

Facultad de Ingeniería Mecánica
Colectivo de Mecánica Aplicada
Tesis de Diploma
Desarrollo de un Nuevo Esquema de Análisis
para la Evaluación de la Resistencia de los
Rotores de las Bombas de Cavidad Progresiva

Autor:

Diane Raywattie Lopes

Tutores:

Dr. Rafael Goytisolo Espinosa

MSc. Ing. Yovany Llody García

BSc. Ing. Mario J. Cabello Ulloa

Consultante:

Dra. María de Lourdes Bravo Estévez

Mayo 2009

“Año del 50 Aniversario de la Revolución”

DECLARACION DE AUTORIDAD
UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS



“Carlos Rafael Rodríguez”

Sistema de Documentación y Proyecto.

Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad de Cienfuegos Carlos Rafael Rodríguez como parte de la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Universidad de Cienfuegos para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de la Universidad de Cienfuegos.

Firma del autor.

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de este envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico Técnico

Nombre y Apellidos. Firma.

Vice Decano.

Nombre y Apellidos. Firma.

Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyecto.

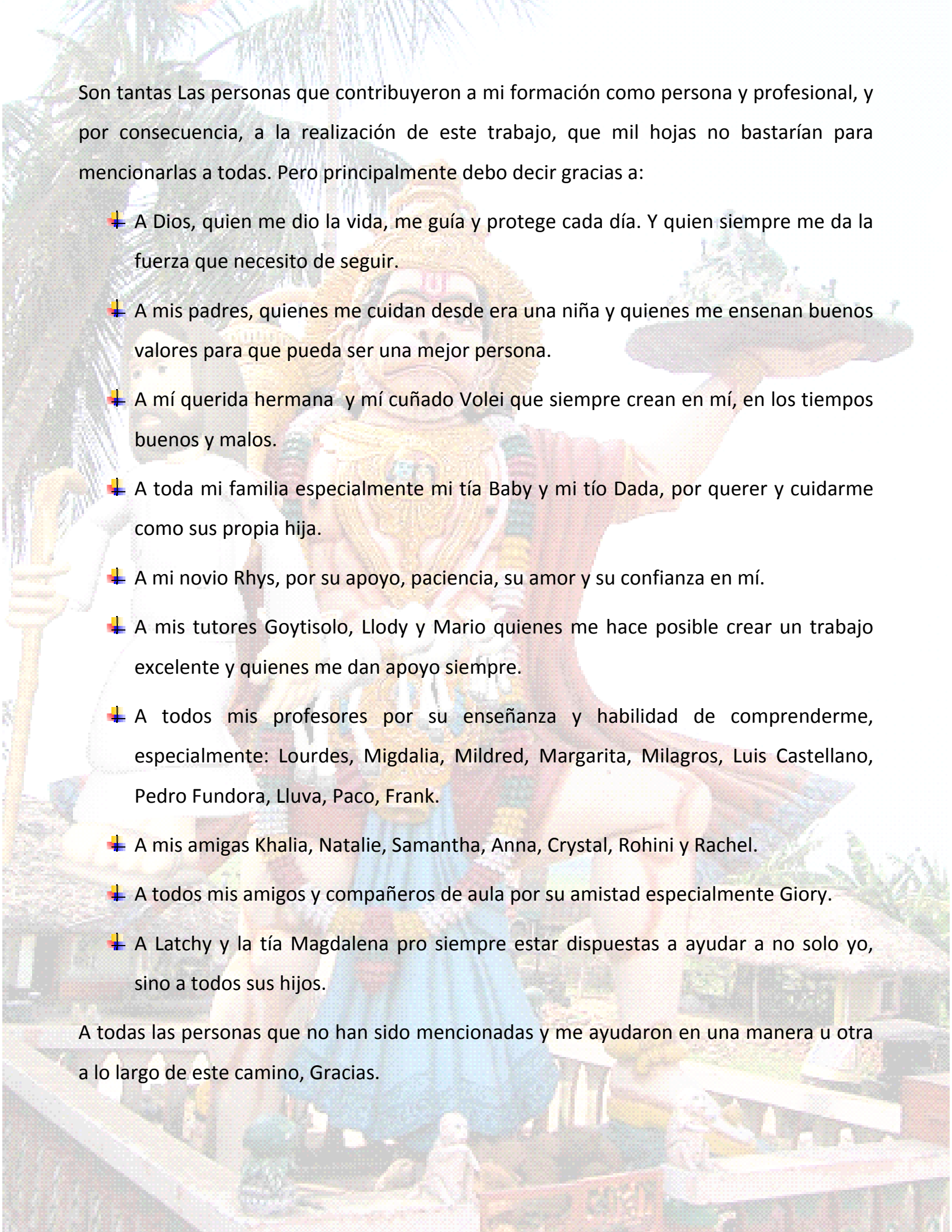
Nombre y Apellido. Firma.

Dedicatoria



*A mi querida abuela, Somwaria, que siempre
tenía confianza en mí, cuyo amor fue
incondicional. Tú siempre estarás en mi corazón.
Te amo Ma.*

Agradecimientos



Son tantas Las personas que contribuyeron a mi formación como persona y profesional, y por consecuencia, a la realización de este trabajo, que mil hojas no bastarían para mencionarlas a todas. Pero principalmente debo decir gracias a:

- ✚ A Dios, quien me dio la vida, me guía y protege cada día. Y quien siempre me da la fuerza que necesito de seguir.
- ✚ A mis padres, quienes me cuidan desde era una niña y quienes me enseñan buenos valores para que pueda ser una mejor persona.
- ✚ A mí querida hermana y mí cuñado Volei que siempre crean en mí, en los tiempos buenos y malos.
- ✚ A toda mi familia especialmente mi tía Baby y mi tío Dada, por querer y cuidarme como sus propia hija.
- ✚ A mi novio Rhys, por su apoyo, paciencia, su amor y su confianza en mí.
- ✚ A mis tutores Goytisoló, Llody y Mario quienes me hace posible crear un trabajo excelente y quienes me dan apoyo siempre.
- ✚ A todos mis profesores por su enseñanza y habilidad de comprenderme, especialmente: Lourdes, Migdalia, Mildred, Margarita, Milagros, Luis Castellano, Pedro Fundora, Lluva, Paco, Frank.
- ✚ A mis amigas Khalia, Natalie, Samantha, Anna, Crystal, Rohini y Rachel.
- ✚ A todos mis amigos y compañeros de aula por su amistad especialmente Giory.
- ✚ A Latchy y la tía Magdalena pro siempre estar dispuestas a ayudar a no solo yo, sino a todos sus hijos.

A todas las personas que no han sido mencionadas y me ayudaron en una manera u otra a lo largo de este camino, Gracias.

Pensamiento



*Imaginación es más importante que
Conocimiento. Conocimiento es limitada.
Imaginación rodea el mundo.*



Albert Einstein

Resumen

Resumen

Las bombas de cavidad progresiva, desde su invención por el ingeniero francés el Dr. René Moineau en el año 1934, fueron en los primeros años patrimonio exclusivo de la firma fundada por el Dr. Moineau, el cual, al cabo de unos 20 años vende su patente a varias firmas de renombre internacional como es el caso de la MOYNO y ROPER de origen norteamericano y actualmente firmas alemanas, inglesas, rusas, chinas y otras producen dichas bombas. Debido a su gran versatilidad, características y campo de aplicaciones que va desde líquidos tan ligeros y limpios como el agua hasta líquidos tan pesados como las mieles y lodos conteniendo un gran número de partículas en suspensión las mismas se han difundido en casi todas las ramas industriales a nivel mundial. Dichas firmas rápidamente invaden el mercado internacional con la producción de varios modelos con diferentes características y clasificaciones pero todas basadas en el principio de funcionamiento ideado por el Dr. Moineau. Al ser estas bombas solo fabricadas por potencias mundiales debido a la complejidad tecnológica de fabricación de dos piezas que constituyen el corazón de estos equipos como son su estator y su rotor, dichas firmas comienzan a elevar sus precios y Cuba se vio obligada a desarrollar sus propias tecnologías, patentadas en la actualidad, y se han comenzado a desarrollar novedosos métodos de cálculo, nuevos diseños y nuevas tecnologías para la fabricación de sus diferentes componentes. En el presente trabajo se presenta un nuevo Esquema de Análisis basado en el Esquema de Viga (el rotor) sobre Fundación Elástica (el estator) para la evaluación de la resistencia de los rotores. Los cálculos y su propia validación son realizados con ayuda del Software MatLab. En el trabajo se dan los resultados aplicados a un rotor particular fabricado en Cuba.

Índice

Contenido

Resumen	1
Introducción.....	3
Capítulo I:- Estado del Arte. Generalidades.....	8
1.1. Modelos de Bombas Fabricadas a Nivel Mundial. Búsqueda de Patentes.....	8
1.1.1. Modelo 2.320.467:.....	8
1.1.2. Modelo F01C 110; F01C 504; F16B 700:.....	10
1.1.3. Modelo E21B 4710:.....	11
1.1.4. Modelo F04C 2107:.....	11
1.1.5. Modelo F04C 2107; F04C 500:.....	14
1.1.6. Modelo F04C2/107; F04C2/00:.....	15
1.2. Principio de Funcionamiento	16
1.3. Descripción de las Partes Principales:-	17
1.3.1. Materiales Empleados del Rotor	18
1.3.2. Materiales Empleados del Estator	19
1.3.3. Dispositivos para la Transmisión Cardánica.....	20
1.4. Búsqueda de Patentes de los Sistemas Cardán	26
1.4.1. Patente US3663044	26
1.4.2. Patente US1916442	26
1.4.3. Patente US4065941	27
1.4.4. Patente US4365488	28
1.5. Búsqueda de Patentes de los Rotores	29
1.5.1. Patente US4948432	29
1.5.2. Patente US2924180	29
1.5.3. Patente US5498142	30
1.5.4. Patente US5759019	30
1.6. Características de las Bombas de Cavidad Progresiva	31
1.7. Aplicaciones Fundamentales	32
1.8. Construcción de las Bombas de Cavidad Progresiva en Cuba	33
1.9. Conclusiones del Capítulo.....	34
Capítulo II:- Teoría de las Vigas sobre Apoyos Elásticos y Acoplamientos Cardánicos.....	36

2.1.	Teoría sobre los Apoyos Elásticos.....	36
2.1.1.	Teoría de las Vigas sobre Apoyos Elásticos.....	36
2.1.2.	Viga sobre Fundación Elástica.....	39
2.1.3.	Método de los Parámetros de Origen para la solución del caso general de Carga de una Viga Finita sobre Fundación Elástica	46
2.2.	Coeficiente de Rigidez (Coeficiente de Balastro).....	51
2.3.	Acoplamientos	53
2.3.1.	Uso de los Acoplamientos y Embragues	53
2.3.2.	Acoplamientos Móviles.....	53
2.3.3.	Acoplamientos Articulado o Cardánicos	56
2.4.	Tensiones de Contacto.....	57
2.4.1.	Compresión de Esferas	58
2.4.2.	Compresión de Cilindros.....	60
2.5.	Conclusiones del Capitulo	61
Capítulo III:-Desarrollo de Nuevo Esquema de Análisis para la Evaluación de la Resistencia de los Rotores de las Bombas Mono.....		63
3.1.	Calculo de la Fuerza Transversal provocado por el Acoplamiento sobre el Rotor	63
3.1.1.	Datos del Rotor y Estator	63
3.1.2.	Cálculo Momento Torsor y de las Fuerzas que actúan sobre el Rotor	63
3.1.3.	Determinación del Coeficiente de Balastro o de Rigidez de la Fundación	64
3.1.4.	Aplicación del Método de los Parámetros de Origen en la elaboración del Esquema de Análisis.....	66
3.2.	Análisis general de los resultados obtenidos en la aplicación del Nuevo Esquema de Análisis.....	69
3.2.1.	Procedimiento General empleado para el Análisis.....	69
3.2.2.	Comportamiento de la Reacción de la Fundación, q_R	70
3.2.3.	Comportamiento de la Flecha de la Fundación, $y_{(b,z)}$	70
3.2.4.	Comportamiento de la Pendiente del Rotor en la Fundación $\theta_{b,z}$	72
3.2.5.	Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$	74
3.2.6.	Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$	76
3.2.7.	Comportamiento de la reacción de la fundación $q_{R\ b,z}$	77
3.3.	Cálculo del Momento Flector Máximo en función de z y b	79
3.4.	Cálculo del Diámetro Interior Crítico (d).....	81
3.4.1.	Calculo del diámetro crítico para $b = 0,5\text{ cm}$	81

3.4.2. Cálculo del diámetro interior en función de z y b	83
3.5. Análisis Económico	85
3.5.1. Cálculo de los Costos de Fabricación	85
3.6. Conclusiones del Capítulo	89
Conclusiones	91
Recomendaciones.....	94
Bibliografía	96
Anexos.	100
Anexo No. 1:- Programación de las Ecuaciones en Matlab	100
Anexo No. 2:- Ecuación de la Flecha	103
Anexo No. 3:- Ecuación de la Pendiente.....	108
Anexo No. 4:- Ecuación del Momento Flector	112
Anexo No. 5:- Ecuación de la Fuerza Cortante	116
Anexo No. 6:- Ecuación de la Fuerza de Reacción Distribuida q_r	120
Anexo No. 7:- Tabla de las Funciones de Kirlov	124
Anexo No. 8:- Desgaste del Pasador de una Sistema Cardán	126
Anexo No. 9:- Planos de la Bomba Mono ALL-43	127

Introducción

Introducción

Las bombas de cavidad progresiva mundialmente llamadas MONO en honor a su inventor el ingeniero francés el Dr. René Moineau en el año 1934, comienzan a producirse en grandes series a finales de la década del 30 por una firma francesa fundada por su creador; debido a su gran versatilidad, características y campo de aplicaciones que va desde su empleo en líquidos tan ligeros y limpios como el agua hasta líquidos tan pesados como las mieles y lodos conteniendo un gran número de partículas en suspensión, las mismas se han difundido en casi todas las ramas industriales a nivel mundial.

Durante 20 años las tecnologías de fabricación de estas bombas fueron patrimonio exclusivo de la firma fundada por el Dr. Moineau, el cual al cabo de este período vende su patente a varias firmas de renombre internacional como es el caso de la MOYNO y ROPER de origen norteamericano. En la actualidad firmas alemanas, inglesas, rusas, chinas, que constituyen potencias a nivel mundial en la manufactura de equipos mecánicos poseen el patrimonio de la fabricación de estas bombas y rápidamente han invadido el mercado internacional con la producción de varios modelos con diferentes características y clasificaciones pero todas basadas en el principio de funcionamiento ideado por el Dr. Moineau.

Al ser estas bombas solo fabricadas por potencias mundiales debido a su complejidad tecnológica, principalmente en la fabricación de dos piezas que constituyen el corazón de estos equipos como son el estator y el rotor, dichas firmas comienzan a elevar sus precios y aprovechándose de desventajas comerciales impuestas a Cuba por el bloqueo norteamericano no permiten la adquisición de repuestos para las mismas, obligando al país a comprar bombas nuevas a elevados precios como el caso ocurrido en el año 1989 en la Empresa Glucosa Cienfuegos cuando se deteriora el estator de la bomba de la planta de glucosa paralizando totalmente la fábrica, y por no vendersele un estator de repuesto que su precio oscilaba en los \$600.00 USD, la fábrica se vio obligada, para continuar con su producción, a comprar una bomba completa del mismo tipo a un precio de \$6 000.00 USD pagando 10 veces más que lo requerido por la solución real a su problema.

Ante esta situación Cuba se ha visto obligada a desarrollar sus propias tecnologías, patentadas en la actualidad, y se han comenzado a desarrollar novedosos métodos de cálculo, nuevos diseños y nuevas tecnologías para la fabricación de los diferentes componentes de las Bombas de Cavidad Progresiva. Así es que en la Empresa Glucosa de la ciudad de Cienfuegos a partir de la paralización sufrida en el año 1989, un colectivo de trabajadores encabezados por los Ing. Antonio Llody Pérez al cual posteriormente se le incorpora el Ing. Yovany Llody García, se dan a la tarea de investigar y desarrollar métodos de manufactura convencionales y no convencionales que permitieron crear novedosas tecnologías de manufacturas, combinando de forma inteligente las máquinas herramientas

convencionales con que cuenta el país con novedosos métodos y dispositivos especiales de maquinado lo que permitió vulnerar el patrimonio exclusivo que tienen varias firmas a nivel mundial en la producción de este tipo de bombas (Llody, 2008)

A partir de la década del 90 comienza a funcionar en la Empresa Glucosa un Taller para la Recuperación de Bombas de Cavidad Progresiva. En dicho taller inicialmente la recuperación de estas bombas consistió en la fabricación de los estatores de goma, que constituyen el elemento que mayor deterioro sufre y producto de cuyo desgaste las bombas quedan inutilizadas. Para la fabricación de los mismos fue necesario construir un conjunto de máquinas y dispositivos entre los que encontramos una máquina combinada de extrusión-inyección de caucho, Autoclave para vulcanización, prensa, complejos moldes de acero y varios dispositivos auxiliares los cuales permitieron desarrollar un total de 12 modelos de estatores utilizados principalmente en industrias tan sensibles como la alimenticia y azucarera. (Llody, 1996)

Una etapa posterior del desarrollo de las investigaciones ha sido la de enfrentar la recuperación o fabricación de los rotores de dichas bombas. Se han planteado dos posibles tecnologías: mediante arranque de virutas en el caso de los rotores macizos la cual ha sido desarrollada totalmente (Llody, 2004) y mediante la deformación plástica (Aluminoforging) de un tubo de acero inoxidable en el caso de los rotores huecos la cual se encuentra en fase de desarrollo (Aleman, 2008). La presente investigación es parte del desarrollo de esta nueva tecnología de fabricación de los rotores.

La elaboración primeramente de toda la tecnología de manufactura de los estatores y posteriormente el desarrollo de un método para la fabricación de los rotores permitió que a partir del año 2002 salgan a la luz los dos primeros modelos completos de bombas clasificados como ALL- 43 y ALL-35 las cuales han sido introducidas con gran aceptación en varias industrias como es el caso de los Combinados Lácteos, Industrias de Conservas, Industrias de Jabonería entre otras. (Llody, 2007)

Formulación del Problema.

Debido a la exclusividad en la fabricación y desarrollo de las Bombas de Cavidad Progresiva por empresas de los países desarrollados, no se publican los métodos de cálculo de sus diferentes componentes viéndose Cuba en la necesidad de desarrollar sus propios Esquemas de Análisis y sus propios Métodos de Cálculo.

Objeto de Estudio.

El Objeto de Estudio del presente trabajo son los Rotores, los Estatores y los Acoplamientos de Compensación empleados en las Bombas de Cavidad Progresiva.

Hipótesis.

Resulta posible desarrollar un Nuevo Esquema de Análisis para el cálculo de las fuerzas internas en los rotores de las Bombas de Cavidad Progresiva, utilizando el Esquema de Viga sobre Fundación Elástica en la zona de contacto rotor - estator, para poder calcular la ley de distribución de la reacción del estator sobre el rotor, la flecha, la pendiente, las fuerzas de cortante y momentos flectores a que está sometido el rotor en dicha zona bajo la acción de la fuerza que se origina en el acoplamiento cardánico.

Objetivo General.

Con la elaboración de este trabajo se pretende desarrollar un Nuevo Esquema de Análisis para el cálculo de las fuerzas internas y la evaluación de la resistencia de los rotores de las Bombas de Cavidad Progresiva que permitirá calcular con una exactitud adecuada el espesor de la pared mínimo requerido en los rotores huecos de dichas bombas, para su fabricación mediante la Tecnología “Aluminoforging”

Objetivos Específicos.

- ✓ Profundizar en el Estado del Arte de las Bombas de Cavidad Progresiva, fundamentalmente a través de la búsqueda de patentes en aspectos relacionados con diseños de las bombas y de sus componentes fundamentales: los estatores, los rotores y los acoplamientos de compensación empleados en el accionamiento de los rotores.
- ✓ Desarrollar, aplicando el esquema de viga sobre fundación elástica un nuevo Esquema de Análisis para la evaluación de las fuerzas internas, desplazamientos y tensiones provocados por la fuerza que se origina en el acoplamiento.
- ✓ Realizar un estudio de la resistencia mecánica de un rotor para poder obtener el diámetro interior máximo que garantiza el mínimo espesor de la pared requerido en el mismo.

Novedad Científica.

La Novedad Científica fundamental del Trabajo es precisamente el Nuevo Esquema de Análisis que permite la solución del sistema hiperestático complejo que representa el contacto elástico entre rotor y estator utilizando el esquema de viga sobre una fundación elástica y la obtención por primera vez en la práctica de la distribución de la flecha, la pendiente, la reacción no uniformemente distribuida del rotor sobre el estator y los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores del rotor provocados por la carga sobre el acoplamiento.

Importancia Práctica.

El desarrollo de este nuevo Esquema de análisis permite poder evaluar adecuadamente la resistencia de los rotores para poder precisar el diámetro máximo interior de los rotores huecos para su fabricación mediante la tecnología investigada de “Aluminoforging”

Capítulo I

Capítulo I:- Estado del Arte. Generalidades.

Las bombas helicoidales de rotor excéntrico, conocidas en el mundo como bombas MONO (derivación del nombre de su inventor, el francés MOINEAU) son del tipo volumétrico rotativo.

Su aplicación fundamental se encuentra a partir del límite de viscosidad del fluido bombeado que hace imposible o inconveniente el uso de las bombas centrífugas. Sin embargo, sus características de autoaspiración (autocebantes), de caudal proporcional a la velocidad de giro, de elevada presión de descarga para pequeños caudales, su capacidad para bombear productos sólidos, su resistencia a la abrasión y otras cualidades la han hecho interesante para otros campos de aplicación en los que se utilizan bombas centrífugas o de otros tipos.

1.1. Modelos de Bombas Fabricadas a Nivel Mundial. Búsqueda de Patentes.

La bomba de cavidad progresiva tiene una larga historia. Fue inventada y diseñada en los finales de los años 20 del siglo pasado (1920) por un Francés Rene Moineau. Moineau se proponía diseñar un compresor rotativo y en el proceso creó un mecanismo rotativo nuevo que podía ser usado para la variación en la presión de un fluido, que él lo denominó como “capsulismo”. Su aspiración era poder usar ese fenómeno de “capsulismo” por el descubierto en bombas, compresores, o motores.

El principio Moineau ha sido utilizado en muchas industrias en una amplia variedad de aplicaciones desde su licenciando. Ha sido utilizado como una bomba en casi todas las industrias: químicas, del carbón, alimenticias, metalurgia, minería, papel, petróleo, textil, tabaco, agua y tratamiento de agua. En la industria petrolera, la misma ha sido utilizada como bomba de transferencia por superficie por varias décadas.

Una segunda patente de Dr. Moineau utilizó un piñón externo elastomérico (estator) para lograr un ajuste compresible entre los dos piñones (rotor y estator), eliminando cualquier necesidad de deslizamiento. El efecto de eliminación del movimiento deslizante entre el rotor y el estator conduce a una alta eficiencia volumétrica a altas y bajas viscosidades de fluido, así como una resistencia superior a la abrasión en comparación con las demás bombas de desplazamiento positivo.

1.1.1. Modelo 2.320.467:

En Agosto del año 1949, John B. Wade patentó (Patente # 2.320.467) la fabricación de rotores huecos de bombas de cavidad progresiva por el método de hidroconformado. Este método fue desarrollado con el objetivo de mejorar las antiguas bombas Moineau, registradas en la Carta Patente # 2.028.407. Estas bombas constituidas de un rotor largo que posee una configuración de rosca helicoidal escalonadamente espaciada, poseen un rotor que rota dentro de un estator de goma. Estas aperturas poseen una rosca helicoidal doble interna, tal que una serie de bolsillos o espacios cerrados con fluidos apretados son formados entre el rotor y el estator, los cuales se mueven axialmente desde la entrada hasta la salida final de la bomba según el rotor este rotando. Cada uno de estos bolsillos serán los que

generaran la acumulación de fluidos en la entrada de la bomba y por lo tanto serán los encargados de transportarlo hasta la salida, donde estos bolsillos serán acortados, produciendo esto la acción de bombeo.

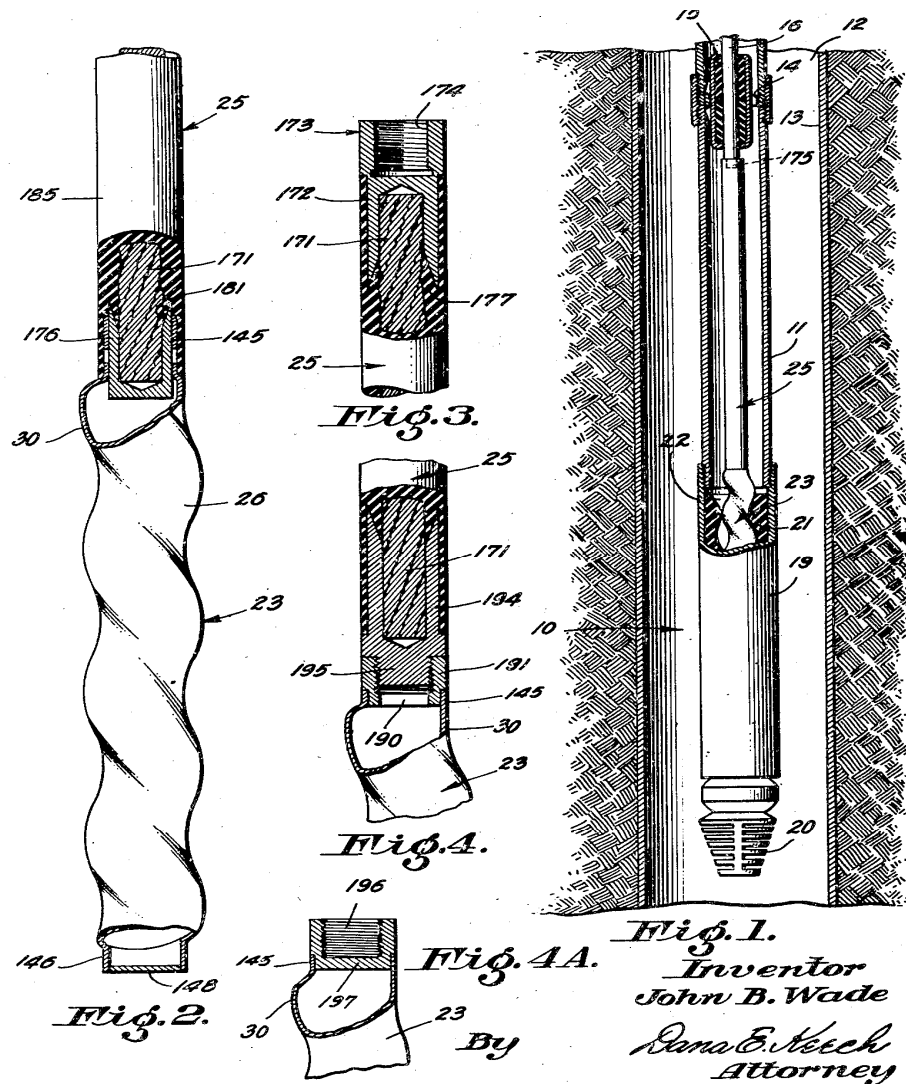


Figura 1.1: Diagrama del Modelo 2.320.467.

A mediados de los años 1950, el principio de la bomba de cavidad progresiva fue aplicado a las aplicaciones del motor hidráulico reversando la función de la bomba de cavidad progresiva. El dispositivo sería movido por el fluido en lugar de bombear fluido. Con los elementos de la bomba utilizada como motor podía ser manejada para perforar y trasegar barros y otros fluidos. Se convirtió en la fuerza motriz para motores de perforación. El principio de Moineau es ahora ampliamente usado en la industria perforadora de petrolera.

1.1.2. Modelo F01C 110; F01C 504; F16B 700:

El 26 de Agosto del año 1977 Clifford H. Allen patentó un ensamble de árbol flexible, para la bomba de cavidad progresiva, para conectar un árbol propulsor para un rotor orbital. Los componentes de la bomba incluyen un estator tubular con una superficie interior helicoidal y un rotor orbital tubular ahuecado dentro el estator conectado operablemente al árbol y teniendo una superficie externa helicoidal. El rotor y el estator definen allí entre cavidades selladas de bombeo que adelantan axialmente como el rotor gira y órbita dentro del estator. El rotor tiene un conector ahusado con una sección transversal poligonal (De forma piramidal) en su extremo exterior. El rotor está acoplado al árbol propulsor del rotor por el eje flexible de acoplamiento que se extiende a lo largo del rotor ahuecado y eso tiene una amplia cabeza ahusada formada para estar muy apretado en el conector y ser retenido allí dentro mediante un tornillo. El extremo opuesto del eje de acoplamiento está conectado al árbol propulsor fuera del rotor. El árbol de acoplamiento flexiona para acomodar el movimiento orbital del rotor durante la operación de la bomba. También un retenedor se sello único está usado para alojar un sello empacador del eje. El retenedor facilita la extracción y reposición de los componentes del sello.

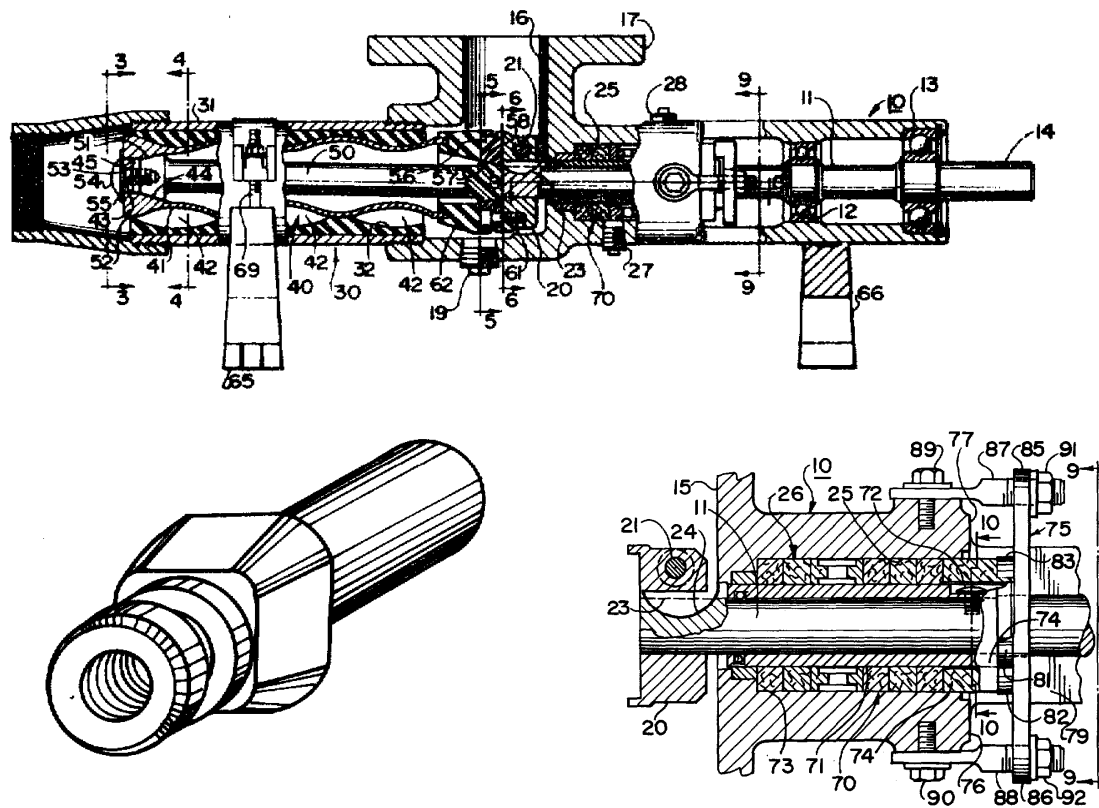


Figura 1.2: Diagrama del Modelo F01C 110; F01C 504; F16B 700.

En los inicios de los años de 1980, la bomba PC fue utilizado como un método de elevación artificial en la industria petrolera. Y bien pronto se divulgó como una bomba alternativa para los métodos convencionales de elevación y para establecer un mercado nuevo para la bomba de la PC.

1.1.3. Modelo E21B 4710:

En Mayo 27 del año 1994, Dan Bownes y Darren Wiltse de Canada patentaron un aparato y método para taponar un cordón de la tubería de un fluido produciendo bien debajo de una bomba de cavidad progresiva accionado por una barra de succión, donde la válvula sea accionable por el desplazamiento axial del rotor de la bomba dentro el estator por el movimiento vertical del cordón de la barra de succión. La válvula puede consistir de un asiento fijado al interior de la tubería abajo del rotor y el miembro de la válvula al fondo del rotor y es adaptado de ser metido en un enlace de sellado con el asiento de la válvula por movimiento descendente del rotor.

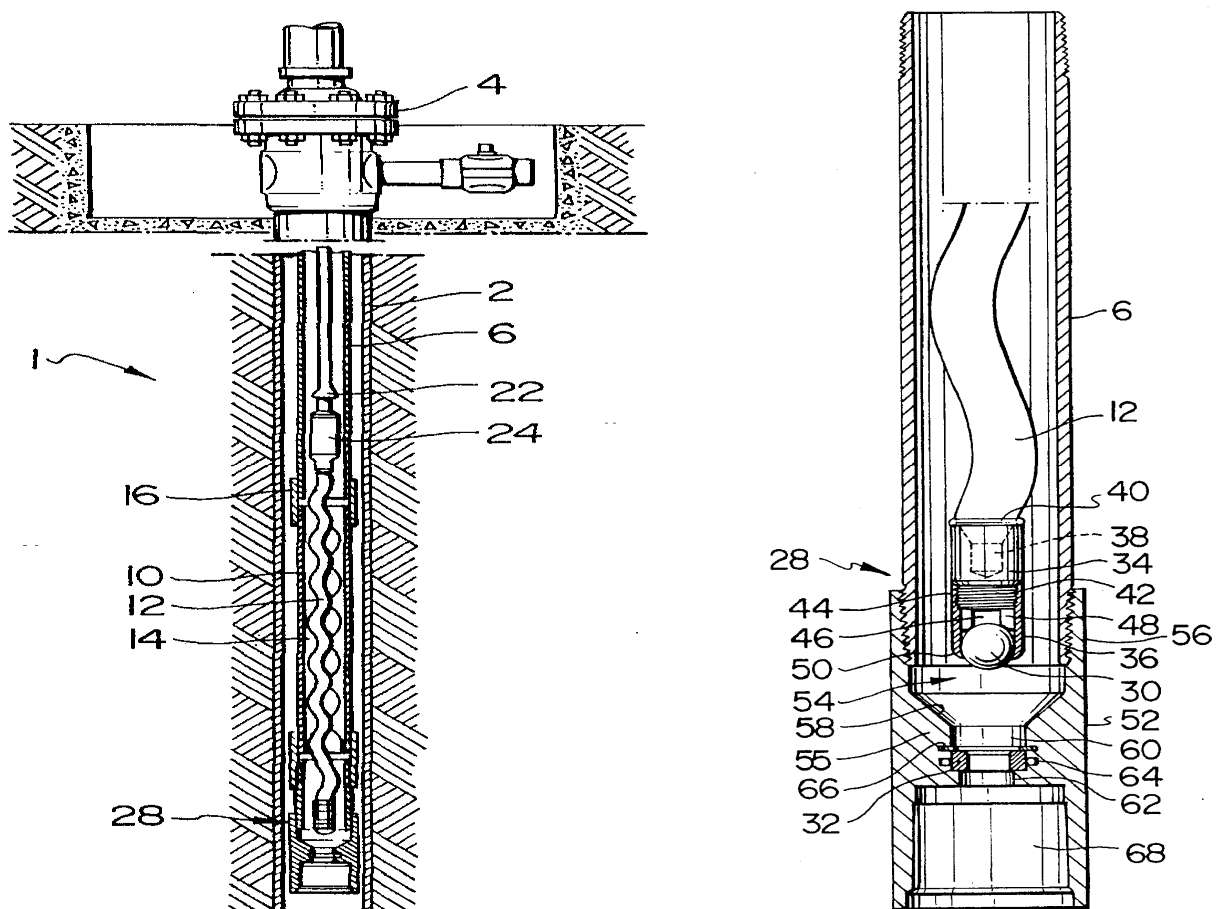


Figura 1.3. Diagrama del Modelo E21B 4710

1.1.4. Modelo F04C 2107:

En Agosto 31 del año 1995, Rajan Varadan patentó una bomba de cavidad progresiva que tiene un rotor con un hueco longitudinal e incluyendo por lo menos una hélice está montado excéntricamente dentro de un estator que tiene por lo menos dos hélices. En un primer forma el rotor esta accionado por un árbol propulsor excéntrico que comparte una superficie journal con el hueco del rotor a través la longitud

entero del rotor. En la segunda y tercera formas, el rotor es manejado por un árbol propulsor concéntrico con el estator que acciona un bloque propulsor tiendo un hueco que es excéntrico relativa al estator. Un hub del rotor está montado rotativamente dentro el hueco del bloque propulsor. El árbol propulsor también acciona un árbol auxiliar longitudinal dentro el hueco longitudinal del rotor. El árbol auxiliar esta fijamente acoplado a un segundo bloque propulsor que acciona la cabeza del rotor. A manera de la actuación giratoria externa es aplicado al árbol propulsor, el bloque propulsor gira, actuando como una manivela sobre el hub del rotor para manejar el rotor. Simultáneamente, el árbol propulsor acciona el árbol auxiliar longitudinal que maneja el segundo bloque propulsor, este segundo bloque entonces actuando como una manivela sobre la cabeza del rotor. Una entrada y salida de fluido están incluidas con el estator, mientras que el rotor gira y orbita con el estator, fluido contenido en las cavidades entre las hélices del rotor y estator están bombeados progresivamente.

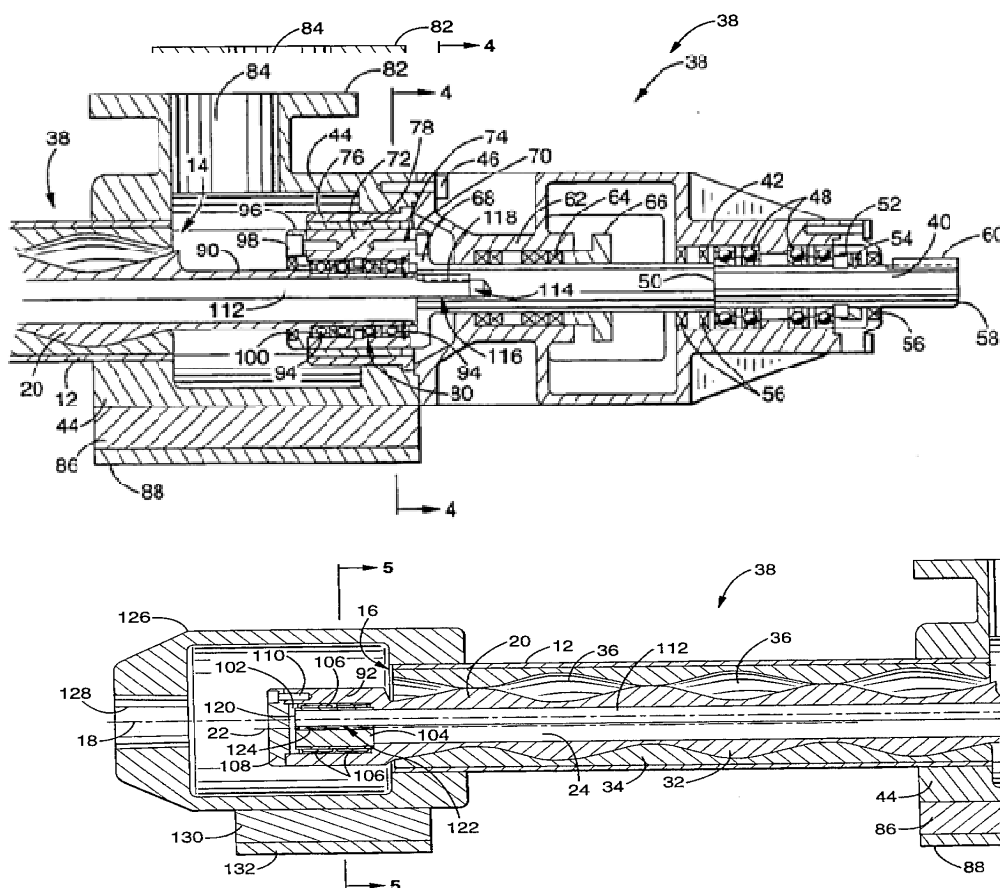


Figura 1.4.a Diagrama del Modelo F04C 2107

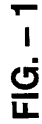


Figura 1.4.b. Diagrama del Modelo F04C 2107

1.1.5. Modelo F04C 2107; F04C 500:

En Abril 1 del año 1998, Steven L. Cunningham patentó una bomba de cavidad progresiva en cual porciones del estator fueron sacados o cortados para proveer un grado de acceso radial a las cavidades formadas por los elementos de la bomba dentro la cámara succionante de la bomba. Una forma de tal estator incluye una porción quitada que resulta de un corto plano que empieza desde el extremo de succión del estator, próximo al eje central del agujero interno del estator, es reflectado hacia el extremo de descargo del estator y por fuera del eje central, y se intercepta una ranura helicoidal interna del estator que define una primer cavidad. En otro forma del estator, la porción quitado del estator es un corto radial que sigue la ranura helicoidal del estator. Como consecuencia, cuando uno de tales estatores modificados está extendido en una cámara de succión de un sistema de la bomba de cavidad progresiva, el material bombeado va a encerrar circunferencialmente el estator y entrará en las cavidades formadas por el estator y elementos de bombeo a través el lado del estator y después por las porciones quitadas.

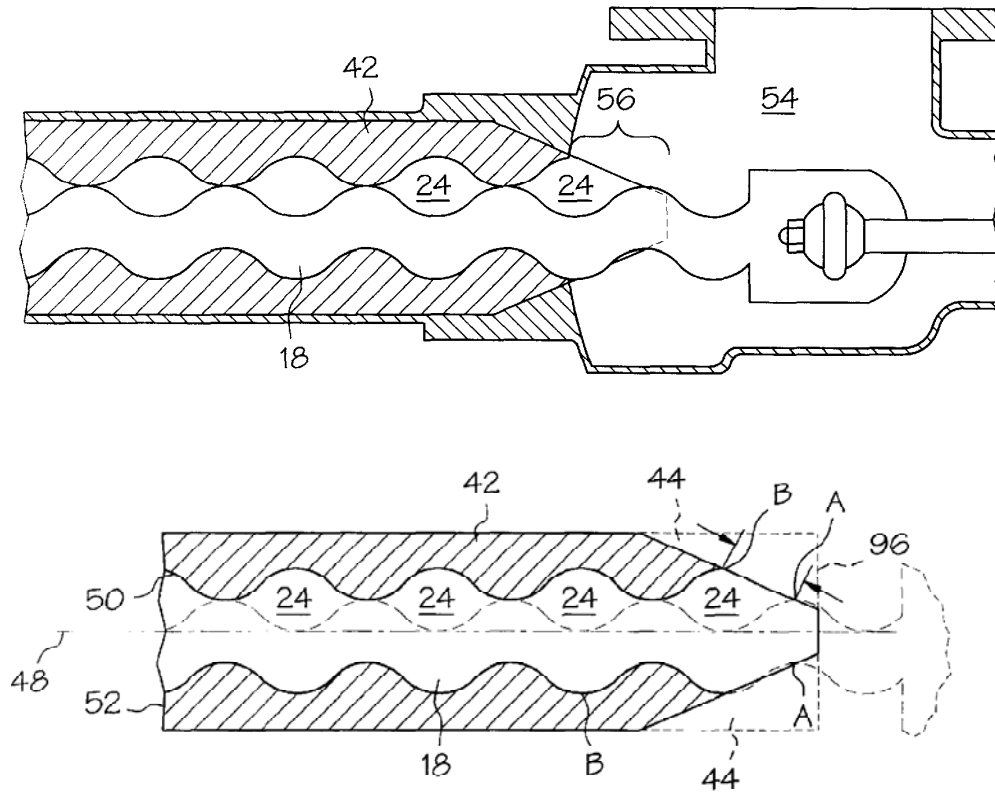


Figura 1.5. Diagrama del Modelo F04C 2107; F04C 500

1.1.6. Modelo F04C2/107; F04C2/00:

En Marzo 11 del año 2001 Alfred M. Osborne patentó una bomba de cavidad progresiva con un estator fusible para bombear fluidos de composiciones explosivos u otros materiales sensibles al calor. Su invención consistió de una entrada y una salida; el estator es fusible en o por encima de una temperatura máximo de operación de bombeo seleccionada; un rotor y un árbol propulsor conectando el rotor a una fuente de energía; donde el estator fundirá por encima de la temperatura seleccionada para evitar la generación de temperaturas dentro de la bomba que sea tan alto para crear un peligro.

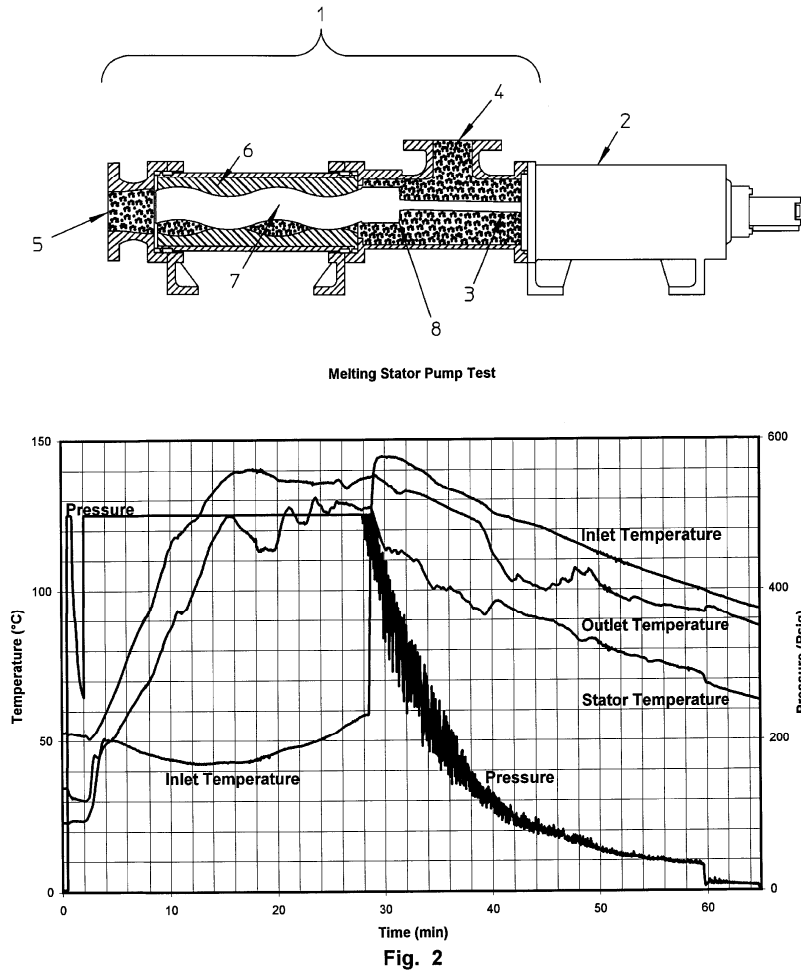


Figura 1.7. Diagrama del Modelo F04C2/107; F04C2/00 y Grafica de Efecto de Temperatura

Durante los años la gente han hecho modificaciones a la bomba siendo una pieza del mismo o una función por ejemplo, en Septiembre 20, 2001 Sabastian Jager Hannover patentó una maquina que usa el principio de Moineau para profundo taladrando.

En 14 de Febrero del 1994, Stephen P. Hulley, Roger L. Naylor y Gareth D. Thomas patentaron un ensamble de estator para la bomba que consiste en un estator de material elástico que tiene un calibre

helicoidal, la cara externa cilíndrica del estator tiene un pluralidad de axialmente extendiendo los proyecciones externos espaciados circunferencialmente. Un miembro rígido generalmente tubular tiene recesos cooperadores y puede formarse de un tubo unitario o de una pluralidad de elementos de cáscara con una configuración de laña cooperador. Las caras laterales de las proyecciones son planas y ya sea paralelo o inclinado entre sí en una dirección radial externa.

Actualmente, la bomba PC sirve ampliamente para levantar fluidos de profundidades de 2000m, y más profundo en pozos de aceite y gas. La bomba de cavidad progresiva ofrece a la industria petrolera un gran número de ventajas por encima de los equipos tradicionales de elevación, de cual lo más importante es bajando el costo por barril subido.

1.2. Principio de Funcionamiento

Las bombas de cavidad progresiva consisten en dos elementos helicoidales, uno dentro el otro. El elemento interior, o piñón, es designado como el rotor y el elemento exterior, o barril, está referido como el estator. Para que funciona la bomba, es necesario que el piñón rotatorio tiene una rosca (o diente) menos que el estator envolvente, para que el paso del rotor sea igual a 0,5 del paso del estator. Una bomba hecho de un doble-diente estator y un rotor de diente singular se llama una bomba de lóbulo singular.

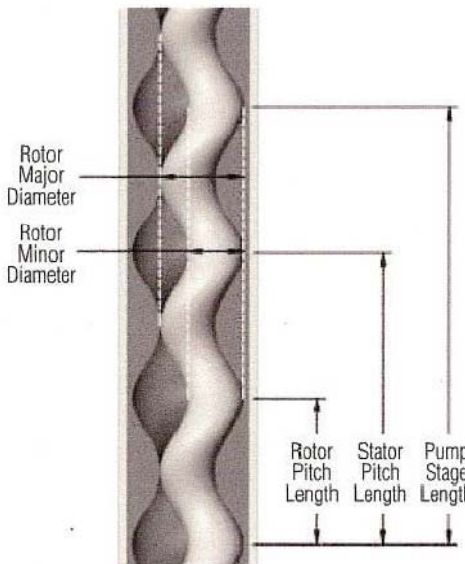


Figura 1.7. Partes del Rotor

Cuando el rotor gira alrededor su eje, su borde extremo gira en una dirección contraria alrededor el eje del estator. Este movimiento combinado de elementos helicoidales resulta en la formación de cavidades que se mueve axialmente desde la succión de la bomba hasta la descarga sin que se formen sedimentaciones en el interior del cuerpo. (Progressing Cavity Pump, 2009)

Cuando la línea helicoidal de cierre deja de existir por causa del desgaste del estator producto del funcionamiento de la bomba, la misma deja de funcionar, siendo ésta la causa fundamental por la cual estas bombas se deterioran.



Figura 1.8. Movimiento del Rotor

1.3. Descripción de las Partes Principales:-

La bomba de cavidad progresiva se divide en 5 conjuntos fundamentales:-

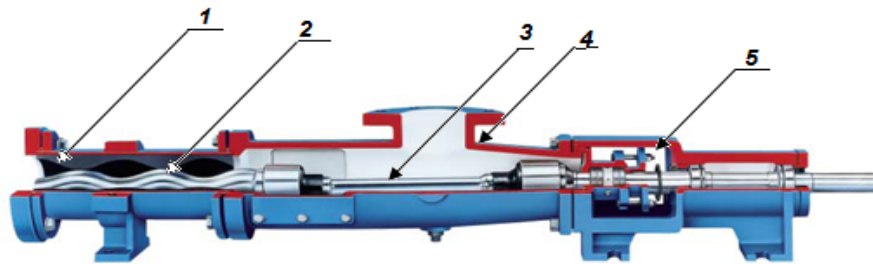


Figura 1.9. Partes Principales de la Bomba

1 - Estator:

Este constituido por una coraza o tubo de acero al que está adherido un núcleo de un compuesto elástico el cual depende de la sustancia bombeada Su forma exterior es cilíndrica y la interior presenta una helicoidal por la cual se desliza el producto bombeado. Los materiales del estator se seleccionan cuidadosamente entre varios polímeros y elastómeros entre los cuales tenemos: Buna - N, Caucho Natural, EPDM, Fluorelastómeros, etc.

2 - Rotor:

Los rotores se construyen de acero los cuales se endurecen mediante tratamientos térmicos para darles una mayor resistencia a la abrasión provocada por las partículas que hay dentro del fluido que se bombea. Se le aplican gruesas capas de cromo duro con el objetivo de aumentar su resistencia a la abrasión y a la corrosión. Los rotores presentan una forma de tornillo sinfín excéntrico helicoidal con una sección circular constante, los mismos pueden ser huecos o macizos en dependencia de la tecnología empleada en su fabricación.

3 - Sistema Cardánico:

Es de aleación especial de alta resistencia, transmite el movimiento rotativo excéntrico asimilando las tensiones combinadas de flexión y torsión. Se articula con el eje y el rotor por medio de uniones tipo cardán, que se encuentran necesariamente donde pasa el fluido que se bombea. La misma va recubierta de un elastómero, inerte a la mayor parte de los productos químicos.

4 - Cuerpo de Succión:

En dicho cuerpo se aloja la biela, y el mismo presenta la brida de succión por la cual se introduce el producto a bombear, se construye generalmente de acero inoxidable presentando una forma cilíndrica.

5 - Caja de Rodamientos:

Se construye de hierro fundido o acero, en ella se alojan los rodamientos que soportan el eje de transmisión, los mismos son los encargados de soportar las fuerzas axiales que se producen debidas al bombeo.

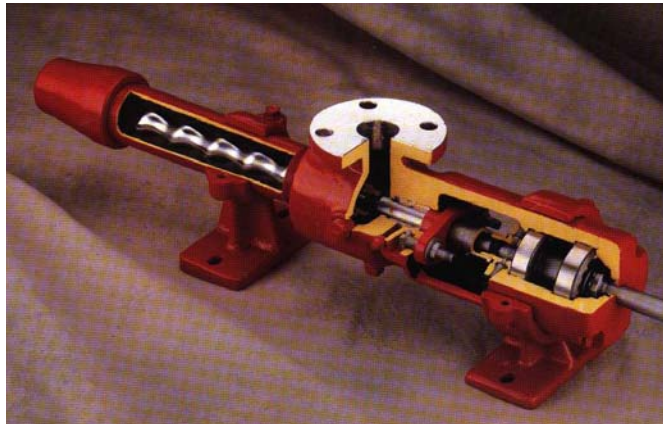


Figura 1.10. Foto de un Corte de la Bomba

1.3.1. Materiales Empleados del Rotor

Como el rotor tiene contacto directo con el producto de bombeo los cual varían significativamente desde productos ácidos hasta productos básicos los cuales tienden a provocar corrosión en las piezas de acero al carbono, por eso se escoge un acero inoxidable austenítico que en este caso es el acero AISI 316.

Acero inoxidable Austenítico al Cromo – Níquel AISI 316 (10X17H13M2T). Como se conoce de la asignatura “Ciencia de Materiales” este grupo de aceros (los aceros austeníticos inoxidables) se emplean mucho no solo por sus altas propiedades anticorrosivas, sino también por sus buenas cualidades tecnológicas y mecánicas. Estos aceros se laminan bien en caliente y en frío, soportan la embutición profunda y el perfilado en frío y pueden soldarse eléctricamente sin que adquieran fragilidad en zonas próximas a la costura.

El tratamiento térmico de los aceros austenítico inoxidables es relativamente sencillo y consiste en el temple en agua desde 1050--1100°C. El calentamiento hasta estas temperaturas hace que se disuelvan los carburos de cromo (M₂₃C₆) y el enfriamiento rápido fija el estado de solución sólida sobresaturada. Un enfriamiento lento no es tolerable, ya que en esta caso, lo mismo que le revenido, pueden precipitarse los carburos y empeorarse la plasticidad y las propiedades anticorrosivas. Además, durante el temple se producen procesos de recristalización que eliminan los efectos de la deformación plástica que suelen sufrir estos aceros. Como resultado del temple, la dureza de los aceros austenítico inoxidables no aumenta, sino que disminuye, por lo que, para ellos, el temple es una operación térmica ablandamiento.

Las propiedades mecánicas de los aceros austenítico inoxidables templados (ablandados) se caracterizan por un nivel bajo del límite de fluencia, una resistencia no muy alta y una gran plasticidad.

Según la Llave de los Aceros las propiedades del AISI 316 para las distintas temperaturas son las mostradas en la siguiente tabla.

Tabla 1.1. Llave del Acero AISI 316 para distintas Temperaturas

Acero: AISI 316							
Temp. °C	Límite de Fluencia MPa	Límite rotura MPa	% Elong.	%Estricción	K % / N ; mm	E MPa	Ef
800	170	210	26,6	44,1	0,18	138000	0,0012
900	132	146	38,5	50	0,41	127000	0,0010
1000	75	83	34,5	64	0,78	115000	0,0007
1100	42	47	40,5	84,4	1,83	103000	0,0004
1200	23	28	77,3	99,3	3,56	91000	0,0003
1250	18	22	79,6	100	4,63	77000	0,0002

1.3.2. Materiales Empleados del Estator

Como el estator tiene contacto directo con el producto de bombeo los cual varían significativamente desde productos ácidos hasta productos básicos los cuales tienden a provocar corrosión en las materiales empleados en el estator. Por eso se escoge caucho (goma) nitrilo que es un copolímero de butadieno/acrilonitrilo (75% de butadieno en peso) se usa especialmente por su excelente resistencia a aceites y solventes aromáticos. Sin embargo, su procesado es difícil.

Este tipo de caucho sintético, producido por primera vez en 1949, se obtiene por copolimerización de isobutileno con butadieno o isopreno. Es un plástico y puede trabajarse como el caucho natural, pero es difícil de vulcanizar. Aunque no es tan flexible como el caucho natural y otros sintéticos, es muy resistente a la oxidación y a la acción de productos corrosivos. Debido a su baja permeabilidad a los gases, también se utiliza en las cámaras interiores de los neumáticos

Tabla 1.2. Características Técnicas de la Goma del Estator

Características técnicas		Norma	Unidades	Valor
Propiedades				
Dureza		ASTM D 2240	Shore A	60 ±5
Tensión de rotura	Tensión de rotura	ASTM D 412	Mpa (psi)	6 (880)
Elongación punto rotura	Elongación punto rotura	ASTM D 412	%	350
Tensión a 300%	Tensión a 300%	ASTM D 412	Mpa (psi)	4,4 (638)
Resistencia al rasgado	Resistencia al rasgado	ASTM D 624	Mpa (psi)	2,89 (419)
Abrasión		DIN 53516	mm ³	225
Envejecimiento (70°)				
Deformación a compresión (22h)		ASTM D 395	%	24,2
Variación de dureza (70h)		ASTM D 573	Shore A	+6
Variación de la tensión punto rotura (70h)		ASTM D 573	%	+15
Variación de la elongación		ASTM D 573	%	-20
Características físicas		*Excelente resistencia a la compresión * Moderada resistencia a la intemperie * A 70°C conserva buenas propiedades mecánicas * Se emplea para la fabricación de juntas		
Características químicas		* Excelente resistencia a lubricantes, grasas y algunos combustibles		

1.3.3. Dispositivos para la Transmisión Cardánica

Existen diferentes tipos de sistemas cardán que se emplean en las bombas de cavidad progresiva algunos de ellos son:-

- Acoplamiento Universal de Bola y Pasador
- Acoplamiento Universal de tipo Engranado
- Barra Flexible
- Estator de Tambaleo
- Acoplamiento Universal de Goma
- Acoplamiento Oldham
- Acoplamiento Universal de Lóbulo
- Eje Flexible

Acoplamiento Universal de Cojinete y Pasador:

Usada por Dr. Moineau en su diseño más temprano de la bomba de cavidad progresiva, las variaciones de este diseño son todavía utilizadas por los concesionarios originales, (por ejemplo, Robbins y Myers, S.A.), y muchos de los fabricantes de la bomba más reciente.

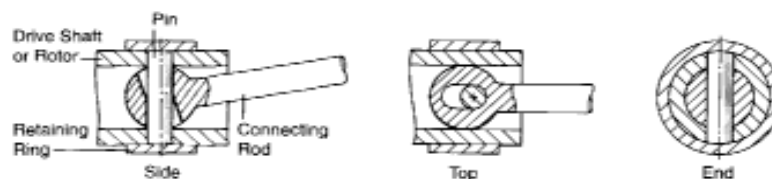


Figura 1.11. Diagrama del Acoplamiento de Bola y Pasador

Nota que el hueco en la bola de la biela no es maquinado angularmente en todas las direcciones como un reloj de arena, pero sólo a lo largo del plano axial del pasador (la Figura 1.11). Esto permite el meciendo necesario de la bola en el pasador mientras lo demás de la acción universal es afectado por el pivote de la bola en el eje del pasador.

El torque y los componentes axiales de impulsión son transmitidos a través del contacto de la línea de la bola hasta el pasador mientras el componente radial de a la impulsión le sea transmitida otra vez a través del línea de contacto del rotor o conexión de eje por la superficie exterior de la bola. La única área donde a estas fuerzas está transmitida a través de una superficie es la interfaz entre el pasador y el eje o la cabeza del rotor. Es significativo que las fuerzas finitas transmitidas a través la línea de contacto, sin deformación o desgaste de las superficies, producen tensión infinita.

Dado estas presiones extremas al punto del contacto, los lubricantes hacen poco aparte de prohíbe abrasión. Con el debido respeto para un diseño que ha permanecido un jugador principal como un método de dirigir elementos de la cavidad progresiva por más de 60 años, es un acoplamiento universal libre de baja fricción, que puede correr sin lubricante, es simple y fácil de mantener y es uno de los métodos de impulso menos caros. El acoplamiento de la bola y del pasador, sin embargo, debe ser considerado más ligero que alguna de las alternativas más robustas disponible

Acoplamiento Universal de tipo Engranado

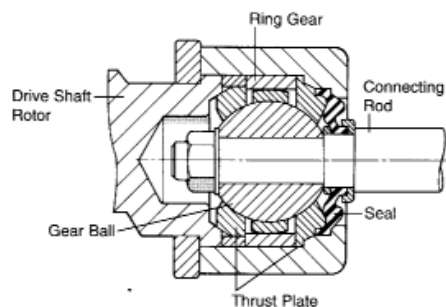


Figura 1.12. Diagrama del Tipo Engranado

El impulso del acoplamiento universal más escabroso, de servicio pesado disponible para bombas de la cavidad progresiva fue desarrollado por Robbins y Myers, S.A., y entró el mercado en los años de 1960 después del gasto extensivo de tiempo de desarrollo y la financiación. El torque es transmitido a través múltiples dientes endurecidos de engranajes angulares de presión. El engranaje interior es coronado, como se muestra en una manera exagerada en la Figura 1.12, para permitir menos que $1\text{-}1/2^\circ$ del ángulo requirió para el movimiento universal. Este mecanismo impulsor es similar a eso usado en los acoplamientos flexibles de servicios pesados para décadas

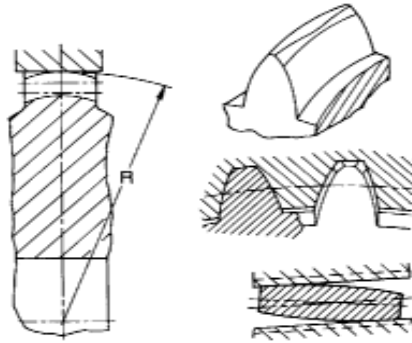


Figura 1.13. Diagrama de los Dientes del Acoplamiento Tipo Engranado

Las fuerzas de impulsión son transmitidas a través de la bola esférica del piñón a platos de impulsión de bronce concordantes situados en cada lado de la bola haciendo el acoplamiento universal bidireccional (la Figura 1.12). Los platos de impulsión son enlavadados, como es el engranaje exterior endurecido para la cabeza del rotor o el eje. La bola del engranaje es accionada por la biela a través de una canal intrincada de cepejón plana y cerrada en posición correcta con una tuerca del mechón. El acoplamiento universal completo es casi completamente encapsulado en una coraza pesada de metal que deja muy poco del sello elastomérico expuesta o vulnerable a daño causado por flujo de fluido.

Aunque el torque es transmitido por contacto de la línea a través de los dientes coronados endurecidos del engranaje, es un contacto múltiple de dientes del engranaje a distinción del solo contacto de la línea del acoplamiento de bola y pasador. La impulsión es transmitida a través del área amplio y completo del plato de impulsión. La lubricación es de suma importancia y el diseño del sello es superior.

Nota en Figura 1.12, la superficie respaldando del sello elastomérico se conforma a la forma del sello sin bordes afilados o puntos de pizca que podrían ser creados cuando una carga estática aplica fuerza al sello en contra del plato. También note que con el sello posicionado cerca del fulcro del acoplamiento universal y la biela experimentando un ángulo de movimiento de menos de $1-1/20$, los berridos va a través tensión o compresión mínimo, casi despreciable. En un diseño típico este movimiento será menor que $1/16$ ". Así, el movimiento casi insignificante y la bajo exposición de la superficie de los berridos son puntos más finos del diseño responsable para la vida sumamente larga operativa del acoplamiento universal tipo engranado. Los berridos están sujetos a través de la compresión en ambos el I.D. y O.D. creando el positivo sello de vida largo que es necesario con el acoplamiento universal del tipo engranaje desde que la retención de lubricación sea imperativa con contacto de área de superficie. El acoplamiento universal es empacado con una grasa extrema de presión que bajo la carga correcta no necesita ser reemplazado para años.

Es realmente obvio que este acoplamiento universal de tipo engranaje de servicio pesado sea un método más caro de manejar una bomba de cavidad progresiva que la bola y acoplamiento pasador original. Es también más difícil de ensamblar o desensamblar que la bola y acoplamiento pasador. Ambos métodos son fácilmente disponibles, pero son diseñados para servir ciclos diferentes de servicio. Si el servicio es relativamente ligero o intermitente, entonces el acoplamiento de la bola y pasador pueden proveer servicio adecuado y costo satisfactorio de mantenimiento. El acoplamiento del engranaje, por otra parte, es diseñado para operar sin mantenimiento para períodos de tiempo muchos

más largos. Experiencia sobre los últimos treinta años ha comprobado que esta ventaja del diseño está siendo realizada. La vida continua de servicio sin mantenimiento extendiéndose a lo largo de varios años ha sido bien documentada en Robbins y Myers

Acoplamiento de Barra Flexible

Otro método de manejar a elementos de la bomba de cavidad progresiva industrial que han enseñado alguna semblanza de uso con el tiempo es el eje flexible (la Figura 1.14). Para eliminar concentraciones de tensión, el eje flexible debe ser sumamente uniforme en el diámetro, fino sobre su largo completo y debe terminar en conexiones rígidas de la articulación lisas. Con las fuerzas impuestas por la inflexión de la barra, cualquier conexión de ajuste de deslizamiento estaría sujeta a desgastar e imposibilitaría desmontaje. Ajustes que son apretados para eliminar cualquier espacios libres en las conexiones son comúnmente usados, pero cualquier método que elimina espacios libres entre la cabeza de la barra y rotor en operación es aceptable

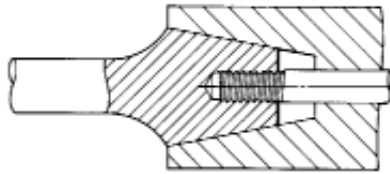


Figura 1.14. Diagrama del Acoplamiento de Barra Flexible

Como el lado de empuje de la bomba de cavidad progresiva necesita una caja encolmado del árbol propulsor, la descarga es usualmente el fin opuesto. El diferencial entonces pone la barra flexible normalmente bajo compresión. El diseño flexible de la barra entonces camina por la cuerda floja entre un diseño lo suficientemente rígida de resistir alabeo excesivo debido a la impulsión y suficientemente flexible a doblarse a través del camino excéntrico necesario sin incorporar fuerzas laterales indebidas sobre el estator y árbol.

Una barra flexible diseñada para funcionar bajo la tensión sólo es un dispositivo menos complicado como el alabeo no sea una consideración. Las bombas de cavidad progresiva en un campo petrolífero usa la flexión de una barra de impulso a satisfacer el movimiento excéntrico necesario. Los centralizadores son usados más alto en la cuerda de impulso a prevenir la barra de rozarse contra la tubería debido a desviación o fuerza centrífuga. Bombas de cavidad progresiva de agua manualmente manejado también ha usado la barra de impulso para transmitir la fuerza de torsión excéntricamente para décadas. Dado bastante longitud de la barra de impulso, obviamente no hay necesidad para acoplamientos universales.

Allí dentro consiste una de la desventaja del eje flexible. Alarga una bomba ya larga. Como mencionado previamente, el uso de aleaciones especiales como Titanio puede acortar el largo pero el diseño flexible del eje todavía resulta en la longitud de la bomba completa más larga de los más impulsos populares para bombas de la cavidad progresiva.

Acoplamiento de Estator de Tambaleo

En los inicios de 1950s, Robbins y Myers patentaron un dispositivo que eliminó la necesidad para acoplamientos universales en bombas de cavidad progresiva (la Figura 1.15). Por el montaje el estator en una falda elastomérica integral, este diseño dejó el estator moverse a través del movimiento excéntrico mientras directamente manejando el rotor en el centro. El diseño de la falda — su forma, el montaje y la vivienda — evolucionó del Robbins y Myers patente original para un diseño de una bomba de la cavidad progresiva capaz de presiones hasta 200 psi. Limitadas para las capacidades más pequeñas en la mayoría de los casos, millones de estas bombas han sido usadas en una variedad de aplicaciones.

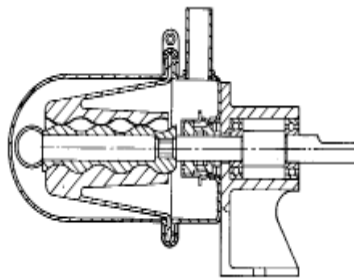


Figura 1.15. Diagrama del Acoplamiento de Estator de Tambaleo

Acoplamiento Universal de Goma

Durante los días críticos de los años 1950 en el Y12 renombrado plantan en Oakridge, los acoplamientos de la bola y pasador en cientos de bombas de la cavidad progresiva grandes, funcionando continuamente, fuera reemplazada por acoplamientos que permiten la acción de un grado excéntrico a través compresión de caucho. El fluido clasificado fue uno que desafió cualquier forma de lubricación y partes endurecidas fatigadas. Por lo tanto la obligación continua a la bola y pasador convencional imploraron una solución más responsable y los acoplamientos del caucho la sirvieron para el caso para esta aplicación.

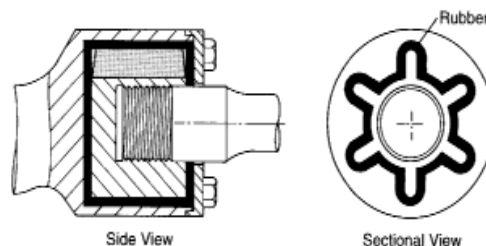


Figura 1.16. Diagrama del Acoplamiento Universal de Goma

Acoplamiento Oldham

El Oldham o acoplamiento deslizante del bloque (modificado para llevar impulsión en cualquier dirección) parece a primera vista ser un impulso ideal para bombas de la cavidad progresiva (la Figura 1.17). Desde que su movimiento lo permite tomar el lugar de dos acoplamientos universales, acortaría considerablemente la longitud completa de una bomba intrínsecamente larga. La impulsión y torque son transmitidas a través de superficies en contra de la línea contacta de acoplamientos de la bola y pasador. Sin embargo, estas dos ventajas ascienden a una desventaja enorme. El hecho que el acoplamiento experimente la excentricidad llena en una longitud cortísima quiere decir que el artificio de sellado va a través flexión extrema. El hecho que las cargas son transmitidas a través de superficies, tan previamente mencionado, significa que la lubricación correcta y el sellado de eso son de suma importancia. La irregularidad del bloque corredizo emerge y su constante movimiento niega el potencial de apoyo físico del sello elastomérico. A menos que el Oldham modificado es usado en una bomba para aceite lubricante donde un sello no es necesitado, ninguna solución práctica para el diseño del sello limita el valor de este dispositivo

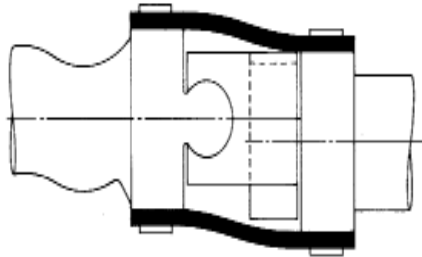


Figura 1.17. Diagrama del Acoplamiento Oldham

Acoplamiento Universal de Lóbulo

En 1967, Robbins y Myers patentaron un aparato que cortó formas del lóbulo en tubería algo similar en la configuración a la columna vertebral que fue capaz de tomar ambos el empuje y el torque y haría eso dentro de los diámetros interiores limitadas. Más tarde, una bola de empuje se agregó internamente para la capacidad adicional de empuje. Aunque algunos fabricantes del motor de fango actualmente usan otros métodos de impulso universal, el acoplamiento universal de lóbulo (la Figura 1.18) fue el método dominante de impulso para motores de fango para las primeras tres década de penetración pesada y crecimiento del mercado

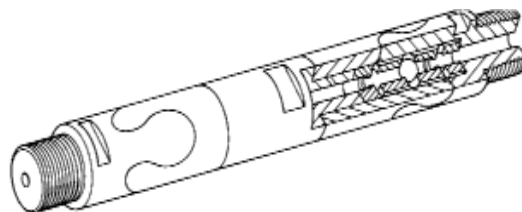


Figura 1.18. Diagrama del Acoplamiento Universal de Lóbulo

Acoplamiento de Eje Flexible

Elementos de la bomba de cavidad progresiva también ha sido accionado excéntricamente por diversos otros métodos de flexible estafando aparte de la barra sólida. El caucho cubrió cable flexible del alambre ha sido usado, así como también la tela y caucho reforzado en alambre riegan con una manguera para aplicaciones más ligeras, unidireccionales. Los cables o la manguera están usualmente en la tensión y el comportamiento del cable tiene que ser tal que es apretado en vez de desenrollar en la dirección de rotación.

(Universal Joint, 2009)

1.4. Búsqueda de Patentes de los Sistemas Cardán

1.4.1. Patente US3663044

En 4 de Mayo del año 1970 Gilbert E. Contreras de Los Angeles y Robert W. Graves de California patentó un sistema cardán donde el anillo gimbal redonda es reemplazado por un anillo que cuál es o cuadrado o en menos tienen los lados no curvas, conectados por esquinas redondas. Esta construcción minimiza o elimina las tensiones de torsión creados por cargando transversal de cuatro puntos y así logra un acoplamiento más fuerte para la misma cantidad de material, o más importante, permite el uso de una sección más pequeña o material menos caro y permite el acoplamiento ser más pequeño con respecto al diámetro del ducto, adicionalmente reduciendo el peso total del ensamble. La construcción puede utilizar metal de plato o lamina comparado con forjas de maquina o barras requeridos en construcciones previas, entonces disminuyendo mas los costos.

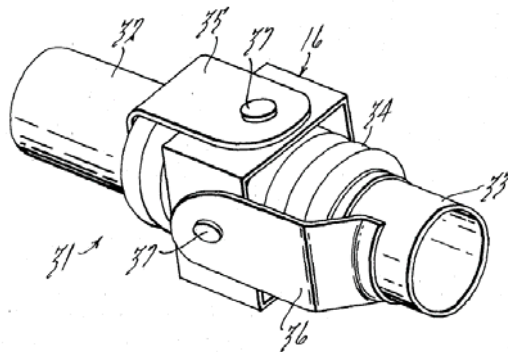


Figura 1.19. Diagrama del Patente US3663044

1.4.2. Patente US1916442

En 21 de Agosto del año 1929, Alfred H. Rzeppa de Detroit Michigan patentó un sistema cardán con el objetivo de proveer una construcción adaptada de transmitir movimiento rotativo entre dos extremidades del eje, no alineado axialmente y en una manera que el razón de velocidad angular en el manejo y los miembros manejados sea lo mismo y simultaneo. También que ninguna aceleración o deceleración

angular del eje debido a la acción del acoplamiento universal puede ocurrir a cualquier ángulo de manejo.

Él empleó tres miembros configurado como anillos, armados uno por dentro el otro y teniendo contactos mutuales a través superficies de cojinetes interiores y exteriores. Estos superficies son esencialmente zonas esféricas que tienen un centro común, para que los miembros del ensamble puede ser comparada a una pelota entre un segundo pelota y ellos dos dentro un tercer pelota, el ensamble completo siendo truncado por planos paralelos en los lados opuestos del centro común y procesando libertad perfecto del rotación relativa.

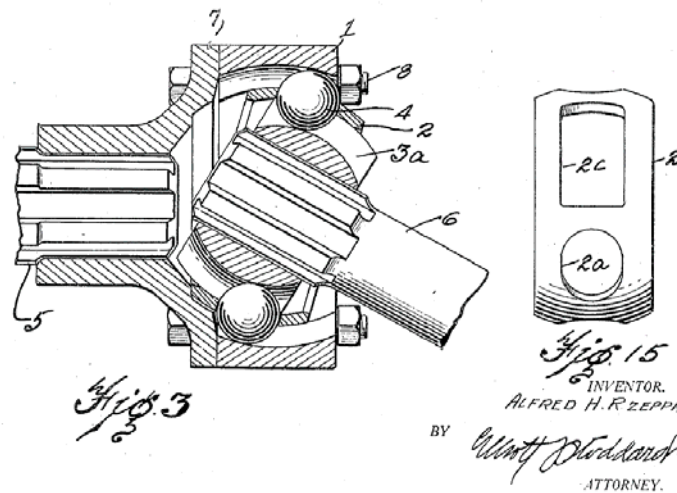


Figura 1.20. Diagrama del Patente US1916442

1.4.3. Patente US4065941

En 16 de Mayo del año 1975, Sadashiro Aoki de Tokyo Japan patentó un acoplamiento universal adaptado por uso en grúas de alto impacto. El acoplamiento está compuesto por un cárter tubular que tiene un primer y segundo cojinete. Un primer acoplamiento de cojinete teniendo un eje de entrada con un miembro de cojinete depositado en un lado y una cabeza fijada depositada en el otro lado entonces es acoplado al cárter tubular adyacente al primer extremo. Un segundo cojinete teniendo un eje de salida con un miembro de cojinete depositado a un lado y una cabeza de un conector al otro lado es acoplado al cárter tubular adyacente al segundo extremo. Un muelle externo es depositado alrededor el eje de salida y fijado entre la cabeza del conector y el segundo extremo del cárter. El muelle externo es organizado y configurado sobre el acoplamiento universal para incrementar la flexibilidad del segundo acoplamiento de cojinete y para causar el segundo cojinete a regresar a la alineación axial con el cárter tubular después de cada uso. Finalmente, un muelle interno también puede ser depositado en el cárter tubular entre el miembro de cojinete del primer acoplamiento de cojinetes y el miembro de cojinete del segundo acoplamiento. El muelle interno es posicionado en el cárter tubular para incrementar la flexibilidad axial del acoplamiento.

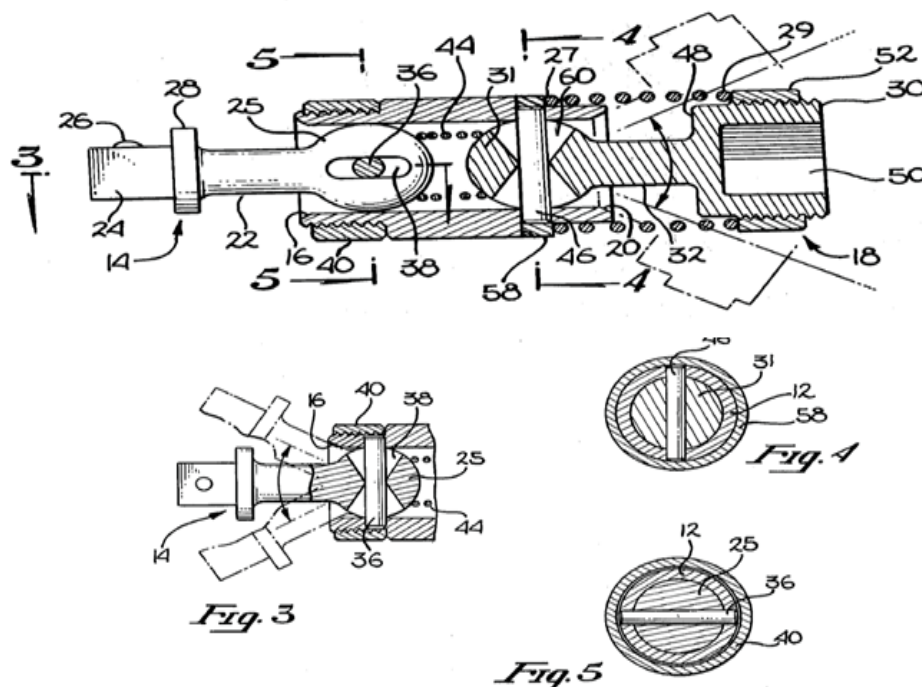


Figura 1.21. Diagrama del Patente US4065921

1.4.4. Patente US4365488

En 30 de Abril del año 1980, Haruo Mochida y Yoshiyuki Tanaka patentaron un sistema cardán que está compuesta de una primera y segunda yema cada uno teniendo dos huecos, un miembro de soporte rectangular hueco posicionado para incorporar con las yemas, el miembro de soporte teniendo cinco secciones de platos rectangulares dejando un orificio rectangular, y formado con cuatro huecos, los secciones de plato rectangular adyacentes siendo completamente integral entre si y pasadores insertables en los huecos de las yemas con el miembro de soporte, entonces produciendo un acoplamiento universal de peso ligero y alta resistencia a la torsión.

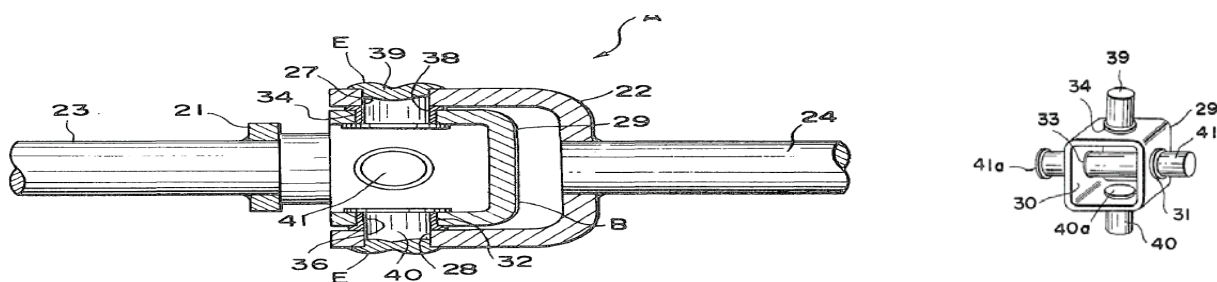


Figura 1.22. Diagrama del Patente US4365488

1.5. Búsqueda de Patentes de los Rotores

1.5.1. Patente US4948432

En 4 de Noviembre del año 1988, James K. Leach de Long Beach California patentó un rotor para una bomba MONO que compone una barra larga de metal teniendo un nicho hélice en su superficie exterior y progresando a través la longitud del rotor. El rotor esta hecho por forjando la barra metálica generalmente en la forma del rotor con el nicho hélice formándose en la superficie exterior del forja resultante. La forja es hecha de un hierro fundido resistente al desgaste bajo las normas ASTM designación A 532. La forja es entonces sujeta a un recocido, seguido por un maquinado de la superficie exterior hasta la forma final del rotor. El rotor maquinado es entonces pasado por un tratamiento térmico para aumentar la resistencia y dureza. El rotor terminado tiene un vida más larga, cuando esta usado para transferir fluidos abrasivos cuando esta comparada con rotores hecho convencionalmente de aleaciones de acero cromado.

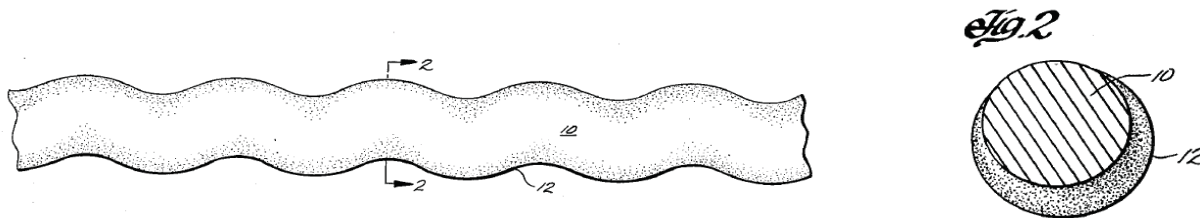


Figura 1.23. Diagrama del Patente US4948432

1.5.2. Patente US2924180

En 31 de Marzo de año 1958, John Davis Bourke y Harry Louis Conrad de Springfield Ohio patentaron un rotor donde las porciones del rotor que tiene contacto directo con los fluidos corrosivos y abrasivos son hechas de materiales altamente aleadas.

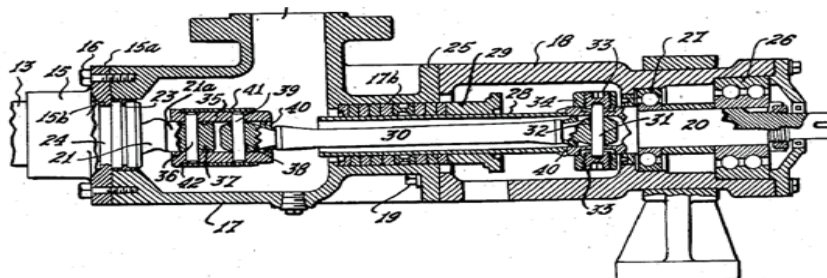


Figura 1.24. Diagrama del Patente US2924180

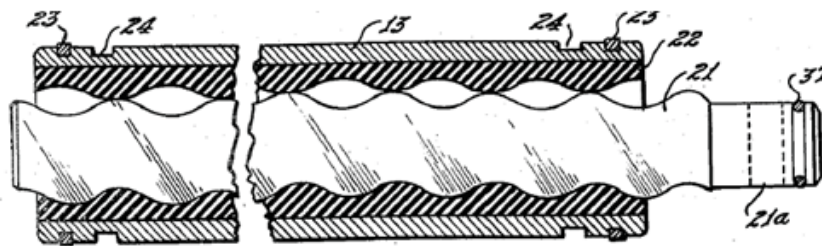


Figura 1.25. Diagrama del Patente US2924180

1.5.3. Patente US5498142

En 30 de Mayo 1995, Robert A. R. Mills de Bragg Creek Canada patentó un rotor que tiene un endurecimiento que consiste de un carburo de metal aplicado al cuerpo del rotor ferroso de la bomba por rociado de plasma y una capa superior de material metálica teniendo una dureza menor que el carburo de metal. Este proceso incrementa la vida útil del rotor y estator de una manera significativa de las bombas de cavidad progresiva.

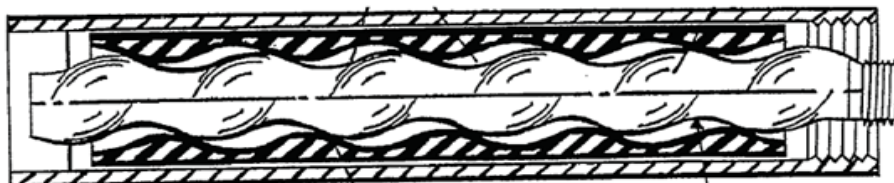


Figura 1.26. Diagrama del Patente US5498142

1.5.4. Patente US5759019

En 24 de Abril del año 1996, Steven M. Wood de Tulsa, Oklahoma patentó un rotor de una bomba de cavidad progresiva que consiste de materiales complejos, por ejemplo, vidrio de fibra y resina, en una variedad de combinaciones con y sin elastómeros adheridos. Los compuestos son formulados para proveer elasticidad y no elasticidad donde es necesario.

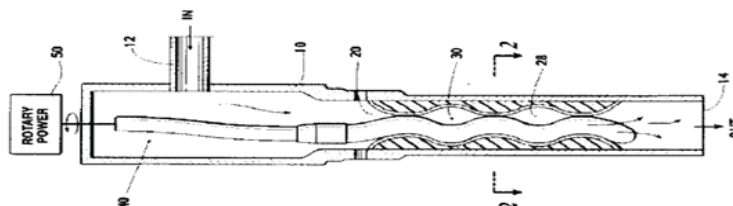


Figura 1.27. Diagrama del Patente US5759019



Figura 1.28. Diagrama del Patente US5498142

1.6. Características de las Bombas de Cavidad Progresiva

Desplazamiento positivo:

El movimiento del fluido es originado por el elemento móvil: (rotor), el cual gira dentro de un elemento fijo: (estator), originando cavidades que se van desplazando progresivamente a lo largo del eje de la bomba provocando un caudal uniforme y continuo, proporcional a la velocidad de giro. Su carga es independiente de la velocidad de giro.

Caudal uniforme y sin pulsaciones:

La descarga de estas bombas se caracteriza por un caudal uniforme, sin pulsaciones y básicamente similar bombeando líquidos de diferentes grados de limpieza, densidad o viscosidad. Su capacidad de flujo es proporcional a la velocidad, por lo que acopladas con un variador de velocidad se comportan como un elemento de control del proceso. El caudal de bombeo puede llegar hasta más de 200 m³/h.

Alto poder de succión:

Estas bombas tienen la característica de ser autocebantes incluso para cargas de succión de hasta 28 pies (8,5 m).

Capacidad mantenida bajo amplias variaciones de NPSH:

El rendimiento de la bomba se mantiene aun bajo grandes fluctuaciones de la carga de succión.

Elevada presión de descarga:

Las presiones de impulsión pueden alcanzar hasta 24 bar (24,5 kgf/cm²) para pequeños caudales. Las presiones de impulsión posibles de acuerdo con el número de etapas de la bomba son:

1 Etapa.....	6 bar
2 Etapas.....	12 bar
3 Etapas.....	18 bar
4 Etapas.....	24 bar

Marcha silenciosa:

El rotor girando dentro de un estator elástico de goma genera muy poco ruido. El nivel de ruido de la bomba en funcionamiento es mucho menor que 90 dB.

Bombea líquidos con baja tensión superficial:

Pueden bombear líquidos con baja tensión superficial, por ejemplo: Champú, sin que se afecten sus características.

Bombea líquidos con sólidos, materiales abrasivos, fibras o incluso gases en suspensión:

Estas bombas se ven prácticamente inafectadas por el contenido de estos elementos en suspensión. Solo la potencia requerida aumenta cuando el contenido de sólidos aumenta considerablemente. La presencia de un elemento elástico (el estator) entre los pares en contacto la hacen muy resistente a la abrasión. En los modelos mayores de estas bombas pueden ser bombeados líquidos con partículas en suspensión de hasta 1,5" (38mm) de diámetro.

Reversibles:

Si se invierte el sentido de rotación, se invierte el sentido del flujo. El proceso de rodamiento y la formación de cavidades de flujo son idénticos en ambos sentidos de rotación.

Adaptables:

Estas bombas son adaptables a prácticamente todas las situaciones que se puedan presentar, pueden operar desde líquidos livianos hasta lodos abrasivos en cualquier posición; horizontal, vertical, inclinadas, etc.

Bajas velocidades internas:

La velocidad de desplazamiento de las cavidades de flujo, en el interior de la bomba, es pequeña.

1.7. Aplicaciones Fundamentales

Las bombas de cavidad progresiva producto a sus cualidades mencionadas anteriormente se caracterizan por su gran versatilidad siendo utilizadas en prácticamente todas las ramas de la industria, bombeando una enorme diversidad de fluidos. Entre las aplicaciones más comunes se tienen:

Industria Química:

Dispersiones. Dosificación de ácidos, lodos. Colas y cremas viscosas. Suspensión de látex. Resinas. Abonos, etc.

Industria del Papel y Celulosa:

Lejías de sosa cáustica. Adhesivos, colas. Lechada de cal. Colorantes. Pastas. Disoluciones, etc.

Industria de Cosméticos:

Cremas. Champús. Jabones. Pasta dentífrica. Productos básicos, etc.

Industria Alimenticia:

Mermeladas. Puré de legumbres. Miel. Glucosa. Leche. Chocolate. Yogur. Queso. Melaza. Concentrado de tomate. Zumos. Trozos de carne y pescado, etc.

Industria Siderúrgica:

Aguas residuales. Lodos con mineral y escorias, etc.

Industria de Bebidas:

Cerveza. Vino. Brandy. Lías. Uva entera. Levadura, etc.

Además de estas aplicaciones mencionadas la bomba tiene algunos usos específicos por ejemplo:-

- ✚ Bombeo de Aceites de Lubricación
- ✚ En la Minería
- ✚ En el campo Petrolífero
- ✚ Bombeo de Combustible Diesel Marino
- ✚ Bombeo de Cemento
- ✚ En la bodega de Vino

1.8. Construcción de las Bombas de Cavidad Progresiva en Cuba

En Cuba una gran cantidad de industrias utilizan para el trasiego de sus producciones las bombas MONO las cuales presentan una alta fiabilidad y fácil mantenimiento.

De las piezas componentes de la bomba el estator es el elemento que sufre un mayor desgaste provocando pérdidas de eficiencia que llegan a inutilizar la bomba por lo que se hace necesario su recambio. Al no contar el país con una tecnología de fabricación de dichos repuestos debido a su complejidad ya que los mismos son fabricados en el mundo por firmas especializadas con altas tecnologías, era necesaria su importación incurriendo en grandes gastos de divisas.

Debido a lo antes expuesto un grupo de compañeros en la Fábrica de Glucosa de la provincia de Cienfuegos, consumidora la misma de este tipo de repuesto, se dieron a la tarea de darle solución a esta problemática para lo cual elaboraron una tecnología que permitiera, con los recursos a su alcance, fabricar dichos repuestos con la calidad requerida.

A partir del año 1990 se logró dicho objetivo, para la cual fue necesaria la construcción de un taller especializado en este tipo de producción con el siguiente equipamiento:

Molde:

Dicho molde presenta una alta complejidad en su construcción, es elaborado por un proceso de arranque de virutas, siendo construido fundamentalmente de acero.

Máquina de inyección:

Dicha máquina es la encargada de inyectar el caucho dentro del molde.

Autoclave:

En este equipo se introduce el molde para vulcanizar el caucho que se encuentra en su interior y así lograr la pieza terminada.

Dentro del taller debemos señalar que consta con un área de limpieza química en la cual se decapan los tubos que serán posteriormente utilizados en la fabricación del estator, un área de aplicación del cemento que es el encargado de lograr una buena adhesión entre el tubo de acero y el núcleo interior de caucho, y el área de terminación donde se le aplica pintura a los estatores y se le realiza el control de calidad para su posterior venta.

En la actualidad se cuentan con 10 modelos de estatores desarrollados los cuales son empleados fundamentalmente en la industria alimenticia. Los estatores construidos en este taller tienen un costo

inferior a los importados y su calidad en muchos casos supera a los importados lo cual ha sido demostrado en su explotación práctica.

Desde la apertura del taller hasta la fecha se han recibido más de 300 solicitudes de fabricación y se han fabricado 400 unidades, las cuales se encuentran en explotación en numerosas entidades del país entre las cuales se encuentran : Fábrica de Glucosa de Cienfuegos, Instituto de Investigaciones de la Industria Alimenticia, Empresa de Semillas de Ciudad de la Habana y los Combinados Lácteos de Cumanayagua, Bayamo, Las Tunas, Santa Clara, Matanzas, Sancti Spíritus y Metropolitano de Ciudad Habana.

1.9. Conclusiones del Capítulo

- El principio Moineau ha sido utilizado en muchas industrias en una variedad ancha de aplicaciones desde su licenciando, de allí otros inventores han modificado componentes diferentes de la bomba MONO dependiente de la función que ocupa la bomba y han obtenido sus propios patentes.
- Cuando ocurre desgaste del estator producto del funcionamiento de la bomba, la misma deja de funcionar, siendo ésta la causa fundamental por la cual estas bombas se deterioran.
- Las bombas de cavidad progresiva producto a sus cualidades se caracterizan por su gran versatilidad siendo utilizadas en prácticamente todas las ramas de la industria, bombeando una enorme diversidad de fluidos, por ejemplo, Fábrica de Glucosa de Cienfuegos, Instituto de Investigaciones de la Industria Alimenticia, Empresa de Semillas de Ciudad de la Habana y los Combinados Lácteos de Cumanayagua, Bayamo, Las Tunas, Santa Clara, Matanzas, Sancti Spíritus y Metropolitano de Ciudad Habana.

Capítulo II

Capítulo II:- Teoría de las Vigas sobre Apoyos Elásticos y Acoplamientos Cardánicos.

En este capítulo se explica las teorías que gobiernan las acciones y reacciones de las fuerzas que actúan sobre el rotor. Empieza con la teoría de las vigas sobre apoyos elásticos, que muestra cómo se comporta el rotor de acero apoyado sobre el estator de goma. El capítulo entonces sigue explicando como el sistema cardan se incorpora en este sistema y por fin definiendo la teoría de las tensiones de contacto entre las superficies.

2.1. Teoría sobre los Apoyos Elásticos.

Considerando una viga apoyado sobre un sólido elástico (una fundación) y soportando una carga como se muestra en la Figura 2.1(a). Para explicar, por ejemplos simples, las diferencias entre dos modelos básicos, describiendo el comportamiento de una viga se asume que la misma es tan rígida que se puede ser tratado como si fuera no deformable. Por el concepto de simetría la viga se mueve hacia abajo por una descripción matemática simple y constante, y este modelo esta mostrado en la Figura 2.1(b), conocido como “Fundación de Winkler’s”. Entonces, dicho simplemente: la intensidad de la reacción de la fundación en un punto es proporcional al desplazamiento en el mismo punto. También está asumido que la fundación es bilateral, es decir, la viga no se puede levantar. La coeficiente de proporcionalidad es denotado por α , se conoce como el modulo de fundación.

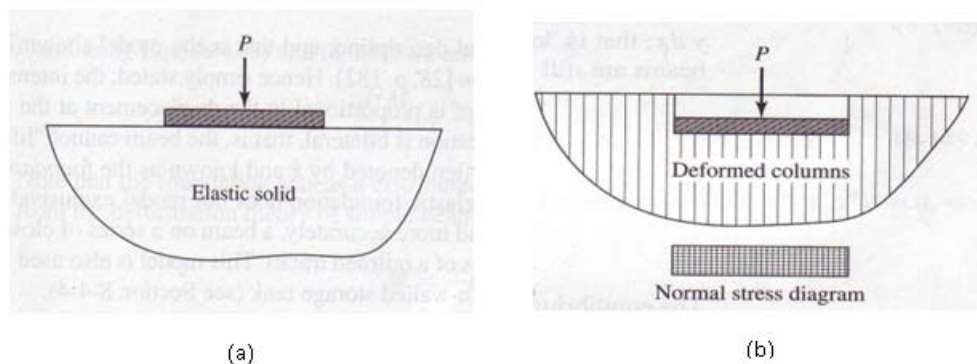


Figura 2.1: Diagrama de una Viga con Apoyo Sólido Elástico.

2.1.1. Teoría de las Vigas sobre Apoyos Elásticos.

En muchos problemas prácticos de vigas con apoyos que se pueden considerar articulaciones, resulta conveniente o necesario considerar la elasticidad de los apoyos. Es decir, la consideración habitual de que en los apoyos articulados la flecha es cero no es estrictamente cierta, e incluso en algunas ocasiones dicha interpretación puede ser completamente errónea.

Los apoyos elásticos se consideran como resortes de manera que la reacción que surge en el mismo es proporcional a la flecha local correspondiente, o a la inversa la flecha en el apoyo es directamente proporcional a la reacción en el mismo. Así por ejemplo, para la viga mostrada en la Fig. 2.1, la reacción en el apoyo elástico B es proporcional a la flecha en el apoyo y_B . Esto último está expresado en la ecuación (2.1), donde C_B es la constante de rigidez del apoyo en unidades de fuerza / longitud.

$$B_y = - C_B * y_B \quad (2.1)$$

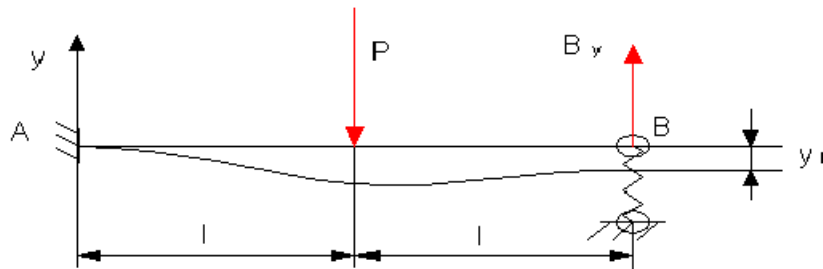


Figura 2.1: Viga con apoyos elásticos.

El diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para la viga AB son:

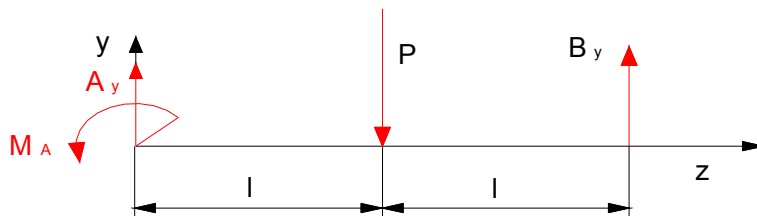


Figura 2.2: Diagrama de Cuerpo Libre.

$$\sum F_y = A_y + B_y - P = 0 \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.1) en (2.2) y despejando A_y , se tiene:

$$A_y = P - B_y = P + C_B * y_b \quad (2.3)$$

$$\sum M_A = B_y * 2 * l - P * l + M_A = 0 \quad (2.4)$$

$$M_A = P * l + 2 * l * C_B * y_b \quad (2.5)$$

La viga es hiperestática con un grado de hiperestaticidad, para hallar la ecuación complementaria conviene en este caso aplicar el Método de los Parámetros de Origen. En este caso, situando el origen de coordenadas en el extremo izquierdo se tiene que $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$. Directamente se puede plantear la ecuación para calcular la flecha en B.

$$E * I_X * y_B = -\frac{M_A * (2l-0)^2}{2} - \frac{P * (2l-1)^3}{6} + \frac{A_y * (2l-0)^3}{6} \quad (2.6)$$

Despejando y_B , se tiene que:

$$y_B = \frac{1}{E * I_X} * \left(\frac{4}{3} * A_y * l^3 - \frac{P * l^3}{6} - 2M_A l^2 \right) \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.3) y (2.5) en (2.7) se obtiene que:

$$y_B = \frac{1}{E * I_X} * \left(\frac{4}{3} * l^3 * (P + C_B * y_B) - \frac{P * l^3}{6} - 2l^2 (P * l + 2 * l * C_B * y_B) \right) \quad (2.8)$$

Agrupando términos:

$$y_B \left(\frac{E * I_X}{l^3} - \frac{4}{3} * C_B + 4C_B \right) = -\frac{5}{6} * P$$

$$y_B \left(\frac{E * I_X + \frac{8}{3} * C_B}{l^3} \right) = -\frac{5}{6} * P$$

$$y_B = -\frac{5}{6} * \frac{P * l^3}{\left(E * I_X + \frac{8}{3} * C_B \right)} \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.1), (2.3) y (2.5) se obtiene:

$$B_y = \frac{5}{6} C_B * \frac{P * l^3}{\left(E * I_X + \frac{8}{3} * C_B \right)} \quad (2.10)$$

$$A_y = P - \frac{5}{6} C_B * \frac{P * l^3}{\left(E * I_X + \frac{8}{3} * C_B \right)} \quad (2.11)$$

$$M_A = P * l - \frac{5}{3} C_B * \frac{P * l^4}{\left(E * I_X + \frac{8}{3} * C_B \right)} \quad (2.12)$$

2.1.2. Viga sobre Fundación Elástica

Consideremos una viga recta que se apoya sobre un gran número de resortes o elementos elásticos de otra índole (Fig. 2.3), situados uno al lado del otro e independientes entre sí:

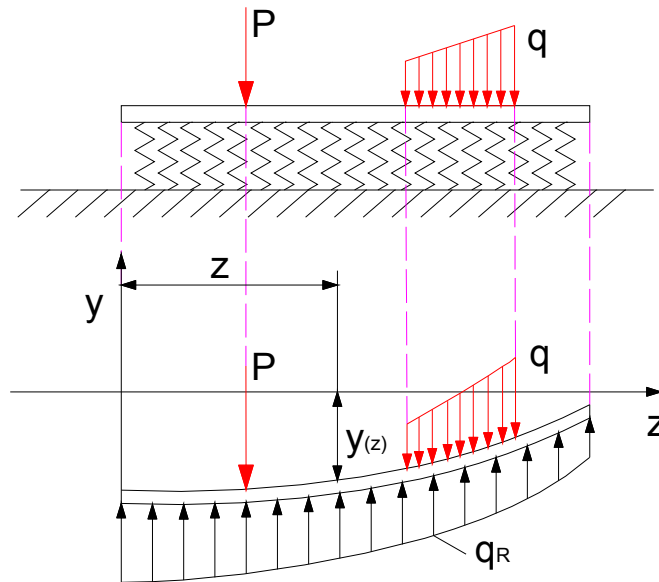


Figura 2.3: Viga recta apoyada por un gran número de elementos elásticos.

Si se aplican las cargas exteriores señaladas, los resortes se comprimirán y sobre la viga surgirán las reacciones correspondientes, cada una de las cuales será proporcional a la deformación que sufra cada resorte en particular, o sea, la flecha local correspondiente. Si se admite que la distancia entre los resortes es pequeña, se puede interpretar la reacción de estos como una carga distribuida cuya intensidad q_R será proporcional a la flecha, o sea:

$$q_R = -\alpha * y_{(z)} \quad (2.13)$$

Siendo α el coeficiente de proporcionalidad, el cual depende de la rigidez de los resortes. Teniendo en cuenta que q_R se expresa en unidades de carga / longitud y $y_{(z)}$ en unidades de longitud, el coeficiente α deberá expresarse en unidades de carga / longitud al cuadrado.

Generalizando el problema, se puede suponer que los apoyos del tipo resortes constituyen un ambiente elástico continuo cualquiera, con la particularidad de que las reacciones que éste provoca satisfagan la ecuación (2.12) independientemente de las particularidades físicas y constructivas del mismo.

La viga que se apoya sobre este tipo de medio continuo y deformable se denomina viga sobre fundación elástica y el coeficiente α se denomina coeficiente de rigidez de la fundación.

En la ingeniería este esquema de cálculo está muy difundido y se emplea para analizar muchas estructuras. La ecuación (2.12) no siempre resulta exacta, pero en general siempre se puede emplear como una relación aproximada. Por ejemplo, ella es exacta cuando, como en el ejemplo anterior se trata de un gran número de apoyos elásticos independientes entre sí.

Será exacta también en el caso de una viga de sección constante de madera que flota sobre el agua, aquí la reacción del líquido será proporcional al volumen desplazado por la viga y este a su vez será proporcional a la flecha de la viga en cada punto. Sin embargo, por ejemplo, en el caso de una traviesa de una vía de ferrocarril colocada sobre un terreno elástico, la relación (2.12) será solo aproximada ya que la reacción en cada sección depende no solo de la flecha local, sino también del grado de compactación del terreno en cada punto y este varía en la medida que se deforma, o sea, en este caso el coeficiente α no será constante, sino que dependerá también de la flecha y.

El cálculo de vigas sobre fundación elástica es un problema hiperestático. La intensidad de la reacción está relacionada con la deflexión de la viga de aquí que en su solución hay que utilizar el Método de la Ecuación Diferencial Aproximada de la Curva Elástica.

La ecuación diferencial aproximada de la curva elástica de una viga tiene la expresión:

$$M_f = E \cdot I_X \cdot y''_{(z)} \quad (2.14)$$

Pero como:

$$Q = \frac{dM_f}{dz}$$

Se tiene que:

$$Q = E \cdot I_X \cdot y'''_{(z)} \quad (2.15)$$

Y como: $q = \frac{dQ}{dz}$, entonces:

$$q = E \cdot I_X \cdot y^{(IV)}_{(z)} \quad (2.16)$$

Analizaremos primero el caso de una viga infinita sobre una fundación elástica bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, q , en un tramo de su longitud (Figura 2.4).

La fundación provocara una reacción proporcional a la flecha $y_{(z)}$, $q_R = -\alpha \cdot y_{(z)}$, no representada en la Figura 2.4.

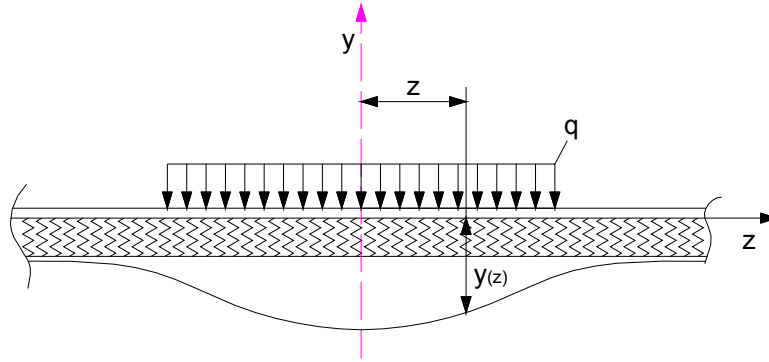


Figura 2.4: Viga infinita sobre fundación elásticos.

La carga distribuida resultante sobre la viga será $q + q_r$ y de acuerdo con la ecuación (2.16) se puede escribir:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^4 y(z)}{dz^4} = q + q_r \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.13) y arreglando la ecuación se tiene que:

$$\frac{d^4 y(z)}{dz^4} + \frac{\alpha}{E \cdot I_x} \cdot y(z) = \frac{q}{E \cdot I_x} \quad (2.18)$$

Esta es la ecuación diferencial que caracteriza el problema analizado y se trata de una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, en la cual el término independiente es diferente de cero.

Primeramente, se resuelve la ecuación reducida, o sea, cuando $q = 0$, usualmente mediante la sustitución:

$$y(z) = e^{a \cdot z}$$

Donde a es un exponente desconocido.

Derivando cuatro veces esta función:

$$\frac{d^4 y(z)}{dz^4} = a^4 \cdot e^{a \cdot z} = a^4 \cdot y(z) \quad (2.19)$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial (2.18) se obtiene que:

$$\left(a^4 + \frac{\alpha}{E \cdot I_x} \right) \cdot y(z) = 0 \quad (2.20)$$

Como $y(z) \neq 0$, entonces se tiene que cumplir que:

$$a = \sqrt[4]{-\frac{\alpha}{E \cdot I_x}} = \sqrt[4]{-1} \cdot \sqrt[4]{\frac{\alpha}{E \cdot I_x}} \quad (2.21)$$

Según el Teorema de Moivre, acerca de la raíz enésima de un número complejo:

$$\sqrt[n]{a + b \cdot i} = \sqrt[n]{\rho \cdot \text{cis} \varphi} = \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

En el caso de $\sqrt[4]{-1}$, $\rho = 1$ y $\varphi = \pi$, $n = 4$, se obtiene finalmente que:

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\pm 1 \pm i) \quad (2.22)$$

El factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ puede ser introducido en el segundo radical de la expresión (2.21) y se puede escribir entonces que:

$$a = (\pm 1 \pm i) \cdot \sqrt[4]{\frac{\alpha}{E \cdot I_x}} = (\pm 1 \pm i) \cdot \beta \quad (2.23)$$

Donde:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4 \cdot E \cdot I_x}} \quad (2.24)$$

Y la ecuación diferencial (2.17) se puede escribir entonces como:

$$\frac{d^4 y(z)}{dz^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot y(z) = \frac{q}{E \cdot I_x} \quad (2.25)$$

Las cuatro soluciones de la ecuación reducida, o sea, cuando $q = 0$, son; tomando en cuenta (2.18) y (2.23).

$$\left. \begin{aligned} y(z) &= e^{\beta \cdot z + i \cdot \beta \cdot z} \\ y(z) &= e^{\beta \cdot z - i \cdot \beta \cdot z} \\ y(z) &= e^{-\beta \cdot z + i \cdot \beta \cdot z} \\ y(z) &= e^{-\beta \cdot z - i \cdot \beta \cdot z} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Y la solución general se expresa como la suma de la solución de la ecuación reducida más una solución particular y^* . La misma tendrá cuatro constantes de integración A, B, C y D. O sea:

$$y(z) = e^{\beta \cdot z} \cdot (A \cdot e^{i \cdot \beta \cdot z} + B \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot z}) + e^{-\beta \cdot z} \cdot (C \cdot e^{i \cdot \beta \cdot z} + D \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot z}) + y^*(z) \quad (2.27)$$

Donde $y^*(z)$ será la solución particular de la ecuación diferencial (2.25).

Los términos entre paréntesis pueden ser expresados en términos de funciones trigonométricas, de manera que:

$$y(z) = e^{\beta \cdot z} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_2 \cdot \sen(\beta \cdot z)) + e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_4 \cdot \sen(\beta \cdot z)) + y^*(z) \quad (2.28)$$

Donde las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 están relacionadas con las constantes A , B , C y D de cierta manera, lo cual no resulta de interés ahora.

La ecuación (2.28) se puede escribir tomando en cuenta las siguientes relaciones:

$$\sinh(\beta \cdot z) = \frac{e^{\beta \cdot z} - e^{-\beta \cdot z}}{2} \quad (2.29)$$

$$\cosh(\beta \cdot z) = \frac{e^{\beta \cdot z} + e^{-\beta \cdot z}}{2} \quad (2.30)$$

De la siguiente manera:

$$y(z) = C'_1 \cdot \sen(\beta \cdot z) \cdot \sinh(\beta \cdot z) + C'_2 \cdot \sen(\beta \cdot z) \cdot \cosh(\beta \cdot z) + C'_3 \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot \sinh(\beta \cdot z) + C'_4 \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot \cosh(\beta \cdot z) + y^*(z) \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.27), (2.28) y (2.31) constituyen la ecuación de la flecha de una viga sobre fundación elástica para aquellas secciones donde existe alguna carga distribuida q . Si la carga distribuida $q = 0$, entonces la solución particular $y^*(z) = 0$.

Se hallarán a continuación las constantes de integración para el caso en que $y^* = 0$. Estas constantes se hallan partiendo de las condiciones de contorno para la viga particular que se analiza.

En este caso estas condiciones son:

Para $z = \infty$, $y^*(z) = 0$. De la ecuación (2.28) se aprecia que en este caso el segundo término se anula y teniendo en cuenta que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \cos(\beta \cdot z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sen(\beta \cdot z) \quad (2.32)$$

Y que son funciones oscilantes entre +1 y -1, pero con la característica que no pasan por cero simultáneamente, se deduce que para que se cumpla $y = 0$ tiene que cumplirse que $C_1 = C_2 = 0$. De donde la expresión (2.28) se reduce a:

$$y(z) = e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_4 \cdot \sen(\beta \cdot z)) \quad (2.33)$$

Las constantes C_3 y C_4 se hallan de la condición:

Para $z = 0$, $y'(z) = 0$.

Derivando (2.33) se tiene que:

$$y'(z) = -\beta \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_4 \cdot \text{sen}(\beta \cdot z)) - \beta \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \text{sen}(\beta \cdot z) - C_4 \cdot \cos(\beta \cdot z))$$

Arreglando la ecuación anterior se tiene:

$$y'(z) = -\beta \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot [C_3 \cdot (\text{sen}(\beta \cdot z) + \cos(\beta \cdot z)) + C_4 \cdot (\text{sen}(\beta \cdot z) - \cos(\beta \cdot z))] \quad (2.34)$$

Evidentemente para que $y'(z) = 0$ cuando $z = 0$, se tiene que cumplir que $C_3 = C_4 = C$, de donde la ecuación (2.33) se escribirá como:

$$y(z) = C \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot (\cos(\beta \cdot z) + \text{sen}(\beta \cdot z)) \quad (2.35)$$

Las derivadas consecutivas de la expresión (2.35) son:

$$y'(z) = -2 \cdot C \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot \text{sen}(\beta \cdot z) \quad (2.36)$$

$$y''(z) = 2 \cdot C \cdot \beta^2 \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot (\text{sen}(\beta \cdot z) - \cos(\beta \cdot z)) \quad (2.37)$$

$$y'''(z) = 4 \cdot C \cdot \beta^3 \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot \cos(\beta \cdot z) \quad (2.38)$$

$$y^{(IV)}(z) = -4 \cdot C \cdot \beta^4 \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot (\cos(\beta \cdot z) + \text{sen}(\beta \cdot z)) = -4 \cdot \beta^4 \cdot y(z) \quad (2.39)$$

Analicemos ahora el caso de una viga infinita sobre una fundación elástica con una carga concentrada en su centro (Figura 2.5).

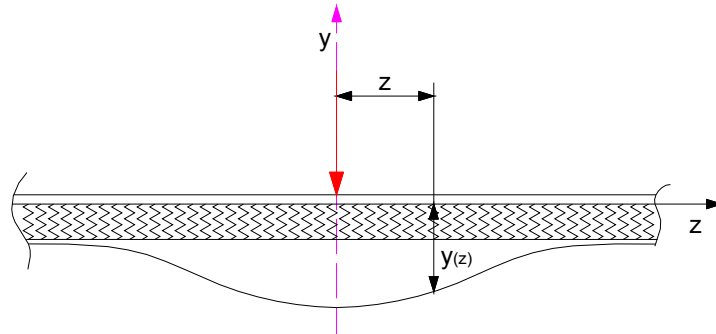


Figura 2.5: Viga infinita sobre fundación elástica con una carga concentrada.

Partiendo de la ecuación general (2.28) para cuando $y^* = 0$:

$$y(z) = e^{\beta \cdot z} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_2 \cdot \text{sen}(\beta \cdot z)) + e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_3 \cdot \cos(\beta \cdot z) + C_4 \cdot \text{sen}(\beta \cdot z)) \quad (2.40)$$

Aquí se cumple también que para $z = \infty$, $y(z) = 0$, de donde se tiene que $C_1 = C_2 = 0$ y como también para $z = 0$, $y'(z) = 0$, se cumple que $C_3 = C_4 = C$, de donde las ecuaciones de la (3.35) a la (3.39) son válidas

también en este caso. Solamente nos queda hallar el valor de la constante C. El único dato adicional que se posee es que la carga P está concentrada en el punto $z = 0$. Si se hacen dos cortes en la viga inmediatamente antes y después de la carga (Figura 2.6).

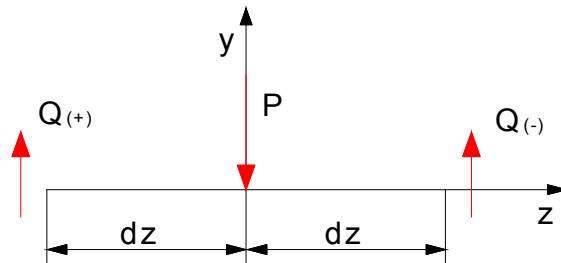


Figura 2.6: Esquema de Cuerpo Libre.

Se tiene que: $\sum F_y = 2 \cdot Q - P = 0$, $Q = P/2$ (2.41)

El valor de la fuerza de cortante Q en el corte izquierdo, de acuerdo al convenio de signos es $Q=P/2$ y el del corte derecho $Q = -P/2$. De manera que puede plantearse la condición que para $z = 0^+$, o sea, inmediatamente del lado derecho del origen, $Q = -P/2$ y por lo tanto como:

$Q = E \cdot I_x \cdot y''(z)$, de la ecuación (2.38) se tiene que:

$$y''(z) = \frac{Q}{E \cdot I_x} = 4 \cdot C \cdot \beta^3 \cdot e^{-\beta \cdot z} \cdot \cos(\beta \cdot z) \quad (2.42)$$

Para $z = 0^+$, $Q = -P/2$

$$y''(z) = -\frac{P}{2 \cdot E \cdot I_x} = 4 \cdot C \cdot \beta^3$$

Despejando C se obtiene:

$$C = -\frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.43)$$

Conociendo C se pueden calcular y representar las flechas, pendientes, momentos flectores y fuerzas de cortante utilizando las ecuaciones desde la (2.36) hasta la (2.39), tal como se ilustra en la Figura 2.7.

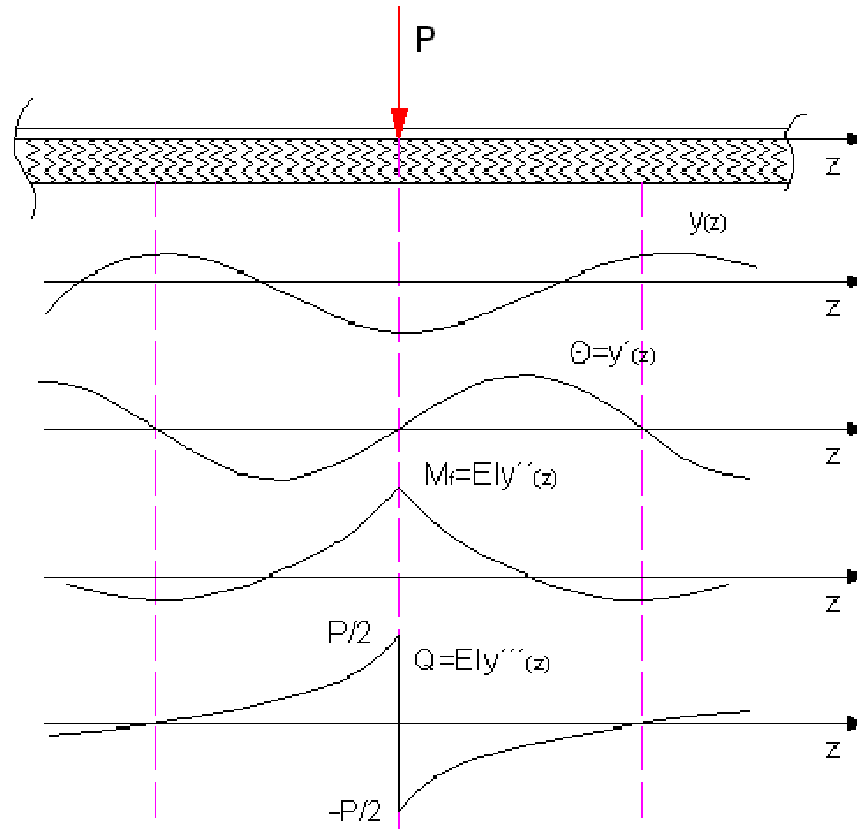


Figura 2.7: Representación de la Flecha, Pendiente, Momento Flector y Fuerza de Cortante.

2.1.3. Método de los Parámetros de Origen para la solución del caso general de Carga de una Viga Finita sobre Fundación Elástica

Consideremos una viga sobre fundación elástica para la cual $q = 0$ y establezcamos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo, tal como se muestra en la Figura 2.8, donde los parámetros de origen son y_0 , θ_0 , M_0 y Q_0 . Los sentidos positivos son los señalados.

La ecuación diferencial de la viga para el caso en que $q = 0$ es:

$$y_{(z)}^{(IV)} + 4 \cdot \beta^4 \cdot y_{(z)} = 0 \quad (2.44)$$

Donde:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4 \cdot E_a \cdot I_x}} \text{ cm}^{-1} \quad (2.45)$$

La variable independiente z puede ser sustituida por una variable adimensional: $\xi = \beta \cdot z$

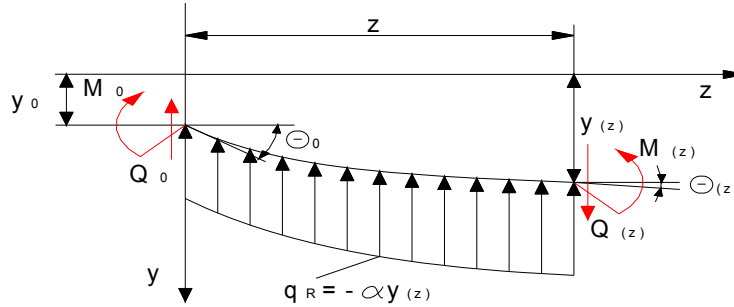


Figura 2.8: Viga sobre Soportes Elásticos.

La ecuación diferencial (2.44) quedará escrita (dividiendo por β^4) de la siguiente manera:

$$\frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} + 4 \cdot y(\xi) = 0 \quad (2.46)$$

La solución general de esta ecuación es (ecuación 2.28):

$$y(\xi) = C_1 \cdot e^\xi \cdot \cos \xi + C_2 \cdot e^\xi \cdot \operatorname{sen} \xi + C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot \cos \xi + C_4 \cdot e^{-\xi} \cdot \operatorname{sen} \xi \quad (2.47)$$

Las derivadas sucesivas de esta función son:

$$y'(\xi) = \frac{\theta}{\beta} = C_1 \cdot e^\xi \cdot (\cos \xi - \operatorname{sen} \xi) + C_2 \cdot e^\xi \cdot (\cos \xi + \operatorname{sen} \xi) - C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot (\cos \xi + \operatorname{sen} \xi) + C_4 \cdot e^{-\xi} \cdot (\cos \xi - \operatorname{sen} \xi) \quad (2.48)$$

$$y''(\xi) = -\frac{M(z)}{\beta^2 \cdot E \cdot I_x} = -2 \cdot (C_1 \cdot e^\xi \cdot \operatorname{sen} \xi - C_2 \cdot e^\xi \cdot \cos \xi - C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot \operatorname{sen} \xi + C_4 \cdot e^{-\xi} \cdot \cos \xi) \quad (2.49)$$

$$y'''(\xi) = -\frac{Q(z)}{\beta^3 \cdot E \cdot I_x} = -2 \cdot \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^\xi \cdot (\cos \xi + \operatorname{sen} \xi) - C_2 \cdot e^\xi \cdot (\cos \xi - \operatorname{sen} \xi) - \\ - C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot (\cos \xi - \operatorname{sen} \xi) - C_4 \cdot e^{-\xi} \cdot (\operatorname{sen} \xi + \cos \xi) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Considerando en las expresiones de la (2.47) a la (2.50), $\xi = 0$ se obtienen las expresiones para los parámetros de origen:

$$y_0 = C_1 + C_3 \quad (2.51)$$

$$\frac{\theta_0}{\beta} = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 \quad (2.52)$$

$$\frac{M_0}{\beta^2} = 2 \cdot E \cdot I_x \cdot (-C_2 + C_4) \quad (2.53)$$

$$\frac{Q_0}{\beta^3} = 2 \cdot E \cdot I_x \cdot (C_1 - C_2 - C_3 - C_4) \quad (2.54)$$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones lineales respecto a las constantes de integración, obtendremos los valores de éstas en función de los parámetros iniciales.

O sea:

$$C_1 = \frac{y_0}{2} + \frac{\theta_0}{4 \cdot \beta} + \frac{Q_0}{8 \cdot \beta^3 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.55)$$

$$C_2 = \frac{\theta_0}{4 \cdot \beta} - \frac{M_0}{4 \cdot \beta^2 \cdot E \cdot I_x} - \frac{Q_0}{8 \cdot \beta^3 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.56)$$

$$C_3 = \frac{y_0}{2} - \frac{\theta_0}{4 \cdot \beta} - \frac{Q_0}{8 \cdot \beta^3 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.57)$$

$$C_4 = \frac{\theta_0}{4 \cdot \beta} + \frac{M_0}{4 \cdot \beta^2 \cdot E \cdot I_x} - \frac{Q_0}{8 \cdot \beta^3 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.58)$$

Sustituyendo las expresiones de las constantes de integración en las expresiones de la (3.47) a la (3.50) se obtiene que:

$$y(z) = y_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\theta_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{M_0}{\beta^2 \cdot E \cdot I_x} \cdot J_3(\xi) - \frac{Q_0}{\beta^3 \cdot E \cdot I_x} \cdot J_4(\xi) \quad (2.59)$$

$$\theta(z) = \theta_0 \cdot J_1(\xi) - \frac{M_0}{\beta \cdot E \cdot I_x} \cdot J_2(\xi) - \frac{Q_0}{\beta^2 \cdot E \cdot I_x} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot y_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.60)$$

$$M(z) = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (2.61)$$

$$Q(z) = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.62)$$

Donde $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$, $J_3(\xi)$ y $J_4(\xi)$ son las funciones de Krilov, cuyos valores en función de ξ aparecen en la Tabla incorporada en el Anexo 3. Dichas funciones se expresan como sigue:

$$J_1(\xi) = \cosh \xi \cdot \cos \xi = \frac{1}{2} \cdot (e^\xi + e^{-\xi}) \cdot \cos \xi \quad (2.63)$$

$$J_2(\xi) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh \xi \cdot \operatorname{sen} \xi + \sinh \xi \cdot \cos \xi) = \frac{1}{4} \cdot [(e^\xi + e^{-\xi}) \cdot \operatorname{sen} \xi + (e^\xi - e^{-\xi}) \cdot \cos \xi] \quad (2.64)$$

$$J_3(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \sinh \xi \cdot \operatorname{sen} \xi = \frac{1}{4} \cdot (e^\xi - e^{-\xi}) \cdot \operatorname{sen} \xi \quad (2.65)$$

$$J_4(\xi) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh \xi \cdot \operatorname{sen} \xi - \sinh \xi \cdot \cos \xi) = \frac{1}{8} \cdot [(e^\xi + e^{-\xi}) \cdot \operatorname{sen} \xi - (e^\xi - e^{-\xi}) \cdot \cos \xi] \quad (2.66)$$

Durante la diferenciación de las funciones de Krilov tienen lugar las siguientes dependencias importantes:

$$\left. \begin{aligned} J_1'(\xi) &= -4 \cdot \beta \cdot J_4(\xi) \\ J_2'(\xi) &= \beta \cdot J_1(\xi) \\ J_3'(\xi) &= \beta \cdot J_2(\xi) \\ J_4'(\xi) &= \beta \cdot J_3(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

En el caso general de carga, cuando sobre la viga actúan un conjunto de momentos concentrados M_i ubicado cada uno de ellos a una abscisa a_i determinada, las fuerzas concentradas P_i en los puntos con abscisas b_i y las cargas distribuidas en el tramo correspondiente entre $z = c_i$ y $z = d_i$, las ecuaciones generales para $y(z)$, $\theta(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$ son las siguientes (Figura 2.9).

$$\begin{aligned} y(z) = & y_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\theta_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ \frac{M_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{Q_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) + \frac{1}{\beta^2} \cdot \sum M_i \cdot J_3(\beta \cdot (z - a_i)) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\beta^3} \cdot \sum P_i \cdot J_4(\beta \cdot (z - b_i)) + \frac{1}{4 \cdot \beta^4} \cdot \sum q_i \cdot (J_1(\beta \cdot (z - c_i)) - J_1(\beta \cdot (z - d_i))) \right\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\theta(z) = \theta_0 \cdot J_1(\xi) - \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ \frac{M_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{Q_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + 4 \cdot \beta \cdot E \cdot I_x y_0 \cdot J_4(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta} \cdot \sum M_i \cdot J_2(\beta \cdot (z-a_i)) - \frac{1}{\beta^2} \cdot \sum P_i \cdot J_3(\beta \cdot (z-b_i)) - \frac{1}{\beta^3} \cdot \sum q_i \cdot (J_4(\beta \cdot (z-c_i)) - J_4(\beta \cdot (z-d_i))) \right\} \quad (2.69)$$

$$M(z) = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) + \sum M_i \cdot J_1(\beta \cdot (z-a_i)) - \\ - \frac{1}{\beta} \cdot \sum P_i \cdot J_2(\beta \cdot (z-b_i)) + \frac{1}{\beta^2} \cdot \sum q_i \cdot (J_3(\beta \cdot (z-c_i)) - J_3(\beta \cdot (z-d_i))) \quad (2.70)$$

$$Q(z) = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) - \\ - 4 \cdot \beta \cdot \sum M_i \cdot J_4(\beta \cdot (z-a_i)) - \sum P_i \cdot J_1(\beta \cdot (z-b_i)) + \frac{1}{\beta} \cdot \sum q_i \cdot (J_2(\beta \cdot (z-c_i)) - J_2(\beta \cdot (z-d_i))) \quad (2.71)$$

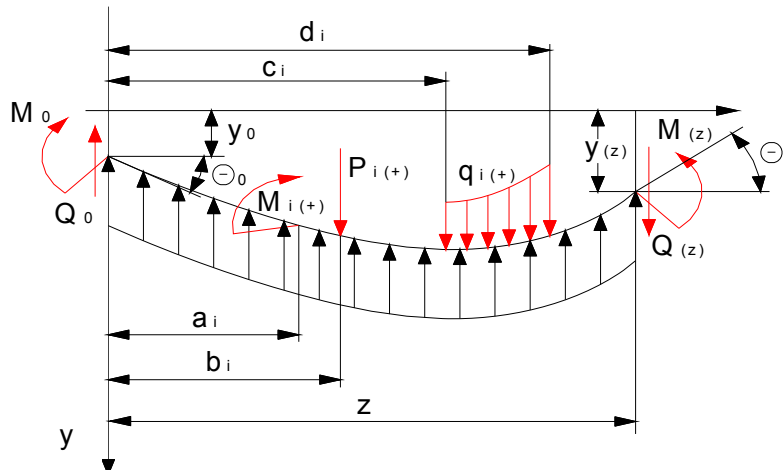


Figura 2.9: Esquema de los Parámetros del Origen y las Magnitudes $y_{(z)}$, $\theta_{(z)}$, $M_{(z)}$ y $Q_{(z)}$.

Si se conocen los parámetros de origen y_0 , θ_0 , M_0 y Q_0 las magnitudes de $y_{(z)}$, $\theta_{(z)}$, $M_{(z)}$ y $Q_{(z)}$ pueden determinarse mediante las expresiones de la (2.68) a la (2.71) para cualquier sección con coordenadas z , teniendo en cuenta que $\xi = \beta \cdot z$.

Los parámetros de origen para cada caso concreto pueden deducirse a partir de las condiciones en los extremos de la viga. Esas condiciones para diferentes casos de sujeción de la viga coincidiendo el origen de coordenadas con su extremo izquierdo se dan a continuación en la Tabla 2.1. Los valores de

y_o , θ_o , M_o y Q_o en la Tabla representan los momentos y fuerzas concentradas exteriores en los extremos izquierdo y derecho respectivamente.

Tabla 2.1 Parámetros de Origen el función de las condiciones en los extremos

• Condición en el extremo		Extremo izquierdo $z = 0$				Extremo derecho $z = l$			
Izquierdo	Derecho	Y_o	θ_o	M_o	Q_o	y_l	θ_l	M_l	Q_l
Libre	Libre	-	-	M_o	Q_o	-	-	M_l	Q_l
Libre	Apoyado	-	-	M_o	Q_o	0	-	M_l	-
Libre	Empotrado	-	-	M_o	Q_o	0	0	-	-
Apoyado	Apoyado	0	-	M_o	-	0	-	M_l	-
Apoyado	Empotrado	0	-	M_o	-	0	0	-	-
Empotrado	Empotrado	0	0	-	-	0	0	-	-

Eligiendo el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la viga siempre se conocen dos parámetros de origen. Para determinar los otros dos parámetros es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones algebraicas correspondientes a las condiciones conocidas del extremo derecho de la viga.

2.2. Coeficiente de Rigidez (Coeficiente de Balastro)

De la literatura se conoce que en todo problema geotécnico, el conocimiento o la estimación de las deformaciones en relación a las cargas asociadas que transfiere una fundación al terreno natural, es uno de los problemas más importantes de los proyectos de Ingeniería Civil.

Para resolver esta situación, se utiliza muy frecuentemente, el “Coeficiente de Balasto” o “Módulo de Reacción del Suelo” también conocido como “Coeficiente de Sulzberger”, estudiado muy en profundidad por Terzaghi.

Este parámetro asocia la tensión transmitida al terreno por una placa rígida con la deformación o la penetración de la misma en el suelo, mediante la relación entre la tensión aplicada por la placa “ q ” y la penetración o asentamiento de la misma “ y ”. Generalmente se la identifica con la letra “ k ”.

$$k = \frac{q}{y} \quad (2.72)$$

Este módulo, se obtiene mediante un simple ensayo de carga sobre el terreno, que se realiza utilizando una placa metálica rígida de sección cuadrada de 30,5 cm de lado ó de sección circular con un diámetro de 30,5 cm, que se monta como se muestra en el esquema de la Figura 2.10.

El módulo de Reacción o Coeficiente de Balasto se define como: La relación entre la tensión capaz de generar una penetración de la placa en el terreno de 0,05” que equivale a una deformación de 0,127 cm, es decir que este coeficiente es la pendiente de la recta que une el origen de coordenadas con el punto de la curva “tensión – deformación” que genera un asentamiento de la placa de 0,127 cm, como se aprecia en las Figuras 2.10 y 2.11.

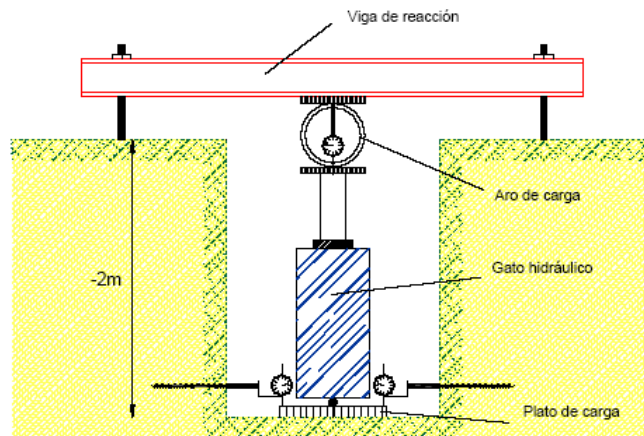


Figura 2.10: Ensayo de Plato de Carga

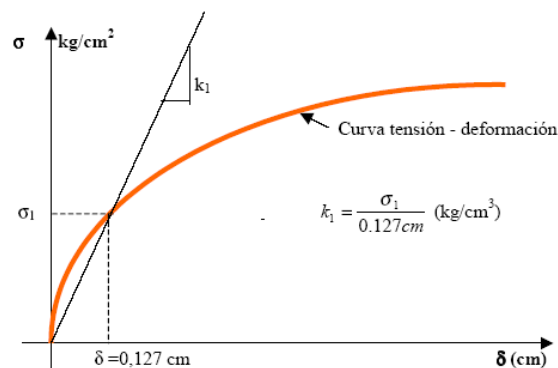


Figura 2.11: Coeficiente de Balastro/Rigidez

Los resultados de estos ensayos se expresan con la letra “k” donde por lo general se asocia el subíndice 1 adosado a la letra k, para indicar que el valor corresponde a una placa rígida de 1 pie² “k1”.

Desde la masificación de los ordenadores electrónicos y el advenimiento de los métodos numéricos en el cálculo de las transferencias de carga de las estructuras a los suelos, la interpretación de este fenómeno a partir de apoyos elásticos discretos, ha facilitado enormemente la interpretación de este fenómeno de transferencia de carga entre el suelo y la estructura.

Si tenemos una base de ancho “B” y de longitud “L” cargada con una carga “Q” y apoyada a una profundidad “D” en un terreno elástico, uniforme, con un módulo de deformación constante “E”, que transmite al terreno donde se apoya una tensión “q” podremos decir que el asentamiento que la misma experimentará, por deformación elástica del terreno, puede ser aproximado por la expresión.

$$y = \frac{q \cdot B}{E} \cdot (1 - \nu^2) \cdot l \quad (2.73)$$

Donde “ ν ” es el coeficiente de Poisson, mientras que “ l ” es un coeficiente que tienen en cuenta la forma del área cargada y la rigidez de la base. Considerando lo expresado anteriormente, el Módulo de Reacción nos quedaría expresado como:

$$k = \frac{q}{y} = \frac{E}{B(1-\nu^2) \cdot l} = Cte \cdot \frac{E}{B} \quad (2.74)$$

2.3. Acoplamientos

2.3.1. Uso de los Acoplamientos y Embragues

Los acoplamientos sirven para unir arboles u otros elementos giratorios. En la construcción de maquinaria moderna se aplican casi en todas las máquinas. En las máquinas modernas se emplean muchas clases de acoplamientos y embragues, para unir, por ejemplo, el árbol de una turbina con el de un generador, el de un motor con el de una máquina; los arboles de conjuntos aislados con los de los grupos; para el mando de máquinas, a saber: arranque suave o instantáneo, parada, cambio de velocidad y contramarcha; para la protección de las sobrecargas, durante la inversión del movimiento, etc. El vasto empleo de los acoplamientos explica la enorme diversidad de los tipos conocidos de estos y la ininterrumpida aparición de nuevas construcciones.

Por su aplicación fundamental los acoplamientos se clasifican en acoplamientos rígidos y Móviles (rígidos de compensación y elásticos). Los primeros son los que unen permanentemente los arboles (sin admitir prácticamente ninguna desalineación entre los árboles); los segundos son los que embragan y desembragan los arboles.

2.3.2. Acoplamientos Móviles

No siempre se puede obtener el centrado exacto ni siquiera aproximado y permanente que exigen los acoplamientos rígidos. La disposición relativa de los arboles a conectar, inexacta al principio por los errores inevitables de fabricación, luego se acentúa más, debido a las deformaciones condicionales por las cargas de servicio, por la influencia de la temperatura, por el irregular asiento del fundamento y por otras causas. En tales casos no se emplean los acoplamientos rígidos, sino los de compensación.

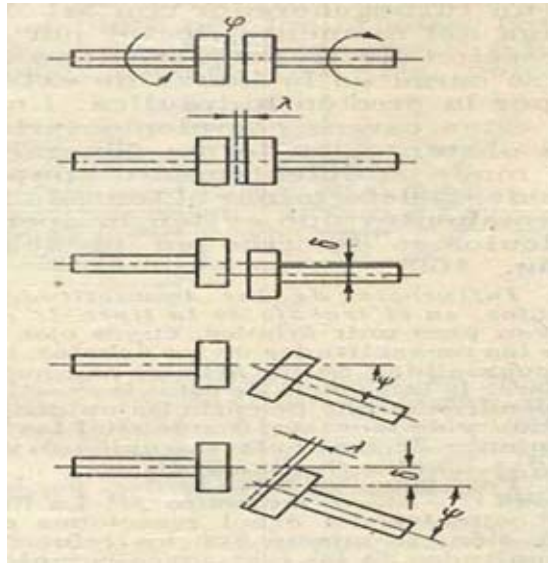


Figura 2.12 Asimilación de las desalineaciones por los acoplamientos de compensación

Los posibles desplazamientos relativos de los arboles que se conectan se muestran en la Fig. 2.12. En un caso general, estos desplazamientos se caracterizan: por el desplazamiento longitudinal λ , por el desplazamiento angular φ , por el desplazamiento de los centros δ y por la dislocación ψ . (Figura 2.13).

En las uniones de acoplamientos móviles estos desplazamientos se compensan por el desplazamiento relativo de los elementos del acoplamiento. Esto se logra mediante uno de los siguientes procedimientos:

- Con grandes holguras en las conjugaciones de los elementos del acoplamiento; estos acoplamientos se emplean solo en las transmisiones que trabajan a velocidades pequeñas y poco cargadas.
- Con deslizamiento de unos de los elementos con relación a los otros; estos acoplamientos se deben engrasar; se emplean en las transmisiones que trabajan a distintas velocidades y cargas, produciendo en condiciones normales una complementaria carga comparablemente pequeña sobre los arboles y cojinetes.
- Con compresibilidad elástica de los elementos; estos acoplamientos no requieren engrase, pero crean una carga complementaria sobre los arboles y cojinetes, además, tanto mayor, cuanto más rígido sea el acoplamiento y mayor el desplazamiento relativo de los arboles a empalmar.

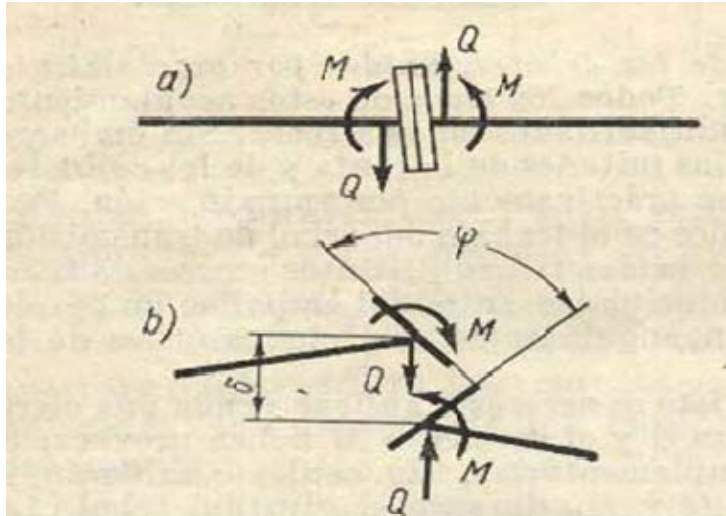


Fig. 2.13 Desplazamientos entre los árboles

Los acoplamientos, en los cuales se aprovechan los dos primeros procedimientos de compensación (grandes intersticios y deslizamiento), se pueden llamar rígidos de compensación a diferencia de los acoplamientos que utilizan el tercer procedimiento de compensación (compresibilidad elástica) que se llaman elásticos de compensación o, más abreviadamente, acoplamientos elásticos (a veces, acoplamientos flexibles). Los acoplamientos rígidos de compensación se dividen en dentados, en cruz y articulados.

Todos los acoplamientos de compensación cumplen parcialmente su misión, es decir, no eliminan del todo la carga radial sobre los árboles y cojinetes por la no coaxialidad de los árboles a empalmar, sino sólo la disminuyen. Por su lado, estos acoplamientos introducen una fuente complementaria de cargas radiales, debido a la inexactitud de algunas partes del mismo acoplamiento.

En el peor de los casos, el acoplamiento móvil (lo mismo que una manivela) transmite el par de torsión M_{tor} sólo por un punto (por ejemplo, mediante un diente en el acoplamiento dentado o por medio de un espárrago en el acoplamiento flexible de varillas-casquillos, etcétera), alejado del eje de rotación, a $D/2$. En este caso crítico, la carga radial, R , sobre los árboles es igual a la fuerza circunferencial completa:

$$R = P = \frac{2M_{tor}}{D} \quad (2.75)$$

En el caso general, la carga radial complementaria se encontrará en los límites de $0 < R < P$.

Las investigaciones experimentales muestran que para las construcciones difundidas de los acoplamientos compensadores a magnitudes habituales de no coaxialidad y de errores de fabricación la carga radial es $R = (0,2 \div 0,4)P$.

Evidentemente que junto con las demás calidades del acoplamiento compensador se debe apreciar también la magnitud R. El acoplamiento cumple su misión de compensar la no coaxialidad tanto mejor cuanto menor sea la carga complementaria que provoca, en este caso, sobre los árboles y cojinetes.

2.3.3. Acoplamientos Articulados o Cardánicos

Estos se emplean para unir arboles, cuyos ejes están bajo cierto ángulo, por las condiciones de operación se pueden desplazar durante el reglaje o explotación de la maquina.

Estos acoplamientos se emplean, por ejemplo, en los automóviles, para unir los árboles de la caja de cambio de velocidades y del puente posterior; en los trenes laminadores, para transmitir el par de torsión a los cilindros, en las maquinas herramienta, para transmitir rotación a los husillos ajustables de los cabezales porta husillos, etc.

Para árboles de diámetro $d_a = (10 \div 40) \text{ mm}$, los tamaños de los acoplamientos articulados están normalizados. En la Figura 2.14 se da una construcción del acoplamiento aconsejada por esta norma.

La cruz (estrella) y la horquilla se fabrican de acero 40X templado hasta la dureza de HRC 48-53 o la cruz se hace de acero ШX15 y la horquilla, de acero cromado y templado hasta HRC 60-65. Los acoplamientos articulados deben estar protegidos del polvo y de la suciedad y se deben lubricar eficazmente.

El inconveniente de estos acoplamientos de construcción común es la irregularidad de rotación del árbol conducido, a una velocidad constante del conductor, si estos árboles no son coaxiales. Las aceleraciones angulares del árbol conducido, relacionadas con esto, conducen a la aparición de fuerzas de inercia que cargan complementariamente los elementos del acoplamiento. Con el empleo de dos acoplamientos, a determinadas condiciones, se logra la sincronización del giro de los árboles conductor y conducido. No obstante, el árbol intermedio, en este caso, también gira irregularmente.

Si M_{tor1} es el par de torsión en el árbol 1 y M_{tor2} , en el árbol 2, entonces por la condición de igualdad de las potencias instantáneas, sin contar las pérdidas en el acoplamiento se puede escribir que $M_{\text{tor2}} \cdot \omega_2 = M_{\text{tor1}} \cdot \omega_1$ y por consiguiente:

$$\frac{M_{\text{tor1}}}{M_{\text{tor2}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.76)$$

Por la cinemática de la articulación universal se sabe que su relación de transmisión (ω_2/ω_1) oscila en los límites desde $1/\cos\psi$ hasta $\cos\psi$. De aquí que sabiendo los valores máximos del par de torsión M_{tor2} en el árbol conducido, se puede determinar el par requerido en el conductor, es decir, $M_{\text{tor1max}} = M_{\text{tor2}}/\cos\psi$. Partiendo de este par de torsión y de la distancia entre los muñones $2r$ se determinan los esfuerzos P_{max} que actúan sobre los muñones y horquillas del acoplamiento, y se comprueban a la flexión y a la presión específica sobre las superficies de rozamiento. Para los acoplamientos articulados hechos de materiales indicados anteriormente, las presiones específicas admisibles sobre los pivotes

son $P_{\max} \approx 4 \text{ kg/mm}^2$. A grandes velocidades angulares y a considerables masas, vinculadas con el árbol conducido, conviene comprobar las tensiones en los elementos por las fuerzas de inercia.

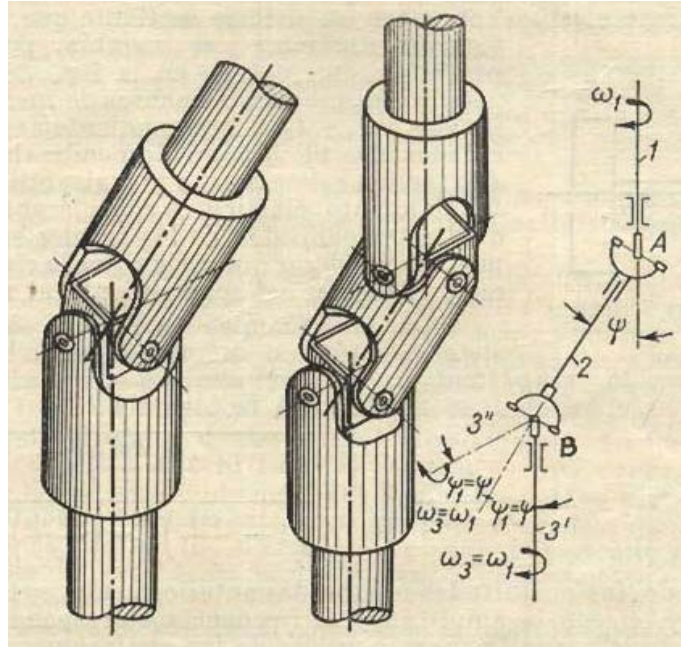


Fig. 2.14 Acoplamiento Articulado Cardánico

$$P_{\max} = \frac{M_{\text{tor},\max}}{2r} = \frac{1}{\cos\psi} \quad (2.77)$$

Para los acoplamientos normalizados los valores de los pares de torsión admisibles (desde 2,5 kgf-m para $d_a = 10 \text{ mm}$ hasta 128 kgf-m para $d_a = 40 \text{ mm}$) se dan en las Norma respectivas.

2.4. Tensiones de Contacto

Las tensiones y deformaciones que surgen durante la presión mutua de dos cuerpos contiguos se denominan "de contacto". El material en el lugar de contacto, sin poder deformarse libremente, se halla en el estado tensional volumétrico Figura 2.15. Las tensiones de contacto tienen un carácter puramente local y disminuyen bastante rápidamente a medida de alejarse del lugar de contacto. Hay que prestar especial atención a las tensiones de contacto durante el cálculo a la resistencia de tales piezas como son los cojinetes de bolas y rodillos, ruedas dentadas, ruedas de vagones ferroviarios, raíles, etcétera.

Por primera vez la solución correcta de los problemas principales sobre las tensiones y deformaciones de contacto fue realizada por medio de los métodos de la Teoría de la Elasticidad en 1881 - 1882 por H. Hertz.

A continuación se dan algunas fórmulas para la determinación de las tensiones y deformaciones de contacto obtenidas al observar las siguientes suposiciones:-

- Las tensiones en la zona de contacto no rebasan el límite de elasticidad.
- Las áreas de contacto son pequeñas en comparación con las superficies de los cuerpos que están en contacto.
- Las fuerzas de presión distribuidas por la superficie de contacto son normales a dicha superficie.

2.4.1. Compresión de Esferas

El radio de la zona circular a Fig. 2.15 que se forma en el lugar de contacto durante mutua con la fuerza P de dos esferas de radios R_1 y R_2 y módulos de elasticidad E_1 y E_2 , respectivamente, se determina mediante la fórmula:

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P * \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (2.78)$$

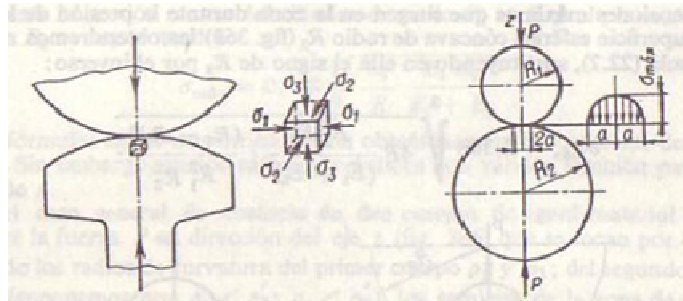


Fig. 2.15 Contacto entre esferas

Las tensiones normales (de compresión) están distribuidas en la zona de contacto por la semiesfera. La tensión máxima, que tiene lugar en el centro de la zona de contacto, puede determinarse por la formula:

$$\sigma_3 = -|\sigma_{max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2} = -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 * E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} * \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 * R_2^2}} \quad (2.79)$$

Los dos demás tensiones principales en el centro de la zona son iguales a:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,8 |\sigma_{max}| \quad (2.80)$$

Gracias al estado tensional volumétrico del material en el centro de la zona de contacto, cuando todas las tres tensiones de compresión son prácticamente iguales, el material en ese punto puede resistir, sin aparición de las deformaciones permanentes, unas presiones bastante grandes que son, por ejemplo, de acuerdo con la cuarta Hipótesis de resistencia de Von Mises, iguales a $\sigma_{m\acute{a}x} = 2\sigma_f$. Para el acero que tiene $\sigma_{pr} = 10\,000\text{ kgf/cm}^2$ alcanza $20\,000\text{ kgf/cm}^2$.

El punto más peligroso en la zona de contacto está situado sobre el eje z a una profundidad igual a la mitad del radio de la zona de contacto, aproximadamente. Las tensiones principales en este punto son iguales a:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18|\sigma_{max}|; \sigma_3 = -0,8\sigma_{max} \quad (2.81)$$

La tensión tangencial máxima en el punto peligroso:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{max} \quad (2.82)$$

Las tensiones máximas que surgen en la zona durante la presión de la esfera convexa sobre la superficie esférica cóncava de radio R_2 Fig. 2.16 las obtendremos mediante la Ec. 2.79 sustituyendo en ella el signo de R_2 como negativo:

$$\sigma_{max} = -0,388^3 \sqrt{4P \frac{E_1^2 * E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} * \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 * R_2^2}} \quad (2.83)$$

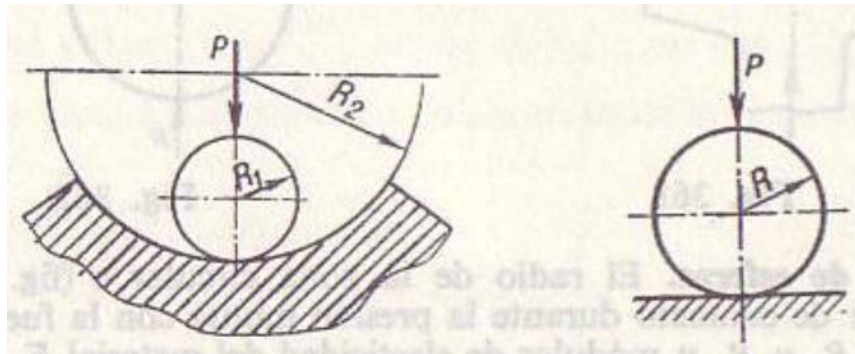


Figura 2.16 Contacto entre una esfera convexa y una cóncava y una esfera y un plano

Durante la presión de la esfera de radio $R_1 = R$ sobre el plano Figura 2.16, deduciremos las tensiones mediante la fórmula anterior tomando en ella $R_2 = \infty$:

$$\sigma_{max} = 0,388^3 \sqrt{4P \frac{E_1^2 * E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} * \frac{1}{R^2}} \quad (2.84)$$

2.4.2. Compresión de Cilindros

Durante la compresión mutua por una carga distribuida uniformemente, q , de dos cilindros que se tocan con las generatrices paralelas Figura 2.17, el ancho de la banda de contacto rectangular se determina mediante la fórmula:

$$b = 2,15 \sqrt{q * \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (2.85)$$

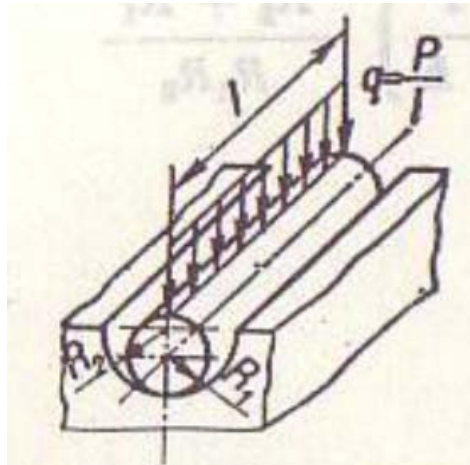


Figura 2.17 Contacto entre dos Cilindros con las Generatrices Paralelas

La tensión máxima que actúa en los puntos del eje de la zona de contacto se deduce mediante la fórmula:

$$\sigma_{max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 * E_2}{E_1 + E_2} * \frac{R_1 + R_2}{R_1 * R_2}} \quad (2.86)$$

El punto peligroso en la zona de contacto se encuentra sobre el eje z a una profundidad igual a $0,4b$. Las tensiones principales en este punto tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180 \sigma_{max} \\ \sigma_2 &= -0,288 \sigma_{max} \\ \sigma_3 &= -0,780 \sigma_{max} \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

La tensión tangencial máxima en el punto peligroso es:

$$\tau_{max} = 0,3 \sigma_{max}$$

Cambiando en la Ec. 2.87 el signo de R_2 por negativo se obtiene la tensión en el caso de presión del cilindro convexo sobre una superficie cilíndrica cóncava:

$$\sigma_{max} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 * E_2}{E_1 + E_2} * \frac{R_1 - R_2}{R_1 * R_2}} \quad (2.88)$$

Durante la presión mutua del cilindro de radio $R_1 = R$ y un plano, se obtiene tomando en la Ec. 2.88 $R_2 = \infty$, se tendrá:

$$\sigma_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} * \frac{E_1 * E_2}{E_1 + E_2}} \quad (2.89)$$

Las formulas dadas más arriba fueron obtenidas para el coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$. Sin embargo, en los cálculos prácticos son validas también para otros valores de μ . En el Manual de (Pisarenko, 1989) aparecen las Ecuaciones para materiales diferentes que fueron utilizadas en la presente investigación.

2.5. Conclusiones del Capitulo

- Se profundizó en la literatura en la Teoría de los Apoyos Elásticos, en particular en la Teoría de las Vigas sobre una Fundación Elástica que constituye la base teórica del Nuevo Esquema de Análisis desarrollado para la evaluación de la resistencia de los rotores de las bombas Mono.
- Se profundizó en la aplicación del Método de los Parámetros de Origen al resolver vigas sobre fundación elástica.
- Se profundizó en la Teoría de los Acoplamientos en particular en la de los Articulados Cardánicos que se utilizan en las bombas Mono y sobre todo en los aspectos relacionados con las fuerzas radiales que se desarrollan en estos.
- Se expone un resumen de algunas expresiones relacionadas con la Teoría de Los Cuerpos Sólidos en Contacto de Hertz que fueron utilizadas para hallar el Coeficiente de rigidez de la Fundación.

Capítulo III

Capítulo III:-Desarrollo de Nuevo Esquema de Análisis para la Evaluación de la Resistencia de los Rotores de las Bombas Mono.

Teniendo en cuenta la teoría expuesta anteriormente, en el presente capítulo se pretende proponer un nuevo esquema de análisis basado en el modelo de viga sobre fundación elástica y un procedimiento adecuado y capaz para evaluar la influencia de la fuerza en el acoplamiento en la resistencia de los rotores. En primer lugar se realizará el cálculo del torque que transmite el rotor para poder estimar la fuerza transversal que actúa en el acoplamiento cardánico.

3.1. Cálculo de la Fuerza Transversal provocado por el Acoplamiento sobre el Rotor

3.1.1. Datos del Rotor y Estator

Los datos del rotor y estator son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Potencia de la bomba, } N = 3\text{kW} \\ n = 400 \text{ rpm} \\ \text{Longitud del rotor, } l = 35 \text{ cm} \\ \text{Diámetro mayor del rotor, } D = 4,2 \text{ cm} \\ \text{Diámetro menor del rotor, } d = 3,2 \text{ cm} \\ \text{Módulo de elasticidad del acero, } E_a = 19\,620 \text{ kN/cm}^2 \\ \text{Módulo de elasticidad de la goma del estator, } E_g = 9,81 \text{ kN/cm}^2 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

3.1.2. Cálculo Momento Torsor y de las Fuerzas que actúan sobre el Rotor

El motor de la bomba transfiere su potencia y velocidad a través el sistema cardánico hasta el rotor, esto produce una fuerza cortante transversal al final del cardán. Esta fuerza se puede calcular de la siguiente manera:-

En el caso más crítico, cuando toda la potencia del motor se está transfiriendo a la bomba y la fuerza radial o transversal sobre el rotor sea igual a la periférica tal como se vio en el capítulo anterior.

$$P_{max.rad} = \frac{2M_{tor.max}}{D_c}$$

Donde:-

$M_{tor.max.}$ - Momento torsor máximo [kgf-cm]

D_c - Diámetro de los puntos de apoyo del cardán = 6 cm

$$M_{tor.max.} = 97360 \frac{N}{n}$$

Donde:-

N – Potencia del motor en kW.

n - Velocidad de giro del motor en rpm.

$$M_{tor.max.} = 97360 \frac{3}{400} = 730,2 \text{ kgf.cm}$$

$$M_{tor.max.} = 730,2 \text{ kgf-cm} = 7,163 \text{ kN-cm}$$

Sustituyendo estos valores se obtiene:-

$$P_{max.rad} = \frac{2(730,2)}{6} = 243,4 kgf$$

$$P_{max.rad.} = 243,4 kgf = 2,388 kN$$

Esta fuerza $P_{max.rad}$ actúa sobre el rotor en el lugar donde está ubicado el cardán, pero el estator no empieza en este lugar. Como el estator es compuesto por caucho, él actúa como una base elástica (fundación elástica). El estator está colocado a 6,5 cm del cardán, entonces en el punto donde empieza el estator esta fuerza radial se comporta como una fuerza cortante, Q_0 , y un par de momento, M_0 . Este punto se tomará como origen del sistema. La fuerza Q_0 y el momento M_0 se calcula de siguiente manera:

$$Q_0 = P_{max.rad} = -2,388 kN$$

$$Q_0 = -2,388 KN \quad (3.2)$$

$$M_0 = P_{max.rad} \times 6,5 = -2,388 kN \times 6,5 cm = -15,522 kN-cm$$

$$M_0 = -15,522 KN-cm \quad (3.3)$$

En la Fig. 3.1 se representa los elementos que intervienen en el cálculo anterior:-

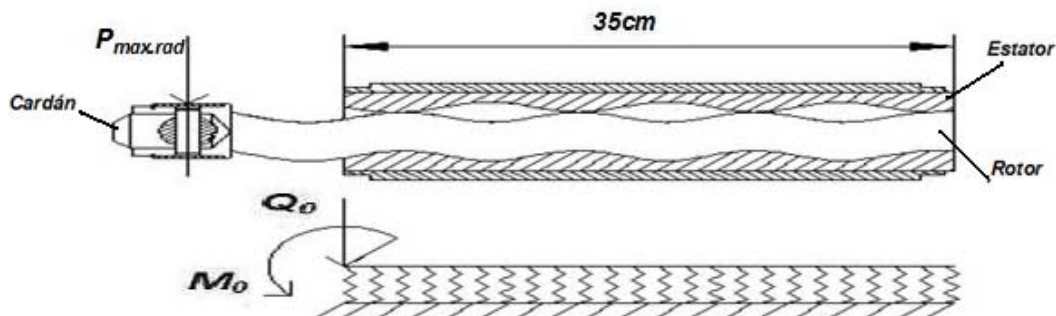


Figura 3.1 Esquema del Rotor ubicado en el Estator y posición relativa del Cardán

3.1.3. Determinación del Coeficiente de Balastro o de Rigidez de la Fundación

Para desarrollar el nuevo esquema de análisis se tiene que encontrar el valor para el coeficiente de rigidez de la fundación, α , de la goma, que en la literatura no aparece ningún valor para este parámetro. Lo que aparece en la literatura (Pisarenko, 1989) es una ecuación basada en la Teoría de Hertz que establece la relación entre el ancho de contacto b entre dos cilindros, uno exterior (el rotor) y uno interior (el estator), la carga distribuida en el contacto y el módulo de elasticidad reducido del mismo: E_R .

La ecuación es la siguiente:-

$$Y = 1,82 \frac{P}{l} * \frac{(1-\ln b)}{E_R} \quad (3.4)$$

Donde Y es la aproximación (o flecha) entre los cuerpos en contacto y b el ancho de la banda de contacto (Fig. 3.2).

Teniendo en cuenta que $q_r = P/l$, esta ecuación se puede escribir como sigue.

$$q_r = \frac{E_R}{1,82(1-\ln b)} * Y \quad (3.5)$$

Ahora como, para el esquema de viga sobre fundación elástica se tiene que:-

$$q_r = -\alpha * Y \quad (3.6)$$

Se deduce entonces que para el caso analizado:-

$$\alpha = \frac{E_R}{1,82(1-\ln b)} \quad (3.7)$$

En el esquema que sigue se representa el ancho de contacto entre el rotor y el estator:-

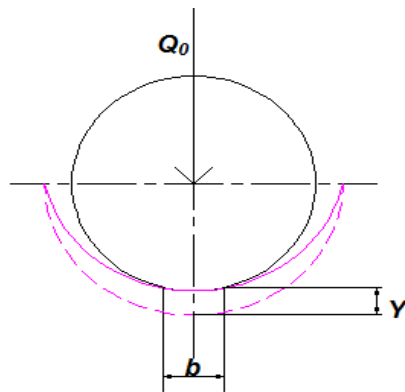


Figura 3.2 Esquema del contacto entre Rotor y Estator.

Donde, si se asume como primera aproximación:-

$$b = 0,5 \text{ cm}$$

Teniendo que:

$$E_R = \frac{2 * E_a * E_g}{E_a + E_g} \quad (3.8)$$

$$E_a = 19\,620 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_g = 9,81 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_R = \frac{2 * 19620 * 9,81}{19620 + 9,81} = 19,610 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_R = 19,610 \text{ KN/cm}^2$$

De donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{19,610}{1,82(1-\ln 0,5)} = 6,364 \text{ kN/cm}^2 = 63,64 \text{ MPa}$$

Esta valor es muy lógico para el caso del contacto goma – acero, ya que por ejemplo para el caso caña húmeda triturada y compactada – hierro fundido en el trabajo (Arzola, 2002) se obtuvo experimentalmente un valor $\alpha = 8\,000 \text{ MPa}$, valor este elevado a causa de la presencia del agua, pero en este caso la goma es por mucho más elástica. En el trabajo (Valle, 2001) para el contacto acero – hormigón se utilizó $\alpha = 230 \text{ MPa}$.

El valor de β para el caso del rotor de la bomba Mono en contacto con el estator de goma será:-

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4 * E_R * I_x}} \quad (3.9)$$

Donde:-

$$I_x = 0,05 * D^2(1 - C^4) \quad (3.10)$$

$$C = \frac{d}{D} = \frac{3,2}{4,2} = 0,76$$

$$I_x = 0,05 * 4,2^2(1 - 0,76^4) = 10,4 \text{ cm}^4$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{6,364}{4 * 19620 * 10,4}} = 0,053 \text{ cm}^{-1}$$

$$\beta = 0,053 \text{ cm}^{-1}$$

3.1.4. Aplicación del Método de los Parámetros de Origen en la elaboración del Esquema de Análisis

Los dos extremos del rotor son libres entonces los parámetros conocidos son, la fuerza de cortante y el momento flector en el origen y en el extremo del rotor:-

$$M_0 = -15,522 \text{ KN-cm}$$

$$Q_0 = -2,388 \text{ KN}$$

$$Q_l = 0$$

$$M_l = 0$$

Se conocen dos parámetros de origen $M_0 = -15,522 \text{ KN-cm}$, $Q_0 = 2,388 \text{ KN}$, se necesita hallar la flecha, Y_0 , y el ángulo, θ_0 , en el origen y se conoce que $M_l = 0$ y $Q_l = 0$. Entonces plantea las expresiones de $M_{(z)}$ y $Q_{(z)}$ para $z = l = 35 \text{ cm}$ y las iguala a cero para hallar Y_0 y θ_0 :

$$M_{(z)} = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) = 0 \quad (3.11)$$

$$Q_{(z)} = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) = 0 \quad (3.12)$$

Donde:

$$\xi = \beta \cdot z = 0,053 \text{cm}^{-1} \cdot 35 \text{cm} = 1,855 \quad (3.13)$$

$$\xi = 1,855$$

De la tabla de las funciones de Krilov para Vigas sobre Fundación Elástica (Pisarenko, 1989) haciendo algunas interpolaciones, se obtiene que:

Tabla 3.1. Funciones de Kirlov para Vigas sobre Fundación Elástica

ξ	J_1	J_2	J_3	J_4
1,855	0,918	1,134	1,496	1,004

Sustituyendo los valores de $\beta = 0,053 \text{cm}^{-1}$, $\alpha = 648,7 \text{kgf/cm}^2$ y los valores de J_i correspondientes, se tiene que:-

$$Y_0 = -0,064 \text{cm}$$

$$\theta_0 = -0,00425 \text{rad}$$

Ahora se plantea las ecuaciones para las funciones $y(z)$, $\theta(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$ para poder representarlas:-

$$Y_{(z)} = Y_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\theta_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - \frac{\theta_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (3.14)$$

$$\theta_{(z)} = \theta_0 \cdot J_1(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{Q_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot Y_0 \cdot J_4(\xi) \quad (3.15)$$

$$M_{(z)} = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (3.16)$$

$$Q_{(z)} = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) \quad (3.17)$$

Resolviendo las ecuaciones para $z = l = 35 \text{ cm}$, se obtiene que:-

$$Y_{35} = 028 \text{ cm}$$

$$\theta_{35} = -0,0022 \text{ rad}$$

$$M_{35} = 0$$

$$Q_{35} = 0$$

Utilizando el programa MatLab se pueden evaluar estas funciones a través de toda la longitud del rotor, es decir, buscar los valores de las funciones de Krilov cuando $0 \leq z \leq 35 \text{cm}$. Entonces con estos resultados se puede representar las funciones gráficamente. Estos gráficos se muestran en la Fig. 3.3.

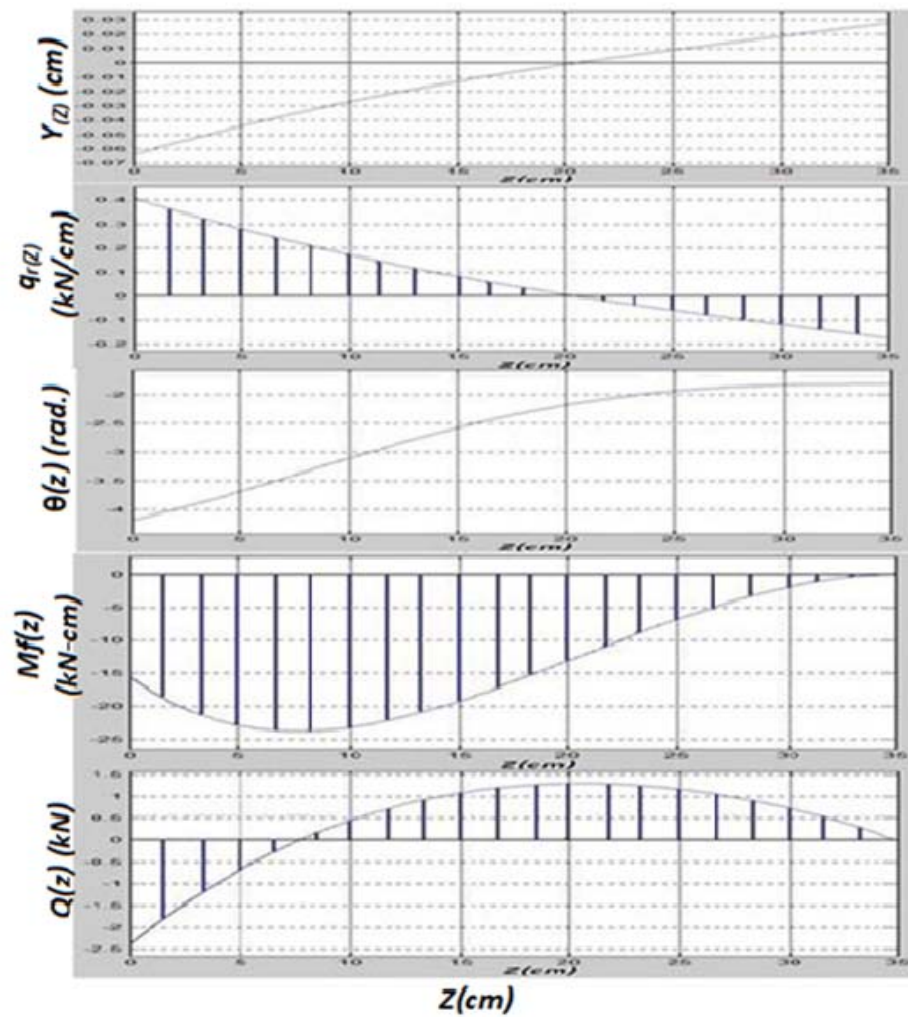
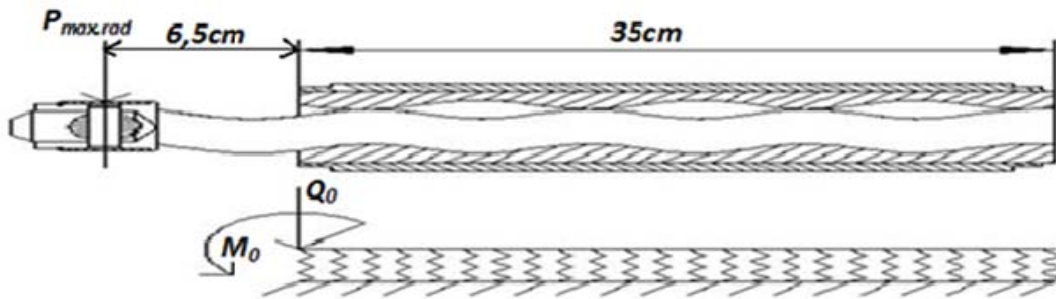


Figura 3.3 Distribución de la flecha, la reacción del rotor sobre el estator, la pendiente, el momento flector y la fuerza de cortante a lo largo de toda la longitud del estator.

3.2. Análisis general de los resultados obtenidos en la aplicación del Nuevo Esquema de Análisis

3.2.1. Procedimiento General empleado para el Análisis

Como se puede observar debido a la complejidad del análisis, en los cálculos anteriores se utilizó un valor fijo de b (ancho de contacto entre el rotor y el estator) para poder llegar a algunos resultados parciales preliminares. En este epígrafe con el objetivo de lograr más generalidad se analizará la aplicación del esquema de análisis asumiendo z y b variables.

Para lograr este análisis y realizar un estudio completo de la influencia de dichas variables, debido a la complejidad de las expresiones resulta engorroso realizarlo por los métodos tradicionales, por lo que se hace necesario para lo mismo el uso de alguna herramienta matemática, siendo en este caso el programa computacional MatLab.

Resulta necesario para realizar estos cálculos con MatLab programar las ecuaciones en el lenguaje del mismo, esto se puede ver en el Anexo No. 1

El método de programación consiste en aplicar las ecuaciones antes obtenidas de la metodología desarrollada para vigas sobre fundación elástica. De esta manera al igual que la sección anterior se definen las constantes iguales a las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3) y luego se plantea las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6),... (3.17) que definen el modelo pero en este caso considerando b y z variables.

Al correr esto en MatLab sobre una computadora con las siguientes características:

Tabla 3.2. Características de la Computadora usada en este Estudio

System	
Manufacturer:	TOSHIBA
Model:	Satellite A215
Rating:	 Windows Experience Index
Processor:	AMD Turion(tm) 64 X2 Mobile Technology TL-56 1.80 GHz
Memory (RAM):	1918 MB
System type:	32-bit Operating System

Durante un tiempo de cómputo de 65.941021 segundos se obtiene los resultados deseados, que consisten en las funciones dependientes de dos variables que describen las ecuaciones de la flecha, el cortante, el ángulo de inclinación y el momento flector como función de b y z . Esto se puede ver en el Anexo No. 2.

De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned}y &= f(b, z) \\ \theta &= f(b, z) \\ M_f &= f(b, z) \\ Q &= f(b, z)\end{aligned}$$

Con el objetivo de ilustrar los resultados se grafican estas funciones dando la posibilidad de realizar algunos análisis. Para esto también se usa el MatLab puesto que resulta muy fácil una vez obtenidas las ecuaciones representar una gráfica en cualquier condición, ya que estas ecuaciones responden siempre al comportamiento de estas magnitudes para este rotor con los datos planteados.

3.2.2. Comportamiento de la Reacción de la Fundación, q_R

De la gráfica de q_R contra z se puede ver que:-

$$q_{R\max} = 0,41 \text{ kN/cm}$$

$$q_{R\min} = -0,18 \text{ kN/cm}$$

Y si halla el área debajo la curva de q_R utilizando el programa MatLab, observa:-

$$\int_0^{35} q_R dz = 2,388 \text{ kN}$$

Este valor es exactamente a Q_0 , lo que permite validar la exactitud de los cálculos realizados, ya que al estar el rotor en equilibrio la resultante de la reacción de la fundación (integral debajo de la curva) tiene que ser igual a la fuerza transversal aplicada Q_0 .

3.2.3. Comportamiento de la Flecha de la Fundación, $y_{(b,z)}$

Para este análisis primeramente se evalúa la función de la flecha con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5 \text{ cm}$, es decir, $y = f(0,5, z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa la flecha en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función puede ser gráficamente para el dominio de z y la misma se muestra en la Fig. 3.4:

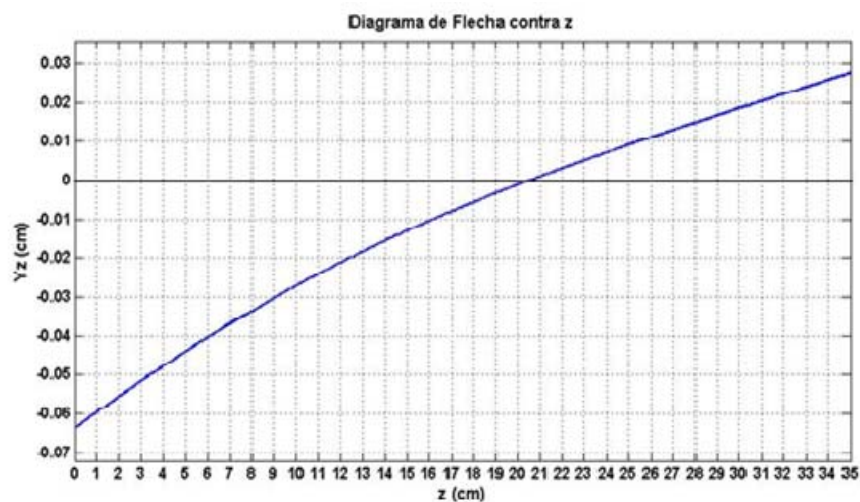


Figura 3.4 Distribución de la flecha para $b = 0,5 \text{ cm}$.

Como se puede apreciar durante el funcionamiento de la bomba, cuando la carga radial Q_o , es hacia abajo el rotor se inclina de manera que es como si pivotara en un punto a una distancia del extremo izquierdo $z = 20,5$ cm. Y si se observa en la Fig. 2.3 el valor de q_R en ese punto es cero de aquí que se debe esperar un mínimo desgaste del estator en esa zona.

Como se tiene la flecha expresada matemáticamente se puede obtener el resultado anterior para cualquier valor de b . En la Fig. 3.5 se ha graficado como en el caso anterior la dependencia de $y_{(b,z)}$ con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b :

$$y = f(b_i, z)$$

Donde:-

$i = 1, 2, 3.$

$b_1 = 0.5, b_2 = 1.0, b_3 = 2.0$

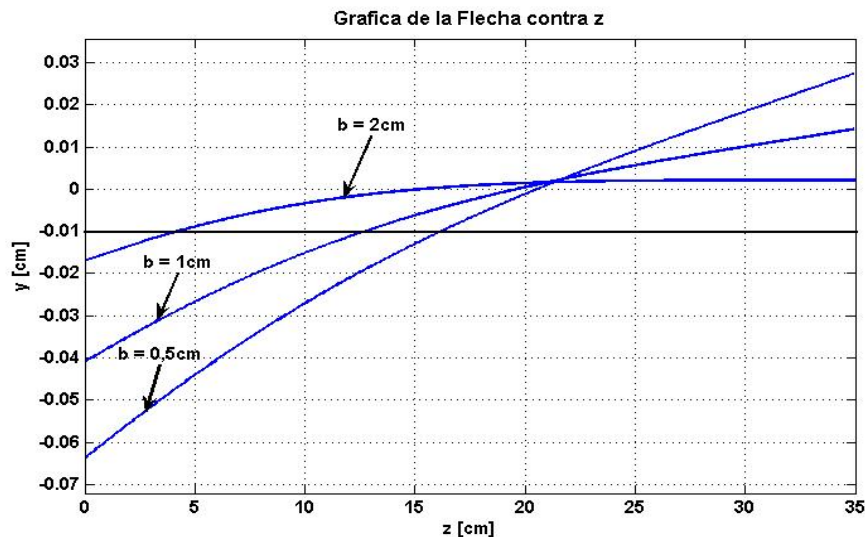


Figura 3.5 Comportamiento de la flecha para diferentes valores de b .

Como se puede apreciar de las gráficas anteriores cuando el ancho de contacto es muy grande la flecha se tiende a estabilizar en un valor fijo en la mitad posterior del rotor y por lo tanto la reacción q_R también de aquí que el desgaste será más uniforme en esta zona del rotor. Esta situación se corresponderá con una goma blanda.

Ahora para completar el análisis de la flecha se utiliza el función de la misma en la forma tal que b y z son variables, es decir, $y = f(b, z)$. La gráfica de este análisis se representa en tres dimensiones ya que tiene dos variables y está mostrado en la Fig. 3.6 que se muestra a continuación:

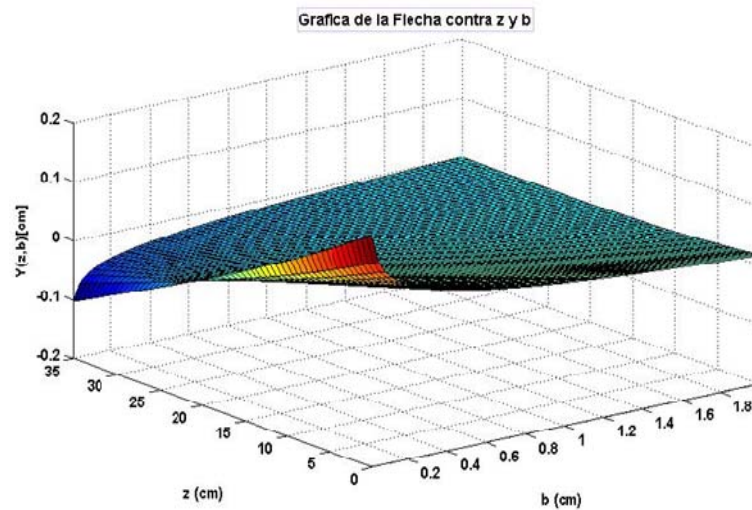


Figura 3.6 Comportamiento de la Flecha $y_{(z,b)}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z

Como se aprecia de la gráfica, para el rotor analizado, la máxima diferencia entre las flechas al comienzo y final de la fundación elástica (estator) se obtiene para valores de b muy pequeños, o sea, gomas muy rígidas y en esa situación, aunque parezca contradictorio, se obtiene el máximo desplazamiento $y_{\max}$ en un rotor, precisamente cuando $z = 0$ con un valor cercano a 0,2 cm, o sea, $y = 2$ mm, con gomas muy blandas, la flecha se estabiliza a lo largo de la longitud, sólo es ligeramente superior cuando $z = 0$.

3.2.4. Comportamiento de la Pendiente del Rotor en la Fundación $\theta_{b,z}$

Para este análisis, igual que para el caso anterior, se evalúa la función del ángulo de inclinación, θ , con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir, $\theta = f(0,5, z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el ángulo de inclinación en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función puede ser gráficamenteada para el dominio de z y la misma se muestra en la Fig. 3.7

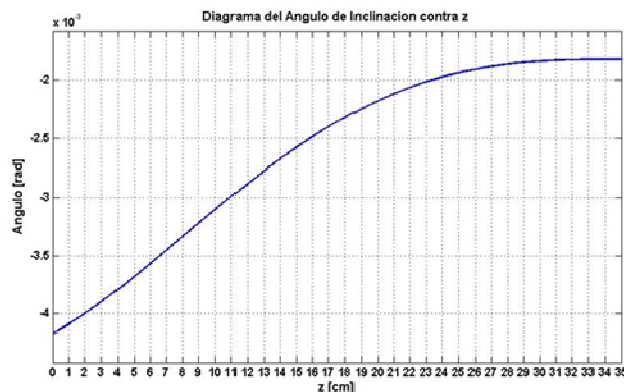


Figura 3.7 Distribución de la Pendiente para $b = 0,5$ cm.

Como se aprecia la pendiente del rotor es máxima para $z = 0$ y se reduce en la medida en que se avanza en la longitud.

Como se tiene la pendiente expresada matemáticamente en función de b y z se puede obtener el resultado anterior para cualquier valor de b . En la Fig. 3.8 se muestra tal como se hizo con la flecha, la dependencia de la pendiente con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b :

$$\theta = f(b_i, z)$$

Donde:-

$i = 1, 2, 3.$

$b_1 = 0.5, b_2 = 1.0, b_3 = 2.0$

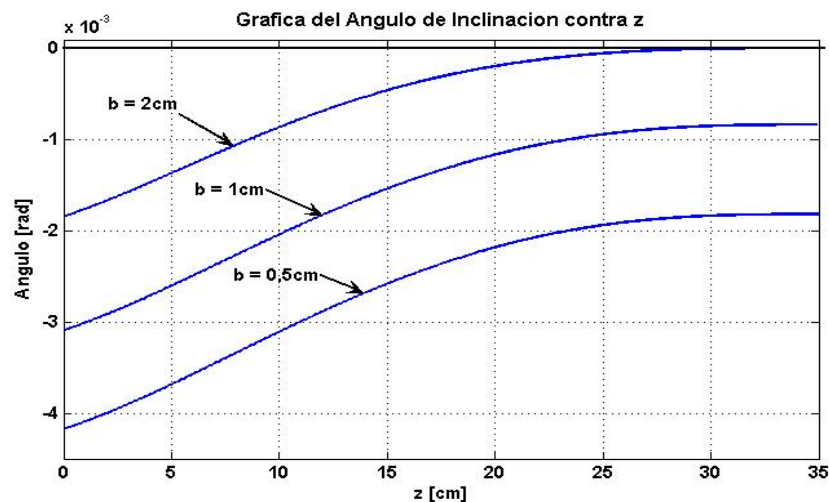


Figura 3.8 Comportamiento de la Pendiente para diferentes valores de b .

Como se aprecia del gráfico anterior la distribución de la pendiente no se altera con la rigidez de la goma, sólo varía el valor numérico de la pendiente y para gomas muy blandas el rotor no se inclina en el borde posterior. En este caso la goma prácticamente no le ofrece resistencia al giro del rotor.

Ahora para completar el análisis del ángulo de inclinación se utiliza el función de la misma en la forma de la flecha, tal que b y z son variables, es decir, $\theta = f(b, z)$. La gráfica de este análisis se representa en tres dimensiones ya que tiene dos variables y esto se muestra en la Fig. 3.9:

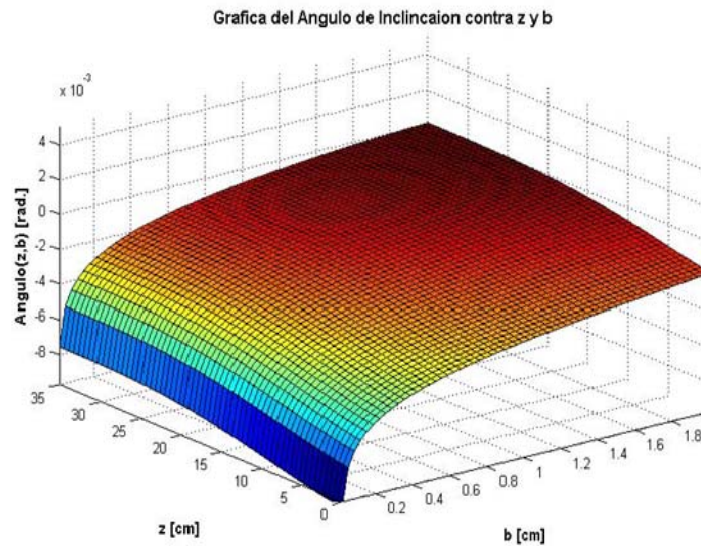


Figura. 3.9 Comportamiento de la Pendiente $\theta_{(z,b)}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z

Como se aprecia la pendiente tiene un comportamiento muy singular, es muy pequeña para gomas muy rígidas ($b = 0$), pero prácticamente no varía para gomas muy blandas ($b = 2$), incluso en este último caso es cero en una considerable longitud del rotor.

3.2.5. Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$

El gráfico de las fuerza de cortante, Q , con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir: $Q = f(0.5, z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el cortante en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función se muestra en la Fig. 3.9

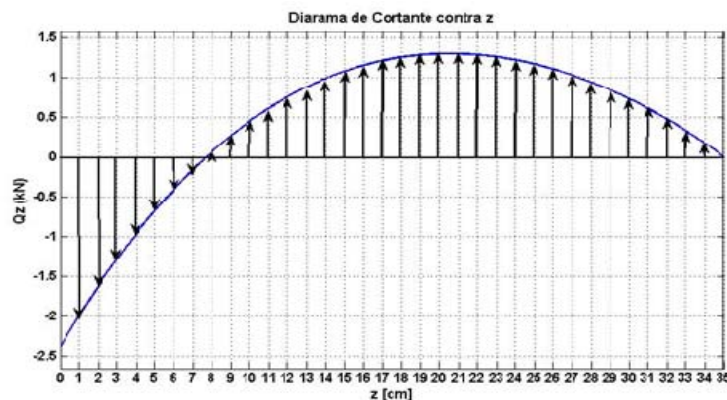


Figura 3.9 Distribución de la fuerza de cortante para $b = 0,5$ cm.

Como se muestra en la gráfica la fuerza de cortante tiene dos extremos para $z = 0$ y para un valor de z intermedio en la longitud. Resulta muy interesante analizar cómo se comportan estos extremos y su posición cuando se varía b .

En la Fig. 3.10 se muestra como en los casos anteriores la dependencia con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b :

$$Q = f(b_i, z)$$

Donde:-

$i = 1, 2, 3.$

$$b_1 = 0.5, b_2 = 1.0, b_3 = 2.0$$

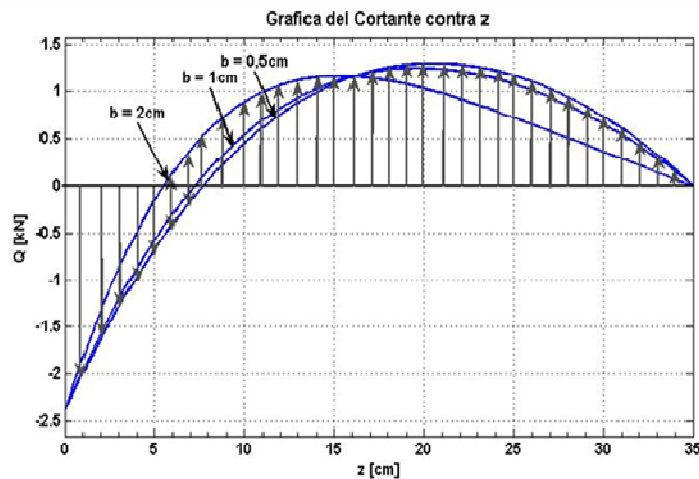


Figura 3.10 Comportamiento de la fuerza de cortante para diferentes valores de b

Como se aprecia el valor del extremo cuando $z = 0$ no se altera pues sólo depende del valor de Q_0 , el otro extremo modifica ligeramente su posición pero su valor máximo casi no se modifica y es siempre menor que Q_0 .

La gráfica de comportamiento del cortante en función de las dos variables se da en la Fig. 3.11

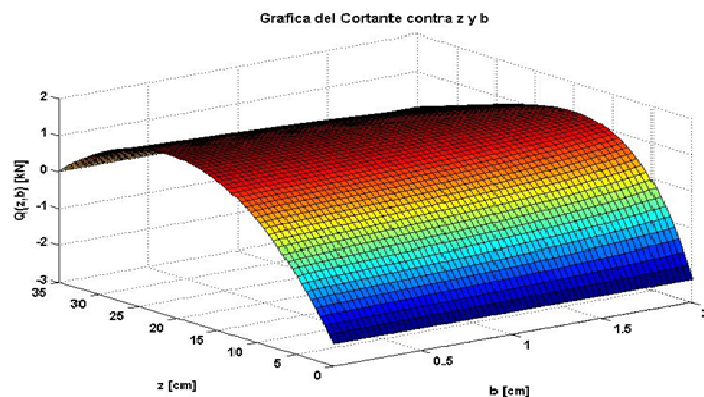


Figura 3.11 Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z

Esta última gráfica sólo corrobora el análisis realizado para la Fig. 3.10.

3.2.6. Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$

La función del momento flector, M , con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir, $M = f(0,5, z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el momento flector en todo el intervalo de z para este valor de b . Esta función se muestra en la Fig. 3.12

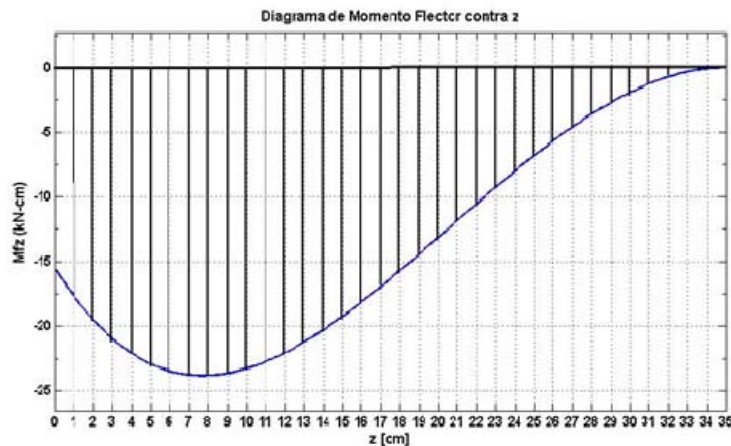


Figura 3.12 Distribución del momento flector para $b = 0,5$ cm.

La gráfica para tres valores distintos de b se da en la Fig. 3.13.

$$M = f(b_i, z)$$

Donde:-

$i = 1, 2, 3.$

$b_1 = 0.5, b_2 = 1.0, b_3 = 2.0$

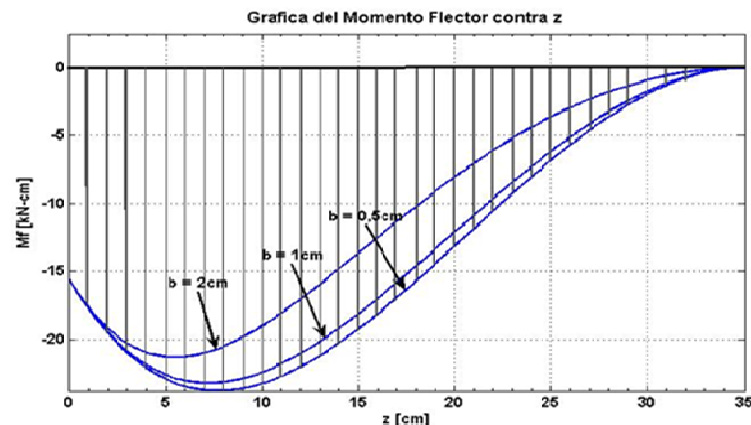


Figura 3.13 Comportamiento del momento flector para diferentes valores de b .

Como se aprecia en las Figs. 3.12 y Fig. 3.13, la posición del momento flector máximo y su valor prácticamente no dependen de la rigidez de la fundación, pero es significativo que ocurre en un punto interior del estator y su valor es mayor que el momento concentrado transmitido por el acoplamiento. Esto es un aporte significativo en el conocimiento del comportamiento de estas bombas.

Ahora para completar el análisis del momento flector se utiliza la función de la misma en la forma tal que b y z son variables, es decir: $M = f(b, z)$. La gráfica de este análisis se muestra en la Fig. 3.14:

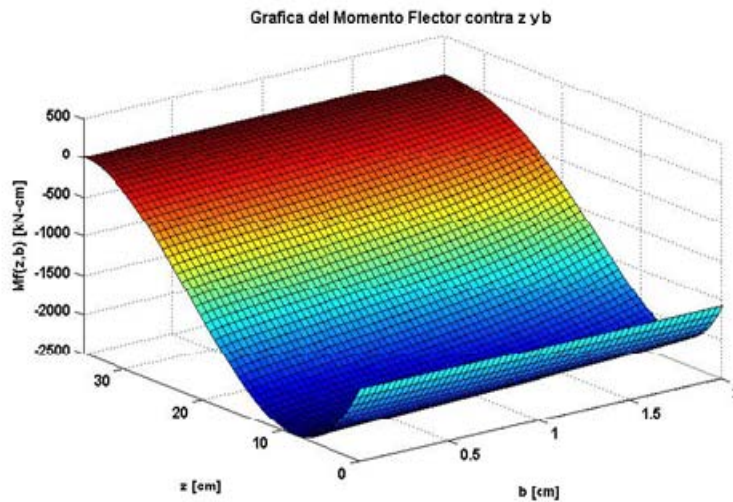


Figura 3.14 Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z

Esta gráfica simplemente corrobora el análisis hecho para la Fig. 3.13 pues como se observa el momento flector máximo casi no varía ni en magnitud ni en posición.

3.2.7. Comportamiento de la reacción de la fundación $q_{R\ b,z}$

En la Fig. 3.15 se muestra el comportamiento de esta reacción para $b = 0,5$.

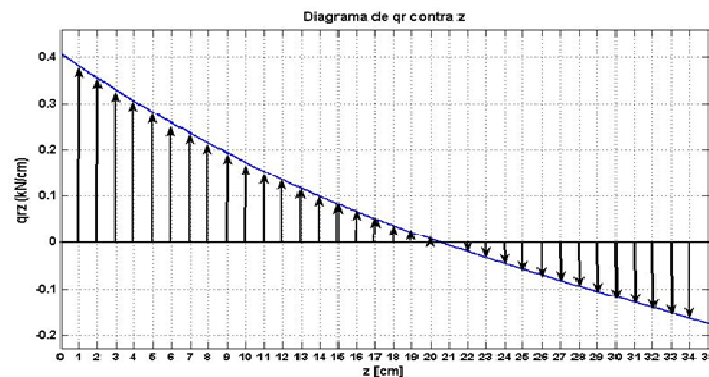


Figura 3.15 Distribución de la reacción de la fundación para $b = 0,5$ cm.

El comportamiento de la reacción del estator sobre el rotor para diferentes valores de b se muestra en la Fig. 3.16.

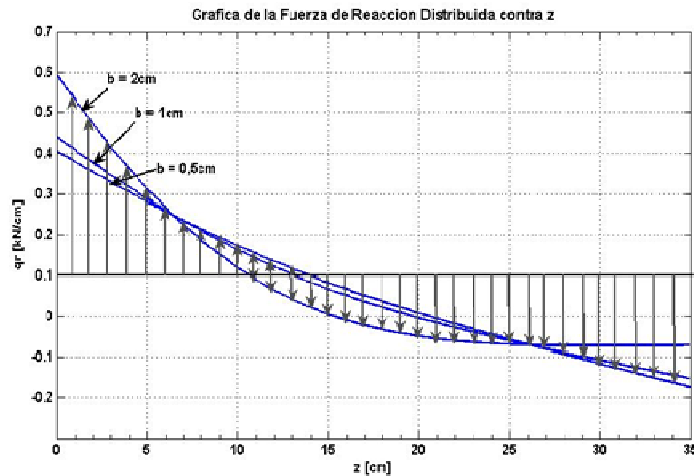


Figura 3.16 Comportamiento de la reacción de la fundación para diferentes valores de b .

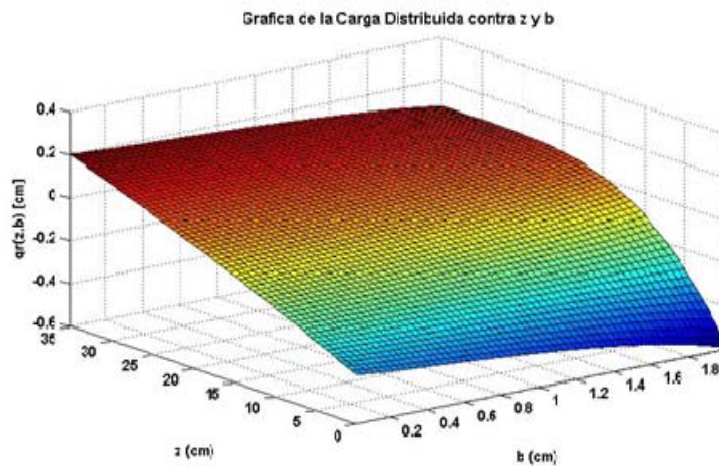


Figura 3.17 Comportamiento de la reacción de la fundación para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z

Como se aprecia en las Figs. anteriores el valor máximo de la reacción de la fundación siempre ocurre para $z = 0$, de aquí que es de esperar un máximo desgaste de los estatores en esta zona. El valor es mayor para las gomas más blandas pues en los contactos Hertzianos a medida que disminuye el Módulo de Elasticidad Reducido, aumenta el ancho de la banda de contacto y el conjunto se hace más rígido asimilando mayor carga en esta zona, ya que existe un principio general en la Mecánica de Materiales que los elementos más rígidos asimilan mayor carga.

Es necesario destacar que la hoja de Cálculo obtenida con el Software MatLab puede ser utilizada para evaluar cualquier rotor, simplemente variando los datos que se le suministran. Esto es un Aporte Práctico importante del Trabajo.

3.3. Cálculo del Momento Flector Máximo en función de z y b

Para hallar el momento flector máximo se parte del supuesto de que el mismo ocurre cuando la derivada del momento flector es igual a cero y como la derivada de la función $M(z,b)$ es igual a la función del cortante $Q(z,b)$, se puede plantear:

$$Q(z, b) = 0 \Rightarrow M(z, b) = M_{fmax}$$

Utilizando el programa MatLab se trata de resolver analíticamente la ecuación planteado, para despejar z en función de b que serian los valores para los cuales el momento flector es máximo, esta operación no fue posible, ya que por su complejidad no existe un despeje analítico de la misma. Ante esta limitación se procede a resolver dicha ecuación mediante un método numérico matricial.

Este método se puede observar programado en los Anexos y consiste en evaluar la expresión $Q(z, b) = 0$ con los valores de una matriz columna cuyos elementos van a ser 'n' valores igualmente distribuidos en el intervalo del posible dominio de b .

Donde:

$$D_b = \{b \in \mathbb{R} : 0 < b < 2\}$$

n : $\Rightarrow$ número de elementos que se desea tener en la matriz b_{num}

En este caso se toma:

$$n = 200$$

b_{num} : $\Rightarrow$ matriz columna de n valores igualmente distribuidos en el dominio de b

Al evaluar elemento a elemento de la matriz b_{num} en la ecuación $Q(z, b) = 0$ se obtiene una matriz columna cuyos elementos van a ser las funciones de $Q(z, b_{num_i}) = 0$, esto implica que cada elemento será ahora una ecuación de una sola variable, que si puede ser resuelta numéricamente por el MatLab. De esta forma se obtiene una matriz de igual orden que las matrices anteriores donde cada elemento es el valor de z correspondiente a cada valor de b para los cuales el momento flector es máximo. De esta manera:

$$M_{fmax} = M(z_{num}, b_{num})$$

Donde:

z_{num} : $\Rightarrow$ matriz columna de n valores de z para los cuales el momento flector es maximo

M_{fmax} : $\Rightarrow$ matriz columna cuyos elementos son los valores del momento flector maximo

Luego de tener los valores de M_{fmax} , z_{num} y b_{num} matricialmente definidos en el MatLab resulta muy fácil obtener cualquier gráfica de la dependencia de M_{max} con las otras dos variables independiente. (Figuras 3.18 y 3.19)

De esta manera se obtiene finalmente la gráfica de momento flector máximo (M_{fmax}) en dependencia con la longitud (z) y el ancho de contacto (b) esto se puede ver en la Figura 3.20.

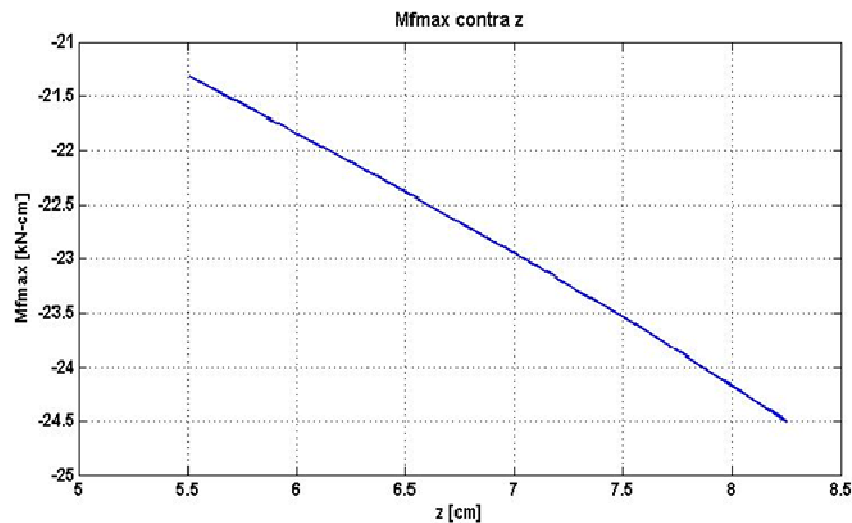


Figura 3.18 Comportamiento de la posición donde ocurre el momento flector máximo.

Como se aprecia en esta gráfica el Momento Flector máximo ocurre siempre, para el rotor analizado, alrededor de una posición próxima a los 7 cm y como se aprecia en las gráficas de las Figuras 3.19 y 3.20 el valor del momento flector máximo varía de una forma muy singular, pero su magnitud como se puede apreciar no varía realmente significativamente

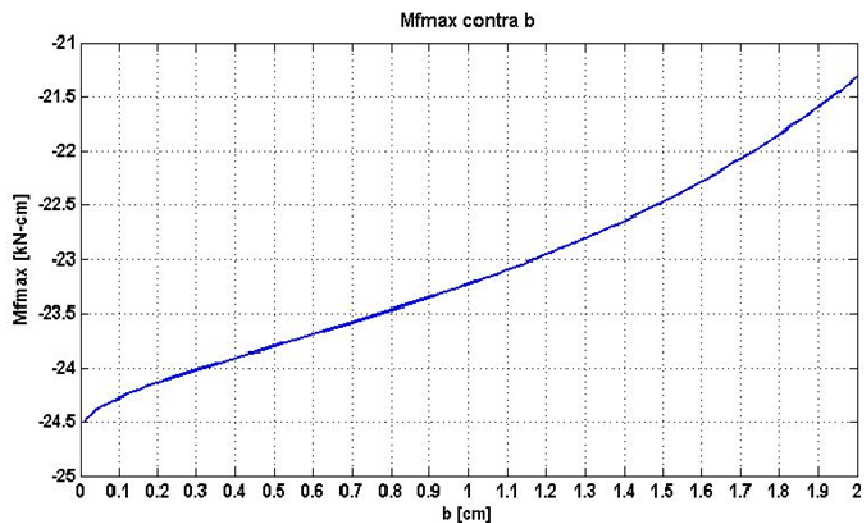


Figura 3.19 Comportamiento del valor del momento flector máximo para diferentes valores de b .

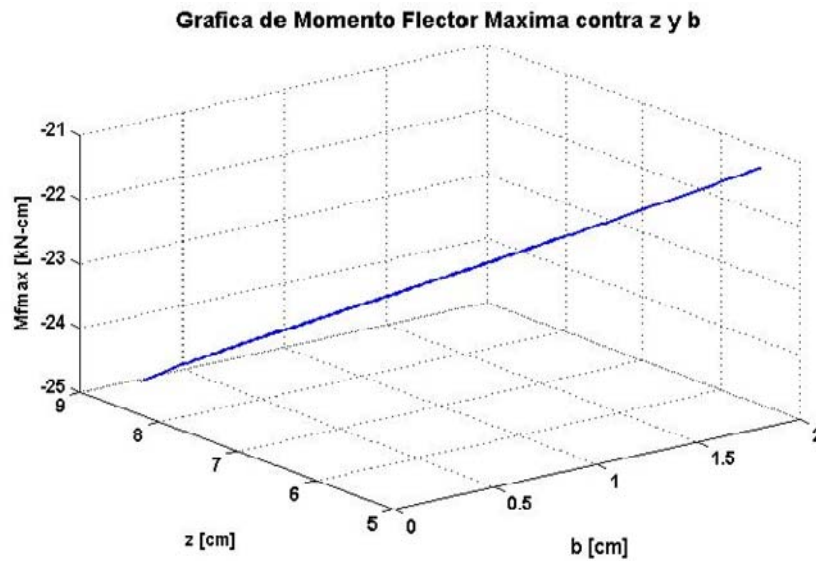


Figura 3.20 Comportamiento del valor del momento flector máximo para los diferentes valores de z_{Mfmax} y de b .

3.4. Cálculo del Diámetro Interior Crítico (d)

3.4.1. Calculo del diámetro crítico para $b = 0,5$ cm

Como el rotor es un rotor hueco, se necesita calcular el diámetro interior crítico con que trabaja el rotor sin falla. Los diámetros del árbol se determinan por la condición de la resistencia mecánica, la ecuación siguiente viene del libro Elementos de Maquinas (Dobrovolski, 1975)

$$M_{r\ max} \leq W * \sigma_{adm.flex.}$$

Donde:-

$M_{r\ max}$ – Momento reducido máximo.

W – Módulo de la sección

$\sigma_{adm.flex.}$ – Tensión admisible del acero

Ahora W para un árbol hueco es dado por la ecuación siguiente:-

$$W = 0,1D^3(1-c^4) \text{ y } c = d/D$$

Donde, las dimensiones del rotor evaluado son:-

D – Diámetro exterior = 42 mm

d – Diámetro interior = 32 mm

c – relación del diámetro interior del rotor respecto al exterior.

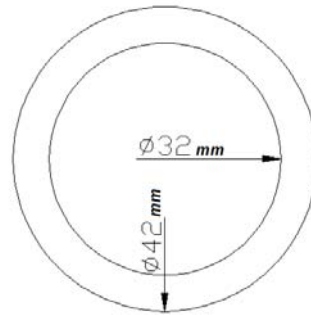


Figura 3.21 Dimensiones del Rotor analizado.

Los valores de tensión admisible, para este cálculo, depende del material y el régimen de funcionamiento del rotor. En este caso tiene un régimen en que el carácter del cambio de las tensiones corresponde al ciclo simétrico, el régimen III.

Los valores de las tensiones admisibles para los aceros al carbono y aleados corresponden aproximadamente por los regímenes a la siguiente proporción:

$$\sigma_{adm.flex.I} : \sigma_{adm.flex.II} : \sigma_{adm.flex.III} = 3,8 : 1,7 : 1$$

Donde - $\sigma_{adm.flex.I} = 0,33\sigma_u$

Entonces:-

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{3,8} = \frac{0,33\sigma_u}{3,8}$$

Donde:

$$\sigma_u = \frac{70kgf}{mm^2} = 68,65kN/cm^2$$

Sustituyendo σ_u en la ecuación de σ_{III} se obtiene:-

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{3,8} = \frac{0,33 * 68,65}{3,8} = 5,96kN/cm^2$$

Ahora la ecuación se queda:-

$$\frac{M_{r\ max}}{W} \leq \sigma_{III}$$

$$\frac{M_{r\ max}}{0.1D^3(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4)} \leq \sigma_{III}$$

Haciendo algunas transformaciones matemáticas se queda que el diámetro menor del rotor debe ser:-

$$d \leq D * \sqrt[4]{1 - \frac{M_{r \max}}{0.1D^3[\sigma]_{III}}}$$

El Momento Reducido Máximo se halla con los valores del Momento Flector Máximo y el Momento Torsor Máximo, para las condiciones más críticas, por la siguiente ecuación:

$$M_{r \max} = \sqrt{M_{f \max}^2 + M_{t \max}^2}$$

$$M_{t \max} = 7,163 \text{ kN} - \text{cm}.$$

$$M_{f \max} = 23,8 \text{ kN} - \text{cm}.$$

Utilizando esta ecuación se puede calcular el diámetro crítico del rotor dado las condiciones siguientes:-

$$b = 0,5 \text{ cm}$$

$$z = 35 \text{ cm}$$

Con estas condiciones los datos son:-

$$M_{r \max} = 24,95 \text{ kN-cm}$$

$$D = 4,2 \text{ cm}$$

Ahora sustituyendo estos valores en la ecuación obtiene que:-

$$d \leq 4,2 * \sqrt[4]{1 - \frac{24,95}{0.1(4,2)^3(5,96)}}$$

$$d \leq 4,2 * \sqrt[4]{1 - 0,564} = 3,41 \text{ cm}$$

$$d_{crit} \leq 3,41 \text{ cm}$$

Es decir que el diámetro interior del rotor debe ser menor o igual a 3,41 cm para que no ocurre falla y para cumplir con la leyes de resistencia. Como se aprecia las dimensiones del rotor analizado están adecuadamente seleccionadas, aunque si resulta conveniente el diámetro interior se puede aumentar ligeramente hasta un valor próximo a 34 mm

3.4.2. Cálculo del diámetro interior en función de z y b

Utilizando el programa MatLab se puede encontrar una gráfica del diámetro crítico interior del rotor en función de z y b. Teniendo los valores de Momento flector máximo para cada valor de z y b, siguiendo el proceso mostrado en la figura siguiente se puede obtener la gráfica de diámetro critico en función de b, z y se puede también obtener una gráfica de tres dimensiones que muestra como varia el diámetro critico en el largo del rotor.

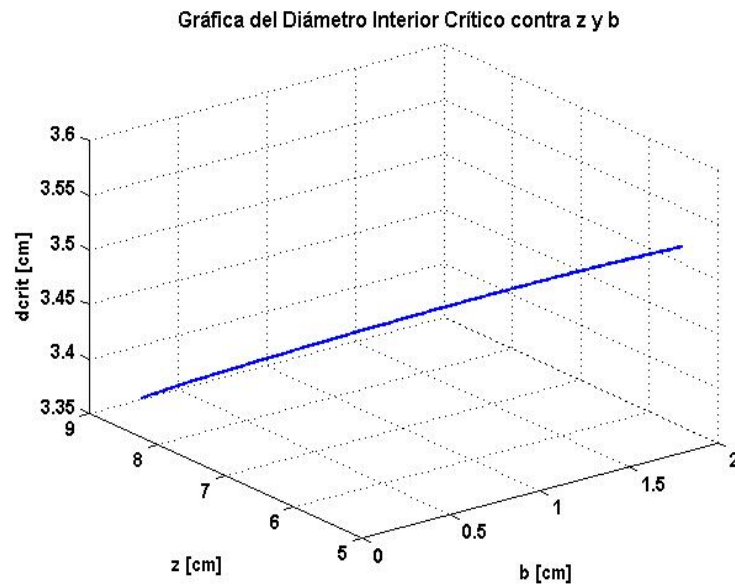


Figura 3.22 Valores del diámetro crítico contra z y b

Las gráficas de diámetro crítico contra b y z, contra b y contra z, obtenidas del MatLab se muestran en las Figuras 3.22, 3.23 y 3.24. Como se aprecia de las gráficas, mientras mas blanda es la goma, mayor puede ser el diámetro interior crítico del rotor, pero sería necesario evaluar en este caso la resistencia al desgaste del estator.:-

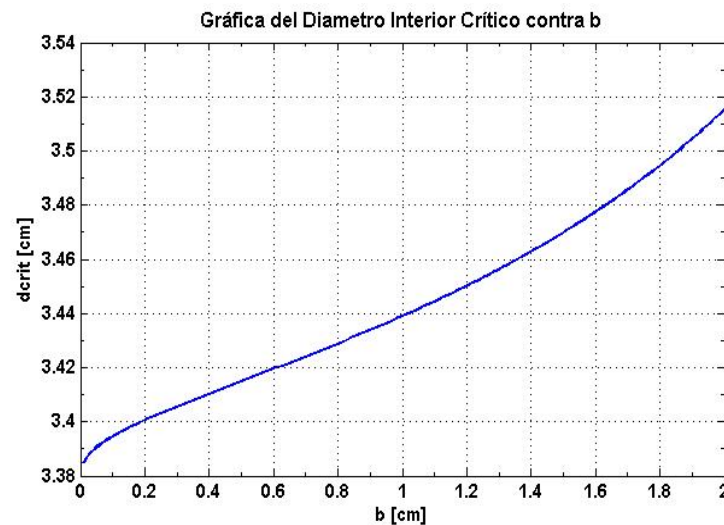


Figura 3.23 Valores del diámetro crítico contra b

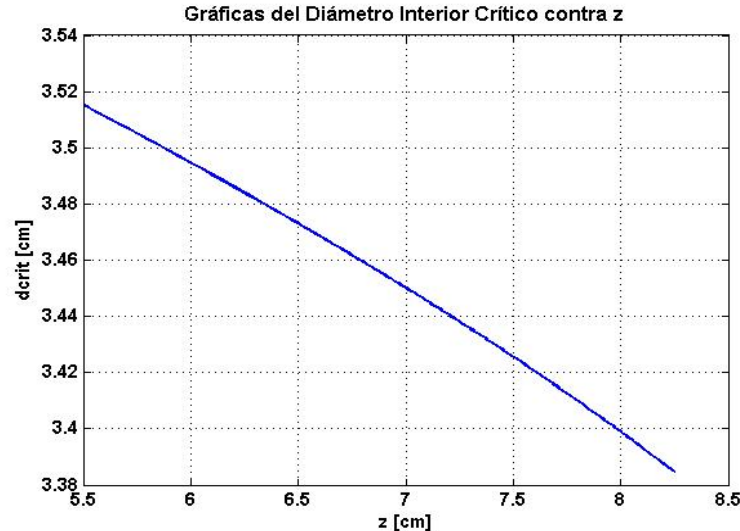


Figura 3.24 Valores del diámetro crítico contra z

3.5. Análisis Económico

3.5.1. Cálculo de los Costos de Fabricación

Es importante comparar para que se pueda apreciar la ventaja del empleo de rotores huecos, los costos de fabricación de un rotor macizo con el de uno hueco. El costo de fabricación está compuesto de los costos directos o gastos en los que se incurre en el proceso de producción y los costos indirectos o gastos en los que se incurre en la dirección, organización y servicios colaterales al proceso productivo.

Los gastos directos están a su vez compuestos por:

- **Materiales:**- Incluye todos aquellos materiales que se consumen en el proceso productivo exceptuando los combustibles.
- **Salario:**- Es la suma de todos los salarios de los operarios que intervienen en el proceso al cual se le adiciona las vacaciones (Salario x 0,090905) y la seguridad social (Salario x 0,14).
- **Amortización:**- Amortización de las máquinas y equipos que intervienen en el proceso productivo. Esta amortización se calcula habitualmente multiplicando la depreciación horaria por el tiempo que interviene la máquina en el proceso productivo y la depreciación horaria se calcula como el cociente del precio de la máquina entre su vida útil en horas. Este procedimiento se conoce como, método de los rendimientos.
- **Energía:**- Gastos en energía ya sea eléctrica o de otro tipo. En los cálculos realizados los gastos en energía se calcularon multiplicando la mitad de la potencia de cada máquina en kw por el tiempo en horas en que se utilizó la misma y este producto a su vez por la tarifa eléctrica correspondiente.

Los gastos indirectos se estimaron como el 30% de los gastos directos.

Tabla 3.3 Costo de Producción del Rotor Macizo

Materiales					
		Precio Unitario		Gastos en Materiales	
Material	Cantidad	CUC/u	MN/u	CUC	MN
Acero (AISI 316)	30kg	0.55	0.07	16.50	2.10
Gasto Total en Materiales				16.50	2.10

Tabla 3.4 Costo de Producción del Rotor Hueco

Materiales					
		Precio Unitario		Gastos en Materiales	
Material	Cantidad	CUC/u	MN/u	CUC	MN
Acero (AISI 316)	8kg	0.55	0.07	4.40	0.56
Gasto Total en Materiales				4.40	0.56

Tabla 3.5 Salarios (Rotor Macizo)

Operario	Salario Horario (Pesos/hr)	Tiempo (hr)	Salario (Pesos)	Vacaciones (Pesos)	Seguridad Social (Pesos)	Gastos en Salarios	
						CUC	MN
Mec. Taller	1.14	12	13.68	1.24	1.92	-	16.84
Gasto Total en Salarios						-	16.84

Tabla 3.6 Salarios (Rotor Hueco)

Operario	Salario Horario (Pesos/hr)	Tiempo (hr)	Salario (Pesos)	Vacaciones (Pesos)	Seguridad Social (Pesos)	Gastos en Salarios	
						CUC	MN
Oper. Maq. Hidraulico	1.14	0.5	0.57	0.05	0.08	-	0.70
Gasto Total en Salarios						-	0.70

Tabla 3.7 Amortización Máquinas Herramientas (Macizo)

Máquina Herramienta	Precio (Pesos)	Vida Útil (horas)	Dep. horaria (pesos/hr)	Tiempo Utiliz. (horas)	Gastos de Amortización	
					USD	MN
Segueta Mec.	2584.57	20000	0.1292	10	-	1.29
Torno Univ.	22817.85	20000	1.1409	70	-	79.86
Taladro Radial	22579.25	20000	1.1290	8	-	9.03
Fresadora Univ.	14331.80	20000	0.7166	8	-	5.73
Equipo Soldar	1500.00	10000	0.1500	10	-	1.5
Equipo Oxi-corte	210.00	10000	0.0210	6	-	0.13
Gasto Total de Amortización					-	97.54

Tabla 3.8 Amortización Máquinas Herramientas (Hueco)

Máquina Herramienta	Precio (Pesos)	Vida Útil (horas)	Dep. horaria (pesos/hr)	Tiempo Utiliz. (horas)	Gastos de Amortización	
					USD	MN
Horno Electr.	5000.00	5000	1.0000	0.25	-	0.2500
Segueta Mec.	2584.57	20000	0.1292	0.20	-	0.0259
Torno Univ.	22817.85	20000	1.1409	1.00	-	1.1409
Equipo soldar	1500.00	10000	0.1500	0.10	-	0.0150
Equipo cromar	2000.00	5000	0.4000	0.30	-	1.2000
Maq Hidráulica	3063.42	5000	0.6127	0.30	-	0.1838
Gasto Total de Amortización					-	2.82

Tabla 3.9 Energía Eléctrica (Macizo)

Máquina	Potencia (KW)	Tiempo Utiliz. (horas)	Energía (KW – hr)	Gastos de Energía	
				USD	MN
Segueta Mec.	4.0	10	20	-	1.12
Torno Universal	28.0	70	980	-	54.88
Taladro Radial	4.0	8	16	-	0.90
Fresadora Univ.	7.5	8	30	-	1.68
Equipo Soldar	3.0	10	15	-	0.84
Gasto Total en Energía Eléctrica				-	59.42

Tabla 3.10 Energía Eléctrica (Hueco)

Máquina	Potencia (KW)	Tiempo Utiliz. (horas)	Energía (KW – hr)	Gastos de Energía	
				USD	MN
Fusión del Aluminio y Calentamiento del Tubo	20	0.25	5.0	-	0.28
Deformación Plástica	2.78	0.10	0.28	-	0.016
Operación, Prep. Y Acabado	-	-	2.72	-	0.15
Gasto Total en Energía Eléctrica				-	0.446

Tabla 3.11 Calculo del Costo total	Macizo		Hueco	
	CUC	MN	CUC	MN
Sub Total Gastos Directos	16.50	175.90	4.40	4.53
Sub Total Gastos Indirectos	4.95	52.77	1.32	1.36
Costo total de Fabricación	21.45	228.67	5.72	5.89

Efecto Económico

Para calcular el efecto económico nos basaremos en el precio de importación de los rotores de la bomba MONO de la firma OMEGA el que asciende a 800.00 USD.

Rotor Macizo

$$\begin{aligned}\text{Efecto económico por unidad} &= (\text{Precio Importación} - \text{Costo}) \\ &= (800.00 - 21.45) = \text{CUC } \$778.55\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que solo la unión láctea importa anualmente 20 unidades tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Efecto económico anual} &= (\text{Efecto económico por unidad}) * (\# \text{ unidades}) \\ &= (778.55) * (20) = \text{CUC\$15571.00}\end{aligned}$$

Rotor Hueco

$$\begin{aligned}\text{Efecto económico por unidad} &= (\text{Precio Importación} - \text{Costo}) \\ &= (800.00 - 5.72) = \text{CUC\$4576.00}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que solo la unión láctea importa anualmente 20 unidades tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Efecto económico anual} &= (\text{Efecto económico por unidad}) * (\# \text{ unidades}) \\ &= (4576) * (20) = \text{CUC\$91520.00}\end{aligned}$$

3.6. Conclusiones del Capítulo

- Partiendo de la potencia y la velocidad de giro del motor de la bomba se calculó el torque que llega al rotor y la fuerza periférica sobre el acoplamiento cardánico y considerando condiciones críticas se consideró esta fuerza igual a la radial sobre el rotor. Se calculó entonces la fuerza y el momento se produce en la sección de comienzo del estator.
- Partiendo del modelo de Viga sobre Fundación Elástica y utilizando el Método de los Parámetros de Origen se obtuvieron las ecuaciones que definen: la flecha del rotor, la reacción del estator sobre el rotor como una carga no uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, la pendiente que adquiere el rotor en contacto con el estator y la distribución del Momento Flector y de la Fuerza de Cortante interna a lo largo de la longitud del rotor.
- Estas ecuaciones fueron programadas con el Software MatLab para poder estudiar el comportamiento de un rotor particular fabricado en la Empresa de Glucosa de Cienfuegos. Se realizó el estudio completo de este rotor y se analizaron los resultados obtenidos ampliando el conocimiento científico sobre el comportamiento de estos rotores.
- La integración de la reacción distribuida del estator sobre el rotor a lo largo de la longitud resulto igual a la carga transversal aplicada al mismo y la integración del producto de esta reacción distribuida longitudinalmente multiplicada por la coordenada z longitudinal resulto numéricamente igual al momento concentrado aplicado en el origen al rotor, lo que confirma que esta distribución obtenida para la reacción es exactamente la que ocurre pues garantiza exactamente el equilibrio del rotor.
- Se realizó un Análisis Económico que incluye la comparación de los Costos de Fabricación de un rotor hueco con uno macizo y se calculó el Efecto Económico de la fabricación de estos rotores.

Conclusiones

Conclusiones

- A través de una amplia revisión bibliográfica y búsqueda de patentes se profundizó en el Estado del Arte de las Bombas de Cavidad Progresiva, en aspectos relacionados con diseños de las bombas y de sus componentes fundamentales: los estatores, los rotores y los acoplamientos de compensación empleados en el accionamiento de los rotores. Se encontraron numerosas patentes relacionadas con estas bombas, sin embargo, no se encontró ninguna fuente donde se trataran métodos para obtener las fuerzas internas en los rotores ni como realizar la evaluación de la resistencia de los mismos, por lo que como conclusión del trabajo se puede formular que el Método propuesto es una Novedad Científica.
- Se profundizó en la Teoría de las Vigas sobre Fundación Elástica y en el Método de los Parámetros de Origen para su aplicación en la elaboración de un Nuevo Esquema de Análisis que permite, utilizando este modelo conocer en primer lugar las interacciones que se producen entre rotor y estator bajo la acción de la fuerza radial provocada por el acoplamiento y a partir de estas las fuerzas internas y tensiones que se producen en el rotor para la evaluación de su resistencia.
- Sobre la base del Esquema de Análisis elaborado y las ecuaciones obtenidas mediante la Aplicación del Método de los Parámetros de Origen se elaboró un Programa utilizando el Software MatLab que permite, para cualquier combinación de rotor con un estator de una Bomba de Cavidad Progresiva de parámetros conocidos realizar el estudio del comportamiento de la flecha del rotor de acero en contacto con la goma del estator, la reacción del estator sobre el rotor como una carga no uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, la pendiente que adquiere el rotor en contacto con el estator y la distribución del Momento Flector y de la Fuerza de Cortante interna a lo largo de la longitud del rotor. El propio Software permitió validar a través del equilibrio de fuerzas y de momento obtenido la veracidad de las ecuaciones que lo conforman.
- Con la ayuda del Programa elaborado se realizó un estudio de todos los parámetros mencionados para un conjunto rotor hueco - estator real, fabricado en el taller de Bombas de Cavidad Progresiva de la Empresa de Glucosa de Cienfuegos y se realizó una evaluación de la resistencia mecánica de dicho rotor para poder obtener el diámetro interior máximo que garantiza

el mínimo espesor de la pared requerido en el mismo. Se comprobó que las dimensiones de dicho rotor, asignadas por la firma que suministró la bomba original a Cuba concuerdan con las obtenidas en el presente trabajo.

- Se realizó un Análisis Económico que incluye el cálculo de los Costos de Fabricación de un rotor hueco fabricado por la tecnología “Aluminoforging” en comparación con el mismo rotor macizo maquinado y se obtuvo el Efecto Económico en su aplicación a 20 bombas, obteniendo un resultado muy favorable.

Recomendaciones

Recomendaciones

- Continuar la Investigación calculando el momento de fricción que se origina entre rotor y estator integrando la carga distribuida a lo largo de la longitud multiplicada por el coeficiente de fricción entre acero y goma y este producto por el radio medio del rotor. Este producto es el momento de fricción entre rotor y estator, el cual pudiera ser validado experimentalmente con una bomba real funcionando en vacío, incorporándole las pérdidas en los cojinetes y en el acoplamiento.
- Investigar la influencia de las fuerzas provocadas por el líquido trasegado en las fuerzas internas sobre el rotor para obtener un valor más exacto del momento torsor sobre el rotor y de la potencia realmente consumida por una bomba.

Bibliografía

Bibliografía

ABS / Textos Científicos. Tomado de: <http://www.textoscientificos.com/polimeros/abs>, Febrero 2009.

Alemán González, Giory. 2008. Tecnología “Aluminoforging” para la Fabricación de los Rotores Huecos Empleados en las Bombas de Cavidad Progresiva. Trabajo de Diploma. M.Sc. Yovany Llody García, Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Dr. Hernán Hernández Herrera: tutores, Ing. Antonio Llody Pérez: consultante. —110 h.

Álvarez, Jesús Sánchez. Elementos de Máquinas Manual Complementario / Santiago Gregori Pérez, Gabriel Rivero Llerena, Regino Gonzales Rodríguez.-- Ciudad de la Habana: Editorial ISPJAE, 1991.-- 371p.

APUNTE DE COEFICIENTE DE BALASTRO. Tomado de <http://74.125.95.132/search?q=cache:pkqdYFq0IjAJ:materias.fi.uba.ar/7411/curso/teoria/leoni.pdf+coeficiente+de+balastro&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=cu>, Febrero 2009.

Arzola de la Peña, Nelson. Determinación Experimental del Coeficiente de Rigidez del Bagazo/ Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Juan Gabriel Noa Aguila.-- Cienfuegos Cuba: Universidad de Cienfuegos, Facultad Mecánica, 2008.--11p.

Arzola de la Peña, Nelson. New Analysis Scheme and Procedure for Prediction of the Sugar Mill Shaft Failure/ Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Dr. Ramon Perez, Ariel Fernandez.-- Orlando, Florida: Editorial ASME, 2005.--7p.

Atlas de Diseño.-- T. I y II.

Caucho. Tomado de: http://html.rincondelvago.com/caucho_1.html, Febrero 2009.

Dobrovolski, V. Elementos de Máquinas / V. Dobrovolski . - - Moscú : Editorial MIR, 1970 . - - 692p

Dr. Castellanos, Luis M. González. Ciencia de los Materiales.

Dr. Goytisolo, Rafael Espinosa. Resistencia a la Fatiga y Vida Remanente de los árboles superiores de los molinos de caña de azúcar para diferentes alternativas de accionamiento hidráulico/ M.Sc. Juan Gabriel Noa Águila, Dr. Nelson Arzola de la Peña, M.Sc. Rogelio Chou Rodríguez.-- Cúcuta -Colombia: Universidad de Pamplona, 2008.-- 6p.

El Caucho SBR - Monografias.com. Tomado de: <http://www.monografias.com/trabajos35/caucho-sbr/caucho-sbr.shtml>, Febrero 2009.

EL COEFICIENTE DE BALASTRO. Tomado de: <http://74.125.95.132/search?q=cache:WwFA62ATY40J:blogcte.coag.es/wp-content/uploads/2008/07/fe03.pdf+coeficiente+de+balastro&cd=4&hl=es&ct=clnk&gl=cu>, Febrero, 2009.

Elementos de Máquinas.-- Ciudad de la Habana: Editorial ISPJAE, 1990.-- 584p.

Feodosiev, V. I. Resistencia de Materiales / V. I. Feodosiev . - - Moscú : Editorial MIR , 1985 . - - 583p

Foro de Ingeniería Geológica y Geotecnia - Coeficiente de balasto horizontal (Kh) - INTERACCION TERRENO-ESTRUCTURA. Tomado de: <http://ingenieriageologica.mforos.com/612707/2846040-coeficiente-de-balasto-horizontal-kh/>, Febrero 2009.

HNBR o-rings and HSN seals for mechanically demanding, moderate-temperature applications. Tomado de: http://www.sealseastern.com/Espanol/HNBR_es.html, Febrero 2009.

http://www.syntexrubber.com/elastomeric_span.htm

Ing. Domenech, José Torres.-- Dibujo Básico.-- Ciudad de la Habana: Editorial ISPJAE, 1991.-- 288p.

LAMINA DE CAUCHO. Tomado de: http://www.cisealco.com/contenido/productos/sellado_estatico/laminas_caucho.htm, Febrero 2009.

Llody García, Yovany. 2008. Métodos Novedosos en el Diseño y Manufactura de Bombas de Cavidad Progresiva. Tesis de Maestría. Dr. Rafael Goytisolo Espinosa, Dr. Hernán Hernández Herrera: tutores, Ing. Antonio Llody Pérez: consultante.—64 h.

Llody Pérez, Antonio, Llody García, Yovany. et.al. 2004 Diseño y Construcción de Bomba Cubana Mono.-- Habana: XIV Fórum Nacional de Ciencia y Técnica. —15p.

Llody Pérez, Antonio, Llody García, Yovany. et.al. 2004 Dispositivo Especial (Fretor) Para el Maquinado de Tornillos Excéntricos Helicoidales utilizados como Rotores en las Bombas de Cavidad Progresiva.-- Cusco, Perú: 8º congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. —7p.

Llody Pérez, Antonio.1996. Desarrollo y Generalización de Estatores GSF40X2B, GSF50X2B para Fábrica de Yogurt y B-85D para Empresa de Semillas/Antonio Llody Pérez.-- Habana: XI Fórum Nacional de Ciencia y Técnica.—40p.

Microsoft Word - Coeficiente de Balastro.doc. Tomado de: http://74.125.95.132/search?q=cache:jayEckiSCfsJ:www.escuelaing.edu.co/encuentro_nacional/2009/documentos/2_encuentro/09_coeficiente_balastro.pdf+coeficiente+de+balastro&cd=5&hl=es&ct=clnk&gl=cu, Febrero 2009.

Progressing cavity pump - Google Patents. Tomado de: <http://www.google.com/patents?q=progressing+cavity+pump&btnG=Search+Patents>, Mayo 2008.

Propiedades Caucho Natural Nitrilo Neopreno EPDM Butyl Hypalon Silicona Viton PUR Bove-ag plasticos y elastomeros sl. Tomado de: <http://www.cauchos-elastomeros.com/propiedades.html>, Febrero 2009.

Propiedades Caucho Natural Nitrilo Neopreno EPDM Butyl Hypalon Silicona Viton PUR Bove-ag plasticos y elastomeros sl. . Tomado de: <http://www.cauchos-elastomeros.com/propiedades.html>, Febrero 2009.

Reshetov, D. Elementos de Máquinas.-- Ciudad de la Habana: Editorial ISPJAE, 1985.-- 830p.

Stiopin, P. A. Resistencia de Materiales.-- Rusia: Editorial Mir Moscú, 1985.-- Edición 4.--370p.

Bibliografía:

Tool driving unit - Google Patents. Tomado de: <http://www.google.com/patents?id=RqQcAAAAEBAJ&dq=hollow+rotors>, Febrero 2009.

Universal Joint - Google Patents. Tomado de: <http://www.google.com/patents?q=universal+joint>, Febrero 2009.

Anexos

Anexos.

Anexo No. 1:- Programación de las Ecuaciones en Matlab

```

1 %Calculos Vigas sobre soportes elasticos%
2 tic
3 syms b
4 Ea=19620 % (kN/cm^2)
5 Eg=9.81 % (kN/cm^2)
6 Ered=2*Eg*Ea/(Eg+Ea);
7 a=Ered/(1.82*(1-log(b))); %para ver dependencia de a=f(b)decimos: esplot(a,[0,1])
8 Ix=10.4 % (cm^4)
9 B=(a/(4*Ea*Ix))^(1/4); %para ver dependencia de B=f(b)decimos: esplot(B,[0,1])
10
11 %define las funciones de Krilov%
12 syms z chi
13 J1=(1/2)*(exp(chi)+exp(-chi))*cos(chi);
14 J2=(1/4)*((exp(chi)+exp(-chi))*sin(chi)+(exp(chi)-exp(-chi))*cos(chi));
15 J3=(1/4)*(exp(chi)-exp(-chi))*sin(chi);
16 J4=(1/8)*((exp(chi)+exp(-chi))*sin(chi)-(exp(chi)-exp(-chi))*cos(chi));
17 %evaluando para encontrar parametros de origen%
18 z1=35 % (cm)
19 ch1l=B*z1;
20 J1l=subs(J1,[chi],[ch1l]);
21 J2l=subs(J2,[chi],[ch1l]);
22 J3l=subs(J3,[chi],[ch1l]);
23 J4l=subs(J4,[chi],[ch1l]);
24 %para resolver sistema%
25 syms y0 s10
26 Q0=-2.388 % (kN)
27 M0=-15.522 % (kNcm)
28 ec1=M0*J1l+Q0*(J2l)/B+a*y0*J3l/B^2+a*s10*J4l/B^3;
29 ec2=Q0*J1l+a*y0*J2l/B+a*s10*J3l/B^2-4*B*M0*J4l;
30 tic
31 [s10num y0num]=solve(ec1,ec2)
32 %para ver dependencia de y0num=f(b)decimos: esplot(y0num,[0,1])
33 %para ver dependencia de s10num=f(b)decimos: esplot(s10num,[0,1])
34
35 %para escribir las expresiones finales
36 ch1ls=B*z ;
37 J1ls=subs(J1,[chi],[ch1l]);
38 J2ls=subs(J2,[chi],[ch1l]);
39 J3ls=subs(J3,[chi],[ch1l]);
40 J4ls=subs(J4,[chi],[ch1l]);

```

```

34
35 %para escribir las expresiones finales
36 ch1ls=B*z ;
37 J1ls=subs(J1,[chi],[ch1l]);
38 J2ls=subs(J2,[chi],[ch1l]);
39 J3ls=subs(J3,[chi],[ch1l]);
40 J4ls=subs(J4,[chi],[ch1l]);
41
42 y=(y0num*J1ls)+(s10num*J2ls/B)-(M0*J3ls/(Ea*Ix*B^2))-(Q0*J4ls/(Ea*Ix*B^3));
43 si=s10num*J1ls-M0*J2ls/(Ea*Ix*B)-Q0*J3ls/(Ea*Ix*B^2)-4*B*y0num*J4ls;
44 M=M0*J1ls+Q0*J2ls/B+a*y0num*J3ls/B^2+a*s10num*J4ls/B^3;
45 Q=Q0*J1ls+a*y0num*J2ls/B+a*s10num*J3ls/B^2-4*B*M0*J4ls;
46
47 bnum=[0.01:0.01:2]';
48 mar=subs(Q,[b],[bnum]);
49 mar1=vpa(mar);
50
51 for i=1:length(mar1)
52 try
53 R = char(solve(mar1(i)));
54 Sol(i,1) = str2num(strrep(R,'z ',''));
55 catch
56 continue
57 end
58 end
59
60 Mmax=subs(M,([z],[b]),([Sol],[bnum]));
61 toc
62 fig1=plot(bnum,Mmax)
63 fig1=plot(Sol,Mmax)
64 fig1=plot3(bnum,Sol,Mmax)
65
66 D=4.2 % (cm)
67 sip=5.96 % (kN/cm^2)
68 dmin3=D*(1-((-M)/(0.1*D^3*sip)))^(1/4)
69 fig1=essurf('21/5*(1-273065911781425152/776808448276580875*(1/2*exp(1/208104*(1/4)*208104*(3/4)*(1/(91/50-91/50*log(b))))^(1/4)*2)+1/2*exp(-1/208104*

```

```

70
71
72 - dmin=D.*(1.-(-Mmax./(0.1.*(D.^3).*sip))).^(1/4)
73 - fig1=plot(bnum,dmin)
74 - fig1=plot(Sol,dmin)
75 - fig1=plot3(bnum,Sol,dmin)
76
77 - di=mesh(M)
78 - fig3M=ezmesh(' -3159/2*(1/2*exp(1/365917469723852800000*8791697173621189^(1/4)*365917469723852800000^(3/4)*(1/(91/50-91/50*log(b)))^(1/4)*z)+1/2*exp(-1
79
80 - fig3M2=ezsurf(' -3159/2*(1/2*exp(1/365917469723852800000*8791697173621189^(1/4)*365917469723852800000^(3/4)*(1/(91/50-91/50*log(b)))^(1/4)*z)+1/2*exp(-
81
82 - fig3Q=ezsurf(' -597/250*(1/2*exp(1/208104*5^(1/4)*208104^(3/4)*(1/(91/50-91/50*log(b)))^(1/4)*z)+1/2*exp(-1/208104*5^(1/4)*208104^(3/4)*(1/(91/50-91/50*
83
84 - fig3Y=ezsurf(' -55738368/5494810733513243125*130^(1/2)*8791697173621189^(1/4)*(-13*8791697173621189^(1/4)*tan(7/73183493944770560000*8791697173621189^(1
85
86 - fig3si=ezsurf('199/1700400000*104052^(1/4)*(11830*5^(1/4)*(-1/91/(-1+log(b)))^(3/4)*log(b)-11830*5^(1/4)*(-1/91/(-1+log(b)))^(3/4)-11830*5^(1/4)*(-1/9
87
88 - fig3qr=ezsurf(' -13080/667/(91/50-91/50*log(b))*(-199/8502000000*26013^(1/2))*(-65*10^(1/2)*(-1/91/(-1+log(b)))^(3/4)*(-182/(-1+log(b)))^(1/2)*tan(35/20
89
90
91
92 % tic
93 % [mar]=solve(Q,z)
94 % toc
95 % save('zdes','mar')
96 %
97 - qr=-a*y
98 - qri=subs([qr],[b],[0.5])
99 - qrm=subs([qr],[b],[1])
100 - qrf=subs([qr],[b],[2])
101 %
102 - tic
103 - fuerza=int(qri,0,35)
104 - numf=vpa(fuerza)
105 - toc
106

```

```

107 %
108 - f1=ezplot(-qri,[0,35])
109 - hold on
110 - f2=ezplot(-qrm,[0,35])
111 - f3=ezplot(-qrf,[0,35])
112 %
113 %
114 - y1=subs([y],[b],[0.5])
115 - ym=subs([y],[b],[1])
116 - yf=subs([y],[b],[2])
117 %
118 - f1=ezplot(-y1,[0,35])
119 - hold on
120 - f2=ezplot(-ym,[0,35])
121 - f3=ezplot(-yf,[0,35])
122 %
123 %
124 - si1=subs([si],[b],[0.5])
125 - sim=subs([si],[b],[1])
126 - sif=subs([si],[b],[2])
127 %
128 - f1=ezplot(si1,[0,35])
129 - hold on
130 - f2=ezplot(sim,[0,35])
131 - f3=ezplot(sif,[0,35])
132 - set(gca,'YLim',[-45e-4 1e-4])
133 %
134 %
135 - M1=subs([M],[b],[0.5])
136 - Mm=subs([M],[b],[1])
137 - Mf=subs([M],[b],[2])
138
139 - f1=ezplot(M1,[0,35])
140 - hold on
141 - f2=ezplot(Mm,[0,35])
142 - f3=ezplot(Mf,[0,35])
143 %

```

```

Editor - C:\Caution\Diante\Sto Ano\Thesis Stuff\Thesis\Mmax\Calculos Finales.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
117 -
118 - f1=ezplot(-y1,[0,35])
119 - hold on
120 - f2=ezplot(-ym,[0,35])
121 - f3=ezplot(-yt,[0,35])
122 - %
123 - %
124 - s1=subs([s1],[b],[0.5])
125 - s1m=subs([s1],[b],[1])
126 - s1f=subs([s1],[b],[2])
127 - %
128 - f1=ezplot(s11,[-10,35])
129 - hold on
130 - f2=ezplot(s1m,[0,35])
131 - f3=ezplot(s1f,[0,35])
132 - set(gca,'YLim',[-45e-4 1e-4])
133 - %
134 - %
135 - M1=subs([M],[b],[0.5])
136 - M1m=subs([M],[b],[1])
137 - M1f=subs([M],[b],[2])
138 - %
139 - f1=ezplot(M1,[0,35])
140 - hold on
141 - f2=ezplot(M1m,[0,35])
142 - f3=ezplot(M1f,[0,35])
143 - %
144 - %
145 - Q1=subs([Q],[b],[0.5])
146 - Q1m=subs([Q],[b],[1])
147 - Q1f=subs([Q],[b],[2])
148 - %
149 - f1=ezplot(Q1,[0,35])
150 - hold on
151 - f2=ezplot(Q1m,[0,35])
152 - f3=ezplot(Q1f,[0,35])
153 -

```

Anexo No. 2:- Ecuación de la Flecha

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{0.01428 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{3}{4}}} \\
 & + \frac{0.01428 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{3}{4}}} \\
 & + \frac{1020.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.000003804}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000003804 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\sqrt{-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}}} \\
 & - \frac{71.42 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}
 \end{aligned}$$

$$\cos\left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\frac{0.00004775 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00002388 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.007437 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.00002388 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.007437 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} - \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$0.00002388 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.007437 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} + 0.00002388 \ln(b) \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.007437 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{0.02975 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & 1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.5}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.5 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.0009068}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \right. \\
 & \left. \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \right) \\
 & \frac{0.003627 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0009068 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000776 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} - 0.000776 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} + \\
 & \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \\
 & 0.000776 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} + \frac{0.001552 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{\text{math} 3.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.000776 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.001552 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \\
 & \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{0.000776 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.001552 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.000776 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 0.000776 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + \frac{0.001552 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.000776 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068 \right)$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{0.0001194 \ln(b) \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.03718 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0002388 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0001194 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \\
 & \frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \\
 & \left. \frac{0.03718 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.1487 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right\} \\
 & \frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \\
 & \frac{1020.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.0000005852}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0000005852 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\sqrt{-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}}} \\
 & \frac{0.00007 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{3.88}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 3.88 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - 0.00007 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{3.88}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 3.88 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

110

$$\frac{411.1 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} +$$

$$\left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{411.1 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2$$

$$\left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

Anexo No. 4:- Ecuación del Momento Flector

$$M = - \frac{14.28 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.597}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.597 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - 14.28 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.597}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.597 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{7.761}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 7.761 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) -$$

$$0.1201 \left(\sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{113.6 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{56.8 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{17690.0 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 56.8 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} - \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{3}{4}} \left(1.82 \ln(b)-1.82\right) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{70760.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 56.8 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 17690.0 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} -$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82}\right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{113.6 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{56.8 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{17690.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{113.6 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{56.8 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b)-1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\begin{aligned} & 17690.0 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} + 113.6 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 56.8 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 17690.0 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \\ & + 26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} - 26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82}\right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

114

$$\begin{aligned}
 & \frac{205.5 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{411.1 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \\
 & \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b)-1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \\
 & \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + \frac{411.1 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2 \\
 & \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b)-1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)
 \end{aligned}$$

Anexo No. 5:- Ecuación de la Fuerza Cortante

$$\begin{aligned}
 Q = & 4.347 \left(\sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right) \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} - 1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{1.194}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + \right. \\
 & \left. \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right) \\
 & + \frac{0.001057 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right)}{\left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)} \\
 & \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{240.2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \frac{960.9 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{240.2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right. \\
 & \left. \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \right)
 \end{aligned}$$

117

$$\begin{aligned}
 & \frac{56.8 \ln(b) \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{17690.0 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{113.6 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{56.8 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} \\
 & - \frac{17690.0 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \\
 & \sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} \left(1.82 \ln(b) - 1.82 \right) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right. \\
 & \left. - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \\
 & \left. - \frac{70760.0 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \\
 & \sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} \left(1.82 \ln(b) - 1.82 \right) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right. \\
 & \left. - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)
 \end{aligned}$$

Anexo No. 6:- Ecuación de la Fuerza de Reacción Distribuida q_r

$$\frac{19.61 \left(0.01428 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + 0.01428 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$q_r = \frac{1.82 \ln(b) - 1.82}{1.82 \ln(b) - 1.82}$$

$$\frac{\left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - 20002.2 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.000003804}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000003804 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82}}}$$

$$\frac{1.82 \ln(b) - 1.82}{1.82 \ln(b) - 1.82}$$

$$\frac{1400.5462 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}$$

$$\frac{1.82 \ln(b) - 1.82}{1.82 \ln(b) - 1.82}$$

$$\frac{\left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.00004775 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00002388 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.007437 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.00002388 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}$$

$$\frac{1.82 \ln(b) - 1.82}{1.82 \ln(b) - 1.82}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + 1.0$$

$$\frac{0.02975 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 0.00002388 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.007437 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{0.00004775 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\begin{aligned} & 0.00002388 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.007437 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \\ & + 0.00004775 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.00002388 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.007437 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \\ & + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{0.00004775 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.00002388 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

121

$$\frac{0.001552 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.000776 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.000776 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} +$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$1.82 \ln(b) - 1.82$$

$$\frac{0.001552 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.000776 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$1.82 \ln(b) - 1.82$$

Anexo No. 7:- Tabla de las Funciones de Kirlov

Tabla 3.1 Funciones de Krilov para Vigas sobre Fundación Elástica				
ξ	J_1	J_2	J_3	J_4
0	1	0	0	0
0.01	1.0000	0.0100	0.00005	0.00000
0.02	1.0000	0.0200	0.0002	0.00000
0.05	1.0000	0.0500	0.0013	0.00002
0.10	1.0000	0.1000	0.0050	0.0002
0.20	0.9997	0.2000	0.0200	0.0014
0.30	0.9987	0.2999	0.0450	0.0045
0.40	0.9957	0.3997	0.0800	0.0107
0.50	0.9895	0.4990	0.1249	0.0208
0.60	0.9784	0.5974	0.1798	0.0360
0.70	0.9600	0.6944	0.2444	0.0571
0.80	0.9318	0.7891	0.3186	0.0852
0.90	0.8931	0.8804	0.4021	0.1211
1	0.8387	0.9668	0.4945	0.1659
1.10	0.7568	1.0465	0.5952	0.2203
1.20	0.6561	1.1173	0.7035	0.2852
1.30	0.5272	1.1767	0.8183	0.3612
1.40	0.3656	1.2217	0.9383	0.4490
1.50	0.1664	1.2486	1.0620	0.5490
$\pi/2$	0.0000	1.2546	1.1507	0.6273
1.60	-0.0753	1.2535	1.1873	0.6615
1.70	-0.3644	1.2322	1.3118	0.7863
1.80	-0.7060	1.1789	1.4326	0.9237
1.90	-1.1049	1.0888	1.5464	1.0727
2	-1.5656	0.9558	1.6490	1.2325
2.10	-2.0923	0.7735	1.7359	1.4020
2.20	-2.6882	0.5351	1.8018	1.5971
2.30	-3.3562	0.2325	1.8408	1.7614
2.40	-4.0976	-0.1386	1.8461	1.9461
2.50	-4.9128	-0.5885	1.5105	2.1293
2.60	-5.8003	-1.1236	1.7256	2.3065
2.70	-6.7565	-1.7509	1.5827	2.4725
2.80	-7.7759	-2.4770	1.3721	2.6208
2.90	-8.8471	-3.3079	1.0838	2.7443
3.00	-9.9669	-4.2485	0.7069	2.8346
3.10	-11.1119	-5.3023	0.2303	2.8823
3.20	-12.2656	-6.06471	-0.3574	2.8769
3.30	-13.4048	-7.7549	-1.0678	2.8068
3.40	-14.5008	-9.1507	-1.9121	2.6589
3.50	-15.5198	-10.6525	-2.9014	2.4195
3.60	-16.4218	-12.2508	-4.0459	2.0735
3.70	-17.1622	-13.9315	-5.3544	1.6049
3.80	-17.6875	-15.6761	-6.8343	0.9969
3.90	-17.9387	-17.4599	-8.4909	0.2321
4.00	-17.8498	-19.2524	-10.3265	-0.7073
ξ	J_1	J_2	J_3	J_4

4.10	-17.3472	-21.0160	-12.3404	-1.8392
4.20	-16.3505	-22.0755	-14.5274	-3.1812
4.30	-14.7722	-24.2669	-16.8773	-4.7501
4.40	-12.5180	-25.6373	-19.3743	-6.5615
4.50	-9.4890	-26.7447	-21.9959	-8.6290
4.60	-5.5791	-27.5057	-24.7117	-10.9638
4.70	-0.6812	-27.8274	-27.4823	-13.5732
4.80	5.3164	-27.6052	-30.2589	-16.4604
4.90	12.5239	-26.7239	-32.9814	-19.6232
5.00	21.0504	-25.0565	-35.5775	-23.0525
5.10	30.9997	-22.4661	-37.9619	-26.7317
5.20	42.4661	-18.8057	-40.0350	-30.6346
5.30	55.5317	-13.9201	-41.6826	-34.7246
5.40	70.2637	-7.6440	-42.7727	-38.9524
5.50	86.7044	-0.1901	-43.1593	-43.2557
5.60	104.8687	9.7544	-42.6775	-47.5558
5.70	124.7352	21.2199	-41.1454	-51.7563
5.80	146.2448	34.7564	-38.3640	-55.7429
5.90	169.2837	50.5203	-34.1198	-59.0363
6.00	196.1881	70.6079	-27.4846	-62.7889
6.10	221.8019	91.4992	-19.4045	-65.1503
6.20	245.5231	112.5249	-10.2356	-66.4981
2π	267.7468	133.8725	0	-66.9362
6.30	272.2487	138.4120	2.2869	-66.9175
6.50	324.7861	198.1637	35.7713	-63.3105
7.00	413.3762	386.8072	180.1191	-13.2842
7.50	313.3700	580.6710	423.9858	133.6505
$5/2\pi$	0	643.9927	643.9926	321.9964
8.00	-216.8647	628.8779	737.3101	422.8713
8.50	-1479.3701	241.4136	981.0984	860.3917
9.00	-3691.4815	-1010.8800	834.8607	1340.3007
3π	-6195.8239	-3097.9120	0	1548.9560
9.50	-6660.9594	-3581.4756	-250.9959	1539.7410
10.00	-9240.8733	-7616.1462	-2995.7095	812.3636

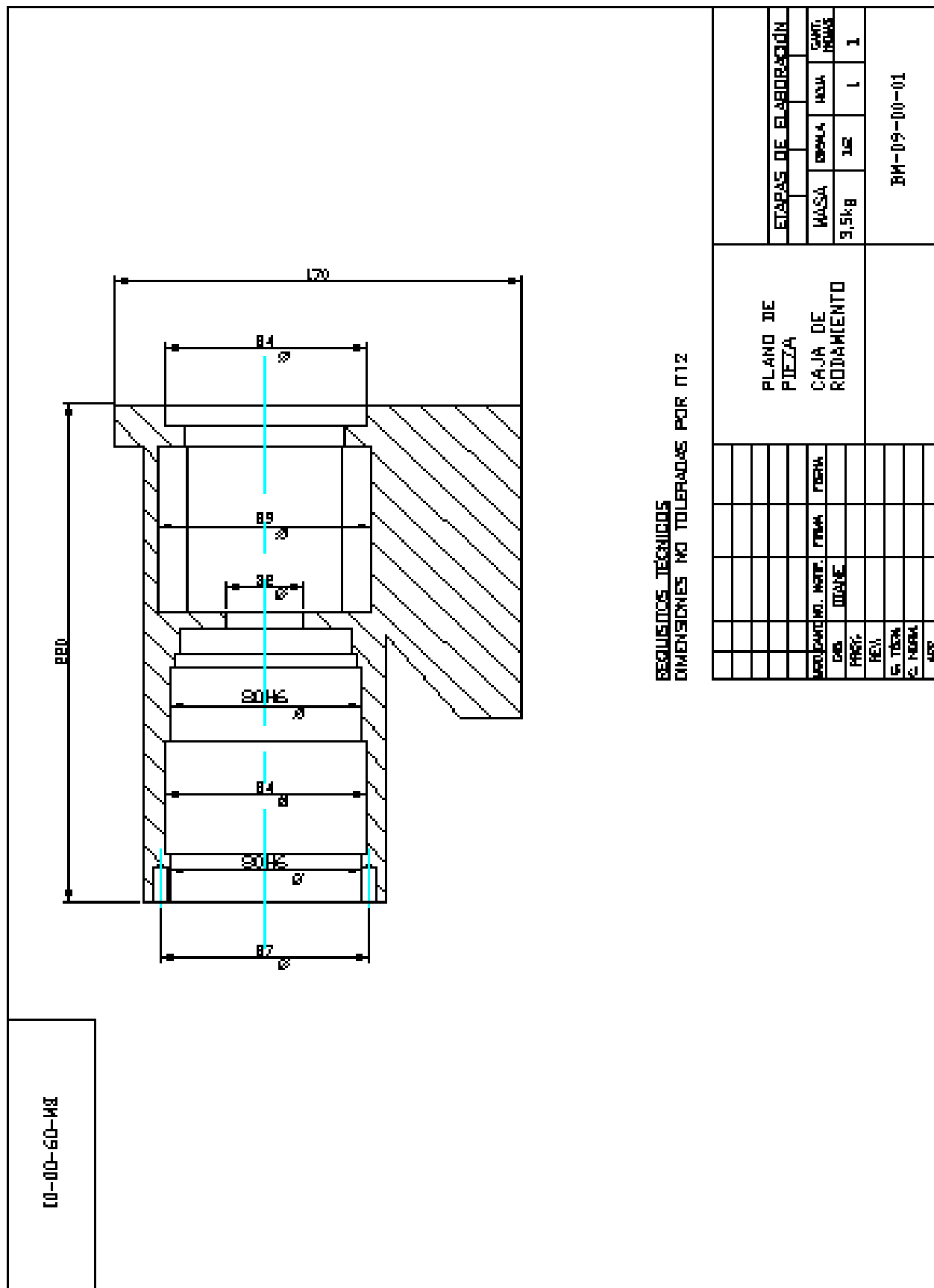
Anexo No. 8:- Desgaste del Pasador de una Sistema Cardán

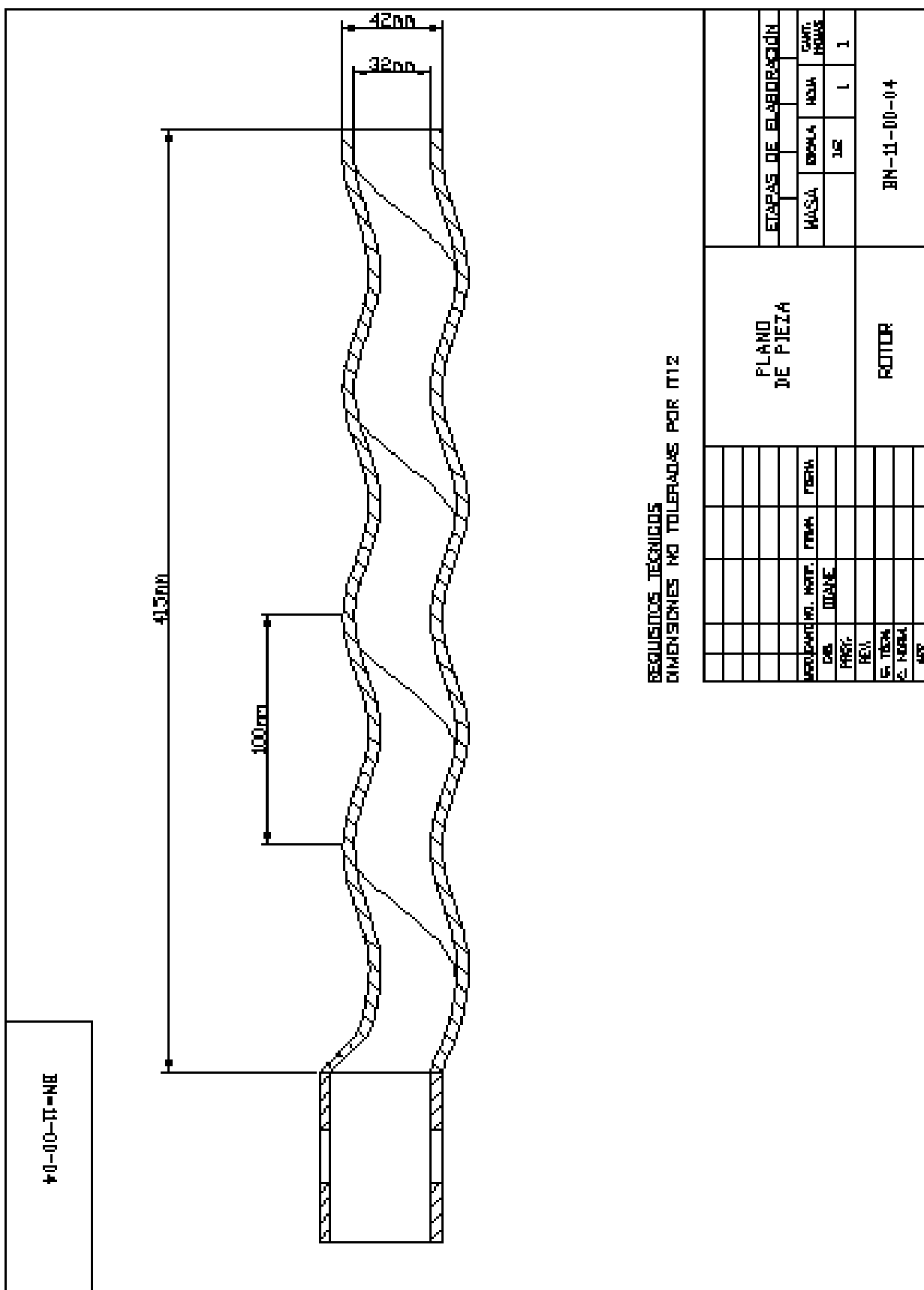


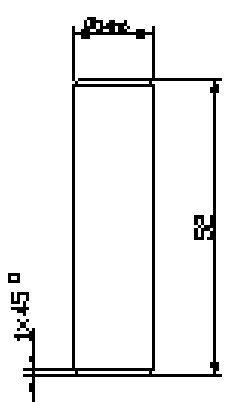
Anexo No. 9:- Planos de la Bomba Mono ALL-43

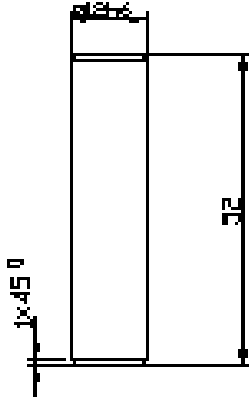
Los planos dibujados de la bomba mono ALL-43 se pueden ver en sus formatos en las páginas que siguen.

28

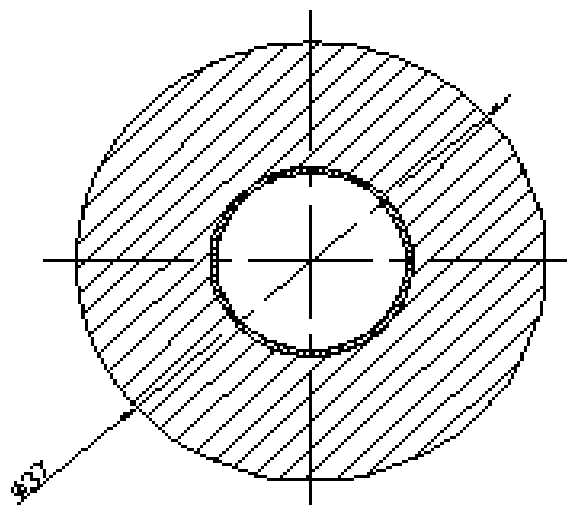
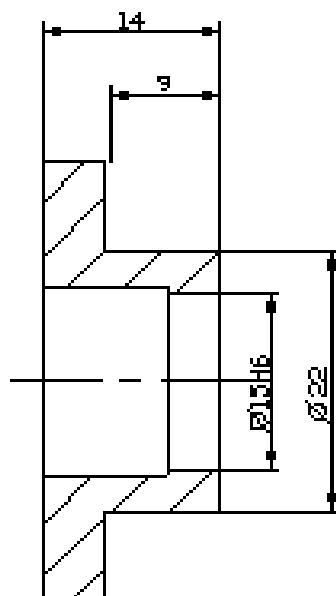




90-00-11-NE									
									
REQUISITOS TÉCNICOS									
DIMENSIONES NO TOLERADAS POR IT12									
					PLANO DE PIEZA	ETAPAS DE ELABORACION			
						MASA	DESALA	NOA	CANT. HERR.
							10	1	1
MODIFIC.	NO.	FECHA	FECHA	FECHA					
PROG.									
REC.					PASADOR DEL SISTEMA CARDANICO	EN-11-00-06			
D. TCM.									
C. NORAL									
APR.									

EM-11-00-10										
										
REQUISITOS TÉCNICOS DIMENSIONES NO TOLERADAS POR IT12										
					PLANO DE PIEZA	ETAPAS DE ELABORACIÓN				
						MASA	ESCALA	HOJA	HOJA TOTAL	
							DL	1	1	
NOB.	DANT.	DEL.	NOTIF.	REDA	REDA.	PASADOR DEL ARIEL MOTRIZ	EM-11-00-10			
DEL.		DIANE								
PROY.										
REV.										
EL. TORN.										
C. NOMIN.										
APL.										

11-00-11-WB



REQUISITOS TÉCNICOS
DIMENSIONES NO TOLERADAS POR IT12

					PLANO DE PIEZA	ETAPAS DE ELABORACIÓN			
PROY.	DEL.	DEL. NOTIF.	REDA	REDA	TAPON	MASA	ESCALA	REDA	REDA
DEL.	JOANE						Ed	1	1
PROY.									
DEL. TCOM.									
CL. NOTIF.									
APPL									
						EM-11-00-11			