdot \theta_A \cdot (2a) - \frac{R_A \cdot (2a - 0)^3}{6} = 0 \quad \text{Como: } y_A = 0 \text{ entonces:}$$

$$E \cdot I_x \cdot \theta_A = \frac{R_A \cdot (2a)^3}{6 \cdot (2a)} = \frac{2}{3} \cdot R_A \cdot a^2 \quad (2.9)$$

Esta condición no constituye aun una ecuación complementaria, pero ahora podemos plantear la ecuación para obtener la flecha en C e igualarla con la expresión (2.6) obtenida para el tramo CD:

$$E \cdot I_x \cdot y_C = E \cdot I_x \cdot y_A + E \cdot I_x \cdot \theta_A \cdot (3a) - \frac{R_A \cdot (3a - 0)^3}{6} + \frac{R_B \cdot (3a - 2a)^3}{6} \quad (2.10)$$

Sustituyendo en (2.10) la ecuación (2.9) e igualando el resultado con (2.6) se obtiene:

$$\frac{3}{2} \cdot R_A \cdot a^2 \cdot (3a) - \frac{R_A \cdot 27 \cdot a^3}{6} + \frac{R_B \cdot a^3}{6} = -\frac{8}{3} \cdot R_C \cdot a^3$$

Simplificando:

$$15 \cdot R_A - R_B = 16 \cdot R_C \quad (2.11)$$

Y esta constituye la ecuación complementaria necesaria. Sustituyendo en ella la expresión (2.8) se obtiene que:

$$15 \cdot R_A - 3 \cdot R_A = 16 \cdot R_C \rightarrow R_C = \frac{3}{4} \cdot R_A \quad (2.12)$$

Y ahora sustituyendo (2.8) y (2.12) en (2.7):

$$3 \cdot R_A + \frac{3}{4} \cdot R_A - R_A = P \rightarrow R_A = \frac{4}{11} \cdot P \quad (2.13)$$

$$R_B = 3 \cdot R_A = \frac{12}{11} \cdot P \quad (2.14)$$

$$R_C = \frac{3}{4} \cdot R_A = \frac{3}{11} \cdot P \quad (2.15)$$

$$\text{Como } R_D = R_C = \frac{3}{11} \cdot P \quad \text{y} \quad M_D = 2 \cdot R_C \cdot a = \frac{6}{11} \cdot P \cdot a$$

Conocidas todas las reacciones ya se pueden hallar los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores (Fig. 2.4).

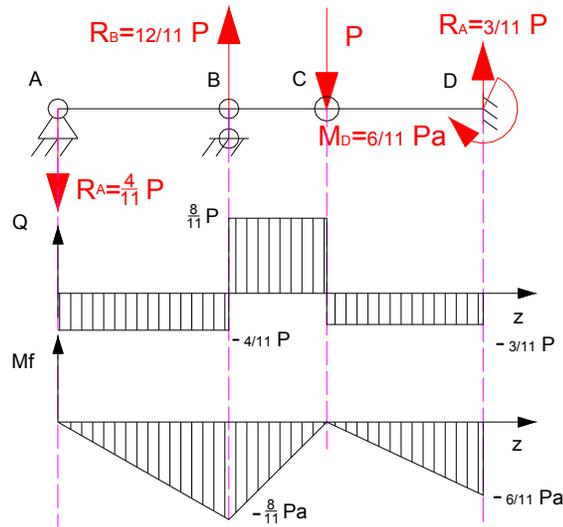


Fig. 2.4 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores de la Viga

Cuando se trata de una viga de rigidez variable se puede aplicar también el Método de los Parámetros de Origen (Pisarenko et al., 1989) pero es necesario hallar primero lo que se conoce como “Viga Equivalente”. Se verá a continuación este método.

Se ilustrará la aplicación del método con una viga isostática como la mostrada en la Fig. 2.5. Se trata de una viga de rigidez variable de tres momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 respectivamente y aparecen construidos los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores.

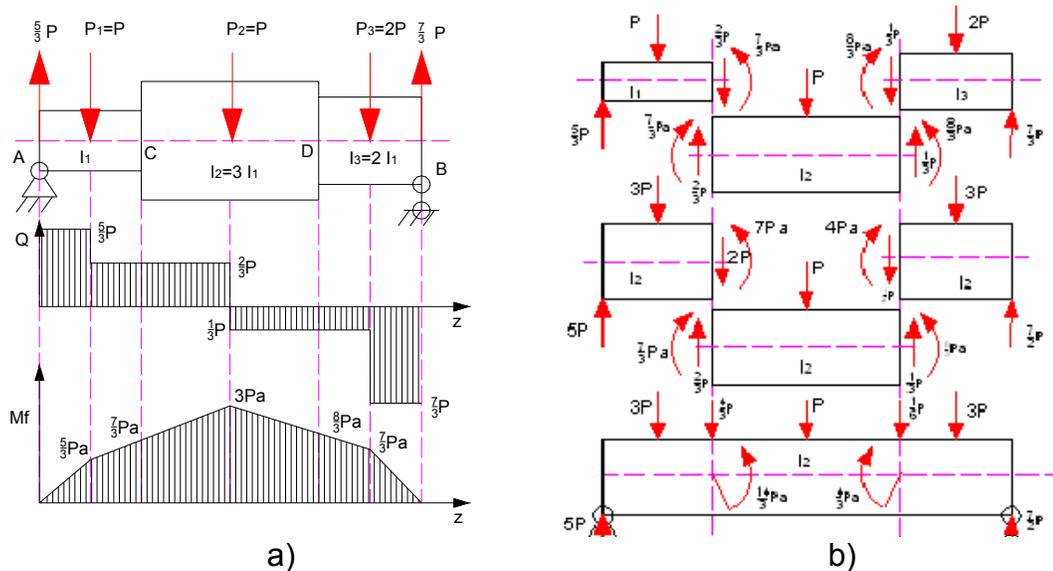


Fig. 2.5 Viga Isostática de rigidez variable y fuerzas internas en las transiciones entre los diferentes tramos de rigidez variable para su reducción a una viga equivalente

Para calcular los desplazamientos en una viga de rigidez variable es necesario plantear la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de la viga para cada tramo, o sea:

$$E \cdot I_{x1} \cdot y'' = M_{fz1}$$

$$E \cdot I_{x2} \cdot y'' = M_{fz2} \quad \mathbf{y}, \quad (2.16)$$

$$E \cdot I_{x3} \cdot y'' = M_{fz3}$$

Se va a sustituir la viga de rigidez variable por una equivalente de rigidez constante, digamos de rigidez igual a la del segundo tramo, o sea, I_2 . Multiplicando y dividiendo por I_2 el miembro derecho de las expresiones (2.16) no se altera el resultado y se obtiene:

$$E \cdot I_{x2} \cdot y'' = M_{fz1} \cdot \beta_1$$

$$E \cdot I_{x2} \cdot y'' = M_{fz2} \cdot \beta_2 \quad (2.17)$$

$$E \cdot I_{x_2} \cdot y'' = M_{fz_3} \cdot \beta_3$$

Donde:

$$\beta_1 = \frac{I_2}{I_1} = 3, \quad \beta_2 = \frac{I_2}{I_2} = 1, \quad \beta_3 = \frac{I_2}{I_3} = \frac{3}{2} \quad (2.18)$$

$$\text{En general } \beta_i = \frac{I_{eq}}{I_i} \quad (2.19)$$

Y se denomina coeficiente de reducción, donde:

I_{eq} – Momento de inercia que se elige para la viga equivalente.

I_i - Momento de inercia de cada tramo en particular.

Las expresiones (2.17) corresponden ya a una viga de rigidez constante de momento de inercia I_2 donde el momento flector de cada tramo queda multiplicado por el correspondiente coeficiente de reducción. Puesto que los momentos flectores son una función lineal de las cargas, se puede, para cada tramo de la viga, en vez de multiplicar el momento flector por el coeficiente de reducción, multiplicar por ese coeficiente todas las cargas exteriores de ese tramo junto con las fuerzas interiores Q y M en los lugares de transición entre los diferentes tramos. Uniendo los diferentes tramos unos con otros y sumando las fuerzas internas en las uniones de éstos se obtiene como se muestra en la Fig. 2.5 b) una viga de sección constante solicitada por cargas exteriores reducidas, es decir, multiplicadas β_i veces. En las uniones de los diferentes tramos quedarán aplicadas nuevas cargas exteriores, fuerzas concentradas o momentos concentrados iguales a las diferencias de las fuerzas interiores en la respectiva unión. La viga equivalente así obtenida (Fig. 2.5 b)) tendrá una curva elástica que coincide completamente con la curva elástica de la viga escalonada dada.

Se analizará la aplicación de este método a la solución de una viga hiperestática escalonada utilizando el Método de los Parámetros de Origen. Se calcularán las reacciones en los apoyos y se construirán los diagramas de fuerza de cortante y

momentos flectores de la viga hiperestática escalonada mostrada en la Fig. 2.6. De la misma forma se aplicaría para una viga o árbol isostático que son más simples.

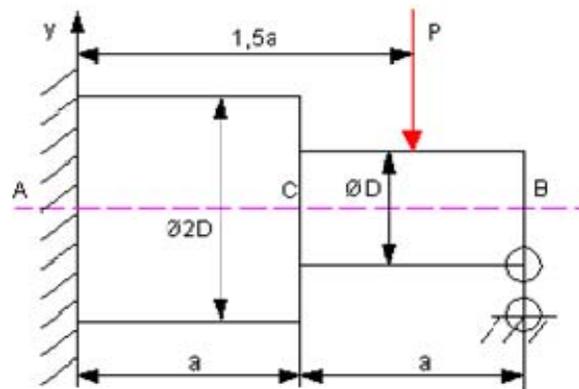


Fig. 2.6 Viga Hiperestática de Sección Variable

El diagrama de sólido rígido de la viga se muestra en la Fig. 2.7.

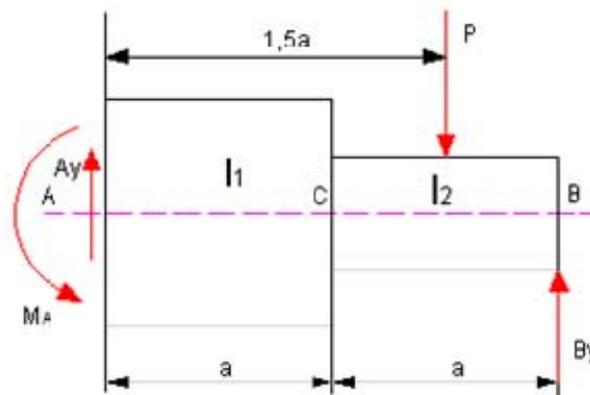


Fig.2.7 Diagrama de Sólido rígido de la Viga

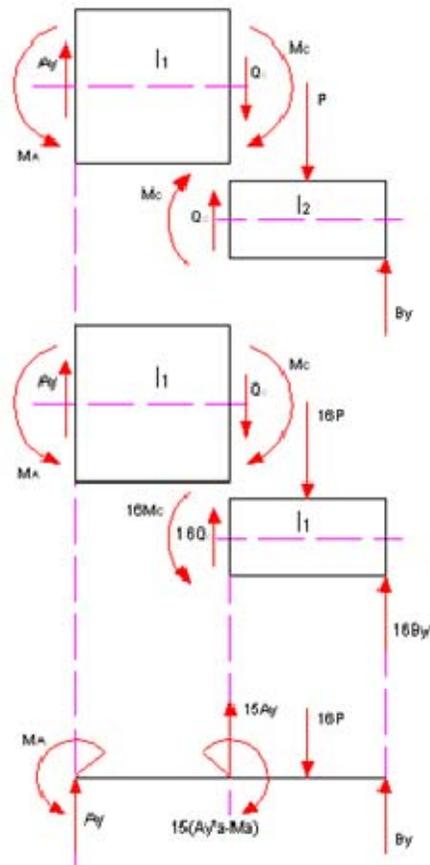


Fig. 2.8 Reducción a una Viga equivalente

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_y = A_y + B_y - P = 0$$

$$A_y + B_y = P \quad (2.20)$$

$$\sum M_A = M_A + B_y \cdot (2a) - P \cdot (1,5a) = 0$$

$$M_A + B_y \cdot (2a) = P \cdot (1,5a) \quad (2.21)$$

La viga es hiperestática con un grado de hiperestaticidad. Reduzcámoslas a una viga equivalente de momento de inercia I_1 .

$$\beta_1 = \frac{I_1}{I_1} = 1, \quad \beta_2 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{0,05 \cdot (2 \cdot D)^4}{0,05 \cdot (D)^4} = 16 \quad (2.22)$$

Expresemos Q_C y M_C en función de A_y y M_A . Para el tramo de la izquierda:

$$\sum F_y = Q_C - A_y = 0$$

$$Q_C = A_y \quad (2.23)$$

$$\sum M_C = M_C - A_y \cdot a + M_A = 0$$

$$M_C = A_y \cdot a - M_A \quad (2.24)$$

Multiplicando las cargas y fuerzas internas de cada tramo por los respectivos coeficientes de reducción y sumando las cargas se obtiene la viga equivalente (Fig. 2.8)

Situando el origen de coordenadas en el empotramiento se tiene que:

$$y_o = y_A = 0 \quad y \quad \theta_o = \theta_A = 0$$

Planteando la ecuación universal de la elástica para el cálculo de la flecha en B donde $y_B = 0$, se tiene:

$$E \cdot I_1 \cdot y_B = -\frac{M_A \cdot (2a - 0)^2}{2} + \frac{A_y \cdot (2a - 0)^3}{6} + \frac{15 \cdot A_y \cdot (2a - 0)^3}{6} + \frac{15 \cdot (A_y \cdot a - M_A) \cdot (2a - a)^2}{2} - \frac{16 \cdot P \cdot (2a - 1,5a)^3}{6} = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$67 \cdot A_y \cdot a - 57 \cdot M_A = 2 \cdot P \cdot a \quad (2.25)$$

Simultaneando las ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.25) se obtiene:

$$A_y = 0,564 \cdot P, \quad B_y = 0,436 \cdot P \quad y \quad M_A = 0,628 \cdot P \cdot a$$

Teniendo las reacciones ya se pueden construir los diagramas de Q_y y M_f .

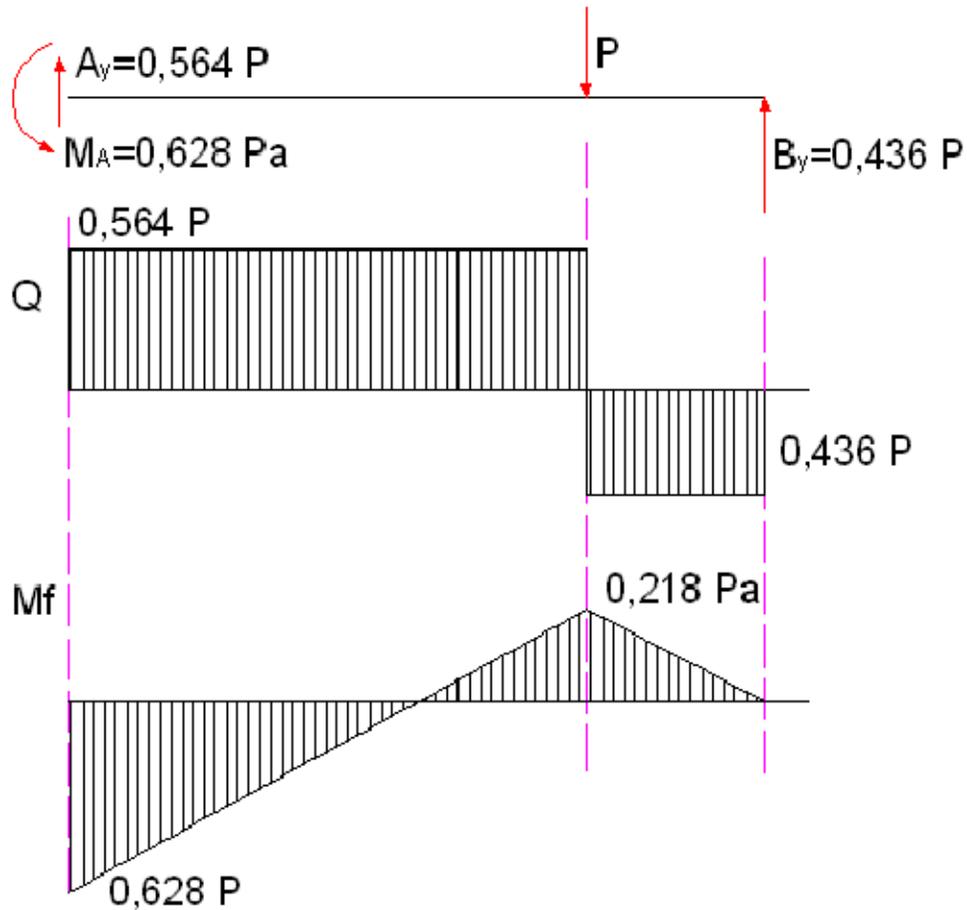


Fig. 2.9 Reacciones y Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores de la viga

2.2 Comparación entre el Método de la Viga equivalente y los Métodos Computacionales: Mechanical Desktop y Método de los Elementos Finitos.

2.2.1 Esquema de árbol sobre el cual se realizará la comparación.

La comparación se realizará para un árbol de geometría compleja, con elementos similares al Árbol del Ventilador de Gases Calientes objeto de estudio del presente trabajo. El árbol posee una zona cónica igual que el árbol del ventilador. Se tomarán en

cuenta los pesos de los diferentes tramos del árbol de manera que la ecuación de la flecha sea obtenida de la forma más exacta posible.

La densidad del acero es:

$$\gamma_{\text{acero}} = 7,8 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = 0,0078 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^3}$$

Los diámetros y longitudes de los tramos del árbol son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 12\text{cm} & D_1 &= 26\text{cm} & D_2 &= \frac{D_1 + D_3}{2} = \frac{26 + 43,5}{2} \\ Z_2 &= 29\text{cm} & D_3 &= 43,5\text{cm} & D_2 &= 34,75\text{cm} \\ Z_3 &= 141\text{cm} \end{aligned}$$

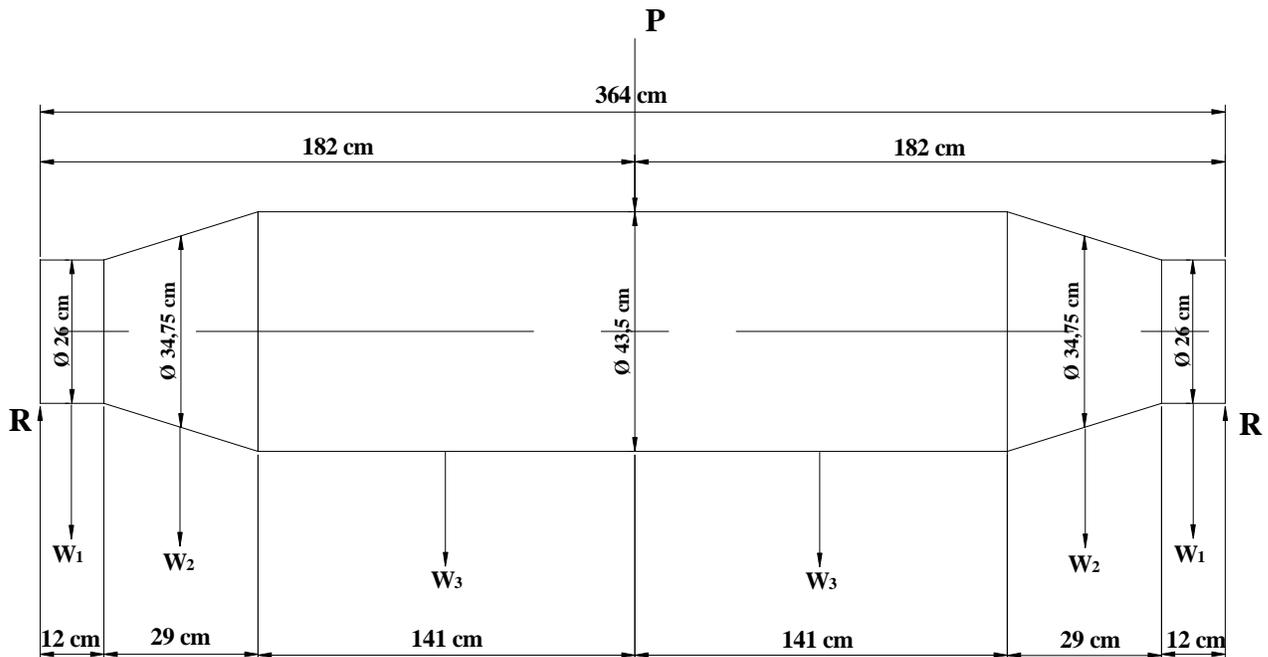


Fig.2.10. Geometría del Árbol sobre el cual se realizará la comparación

2.2.2 Cálculo de los pesos para cada tramo del árbol.

$$W_1 = \frac{\pi \cdot (D_1)^2}{4} \cdot Z_1 \cdot \gamma_{\text{acero}}$$

$$W_1 = \frac{\pi \cdot (26)^2}{4} \cdot 12 \cdot 0,0078$$

$$W_1 = 49,7\text{kgf}$$

$$W_2 = \frac{\pi \cdot (D_2)^2}{4} \cdot Z_2 \cdot \gamma_{\text{acero}}$$

$$W_2 = \frac{\pi \cdot (34,75)^2}{4} \cdot 29 \cdot 0,0078$$

$$W_2 = 214,5\text{kgf}$$

$$W_3 = \frac{\pi \cdot (D_3)^2}{4} \cdot Z_3 \cdot \gamma_{acero}$$

$$W_3 = \frac{\pi \cdot (43,5)^2}{4} \cdot 141 \cdot 0,0078$$

$$W_3 = 1634,5 \text{ kgf}$$

Donde:

W- peso de cada tramo del árbol en kgf.

D- diámetro en cm

Z- longitud del tramo. en cm.

γ - densidad del acero en kgf/cm³

2.2.3 Cálculo de los momentos de inercia para los diferentes tramos.

$$I_{eq} = \frac{\pi}{64} \cdot d_{eq}^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (34,75)^4 = 71580 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = \frac{\pi}{64} \cdot d_1^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (26)^4 = 22432 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \frac{\pi}{64} \cdot d_3^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (43,5)^4 = 175763 \text{ cm}^4$$

2.2.4 Cálculo de los coeficientes de reducción.

$$\beta_1 = \frac{I_{eq}}{I_1} = \frac{71580}{22432} = 3,19$$

$$\beta_2 = 1$$

$$\beta_3 = \frac{I_{eq}}{I_3} = \frac{71580}{175763} = 0,407$$

2.2.5 Cálculo de las cargas distribuidas del peso propio para cada tramo.

$$q_1 = \frac{W_1}{12} = 4,14 \text{ kgf/cm}$$

$$q_2 = \frac{W_2}{29} = 7,3966 \text{ kgf/cm}$$

$$q_3 = \frac{W_3}{141} = 11,59 \text{ kgf/cm}$$

2.2.6 Aplicación del Método de la Viga Equivalente.

En la Fig. 2.11 se muestra la separación por tramos de diferentes rigideces para la aplicación del Método de la Viga Equivalente

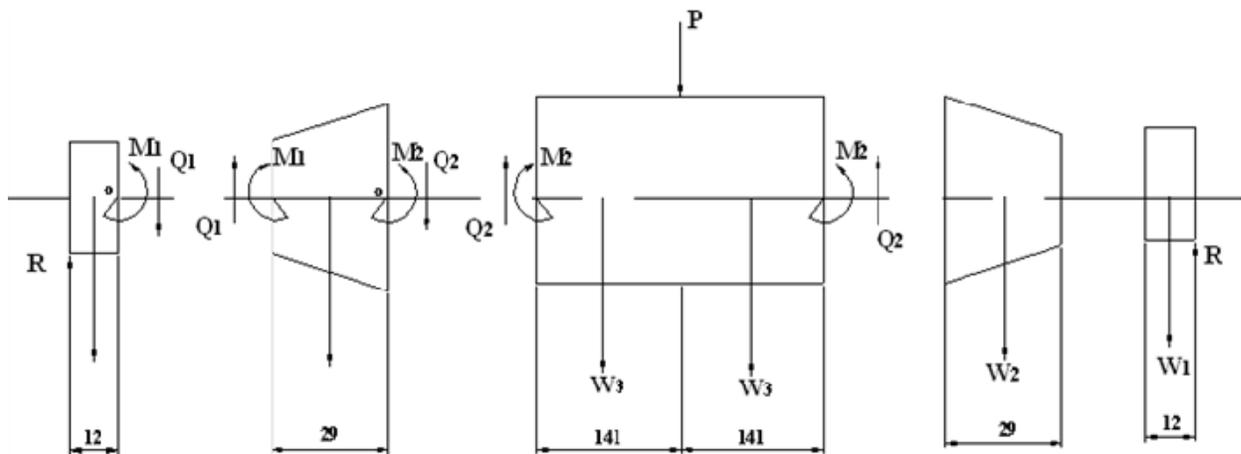


Fig.2.11 Separación por tramos del árbol

2.2.7 Cálculo de las reacciones (R)

$$\sum Fy = 0$$

$$2 \cdot R - P - 2 \cdot W_1 - 2 \cdot W_2 - 2 \cdot W_3 = 0$$

$$R = \frac{1000 + 2 \cdot (49,7) + 2 \cdot (214,5) + 2 \cdot (1634,5)}{2}$$

$$R = 2398,7 \text{ kgf}$$

2.2.8 Cálculo de momento flector y cortante en la primera sección.

$$\sum Fy = Q_1 - R + W_1 = 0$$

$$Q_1 = R - W_1$$

$$Q_1 = 2398,7 - 49,7$$

$$Q_1 = 2349 \text{ kgf}$$

$$\sum M_o = M_1 - R \cdot 12 + W_1 \cdot 6 = 0$$

$$M_1 = R \cdot 12 - W_1 \cdot 6$$

$$M_1 = 2398,7 \cdot 12 - 49,7 \cdot 6$$

$$M_1 = 28486,2 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

2.2.9 Cálculo de momento flector y cortante en la segunda sección.

$$\sum Fy = Q_2 - Q_1 + W_2 = 0$$

$$Q_2 = Q_1 - W_2$$

$$Q_2 = 2349 - 214,5$$

$$Q_1 = 2134,5 \text{ kgf}$$

$$\sum M_o = M_2 - M_1 - Q_1 \cdot 29 + W_2 \cdot \frac{Z_2}{2} = 0$$

$$M_2 = M_1 + Q_1 \cdot 29 - W_2 \cdot \frac{Z_2}{2}$$

$$M_2 = 28486,2 + 2349 \cdot 29 - 214,5 \cdot \frac{29}{2}$$

$$M_2 = 93496,95 \text{ kgf} - \text{cm}$$

Comprobaciones.

$$\sum Fy = 2 \cdot Q_2 - P - 2 \cdot W_3 = 0$$

$$2 \cdot 2134,5 - 1000 - 2 \cdot 1634,5 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\sum M_o = Q_2 \cdot 282 - 2 \cdot W_3 \cdot 141 - P \cdot 141 = 0$$

$$2134,5 \cdot 282 - 2 \cdot 1634,5 \cdot 141 - 1000 \cdot 141 = 0$$

$$0 = 0$$

2.2.10 Obtención de la Viga Equivalente.

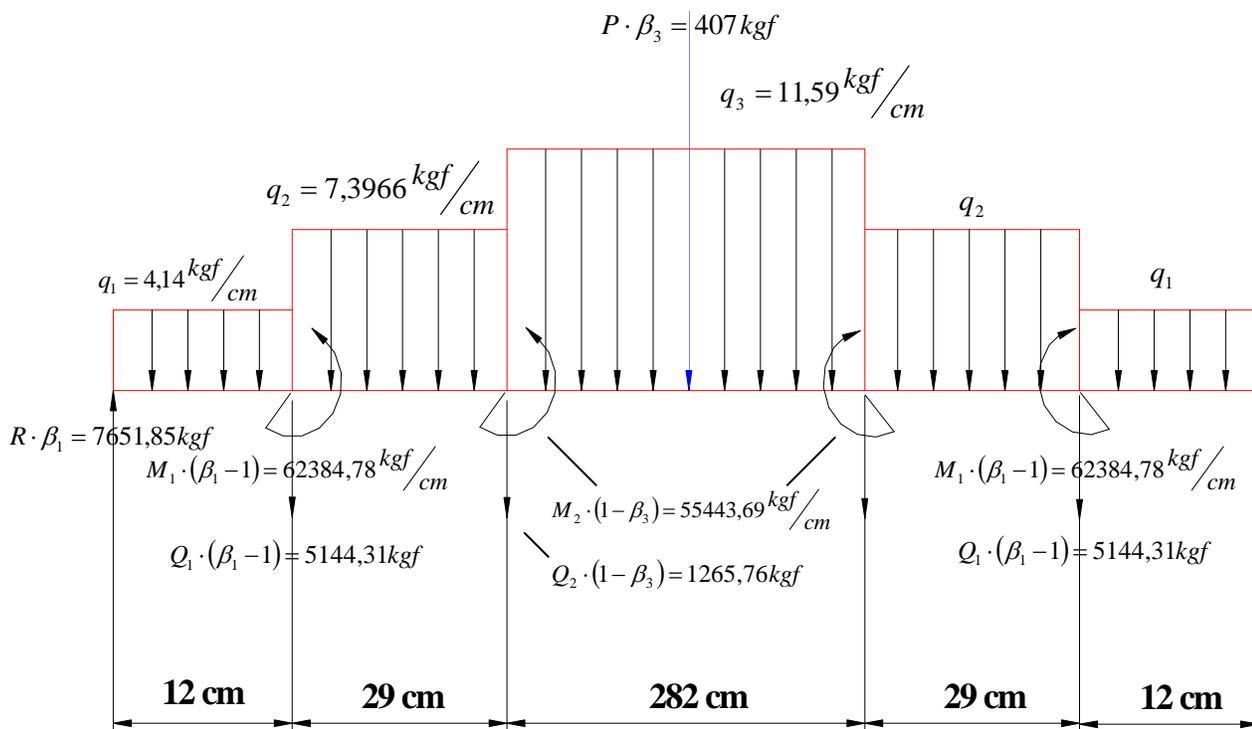


Fig.2.12 Unión de los diferentes tramos y determinación de las nuevas cargas

$$R \cdot \beta_1 = 2398,7 \cdot 3,19 = 7651,85 \text{kgf}$$

$$Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) = 2349 \cdot (3,19 - 1) = 5144,31 \text{kgf}$$

$$M_1 \cdot (\beta_1 - 1) = 28486,2 \cdot (3,19 - 1) = 62384,78 \text{kgf/cm}$$

$$Q_2 \cdot (1 - \beta_3) = 2134,5 \cdot (1 - 0,407) = 1265,76 \text{kgf}$$

$$M_2 \cdot (1 - \beta_3) = 93496,95 \cdot (1 - 0,407) = 55443,69 \text{kgf/cm}$$

$$P \cdot \beta_3 = 1000 \cdot 0,407 = 407 \text{kgf}$$

2.2.11 Cálculo de Flecha por el Método de los Parámetros de Origen.

$$E \cdot I_x \cdot y_l = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot Z + \sum M \frac{(Z-a)^2}{2} + \sum P \frac{(Z-b)^3}{6} + \sum q \frac{(Z-c)^4}{24}$$

$y_0 = 0$ Apoyo en el origen.

$y_l = 0$ Apoyo en el otro extremo.

Capítulo II. Métodos de Cálculo de Desplazamientos en Barras de Sección Variable y su Comparación.



$$\begin{aligned}
 & E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot L - M_1 \cdot \frac{(L-Z_1)^2}{2} - M_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^2}{2} + M_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^2}{2} \\
 & + M_1 \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L)^3}{6} - Q_1 \cdot (\beta_1-1) \cdot \frac{(L-Z_1)^3}{6} - Q_2 \cdot (1-\beta_3) \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^3}{6} \\
 & - P \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-Z_3)^3}{6} - Q_2 \cdot (1-\beta_3) \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^3}{6} - Q_1 \cdot (\beta_1-1) \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^3}{6} \\
 & - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L)^4}{24} + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L-Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(L-Z_1)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^4}{24} \\
 & - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^4}{24} + q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^4}{24} \\
 & + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^4}{24} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^4}{24} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot L &= M_1 \cdot \frac{(L-Z_1)^2}{2} + M_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^2}{2} - M_2 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^2}{2} \\
 & - M_1 \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^2}{2} - R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L)^3}{6} + Q_1 \cdot (\beta_1-1) \cdot \frac{(L-Z_1)^3}{6} + Q_2 \cdot (1-\beta_3) \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^3}{6} \\
 & + P \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-Z_3)^3}{6} + Q_2 \cdot (1-\beta_3) \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^3}{6} + Q_1 \cdot (\beta_1-1) \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^3}{6} \\
 & + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L)^4}{24} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L-Z_1)^4}{24} + \frac{\beta_2 \cdot q_2 \cdot (L-Z_1)^4}{24} - \frac{\beta_2 \cdot q_2 \cdot (L-Z_1-Z_2)^4}{24} \\
 & + q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2)^4}{24} - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(L-Z_1-Z_2-2Z_3)^4}{24} + \frac{\beta_2 \cdot q_2 \cdot (L-Z_1-Z_2-2Z_3)^4}{24} \\
 & - \frac{\beta_2 \cdot q_2 \cdot (L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^4}{24} + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(L-Z_1-2Z_2-2Z_3)^4}{24} = 0
 \end{aligned}$$

$$E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 364 \text{ cm} = -5143398123$$

$$E \cdot I_x \cdot \theta_0 = \frac{-5143398123}{364}$$

$$E \cdot I_x \cdot \theta_0 = -14130214,62$$

$$0 \leq Z \leq Z_1$$

$$E \cdot I_x \cdot y = (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24}$$

$$E \cdot I_x \cdot y = (-14130214,62) \cdot Z + 1275,31 \cdot Z^3 - 0,55 \cdot Z^4$$

$$Z_1 \leq Z \leq Z_1 + Z_2$$

$$E \cdot I_x \cdot y_{ec} = (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z - M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} - Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^3}{6} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24} + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24}$$

$$E \cdot I_x \cdot y_{ec} = (-14130214,62) \cdot Z - 31192,39 \cdot (Z - 12)^2 + 1275,31 \cdot Z^3 - 857,39 \cdot (Z - 12)^3 - 0,55 \cdot Z^4 + 0,55 \cdot (Z - 12)^4 - 0,308 \cdot (Z - 12)^4$$

$$Z_1 + Z_2 \leq Z \leq Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$E \cdot I_x \cdot y_{ec} = (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z - M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{2} - M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} - Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^3}{6} - Q_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot (Z - Z_1 - Z_2)^3 - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24} + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24}$$

$$E \cdot I_x \cdot y_{ec} = (-14130214,62) \cdot Z - 31192,39 \cdot (Z - 12)^2 - 27721,85 \cdot (Z - 41)^2 + 1275,31 \cdot Z^3 - 857,39 \cdot (Z - 12)^3 - 0,55 \cdot Z^4 + 0,55 \cdot (Z - 12)^4 - 0,308 \cdot (Z - 12)^4 + 0,308 \cdot (Z - 41)^4 - 0,1965 \cdot (Z - 41)^4$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 \leq Z \leq Z_1 + Z_2 + 2Z_3$$

$$\begin{aligned} E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z - M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{2} - M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} \\ & - Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^3}{6} - Q_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot (Z - Z_1 - Z_2)^3 - P \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - Z_3)^3}{6} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24} \\ & + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (-14130214,62) \cdot Z - 31192,39 \cdot (Z - 12)^2 - 27721,85 \cdot (Z - 41)^2 + 1275,31 \cdot Z^3 \\ & - 857,39 \cdot (Z - 12)^3 - 16,96 \cdot (Z - 182)^3 - 0,55 \cdot Z^4 + 0,55 \cdot (Z - 12)^4 - 0,308 \cdot (Z - 12)^4 \\ & + 0,308 \cdot (Z - 41)^4 - 0,1965 \cdot (Z - 41)^4 \end{aligned}$$

$$Z_1 + Z_2 + 2Z_3 \leq Z \leq Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3$$

$$\begin{aligned} E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z - M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{2} - M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^2}{2} \\ & + M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} - Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^3}{6} \\ & - Q_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot (Z - Z_1 - Z_2)^3 - P \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - Z_3)^3}{6} - Q_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot (Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^3 \\ & - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24} + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} \\ & - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} + q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^4}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (-14130214,62) \cdot Z - 31192,39 \cdot (Z - 12)^2 - 27721,85 \cdot (Z - 41)^2 + 27721,85 \cdot (Z - 323)^2 \\ & + 1275,31 \cdot Z^3 - 857,39 \cdot (Z - 12)^3 - 857,39 \cdot (Z - 41)^3 - 16,96 \cdot (Z - 182)^3 - 857,39 \cdot (Z - 323)^3 \\ & - 0,55 \cdot Z^4 + 0,55 \cdot (Z - 12)^4 - 0,308 \cdot (Z - 12)^4 + 0,308 \cdot (Z - 41)^4 - 0,1965 \cdot (Z - 41)^4 \\ & + 0,1965 \cdot (Z - 323)^4 - 0,308 \cdot (Z - 323)^4 \end{aligned}$$

$$Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3 \leq Z \leq L$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (E \cdot I_x \cdot \theta_0) \cdot Z - M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{2} - M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^2}{2} \\
 & + M_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^2}{2} + M_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1 - 2Z_2 - 2Z_3)^2}{2} + R \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^3}{6} \\
 & - Q_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \frac{(Z - Z_1)^3}{6} - Q_2 \cdot (1 - \beta_3) \cdot (Z - Z_1 - Z_2)^3 - P \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - Z_3)^3}{6} - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z)^4}{24} \\
 & + q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} - q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2)^4}{24} \\
 & + q_3 \cdot \beta_3 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^4}{24} - q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - Z_2 - 2Z_3)^4}{24} + q_2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{(Z - Z_1 - 2Z_2 - 2Z_3)^4}{24} \\
 & - q_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(Z - Z_1 - 2Z_2 - 2Z_3)^4}{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_x \cdot y_{ec} = & (-14130214,62) \cdot Z - 31192,39 \cdot (Z - 12)^2 - 27721,85 \cdot (Z - 41)^2 + 27721,85 \cdot (Z - 323)^2 \\
 & 31192,39 \cdot (Z - 352)^2 + 1275,31 \cdot Z^3 - 857,39 \cdot (Z - 12)^3 - 857,39 \cdot (Z - 41)^3 - 16,96 \cdot (Z - 182)^3 \\
 & - 857,39 \cdot (Z - 323)^3 - 857,39 \cdot (Z - 352)^3 - 0,55 \cdot Z^4 + 0,55 \cdot (Z - 12)^4 - 0,308 \cdot (Z - 12)^4 \\
 & + 0,308 \cdot (Z - 41)^4 - 0,1965 \cdot (Z - 41)^4 + 0,1965 \cdot (Z - 323)^4 - 0,308 \cdot (Z - 323)^4 + 0,308 \cdot (Z - 352)^4 \\
 & - 1275,31 \cdot (Z - 352)^4
 \end{aligned}$$

2.2.12 Método numérico Computacional utilizado por el Mechanical Desktop

Se dibujó dicho árbol en Mechanical Desktop y se calculó la flecha por este Software para utilizarlo como elemento de comparación entre ambos Métodos

Tabla 2.1 Tabla de comparación entre ambos métodos

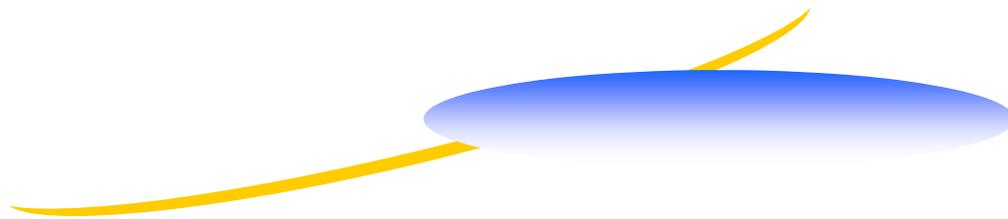
Z (cm)	y_{ec} (cm)	y_{MD} (cm)	% dif = $\frac{y_{MD} - y_{ec}}{y_{MD}}$
0	0	0	0
10	0,000978153	0,00093342	4,792344369
32	0,003005392	0,00282292	6,463933648
62	0,005434905	0,00512068	6,136401765
92	0,007504636	0,00708796	5,87864808

122	0,009097361	0,00860174	5,761872167
152	0,010107942	0,00956232	5,705957345
182	0,010457929	0,00989532	5,685606622
212	0,010108356	0,0095635	5,697247085
242	0,00909812	0,00860349	5,749184121
272	0,007505601	0,00708978	5,865082885
302	0,005435868	0,00512218	6,124120664
332	0,003006075	0,00282384	6,453434815
354	0,000978414	0,00093375	4,783256708
364	1,56784E-17	0	0

Como se aprecia de la Tabla la correspondencia de ambos métodos es adecuada, el % de diferencia no supera el 7 % lo que representa una correspondencia buena.

2.3 Conclusiones Parciales del Capítulo II.

1. Se profundizó en lo relativo al empleo del Método de los Parámetros de Origen, en su utilización en el cálculo de desplazamientos y en su posible aplicación en la solución de árboles o vigas hiperestáticas.
2. Se profundizó en la aplicación del Método de la Viga Equivalente, en su aplicación para el cálculo de desplazamientos en árboles y vigas de sección variable e incluso en su utilización también en la solución de árboles hiperestáticos.
3. Se aplicó este último método al cálculo de las flechas en diferentes secciones a lo largo de la longitud de un árbol de complejidad constructiva similar a la del Árbol del Ventilador de Gases Calientes de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” con vistas a esclarecer la posibilidad de utilizar cualquiera de los métodos estudiados en la determinación de las flechas.
4. La comparación entre los diferentes métodos estudiados arrojó una correspondencia muy buena con % de diferencia inferiores al 7 %.



Capítulo III

A decorative graphic element at the bottom of the page. It consists of a blue crosshair (a vertical line on the left and a horizontal line at the bottom) with a vertical line on the right. To the left of the vertical line, there are three overlapping squares: a red one on top, a blue one on the left, and a yellow one on the bottom. The text "Capítulo III" is written in a blue, italicized, serif font with a red outline, positioned to the right of the crosshair.

Capitulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Arbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.

3.1 Método de Cálculo propuesto por Dobrovolski para el cálculo de la velocidad crítica en árboles.

Durante el funcionamiento de un árbol, a causa de la presencia de las deformaciones y de las excentricidades lógicas existentes en los centros de masa de los elementos colocados sobre los mismos se originan vibraciones. El cálculo de un árbol a las vibraciones consiste en comprobar la posible condición de resonancia, o sea aquella situación en la cual la amplitud de las oscilaciones transversales se incrementa bruscamente y puede alcanzar tales valores que conducen al árbol a la rotura.

La resonancia aparece a un número de revoluciones por minuto que se conoce como velocidad crítica que no es más que aquella velocidad a la cual la frecuencia del cambio de las fuerzas externas coincide con las oscilaciones propias del sistema consistente en el árbol y las piezas colocadas sobre el mismo. La resonancia puede aparecer también cuando la frecuencia de los cambios de las fuerzas exteriores es múltiplo entero de la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema.

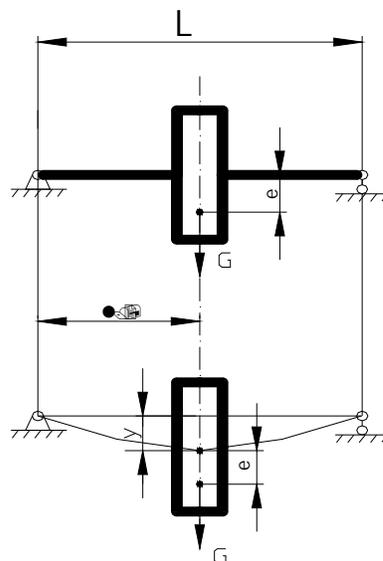


Fig. 3.1. Fuerza centrífuga en el árbol.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Supongamos que sobre un árbol Fig. 3.1 está colocado en posición simétrica con relación a los apoyos un disco de peso **G**, el centro de masa del cual está desplazado con relación al eje geométrico de magnitud **e**. Durante el giro aparece una fuerza centrífuga inicial debido a la excentricidad **e**, cuya magnitud es:

$$C_0 = m \cdot \omega^2 \cdot e \quad (3.1)$$

Donde:

$$m = \frac{G}{g}$$

Bajo la acción de esta fuerza (sin considerar la influencia del peso propio) el árbol se pandeará una magnitud “**y**” (Fig. 3.2) lo que a su vez aumentará el valor de la fuerza centrífuga hasta una magnitud:

$$C = m \cdot \omega^2 (y + e) \quad (3.2)$$

La magnitud de la flecha originada por una fuerza de magnitud **C** dispuesta simétricamente entre los dos apoyos, según el esquema de la Fig. 3.2, será igual a:

$$y = \frac{l^3}{48EI} \quad (3.3)$$

De donde la fuerza **C** requerida para provocar una deflexión en el árbol de magnitud **y** será:

$$C = \frac{48EI}{l^3} y = ky \quad (3.4)$$

Donde **k** es la rigidez a flexión de dicho árbol, o sea la fuerza que provoca una deflexión “e” igual a la unidad.

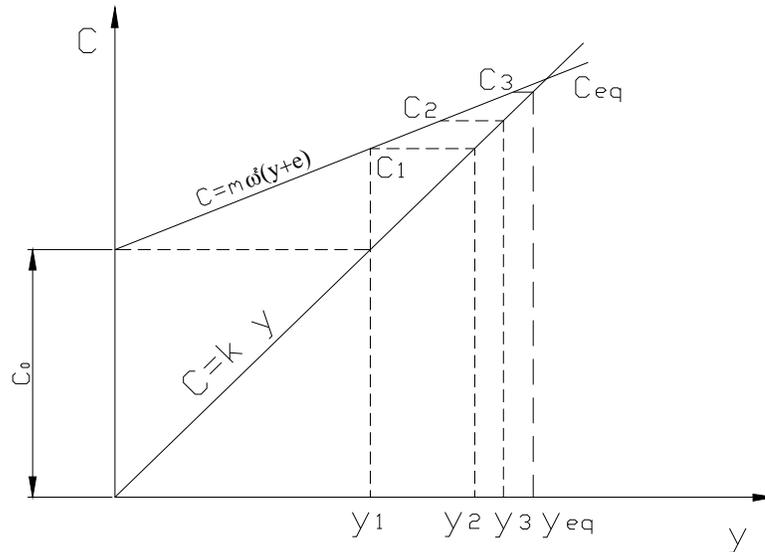


Fig. 3.2. Valor de la flecha de equilibrio en un árbol.

El proceso ocurrirá de la siguiente forma. La fuerza centrífuga inicial C_0 originará una fuerza centrífuga de magnitud:

$$C_1 = m \cdot \omega^2 (y_1 + e) \quad (3.5)$$

La fuerza $C_1 > C_0$ originará entonces una flecha y_2 y esta aumentará la fuerza centrífuga un valor:

$$C_2 = m \omega^2 (y_2 + e) \quad (3.6)$$

y así sucesivamente hasta que alcance la flecha de equilibrio y_{eq} , para lo cual se cumplirá que la fuerza centrífuga originada para esta flecha (Fig. 3.2)

$$C_{eq} = m \omega^2 (y_{eq} + e) \quad (3.7)$$

Será igual a la fuerza requerida para provocar una flecha de magnitud y_{eq}

$$C_{eq} = k \cdot y_{eq} \quad (3.8)$$

Igualando ambas expresiones y despejando $y_{equilibrio}$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



$$y_{eq} = \frac{e}{\frac{k}{m\omega^2} - 1}$$

(3.9)

En la medida que aumenta la velocidad angular ω ; crece la magnitud del pandeo para el cual se produce el equilibrio y la velocidad angular alcanza el valor $\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ resulta que $y \rightarrow \infty$, o sea que a una velocidad angular de esta magnitud el árbol se debe romper. Esta velocidad se conoce como velocidad crítica:

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.10)$$

Puesto que $\omega_{crit} = \frac{\pi n_{crit}}{30}$ en $\frac{rad}{s}$, entonces el número crítico de revoluciones por minuto del árbol será:

$$n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k_g}{G}} \quad (3.11)$$

Y como $g = 981 cm/s^2$ y $f = \frac{G}{k} - cm$, es el pandeo estático del árbol bajo la acción del peso propio G de la pieza colocada sobre el árbol. Se tiene aquí:

$$n_{critica} \cong 300 \sqrt{\frac{1}{f}} \quad r/min \quad (3.12)$$

Esta conclusión es válida incluso si se tiene en cuenta el pandeo del árbol por el peso propio de sistema. La aproximación del número de revoluciones del árbol al valor crítico se manifiesta con un incremento de la vibración transversal del árbol.

Como se aprecia este método de cálculo de la velocidad crítica es extremadamente simple pero ofrece dudas acerca de su exactitud.

La zona de las velocidades de giro

$$0,7n_{crit} \leq n \leq 1,3n_{crit}$$

no deben utilizarse pues la probabilidad de rotura del árbol es extremadamente alta.

A causa de las distintas resistencias que surgen durante las vibraciones (rozamiento interno, rozamiento en los cojinetes, influencia del medio exterior, etc) el incremento de las deformaciones en el árbol no es instantáneo y si se pasa rápidamente por esta

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



velocidad de giro del árbol resulta nuevamente estable, tal como se muestra en la (fig 3.3).

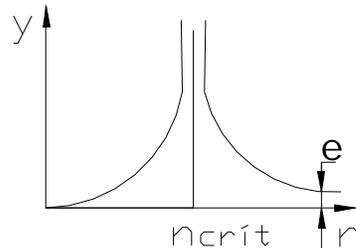


Fig. 3.3. Estabilización de giro del árbol para $n > n_{crit}$.

Los árboles que trabajan a velocidades de giro mayores que la crítica, usualmente $n \geq (2 \div 3)n_{crit}$ se llaman flexibles. O sea, si $\omega \rightarrow \infty$, $y \rightarrow e$.

El paso por la zona de velocidades críticas se debe hacer rápido para evitar un incremento peligroso de las deformaciones y en estos casos es aconsejable incluso el empleo de un sistema de amortiguaciones especiales de las oscilaciones.

De este modo el peligro de la resonancia en los árboles se puede eliminar por dos vías:

- Utilizando arboles rígidos par los cuales $n \ll n_{crit}$.
- Utilizando árboles flexibles finos con velocidad crítica baja, que se pandean ligeramente bajo la acción de la fuerza centrífuga y que adquieran de nuevo el equilibrio estático cuando $n > n_{crit}$.

A muy grandes velocidades de giro por ejemplo en las centrifugas con $n = 20000 - 40000 r/min$, el empleo de árboles flexibles es la única solución posible. Además su construcción se hace más barata y sencilla.

De la expresión se concluye también que en la medida que aumenta e , la inflexión del árbol aumenta y la zona de velocidades peligrosas del árbol se hace más amplia, de aquí que el balanceo dinámico del árbol junto con todas las piezas que van a estar colocadas sobre él, es un aspecto imprescindible en aquellos árboles de marcha rápida.

3.2 Método de cálculo propuesto por Birger para el cálculo de velocidad crítica en árboles de Turbo máquinas.

Examinaremos un árbol con una carga no uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud entre apoyos determinada por el peso propio del árbol y los discos colocados sobre él, tal como se muestra en la Fig. 3.4:

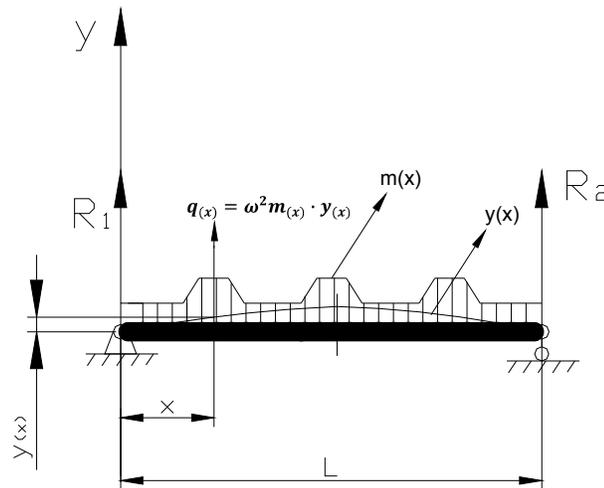


Fig. 3.4 Esquema de análisis del árbol.

En este caso:

$m(x)$ → es la masa de la unidad de longitud del árbol en la sección x .

Por lo que para este análisis $m(x)$ hay que calcularla como la suma de la masa del árbol y la del disco en el tramo correspondiente. Por ejemplo si en un tramo del árbol de longitud $\Delta l = 10\text{cm}$ se distribuye un disco de peso $W_d = 20\text{kg}$ y el peso propio del tramo del árbol es $W_a = 2\text{kg}$ entonces:

$$m(x) = \frac{W_a + W_d}{g \cdot \Delta l} = \frac{2 + 20}{9.81 \cdot 10} = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^2$$

La masa $m(x)$ se toma constante por tramos. La fuerza centrífuga en cada tramo será:

$$q(x) = m(x) \cdot \omega^2 y(x) \quad (3.13)$$

La fuerza de cortante transversal en la sección x .

$$Q(x_1) = R_1 + \int_0^x q(x) dx_1 \quad (3.14)$$

Donde x_1 es la variable de integración ($0 \leq x_1 \leq x$).

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Como la fuerza de cortante está relacionada con el momento flector a través de la relación:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad M_x = \int_0^x dM(x) \quad (3.15)$$

$$M_x = \int_0^x Q(x_2) dx_2 = R_{1x} + \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.16)$$

x_2 es una variable de integración.

Como para $x = l$, $M(x) = 0$. Se tiene que:

$$M(l) = R_1 \cdot l + \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdot dx_1 = 0 \quad (3.17)$$

De donde:

$$R_1 = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.18)$$

Introduciendo este valor de R_1 en la expresión de $M(x)$.

$$M(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.19)$$

Sustituyendo la expresión de $q(x_2) = \omega^2 m(x_2) \cdot y(x_2)$

$$M(x) = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) \cdot y(x_2) dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m(x_2) \cdot y(x_2) dx_2 \cdot dx_1 \right\} \quad (3.20)$$

Esta última expresión la escribiremos de la siguiente forma.

$$M(x) = \omega^2 \cdot A_y(x) \quad (3.21)$$

De donde:

$$A_y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) \cdot y(x_2) dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m(x_2) \cdot y(x_2) dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.22)$$

De la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (3.23)$$

Integrando en el tramo de **0** a **y**.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x \frac{M(x_1)}{EI(x_1)} dx_1 + y'_{(0)} \quad (3.24)$$

Integrando nuevamente

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EI(x_2)} dx_2 \cdot dx_1 + y'_{(0)} \cdot x + y_{(0)} \quad (3.25)$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Para el caso analizado $y_{(0)} = 0$ y de la condición que $x = l$, $y_{(l)} = 0$. Se tiene que:

$$\int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EI(x_2)} \cdot dx_2 \cdot dx_1 + y'_{(0)} \cdot l = 0 \quad (3.26)$$

Se obtiene que:

$$y'_{(0)} = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EI(x_2)} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.27)$$

Sustituyendo la ecuación (2.27) en la (2.25):

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EI(x_2)} dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EI(x_2)} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.28)$$

Si se toma en cuenta la ecuación (2.21), la ecuación (2.28) se puede escribir como sigue:

$$y(x) = \omega^2 \cdot K_y \quad y \quad \omega_{crit} = \sqrt{\frac{y(x)_{max}}{k_{y(x)_{max}}}} \quad (3.29)$$

Donde:

$$K_y = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{Ay(x_2)}{EI(x_2)} dx_2 \cdot dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{Ay(x_2)}{EI(x_2)} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad (3.30)$$

La ecuación (3.29) constituye la ecuación integral para la determinación de la velocidad crítica. La misma se resuelve por aproximaciones sucesivas. En la práctica generalmente no se requieren más de dos aproximaciones. La aproximación de partida se puede tomar como la de una función flecha que satisfaga en principio las condiciones en los apoyos. Para el caso analizado:

$$y_o(x) = \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (3.31)$$

O también

$$y_o(x) = c \cdot x \cdot (l - x) \quad \text{de donde: } c = \frac{y_{m\acute{a}x}}{x_{ym\acute{a}x}(l - x_{ym\acute{a}x})} \quad (3.32)$$

$$y_o(x) = \frac{4x \cdot (l-x)}{l^2}$$

Esta ecuación fue la que se utilizó definitivamente en el presente trabajo

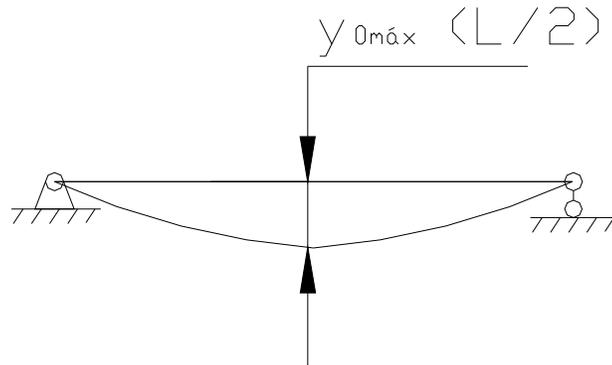


Fig. 3.5 Árbol con los dos apoyos en los extremos.

En el caso de dos apoyos en los extremos volados puede ser una función del tipo Fig.

3.6:

$$y_0(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \quad (3.33)$$

Donde si se toma:

$$y_0 \text{ máx} = 1 \quad \text{para } x = l.$$

$$c = \frac{y_{\text{máx}}}{(l - a_1)(l - a_2)} \quad (3.34)$$

El resultado final no depende de la aproximación inicial elegida.

$$\text{La siguiente aproximación para } y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 \cdot K_{y(0)} \quad (2.35)$$

La comprobación se realiza en aquella sección donde la flecha es máxima. En el caso

analizado se puede tomar $x = \frac{l}{2}$ de donde:

$$\omega_1^2 = \frac{y_{(0)}}{K_{y(0)}} \Big|_{x=\frac{l}{2}} \quad \text{y} \quad \omega_2^2 = \frac{y_{(1)}}{K_{y(1)}} \Big|_{x=\frac{l}{2}}$$

De esta forma se determina la velocidad crítica en los árboles de turbo máquinas. Como se aprecia este método de cálculo de la velocidad crítica es sofisticado pero parte de una función flecha muy simple en la cual sólo se considera que la misma satisfaga las condiciones de apoyo. Birger se ocupa de aclarar que la función flecha de partida, si cumple esta condición, los resultados finales después de las iteraciones correspondientes son los mismos. En el presente trabajo se utilizará una función de partida de la flecha real para comprobar si las iteraciones convergen rápidamente.

3.3 Aplicación del método de cálculo de velocidad crítica en turbo máquinas propuesto por Birger al árbol de un Turbocompresor.

Se desea determinar la velocidad crítica del árbol de un turbocompresor de cuatro secciones con 10 etapas. La potencia es de $N = 15300kN$ a $n = 3000 \frac{r}{min}$.

El caudal y la presión de descarga:

$$Q = 160000 \text{ m}^3/h \quad \text{y} \quad p = 10kg/cm^2.$$

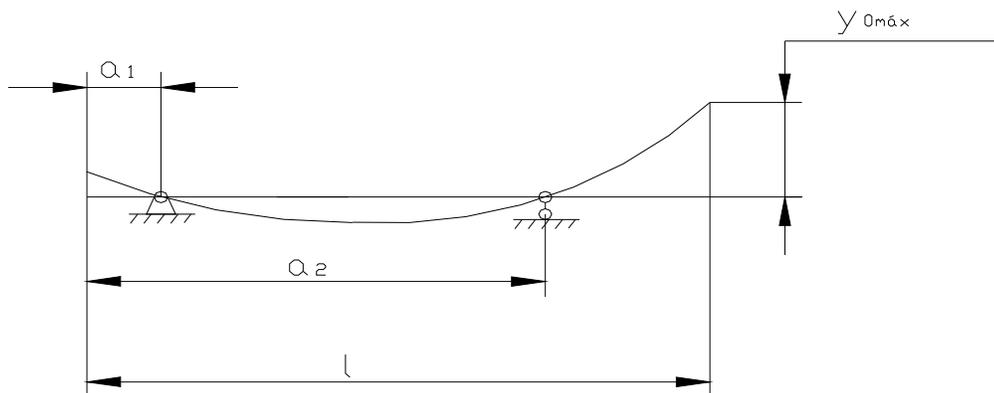


Fig. 3.6 Árbol con dos apoyos y extremos en voladizo.

La condición de partida de la flecha es la mostrada en la Fig. 3.6.

El árbol es necesario dividirlo en partes en las cuales se considera la carga uniformemente distribuida y la rigidez constante. Se dividió en 16 secciones para el cálculo según el diámetro y los elementos colocados sobre él. En la columna **0** aparecen numeradas estas partes. En la columna **1** la cota x_i de la sección de cálculo con relación al apoyo izquierdo. En la columna **2**, la magnitud $\frac{1}{2}\Delta x_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. En la columna **3** la masa del tramo. O sea, digamos para la sección **0**.

$$m_i = \frac{\gamma_{ac} \cdot \frac{\pi}{4} (D_e^2 - d_i^2) \Delta x}{y \cdot \Delta x \cdot 10^3} = \frac{7,8 \frac{\pi}{4} (26^2 - 6^2)}{9,81 \cdot 10^3}$$

$$m_i = 0.0040 \frac{kg - s^2}{cm^2}$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



En la columna **4** se sitúa la rigidez del árbol en la sección de acuerdo con el diámetro de la sección, o sea, el producto de $E \cdot I_{(x)_i}$, donde E es el módulo de elasticidad del material del árbol en kg/cm^2 e $I_x = 0.05d_i^4(1 - C_i^4)$ en cm^4 .

En la columna **5** la flecha en la sección **i** de acuerdo con la suposición inicial elegida.

En el caso analizado:

$$y_{0(x)} = \frac{4x(l-x)}{l^2} \text{ donde } l = 430cm$$

$$\text{Por ejemplo, para } x = 30cm, \quad y_{0(30)} = \frac{4 \cdot 30(430-30)}{430^2} = 0,26cm.$$

En la columna **6** el producto de la columna **3** por la **5**.

$$\text{En la } \mathbf{7} \text{ el producto de } [6_i + 6_{i+1}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i = 7_i$$

En la **8** es la solución numérica de la integral por la regla de los trapecios. Para $i = 0$, la integral $8_i = 0$ y para $i \geq 1$ en adelante $[7_{(i-1)} + 8_{(i-1)}] = 8_i$.

$$\text{En la } \mathbf{9} \quad [8_{(i)} + 8_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i = 9_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{10} \text{ para } i = 0, \quad 10_i = 0 \text{ y para } i \geq 1; \quad [9_{(i-1)} + 10_{(i-1)}] = 10_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{11}, \quad \frac{x_i}{l} \cdot 10_{(15)} = 11_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{12}, \quad [10_i - 11_i] = 12_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{13}, \quad \frac{12_i}{4i} = 13_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{14}, \quad [13_{i_1} + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i = 14_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{15}, \text{ para } i = 0, \quad 15_i = 0 \text{ y para } i \geq 1, \quad 15_i = [14_{(i-1)} + 15_{(i-1)}]$$

$$\text{En la } \mathbf{16}, \quad [15_{(i)} + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i = 16_i.$$

$$\text{En la } \mathbf{17}, \text{ para } i = 0, \quad 17_i = 0 \text{ y para } i \geq 1, \quad 17_i = [16_{(i-1)} + 17_{(i-1)}].$$

$$\text{En la } \mathbf{18}, \quad 18_i = \frac{x_i}{l} \cdot 17_{(15)}.$$

$$\text{En la } \mathbf{19}, \quad K_{y(0)} = 18_i + 17_i.$$

La primera aproximación de la velocidad crítica:

$$\omega_{1crit} = \sqrt{\frac{y_{0(x)}}{K_{y(0)}}}$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



$$\omega_{1crit} = \sqrt{\frac{1,00}{29,33 \cdot 10^{-6}}} \approx 184,6 \text{ rad/s}$$

$$n = \frac{30 \cdot \omega_{1crit}}{\pi} = \frac{30 \cdot 184,6}{\pi} = 1763,3 \text{ r/min}$$

Ahora se halla la columna **20**

$$y_1(x) = \frac{K_{y(0)i}}{K_{y(0)MAX}}$$

y se repite todo el proceso con los valores de $y_1(x)$ en lugar de $y_0(x)$. El resultado obtenido en la segunda aproximación es:

$$\omega_{2crit} = 187,1 \text{ rad/s}$$

$$\% \text{ dif} = \frac{187,1 - 184,6}{184,6} \cdot 100 = 1,35\%$$

El proceso de solución numérico por método iterativo se desarrolló en la Tabla 3.1 y en la Fig. 3.7 se muestra el árbol del turbocompresor de cuatro secciones:

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.

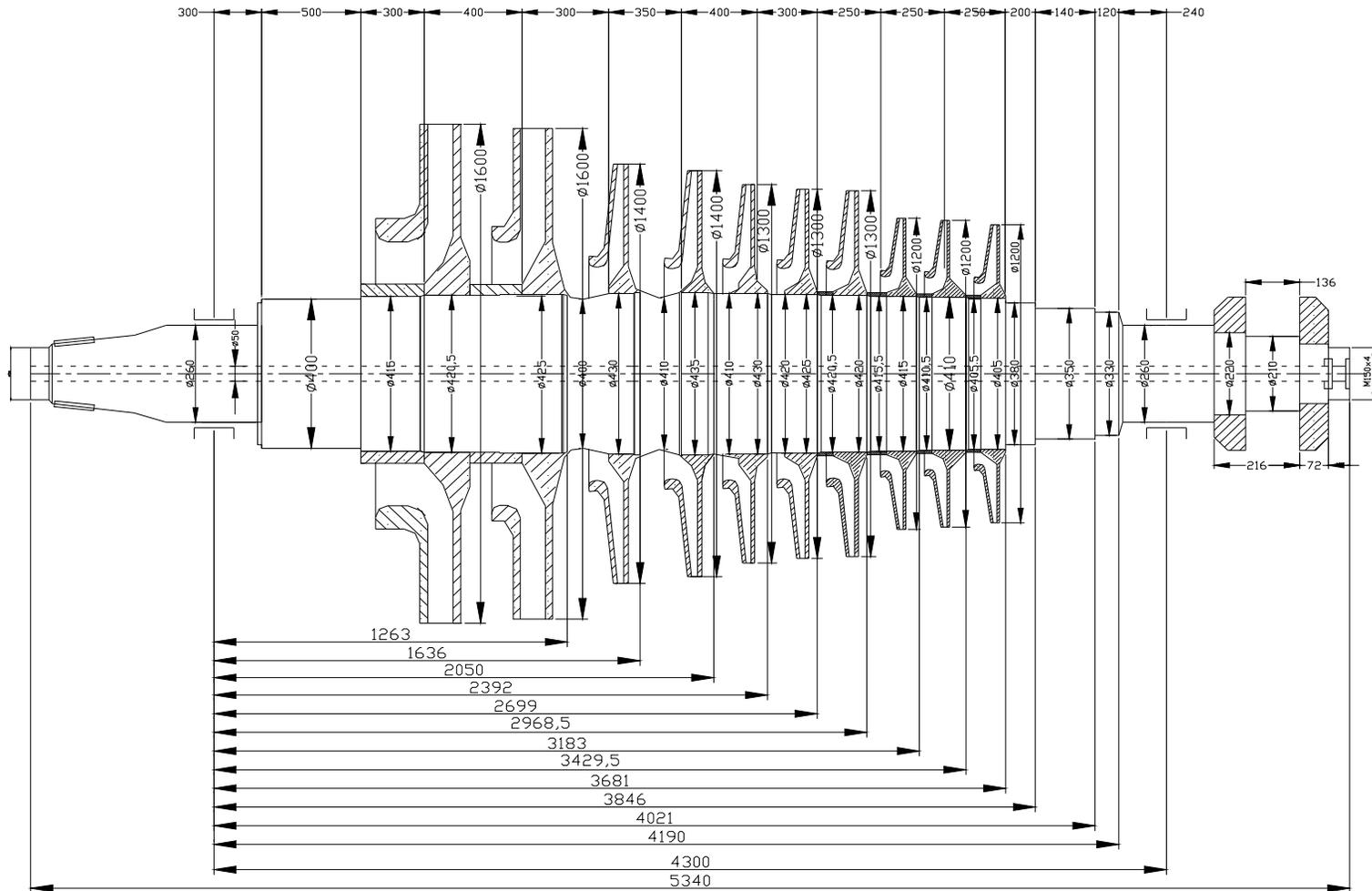


Fig. 3.7 Compresor centrífugo de cuatro secciones con diez etapa

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.1. Cálculo de velocidad crítica en un árbol de un Turbocompresor de cuatro secciones mediante método numérico iterativo.

sección i	x_i -cm	$\frac{1}{2} \Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$	$m_{(x)_i}$ - kg	$E \cdot I_{(x)_i} \cdot 10^{-12}$ kg	$\frac{\gamma_{0(x)}}{\gamma_{m\acute{a}x}}$	$m_{(x)_i} \gamma_{0(x)}$	$[6_i + 6_{(i+1)}]$	$\int_0^x m_{(x)_1} \gamma_{0(x)}$	$[8_i + 8_{(i+1)}]$	$\int_0^x \int_0^{x_1} m_{(x_2)}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	15	0,004	0,045	0	0	0,038	0	0,57	0
1	30	25	0,00976	0,251	0,26	0,00253	0,506	0,038	14,56	0,57
2	80	15	0,0293	0,283	0,606	0,0177	0,584	0,5443	25,08	15,13
3	110	20	0,0279	0,313	0,761	0,0212	0,897	1,128	63,06	40,21
4	150	15	0,026	0,293	0,908	0,0236	0,707	2,025	71,35	103,3
5	180	17,5	0,0241	0,293	0,973	0,0235	0,845	2,732	110,4	174,6
6	215	20	0,0248	0,305	1	0,0248	0,958	3,577	162,2	285
7	255	15	0,0239	0,313	0,965	0,0231	0,668	4,535	146	447,2
8	285	12,5	0,0239	0,306	0,894	0,0214	0,521	5,202	136,6	593,2
9	310	12,5	0,0252	0,297	0,805	0,0203	0,447	5,724	148,7	729,8
10	335	12,5	0,0224	0,278	0,688	0,0154	0,346	6,171	158,6	878,5
11	360	10	0,0224	0,264	0,545	0,0122	0,158	6,516	131,9	1037
12	380	7	0,0088	0,204	0,411	0,00361	0,0412	6,674	93,72	1169
13	394	6	0,0074	0,147	0,307	0,00228	0,022	6,715	80,71	1263
14	406	12	0,0066	0,116	0,211	0,00138	0,0167	6,737	162	1343
15	430	-	0,004	0,045	0	0	-	6,754	-	1505

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



$\frac{x}{l} \int_0^x \int_0^x m_{(x)} \gamma_0 dx$	$A_{y(x)}$	$\frac{A_{y(x)}}{E \cdot I(x)} \cdot 10^{-12}$	$[13_i + 13_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I} dx \cdot 10^6$	$[15_i + 15_{(i+1)}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x_i \cdot 10^6$	$\int_0^x \int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I} dx_2 dx_1$	$\frac{x}{l} \int_0^x \int_0^x \frac{A_y}{E \cdot I} dx_2 dx_1$	$K_{y(0)} \cdot 10^6$	$\gamma_{1(x)}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	-0,006235	0	-0,09352	0	0	0	0
105	-104,4	-415,7	-0,03379	-0,00623	-1,156	-0,0935	6,58	6,48	0,221
279,9	-264,8	-936,1	-0,03054	-0,04002	-1,659	-1,249	17,54	16,29	0,555
384,8	-344,6	-1100	-0,05076	-0,07056	-3,837	-2,908	24,11	21,2	0,723
524,8	-421,5	-1438	-0,04486	-0,1213	-4,312	-6,745	32,88	26,13	0,891
629,8	-455,2	-1553	-0,05402	-0,1662	-6,762	-11,06	39,46	28,4	0,9683
752,3	-467,3	-1534	-0,05916	-0,2202	-9,992	-17,82	47,15	29,33	1
892,3	-445,1	-1424	-0,04117	-0,2794	-8,998	-27,82	55,91	28,1	0,958
997,2	-404	-1321	-0,03169	-0,3205	-8,409	-36,81	62,48	25,67	0,875
1084	-354,2	-1214	-0,02839	-0,3522	-9,16	-45,22	67,96	22,74	0,775
1172	-293,5	-1057	-0,02375	-0,3806	-9,811	-54,38	73,45	19,07	0,65
1260	-223	-843,2	-0,01631	-0,4043	-8,25	-64,19	78,93	14,74	0,502
1330	-161	-787,6	-0,01098	-0,4207	-5,966	-72,44	83,31	10,87	0,37
1378	-115	-781,8	-0,008667	-0,4316	-5,231	-78,4	86,38	7,98	0,272
1420	-77	-662,7	-0,007952	-0,4403	-10,66	-83,64	89,01	5,37	0,183
1505	0	0	-	-0,4483	-	-94,3	94,3	0	0

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



3.4. Cálculo de la velocidad crítica en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.

Se necesita calcular la velocidad crítica del árbol original del ventilador de gases calientes, de simple etapa de la Empresa Cementos Cienfuegos S.A. para tomarla como referencia. Las secciones de cálculo y las dimensiones básicas son las que se señalan en la Fig. 3.8. El peso del impelente aparece en el Epígrafe 1.3 donde se brindan los datos del ventilador. El esquema completo del árbol original aparece en los anexos.

Para el acero 40XHMA:

$$E_{ac} = 2,04 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{Según (Pisarenko, 1989)}$$

$$\gamma_{ac} = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$$

$$\text{Peso del Rotor: } P_{rotor} = 9700 \text{ kg}$$

Tabla. 3.2. Diámetro, Peso del árbol, Peso del rodete para cada tramo.

Øárbol (cm)	Wa (kgf)	Wr (kgf)
15	10,19598987	0
15,6	11,10300293	0
21	14,95411848	0
26	50,01352673	0
34,75	215,9072142	0
43,5	1522,469369	0
53	44,16227703	0
58	52,88782482	9700
53	2480,880857	0
43,5	308,577125	0
34,75	130,66109	0
26	22,92286642	0
21	23,6546965	0
15,6	9,977698582	0
14	0	0

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.

Tabla. 3.3. Momento de inercia del árbol para cada tramo.

x(cm ⁴)
2531,25
2961,20448
9724,05
22848,8
72910,35957
179030,5031
394524,05
565824,8
394524,05
179030,5031
72910,35957
22848,8
9724,05
2961,20448
1920,8

Tabla. 3.4. Distancia del árbol desde el centro de los cojinetes, peso del Rotor, peso de la Brida.

L (cm)	Peso del Rotor (kg)	Peso de la Brida
404.95	9700	11.1281947

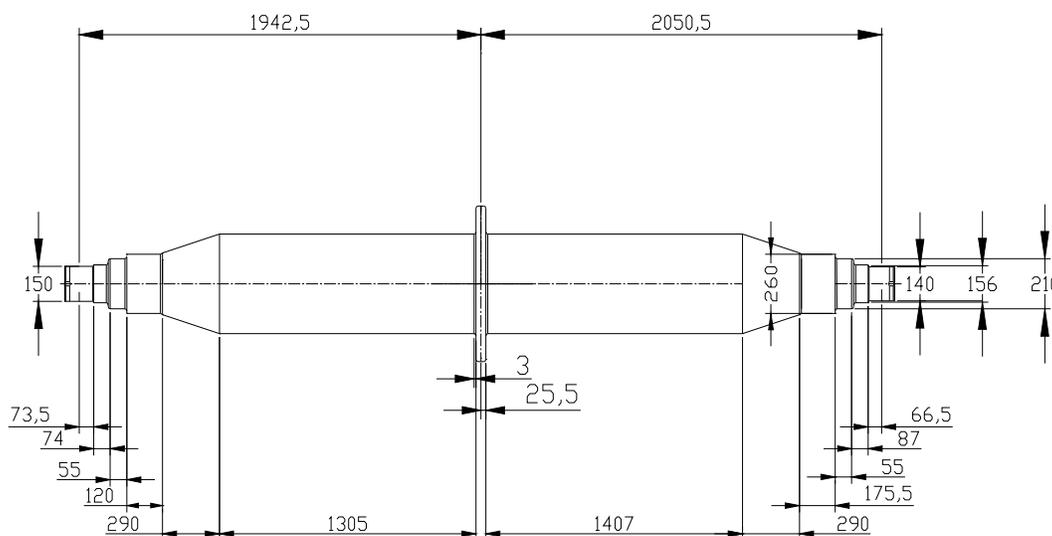


Fig. 3.8. Secciones de cálculo y las dimensiones básicas del árbol original.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Columna 1

x_i - Cota a partir del apoyo izquierdo en (cm).

Columna 2

$$\frac{1}{2} \Delta x_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad \text{en (cm).}$$

Columna 3

Cálculo de la masa en las distintas secciones del árbol:

$$m_x = \frac{W_{rotor} + W_{árbol}}{g \cdot \Delta l} \quad \left[\frac{Kg - s^2}{cm^2} \right]$$

$$W_{rotor} = 9700 \quad [Kg]$$

$$W_{árbol} = \gamma_{ac} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta l_i \quad [Kg]$$

Donde:

$$\gamma_{ac} = 7.85 \cdot 10^{-3} \quad [Kg / cm^3]$$

$$\Delta l_i = x_{i+1} - x_i \quad [cm]$$

$$g = 981 \quad [cm / s^2]$$

Columna 4

Cálculo de la rigidez de cada parte del árbol:

$$Rigidez = EI_{x_i}$$

$$E_{ac} = 2,04 \cdot 10^6 \quad \left[\frac{kgf}{cm^2} \right]$$

$$I_{x_i} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0.05d^4 \quad [cm^4]$$

$$EI_x = 0.1 \cdot 10^6 \cdot d^4 \quad \left[\frac{kgf}{cm^2} \right]$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Columna 5

Cálculo de la flecha:

$$\frac{y_{o_x}}{y_{máx}} = \frac{4 \cdot x \cdot (L - x)}{L^2} \quad L = \text{longitud total del árbol.}$$

$$\text{Para } i = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Para } i = 15 \Rightarrow y = 0$$

En el resto de las columnas de la Tabla. 3.6 se desarrolla la metodología antes expuesta en el epígrafe 3.1.3 para la solución de las integrales por método numérico iterativo

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.6. Primera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0,0000	0	0	0,000760088	0,0000	0,0028	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	16,3697	0,1352281	0,00020683	0,002268173	0,0008	0,0120	0,0028
14,75	2,75	0,0028	0,0198	24,3329	0,20101113	0,00055712	0,003835089	0,0030	0,0219	0,0148
20,25	6	0,0042	0,0466	33,9632	0,28056587	0,00119199	0,021002383	0,0069	0,1741	0,0367
32,25	14,5	0,0076	0,1487	52,6642	0,43505256	0,00330173	0,151734631	0,0279	2,6321	0,2107
61,25	65,25	0,0119	0,3652	104,1998	0,86078189	0,01023675	1,159548736	0,1796	87,5591	2,8428
191,75	1,275	0,0177	0,8048	120,7783	0,99773487	0,01761398	4,994176678	1,3391	9,4141	90,4019
194,3	1,275	3,9032	1,1543	121,0525	1	3,90318643	3,925679842	6,3333	19,4136	99,8160
196,85	71,625	0,0177	0,8048	120,9697	0,999316	0,01764189	0,770368623	10,2590	800,2379	119,2296
340,1	13,225	0,0119	0,3652	106,9738	0,88369757	0,01050927	0,055085981	11,0294	157,6214	919,4675
366,55	8,775	0,0076	0,1487	53,7633	0,44413209	0,00337064	0,014204216	11,0845	108,4752	1077,0889
384,1	2,75	0,0042	0,0466	35,1772	0,29059458	0,0012346	0,002844909	11,0987	41,6278	1185,5641
389,6	4,35	0,0028	0,0198	25,5754	0,21127527	0,00058557	0,001503919	11,1015	59,3996	1227,1919
398,3	3,325	0,0015	0,0060	16,7091	0,13803185	0,00021111	0,000211115	11,1030	48,0212	1286,5915
404,95	0	0,0014	0,0039	0,0000	0	0	0	11,1032	11,1032	1334,6128

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0,0000	-0,0147	0,0000	-0,0542	0,0000	0,0000	0	0	0
24,22	-24,22	-4009,5217	-0,0239	-0,0147	-0,1975	-0,0542	1,2867	1,23250703	0,08387362	0,08368378
48,61	-48,60	-2449,8341	-0,0107	-0,0386	-0,2418	-0,2516	2,5821	2,33045041	0,15859001	0,15823106
66,74	-66,70	-1431,0233	-0,0129	-0,0493	-0,6689	-0,4935	3,5449	3,05141648	0,20765264	0,20718264
106,29	-106,08	-713,1852	-0,0182	-0,0622	-2,0675	-1,1623	5,6455	4,4832077	0,30508779	0,30439725
201,86	-199,02	-544,9332	-0,0795	-0,0804	-15,6791	-3,2298	10,7222	7,49230429	0,50986051	0,50870649
631,96	-541,56	-672,8853	-0,0015	-0,1599	-0,4095	-18,9089	33,5669	14,6579633	0,99749241	0,99523468
640,36	-540,55	-468,2975	-0,0013	-0,1613	-0,4131	-19,3185	34,0133	14,6948119	1	0,9977366
648,77	-529,54	-657,9512	-0,1102	-0,1626	-31,1898	-19,7315	34,4597	14,7281476	1,00226853	1
1120,88	-201,42	-551,4891	-0,0189	-0,2728	-7,4667	-50,9213	59,5364	8,61508457	0,58626709	0,58494013
1208,06	-130,97	-880,5281	-0,0228	-0,2918	-5,3210	-58,3880	64,1666	5,7785842	0,39323975	0,39234969
1265,90	-80,33	-1723,4427	-0,0126	-0,3146	-1,7651	-63,7090	67,2388	3,52982856	0,24020917	0,23966548
1284,02	-56,83	-2864,8967	-0,0313	-0,3272	-2,9829	-65,4741	68,2016	2,72755393	0,18561339	0,18519328
1312,70	-26,10	-4321,3266	-0,0144	-0,3585	-2,4318	-68,4570	69,7246	1,26763202	0,08626392	0,08606867
1334,61	0,00	0,0000	0,0000	-0,3729	0,0000	-70,8887	70,8887	0	0	0

Velocidad crítica.

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{y_{0max}}{K_{ymax}}} \quad [rad / s] \qquad n_{crit} = \frac{30 \cdot \omega_{crit}}{\pi} \quad [r / min]$$

Donde:

y_{0max} \Rightarrow Flecha máxima

K_{ymax} \Rightarrow Valor de K_y para la flecha máxima

Para esta primera iteración:

$$\omega_{crit} = 260,481783 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2\,487,42 \text{ (r/min)}$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.7. Segunda Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0	0,0000	0,0005	0,0000	0,0017	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	0,08368848	0,0001	0,0018	0,0005	0,0087	0,0017
14,75	2,75	0,0028	0,0198	0,15823917	0,0004	0,0029	0,0022	0,0162	0,0104
20,25	6	0,0042	0,0466	0,2071924	0,0009	0,0147	0,0051	0,1240	0,0266
32,25	14,5	0,0076	0,1487	0,30440932	0,0023	0,0900	0,0198	1,6127	0,1506
61,25	65,25	0,0119	0,3652	0,50872007	0,0060	1,1525	0,1099	82,4775	1,7634
191,75	1,275	0,0177	0,8048	0,99523552	0,0176	6,2644	1,2623	10,8590	84,2408
194,3	1,275	4,9106	1,1543	0,99773701	4,8995	4,9220	7,5268	23,3990	95,0998
196,85	71,625	0,0177	0,8048	1	0,0177	0,5159	12,4488	941,0433	118,4987
340,1	13,225	0,0119	0,3652	0,58493376	0,0070	0,0463	12,9647	185,0352	1059,5421
366,55	8,775	0,0076	0,1487	0,39234549	0,0030	0,0119	13,0110	127,2871	1244,5773
384,1	2,75	0,0042	0,0466	0,23966302	0,0010	0,0024	13,0229	48,8426	1371,8644
389,6	4,35	0,0028	0,0198	0,18519142	0,0005	0,0010	13,0253	69,6902	1420,7071
398,3	3,325	0,0014	0,0060	0,08606783	0,0001	0,0001	13,0264	56,3395	1490,3972
404,95	0	0,0015	0,0039	0	0,0000	0,0000	13,0265	13,0265	1546,7367

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0,0000	-0,0171	0,0000	-0,0628	0,0000	0,0000	0	0	0
28,07	-28,07	-4647,0466	-0,0277	-0,0171	-0,2289	-0,0628	1,4433	1,38051486	0,08837604	0,08828299
56,34	-56,33	-2839,5490	-0,0124	-0,0448	-0,2803	-0,2916	2,8964	2,60474128	0,166747	0,16657144
77,35	-77,32	-1658,8115	-0,0149	-0,0571	-0,7753	-0,5719	3,9764	3,40444432	0,21794137	0,21771191
123,18	-123,03	-827,1684	-0,0212	-0,0721	-2,3975	-1,3472	6,3327	4,98553275	0,31915747	0,31882145
233,95	-232,19	-635,7378	-0,0940	-0,0933	-18,3081	-3,7447	12,0273	8,28264016	0,53022748	0,52966924
732,40	-648,16	-805,3420	-0,0017	-0,1873	-0,4799	-22,0528	37,6528	15,6000439	0,99866368	0,99761227
742,14	-647,04	-560,5591	-0,0017	-0,1890	-0,4843	-22,5326	38,1535	15,6209184	1	0,99894717
751,88	-633,38	-786,9802	-0,1033	-0,1908	-34,7288	-23,0169	38,6543	15,6373818	1,00105394	1
1299,04	-239,50	-655,7521	-0,0225	-0,2941	-8,0765	-57,7457	66,7834	9,03776007	0,57856778	0,57795865
1400,07	-155,49	-1045,3864	-0,0271	-0,3166	-5,7942	-65,8222	71,9773	6,1550463	0,39402589	0,39361105
1467,10	-95,23	-2043,1457	-0,0150	-0,3437	-1,9315	-71,6164	75,4235	3,80708443	0,24371707	0,24346048
1488,11	-67,40	-3397,6415	-0,0371	-0,3587	-3,2816	-73,5479	76,5035	2,95557983	0,18920653	0,18900733
1521,34	-30,94	-5121,6863	-0,0170	-0,3957	-2,6882	-76,8295	78,2118	1,38236197	0,08849428	0,08840111
1546,74	0,00	0,0000	0,0000	-0,4128	0,0000	-79,5176	79,5176	0	0	0

Para la segunda iteración:

$$\omega_{crít} = 252,882036 \quad (\text{rad/s})$$

$$n_{crít} = 2414,85 \quad (\text{r/min})$$

Porcentaje de diferencia:

2,92 %

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.8. Tercera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.

X_i	$1/2 \Delta L$	M_x	$EI_x (*10^{-12})$	$y_0/y_{m\acute{a}x}$	$M_x*y_0/y_{m\acute{a}x}$	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0	0	0,0005	0,0000	0,0018	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	0,08828298	0,00013503	0,0018	0,0005	0,0092	0,0018
14,75	2,75	0,0028	0,0198	0,16657142	0,00046167	0,0030	0,0023	0,0170	0,0110
20,25	6	0,0042	0,0466	0,21771188	0,00092495	0,0154	0,0053	0,1301	0,0280
32,25	14,5	0,0076	0,1487	0,31882142	0,00241962	0,0938	0,0208	1,6817	0,1581
61,25	65,25	0,0119	0,3652	0,5296692	0,00629903	1,1555	0,1145	82,9829	1,8397
191,75	1,275	0,0177	0,8048	0,99761226	0,01761181	6,2720	1,2700	10,8861	84,8226
194,3	1,275	4,9106	1,1543	0,99894717	4,90544053	4,9279	7,5421	23,4413	95,7088
196,85	71,625	0,0177	0,8048	1	0,01765397	0,5100	12,4700	942,1600	119,1501
340,1	13,225	0,0119	0,3652	0,57795867	0,00687331	0,0464	12,9800	185,2534	1061,3101
366,55	8,775	0,0076	0,1487	0,39361107	0,00298722	0,0121	13,0263	127,4384	1246,5635
384,1	2,75	0,0042	0,0466	0,24346049	0,00103435	0,0025	13,0384	48,9008	1374,0019
389,6	4,35	0,0028	0,0198	0,18900734	0,00052385	0,0011	13,0409	69,7734	1422,9027
398,3	3,325	0,0014	0,0060	0,08840112	0,00012501	0,0001	13,0420	56,4069	1492,6761
404,95	0	0,0015	0,0039	0	0	0,0000	13,0421	13,0421	1549,0829

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0	-0,0171	0,0000	-0,0629	0,0000	0,0000	0	0	0
28,12	-28,11	-4654,08023	-0,0277	-0,0171	-0,2292	-0,0629	1,4450	1,38210499	0,08839612	0,08830318
56,42	-56,41	-2843,82876	-0,0124	-0,0448	-0,2807	-0,2921	2,8998	2,60768182	0,16678107	0,16660571
77,46	-77,44	-1661,29838	-0,0149	-0,0572	-0,7764	-0,5728	3,9810	3,40822227	0,21798172	0,21775252
123,37	-123,21	-828,37449	-0,0212	-0,0722	-2,4010	-1,3492	6,3401	4,99089316	0,31920556	0,31886993
234,30	-232,46	-636,500333	-0,0941	-0,0934	-18,3320	-3,7503	12,0413	8,29108967	0,53027821	0,52972065
733,51	-648,69	-805,999427	-0,0017	-0,1875	-0,4804	-22,0823	37,6968	15,6144864	0,9986651	0,99761505
743,27	-647,56	-561,006737	-0,0017	-0,1893	-0,4849	-22,5627	38,1981	15,6353581	1	0,99894855
753,02	-633,87	-787,587955	-0,1034	-0,1910	-34,7680	-23,0476	38,6994	15,6518152	1,00105256	1
1301,01	-239,70	-656,306358	-0,0225	-0,2944	-8,0852	-57,8156	66,8614	9,04578008	0,5785464	0,57793808
1402,19	-155,63	-1046,31094	-0,0271	-0,3169	-5,8003	-65,9008	72,0613	6,16052282	0,39401226	0,39359798
1469,32	-95,32	-2045,03227	-0,0150	-0,3441	-1,9335	-71,7010	75,5115	3,81048524	0,2437095	0,24345325
1490,36	-67,46	-3400,7464	-0,0371	-0,3590	-3,2850	-73,6346	76,5928	2,95822454	0,18920095	0,18900201
1523,64	-30,97	-5126,45016	-0,0170	-0,3961	-2,6909	-76,9195	78,3031	1,38360208	0,08849187	0,08839883
1549,08	0,00	0	0,0000	-0,4132	0,0000	-79,6105	79,6105	0	0	0

Para la tercera iteración:

Tabla. 3.9. Rangos de velocidades críticas en el árbol original del Ventilador de Gases Calientes.

$$\omega_{crit} = 252,765412 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2413,73 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia

0,046 %

Zonas de Trabajo críticas		
0,7n	n	1,3n
1689,61232		3137,851445
1,4n	n	2,6n
3379,22463		6275,702891
2,1n	n	3,9n
5068,83695		9413,554336

En el árbol original su velocidad nominal se aleja de la velocidad crítica pues según datos de chapa el ventilador gira a una velocidad máxima $V_{m\acute{a}x} = 950 \text{ r/mín}$, su velocidad crítica cae en el rango de $1,3n \geq n \geq 0,7n$.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



3.5 Cálculo de la velocidad crítica en el árbol rediseñado para el Ventilador de Gases Calientes, que fue fabricado en México.

Se calculó la velocidad crítica del árbol que se montó en el ventilador de gases calientes de la Empresa Cementos Cienfuegos S. A, rediseñado que fue importado desde México. Las dimensiones se señalan en la Fig. 2.9.

Tabla. 3.10 Diámetro, Peso del árbol y Peso del rodete para cada tramo.

Øárbol (cm)	Wa (kgf)	Wr (kgf)
15	11.37511795	0
15.6	11.25304351	0
19	12.24135322	0
19.6	8.123923046	0
21.593	39.70183983	0
31.7565	187.5423418	0
41.923	1263.420432	0
58	2667.081155	9700
41.923	328.5547609	0
31.7565	84.46648918	0
21.593	30.47132736	0
19.6	13.02669876	0
19	18.91845498	0
15.6	12.45336815	0
15	0	0

Tabla. 3.11 Momento de inercia del árbol para cada tramo.

x(cm ⁴)
2531.25
2961.20448
6516.05
7378.94528
10869.80976
50851.12075
154446.9786
565824.8
154446.9786
50851.12075

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.

10869.80976
7378.94528
6516.05
2961.20448
2531.25

Tabla. 3.12. Distancia del árbol desde el centro de los cojinetes, peso del Rotor, peso de la Brida.

L (cm)	Peso del Rotor (kg)	Peso de la Brida (kg)
390.6	9700	8.919340961

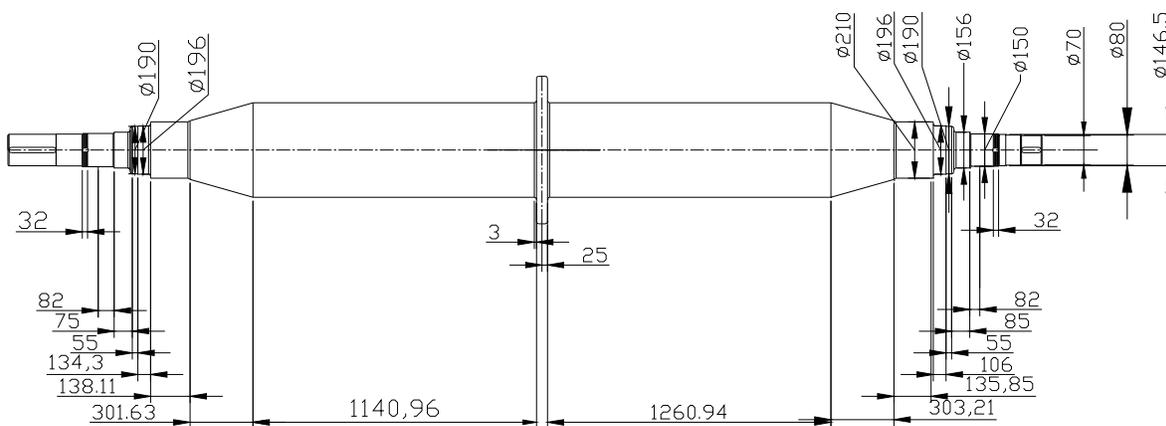


Fig. 2.9 Secciones de cálculo y las dimensiones básicas del árbol rediseñado importado desde México.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.13. Primera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol rediseñado del Ventilador de Gases Calientes fabricado en México.

X_i	$1/2 \Delta L$	M_x	$EI_x (*10^{-12})$	γ_0	$\gamma_0/\gamma_{m\acute{a}x}$	$M_x*\gamma_0/\gamma_{m\acute{a}x}$	7	8	9	10
0	4,1	0,0014	0,0052	0,0000	0	0,0000	0,0011	0,0000	0,0045	0,0000
8,2	3,75	0,0015	0,0060	28,2965	0,1750774	0,0003	0,0025	0,0011	0,0146	0,0045
15,7	2,75	0,0023	0,0133	42,2184	0,26121562	0,0006	0,0031	0,0036	0,0219	0,0191
21,2	1,715	0,0024	0,0151	60,4339	0,3739194	0,0009	0,0035	0,0067	0,0181	0,0410
24,63	6,9055	0,0029	0,0222	81,9232	0,50687898	0,0015	0,0298	0,0067	0,2582	0,0591
38,441	15,0815	0,0063	0,1037	104,4295	0,64613099	0,0041	0,1570	0,0364	2,9532	0,3173
68,604	58,298	0,0110	0,3151	148,3195	0,91768921	0,0101	5,7295	0,1934	345,4839	3,2704
185,2	64,297	0,0981	1,1543	161,6228	1	0,0981	0,7488	5,9229	434,8919	348,7543
313,794	15,1605	0,0110	0,3151	148,0856	0,91624202	0,0101	0,0698	6,6717	108,8764	783,6462
344,115	6,7925	0,0063	0,1037	100,4327	0,62140181	0,0039	0,0135	6,7415	52,6248	892,5226
357,7	5,3	0,0029	0,0222	77,4426	0,47915641	0,0014	0,0060	6,7550	42,5884	945,1473
368,3	2,75	0,0024	0,0151	58,5395	0,36219828	0,0009	0,0019	6,7610	25,3591	987,7357
373,8	4,25	0,0014	0,0133	43,6036	0,26978619	0,0004	0,0016	6,7629	35,5121	1013,0949
382,3	4,15	0,0015	0,0060	29,0845	0,17995295	0,0003	0,0003	6,7645	34,8383	1048,6069
390,6	0	0,0023	0,0052	0,0000	0	0,0000	0,0000	6,7648	6,7648	1083,4453

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20
0,00	0,00	0,00	-0,0154	0,0000	-0,0633	0,0000	0,0000	0	0
22,75	-22,74	-3764,47	-0,0264	-0,0154	-0,2147	-0,0633	1,2434	1,1801515	0,1551365
43,55	-43,53	-3274,69	-0,0197	-0,0418	-0,2844	-0,2780	2,5671	2,28904284	0,30090551
58,80	-58,76	-3903,76	-0,0120	-0,0616	-0,2317	-0,5624	3,4664	2,90397612	0,3817414
68,32	-68,26	-3078,30	-0,0283	-0,0735	-1,2114	-0,7941	4,0272	3,23307968	0,42500362
106,63	-106,31	-1024,81	-0,0244	-0,1019	-3,4411	-2,0055	6,2854	4,27987616	0,56260997
190,29	-187,02	-593,59	-0,0429	-0,1263	-17,2278	-5,4466	11,2173	5,7706343	0,75857718
513,71	-164,95	-142,91	-0,0269	-0,1692	-23,4903	-22,6744	30,2816	7,6071815	1
870,40	-86,75	-275,35	-0,0132	-0,1961	-6,1471	-46,1648	51,3077	5,14294195	0,67606405
954,51	-61,98	-597,50	-0,0185	-0,2093	-2,9695	-52,3118	56,2654	3,95358162	0,51971701
992,19	-47,04	-2121,36	-0,0232	-0,2278	-2,5376	-55,2813	58,4867	3,2053739	0,42136156
1021,59	-33,85	-2248,97	-0,0111	-0,2510	-1,4109	-57,8189	60,2198	2,40092552	0,31561302
1036,85	-23,75	-1786,73	-0,0159	-0,2621	-2,2953	-59,2298	61,1191	1,88930544	0,24835814
1060,42	-11,82	-1955,98	-0,0081	-0,2780	-2,3410	-61,5251	62,5090	0,9838498	0,12933171
1083,45	0,00	0,00	0,0000	-0,2861	0,0000	-63,8661	63,8661	0	0

Para esta primera iteración:

$$\omega_{crít} = 362,566864 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crít} = 3462,26 \text{ (r/min)}$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.14 Segunda Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol rediseñado del Ventilador de Gases Calientes fabricado en México.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	4,1	0,00141408	0,00516375	0	0	0,0010	0,0000	0,0040	0,0000
8,2	3,75	0,00152947	0,00604086	0,1551365	0,00023728	0,0028	0,0010	0,0151	0,0040
15,7	2,75	0,00226881	0,01329274	0,30090551	0,0006827	0,0032	0,0038	0,0230	0,0191
21,2	1,715	0,00241436	0,01505305	0,3817414	0,00092166	0,0031	0,0070	0,0242	0,0421
24,63	6,9055	0,00293033	0,02217441	0,42500362	0,0012454	0,0259	0,0100	0,2581	0,0663
38,441	15,0815	0,00633805	0,10373629	0,56260997	0,00356585	0,1299	0,0359	2,5372	0,3244
68,604	58,298	0,01104575	0,31507184	0,75857718	0,00837905	6,8933	0,1658	411,7025	2,8615
185,2	64,297	0,11809946	1,15428259	1	0,11809946	0,5982	7,0592	499,4094	414,5640
313,794	15,1605	0,01104575	0,31507184	0,67606405	0,00746763	0,0574	7,6574	124,6183	913,9734
344,115	6,7925	0,00633805	0,10373629	0,51971701	0,00329399	0,0117	7,7148	60,1973	1038,5917
357,7	5,3	0,00293033	0,02217441	0,42136156	0,00123473	0,0053	7,7265	48,7050	1098,7890
368,3	2,75	0,00241436	0,01505305	0,31561302	0,000762	0,0023	7,7318	29,0006	1147,4940
373,8	4,25	0,00226881	0,01329274	0,24835814	0,00056348	0,0014	7,7341	40,6100	1176,4946
382,3	4,15	0,00152947	0,00604086	0,12933171	0,00019781	0,0002	7,7355	39,8387	1217,1047
390,6	0	0,00141408	0,00516375	0	0	0,0000	7,7357	7,7357	1256,9434

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



	11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	
Para	0,00	0,00	0,00	-0,0179	0,0000	-0,0734	0,0000	0,0000	0	0	la
	26,39	-26,38	-4367,50	-0,0306	-0,0179	-0,2491	-0,0734	1,5467	1,47332552	0,17053311	
	50,52	-50,50	-3799,31	-0,0229	-0,0485	-0,3299	-0,3226	2,9614	2,63888326	0,30544301	
	68,22	-68,18	-4529,26	-0,0139	-0,0714	-0,2689	-0,6525	3,9989	3,34642063	0,38733839	
	79,26	-79,19	-3571,35	-0,0329	-0,0853	-1,4055	-0,9213	4,6459	3,72456138	0,43110707	
	123,70	-123,38	-1189,34	-0,0284	-0,1182	-3,9932	-2,3268	7,2510	4,92420371	0,56996216	
	220,77	-217,90	-691,60	-0,0495	-0,1466	-19,9742	-6,3200	12,9406	6,62057488	0,76631216	
	595,97	-181,41	-157,16	-0,0297	-0,1961	-27,1180	-26,2942	34,9338	8,63952742	1	
	1009,78	-95,81	-304,09	-0,0147	-0,2257	-7,0660	-53,4122	59,1901	5,77789837	0,66877482	
	1107,36	-68,76	-662,87	-0,0205	-0,2404	-3,4048	-60,4782	64,9095	4,43129968	0,51290996	
	1151,07	-52,28	-2357,80	-0,0258	-0,2609	-2,9020	-63,8829	67,4720	3,58902739	0,41541941	
	1185,18	-37,69	-2503,70	-0,0123	-0,2867	-1,6105	-66,7849	69,4714	2,6865211	0,31095695	
	1202,88	-26,39	-1985,04	-0,0177	-0,2990	-2,6166	-68,3954	70,5089	2,11343699	0,24462414	
	1230,23	-13,13	-2173,44	-0,0090	-0,3167	-2,6658	-71,0120	72,1122	1,10018664	0,12734338	
	1256,94	0,00	0,00	0,0000	-0,3257	0,0000	-73,6778	73,6778	0	0	

segunda iteración:

$$\omega_{crít} = 340,216213 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crít} = 3248,83 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia:

6,16 %

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.15. Tercera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol rediseñado del Ventilador de Gases Calientes fabricado en México.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	4,1	0,0014	0,0052	0	0	0,0011	0,0000	0,0044	0,0000
8,2	3,75	0,0015	0,0060	0,17053311	0,00026082	0,0029	0,0011	0,0158	0,0044
15,7	2,75	0,0023	0,0133	0,30544301	0,00069299	0,0033	0,0039	0,0237	0,0202
21,2	1,715	0,0024	0,0151	0,38733839	0,00093518	0,0031	0,0072	0,0249	0,0439
24,63	6,9055	0,0029	0,0222	0,43110707	0,00126329	0,0262	0,0103	0,2624	0,0687
38,441	15,0815	0,0063	0,1037	0,56996216	0,00361245	0,1313	0,0365	2,5668	0,3311
68,604	58,298	0,0110	0,3151	0,76631216	0,00846449	6,8934	0,1678	411,8217	2,8979
185,2	64,297	0,1181	1,1543	1	0,11809946	0,5931	7,0612	499,2078	414,7196
313,794	15,1605	0,0110	0,3151	0,66877482	0,00738712	0,0567	7,6543	124,5560	913,9274
344,115	6,7925	0,0063	0,1037	0,51290996	0,00325085	0,0115	7,7109	60,1658	1038,4834
357,7	5,3	0,0029	0,0222	0,41541941	0,00121732	0,0052	7,7225	48,6790	1098,6491
368,3	2,75	0,0024	0,0151	0,31095695	0,00075076	0,0023	7,7277	28,9850	1147,3282
373,8	4,25	0,0023	0,0133	0,24462414	0,00055501	0,0014	7,7299	40,5880	1176,3132
382,3	4,15	0,0015	0,0060	0,12734338	0,00019477	0,0002	7,7313	39,8171	1216,9012
390,6	0	0,0014	0,0052	0	0	0,0000	7,7315	7,7315	1256,7183

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20
0,00	0,00	0,00	-0,0179	0,0000	-0,0734	0,0000	0,0000	0	0
26,38	-26,38	-4366,65	-0,0306	-0,0179	-0,2491	-0,0734	1,5461	1,47274077	0,17060153
50,51	-50,49	-3798,54	-0,0229	-0,0485	-0,3298	-0,3225	2,9603	2,63779936	0,30556131
68,21	-68,17	-4528,32	-0,0139	-0,0714	-0,2688	-0,6523	3,9973	3,34500011	0,38748308
79,24	-79,18	-3570,60	-0,0329	-0,0853	-1,4052	-0,9211	4,6441	3,72294386	0,43126389
123,68	-123,35	-1189,06	-0,0284	-0,1182	-3,9923	-2,3263	7,2482	4,921862	0,57014594
220,73	-217,83	-691,36	-0,0495	-0,1465	-19,9689	-6,3187	12,9356	6,61687696	0,7664956
595,86	-181,14	-156,93	-0,0296	-0,1960	-27,1076	-26,2876	34,9202	8,63263533	1
1009,60	-95,67	-303,66	-0,0146	-0,2256	-7,0626	-53,3952	59,1672	5,77194612	0,66861925
1107,16	-68,67	-662,00	-0,0205	-0,2402	-3,4030	-60,4578	64,8843	4,42650511	0,51276406
1150,87	-52,22	-2354,81	-0,0257	-0,2607	-2,9002	-63,8608	67,4458	3,58506276	0,41529181
1184,97	-37,64	-2500,62	-0,0123	-0,2865	-1,6095	-66,7610	69,4445	2,6835134	0,3108568
1202,67	-26,35	-1982,49	-0,0177	-0,2988	-2,6148	-68,3705	70,4816	2,11105691	0,24454374
1230,01	-13,11	-2170,66	-0,0090	-0,3165	-2,6639	-70,9853	72,0843	1,09893883	0,1273005
1256,72	0,00	0,00	0,0000	-0,3255	0,0000	-73,6493	73,6493	0	0

Tabla. 3.16. Rangos de velocidades críticas en el árbol rediseñado del Ventilador de Gases Calientes.

Para la tercera iteración:

$$\omega_{crit} = 340.351996 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 3250.12 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia:

0.004 %

Zonas de Trabajo críticas		
0,7n	n	1,3n
2275,08551		4225,158805
1,4n	n	2,6n
4550,17102		8450,31761
2,1n	n	3,9n
6825,25653		12675,47641

En el árbol traído de México la velocidad crítica se aleja de su velocidad nominal. La velocidad crítica más peligrosa es cuando está en el rango de $1,3n \geq n \geq 0,7n$.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



3.6 Cálculo de la velocidad crítica para la variante de recuperación del árbol del Ventilador de Gases Calientes.

El Cálculo de la Velocidad Crítica se realizó en este caso por el Método propuesto por Birger, que no puede contemplar con exactitud la influencia de la mayor elasticidad de la zona espigada en la velocidad crítica. Se intentó utilizar en este caso el Método de los Elementos Finitos. Pero la carencia de una Computadora con la capacidad necesaria impidió obtener resultados. Las dimensiones básicas se dan en la Fig. 2.10. Se tomó en consideración el efecto que provoca la interferencia de la espiga en el mismo, para calcular su velocidad crítica.

Tabla. 3.17 Diámetro, Peso del árbol, Peso del rodete para cada tramo.

Øárbol (cm)	Wa (kgf)	Wr (kgf)
15	10,19598987	0
15,6	11,10300293	0
21	14,95411848	0
26	50,01352673	0
34,75	215,9072142	0
43,5	1522,469369	0
53	44,16227703	0
58	52,88782482	9700
53	2436,71858	0
43,5	338,3265264	0
34,75	131,4055976	0
26	22,71447672	0
10,5	5,913674125	0
15,6	9,977698582	0
15	0	0

Tabla. 3.18. Momento de inercia del árbol para cada tramo.

x(cm ⁴)
2531.25
2961.20448
6516.05
7378.94528

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.

10869.80976
50851.12075
154446.9786
565824.8
154446.9786
50851.12075
10869.80976
7378.94528
6516.05
2961.20448
2531.25

Tabla 3.19. Distancia del árbol tomada desde el centro de los cojinetes, peso del Rotor, peso de la Brida.

L (cm)	Peso del Rotor (kg)	Peso de la Brida
405	9700	1980,93517

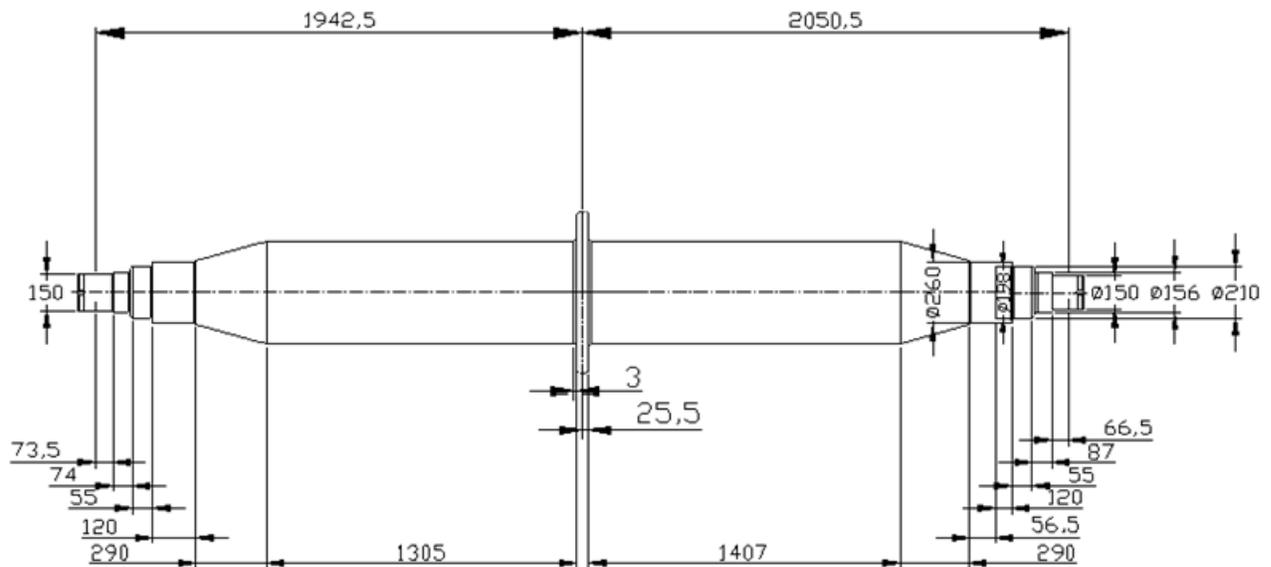


Fig. 2.10 Secciones de cálculo y las dimensiones básicas de la recuperación del árbol.

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.20. Primera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol Recuperado del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0,0000	0	0	0,000760209	0,0000	0,0028	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	16,3631	0,13524967	0,00020686	0,00226862	0,0008	0,0120	0,0028
14,75	2,75	0,0028	0,0198	24,3241	0,20105154	0,00055723	0,003835858	0,0030	0,0219	0,0148
20,25	6	0,0042	0,0466	33,9509	0,28062213	0,00119223	0,021006396	0,0069	0,1741	0,0367
32,25	14,5	0,0076	0,1487	52,6446	0,43513544	0,00330236	0,151754102	0,0279	2,6324	0,2108
61,25	65,25	0,0119	0,3652	104,1544	0,86089116	0,01023805	1,159642827	0,1796	87,5669	2,8432
191,75	1,275	0,0177	0,8048	120,7201	0,99781542	0,0176154	5,989630114	1,3393	10,6836	90,4101
194,3	1,275	4,6906	1,1543	120,8119	0,9985742	4,68393311	4,706425674	7,3289	22,6739	101,0937
196,85	70,35	0,0177	0,8048	120,8971	0,99927842	0,01764123	0,75678386	12,0353	911,9601	123,7676
337,55	14,5	0,0119	0,3652	106,8869	0,88347671	0,01050665	0,059308104	12,7921	199,1376	1035,7277
366,55	8,825	0,0076	0,1487	53,6530	0,4434704	0,00336562	0,014231139	12,8514	126,3907	1234,8653
384,2	2,725	0,0042	0,0466	35,0613	0,28980017	0,00123122	0,001628519	12,8656	47,9290	1361,2561
389,65	4,35	0,0007	0,0012	25,4572	0,21041721	0,0001458	0,00105806	12,8673	68,8445	1409,1851
398,35	3,325	0,0015	0,0060	16,5890	0,13711685	0,00020972	0,000209716	12,8683	55,6562	1478,0296
405	0	0,0014	0,0052	0,0000	0	0	0	12,8685	12,8685	1533,6858

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20
0,00	0,00	0,00	-0,0169	0,0000	-0,0622	0,0000	0,0000	0	0
27,83	-27,83	-4607,09	-0,0275	-0,0169	-0,2269	-0,0622	1,5804	1,51821376	0,07785964
55,86	-55,84	-2815,02	-0,0123	-0,0444	-0,2779	-0,2891	3,1716	2,88250196	0,14782541
76,68	-76,65	-1644,39	-0,0148	-0,0567	-0,7686	-0,5670	4,3543	3,78725573	0,19422454
122,13	-121,92	-819,67	-0,0210	-0,0714	-2,3760	-1,3356	6,9346	5,59897731	0,28713635
231,95	-229,10	-627,30	-0,0925	-0,0924	-18,0948	-3,7116	13,1703	9,45870473	0,48507751
726,13	-635,72	-789,89	-0,0017	-0,1849	-0,4737	-21,8064	41,2311	19,4247086	0,9961712
735,79	-634,70	-549,86	-0,0015	-0,1866	-0,4778	-22,2800	41,7794	19,4993678	1
745,45	-621,68	-772,44	-0,1268	-0,1881	-35,3936	-22,7578	39,8036	17,0458102	0,87753235
1278,26	-242,53	-664,07	-0,0246	-0,3150	-9,4900	-58,1514	72,5818	14,4303599	0,74004245
1388,08	-153,22	-1030,11	-0,0268	-0,3395	-6,2293	-67,6414	78,8175	11,1761133	0,5731526
1454,92	-93,66	-2009,43	-0,1514	-0,3663	-2,4090	-73,8707	82,6127	8,7419996	0,44832221
1475,56	-66,37	-53533,88	-0,2548	-0,5177	-5,6125	-76,2797	83,7846	7,50485047	0,38487661
1508,50	-30,47	-5044,57	-0,0168	-0,7725	-5,1930	-81,8922	85,6553	3,76310477	0,19298599
1533,69	0,00	0,00	0,0000	-0,7893	0,0000	-87,0852	87,0852	0	0

Para esta primera iteración:

$$\omega_{crit} = 242,12 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2312 \text{ (r/min)}$$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.21 Segunda Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol Recuperado del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0	0	0,0005	0,0000	0,0017	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	0,08314617	0,00012717	0,0017	0,0005	0,0086	0,0017
14,75	2,75	0,0028	0,0198	0,15732212	0,00043603	0,0028	0,0022	0,0161	0,0104
20,25	6	0,0042	0,0466	0,20611066	0,00087566	0,0147	0,0051	0,1234	0,0265
32,25	14,5	0,0076	0,1487	0,30313675	0,00230059	0,0898	0,0197	1,6082	0,1499
61,25	65,25	0,0119	0,3652	0,50750879	0,00603549	1,1550	0,1095	82,6186	1,7580
191,75	1,275	0,0177	0,8048	0,99739892	0,01760805	6,2786	1,2645	10,8820	84,3767
194,3	1,275	4,9106	1,1543	1	4,91061055	4,9314	7,5431	23,4482	95,2587
196,85	71,625	0,0177	0,8048	0,92351141	0,01630364	0,5336	12,4745	944,1862	118,7069
340,1	13,225	0,0119	0,3652	0,6073619	0,00722298	0,0472	13,0082	185,6657	1062,8931
366,55	8,775	0,0076	0,1487	0,39826571	0,00302255	0,0121	13,0554	127,7229	1248,5588
384,1	2,75	0,0042	0,0466	0,24457575	0,00103908	0,0025	13,0675	49,0101	1376,2817
389,6	4,35	0,0028	0,0157	0,19014558	0,00052701	0,0011	13,0700	69,9292	1425,2918
398,3	3,325	0,0014	0,0060	0,08866969	0,00012539	0,0001	13,0711	56,5329	1495,2210
404,95	0	0,0015	0,0039	0	0	0,0000	13,0712	13,0712	1551,7539

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0,0000	-0,0171	0,0000	-0,0630	0,0000	0,0000	0	0	0
28,16	-28,16	-4662,1230	-0,0278	-0,0171	-0,2296	-0,0630	1,4497	1,38676798	0,08823072	0,08813486
56,52	-56,51	-2848,7645	-0,0124	-0,0449	-0,2812	-0,2926	2,9093	2,6167525	0,16648636	0,16630547
77,60	-77,57	-1664,1973	-0,0150	-0,0573	-0,7778	-0,5738	3,9942	3,42037762	0,21761562	0,21737918
123,58	-123,43	-829,8597	-0,0213	-0,0723	-2,4052	-1,3516	6,3611	5,00949161	0,31872026	0,31837396
234,71	-232,95	-637,8302	-0,0943	-0,0936	-18,3684	-3,7568	12,0811	8,32428565	0,52961831	0,52904287
734,78	-650,40	-808,1250	-0,0017	-0,1879	-0,4814	-22,1253	37,8213	15,6959963	0,99863068	0,99754565
744,55	-649,29	-562,5069	-0,0017	-0,1897	-0,4859	-22,6067	38,3242	15,7175187	1	0,99891348
754,32	-635,62	-789,7519	-0,1037	-0,1914	-34,8459	-23,0926	38,8272	15,7346146	1,0010877	1
1303,25	-240,36	-658,1142	-0,0226	-0,2951	-8,1041	-57,9384	67,0822	9,14375749	0,58175579	0,5811237
1404,61	-156,05	-1049,1510	-0,0272	-0,3177	-5,8140	-66,0425	72,2993	6,25672753	0,39807349	0,39764098
1471,86	-95,58	-2050,4733	-0,0175	-0,3449	-1,9450	-71,8565	75,7609	3,9043367	0,24840668	0,24813679
1492,93	-67,64	-4314,7151	-0,0411	-0,3624	-3,3317	-73,8015	76,8457	3,04418565	0,19368106	0,19347062
1526,27	-31,05	-5140,0507	-0,0171	-0,4035	-2,7402	-77,1332	78,5617	1,42853171	0,09088786	0,09078911
1551,75	0,00	0,0000	0,0000	-0,4206	0,0000	-79,8734	79,8734	0	0	0

Para la segunda iteración:

$$\omega_{crit} = 242,26 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2313,47 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia:

0,06 %

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.22. Tercera Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol Recuperado del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0	0	0,0005	0,0000	0,0018	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	0,08813486	0,0001348	0,0018	0,0005	0,0091	0,0018
14,75	2,75	0,0028	0,0198	0,16630547	0,00046093	0,0030	0,0023	0,0170	0,0110
20,25	6	0,0042	0,0466	0,21737918	0,00092354	0,0154	0,0053	0,1299	0,0280
32,25	14,5	0,0076	0,1487	0,31837396	0,00241623	0,0936	0,0208	1,6796	0,1578
61,25	65,25	0,0119	0,3652	0,52904287	0,00629158	1,1554	0,1144	82,9680	1,8374
191,75	1,275	0,0177	0,8048	0,99754565	0,01761064	6,2718	1,2698	10,8854	84,8054
194,3	1,275	4,9106	1,1543	0,99891348	4,90527508	4,9278	7,5416	23,4401	95,6908
196,85	71,625	0,0177	0,8048	1	0,01765397	0,5127	12,4694	942,3093	119,1309
340,1	13,225	0,0119	0,3652	0,5811237	0,00691095	0,0468	12,9821	185,2890	1061,4402
366,55	8,775	0,0076	0,1487	0,39764098	0,00301781	0,0123	13,0289	127,4650	1246,7292
384,1	2,75	0,0042	0,0466	0,24813679	0,00105421	0,0025	13,0411	48,9113	1374,1941
389,6	4,35	0,0028	0,0198	0,19347062	0,00053622	0,0011	13,0437	69,7884	1423,1054
398,3	3,325	0,0014	0,0060	0,09078911	0,00012838	0,0001	13,0448	56,4191	1492,8938
404,95	0	0,0015	0,0039	0	0	0,0000	13,0449	13,0449	1549,3129

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0	-0,0171	0,0000	-0,0629	0,0000	0,0000	0	0	0
28,12	-28,12	-4654,77173	-0,0277	-0,0171	-0,2292	-0,0629	1,4452	1,38235391	0,08839362	0,08830064
56,43	-56,42	-2844,25195	-0,0124	-0,0449	-0,2808	-0,2921	2,9003	2,6081567	0,16677669	0,16660127
77,48	-77,45	-1661,54607	-0,0149	-0,0572	-0,7766	-0,5729	3,9817	3,40884868	0,21797636	0,21774708
123,39	-123,23	-828,499206	-0,0212	-0,0722	-2,4014	-1,3494	6,3413	4,9918257	0,31919868	0,31886293
234,34	-232,50	-636,601923	-0,0941	-0,0934	-18,3350	-3,7508	12,0435	8,29268204	0,53026955	0,52971179
733,62	-648,82	-806,156095	-0,0017	-0,1876	-0,4805	-22,0858	37,7035	15,6177343	0,99866471	0,99761427
743,38	-647,69	-561,117909	-0,0017	-0,1893	-0,4849	-22,5663	38,2049	15,6386164	1	0,99894816
753,14	-634,00	-787,750697	-0,1034	-0,1910	-34,7743	-23,0512	38,7063	15,6550831	1,00105295	1
1301,20	-239,76	-656,479005	-0,0225	-0,2945	-8,0867	-57,8255	66,8734	9,04783877	0,5785575	0,57794895
1402,40	-155,67	-1046,59642	-0,0271	-0,3170	-5,8014	-65,9122	72,0742	6,16196042	0,3940221	0,39360765
1469,54	-95,35	-2045,58694	-0,0150	-0,3441	-1,9339	-71,7136	75,5250	3,81139287	0,24371676	0,24346041
1490,58	-67,48	-3401,68181	-0,0371	-0,3591	-3,2857	-73,6475	76,6065	2,95893455	0,18920693	0,18900791
1523,87	-30,98	-5127,84625	-0,0171	-0,3962	-2,6915	-76,9332	78,3171	1,38393754	0,08849488	0,0884018
1549,31	0,00	0	0,0000	-0,4133	0,0000	-79,6247	79,6247	0	0	0

Para la tercera iteración:

$$\omega_{crit} = 252,73 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2413,47 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia:

4,14 %

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



Tabla. 3.24 Cuarta Iteración para el cálculo de la velocidad crítica en el árbol Recuperado del Ventilador de Gases Calientes.

Xi	1/2 ΔL	Mx	EIx (*10 ⁻¹²)	yo/ymáx	Mx*yo/ymáx	7	8	9	10
0	3,675	0,0014	0,0052	0	0	0,0005	0,0000	0,0018	0,0000
7,35	3,7	0,0015	0,0060	0,08830064	0,00013505	0,0018	0,0005	0,0092	0,0018
14,75	2,75	0,0028	0,0198	0,16660127	0,00046175	0,0030	0,0023	0,0170	0,0110
20,25	6	0,0042	0,0466	0,21774708	0,0009251	0,0154	0,0053	0,1301	0,0280
32,25	14,5	0,0076	0,1487	0,31886293	0,00241994	0,0938	0,0208	1,6818	0,1581
61,25	65,25	0,0119	0,3652	0,52971179	0,00629954	1,1555	0,1146	82,9838	1,8399
191,75	1,275	0,0177	0,8048	0,99761427	0,01761185	6,2721	1,2700	10,8862	84,8237
194,3	1,275	4,9106	1,1543	0,99894816	4,90544536	4,9280	7,5421	23,4414	95,7099
196,85	71,625	0,0177	0,8048	1	0,01765397	0,5099	12,4700	942,1612	119,1512
340,1	13,225	0,0119	0,3652	0,57794895	0,00687319	0,0464	12,9800	185,2536	1061,3124
366,55	8,775	0,0076	0,1487	0,39360765	0,0029872	0,0121	13,0264	127,4385	1246,5660
384,1	2,75	0,0042	0,0466	0,24346041	0,00103435	0,0025	13,0384	48,9009	1374,0046
389,6	4,35	0,0028	0,0198	0,18900791	0,00052385	0,0011	13,0409	69,7735	1422,9055
398,3	3,325	0,0014	0,0060	0,0884018	0,00012501	0,0001	13,0420	56,4069	1492,6789
404,95	0	0,0015	0,0039	0	0	0,0000	13,0421	13,0421	1549,0858

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



11	12	13(*10^-12)	14(10^6)	15(10^6)	16(10^6)	17(10^6)	18(10^6)	19(10^6)	20	21
0,00	0,00	0	-0,0171	0,0000	-0,0629	0,0000	0,0000	0	0	0
28,12	-28,11	-4654,08897	-0,0277	-0,0171	-0,2292	-0,0629	1,4450	1,38210654	0,08839616	0,08830322
56,42	-56,41	-2843,83404	-0,0124	-0,0448	-0,2807	-0,2921	2,8998	2,60768462	0,16678114	0,16660578
77,46	-77,44	-1661,30142	-0,0149	-0,0572	-0,7765	-0,5728	3,9810	3,40822579	0,2179818	0,21775261
123,37	-123,21	-828,375899	-0,0212	-0,0722	-2,4010	-1,3492	6,3401	4,99089797	0,31920565	0,31887002
234,30	-232,46	-636,501052	-0,0941	-0,0934	-18,3321	-3,7503	12,0414	8,29109675	0,53027831	0,52972075
733,52	-648,69	-805,999823	-0,0017	-0,1875	-0,4804	-22,0823	37,6968	15,6144969	0,9986651	0,99761506
743,27	-647,56	-561,006997	-0,0017	-0,1893	-0,4849	-22,5628	38,1981	15,6353685	1	0,99894856
753,03	-633,87	-787,588287	-0,1034	-0,1910	-34,7681	-23,0476	38,6994	15,6518256	1,00105255	1
1301,01	-239,70	-656,306685	-0,0225	-0,2944	-8,0852	-57,8157	66,8615	9,04578546	0,57854635	0,57793805
1402,19	-155,63	-1046,31152	-0,0271	-0,3169	-5,8003	-65,9009	72,0614	6,16052649	0,39401223	0,39359795
1469,33	-95,32	-2045,03356	-0,0150	-0,3441	-1,9335	-71,7011	75,5116	3,81048752	0,24370948	0,24345323
1490,37	-67,46	-3400,74847	-0,0371	-0,3590	-3,2850	-73,6346	76,5929	2,95822632	0,18920093	0,189002
1523,65	-30,97	-5126,45345	-0,0170	-0,3961	-2,6910	-76,9196	78,3032	1,38360292	0,08849186	0,08839882
1549,09	0,00	0	0,0000	-0,4132	0,0000	-79,6106	79,6106	0	0	0

Tabla. 3.23 Rangos de velocidades críticas en el árbol recuperado del Ventilador de Gases Calientes.

Para la cuarta iteración:

$$\omega_{crit} = 252.76 \text{ (rad/s)}$$

$$n_{crit} = 2413.73 \text{ (r/min)}$$

Porcentaje de diferencia:

0.01%

Zonas de Trabajo críticas		
0,7n	n	1,3n
1689,61175		3137,850396
1,4n	n	2,6n
3379,2235		6275,700791
2,1n	n	3,9n
5068,83525		9413,551187

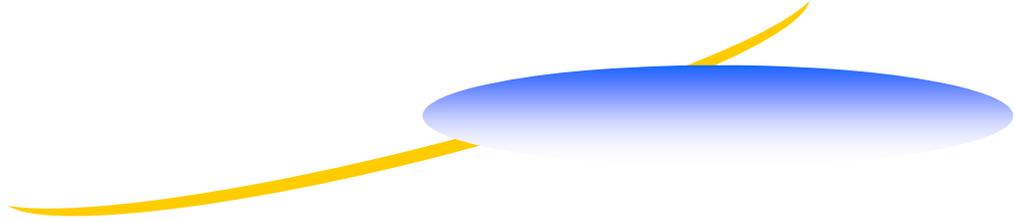
En el árbol recuperado la velocidad crítica se aleja de su velocidad nominal. La velocidad crítica más peligrosa es cuando está en el rango de $1,3n \geq n \geq 0,7n$

Capítulo III Cálculo de la Velocidad Crítica del Árbol del Ventilador de Gases Caliente Original, Rediseñado y Recuperado.



3.7 Conclusiones Parciales del Capítulo III.

1. Se describieron y se ilustró su aplicación los diferentes métodos empleados en la literatura para el cálculo de la velocidad crítica en árboles.
2. Empleando el Método de Integración Numérica para solucionar las ecuaciones integrales fundamentales para el cálculo de la velocidad crítica en árboles de turbo máquinas propuesto por Birger se determinó la velocidad crítica para el árbol original, el árbol rediseñado y el árbol recuperado.
3. En todos los casos se pudo comprobar que la velocidad crítica calculada en el árbol original $n_{\text{crít}} = 2487$ (r/min), la velocidad crítica para el árbol rediseñado $n_{\text{crít}} = 3462$ (r/min) y la velocidad crítica para el árbol recuperado $n_{\text{crít}} = 2312$ (r/min) las cuales están en todos los casos por encima de la velocidad real de trabajo del Ventilador de Gases Calientes $n = 950$ (r/min) lo que demuestra que la velocidad crítica no fue un factor que influyó directamente en la fractura del árbol original, ni los cambios realizados en el árbol rediseñado y recuperado ejercerán una acción directa en la vida útil de las soluciones aportadas en este trabajo. La velocidad crítica del árbol rediseñado aumentó considerablemente pues para fabricar el árbol en México se utilizó un árbol viejo cuyos diámetros eran diferentes a los del plano que se envió y la rigidez del mismo se modificó.



Conclusiones Generales



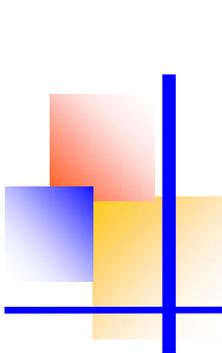
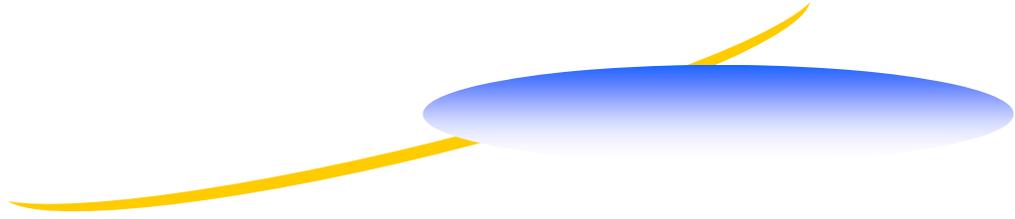
Conclusiones Generales

1. Se profundizó en las características fundamentales de la instalación correspondiente a la Línea No. 3 de la Empresa de Cementos Cienfuegos S.A. donde está instalado el Ventilador de Gases Calientes. Se caracterizaron las particularidades del Árbol del Ventilador de Gases Calientes en sus variantes: árbol original, árbol rediseñado y árbol recuperado y se identificaron qué aspectos de los mismos pueden modificar su rigidez y por consiguiente su velocidad crítica.
2. Se profundizó en lo relativo al empleo del Método de los Parámetros de Origen, en su utilización en el cálculo de desplazamientos y en su posible aplicación en la solución de árboles con geometría y cargas complejas. Se profundizó en la aplicación del Método de la Viga Equivalente, en su aplicación para el cálculo de desplazamientos en árboles de sección variable. Se aplicó este último Método junto con los Métodos Computacionales propuestos en el cálculo de las flechas en diferentes secciones a lo largo de la longitud de un árbol de complejidad constructiva similar a la del Árbol del Ventilador de Gases Calientes de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” con vistas a esclarecer la posibilidad de utilizar cualquiera de los métodos estudiados en la determinación de las flechas. La comparación entre los diferentes métodos estudiados arrojó una correspondencia muy buena con % de diferencia inferiores al 7 %.
3. Se describieron y se ilustró su aplicación de los diferentes métodos empleados en la literatura para el cálculo de la velocidad crítica en árboles. Se comprueba que tal como plantea Birger la aproximación de partida para la flecha no tiene incidencia en los resultados finales del cálculo de la velocidad crítica
4. Empleando el Método de Integración Numérica para solucionar las ecuaciones integrales fundamentales para el cálculo de la velocidad crítica en árboles de turbo máquinas propuesto por Birger se determinó la velocidad crítica para el árbol original, el árbol rediseñado y el árbol recuperado.
5. En todos los casos se pudo comprobar que la velocidad crítica calculada en el árbol original $n_{\text{crít}} = 2487(\text{r/min})$, para el árbol rediseñado $n_{\text{crít}} = 3462(\text{min})$ y la velocidad crítica para el árbol recuperado $n_{\text{crít}} = 2312(\text{r/min})$ están en

Conclusiones Generales



todos los casos por encima de la velocidad real de trabajo del Ventilador de Gases Calientes $n = 955$ (r/min) lo que demuestra que la velocidad crítica no fue un factor que influyó directamente en la fractura del árbol original, ni los cambios realizados en el árbol rediseñado y recuperado ejercerán una acción directa en la vida útil de las soluciones aportadas en este trabajo.

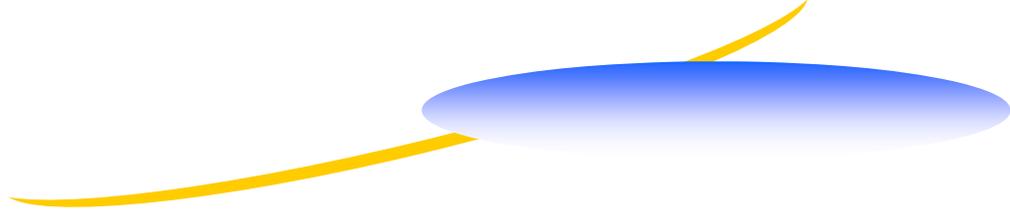


Recomendaciones

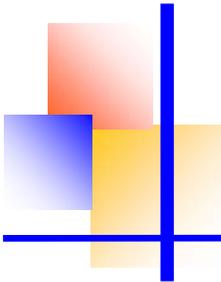


Recomendaciones

Continuar intentando utilizar el Método de los Elementos Finitos en el cálculo de la Ecuación de la Elástica del Árbol Recuperado del Ventilador de Gases Calientes por tratarse de un árbol muy singular con una zona espigada que modifica sustancialmente su rigidez. Esta característica no se puede tomar en cuenta por ninguno de los otros métodos de cálculo de la velocidad crítica.

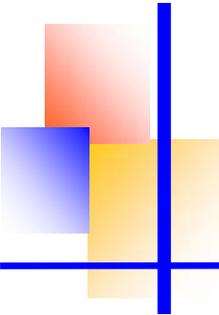
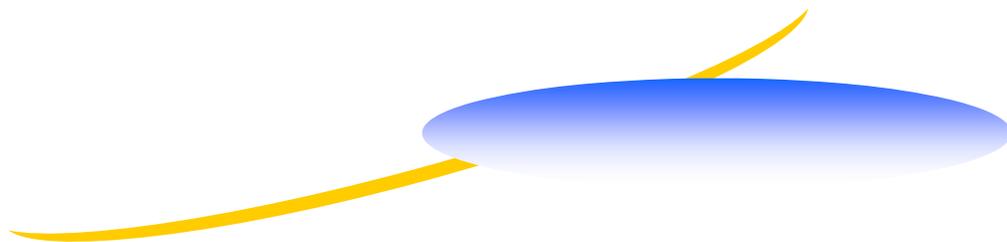


Referencia Bibliográfica



Referencias Bibliográficas

1. Cherkasski, M. V. 1985. Bombas, Ventiladores y Compresores. —Moscú: Editorial MIR Moscú.
2. Pisarenko, G.S. 1979. Manual de Resistencia de Materiales./ G.S. Pisarenko, A.P. Yakovlev, V:V Matvéev.-- Moscú: Editorial MIR. -- 695 p.
3. Shigley, J.E. y Mischke, Ch. R. 2001. Mechanical Engineering Design. Sexta Edición. Boston: Mc Graw Hill. --1248p
4. Birger J.A., Schorr B.F., Schneiderovhich R.M. 1967. Cálculo de la resistencia de las piezas de máquinas. Moscú. Editorial Mashinostroenie. - 616 p.
5. Elementos de Máquinas/V. Dobrovolski...[et.al.]. 1975. --Moscú: Editorial MIR, 330p.
6. Feodosiev, V. I. 1985. Resistencia de Materiales. Tercera Edición. Moscú: Editorial MIR.- 583 p.
7. González Suárez, Dietman 2008. Desarrollo de metodología para el diseño hidráulico y mecánico de ventiladores centrífugos para tiro inducido y forzado en generadores de vapor de la Industria Azucarera Cubana. UCf. Trabajo de Diploma. José Monteagudo Yanes: tutor. 91 p.
8. Labahn – Kaminsky. 1970. Prontuario de Cemento. Editorial científico Técnica. La Habana, Cuba.—406 p.
9. Padilla Rodríguez, Rohary. 2008. Análisis de la Avería, Rediseño y Recuperación del Árbol del Ventilador de Gases Calientes de la Línea No. 3 de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” UCf. Tesis de Maestría. Dr. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa, Dr. Eduardo Díaz Cedré, Dr. Arnaldo Herrera Artilles: tutores, 104 p.
10. Reshetov, D. 1985. Elementos de Máquinas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.-- 548 p.
11. Silenok S.G.; Grizak Yu. S.; Lisenko V.D.: Nefedov D.E. 1969. Equipamiento Mecánico para la producción de materiales para la construcción. Moscú: Editorial Mashinostrenie.—199 p.



Bibliografía



Bibliografía

1. Armero, F., Glaser, S. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations* 1997.
2. Babuska, I., Rheinboldt, W. A. Posteriori error estimates for the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1978.
3. Barthold, F., Schmidt, M., Stein, E. Error indicators and mesh refinements for finite-element-computations of elastoplastic deformations. *Computacional Mechanics*. 1998.
4. Becker, A. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. University of Nottingham. United Kingdom, 1999.
5. Bedford, A., Fowler, W. *Engineering Mechanics. Statics*. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall. 2002.
6. CALFEM. A Finite Element Toolbox for Matlab. Department of Mechanics and Materials. Tomado de : <http://www.byggmek.ith.se/Calfem/>.Lund University.enero 2002.
7. Cernuschi, D. J., Elementos Finitos. Ejemplo de aplicación. Consideraciones sobre el uso de los Elementos Finitos. <http://www.unlp.edu.ar/estruc3b/mefa.pdf>. Agosto 2003.
8. Chandrupatla, T., Belengundu, A. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. Prentice Hall. USA. 1997.
9. Faires V.M./ *Disign of Machina Elements* . La Habana: Editorial Edición Revolucionaria, 1966.-- 276 p.
10. Felippa, Carlos A. *Introduction to Finite Elements Methods/ Carlos A. Felippa.— Colorado: University of Colorado, 2001.-- 586 p.*
11. Fitzgerald F. *Mecánica de Materiales*. México: Editorial Alfa Omega S.A. de C.V., 1996.
12. Fogiel M. *Problem Solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids*. New Jersey: Editorial REA, 1988.
13. Gabaldón, F., Goicolea, J. M. Estimación de error en problemas no lineales mediante elementos de deformaciones supuestas. E.T.S. Ingenieros de Caminos. Canales y Puertos Universidad Politécnica de Madrid.1999.

Bibliografía



14. Goytisolo R. Diseño de Elementos de Máquina. Las Villas: Editado por el Dpto. Mecánica Teórica y Aplicada. UCLV, 1973.
15. Microsoft ® Encarta ® 2006. © 1993-2005 Microsoft Corporation.
16. Mischke, Ch. Introducción al Diseño Auxiliado por Computadora/ Ch. Mischke.-- Mexico: Hnos Herrero, 1971. -- 465 p.