

República de Cuba
Ministerio de Educación Superior



Facultad de Ingeniería Mecánica
Colectivo de Mecánica Aplicada

Trabajo de Diploma

**Aplicación de los Esquemas de Articulación y Empotramiento
Elásticos en el Análisis de las Averías
de los Eslabones del TP1 de la Empresa
“Cementos Cienfuegos S.A.”**

Autor: Héctor Ripoll Acosta.

Tutores: Dr.C. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa

Ing. Raúl Alfonso Rodríguez

Ciudad de Cienfuegos. Cuba 2009

Año del 50 aniversario del triunfo de la Revolución.



Facultad de Ingeniería Mecánica.

Declaración de Autoría

Por este medio hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”, como parte de la culminación de los estudios de la carrera de Ingeniería Mecánica, autorizando además que el mismo sea utilizado por la institución para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial o total; y por tanto no podrá ser presentado en eventos, ni publicado sin la aprobación de la institución.

Nombre y Apellidos del Autor. Firma

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido revisado y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico Técnico

Nombre y Apellidos. Firma

Vise Decano.

Nombre y Apellidos. Firma

Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyecto.

Nombre y Apellidos. Firma



Facultad de Ingeniería Mecánica.

Aval de los tutores

Por este medio certificamos que:

El Trabajo de Diploma:

Título: “Aplicación de los Esquemas de Articulación y Empotramiento Elásticos en el Análisis de las Averías de los Eslabones del TP1 de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”

Del Autor:

Hector Luis Ripoll Acosta.

Cumple con los requisitos necesarios para ser defendido en la fecha propuesta, pues consta de un gran nivel técnico y presenta una estructura, redacción y ortografía adecuadas.

Dr.C. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa

Centro de estudio de Olidrahulica y Neumática

Pensamiento

*“Lo fácil lo hicimos ayer, lo difícil lo terminamos hoy
y lo imposible lo haremos mañana.*

Pool.

Dedicatoria

*A mis abuelos, porque le dieron la vida
a mis maravillosos padres
que son los mejores del mundo.*

*A mis padres porque gracias a su educación,
amor y entrega he llegado hasta aquí.*

A mi hermano por el cariño que nos tenemos.

En general a toda esa gran familia que somos.

Agradecimientos

La gratitud es el más legítimo pago al esfuerzo ajeno, es reconocer que todo lo que somos es la suma del sudor de los demás, es tener conciencia de que un hombre solo no vale nada y que la dependencia humana, además de obligada es hermosa.

Es por eso que quiero dejar constancia de mi agradecimiento a:

Mis tutores, en especial al Dr. Rafael Goytisoló Espinosa por su esfuerzo y dedicación para la realización de este trabajo.

Mis familiares en especial a mis abuelas por ayudarme en cada momento que ha sido necesario.

Mis padres y hermano, en especial a toda mi familia ya que me apoyaron en todo incondicionalmente.

Mis amigos en especial a Aibys González, Henry Rodríguez y Yoan Lujan por su apoyo durante todo este tiempo.

A la Revolución y a Fidel por darme la oportunidad de formarme como ingeniero.

A todas las personas que de una forma u otra han tenido que ver con la realización de este sueño.

A todos muchísimas gracias,

El Autor.

Resumen

En la Ingeniería de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” la Plataforma de Alimentación del Transportador TP1 se colocó muy alta con relación al nivel de las tablillas del mismo, casi 12 m de altura, sin valorar que en las condiciones cubanas podían llegar a la Planta piedras de gran tamaño, que pueden alcanzar hasta 7 toneladas de peso. Piedras como estas dejadas caer cíclicamente desde esa altura provocan cargas de impacto excesivamente grandes que según se demostró en la presente investigación son la causa de la fractura por fatiga de los eslabones de las cadenas. En el presente Trabajo de Diploma se presenta en primer lugar una caracterización de los transportadores de tablillas en general y se particulariza en las características del Transportador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.”. Se desarrolla como parte del trabajo una Metodología de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos y Empotramientos Elásticos de manera que se pudieran calcular las cargas sobre los eslabones considerando la elasticidad de todo el sistema. Este aspecto constituye la Novedad Científica Fundamental de la Investigación. Se analiza la influencia de estas cualidades elásticas para tres diferentes condiciones de carga y de apoyos y se obtienen del análisis conclusiones importantes para la solución del problema. Se calcula el valor del coeficiente de cargas dinámicas para cada caso y para el régimen inestable normal de trabajo de la instalación se evalúa la resistencia a la fatiga de los eslabones, demostrándose que su resistencia a la fatiga no está garantizada. Se dan algunas recomendaciones para resolver el Problema.

Índice.

Introducción	1
Capítulo I: Generalidades sobre los Transportadores de Tablillas y Particularidades del Transportador Alimentador TP1.	5
1.1 Generalidades sobre los Transportadores de Tablillas.	5
1.1.1 Condiciones fundamentales de su empleo.	5
1.1.2 Principales ventajas de los Transportadores de Tablillas.	6
1.1.3 Principales desventajas.	7
1.1.4 Partes componentes y principio de funcionamiento.	7
1.2 Descripción de sus partes componentes.	8
1.2.1 Partes componentes.	8
1.2.2 Cadenas.	9
1.2.3 Tablillas.	9
1.2.4 Elemento motriz.	11
1.2.5 Estructura metálica.	11
1.2.6 Sistema de atesado.	12
1.2.7 Órgano de tracción:	12
1.2.7 Sistema de Transmisión.	12
1.3 Metodología de cálculo de los transportadores de tablilla.	13
1.3.1 Datos de entrada.	13
1.3.2 Secuencia del cálculo.	13
1.4 Cálculos de Comprobación de la cadena en funcionamiento	20
1.4.1. Cálculo de la fuerza dinámica en funcionamiento.	21
1.4.2. Cálculo de la fuerza teórica.	22
1.4.3. Determinación de la fuerza de cálculo.	22
1.4.4. Comprobación.	22
1.5 Cálculo de comprobación de la cadena en el arranque.	23
1.5.1 Cálculo de la tensión dinámica en el arranque.	23
1.5.2 Cálculo de la tensión dinámica máxima.	24
1.5.3 Cálculo de comprobación.	24

1.6 Cálculo de comprobación al desgaste.	24
1.6.1. Determinación de la Tención Teórica de la cadena a los efectos de desgaste.	24
1.6.2 Calcular tensión de cálculo sobre la cadena a los efectos del desgaste	24
1.6.3 Calcular el área sometida al desgaste.	25
1.6.4 Comprobación.	25
1.7 Particularidades del Transportador Alimentador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S. A.”	26
1.7.1 Denominación del tipo de transportador y datos generales	26
1.7.2 Datos Técnicos del Transportador	26
1.7.3 Componentes del Transportador TP1.	26
1.8 Transportador de limpieza.	33
1.8.1 Denominación y datos generales.	33
1.8.2 Composición del transportador.	33
1.8.3 Estación de accionamiento.	33
1.8.4 Conjunto de accionamiento.	33
1.8.5 Árbol de accionamiento.	34
1.8.6 Estación Tensora	34
1.8.7 Eje Tensor.	34
1.9 Interruptores de Emergencia.	34
1.10 Control de velocidad de giro.	35
1.11 Ruedas de estrella	35
1.12 Comprobación del desgaste de los rodillos de rodadura	36
1.13 Cadenas, su desgaste y reemplazo	37
1.14 Conclusiones del Capítulo	38
Capítulo II Desarrollo del Método de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos Articulados y Empotramientos Elásticos y su Aplicación a las Tablillas, Apoyos y Eslabones del TP1.	39
2.1 Métodos Generales de Solución de Vigas Hiperestáticas.	39

2.1.1 Método de las Fuerzas. _____	39
2.1.2 Método de la Ecuación de los Tres Momentos. _____	42
2.1.3 Solución utilizando el Método de los Parámetros de Origen. _____	44
2.2 Los Apoyos Rígidos Clásicos. _____	45
2.2.1 Modelos físico – matemáticos de los apoyos rígidos clásicos. _____	45
2.3 Modelos físico–matemáticos de algunos apoyos elásticos tratados en la literatura. _____	47
2.3.1 El Apoyo Articulado Móvil Elástico. _____	47
El signo menos indica que la reacción es de signo contrario al desplazamiento del apoyo. _____	48
C_A - Constante de rigidez del apoyo en $\frac{\text{cm}}{\text{kgf}}$, $\frac{\text{plg}}{\text{lb}}$, etc. _____	48
2.3.2 El Apoyo Articulado Elástico Fijo. _____	48
El modelo físico se representa tal como se muestra en la Fig. 2.7 _____	48
2.3.3 La Fundación Elástica. _____	48
El modelo físico de la Fundación Elástica (5) se muestra en la Fig. 2.8 _____	48
El modelo matemático se expresa en este caso como: _____	49
2.3.4 Tratamiento de los aspectos relacionados con la elasticidad de los Apoyos en la Literatura _____	50
2.4 El Empotramiento Elástico. _____	52
2.5 Solución de vigas hiperestáticas con empotramientos elásticos y apoyos elásticos por el Método de las Fuerzas. _____	53
2.5.1 Procedimiento General de Solución. _____	53
2.5.2 Solución para cuando $\varphi = 0$. _____	62
2.5.3 Solución para cuando $\varphi = 1$. _____	68
2.5.4 Solución para cuando $\varphi = 0,5$. _____	71
2.5.5 Análisis de los Resultados. _____	74
2.6 Influencia de la posición de las cargas de impacto en el coeficiente de carga dinámica y en el momento en el empotramiento. _____	74

2.6.1 Esquema de Análisis de la Tabilla con Apoyos Elásticos y las Cargas a considerar. _____	74
2.6.2 Solución del Sistema Hiperestático. _____	75
2.6.3 Solución para cuando $\varphi = 0$. _____	82
2.6.4 Solución para cuando $\varphi = 1$. _____	86
2.6.5 Solución para cuando $\varphi = 0,5$. _____	89
2.6.6 Análisis de los Resultados. _____	91
2.7 Influencia de la posición y número de los apoyos elásticos. _____	92
2.7.1 Esquema de Análisis de la Tabilla con Apoyos Elásticos y las Cargas a considerar. _____	92
2.7.2 Solución del Sistema Hiperestático. _____	92
2.7.3 Solución para cuando $\varphi = 0$. _____	99
2.7.4 Solución para cuando $\varphi = 1$. _____	104
2.7.5 Solución para cuando $\varphi = 0,5$. _____	107
2.7.6 Análisis de los Resultados. _____	110
2.8 Resumen de los Resultados Obtenidos. _____	110
2.9 Conclusiones del Capítulo. _____	111
Capítulo III Evaluación de la Resistencia Mecánica Dinámica de los Eslabones y las Tablillas. _____	112
3.1 Cálculo del Coeficiente de Carga Dinámica durante el Impacto Piedra - Tablilla del Transportador Alimentador TP1. _____	112
3.1.1 Elementos que intervienen en el desplazamiento estático del Sistema Piedra - Tablilla del Transportador Alimentador TP1. _____	112
3.1.1 Cálculo del desplazamiento estático del contacto piedra – colchón de caliza. _____	113
3.1.2 Cálculo del desplazamiento estático resultante. _____	115
3.1.3 Cálculo del coeficiente de carga dinámica. _____	116
3.1.4 Cálculo de la altura de caída de la piedra. _____	117
3.1.5 Cálculo del coeficiente de carga dinámica y de las cargas dinámicas. _____	120
3.2 Metodología de cálculo de las tensiones en los eslabones _____	120

3.2.1	Calculo de las tensiones tangenciales de torsión _____	120
3.2.2	Cálculo de las tensiones normales de flexión _____	124
3.2.3	Calculo de las tensiones normales de tracción. _____	126
3.2.4	Calculo de los valores de las tensiones de trabajo. _____	126
3.2.5	Comprobación de la resistencia estática de los eslabones a la sobrecarga instantánea provocada por un impacto de una piedra de 1,5 m de diámetro. _____	131
3.3	Cálculo de las tensiones equivalentes para el régimen inestable de trabajo del transportador TP1 y de los factores de seguridad a la fatiga. _____	132
3.4	Conclusiones del Capítulo. _____	136
	Conclusiones Generales _____	138
	Recomendaciones _____	143
	Referencia Bibliográfica. _____	144
	Bibliografía _____	145
	Anexos _____	148

Introducción

La Empresa Mixta “Cementos Cienfuegos S.A. “ surgió a partir de las negociaciones que se iniciaron en el año 2000 con la parte extranjera y a mediados del año 2001 se inició la inversión consistente en una rehabilitación general de la antigua Empresa de Cementos “Karl Marx” y el montaje de equipamiento prácticamente nuevo en la línea No. 3. Estas inversiones abarcaron también la vieja Planta de Caliza que trituraba inicialmente sólo caliza y que se remodeló para triturar y secar no sólo caliza, sino también arcilla, marga y feldespató y se denominó Planta de Trituración y Secado. Esta remodelación incluyó la instalación de un nuevo Transportador Alimentador denominado TP 1 y una Criba para reducir la cantidad de material que se hacía llegar al molino de Martillos para su trituración, elevándose de esta forma la capacidad de producción de la Planta. La Criba fue diseñada y construida por la Firma Alemana Haver and Boecker, de reconocido prestigio en la fabricación de este tipo de equipamiento y el Transportador TP1 fue diseñado y construido por la Firma también Alemana Aumund Group. La Ingeniería de la Planta en su conjunto fue desarrollada por una Firma Canadiense Canadian Engineering Group, la puesta en marcha de la instalación se produjo en Noviembre del 2004.

La **Situación Problémica** existente es que al diseñar la ingeniería de la Planta se cometieron varios errores al colocar en primer lugar la Plataforma Alimentadora del Transportador Alimentador TP 1 muy elevada con relación a la Estera del Transportador, a casi a 12 m de altura y la descarga del TP1 a más de 2,5 m de diferencia con relación al nivel de la Criba, sin valorar que en las condiciones cubanas podían llegar a la Planta piedras de gran tamaño, de más de 2 m de diámetro con pesos que pueden alcanzar hasta 10 toneladas o más.. Una piedra de estas dimensiones dejada caer desde esas alturas provoca cargas de impacto excesivamente grandes que según Investigaciones realizadas anteriormente afectó sensiblemente la integridad estructural de la Criba (1) y se vio la necesidad y la posibilidad real de acercar la descarga a la criba (2)

Esta situación ha continuado provocando afectaciones en el sistema, como son las reiteradas averías por fractura en los eslabones del Transportador. Producto de los frecuentes y reiterados impactos de las cargas de operación, a principios del año 2006, apenas transcurrido un año de explotación aparecieron las primeras grietas de fatiga en ambos laterales de la Criba, que provocaron reiteradas reparaciones en “situ”, con un total de 570 horas de paradas hasta que fueron sustituidos por los laterales nuevos. La pérdida económica para la Empresa en este tiempo de parada fue de 6 208 440 USD. En la actualidad se está presentando una situación similar con los eslabones del transportador lo que ha motivado la presente investigación.

En las Fig. 1 se muestra una vista de la cantera, donde se puede apreciar la presencia de grandes piedras de diferentes dimensiones y vistas de las fracturas de los eslabones



Fig. 1 Vista de las grandes piedras en la cantera y de la fractura de los eslabones del TP1

En la Investigación realizada se aplicó para establecer la influencia de la elasticidad de los apoyos de las tablillas y de los propios eslabones un nuevo Esquema de Análisis creado por el Colectivo de investigación de Mecánica Aplicada y denominado Empotramiento Elástico que unido a un esquema conocido el de Apoyo Articulado Elástico han permitido en esta primera aproximación evaluar estas influencias con vistas a contribuir a solucionar estas averías.

El Objeto de Estudio del presente trabajo son por lo tanto las Tablillas, los Eslabones y los Apoyos de las Tablillas y de los Eslabones del Transportador Alimentador de la Criba TP1 y la **Hipótesis** formulada es la siguiente:

“Es posible contribuir a eliminar el problema de la aparición de las fracturas de los eslabones del Transportador Alimentador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” estudiando la influencia de la elasticidad de las tablillas, los apoyos de las tablillas y la de los propios eslabones con vistas a reducir las cargas dinámicas de las grandes piedras al caer, teniendo en cuenta que en las condiciones actuales de explotación de la cantera a la Planta seguirán llegando piedras de grandes dimensiones y pesos, lo que pudiera aportar soluciones al problema que además de factibles técnicamente lo sean también económicamente”.

Como **Objetivo General** del Trabajo se plantea lo siguiente:

“Aplicar los conceptos de Apoyo Articulado Elástico y Empotramiento Elástico al estudio de la influencia de la ubicación de los apoyos de las tablillas y de los eslabones y la elasticidad de los propios eslabones en la magnitud de las cargas dinámicas de las piedras al caer, proporcionando de esta forma criterio para encontrar la mejor solución para reducir las cargas dinámicas sobre los elementos y las tensiones sobre los eslabones”.

Como **Objetivos Específicos** se plantearon los siguientes: Profundizar en la Teoría General de los Transportadores de Tablillas y en las particularidades del Transportador Alimentador TP1 de sus tablillas, apoyos y eslabones, así como de su Plataforma Alimentadora y de los camiones empleados en la alimentación.

Profundizar en los conceptos de Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos y en los métodos de solución de vigas hiperestáticas.

Desarrollar el Método General de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos como Novedad Científica Fundamental de la Investigación.

Evaluar la influencia de la elasticidad de las tablillas, la elasticidad y posición de los apoyos de las tablillas y la propia elasticidad de los eslabones en la magnitud de las cargas dinámicas de las piedras al caer.

Sustituir las cargas dinámicas correspondientes al régimen inestable real de cargas existentes en la alimentación del TP1, por una Carga Dinámica Estable Equivalente, que permita evaluar la resistencia a la fatiga de los eslabones.

Recomendar las modificaciones que será necesario realizar en la posición de los apoyos de las tablillas del Transportador Alimentador TP 1 para contribuir a reducir las averías de eslabones

Capítulo I: Generalidades sobre los Transportadores de Tablillas y Particularidades del Transportador Alimentador TP1.

1.1 Generalidades sobre los Transportadores de Tablillas.

1.1.1 Condiciones fundamentales de su empleo.

Los transportadores de tablillas son equipos de muy amplio uso en la industria química, metalúrgica, extractiva, cañera etcétera. A diferencia de los transportadores de banda, los transportadores de tablillas manipulan normalmente cargas pesadas, en grandes pedazos, abrasivas y/o calientes. Durante el recorrido por la traza el material puede ser sometido a diferentes procesos tales como: lavado, secado, pintura, recocido, etcétera. Desde el punto de vista físico se asemejan a los conductores de banda ya que aquí también la carga se traslada de una manera continua por la rama superior del equipo mientras que por la rama inferior retrocede el órgano de carga vacío. También este equipo posee un órgano de tracción flexible pero en este caso en lugar de una banda de goma se tiene una cadena.

El material es derramado en la parte trasera del equipo y el mismo lo lleva hasta la parte delantera donde se descarga. La carga de los transportadores de tablillas se efectúa en la parte delantera o en la media, o en varios puntos de carga situados a lo largo del transportador. Para las cargas que caen a granel en los transportadores se emplean dispositivos de carga en forma de canales, canalones y embudos. Estas cargas se descargan, por regla general, en el punto final, en el momento en que la parte móvil del transportador rodea las catalinas cabezales. Las cargas por piezas se cargan en transportadores de tablillas y se descargan de éstos de la forma siguiente: las cargas ligeras, a mano o por los canalones, y las pesadas mediante diferentes dispositivos de izaje (aparejos, elevadores neumáticos, grúas-vigas, etc.) y en el caso de cargas a granel mediante basculadores, camiones de volteo, etc.

Los transportadores de tablillas alcanzan capacidades de hasta 2 000 tm/h y más en trazas que pueden llegar hasta varios cientos de metros, con ángulos de inclinación de hasta 20° y algo más.

Los transportadores de tablillas se emplean en la transportación de materiales a granel y en bultos, por trazas horizontales e inclinadas y como alimentador dosificador

La geometría de los transportadores de tablillas no difiere de la de los transportadores de banda. El ángulo de inclinación de la traza β , está en función del tipo de material y del tipo de tablillas, y su valor máximo se halla por la expresión:

$$\beta_{\max} = \arctan \mu - \theta$$

Donde:

μ = coeficiente de fricción entre el material y la tablilla;

θ = ángulo de reserva para garantizar que la carga no deslice.

Cuando las tablas son lisas $\theta = 6$ a 9° cuando son ondulados $\theta = 3$ a 5° . Los menores valores de θ se usan cuando las tablillas tienen guarderas y los mayores valores para tablillas sin guarderas.

Cuando se usan tablillas profundas, en forma de caja, el ángulo de inclinación β toma valores de 45 a 60° ; sin embargo en estos casos la capacidad disminuye mucho pues el material solo se sostiene en las cavidades que tienen la tablillas.

Cuando se transportan bultos, el ángulo de inclinación máximo se obtiene cuando la dirección del peso del bulto, a partir de su centro de gravedad, no sobrepasa la superficie de apoyo, o sea, no llega a la condición de vuelco. Cuando el bulto es ancho, de poca altura y pesado, el ángulo de inclinación β puede llegar hasta 60° . Lo explicado anteriormente tiene validez solo si las tablillas paseen rebordes que impidan que la carga deslice.

1.1.2 Principales ventajas de los Transportadores de Tablillas.

Las ventajas fundamentales son:

1. Pueden transportar cargas pesadas, en grandes pedazos y a elevada temperatura;
2. Alcanzan capacidades de 20 000 KN/h (2 000 t/h) o más;
3. las trazas son de gran longitud, pueden ser rectas o con curvas positivas o negativas con la posibilidad de usar accionamientos intermedios;

4. Se mueven con gran suavidad y sin ruidos;
5. Pueden cargarse directamente sin usar alimentadores
6. Admiten una amplia gama de trazas diferente, con radios de curvatura menores que los transportadores de banda (generalmente el radio (R) varía de 5 a 8 m).
7. Poseen la posibilidad de sustituir fácilmente las tablillas y los tramos de cadenas averiados

1.1.3 Principales desventajas.

1. Elevado peso propio.
2. Elevado costo por la complejidad de fabricación.
3. Mantenimiento complejo debido al gran número de articulaciones y elementos.

1.1.4 Partes componentes y principio de funcionamiento.

1. Estructura metálica.
2. Ruedas de cadenas (motriz y de retorno)
3. Entablillado.
4. Cadenas.
5. Sistema motriz.
6. Tolva de alimentación.
7. Embudo de descarga.
8. Sistema de atesado

El funcionamiento del equipo está basado en el movimiento que le imprime a la cadena el sistema motriz, a través de los sprockets o ruedas de cadenas motrices. El órgano de tracción está compuesto por una o varias hileras de cadenas que al ser movidas por las ruedas motrices arrastran consigo al entablillado, que está fijado en ellas por medio de remaches o, en forma más general, atornillada. Al moverse el entablillado constituye un suelo móvil que es capaz de transportar los materiales en una forma similar a como lo hacen los transportadores de banda.

El límite del campo del empleo entre los transportadores de banda y de tablillas no es exactamente preciso y puede haber casos en los que ambos puedan ser empleados, pero en forma general el transportador de banda se prefiere por su bajo peso propio y bajo costo de mantenimiento. Existen casos en los cuales no es posible utilizar un transportador de banda, bien sea por las altas temperaturas ambientales y por estar sometido el equipo a grandes impactos y condiciones muy severas de trabajo que, ni aún las más costosas bandas pueden soportar.

1.2 Descripción de sus partes componentes.

1.2.1 Partes componentes.

Estos transportadores se componen de (ver Fig. 1.1): una estructura metálica (1), en cuyos extremos se colocan una catalina motriz (2), y una catalina de cola (3), que forma parte del sistema atesado. La estructura soporta el órgano portador, compuesto por tablillas (4), que se acoplan el órgano de tracción, generalmente compuesto por dos cadenas (5). A la tambora motriz se acopla el resto del sistema motor (6). El transportador de tablilla tiene una o varias tolvas (7), que suministran el material al transportador y que pueden estar situadas en cualquier punto de la rama cargada. La descarga se realiza al final de la traza mediante un embudo de descarga (8).

Las partes componentes del transportador de tablillas que difieren del transportador de banda son el órgano portador y el órgano de tracción, lo que implica modificaciones contractivas: en el extremo del transportador, se sustituyen las tamboras por catalinas para que acoplen con la cadena, y en el dispositivo de apoyo, se sustituyen los rodillos de apoyo por un perfil laminado, que forma parte de la estructura metálica, donde desliza o rueda la cadena utilizada.

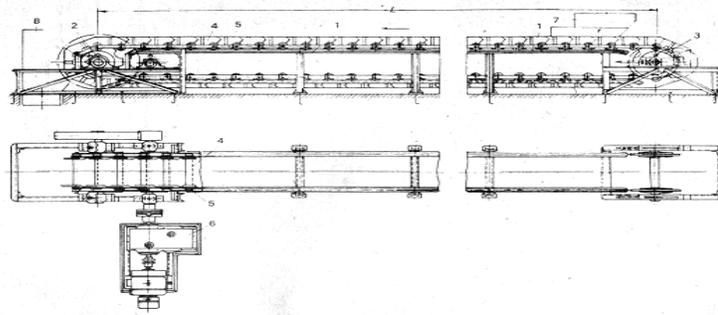


Fig. 1.1 Esquema y Partes Componentes de un Transportador de Tablillas.

1.2.2 Cadenas.

Pueden ser seleccionadas en cualquier catálogo. Por lo general se emplean cadenas de manguitos y utilizan rodillos de bujes o con rodamientos inferiores. A las cadenas normales de rodillos se le añaden aditamentos para la fijación de la tablilla. La inmensa mayoría de los transportadores tienen dos cadenas de tracción. El paso de las cadenas para los transportadores de tablillas, por la norma, se toma de 100, 125, 160, 200, 250, 320, 400, 500 y 630 mm.

1.2.3 Tablillas.

Antiguamente se empleaban de madera pero actualmente se hacen en su casi totalidad de acero. Pueden ser lisas u onduladas y se ofertan en una amplia gama de longitudes para proveer todos los anchos de entablillado necesarios. La solución de colocar bordes en el entablillado se utiliza cuando se desea aumentar la capacidad sin ocupar grandes espacios horizontales. Los bordes del entablillado pueden ser fijos o moverse con el mismo.

Las tablillas son el órgano portador de los transportadores de tablillas y se seleccionan de acuerdo con el material transportado. Los diseños más característicos se muestran en la Fig. 1.2: tablillas sin guarderas, espaciadas y lisas con cadena de ruedas (Fig. 1.2 a, c, y e); tablillas sin guarderas, espaciadas y lisas, con cadena sin ruedas (Fig. 1.2 d); tablillas sin guarderas, corrugadas (Fig. 1.2 f); tablillas con guarderas, lisas (Fig. 1.2 i) tablillas con guarderas, corrugadas (Fig. 1.2 h y g) tablillas con guarderas de tipo profundo onduladas (Fig. 1.2 j) y de cajuela (Fig. 1.2 c).

Las tablillas lisas se hacen de madera (Fig. 1.2 a) o de chapas de acero (Fig. 1.2 c). Las tablillas corrugadas, con y sin bordes, las tablillas planas con bordes y las tablillas con borde de tipo profundo se hacen estampadas con chapas de acero de 4 a 10 mm. Las tablillas sin guarderas se usan generalmente para bultos. Para prevenir la caída de la carga se colocan guarderas fijas de madera o acero, principalmente en la zona de carga (Fig. 1.2 b).

Cuando se transportan gráneles las tablillas que se usan son las que tienen guarderas, ya sean lisas o corrugadas. Las tablillas con guarderas del tipo profundo se usan solamente cuando se manipulan grandes cantidades o cuando el ángulo de inclinación de la traza es de 45 a 60° .

La unión de las tablillas a las cadenas puede ser por tornillos, remaches o soldadura. Las tablillas sirven además, como elemento rígido para unir las dos cadenas y deben colocarse teniendo en cuenta el sentido del movimiento como se muestra en la figura 6.3k, pues en la transportación de materiales a granel este puede perderse a través de las holguras que existen entre una tablilla y la otra.

El ancho y la altura de las tablillas esta normalizado según el GOST 2035-54.

El ancho B de la tablilla es el parámetro fundamental del transportador de tablillas. Cuando las tablillas tienen guarderas este ancho esta dado por la distancia entre las caras interiores de las guarderas. En el caso de las tablillas del tipo profundo, onduladas y de cajuela, la altura de las guarderas se considera como una altura promedio, h_{pr} , y se halla dividiendo el área de la guardera en el tramo de un paso t de la cadena (fig. 6.3j).

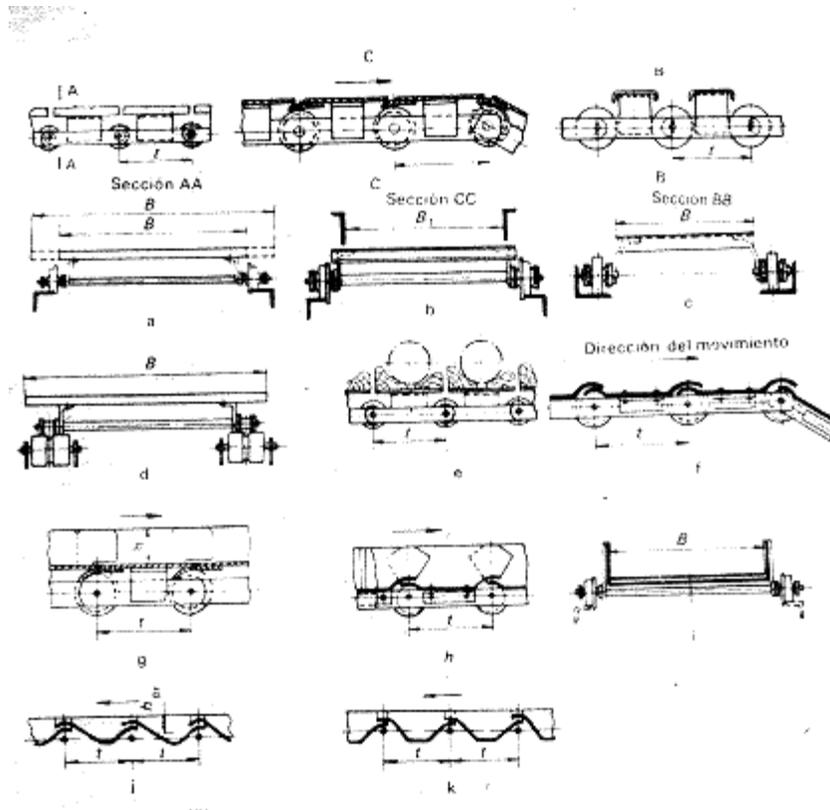


Fig. 1.2 Distintos Tipos de Tablillas.

1.2.4 Elemento motriz.

El elemento motriz de un transportador de tablillas no se diferencia mucho del que se emplea para uno de banda. La única particularidad es que la transmisión del movimiento al órgano de tracción flexible no se hace por tambora ya que al utilizarse una cadena, se emplean ruedas de estrellas para transmitirle el movimiento. La transmisión del movimiento no se hace entonces por fricción sino a través del engranamiento de las ruedas de estrella con la cadena. Esta unidad motriz puede ser de velocidad variable, la cual puede controlar su capacidad de descarga.

1.2.5 Estructura metálica.

La estructura metálica de estos transportadores es similar a la empleada para los transportadores de banda, pero mucho más rígida pues esta debe soportar un peso considerable. Por lo general debajo de cada hilera existe una guía de acero sobre la que desliza o rueda dicha cadena.

1.2.6 Sistema de atesado.

En estos transportadores el atensador siempre está constituido por dos tornillos colocados, uno a cada lado del eje de cola o eje de retorno. El atensador debe garantizar un estirado cuya longitud sea de 1.2 a 2 veces el paso de la cadena del transportador

1.2.7 Órgano de tracción:

Los transportadores de tablillas suelen equiparse con dos cadenas del tipo de planchetas de buje y ruedas, ya sean con rebordes (Tipo BK 1) o sin rebordes (tipo BK). Pueden tener cojinetes de deslizamiento o de rodamiento; los últimos se emplean en los transportadores pesados.

En las cadenas con ruedas, estas se apoyan sobre un perfil laminado (Fig. 1.3 a) y soportan el peso de la carga, el de las tablillas el de la propia cadena.

En los transportadores de tablillas pequeñas, que transportan cargas ligeras, y cuyo ancho no es mayor que 400 mm, se permite el uso de una sola cadena colocada en el centro. En estos casos en ocasiones, se emplean cadenas más baratas, como por ejemplo las cadenas de planchetas sin bujes, cuando la velocidad es pequeña, o cadenas soldadas, cuando la velocidad es alta.

La cadena se apoya sobre rodillos estacionarios fijos a la estructura (Fig.1.3 d). En la rama de retorno, la que se apoya en los rodillos estacionarios son las tablillas. Los pasos de la cadena más usados en los transportadores de tablillas son de 100 a 630 mm.

1.2.7 Sistema de Transmisión.

Los componentes del sistema de transmisión son los mismos que los del sistema de transportadores de banda. La diferencia con respecto al de banda, radica en la utilización de catalinas o ruedas de estrellas en vez de tamboras.

Las catalinas motrices tienen de 5 a 8 dientes y se constituyen de acero o hierro fundido. El montaje de las catalinas debe ser exacto, para lograr que estén bien alineadas, que exista una coincidencia en la posición de los dientes de las dos ruedas y el tiraje de ambas cadenas sea uniforme.

Las condiciones sobre la colocación de varias catalinas motrices, la utilización de transmisiones abiertas y variadores de velocidad y el empleo de frenos, así como el tipo adecuado de motor eléctrico que se debe usar, son las mismas de las de transportadores de banda, solo se debe hacer la observación que, dadas las bajas velocidades de los transportadores de tablillas, se deben emplear reductores de alta razón de reducción, del orden de 60 a 200 veces.

1.3 Metodología de cálculo de los transportadores de tablilla.

1.3.1 Datos de entrada.

Como datos de entrada para el cálculo de un transportador de tablillas se requieren prácticamente los mismos que para uno de banda. Estos son los siguientes:

- Capacidad (Q), en tm/h
- Material.
- Traza del transportador.
- Condiciones ambientales.

Normalmente con los datos de entrada puede preseleccionarse la cadena y los sprockets o ruedas de estrella.

1.3.2 Secuencia del cálculo.

1.3.2.1 Determinación de las propiedades del material a transportar.

Como se ha dicho anteriormente, lo ideal es poseer las propiedades reales del material obtenidas a pie de obra, a veces esto no es posible por causas diversas. Como referencia pueden emplearse los datos de las tablas 2.2. y 2.3. En todo caso el objetivo de este paso es determinar los valores del peso específico o la densidad del material, su coeficiente de fricción con el acero, el ángulo de talud o de reposo estático del mismo y la abrasividad.

1.3.2.2 Selección del tipo de entablillado.

El transportador puede ser sin guarderas o poseer guarderas fijas o móviles. Por lo general se recomienda emplear guarderas cuando se van a manipular graneles y, sobre todo cuando la capacidad volumétrica sobrepasa los 25 metros cúbicos por hora.

También es importante definir en este paso si se van a emplear guarderas lisas u onduladas y este depende, sobre todo, de la tendencia que tenga el material a resbalar sobre la superficie del entablillado y que se acentúa cuando se utilizan pendientes pronunciadas en la transportación.

1.3.2.3 Comprobación de la posibilidad de transportación inclinada.

En este paso se compara el mayor ángulo de inclinación con el máximo que es capaz de transportar el equipo sin que haya resbalamiento.

$$\beta_{\max} = (\arctg * \mu_a) - \omega$$

Donde

μ_a – coeficiente de fricción entre el material a transportar y el acero.

ω – Valor angular que depende del tipo de tablillas que se emplee.

$\omega = 6$ a 9° para tablillas Lisas.

$\omega = 3$ a 5° para tablillas onduladas.

1.3.2.4 Determinación del ancho de entablillado.

a). para tablillas sin guarderas.

$$B \geq \sqrt{\frac{Q}{[648 * V * C2 * \text{tg}(0,4 * \phi)]}}$$

b) para tablillas con guarderas.

$$B \geq \sqrt{\left\{ \frac{Q}{[900 * V * C2 * \text{tg}(0,4 * \phi)]} \right\} + \left\{ \frac{(2 * h * \theta)}{[C2 * \text{tg} * (0,4 * \phi)]} \right\}^2 + \frac{(2 * h * \theta)}{[C2 * \text{tg}(0,4 * \phi)]}}$$

Donde:

B – ancho del entablillado en metro (m).

Q – capacidad de transportación en $\frac{tm}{h}$

V – velocidad de transportación en metros por segundos. La velocidad en este tipo de transportadores se recomienda que no sobrepase $0.4 \frac{m}{s}$. Aunque en algunos transportadores pequeños pueden llegar a algo más de $1 \frac{m}{s}$.

C2 – coeficiente de disminución de la capacidad por inclinación del transportador. Que aparece en la tabla 6.2

ϕ - ángulo de talud del material en grados.

θ - factor de llenado, que es igual a la relación entre la altura del material en el transportador y la altura de la guardera lateral. El factor de llenado en estos transportadores se recomienda emplearlo entre 0,65 y 0,75

h - altura de las guarderas laterales en metro (m)

En la expresión anterior aparecen como incógnitas la velocidad, la altura y el ancho del entablillado. Debido a esto es necesario asumir la velocidad y la altura de la guardera, determinar el ancho del entablillado y normalizarlo. En la literatura aparecen los anchos de entablillado normales que se emplean y las alturas de guarderas más recomendadas para cada caso. Si al ancho de entablillado normalizado no le correspondiera entre los valores recomendados la altura de la guardera que se había asumido, sería necesario asumir un nuevo valor y volver a hacer el cálculo y la normalización.

En este caso de los transportadores con guarderas laterales fijas, en el momento de construir la tablilla, hay que hacerla de un 10 a un 20% más larga que el ancho del entablilla calculado para evitar que se produzcan trabazones que pueden tender a romper el equipo. En este caso también es necesario comparar los valores del ancho del entablilla contra el tamaño de la partícula representativa. Esto se logra a través de las expresiones:

$$B \geq 1,7 * a^1 + 200\text{mm} \quad \text{Para materiales no clasificados}$$

$$B \geq 2,7 * a^1 + 200\text{mm} \quad \text{Para materiales clasificados}$$

En este caso B debe expresarse en (mm) y a^1 es el tamaño representativo de la partícula de material en (mm). Esto sólo se hace para materiales es pedazos medianos y grandes.

1.3.2.5 Cálculo de la velocidad requerida.

Después que se normaliza el ancho del entablilla debe calcularse cuál es la velocidad real necesaria.

$$v = \frac{Q}{[648 * B^2 * C2 * \text{tg}(0,4 * \varphi)]}$$

Que se emplea para transportadores sin guarderas laterales.

$$v = \frac{Q}{\{900 * \delta * B[B * C2 * \text{tg}(0,4 * \varphi) + 4 * h * \theta]\}}$$

Que se emplean para transportadores con guarderas laterales.

1.3.2.6 Determinación de los pesos lineales.

a) De la carga.

Se emplea la expresión:

$$q = \frac{(Q * g)}{(3,6 * v)} \quad q - \text{peso lineal de la carga en } \left(\frac{N}{m}\right)$$

Los demás parámetros ya han sido definidos y g es la aceleración de la gravedad en $\left(\frac{m}{s}\right)$.

b) De las tablillas más las cadenas.

Lo ideal es pesar un metro de de entablillado acoplado con sus respectivas cadenas pero cuando se está proyectando no es posible hacer esta operación y entonces puede tomarse como referencia la expresión siguiente.

$$qo = 600(B + A)$$

Donde:

q_0 - peso lineal de las tablillas más las cadenas en $\left(\frac{N}{m}\right)$

B - ancho del entablillado en (m).

A - factor que aparece en la tabla 6.3.

c. Para el caso de tablillas con guarderas laterales fijas existe una resistencia al movimiento debida a la fricción entre el material y la guardera y que puede ser calculada por la expresión:

$$Wl = 1000 \cdot \delta \cdot g \cdot h^2 \cdot \theta^2 \cdot \mu_a$$

Donde:

Wl - resistencia por unidad de longitud debida a la fricción del material con las guarderas laterales en N/m.

δ - densidad del material a transportar en tm/m.

g - aceleración de la gravedad que es igual a $9,81\text{m/s}^2$

h - altura de las guarderas laterales en m.

θ - factor de llenado

μ_a - coeficiente de fricción entre el material a transportar y el acero de las guarderas laterales.

1.3.2.7 Resistencias Distribuidas.

La resistencia distribuida en un tramo recto puede ser calculada por la expresión:

$$S = \sum q \cdot Li \cdot \cos\beta_i \cdot W' \pm \sum q \cdot Li \cdot \sin\beta_i + Wl \cdot Li$$

Donde:

S - es la diferencia de tensiones en el tramo de que se trata en (N).

$\sum q$ - sumatoria de los pesos lineales en el tramo. Para la rama superior será el peso lineal de la carga más el del entablillado, para la rama inferior será el peso del entablillado solamente.

L_i – longitud del tramo en (m).

β_i – inclinación del tramo en grados.

W' - factor de resistencia al movimiento. Este factor aparece en la tabla 6.5

W_I – resistencia entre el material y la guardera que fue determinada anteriormente.

1.3.2.8 Resistencias Concentradas.

a) En el paso por los sprockets

Se tomará:

$$S(i+1) = K * S_i$$

Donde:

$S(i+1)$ – tensión a la salida de la rueda de cadena en (N).

S_i – tensión a la entrada de la rueda de cadena en (N).

K – factor de oscila entre 1,05 y 1,1.

b) En el paso por una guía curva.

Se tomará:

$$S(i+1) = S_i * e^{W' * \beta} \approx (1,01)S_i$$

Donde:

$S(i+1)$ – tensión a la salida de la curvatura en (N).

S_i – tensión a la entrada de la curvatura en (N).

W' - factor de resistencia al movimiento.

β - valor modular de la diferencia de inclinación entre ambos tramos.

1.3.2.9 Distribución de tensiones:

Para lograr la distribución de tensiones debe decidirse primero el valor de la tensión mínima a lo largo de la traza y la ubicación de la misma. En este tipo de transportadores se recomienda emplear una tensión mínima entre 1000 y 3000 (N) y que puede llegar a ser mayor para transportadores muy grandes o muy pesados.

La ubicación del punto de tensión mínima depende de las características del montaje del equipo. Si el transportador es horizontal, la tensión mínima se encuentra siempre a la salida del sprocket motriz. Si existe una parte del transportador que posee inclinación entonces será necesario determinar si la tensión en la rama de retorno de este tramo inclinado es negativa en cuanto a su diferencia ya que en este caso la tensión mínima pudiera estar al final de este tramo inclinado, en la rama de retorno. A partir de la tensión mínima se determinarán las demás tensiones teniendo en cuenta que se multiplicará cada tensión por su coeficiente de aumento en el caso de resistencias concentradas o se sumará a la anterior en el caso que sea una resistencia distribuida. Esta es la situación cuando se avance en el sentido del movimiento, cuando se avance en el sentido contrario se efectuará operaciones inversas a las expresadas anteriormente.

1.3.2.10 Tiraje Efectivo y Potencia:

El tiraje se determina por la expresión:

$$W_o = S_n - S_1$$

Donde:

W_o – tiraje efectivo en (N).

S_n – tensión a la entrada del sprocket motriz en (N).

S_1 – tensión a la salida del sprocket motriz en (N).

La Potencia como sigue:

Se determina por la expresión

$$N = \frac{(W_o * V * K_s)}{(1000 * \eta_t)}$$

Donde:

N – Potencia a colocar en el motor en (kW)

W_o – tiraje efectivo en (N)

V – velocidad de transportación en (N).

K_s – factor de sobrecarga que puede tomarse entre 1,2 y 2.

η_t – eficiencia general de la transmisión.

El proceso de la selección del motor y la transmisión para este tipo de transportadores no difiere de los transportadores de banda. Para calcular la velocidad angular del

sprocket motriz se tomará $n_s = \frac{6000 \cdot v}{z * t_c}$

Donde:

z - # de dientes en la rueda motriz

t_c – paso de la cadena

1.4 Cálculos de Comprobación de la cadena en funcionamiento.

Este cálculo se subdivide a su vez en los siguientes pasos:

1.4.1. Cálculo de la fuerza dinámica en funcionamiento.

Se aplica la expresión:

$$S_{din} = \frac{[3a_{max} \cdot (q + k \cdot q_0)]}{g}$$

Donde:

S_{din} -Tensión dinámica en la cadena debido al efecto de cuerda en el sprocket en (N)

a_{max} - aceleración máxima de la cadena debida al efecto de cuerda en $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

q - peso de la carga por unidad de longitud en $\frac{N}{m}$.

q_0 - peso de las tablillas mas las cadenas por unidad de longitud en $\frac{N}{m}$.

K - factor que depende de la longitud del transportador.

Tabla 1.1 Valores de K en función de la longitud del Transportador

Valores de K	Longitud del transportador
2	Hasta 25m
1,5	$25m \leq L \leq 60m$
1	$L > 60m$

g - aceleración de la gravedad = $9,81\frac{m}{s^2}$

L - longitud del transportador en (m).

La aceleración máxima puede ser calculada por la expresión:

$$a_{max} = \frac{(2 \cdot \pi^2 \cdot V^2)}{(z^2 \cdot t_c)}$$

Donde:

a_{max} Ya ha sido definida

V - velocidad de transportación en $\left(\frac{m}{s}\right)$

z - número de dientes de la rueda de cadena (sprocket)

t_c - de la cadena en (m).

1.4.2. Cálculo de la fuerza teórica.

$$S_{teor} = S_{max} + S_{din}$$

Donde:

S_{teor} - tensión teórica sobre la cadena en (N).

S_{max} - tensión máxima sobre la cadena, determinada en el cálculo de distribución de tensiones en (N).

S_{din} - tensión dinámica sobre la cadena, determinada en el epígrafe anterior en (N).

1.4.3. Determinación de la fuerza de cálculo.

$$S_{calc} = K_i * S_{teor}$$

Donde:

S_{calc} - tensión de cálculo sobre la cadena en (N).

K_i - Factor que depende de la cantidad de cadenas.

Tabla 1.2 Factor K_i en función de la cantidad de cadenas

Para una cadena	$K_i = 1$
Para dos cadenas	$K_i = 0,6$ a $0,7$
Para tres cadenas	$K_i = 0,4$ a $0,5$

S_{teor} Tensión teórica actuando sobre la cadena, calculada en el paso anterior en (N).

1.4.4. Comprobación.

Debe cumplir que:

$$S_{rot} \geq K * S_{calc}$$

Donde:

S_{rot} - tensión de rotura de la cadena en (N). Esta tensión aparece en los catálogos

K - factor que depende del tipo de cadena y la inclinación del transportador.

K = 6 a 7 para cadena de manguito y transportador horizontal.

K = 8 a 10 para cadenas de manguito y transportador inclinado.

K = 10 a 13 para cadenas desmontables.

S_{calc} - tensión de cálculo, determinado en el paso anterior en (N).

1.5 Cálculo de comprobación de la cadena en el arranque.

1.5.1 Cálculo de la tensión dinámica en el arranque.

$$S_{din} = S_{imp} - W_o$$

Donde:

S_{din} - tensión dinámica sobre la cadena en el arranque en (N).

S_{imp} - tensión de impulso, que puede ser determinada por la expresión:

$$S_{imp} = \frac{(1000 * K_a * N_s * K_m * \eta_t)}{V}$$

Donde:

S_{imp} y V se conocen. Debe recordarse que K_a es el factor de arranque del motor eléctrico.

N_s - potencia de selección del motor en (kW).

K_m - factor que depende del tipo de acoplamiento a emplear:

Tabla 1.3 Factor K_m en función del tipo de acoplamiento

Valor de K_m	Tipo de acoplamiento
1,3	Flexible
1,8 a 2	Rígido

η_t - eficiencia total de la transmisión.

W_o - tiraje efectivo en (N).

1.5.2 Cálculo de la tensión dinámica máxima.

$$S_{\max \text{ din}} = Ki(S_{\text{teor}} + S_{\text{din}})$$

Donde:

$S_{\max \text{ din}}$ - tensión dinámica máxima sobre la cadena en (N).

Ki- factor que tiene en cuenta el número de cadenas y que ha sido explicado anteriormente.

Las otras dos tensiones también han sido explicadas ya.

1.5.3 Cálculo de comprobación.

$$\frac{S_{\text{rot}}}{S_{\max \text{ din}}} \geq 1,5$$

Todos los parámetros de esta expresión ya han sido explicados.

1.6 Cálculo de comprobación al desgaste.

Este cálculo involucra los siguientes pasos:

1.6.1. Determinación de la Tensión Teórica de la cadena a los efectos de desgaste.

$$S_{\text{teor}} = S_{\max} + Ki * S_{\text{din}}$$

Donde:

S_{teor} – tensión teórica sobre la cadena a los efectos del desgaste en (N).

S_{\max} – tensión máxima determinada en la distribución de tensiones en (N).

S_{cin} – tensión debida al efecto de cuerda en (N).

Ki – factor que tiene en cuenta la no uniformidad del efecto de cuerda en cuanto a su repercusión sobre el desgaste. (Ki = 0,6 a 0,7)

1.6.2 Calcular tensión de cálculo sobre la cadena a los efectos del desgaste

$$S_{\text{calc}} = Ki * S_{\text{teor}}$$

Donde:

S_{calc} – tensión de cálculo sobre la cadena a los efectos del desgaste en (N).

Los demás parámetros ya han sido explicados anteriormente.

1.6.3 Calcular el área sometida al desgaste.

$$A = (Bh + 2 * S1)d$$

Donde:

A -área de desgaste del pasador en (mm²)

Bh - longitud del rodillo en (mm)

S1- espesor de las planchuelas laterales de la cadena en (mm).

d - diámetro del pasador de la cadena en (mm).

1.6.4 Comprobación.

Debe cumplirse que:

$$P_{max} \geq \frac{S_{calc}}{A}$$

Donde:

P_{max} - presión máxima que soporta el pasador. Pueden tomarse como referencia los siguientes valores:

Tabla 1.4 Presión máxima P_{max} en función del tipo de acero

Tipo de acero	Valor de P_{max}
Para aceros sin tratamiento térmico.	18,0 MPa
Para aceros cementados	25,0 MPa
Para aceros templados	45,0 MPa

1.7 Particularidades del Transportador Alimentador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S. A.”

1.7.1 Denominación del tipo de transportador y datos generales

Tabla 1.5 Datos generales del Transportador TP1

Denominación	Cinta de placas abovedadas
Uso previsto	Transportar marga y piedra caliza
Colocación	Debajo de una tolva
Tipo	BPB-S 2000/150/20-20
Distancia entre ejes	23.50 m
Altura de elevación	9.558 m

1.7.2 Datos Técnicos del Transportador

Tabla 1.6 Datos técnicos del transportador TP1

COM. N : 38235	Pos. No. : 221TP1
Cadena : Tipo D6D	Paso : 203,2
Carga de rotura de la cadena : 1300kN	Factor seguridad : 6,0
Rodillo : 108/160	Paso rodillo : 406,2
Capacidad de transporte : 77-770 t/h	Velocidad transporte : 0,011-0,11m/s
Material : Mary/Limestone	Densidad : 1360-1540 kg/m ³
Granulometría : Max 1000mm	Humedad : 9-20%
Altura nominal de la descarga : 800 mm	Temperatura Ambiente : 20- 40 °C

1.7.3 Componentes del Transportador TP1.

1.7.3.1 Partes Componentes.

- Armazón portador
- Conjunto de accionamiento
- Árbol de accionamiento con ruedas de cadena
- Eje tensor con ruedas de cadena
- Dispositivo tensor
- Estera transportadora
- Revestimiento protector de la cinta

1.7.3.2 Armazón portador.

El armazón portador es una construcción de chapa de acero perfilado de armadura que integra al resto de los elementos de la cinta citados anteriormente. En el armazón portador se encuentran montados:

- Portador de impacto en el ramal superior
- Vías para el camino de rodadura

1.7.3.3 Conjunto de accionamiento.

El conjunto de accionamiento se compone de:

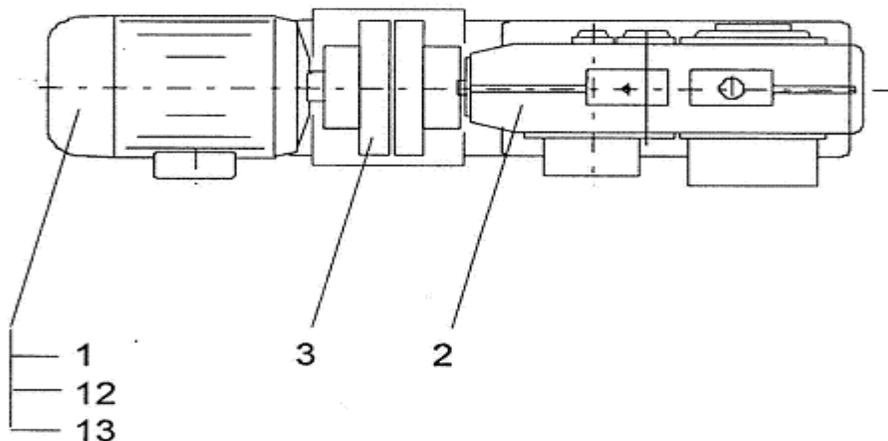


Fig. 1.3 Conjunto de accionamiento del TP1

1. Motor
- 12 Transformador
- 13 Convertidor de frecuencia
2. Engranaje planetario con árbol hueco
3. Acoplamiento elástico: motor - reductor
4. Anillo de contracción

El reductor se encuentra adaptado junto con su árbol hueco al árbol de transmisión y fijado mediante un anillo de contracción. El par de giro se llevará a cabo por un soporte anti-par.

1.7.3.4 Motor

Tabla 1.7 Datos técnicos de motor

Motor trifásico: ABB at VFD Con regulación 1:10 / Ventilación forz.	
Tipo y Tamaño : M3BP 280 SMA 4	Tipo construcción: B5
Potencia del eje : 88 kW	
Potencia efectiva : 56 kW	velocidad : 1750 min-1
Clase de aislamiento : F	Clase protección : 55
Diam. Eje Ø : 75 mm	Peso : 625kg
Suministrado por : AUMUND	

1.7.3.5 Acoplamiento: Motor-Reductor

Tabla 1.8 Datos técnicos del Acoplamiento

Acoplamiento elástico : FLENDER	
Tipo y Tamaño : Bipex BWN 142	
Lado del eje del reductor : 45 mm	Lado del eje del motor : 75 mm
Suministrado por : AUMUND	

1.7.3.6 Engranaje planetario con árbol hueco

Tabla 1.9 Datos técnicos del Engranaje Planetario

Reductor de engranaje planetario : FLENDER	
Tipo y Tamaño : P3KA20	Par de giro nomina : 354000 Nm
Transmisión : 630(656):1	Bloqueo anti retorno : si
Montaje : 524	sentido de rotación : CCW
Entrada de eje accionado : 45 mm	Salida de eje de salida : 300 mm
Cantidad de aceite : 75 L	Peso : 2600kg
Suministrado por : AUMUND	

1.7.3.7 Árbol de accionamiento

El árbol de accionamiento está alojado en dos cajas de rodamientos con soporte abridado a prueba de polvo en rodamientos de rodillos a rótulas. Las cajas de los cojinetes se encuentran atornilladas al armazón portador

El árbol de transmisión está equipado con dos ruedas de cadena.

Las ruedas de cadena tienen coronas dentadas divididas (sectores de cadena), de forma que puedan ser reemplazadas más fácilmente.

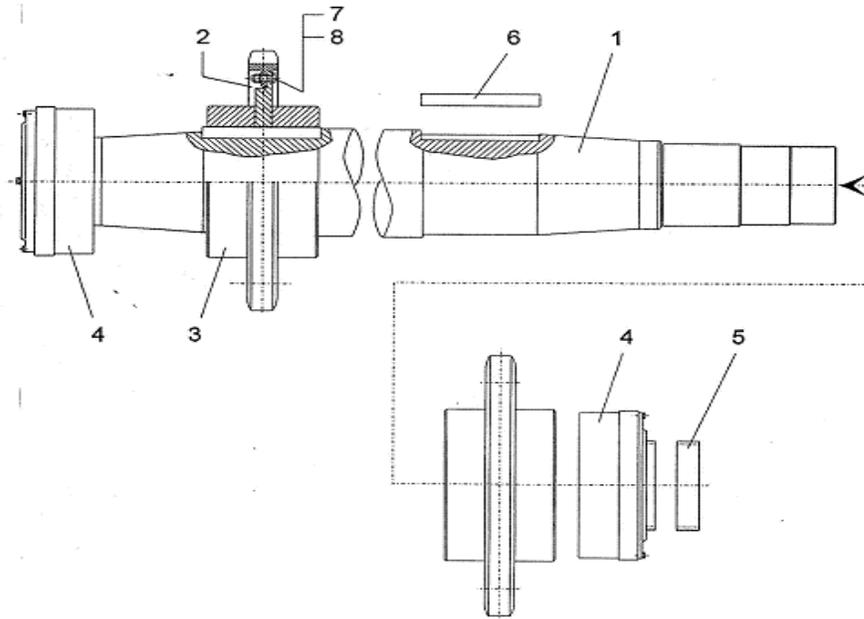


Fig. 1.4 Árbol de accionamiento.

El árbol de accionamiento está compuesto por:

1. Árbol
2. Corona dentada
3. Buje
4. Cojinete fijo y suelto
5. Casquillos
6. Chaveta de ajuste
7. Tornillo y disco
8. Tuerca

1.7.3.8 Eje tensor

El eje tensor está alojado en dos cajas de rodamientos especiales a prueba de polvo en rodamientos de rodillos a rótula. Las cajas de los cojinetes están montadas sobre las correspondientes guías del armazón portador, de forma que todo el eje tensor puede ser desplazado.

El eje tensor está equipado con dos ruedas de cadena. Las ruedas de cadena tienen coronas dentadas divididas (sectores de cadena), de forma que puedan ser reemplazadas más fácilmente.

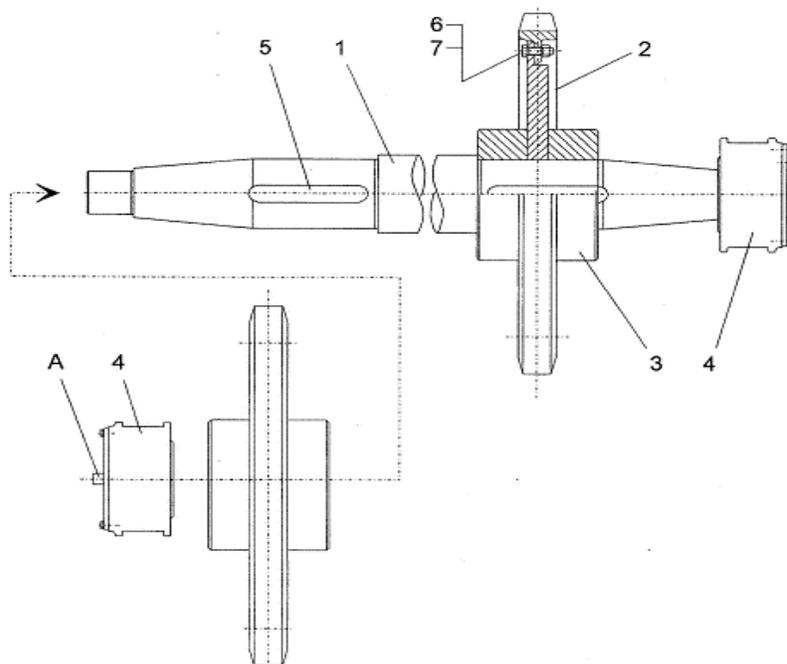


Fig. 1.4 Eje Tensor.

Eje tensor está compuesto por:

1. Eje
2. Corona dentada
3. Rueda fija
4. Cojinete fijo y Cojinete móvil
5. Chaveta de ajuste
6. Tornillo y disco
7. Tuerca

1.7.3.9 Dispositivo tensor

El dispositivo tensor se compone de dos husillos roscados con tuercas hexagonales y de dos resortes cónicos. Cada husillo roscado con resorte cónico se encuentra asegurado al cojinete del eje tensor. Con el husillo roscado es necesario tensar previamente los resortes. Las variaciones de longitud del revestimiento de la cinta se equilibrarán de forma automática mediante los resortes hasta un determinado tamaño.

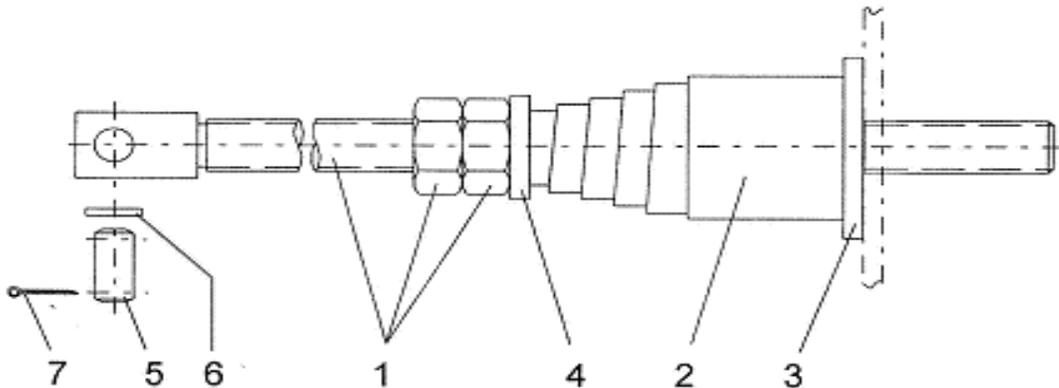


Fig. 1.5 Dispositivo Tensor

El dispositivo tensor está compuesto por:

1. Husillo tensor
2. Muelle
3. Disco
4. Grupilla
5. Bulón
6. Disco
7. Pasapunta

1.7.3.10 Estera Transportadora.

En la Fig. 1.6 se muestra un esquema de la estera transportadora donde se puede apreciar la forma de las tablillas, la posición de los eslabones y de los rodillos de apoyo.

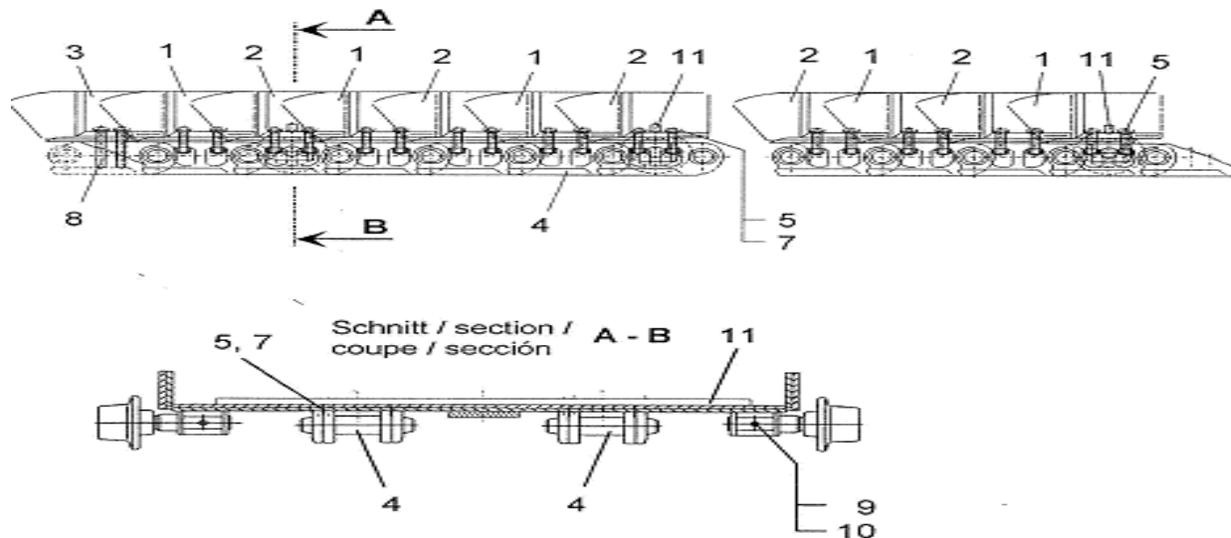


Fig. 1.6 Esquema de la Estera Transportadora

La estera transportadora está compuesta por:

- Chapas de cinta transportadora
1. Cangilón corto
 2. Cangilón corto con roldadas
 3. Cangilón corto
 4. Ramal de cadena
 5. Tornillo de placas de fondo
 6. Tuerca de placas de fondo
 7. Tornillo de placa de fondo
 9. Tornillo
 10. Tuerca
 11. Chapa

Las chapas de la cinta transportadora son chapas prensadas hasta alcanzar un determinado perfil a prueba de torsión con los bordes laterales soldados. Las chapas de la cinta transportadora están atornilladas de forma individual a las cadenas y se solapan sin rozarse, de forma que dan lugar a un revestimiento de cinta compacto y de escaso desgaste.

En la cinta transportadora se encuentran intercaladas a determinada distancia de separación las chapas en las que se han soldado los soportes para los rodillos de rodadura y en los que estos rodillos de rodadura pueden ser reemplazados fácilmente. El revestimiento de la cinta tiene dos tramos de cadena. Las cadenas articuladas tienen pernos y casquillos endurecidos en la superficie para reducir el desgaste y aumentar su duración

1.8 Transportador de limpieza.

1.8.1 Denominación y datos generales.

Tabla 1.10 Datos Generales del Transportador de limpieza

Denominación	Transportador de limpieza
Disposición	Debajo del BPB, N°- ítem nl-TP1 (N0- com.: 38235)
Tipo	RFF-G 2200x23550
Distancia entre ejes	23,550 m

1.8.2 Composición del transportador.

El transportador de limpieza se compone básicamente de:

- Estación de accionamiento con:
 - ✓ Conjunto de accionamiento.
 - ✓ Árbol de accionamiento con ruedas de cadena
- Estación tensora con:
 - ✓ Eje tensor con ruedas de cadena
 - ✓ Dispositivo tensor

1.8.3 Estación de accionamiento.

La estación de accionamiento es una construcción de perfiles de acero y chapa, atornillada con la superficie de base o, en casos aislados, también soldada

1.8.4 Conjunto de accionamiento.

El conjunto de accionamiento es un motor reductor alojado con su árbol hueco en el árbol de accionamiento. La transmisión de fuerza se efectúa a través de muelles de ajuste. El momento de giro está alojado por un soporte.

1.8.5 Árbol de accionamiento.

El árbol de accionamiento está alojado en dos cojinetes embridados. Dos ruedas de cadena se encuentran sobre el árbol de accionamiento.

1.8.6 Estación Tensora

La estación tensora es una construcción de perfiles de acero con guías para el alojamiento de los rodamientos del eje tensor. La estación está atornillada con la superficie de base o, en casos aislados, también soldada

1.8.7 Eje Tensor.

El eje tensor está alojado de manera regulable para que la tensión de la cadena pueda ser ajustada por medio de husillos roscados. Dos ruedas de cadena se encuentran sobre el eje de tensión.

1.9 Interruptores de Emergencia.

En la zona transitable de los transportadores están montados a distancia interruptores de emergencia con mando con cables. Se trata de interruptores de emergencia conectados entre ellos o con puntos fijos en el transportador mediante unos cables (cordones). Para accionar el interruptor de emergencia con mando por cable: Tirar del cable de esta forma, el transportador puede ser parado en caso de emergencia desde todos los puntos de la zona transitable

En general los interruptores de emergencia quedan bloqueados después de ser accionados y necesitan ser desbloqueado antes de una nueva puesta en servicio del transportador

Los datos técnicos son:

Tabla 1.11 Datos técnicos del Interruptor de emergencia

Interruptor de emergencia tipo cable : Keipe
Tipo : HEN 002
110-230 V AC ; 60HZ, IP 65

1.10 Control de velocidad de giro.

Un interruptor sin contacto (iniciador de continuidad) en el eje tensor recibe durante el servicio impulsos que son registrados por un equipo de evaluación y comparación con el número de impulso mínimo y máximo. Si el número de impulso real (numero de revoluciones) difiere de los valores prescritos, el transportador, incluyendo el equipo de alimentación, debe ser desconectado inmediatamente

Los datos técnicos son:

Tabla 1.12 Datos Técnicos del Control de revoluciones

Controlador de numero de revoluciones : Pepperl + Fuchs
Tipo : KHU8-DW-1D
115-230 V AC; 43...67 Hz; IP 65

1.11 Ruedas de estrella

Una vez desgastada la zona templada de los entre dientes, las coronas dentadas deben ser cambiadas. No obstante, debido a la forma de los dientes y entre dientes, no se puede indicar aquí una medida determinada como límite de desgaste. El desgaste debe ser evaluado por comparación con una corona dentada nueva, mediante una plantilla o en base a las características de rodadura del transportador.

Se considera que existe un desgaste considerable de los segmentos:

Si en comparación con una nueva corona dentada o con la plantilla, la forma del diente difiere en algún punto en más de 6 mm de la forma de la corona dentada nueva.

1. Al salir de la rueda de cadena, la cadena ya no sale perfectamente del entrediente, sino que se engancha.
2. Los bordes de los entredientes están aplastados.

Los segmentos dentados tienen que ser cambiados cuando:

1. Existe un desgaste según los síntomas mencionados arriba.
2. Se cambia la cadena.

Los segmentos dentados sólo pueden cambiarse sin cambio de la cadena si el alargamiento de la cadena no ha superado aún la medida $X_{so'}$ (Ver Tabla)

Normalmente, los segmentos dentados pueden cambiarse aunque la cadena esté colocada. Sólo en condiciones de espacio desfavorables puede ser necesario desmontar células transportadoras y usar este espacio para recambiar los segmentos dentados.

Un funcionamiento perfecto de la cinta transportadora sólo es posible con la cadena pretensada conforme a las instrucciones. La-tensión previa de la cadena es correcta si ambos muelles están ajustadas a la medida: L_v indicado.

Durante el servicio, es, posible que debido a, por ejemplo un alargamiento de la cadena, resulten longitudes diferentes de los muelles; esto será un efecto insignificante, si los valores no exceden del límite L_F indicado

Para tensar la cadena (el muelle):

1. Soltar la contratuerca sobre el husillo roscado.
2. Ajustar el muelle a la medida L_v' usando la contratuerca.
3. Ajustar ambos muelles a la misma medida.
4. Apretar la contratuerca.

Tensar la cadena sólo con la cinta transportadora vacía y con la cadena fría ($t = 30^\circ\text{C}$). Si la temperatura de la cadena excede de 100°C , el tensado sólo deberá ser realizado después de previa consultación con AUMUND.

1.12 Comprobación del desgaste de los rodillos de rodadura

Cuando la zona templada del cuerpo del rodillo de rodadura está desgastada, éste último tiene que cambiarse. Para determinar el tamaño de rodillos de rodadura montados en su transportador, consulte los datos técnicos en el plano de montaje.

Tabla 1.13 Comprobación del desgaste de los rodillos

Dimensiones de la polea de rodadura	Diámetro (mm)		Espesor de las pestañas	
	D	Dmin	S	Smin
108	108	98	17,5	13,5
140	140	130	18,7	14,7
160	160	150	21,0	17,0

El síntoma perceptible del desgaste de la cadena es su alargamiento. El grado del desgaste se puede determinar con una medición de la longitud a lo largo de cuadro eslabones de la cadena.

Tabla 1.14 Comprobación de desgaste de la cadena

Cadenas de mallas articuladas		Casquillo	Burlón	X	X _{so}	X _{max}
Tipo (mm)	Paso (mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
05B	175,5	58,77	36,58	702	718	73
060	202,8	69,7	44,53	811,2	827	84
08K	228,6	80	50,88	914,4	930	94
D9H	260,35	88,8	57,23	1041,4	105	10

X_{so} Hasta esta medida es permisible cambiar partes de la cadena y/o segmentos dentados individuales.

X_{max} Al llegar o exceder de esta medida la cadena completa y los segmentos dentados y de rueda deben ser cambiados.

Al cambiar los eslabones de un transportador con dos ramales de cadena, siempre reemplazar la misma cantidad de eslabones en ambos ramales de cadena.

1.13 Cadenas, su desgaste y reemplazo

La cadena transportadora completa consiste en varios ramales de cadena en función de la longitud necesaria. Estos ramales de cadena son dotados de eslabones finales partidos. Al unir los ramales de cadena, hay que conectar estos eslabones y atornillarlos con las células. También es posible desconectar la cadena en estos eslabones finales para reparaciones.

Básicamente, se puede desconectar la cadena en una unión por perno normal, por ejemplo para cambiar eslabones individuales de la cadena, pero este trabajo es muy difícil en el estado montado y por eso si es necesario cambiar partes de la cadena, recomendamos el reemplazo de ramales completos. Es ese caso, los ramales desmontados podrán ser reparados en el taller.

1.14 Conclusiones del Capítulo

1. Se establecieron las generalidades de los Transportadores de Tablillas y de sus partes componentes.
2. Se establecieron las particularidades del transportador Alimentador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” y los aspectos fundamentales de su mantenimiento y reparación.

Capítulo II Desarrollo del Método de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos Articulados y Empotramientos Elásticos y su Aplicación a las Tablillas, Apoyos y Eslabones del TP1.

2.1 Métodos Generales de Solución de Vigas Hiperestáticas.

2.1.1 Método de las Fuerzas.

El sistema que posee un número de ligaduras superior a las necesarias es un sistema hiperestático y el número de ligaduras suplementarias es igual al grado de hiperestaticidad. La hiperestaticidad puede ser exterior o interior en dependencia de que las ligaduras suplementarias sean exteriores o interiores. En los sistemas hiperestáticos con ligaduras exteriores suplementarias no es posible la determinación de las reacciones de apoyo mediante las ecuaciones de equilibrio y si la hiperestaticidad es interior no es posible determinar las fuerzas internas en las barras por el método de las secciones, de donde se puede definir un Sistema Hiperestático como Sistema Hiperestático: (3)

Es aquel sistema reticulado que posee una ligadura exterior o interior suplementaria de manera tal que, o no resulta posible la determinación de las reacciones de apoyo mediante las ecuaciones de equilibrio, o no es posible determinar las fuerzas internas en las barras por el método de las secciones.

Durante la solución de los sistemas hiperestáticos por el Método de las Fuerzas es necesario elegir un Sistema Base y conformar lo que se conoce como Sistema Equivalente.

Sistema Base: Es el sistema hiperestático dado en el cual se han eliminado todas las ligaduras suplementarias tanto exteriores como interiores. Pueden existir diferentes posibles sistemas bases.

Sistema Equivalente: Es el sistema base en el cual las ligaduras suplementarias eliminadas han sido sustituidas por las fuerzas que las representan. En un sistema equivalente dado, las fuerzas se designan por $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

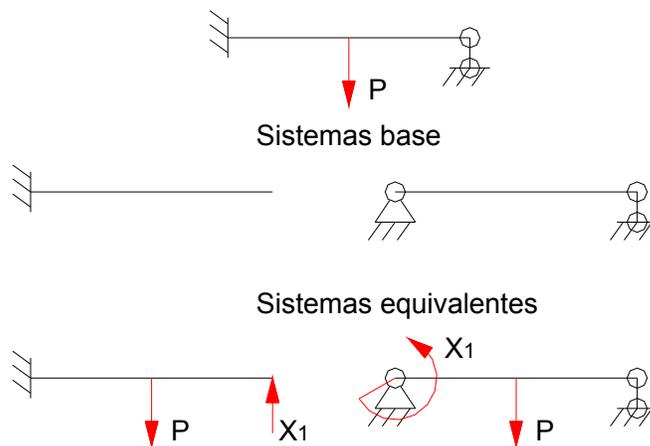


Fig. 2.1 Ejemplo de Viga Hiperestática y sus posibles Sistemas Base y Equivalente.

Los desplazamientos originados por el sistema de fuerzas aplicado al Sistema Equivalente, en la dirección de cada una de las ligaduras eliminadas, tienen que ser cero. O sea:

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_1 [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1] &= 0 \\
 \bar{\delta}_2 [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1] &= 0 \\
 \vdots & \\
 \bar{\delta}_n [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, P, P_1] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Las expresiones (2.1) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_{1X_1} + \bar{\delta}_{1X_2} + \bar{\delta}_{1X_3} + \dots & \quad \dots + \bar{\delta}_{1X_n} + \bar{\delta}_{1P} = 0 \\
 \bar{\delta}_{2X_1} + \bar{\delta}_{2X_2} + \bar{\delta}_{2X_3} + \dots & \quad \dots + \bar{\delta}_{2X_n} + \bar{\delta}_{2P} = 0 \\
 \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \bar{\delta}_{nX_1} + \bar{\delta}_{nX_2} + \bar{\delta}_{nX_3} + \dots & \quad \dots + \bar{\delta}_{nX_n} + \bar{\delta}_{nP} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Puesto que cada uno de los desplazamientos $\bar{\delta}_{iXk}$ es proporcional a la fuerza correspondiente se puede escribir que:

$$\bar{\delta}_{iXk} = \bar{\delta}_{ik} \cdot X_k
 \tag{2.3}$$

Donde $\delta_{i k}$ es el desplazamiento en la dirección i provocada por una fuerza unitaria colocada en la posición de X_k . Las expresiones (2.2) quedarán entonces escritas como:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots & \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{1P} = 0 \\
 \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \dots & \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \delta_{2P} = 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \delta_{n3} \cdot X_3 + \dots & \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{nP} = 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones canónicas del método de las fuerzas pues en las mismas las incógnitas son las fuerzas $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ y existirán tantas ecuaciones como fuerzas X_k desconocidas existan.

Para resolver el sistema de ecuaciones (2.4) es necesario hallar los desplazamientos δ_{ik} que constituyen los coeficientes de las incógnitas X_k y además los términos independientes de las diferentes ecuaciones δ_{iP} .

Según el Método de Mohr (3) para hallar el desplazamiento en una dirección i determinada es necesario colocar una fuerza unitaria en esa dirección y obtener las acciones interiores provocadas por dicha fuerza unitaria y después obtener la integral del producto de las acciones interiores provocadas por esta fuerza unitaria y las acciones originadas por las cargas que provocan el desplazamiento. Pero en este caso, como cada uno de los desplazamientos δ_{ik} es originado por una fuerza unitaria colocada en la posición X_k , el desplazamiento δ_{ik} es la integral del producto de dos funciones unitarias, una originada por una fuerza unitaria colocada en la dirección i la otra por una fuerza unitaria colocada en la dirección X_k . Los coeficientes δ_{iP} se hallan resolviendo las integrales correspondientes a los productos de las fuerza unitaria colocada en la dirección i , o sea, de las acciones interiores originadas por esta fuerza unitaria por las acciones interiores originadas por las cargas externas P .

Este Método de Solución de Vigas Hiperestáticas se conoce como Método de las Fuerzas y es la Base Teórica de la casi totalidad de los Métodos de Solución de Vigas Hiperestáticas.

2.1.2 Método de la Ecuación de los Tres Momentos.

La ecuación de los tres momentos se deriva de aplicar el Método de las Fuerzas a una viga continua hiperestática de múltiples apoyos. El grado de hiperestaticidad en este caso será igual también al número de ligaduras o apoyos suplementarios.

Para calcular estas vigas resulta muy cómodo partir del sistema base que se obtiene, introduciendo articulaciones en los apoyos y aplicando los momentos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ que son precisamente las fuerzas que representan las ligaduras eliminadas entre los tramos vecinos (Fig. 2.2). Consideraremos positivos los momentos representados en la Fig. 2.2.

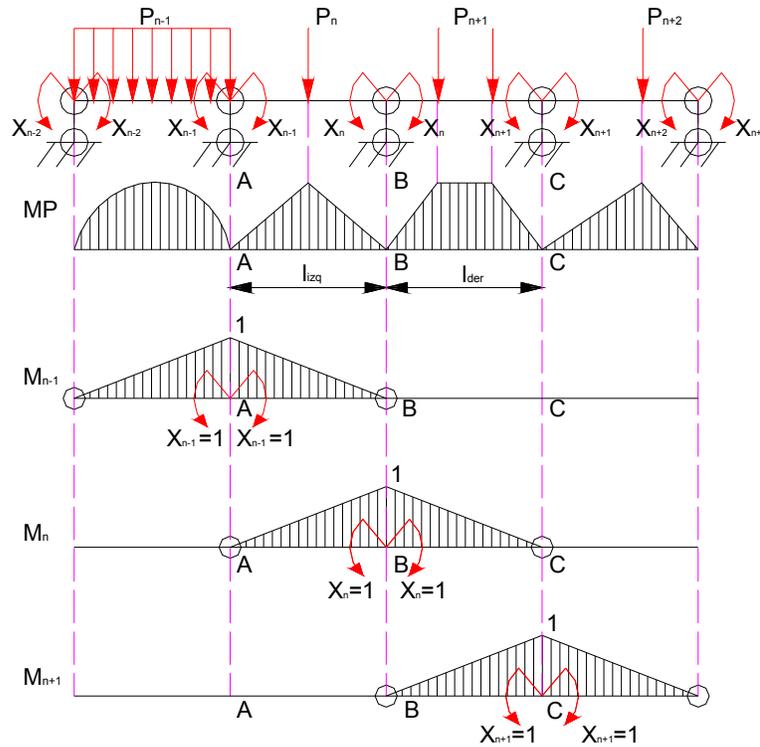


Fig. 2.2 diagramas unitarios de los momentos incógnitas X_i

Se podrán plantear tantas ecuaciones canónicas como fuerzas desconocidas existan en la viga. Analizaremos como se transforma la ecuación n del sistema de ecuaciones canónicas para el caso de este esquema:

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{n(n-1)} \cdot X_{(n-1)} + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{n(n+1)} \cdot X_{(n+1)} + \dots + \delta_{nP} = 0 \quad (2.5)$$

Determinemos los coeficientes de esta ecuación. Para ello construimos los diagramas de momentos de las cargas externas MP (Fig. 3.17) y los diagramas unitarios de las fuerzas $X_{n-1} = 1$, $X_n = 1$ y $X_{n+1} = 1$ correspondientes a los tramos vecinos al tramo n (Fig. 3.17). Como al introducir articulaciones entre los diferentes tramos, los diagramas de momentos de las cargas externas se construyen de forma independiente para cada tramo como vigas articuladas en ambos extremos. De la misma forma se construyen los diagramas unitarios de los momentos que actúan en los apoyos.

En la ecuación (2.5) son cero todos los coeficientes de las incógnitas excepto $\delta_{n(n-1)}$, δ_{nn} y $\delta_{n(n+1)}$. En efecto el momento unitario n origina momentos flectores solamente en los tramos AB y BC. En estos mismos tramos aparecen momentos flectores provocados por los momentos unitarios (n-1) y (n+1) y por las cargas externas, de aquí que los productos de Vereschaguin de los diagramas son iguales a cero menos aquellos que determinan los coeficientes $\delta_{n(n-1)}$, δ_{nn} , $\delta_{n(n+1)}$ y δ_{nP} (Fig. 2.2).

Si la rigidez de la viga $E \cdot I_x$ es constante a través de toda la longitud se obtiene que:

$$\bar{\delta}_{n(n-1)} = \frac{l_i}{6 \cdot E \cdot I_x}, \quad \bar{\delta}_{nn} = \frac{l_i + l_d}{6 \cdot E \cdot I_x} \quad \text{y} \quad \bar{\delta}_{n(n+1)} = \frac{l_d}{6 \cdot E \cdot I_x} \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene:

$$X_{(n-1)} \cdot l_i + 2 \cdot X_n \cdot (l_i + l_d) + X_{(n+1)} \cdot l_d + 6 \cdot \bar{\delta}_{nP} = 0 \quad (2.7)$$

Donde l_i es la longitud del tramo a la izquierda del momento X_n y $X_{(n-1)}$ el momento a la izquierda del mencionado tramo y l_d es la longitud del tramo a la derecha del momento X_n y $X_{(n+1)}$ el momento a la derecha de este último tramo.

Para mejor claridad designémoslo como $M_{izq} = X_{(n-1)}$, $M_{med} = X_n$ y $M_{der} = X_{(n+1)}$ obtenemos definitivamente la ecuación:

$$M_{izq} \cdot l_{izq} + 2 \cdot M_{med} \cdot (l_{izq} + l_{der}) + M_{der} \cdot l_{der} + 6 \cdot \bar{\delta}_{nP} = 0 \quad (2.8)$$

Esta ecuación se denomina Ecuación de los Tres Momentos. El mecanismo de planteamiento de esta ecuación es el siguiente: se analizan consecutivamente todos los pares de tramos contiguos y para cada par de tramos se plantea la ecuación de los tres momentos. El número de pares de tramos es igual al número de apoyos adicionales intermedios. Es decir, que el número de ecuaciones de la viga continua es igual al grado de hiperestaticidad de ésta. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones y después de determinar los momentos, sin dificultad se construye el diagrama de momentos flectores y se determinan las tensiones en la viga.

2.1.3 Solución utilizando el Método de los Parámetros de Origen.

En los Sistemas Hiperestáticos en general y en particular en las vigas hiperestáticas los desplazamientos son nulos en las direcciones de las ligaduras suplementarias. Esta particularidad se aprovecha en la solución de las vigas hiperestáticas a través del Método de los Parámetros de Origen, o sea, utilizando las Ecuaciones Universales de la Curva Elástica de una viga se pueden calcular los desplazamientos tanto lineales como angulares en cualquier punto de una viga, según las ecuaciones (2.9) y (2.10).

$$E \cdot I_x \cdot \theta_z = E \cdot I_x \cdot \theta_o + \sum_{i=1}^{n1} M_i \cdot (z - a_i) + \sum_{i=1}^{n2} \frac{P_i \cdot (z - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n3} \frac{q_i \cdot (z - c_i)^3}{6} \quad (2.9)$$

$$E \cdot I_x \cdot y_z = E \cdot I_x \cdot y_o + E \cdot I_x \cdot \theta_o \cdot z + \sum_{i=1}^{n1} \frac{M_i \cdot (z - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n2} \frac{P_i \cdot (z - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^{n3} \frac{q_i \cdot (z - c_i)^4}{24} \quad (2.10)$$

Plateando las ecuaciones universales de la curva elástica de la viga para calcular los desplazamientos en algunos puntos cuyos desplazamientos son cero, o poseen valores conocidos, es posible obtener las ecuaciones suplementarias requeridas para resolver las vigas hiperestáticas. Cualquiera de estos Métodos descritos puede ser utilizado para resolver una viga hiperestática pero para los objetivos del presente trabajo se utilizará fundamentalmente el método de las fuerzas pues este tiene la ventaja que al resolver la viga se poseen directamente las reacciones de apoyo. En el caso de las vigas hiperestáticas con apoyos elásticos esto es una ventaja pues si se posee la constante de rigidez del apoyo se posee también entonces el desplazamiento de este. Como se verá el Método de las fuerzas se combinará con el Método de los Parámetros de Origen.

2.2 Los Apoyos Rígidos Clásicos.

2.2.1 Modelos físico – matemáticos de los apoyos rígidos clásicos.

Los modelos físicos - matemáticos de los apoyos rígidos clásicos utilizados en los sistemas planos en la literatura de Mecánica Teórica (4)(5)son:

2.2.1.1 Apoyo Articulado Móvil.

El modelo físico de la Articulación Móvil se muestra en las Figs. 2.3 a) y b).



Fig. 2.3 Modelo Físico del Apoyo Articulado Rígido Móvil

El modelo matemático de este apoyo se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
 A_Z = 0 & & \delta_{AZ} \neq 0 \\
 A_Y \neq 0 & & \delta_{AY} = 0 \\
 M_A = 0 & & \theta_A \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Donde:

A_Z - Fuerza de reacción del apoyo en la dirección del eje longitudinal Z.

A_Y - Fuerza de reacción del apoyo en la dirección del eje vertical Y.

M_A - Momento de reacción del apoyo con relación al eje X, perpendicular al plano de la figura.

δ_{AZ} y δ_{AY} - Desplazamientos lineales del punto A donde está ubicado el apoyo en las direcciones Z y Y respectivamente.

θ_A - Desplazamiento angular (pendiente) del punto A donde está ubicado el apoyo

2.2.1.2 Apoyo Articulado Fijo.

El modelo físico de este apoyo se muestra en las Figs. 2.4 a) y b)

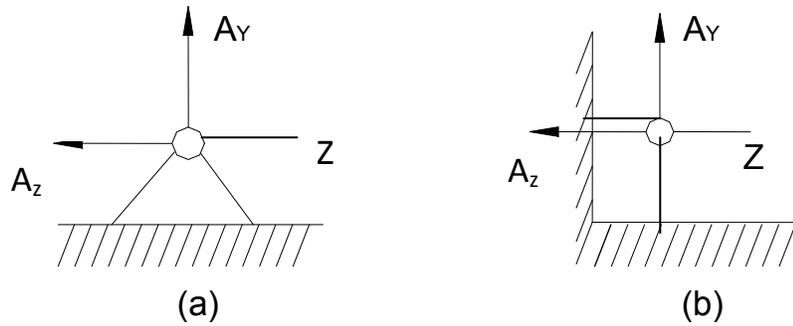


Fig. 2.4 Modelo Físico del Apoyo Articulado Rígido Fijo

El modelo matemático de este apoyo es:

$$\begin{aligned}
 A_z \neq 0 & & \delta_{AZ} = 0 \\
 A_y \neq 0 & & \delta_{AY} = 0 \\
 M_A = 0 & & \theta_A \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

2.2.1.3. Empotramiento Rígido.

El modelo físico de este apoyo se muestra en la Fig. 2.5

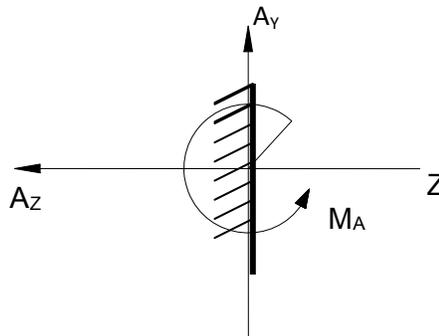


Fig. 2.5 Modelo Físico del Empotramiento Rígido.

El modelo matemático de este apoyo es:

$$\begin{aligned}
 A_z &\neq 0 & \delta_{AZ} &= 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{AY} &= 0 \\
 M_A &\neq 0 & \theta_A &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

2.3 Modelos físico–matemáticos de algunos apoyos elásticos tratados en la literatura.

En la literatura técnica se utilizan otros modelos que consideran las propiedades elásticas de los apoyos. Estos modelos son:

2.3.1 El Apoyo Articulado Móvil Elástico.

Este tipo de apoyo se modela físicamente tal como se muestra en la Fig. 2.6.

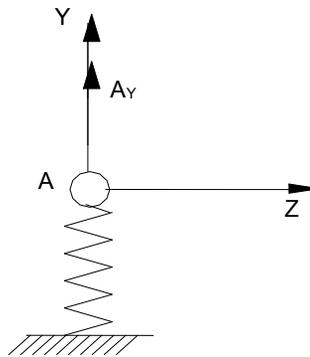


Fig. 2.6 Modelo Físico del Apoyo Articulado Móvil Elástico

El modelo matemático se expresa como:

$$\begin{aligned}
 A_z &= 0 & \delta_{AZ} &\neq 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{AY} &= -\frac{A_y}{C_A} \neq 0 \\
 M_A &= 0 & \theta_A &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

El signo menos indica que la reacción es de signo contrario al desplazamiento del apoyo.

C_A - Constante de rigidez del apoyo en cm/kgf , plg/lb , etc.

2.3.2 El Apoyo Articulado Elástico Fijo.

El modelo físico se representa tal como se muestra en la Fig. 2.7

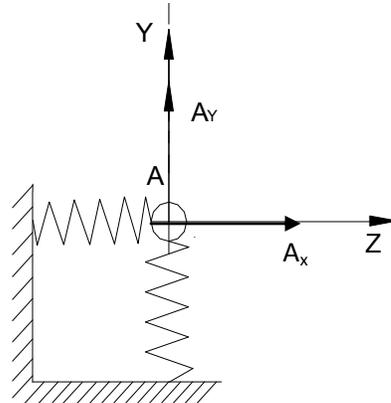


Fig. 2.7 Modelo Físico del Apoyo Articulado Elástico Fijo.

El modelo matemático en este caso es:

$$\begin{aligned}
 Az \neq 0 & \qquad \delta_{Az} = -\frac{Az}{C_A} \neq 0 \\
 Ay \neq 0 & \qquad \delta_{Ay} = -\frac{Ay}{C_A} \neq 0 \\
 M_A = 0 & \qquad \theta_A \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

2.3.3 La Fundación Elástica.

El modelo físico de la Fundación Elástica (5) se muestra en la Fig. 2.8

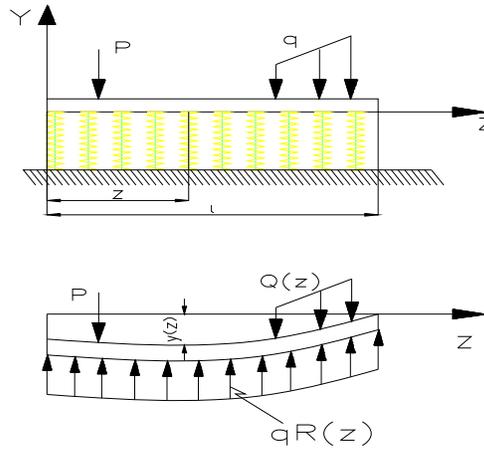


Fig. 2.8 Modelo Físico de Viga sobre Fundación Elástica

El modelo matemático se expresa en este caso como:

$$q_{R(z)} = - \alpha \cdot Y_{(z)} \quad \text{kgf/cm} \quad (2.16)$$

Donde:

$q_{R(z)}$: es la intensidad de la fuerza de reacción distribuida a una coordenada z del origen, producida por la base elástica sobre la viga. Esta reacción es una fuerza no uniformemente distribuida, la intensidad de la fuerza $q_{R(z)}$ depende de la flecha que adopte la viga en esa coordenada z , o sea: $Y_{(z)}$, la constante de rigidez de la fundación α se expresa en unidades de fuerza por unidad de área kgf/cm^2 . $Y_{(z)}$: es la flecha de la viga a una coordenada z del origen en cm. El signo menos indica que la reacción es contraria a la flecha.

2.3.4 Tratamiento de los aspectos relacionados con la elasticidad de los Apoyos en la Literatura

En la literatura de Mecánica Teórica (4) sólo se hace referencia a los apoyos rígidos clásicos, ningún autor hace referencia a ningún otro tipo de apoyo que contemple una rigidez intermedia entre los apoyos articulados y los empotrados.

En la literatura de Mecánica de Materiales, la mayoría de los autores se refieren también exclusivamente a los apoyos rígidos clásicos, sin contemplar en ningún caso la elasticidad de los apoyos (3); (6); (7); (8); (9). Otro grupo de autores trata de alguna manera los apoyos elásticos mencionados anteriormente; (3); (5) y sólo en (10) se menciona la posibilidad de que los empotramientos no sean perfectamente rígidos, pero sin profundizar en las cualidades ni en el modelo físico – matemático de este tipo de Esquema de Análisis y mucho menos en los procedimientos de cálculo.

En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles Esquemas de Análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo:

(11) al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar: cajas de bolas, rolletes cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión.

En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles Esquemas de Análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo:

al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar: cajas de bolas, rolletes, cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión.

En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles Esquemas de Análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo:

(11)al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar: cajas de bolas, rolletes cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión.

Más adelante expresa: *“Si el soporte de la viga no permite movimiento relativo a lo largo del eje de la misma, entonces surgirá una restricción adicional que provocará una fuerza axial como resultado de dicha restricción”*. Este efecto axial se desprecia siempre en los problemas de Diseño de Máquinas y continúa diciendo: *“El apoyo empotrado, proporciona como reacciones una fuerza y un momento que no permiten rotación alguna en el plano de la deflexión del elemento. La pendiente de la curva elástica del elemento es cero en el apoyo empotrado, los que son utilizados para representar soportes muy rígidos”*. Cuando se refiere a las reacciones en los cojinetes en el diseño de árboles, explica que: *“generalmente los mismos están soportados por dos cojinetes, como regla, los cuales son considerados como soportes simples o simple apoyos”*.

Al construir diagramas de momentos flectores, tanto en elementos sometidos a flexión como en el diseño de árboles, sólo se refiere a los apoyos clásicos y sus reacciones correspondientes.

Los autores que abordan el Diseño por el Método de los Elementos Finitos (MEF); (12); (13); (11) emplean diferentes tipos de elementos que se diferencian por su forma, a través de las posiciones relativas de sus nodos y por los grados de libertad, es decir por las posibles direcciones del movimiento de cada nodo, Eligiendo adecuadamente estos elementos en las zonas de apoyo es posible modelar apoyos con diferente rigideces y lograr una mayor aproximación a la realidad que en los clásicos apoyos articulados y empotrados. Esta cualidad del Método de los Elementos Finitos puede ser utilizada en la práctica para lograr aproximaciones más exactas.

2.4 El Empotramiento Elástico.

El Empotramiento Elástico no es analizado en ninguna de las fuentes bibliográficas consultadas en el presente trabajo. Solamente como se mencionó anteriormente en la referencia (10) se menciona la posibilidad de que los Empotramientos puedan no tener una rigidez absoluta, sin abordar ningún otro análisis más profundo sobre este particular. El Colectivo de Mecánica Aplicada viene creando la Teoría de este nuevo tipo de Apoyo que posee una rigidez intermedia entre la Articulación Rígida y el Empotramiento Rígido y en este sentido se han desarrollado ya varias investigaciones, reconocidas incluso como Aportes Científicos en Premios Provinciales de Investigación Científica y en el Premio Nacional de la academia de Ciencias de Cuba del Año 2005: Perfeccionamiento de los Esquemas de Análisis y de los Métodos de Cálculo de los Elementos de Máquinas y Equipos (14), (15), (1) En los mencionados trabajos se modela físicamente este Empotramiento tal como se muestra en la Fig. 2.9 El modelo matemático de este apoyo se puede expresar como sigue.

$$\begin{aligned}
 A_z \neq 0 & \qquad \delta_A = - \frac{A_z}{CA} \\
 A_y \neq 0 & \qquad \delta_y = - \frac{A_y}{CA} \\
 M_A \neq 0 & \qquad \theta_A = - \frac{\Delta_A}{CB''} \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Los signos menos indican al igual que en los casos elásticos anteriores, que las fuerzas son contrarias a los referidos desplazamientos.

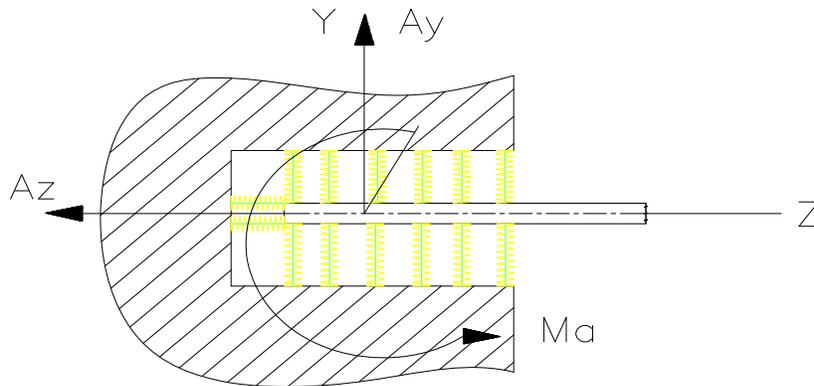


Fig. 2.9 Modelo Físico de un Empotramiento Elástico

2.5 Solución de vigas hiperestáticas con empotramientos elásticos y apoyos elásticos por el Método de las Fuerzas.

2.5.1 Procedimiento General de Solución.

Para ilustrar el procedimiento elaborado de solución de vigas hiperestáticas con apoyos elásticos y empotramientos elásticos se utilizará el Esquema correspondiente a la ubicación inicial de las tablillas en el Transportador Alimentador TP1 (Fig. 2.11)

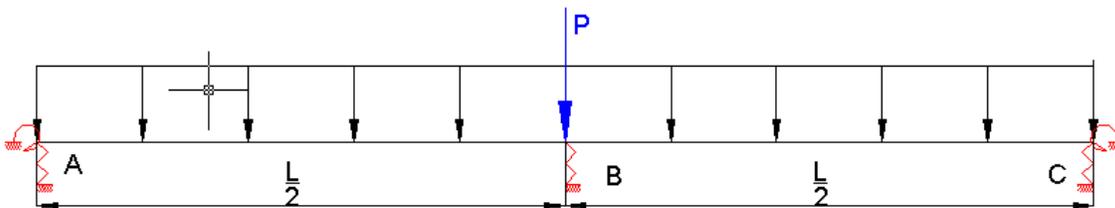


Fig. 2.11 Esquema de Análisis de los Apoyos Elásticos de las Tablillas con carga distribuida y una piedra grande impactando en su centro.

Se considerará que sobre la tablilla actúa una carga uniformemente distribuida y una carga concentrada producida por el impacto de una piedra de grandes dimensiones en el centro, encima del apoyo elástico que existe en ese punto.

Para poder resolver el problema se requiere considerar primero los apoyos como rígidos para hallar la reacción en el apoyo B y el momento flector en el empotramiento $M_A = M_{emp}$. Y se aplicará el Método de las Fuerzas.

En la Fig. 2.12 se muestra el Esquema de la Viga con Apoyos Rígidos.

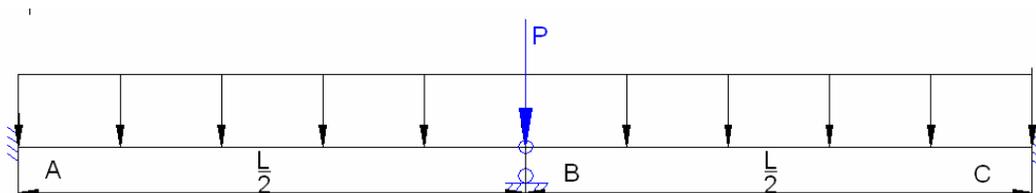


Fig. 2.12 Esquema de la viga hiperestática con apoyos rígidos.

Según el procedimiento elaborado se hace necesario resolver esta viga hiperestática para hallar el momento en los empotramientos. Se aplicará con este fin el Método de las Fuerzas. El sistema es simétrico con carga simétrica, se pueden aplicar por lo tanto las propiedades de simetría. En este caso en sistema simétrico con carga simétrica son cero las fuerzas interiores antisimétricas en el plano de simetría, o sea, el cortante es cero. Sólo existirá el momento flector X_1 y la reacción X_2 que hay que dividirla entre dos al picar la viga por el plano de simetría. La fuerza normal X_3 no provoca momentos flectores y se puede despreciar.

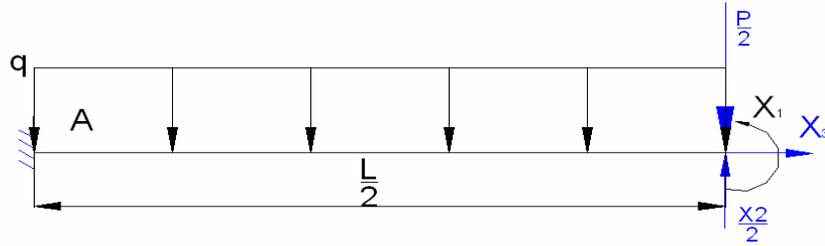


Fig. 2.13 Sistema equivalente de la viga hiperestática con apoyos rígidos aplicando propiedades de simetría.

Los diagramas unitarios de las incógnitas y el diagrama de la carga externa se muestran en la Fig. 2.14.

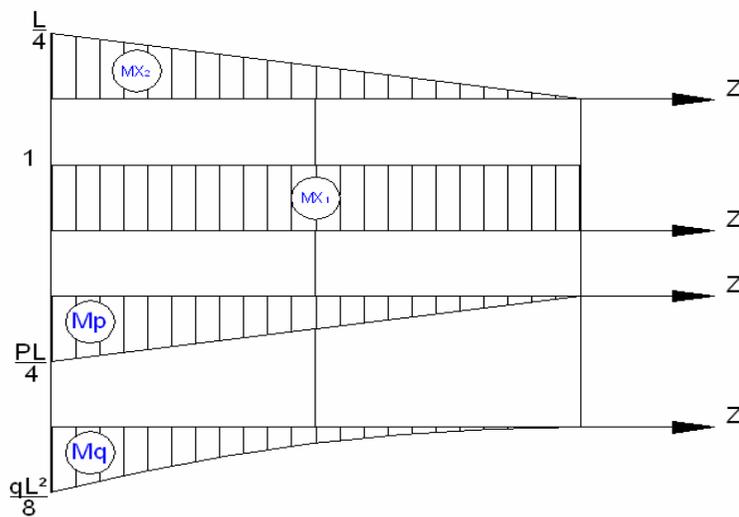


Fig. 2.14 Diagramas unitarios de las incógnitas y diagramas de las cargas externas.

Las ecuaciones canónicas del sistema son:

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 + \delta_{1p} = 0 \quad (2.18)$$

$$\delta_{12} * X_1 + \delta_{22} * X_2 + \delta_{2p} = 0 \quad (2.19)$$

A continuación se determinarán aplicando la Regla de Vereshiaguin los coeficientes de las ecuaciones.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (h * \bar{h} * l)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(1 * 1 * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l}{2} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l}{2EI_x}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * \frac{l}{4} * 1 * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^2}{16} \right) \quad \delta_{12} = \frac{l^2}{16EI_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^3}{96} \right) \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{96EI_x}$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right) + \left(-\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{1}{2} * 1 * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} * \frac{ql^2}{8} * 1 * \frac{l}{2} \right) \right] \quad \delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{Pl^2}{16} \right) + \left(-\frac{ql^3}{48} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-Pl^2 - ql^3}{48} \right) \quad \delta_{1p} = -\frac{l^2}{48EI_x} (3P + ql)$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{1}{3} * \bar{h} * h * l \right) + \left(-\frac{1}{4} * \bar{h} * h * l \right) \right]$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{2} \right) + \left(-\frac{1}{4} * \frac{l}{4} * \frac{ql^2}{8} * \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-\frac{Pl^3}{96} \right) + \left(-\frac{ql^4}{256} \right) \right] = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{-8Pl^3 - 3ql^4}{768} \right) \right]$$

$$\delta_{2p} = -\frac{l^3}{768EI_x} (8P + 3ql)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.18)

$$\frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{16EI_x} * X_2 + \left(-\frac{l^2}{48EI_x} (3P + ql) \right) = 0$$

$$\frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{16EI_x} * X_2 = \frac{l^2}{48EI_x} (3P + ql)$$

$$24X_1 + 3lX_2 = 3Pl + ql^2 \quad (2.20)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.19)

$$\frac{l^2}{16EI_x} X_1 + \frac{l^3}{96EI_x} * X_2 + \left(-\frac{l^3}{768EI_x} (8P + 3ql) \right) = 0$$

$$\frac{l^2}{16EI_x} X_1 + \frac{l^3}{96EI_x} * X_2 = \frac{l^3}{768EI_x} (8P + 3ql)$$

$$48X_1 + 8lX_2 = 8Pl + 3ql^2 \quad (2.21)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (2.20) y (2.21)

$$24X_1 + 3lX_2 = 3Pl + ql^2 \quad \text{Multiplicando esta ecuación (2.20) x (-2)}$$

$$48X_1 + 8lX_2 = 8Pl + 3ql^2$$

Sumando con la ecuación (2.21)

$$-48X_1 - 6lX_2 = -6Pl - 2ql^2$$

$$\underline{48X_1 + 8lX_2 = 8Pl + 3ql^2}$$

Se obtiene:

$$2lX_2 = 2Pl + ql^2$$

Despejando X_2

$$X_2 = P + \frac{ql}{2}$$

Sustituyendo X_2 en (2.20)

$$24X_1 + 3l\left(P + \frac{ql}{2}\right) = 3Pl + ql^2$$

$$24X_1 + 3lP + \frac{3ql^2}{2} = 3Pl + ql^2$$

$$24X_1 = -\frac{3ql^2}{2} + ql^2$$

$$48X_1 = -3ql^2 + 2ql^2$$

Se obtiene finalmente:

$$X_1 = \frac{-ql^2}{48}$$

Halladas las incógnitas se puede hallar el momento y la reacción en el empotramiento.

El diagrama de fuerzas se muestra en la Fig. 2.15.

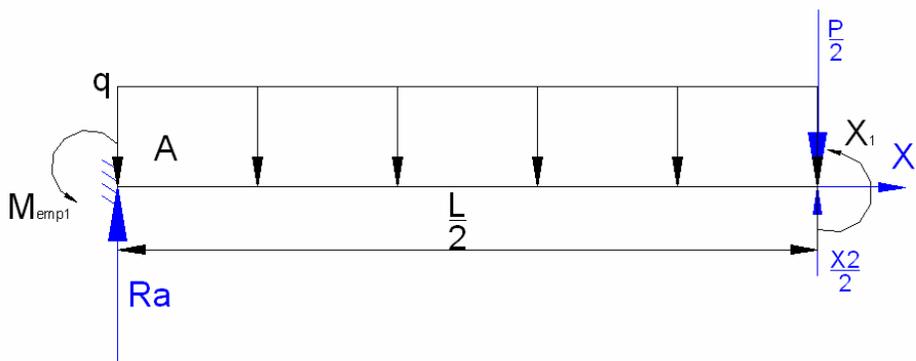


Fig. 2.15 Diagrama de fuerzas de la viga hiperestática para calcular M_{emp} .

Aplicando entonces las ecuaciones de equilibrio:

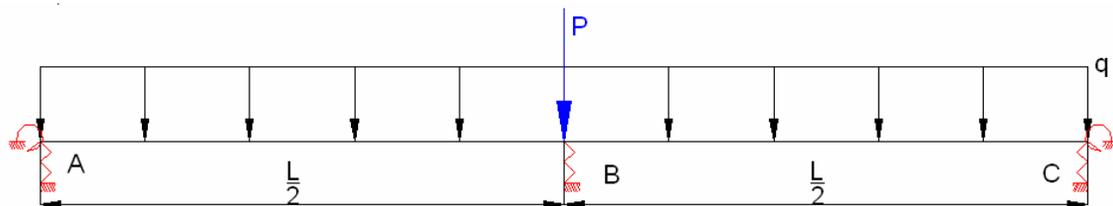
$$\sum Ma = 0$$

$$M_{emp2} + \left(\frac{P}{2} + \frac{ql}{4}\right) \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{48} - \left(\frac{P}{2}\right) \cdot \frac{l}{2} - \left(\frac{ql}{2}\right) \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$M_{emp2} = -\frac{Pl}{4} - \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{48} + \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8}$$

$$M_{emp2} = \frac{ql^2}{48} \tag{2.22}$$

Ahora se resolverá la viga hiperestática con Apoyos y Empotramientos Elásticos. El Esquema de Análisis es el que se muestra.



Ahora se aplicará también el Método de las Fuerzas. se consideran conocidos los momentos en los Empotramientos Elásticos $M_A = M_B = \varphi \cdot M_{emp} = \varphi \cdot ql^2/48$, o sea, una fracción del momento que existiría si los empotramientos fueran rígidos. El apoyo suplementario es el del centro. En el Sistema Equivalente se eliminará esta apoyo y se sustituirá por la fuerza X_1 . En la Fig. 2.17 se muestran los diagramas de la fuerza unitaria $X_1 = R_B$ y los de las restantes cargas

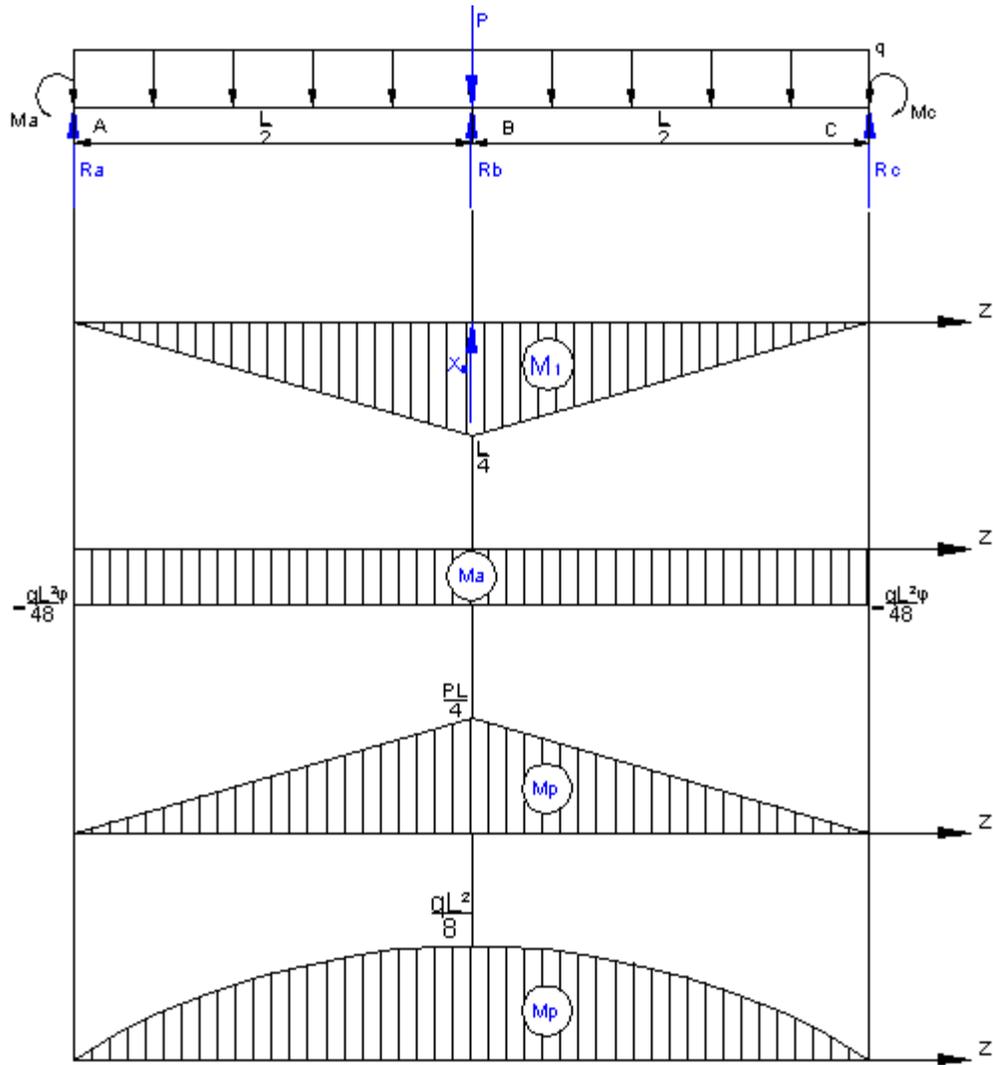


Fig. 2.17 Diagramas de la fuerza unitaria X_1 y de las restantes cargas sobre la viga.

Ahora sólo se tiene una ecuación canónica:

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{1p} = 0 \tag{2.23}$$

Los coeficientes son:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{2} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{5}{12} * h * \bar{h} * l \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(\frac{1}{2} * \frac{l}{4} * \frac{ql^2 \varphi}{48} * \frac{l}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{2} \right) + 2 \left(-\frac{5}{12} * \frac{ql^2}{8} * \frac{l}{4} * \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI_x} \left[\frac{ql^4 \varphi}{768} - \frac{Pl^3}{96} - \frac{5ql^4}{768} \right] = \frac{2}{EI_x} \left[\frac{ql^4 \varphi - 8Pl^3 - 5ql^4}{768} \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{l^3}{384EI_x} (ql\varphi - 8P - 5ql)$$

$$\delta_{1p} = -\frac{l^3}{384EI_x} (8P + 5ql - ql\varphi)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.23)

$$\frac{l^3}{48EI} * X_1 + \left(-\frac{l^3}{384EI_x} (8P + 5ql - ql\varphi) \right) = 0$$

$$\frac{l^3}{48EI} * X_1 = \frac{l^3}{384EI_x} (8P + 5ql - ql\varphi) \quad 8X_1 = 8P + 5ql - ql\varphi$$

$$X_1 = \frac{8P + 5ql - ql\varphi}{8} = R_{B1} \quad (2.24)$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en el eje “y” se obtiene:

$$\sum F_y = R_A + R_B - ql - P + R_C \quad R_A + R_B - ql - P + R_C = 0$$

$$2R_A + R_B - ql - P = 0$$

$$R_A = \frac{P + ql - R_B}{2} \quad (2.25)$$

Sustituyendo $X_1 = R_{B1}$ de (2.24) en la ecuación (2.25)

$$R_{A1} = \frac{P + ql - R_{B1}}{2} \quad R_{A1} = \frac{P + ql - X_1}{2} \quad R_{A1} = \frac{P + ql - \left(\frac{8P + 5ql - ql\varphi}{8} \right)}{2}$$

$$R_{A1} = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2} - \left(\frac{8P + 5ql - ql\varphi}{16} \right) \quad R_{A1} = \frac{8P + 8ql - 8P - 5ql + ql\varphi}{16} \quad R_{A1} = \frac{3ql + ql\varphi}{16} \quad (2.26)$$

En todas las expresiones y diagramas obtenidos con Apoyos y Empotramientos Elásticos los valores dependen de la rigidez de los apoyos. Si $\varphi = 1$ se trata de Empotramientos Rígidos y los diagramas y desplazamientos debían corresponderse con esta condición. Si $\varphi = 0$ por el contrario se correspondería con Apoyos Articulado Rígidos y los resultados tanto en los diagramas como en los desplazamientos se tienen que corresponder con esta condición. Se verán a continuación estos resultados.

2.5.2 Solución para cuando $\varphi = 0$.

Los Diagramas de Fuerza de Cortante, Momentos flectores y Desplazamientos para $\varphi = 0$ se muestran en la Fig. 2.18.

Estos diagramas se obtiene haciendo $\varphi = 0$ en las reacciones obtenidas anteriormente.

Para hallar los desplazamientos es necesario calcular las constantes de rigidez de los Apoyos Elásticos. La ecuación general para un apoyo elástico con una carga de compresión es:

$$\frac{P}{A} = \frac{E * \Delta L}{L} \quad (2.27)$$

De donde se obtiene que la dependencia carga - desplazamiento es:

$$P = C * \Delta L \quad (2.28)$$

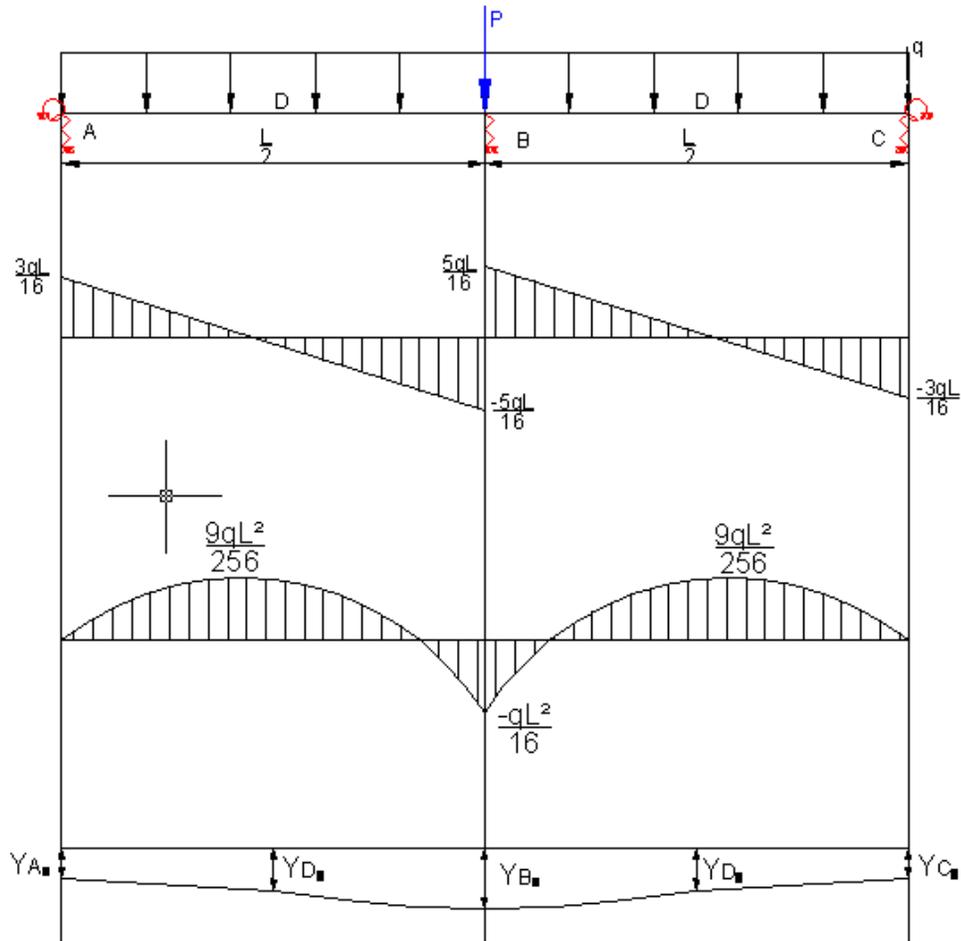


Fig. 2.18 Diagramas de Fuerzas de Cortante, Momentos Flectores y desplazamientos para Apoyos Articulados Elásticos ($\varphi = 0$)

De las ecuaciones (2.27) y (2.28) se obtiene la ecuación de rigidez:

$$C = \frac{E * A}{L} \quad (2.29)$$

El Apoyo A está compuesto por una Viga, una banda de goma encima de esta y una lámina de acero, de manera que la rigidez del conjunto se calculó por la suma de los inversos de las rigideces individuales, tal como se establece en la literatura para elementos elásticos en serie. O sea:

$$C_A = \frac{1}{C_{V_A}} + \frac{1}{C_{g_A}} + \frac{1}{C(lam)_A} \quad (2.30)$$

C_A – coeficiente de rigidez del apoyo A

C_{V_A} - Coeficiente de rigidez de la viga presente en A

C_{g_A} - Coeficiente de rigidez de la banda de goma.

$C(lam)_A$ - Coeficiente de rigidez de la lámina de acero.

$$C_{V_A} = \frac{E_A * d_A * B_C}{h_A} \quad (2.31)$$

$$C_{V_A} = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 1 \text{ cm} * 30 \text{ cm}}{22 \text{ cm}} \quad C_{V_A} = 2,73 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}$$

$$C_{g_A} = \frac{E_g * b_{g_A} * B_C}{l_{g_A}} \quad (2.32)$$

$$C_{g_A} = \frac{1100 \text{ Kgf/cm}^2 * 1 \text{ cm} * 30 \text{ cm}}{1,6 \text{ cm}} \quad C_{g_A} = 453\,750 \text{ Kgf/cm}$$

$$C(lam)_A = \frac{E_{ac} * d_A * B_C}{l(lam)_A} \quad (2.33)$$

$$C(lam)_A = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 22 \text{ cm} * 30 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \quad C(lam)_A = 2,64 \times 10^8 \text{ Kgf/cm}$$

$$C_A = \frac{1}{C_{V_A}} + \frac{1}{C_{g_A}} + \frac{1}{C(lam)_A}$$

$$C_A = \frac{1}{2,73 \times 10^6 \text{ kgf/cm}} + \frac{1}{453\,750 \text{ kgf/cm}} + \frac{1}{2,64 \times 10^8 \text{ kgf/cm}}$$

$$C_A = 2,56 \times 10^{-6} \text{ kgf/cm}$$

Para el Apoyo B de la misma manera:

$$C_B = \frac{1}{C_{V_B}} + \frac{1}{C(lam)_B} + \frac{1}{Cv(\text{inf})} \quad (2.34)$$

C_B – coeficiente de rigidez del punto B

C_{V_B} - Coeficiente de rigidez de la viga en B

$Cv(\text{inf})$ - Coeficiente de rigidez de la viga inferior.

$C(lam)_B$ - Coeficiente de rigidez de la lámina de acero.

$$C_{V_B} = \frac{Eac * d_B * B_C}{h_B} \quad (2.35)$$

$$C_{V_B} = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 1 \text{ cm} * 30 \text{ cm}}{33 \text{ cm}} \quad C_{V_B} = 1,82 \times 10^6 \text{ kgf/cm}$$

$$C(lam)_B = \frac{Eac * db * Bc}{l(lam)b} \quad (2.36)$$

$$C(lam)_B = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 18 \text{ cm} * 30 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \quad C(lam)_B = 2,16 \times 10^8 \text{ Kgf/cm}$$

$$Cv(\text{inf}) = \frac{(192)EI_x}{L^3} \quad (2.37)$$

$$Cv(\text{inf}) = \frac{(192) * \left(2 \times 10^6 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}\right) * (3308 \text{cm}^4)}{(265 \text{cm})^3} \quad Cv(\text{inf}) = 68\,244,3 \text{cm} \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}$$

$$C_B = \frac{1}{1,82 \times 10^6 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}} + \frac{1}{2,16 \times 10^8 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}} + \frac{1}{68\,244,3 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}}$$

$$C_B = 15 \times 10^{-6} \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}$$

Calculo de la pendiente en el origen para $\varphi = 0$. Se halló aplicando el Método de los Parámetros de origen:

$$EI_x \theta_B = EI_x \theta_{A1} - M_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0\right) + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^2}{2} - \frac{q \left(\frac{l}{2} - 0\right)^3}{6} \quad (2.37)$$

$$M_{A1} = 0$$

Simplificando queda

$$EI_x \theta_{A1} = -\frac{R_{A1} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}$$

$$EI_x \theta_{A1} = -\frac{\left(\frac{3ql}{16}\right) \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} \quad EI_x \theta_{A1} = -\frac{\left(\frac{3ql^3}{64}\right)}{2} + \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}$$

$$EI_x \theta_{A1} = -\frac{3ql^3}{128} + \frac{ql^3}{48} \quad EI_x \theta_{A1} = \frac{-9ql^3 + 8ql^3}{384} \quad EI_x \theta_{A1} = \frac{-ql^3}{384}$$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{-ql^3}{384} \quad (2.38)$$

$$\theta_{A1} = -\frac{(19,50) * (140)^3}{384 * (2 \times 10^6) * (57,35)} \quad \theta_{A1} = -\frac{5,37 \times 10^7}{4,40 \times 10^{10}} \quad \theta_{A1} = -0,00121 \text{ rad}$$

El momento de inercia de la tablilla se halló con el Software Mechanical Desktop. En la Fig. 2.19 se muestra el resultado. $I_x = 57,35 \text{ cm}^4$

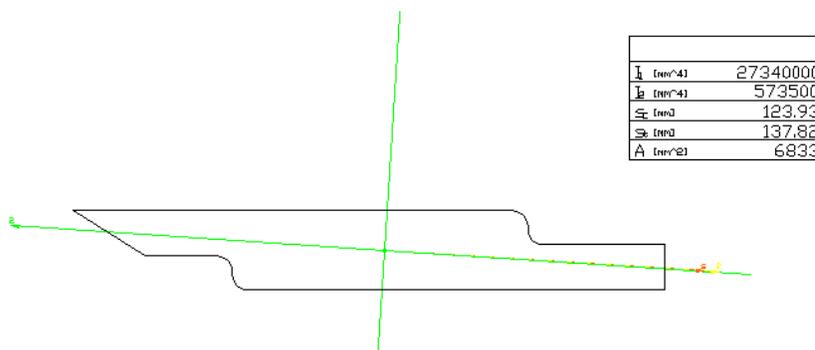


Fig. 2.19 Sección transversal de las Tablillas y Momentos Principales de Inercia.

Cálculo del desplazamiento de los apoyos.

$$y_{A1} = -C_A * R_{A1} \quad (2.39)$$

$$y_{A1} = -\left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg}f/cm\right) * \frac{3 * (19,50) * (140)}{16} \quad y_{A1} = -0,0209 \text{ cm}$$

$$y_{B1} = -C_B * R_B \quad (2.40)$$

$$y_{B1} = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg}f/cm\right) * \frac{8 * (11965,05) + 5 * (19,50) * (140)}{8} \quad y_{B1} = -0,20 \text{ cm}$$

Para $z = \frac{l}{4}$

$$EI_x Y_D = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^3}{6} \quad (2.41)$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x Y_{A1} + EI_x \theta_{A1} \frac{l}{4} + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,0209) + EI_x * \left(-\frac{ql^3}{384EI_x}\right) \frac{l}{4} + \frac{3ql \left(\frac{l}{4}\right)^3}{16}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00209) + EI_x * \left(-\frac{ql^4}{1536EI_x} \right) + \frac{3ql^4}{6144}$$

$$Y_{D1} = (-0,0209) + \frac{1}{EI_x} * \left(\frac{-4ql^4 + 3ql^4}{6144} \right)$$

$$Y_{D1} = (-0,0209) + \frac{1}{EI_x} * \left(\frac{-ql^4}{6144} \right)$$

$$Y_{D1} = (-0,0209) - \frac{ql^4}{6144EI_x} \quad Y_{D1} = (-0,0209) - \frac{(19,50) * (140)^4}{6144 * (2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{D1} = (-0,0209) - \frac{7,49 \times 10^9}{7,047 \times 10^{11}} \quad Y_{D1} = (-0,0209) - 0,0106$$

$$Y_{D1} = -0,0315 \text{ cm}$$

2.5.3 Solución para cuando $\varphi = 1$.

Cuando $\varphi = 1$ el sistema se comporta como si los empotramientos fueran rígidos y el momento flector que asimilan los empotramientos alcanza su valor máximo.

$$M_A = M_C = -q L^2 / 48 \quad (2.42)$$

La pendiente en los empotramientos tiene que dar cero, lo que resulta una comprobación de que los resultados están correctos.

En la Fig. 2.20 se muestran los Diagramas para este caso.

Calculo de la pendiente en el origen:

$$EI_x \theta_B = EI_x \theta_{A1} - M_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} - \frac{q \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^3}{6} \quad (2.43)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{ql^2}{48} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{ql}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{q}{6} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \quad EI_x \theta_{A1} = \frac{ql^3}{96} - \frac{ql^3}{32} + \frac{ql^3}{48}$$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{ql^3 - 3ql^3 + 2ql^3}{96} \quad EI_x \theta_{A1} = 0$$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A1} = -C_A * R_{A1} \quad (2.44)$$

$$y_{A1} = - \left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm} \right) * \frac{(19,50) * (140)}{4} \quad y_{A1} = -0,00174 \text{ cm}$$

$$y_B = -C_B * R_{B1} \quad (2.45)$$

$$y_B = - \left(15 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm} \right) * \frac{8 * (11965,05) + 4 * (19,50) * (140)}{8}$$

$$y_B = -0,199 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^2}{2} + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^3}{6} - \frac{q \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^4}{24} \quad (2.46)$$

Siendo $z = \frac{l}{4}$

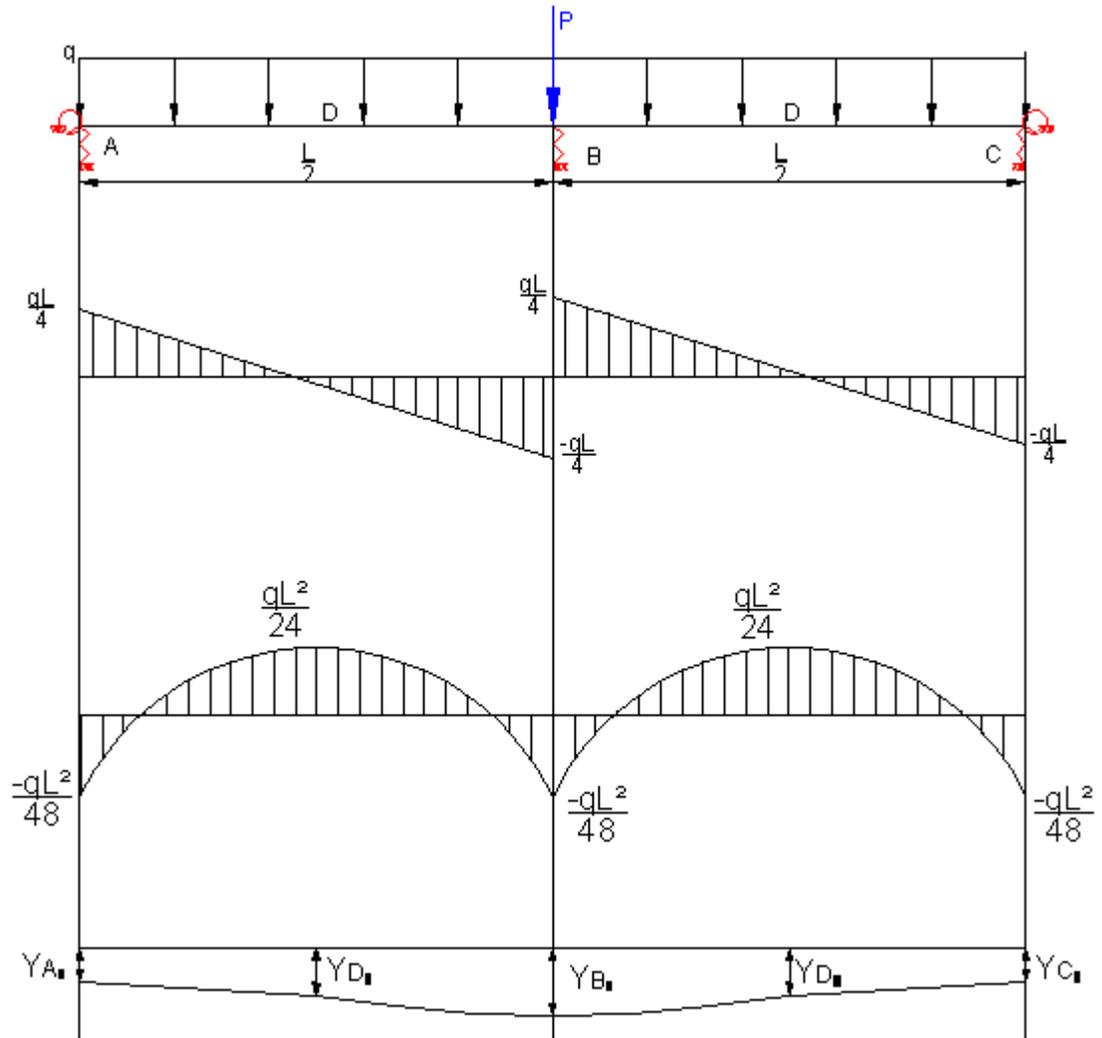


Fig. 2.20 Diagramas de Fuerzas de Cortante, Momentos Flectores y desplazamientos para Empotramientos Rígidos ($\phi = 1$)

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00174) - \frac{ql^2 \left(\frac{l}{4}\right)^2}{48} + \frac{ql \left(\frac{l}{4}\right)^3}{6} - \frac{q \left(\frac{l}{4}\right)^4}{24}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00174) - \frac{768}{2} + \frac{64}{6} - \frac{q \left(\frac{l}{4}\right)^4}{24}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00174) - \frac{ql^4}{1536} + \frac{ql^4}{384} - \frac{ql^4}{6144}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00174) + \frac{-4ql^4 + 16ql^4 - ql^4}{6144}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00174) + \frac{11ql^4}{6144} \quad Y_{D1} = \frac{EI_x * (-0,00174) + \frac{11ql^4}{6144}}{EI_x}$$

$$Y_{D1} = \frac{(2 \times 10^6) * (57,35) * (-0,00174) + \frac{11 * (19,50) * (140)^4}{6144}}{(2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{D1} = \frac{1,32 \times 10^7}{1,14 \times 10^8} \quad Y_{D1} = 0,115 \text{ cm}$$

2.5.4 Solución para cuando $\varphi = 0,5$.

Los apoyos correspondientes a los eslabones no se comportan ni como Articulaciones Rígidas ni como Empotramientos Rígidos sino que poseen una elasticidad intermedia. Se analizará que ocurre si el coeficiente de rigidez de los empotramientos toma un valor intermedio, digamos $\varphi = 0,5$.

La pendiente en el origen tomará un valor intermedio:

$$EI_x \theta_B = EI_x \theta_{A1} - M_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} - \frac{q \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^3}{6} \quad (2.47)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{0,5ql^2}{48} \left(\frac{l}{2}\right) - \frac{3,5ql}{16} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6} \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{0,5ql^3}{96} - \frac{3,5ql^3}{128} + \frac{ql^3}{48}$$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{2ql^3 - 10,5ql^3 + 16ql^3}{384}$$

$$EI_x \theta_{A1} = \frac{7,5ql^3}{384}$$

$$\theta_{A1} = \frac{7,5ql^3}{384EI_x}$$

$$\theta_{A1} = \frac{7,5 * (19,50) * (140)^3}{384 * (2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$\theta_{A1} = \frac{4,01 \times 10^8}{4,40 \times 10^{10}}$$

$$\theta_{A1} = 0,00911 \text{ rad}$$

En la Fig. 2.21 se muestran los Diagramas para este caso.

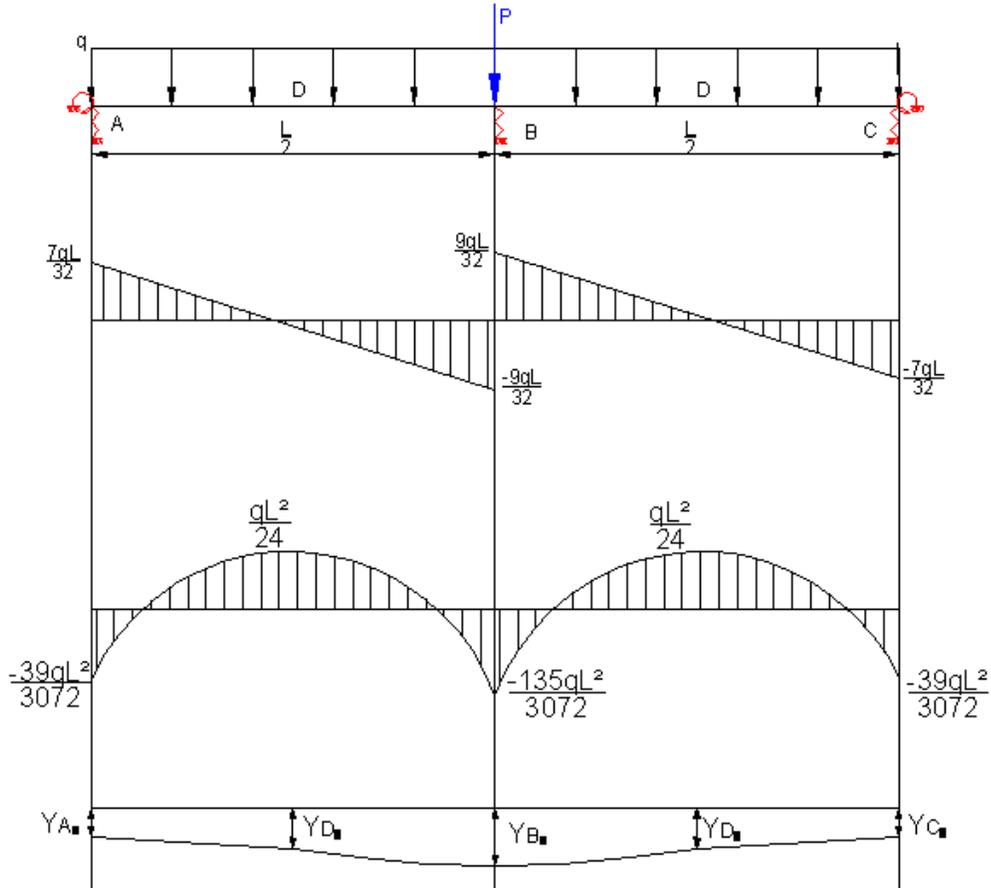


Fig. 2.21 Diagramas de Fuerzas de Cortante, Momentos Flectores y desplazamientos para Empotramientos Elásticos ($\phi = 0.5$)

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A1} = -C_A * R_{A1} \quad (2.48)$$

$$y_{A1} = -\left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg}f/cm\right) * \frac{3,5 * (19,50) * (140)}{16} \quad y_{A1} = -0,00305 \text{ cm}$$

$$y_{B1} = -C_B * R_{B1} \quad (2.49)$$

$$y_{B1} = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg}f/cm\right) * \frac{8 * (11965,05) + 4,5 * (19,50) * (140)}{8} \quad y_{B1} = -0,202 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A1} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^3}{6} - \frac{q \left(\frac{l}{4} - 0\right)^4}{24} \quad (2.50)$$

Siendo $z = \frac{l}{4}$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00305) + EI_x * \left(\frac{7,5ql^3}{384EI_x}\right) \frac{l}{4} - \frac{0,5ql^2 \left(\frac{l}{4}\right)^2}{48} + \frac{4,5ql \left(\frac{l}{4}\right)^3}{16} - \frac{q \left(\frac{l}{4}\right)^4}{24}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00305) + EI_x * \left(\frac{7,5ql^3}{384EI_x}\right) \frac{l}{4} - \frac{0,5ql^4}{768} + \frac{4,5ql^4}{1024} - \frac{q \left(\frac{l}{4}\right)^4}{24}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00305) + EI_x * \left(\frac{7,5ql^3}{384EI_x}\right) \frac{l}{4} - \frac{0,5ql^4}{1536} + \frac{4,5ql^4}{6144} - \frac{ql^4}{6144}$$

$$EI_x Y_{D1} = EI_x * (-0,00305) + EI_x * \left(\frac{7,5ql^4}{1536EI_x}\right) + \frac{4,5ql^4 - 2ql^4 - ql^4}{6144}$$

$$Y_{D1} = (-0,00305) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{7,5ql^4 + 1,5ql^4}{6144}\right)$$

$$Y_{D1} = (-0,00305) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{9ql^4}{6144}\right) \quad Y_{D1} = (-0,00305) + \frac{9ql^4}{6144 EI_x}$$

$$Y_{D1} = (-0,00305) + \frac{9 * (19,50) * (140)^4}{6144 * (2 \times 10^6) * (57,35)} \quad Y_{D1} = (-0,00305) + \frac{6,74 \times 10^{10}}{7,047 \times 10^{11}}$$

$$Y_{D1} = (-0,00305) + 0,0956 \quad Y_{D1} = 0,0925 \text{ cm}$$

2.5.5 Análisis de los Resultados.

El coeficiente de carga dinámica como se conoce depende del desplazamiento estático del punto de impacto. En el caso analizado el impacto se produce directamente encima de un apoyo, en este caso el desplazamiento estático de dicho punto no dependerá de la rigidez de los apoyos correspondientes a los eslabones. Así por ejemplo para $\varphi = 0$, $Y_B = 0,20$ cm, Para $\varphi = 1$, $Y_B = 0,199$ cm y para $\varphi = 0,5$, $Y_B = 0,202$ cm. Las pequeñas diferencias son por aproximaciones en los cálculos pero no por diferencias esenciales. Sin embargo el hecho de que los eslabones puedan comportarse más elásticos que un empotramiento rígido si reduce sensiblemente el momento que soportan. Así para $\varphi = 1$, $M_A = -q L^2/48 = -0,021 qL^2$ y para $\varphi = 0,5$, $M_A = -39q L^2/3072 = -0,0127 qL^2$, o sea, casi se reduce a la mitad en momento en el empotramiento. Este momento para el eslabón es un momento torsor que crea tensiones de torsión. O sea, la elasticidad de los apoyos reducirá la magnitud de las tensiones y aumentará la vida. Cualquier disposición de los apoyos que reduzca el coeficiente de carga dinámica y el momento en el empotramiento favorecerá la resistencia.

2.6 Influencia de la posición de las cargas de impacto en el coeficiente de carga dinámica y en el momento en el empotramiento.

2.6.1 Esquema de Análisis de la Tabilla con Apoyos Elásticos y las Cargas a considerar.

Para ilustrar esta influencia se aplicará el procedimiento elaborado de solución de vigas hiperestáticas con apoyos elásticos y empotramientos elásticos se utilizará el mismo Esquema correspondiente a la ubicación inicial de las tablillas en el Transportador Alimentador TP1 (Fig. 2.22), pero en este caso para simplificar los análisis se excluirá la carga distribuida que no provoca gran acción dinámica y se considerará que son dos piedras las que impactan en una posición que no queda exactamente sobre una de las vigas de apoyo, sino en el centro del espacio entre dos apoyos.

Aquí el desplazamiento estático y por consiguiente la acción dinámica no sólo depende de la elasticidad de los apoyos, sino fundamentalmente de la rigidez a la flexión de las tablillas.

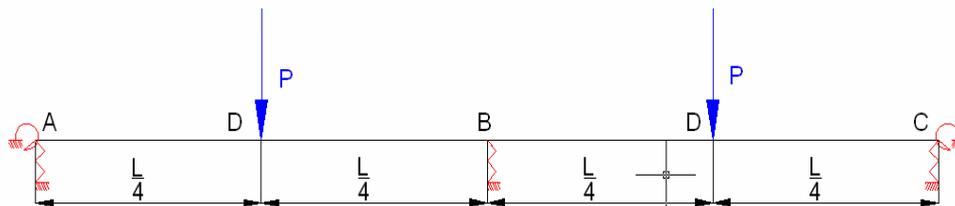


Fig. 2.22 Esquema de Análisis con Apoyos Elásticos de las Tablillas, sin carga distribuida y dos piedras grandes impactando en el centro de los entre apoyos.

2.6.2 Solución del Sistema Hiperestático.

Para poder resolver el problema, tal como se estableció en la Metodología General, se requiere considerar primero los apoyos como rígidos para hallar la reacción en el apoyo B y el momento flector en el empotramiento $M_A = M_{emp}$. Y se aplicará igual que en el caso anterior el Método de las Fuerzas.

En la Fig. 2.23 se muestra el Esquema de la Viga con Apoyos Rígidos.

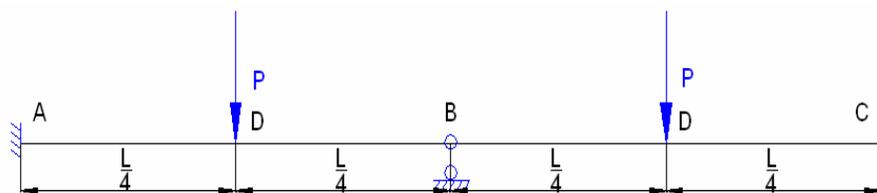


Fig. 2.23 Esquema de la viga hiperestática con apoyos rígidos.

Se solucionará esta viga hiperestática para hallar el momento en los empotramientos. Se aplicará igual que en el caso anterior el Método de las Fuerzas.

Como el sistema es simétrico con carga simétrica el cortante es cero en el plano de simetría. Se puede demostrar fácilmente que X_3 se puede despreciar, ya que no provoca flexión, solo tracción.

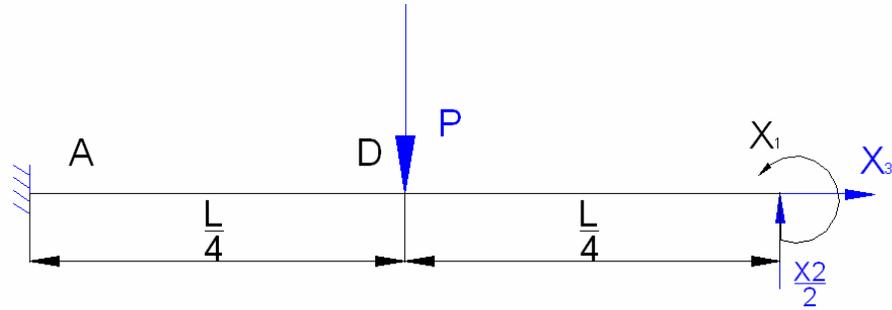


Fig. 2.24 Sistema equivalente de la viga hiperestática con apoyos rígidos aplicando propiedades de simetría.

Los diagramas unitarios de las incógnitas y el diagrama de la carga externa se muestran en la Fig. 2.25

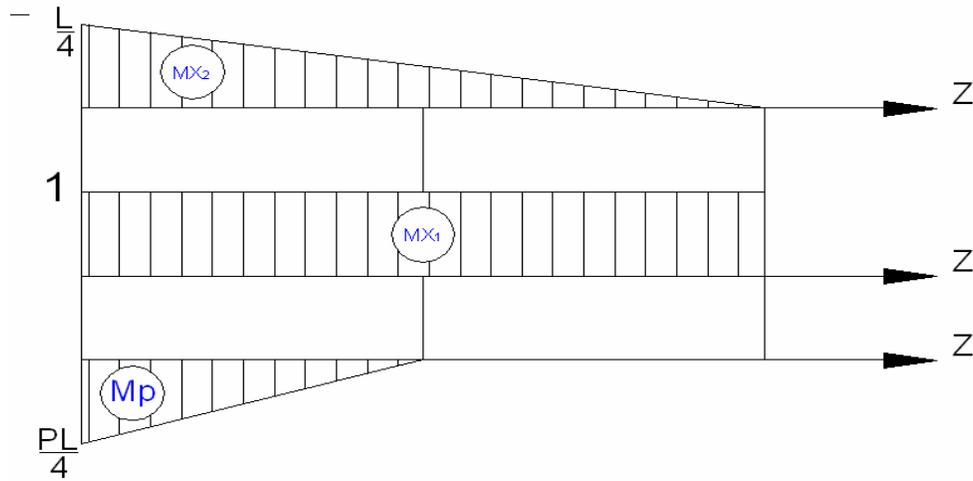


Fig. 2.25 Diagramas unitarios de las incógnitas y diagramas de las cargas externas.

Ahora son dos ecuaciones canónicas

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 + \delta_{1p} = 0 \quad (2.51)$$

$$\delta_{12} * X_1 + \delta_{22} * X_2 + \delta_{2p} = 0 \quad (2.52)$$

Calculando los coeficientes de las Ecuaciones Canónicas por la Regla de Vereschiaguin.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(1 * 1 * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l}{2} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l}{2EI_x}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * \frac{l}{4} * 1 * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^2}{16} \right) \quad \delta_{12} = \frac{l^2}{16EI_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^3}{96} \right) \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{96EI_x}$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} * 1 * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{4} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Pl^2}{32} \right) \quad \delta_{1p} = -\frac{Pl^2}{32EI_x}$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) * h * l \right)$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * \left(2\frac{l}{4} + \frac{l}{8} \right) * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{4} \right) \quad \delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * \left(\frac{5l}{8} \right) * \frac{Pl^2}{16} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{5Pl^3}{768} \right)$$

$$\delta_{2p} = -\frac{5Pl^3}{768EI_x}$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.51)

$$\frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{16EI_x} * X_2 + \left(-\frac{Pl^2}{32EI_x} \right) = 0 \quad \frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{16EI_x} * X_2 = \frac{Pl^2}{32EI_x}$$

$$16X_1 + 2lX_2 = Pl \quad (2.53)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.52)

$$\frac{l^2}{16EI_x} X_1 + \frac{l^3}{96EI_x} * X_2 + \left(-\frac{5Pl^3}{768EI_x} \right) = 0 \quad \frac{l^2}{16EI_x} X_1 + \frac{l^3}{96EI_x} * X_2 = \frac{5Pl^3}{768EI_x}$$

$$48X_1 + 8lX_2 = 5Pl \quad (2.54)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (2.53) y (2.54). Multiplicando la Ec. (2.53) x (-4)

$$16X_1 + 2lX_2 = Pl \quad \times (-4)$$

$$64X_1 - 8lX_2 = -4Pl$$

Sumando con la Ec. (2.54)

$$48X_1 + 8lX_2 = 5Pl$$

$$- 16 X_1 = Pl$$

Se obtiene:

$$X_1 = -\frac{Pl}{16}$$

Sustituyendo X_1 en (2.53)

$$16\left(-\frac{Pl}{16}\right) + 2lX_2 = Pl$$

$$-Pl + 2lX_2 = Pl$$

Se obtiene:

$$X_2 = \frac{2Pl}{2l}$$

$$X_2 = P$$

Calculando el momento de empotramiento:

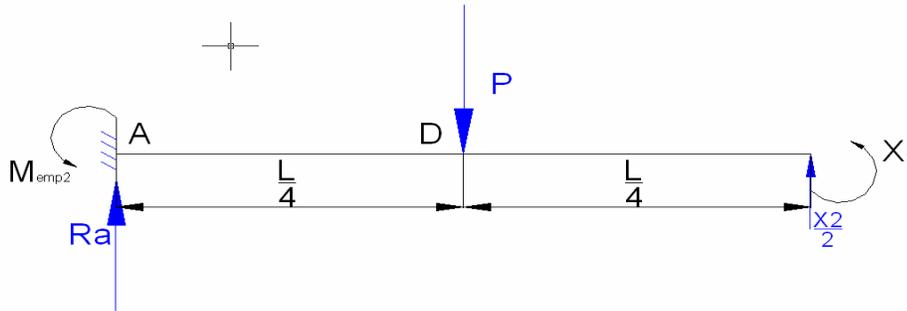


Fig. 2.26 Diagrama de fuerzas de la viga hiperestática para calcular M_{emp} .

$$\sum Ma = 0$$

$$M_{emp2} - \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{16} + \frac{Pl}{4} = 0$$

$$M_{emp2} = \frac{Pl}{4} + \frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{4}$$

$$M_{emp2} = \frac{4Pl + Pl - 4Pl}{16}$$

$$M_{emp2} = \frac{Pl}{16}$$

Se analizará ahora el comportamiento considerando la elasticidad de los apoyos. Para resolver esta viga hiperestática se aplicará también como se vio el Método de las Fuerzas

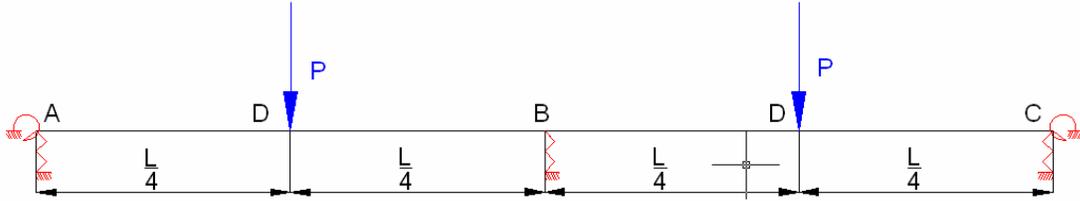


Fig. 2.27 Esquema de Análisis utilizando Apoyos y Empotramientos Elásticos.

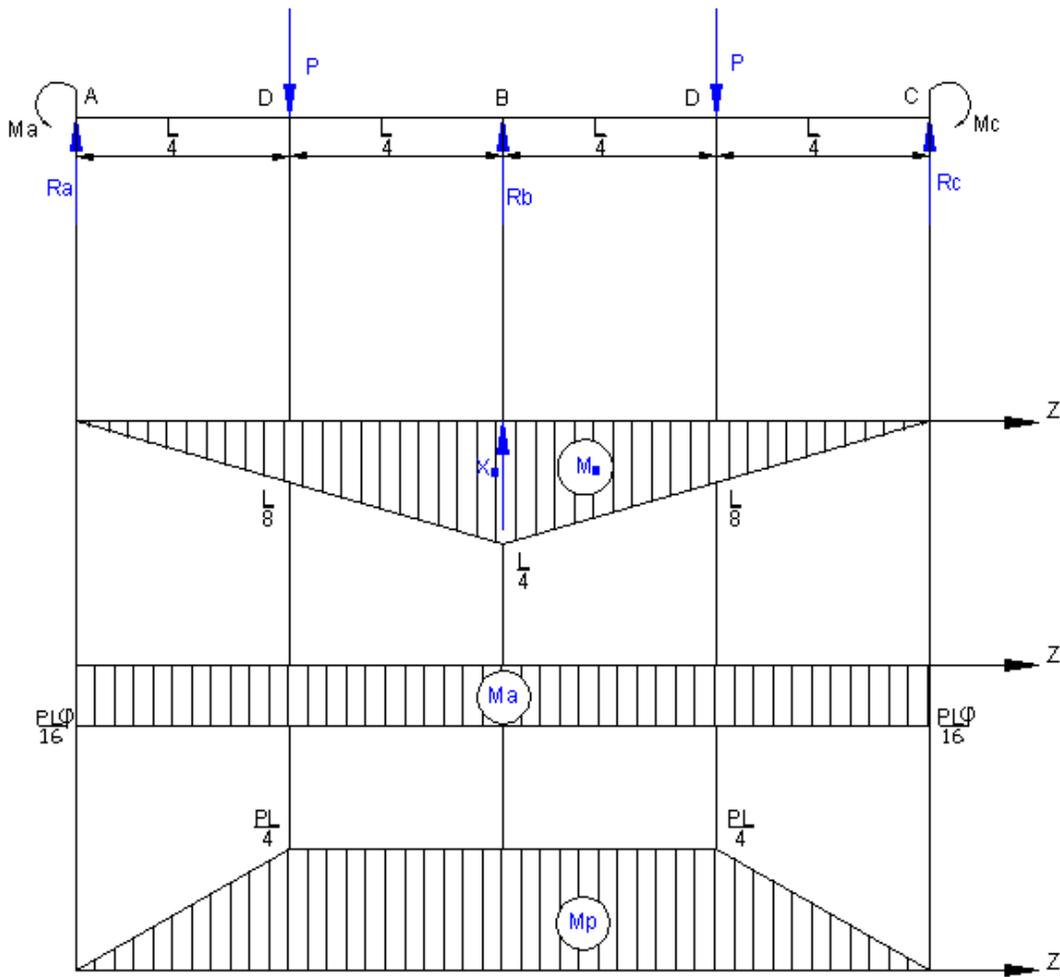


Fig. 2.28 Diagrama unitario de la incógnita $X_1 = R_B$ y de las cargas.

Cálculo de reacciones utilizando el método de las fuerzas. Ahora solo se tiene una ecuación canónica

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{1p} = 0 \quad (2.55)$$

Los coeficientes de la Ecuación:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{2} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}$$

$$\delta_{1p} = \left[2 \left(\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} * (h_1 + h_2) * \bar{h} * l \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} * \left(\frac{l}{4} * \frac{Pl\varphi}{16} * \frac{l}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} * \frac{l}{8} * \frac{Pl}{4} \right) + \left(-\frac{1}{2} * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{4} * \left(\frac{l}{8} + \frac{l}{4} \right) \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI} \left[\frac{Pl\varphi}{256} - \frac{Pl}{384} - \frac{3Pl}{256} \right] = \frac{2}{EI} \left[\frac{3Pl^3\varphi - 2Pl - 9Pl}{768} \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI} \left[\frac{3Pl^3\varphi - 2Pl - 9Pl}{768} \right] = \frac{2}{EI} \left[\frac{3Pl^3\varphi - 11Pl}{768} \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2Pl^3}{768EI} (3\varphi - 11) \quad \delta_{1p} = -\frac{Pl^3}{384EI} (11 - 3\varphi)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.55), se obtiene:

$$\frac{l^3}{48EI} * X_1 + \left(-\frac{Pl^3}{384EI} (11 - 3\varphi) \right) = 0$$

$$\frac{l^3}{48EI} * X_1 = \frac{Pl^3}{384EI} (11 - 3\varphi) \quad X_1 = \frac{P}{8} * (11 - 3\varphi) = R_{B2} \quad (2.56)$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en el eje y se obtiene

$$\sum F_y = Ra + Rb - P - P + Rc$$

$$Ra + Rb - P - P + Rc = 0$$

$$2Ra + Rb - 2P = 0$$

$$2Ra = 2P - Rb$$

$$Ra = P - \frac{Rb}{2}$$

$$Ra = P - \frac{X_1}{2} \tag{2.57}$$

Sustituyendo $X_1 = R_{B2}$ en ecuación (2.57)

$$R_{A2} = P - \frac{\frac{P}{8} * (11 - 3\varphi)}{2} \qquad R_{A2} = P - \frac{P}{16} * (11 - 3\varphi) \qquad R_{A2} = \frac{16P - 11P + 3P\varphi}{16}$$

$$R_{A2} = \frac{P}{16} * (5 + 3\varphi) \tag{2.58}$$

2.6.3 Solución para cuando $\varphi = 0$.

Cálculo de flecha en los apoyos y en el lugar de impacto y la pendiente en el origen.

Calculo de la pendiente en el origen:

$$EI_x \theta_{B2} = EI_x \theta_{A2} - M_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} - \frac{P \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^2}{2} \tag{2.59}$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A2} = Ma_2 \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{Ra_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} + \frac{P \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A2} = - \frac{\left(\frac{5P}{16} \right) * \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} + \frac{P^1 \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A2} = - \frac{5Pl^2}{128} + \frac{P^1 l^2}{32} \quad EI_x \theta_{A2} = \frac{-5Pl^2 + 4Pl^2}{128} \quad EI_x \theta_{A2} = \frac{-Pl^2}{128}$$

$$EI_x \theta_{A2} = \frac{-Pl^2}{128} \tag{2.60}$$

$$\theta_a = \frac{-Pl^2}{128EI_x} \quad \theta_a = \frac{-(5982,525) * (140)^2}{128(2 \times 10^6) * (57,35)} \quad \theta_a = - \frac{117257490}{1,468 \times 10^{10}}$$

$$\theta_a = -0,00798 \text{ rad}$$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A2} = -C_A * R_{A2}$$

$$y_{A2} = - \left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm} \right) * \frac{5(5982,525)}{16} \quad y_{A2} = -0,00478 \text{ cm}$$

$$y_{B2} = -C_B * R_{B2}$$

$$y_{B2} = - \left(15 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm} \right) * \frac{22(5982,525)}{16} \quad y_{B2} = -0,12 \text{ cm}$$

El desplazamiento en el punto de impacto:

$$EI_x Y_{D2} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^2}{2} + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^3}{6}$$

$$\text{Siendo } z = \frac{l}{4}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x Y_{A2} + EI_x \theta_{A2} \frac{l}{4} + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00478) + EI_x * \left(\frac{-Pl^2}{128EI_x} \right) \frac{l}{4} + \frac{\frac{5P}{16} \left(\frac{l}{4} - 0 \right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00478) + EI_x * \left(\frac{-Pl^3}{512EI_x} \right) + \frac{5Pl^3}{6144}$$

$$EI_x Y_{D2} = -0,00478 + \frac{1}{EI_x} * \left(\frac{-12Pl^3 + 5Pl^3}{6144} \right) \quad (2.61)$$

$$Y_{D2} = -0,00478 - \frac{Pl^3}{6144EI_x} \quad Y_{D2} = -0,00478 - \frac{(5982,525) * (140)^3}{6144(2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{D2} = -0,00478 - \frac{(5982,525) * (140)^3}{6144(2 \times 10^6) * (57,35)} \quad Y_{D2} = -0,00478 - \frac{1,6 \times 10^{10}}{7,04 \times 10^{13}}$$

$$Y_{D2} = -0,00478 - 0,00227 \quad Y_{D2} = -0,00705 \text{ cm}$$

Los Diagramas de Fuerza de Cortante, Momentos Flectores y Desplazamientos para el caso analizado utilizando Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\varphi = 0$ se muestran en la Fig. 2.29

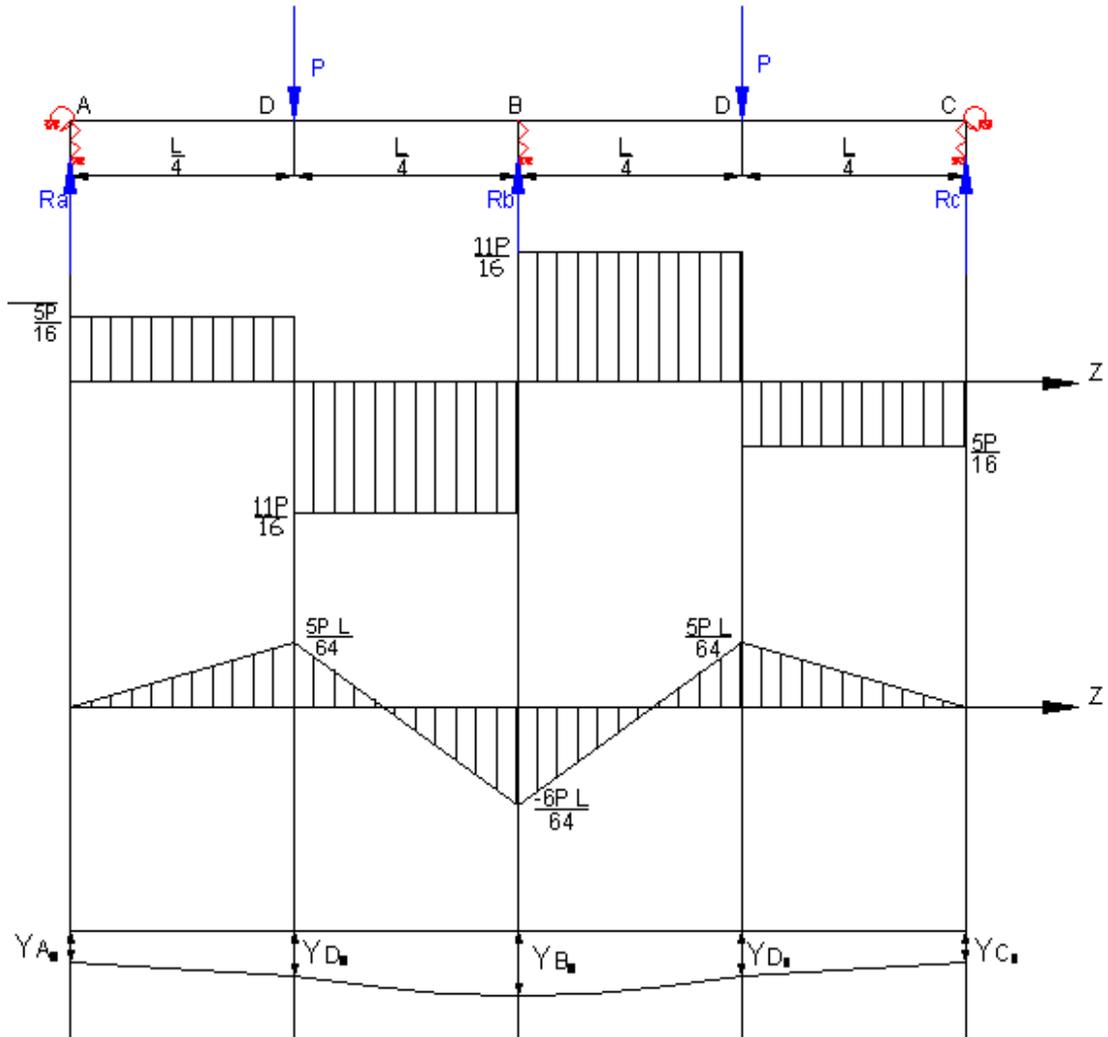


Fig. 2.29 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\varphi = 0$

2.6.4 Solución para cuando $\varphi = 1$.

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden obtener los diagramas de Fuerzas de Cortante, Momentos Flectores y Desplazamientos para $\varphi = 1$, equivalente a que la viga tuviera empotramientos rígidos.

Calculando la pendiente en el origen y la flecha en los apoyos y en el lugar de impacto.

La pendiente en el origen:

$$EI_x \theta_{B2} = EI_x \theta_{A2} - M_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} - \frac{P \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^2}{2} \quad (2.62)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A2} = \left(\frac{Pl}{16} \right) \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} + \frac{P \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A2} = \frac{Pl^2}{32} - \frac{Pl^2}{16} + \frac{Pl^2}{32} \quad EI_x \theta_{A2} = \frac{Pl^2 - 2Pl^2 + Pl^2}{32} \quad EI_x \theta_{A2} = 0$$

Como se aprecia el resultado es correcto pues en un empotramiento rígido la flecha es cero.

Calculando el desplazamiento de los apoyos:

$$y_{A2} = -C_A * R_{A2}$$

$$y_{A2} = - \left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm} \right) * \frac{5982,525}{2} \quad y_{A2} = -0,00765 \text{ cm}$$

$$y_{B2} = -C_B * R_{B2}$$

$$y_{B2} = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg/cm}^2\right) * 5982,525 \quad y_{B2} = -0,08 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^3}{6}$$

Siendo $z = \frac{l}{4}$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00765) - \frac{Pl \left(\frac{l}{4}\right)^2}{16} + \frac{P \left(\frac{l}{4}\right)^3}{2}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00765) - \frac{Pl^3}{512} + \frac{Pl^3}{768}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00765) - \frac{3Pl^3 + 2Pl^3}{1536}$$

$$Y_{D2} = \frac{EI_x * (-0,00765) - \frac{Pl^3}{1536}}{EI_x}$$

$$Y_{D2} = \frac{(2 \times 10^6) * (57,35) * (-0,00765) - \frac{(5982,525) * (140)^3}{1536}}{(2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{D2} = \frac{-8,77 \times 10^5 - 1,068 \times 10^7}{1,14 \times 10^8}$$

$$Y_{D2} = \frac{-1,15 \times 10^7}{1,14 \times 10^8}$$

$$Y_{D2} = 0,10 \text{ cm}$$

Los Diagramas de Fuerzas de Cortante, Momentos Flectores y Desplazamientos para este caso con $\varphi = 1$ se muestran en la Fig. 2.30.

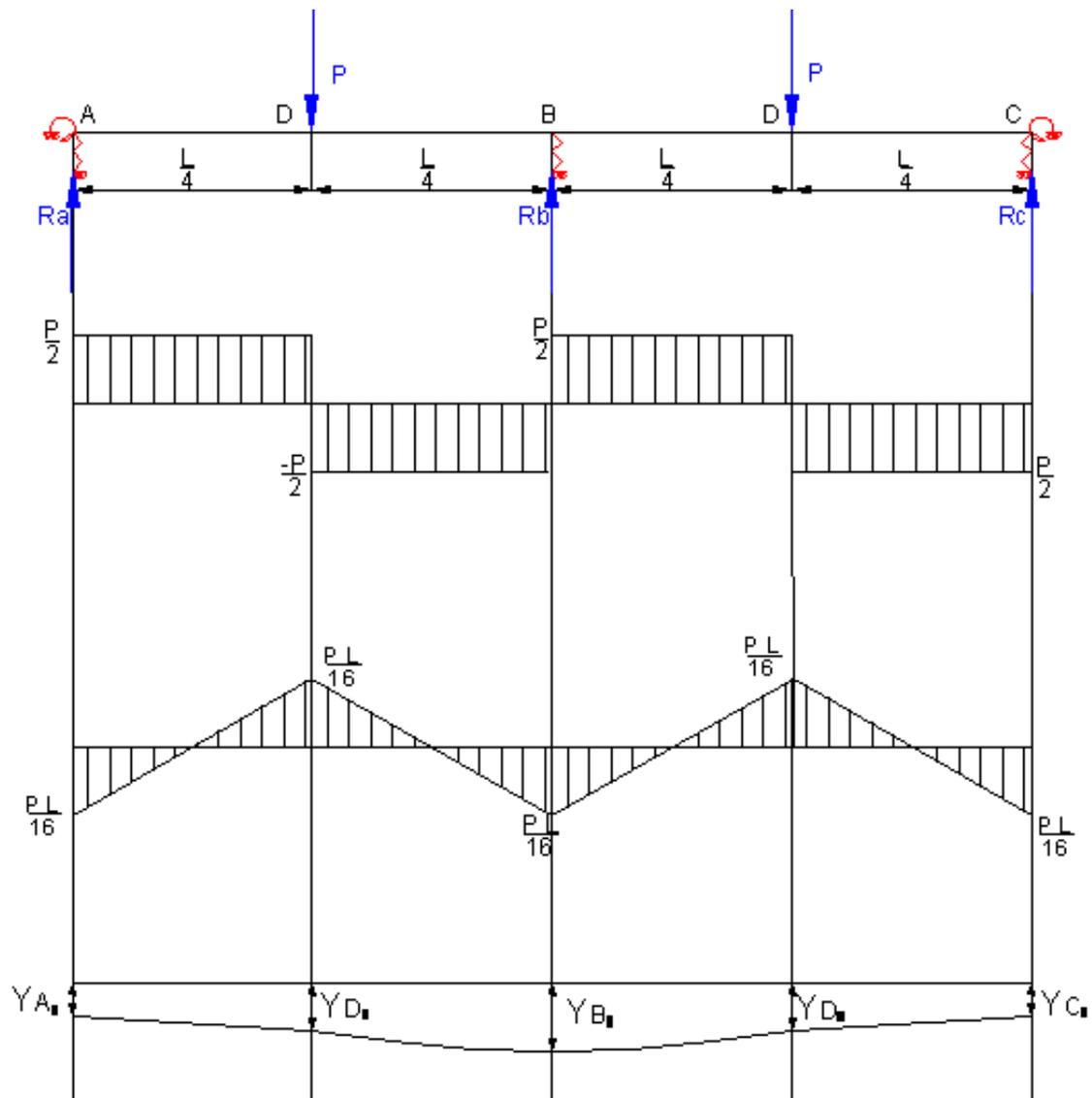


Fig. 2.30 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\varphi = 1$

2.6.5 Solución para cuando $\varphi = 0,5$.

Calculo de la pendiente en el origen

$$EI_x \theta_{B2} = EI_x \theta_{A2} - M_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} - \frac{P \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^2}{2} \quad (2.63)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A2} = \frac{Pl}{32} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{6,5P}{16} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{P \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A2} = \frac{Pl^2}{64} - \frac{6,5Pl^2}{128} + \frac{Pl^2}{32} \quad EI_x \theta_{A2} = \frac{2Pl^2 - 6,5Pl^2 + 4Pl^2}{128}$$

$$\theta_{A2} = \frac{-0,5Pl^2}{128EI_x} \quad (2.64)$$

$$\theta_{A2} = \frac{-0,5 * (5982,525) * (140)^2}{128(2 \times 10^6) * (57,35)} \quad \theta_{A2} = \frac{-5,86 \times 10^7}{1,468 \times 10^{10}} \quad \theta_{A2} = 0,00399 \text{ rad}$$

Como se aprecia la pendiente en el origen con empotramiento elástico da un valor intermedio entre el Apoyo Articulado Rígido ($\varphi = 0$), que dio $\theta_a = -0,00798 \text{ rad}$ y el empotramiento rígido ($\varphi = 1$) que dio $\theta_{A2} = 0$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A2} = -C_A * R_{A2}$$

$$y_{A2} = - \left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg/cm} \right) * \frac{6,5 * (5982,525)}{16} \quad y_{A2} = -0,00622 \text{ cm}$$

$$y_{B2} = -C_B * R_{B2}$$

$$y_{B2} = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg/cm}^2\right) * \frac{19 * (5982,525)}{16} \quad y_{B2} = -0,10 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} - \frac{M_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A2} \left(\frac{l}{4} - 0\right)^3}{6} \quad \text{Siendo } z = \frac{l}{4}$$

$$EI_x Y_{D2} = EI_x * (-0,00622) + EI_x * \left(\frac{-0,5Pl^2}{128EI_x}\right) \frac{l}{4} - \frac{Pl \left(\frac{l}{4}\right)^2}{32} + \frac{6,5P \left(\frac{l}{4}\right)^3}{16}$$

$$Y_{D2} = (-0,00622) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-0,5Pl^3}{512}\right) - \frac{Pl^3}{1024} + \frac{6,5Pl^3}{6144}$$

$$Y_{D2} = (-0,00622) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-6Pl^3 - 6Pl^3 + 6,5Pl^3}{6144}\right)$$

$$Y_{D2} = (-0,00622) + \frac{1}{(2 \times 10^6) * (57,35)} \left(\frac{-6,5 * (5982,525) * (140)^3}{6144}\right)$$

$$Y_{D2} = -0,00622 - \frac{1,46 \times 10^7}{1,14 \times 10^8} \quad Y_{D2} = -0,00622 - 0,12 \quad Y_{D2} = -0,134 \text{ cm}$$

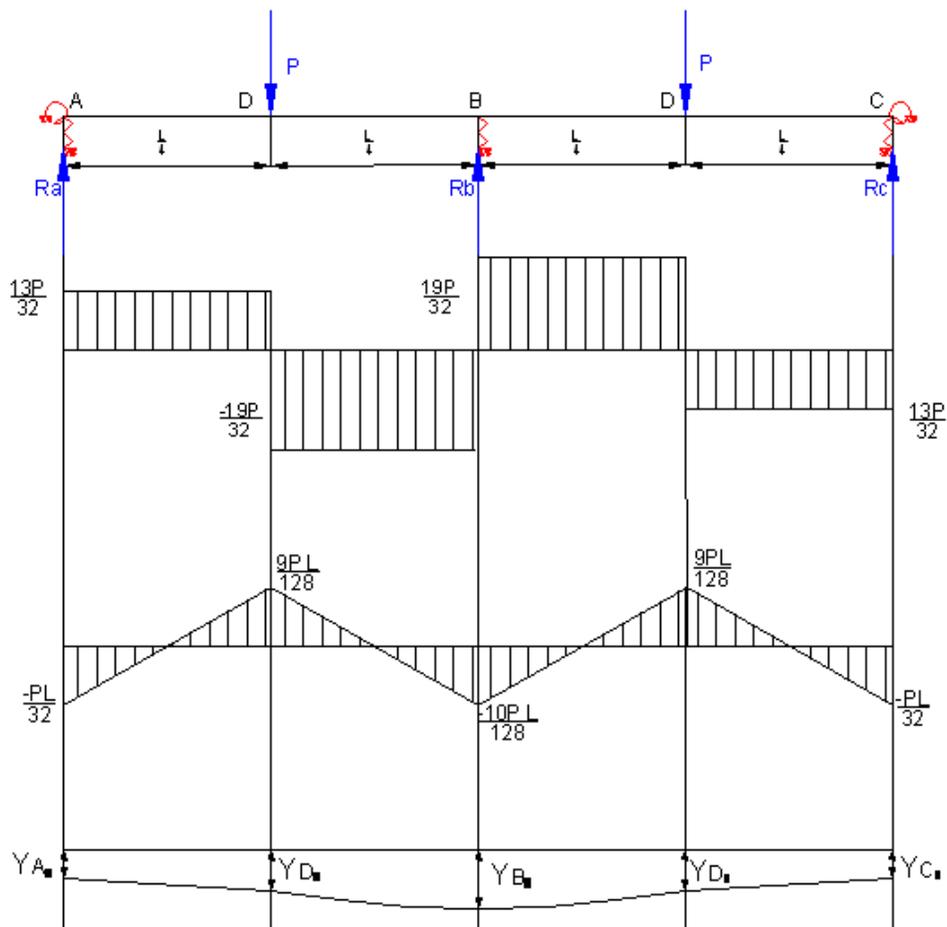


Fig. 2.31 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\varphi = 0,5$

2.6.6 Análisis de los Resultados.

El coeficiente de carga dinámica como se conoce depende del desplazamiento estático del punto de impacto. En el caso analizado el impacto no se produce directamente encima de un apoyo, en este caso el desplazamiento estático de dicho punto si dependerá de la rigidez de los apoyos correspondientes a los eslabones. Así por ejemplo la pendiente en el origen con Empotramiento Elástico da un valor intermedio entre el Apoyo Articulado Rígido ($\varphi = 0$), que dio $\theta_a = -0,00798 \text{ rad}$ y el empotramiento rígido ($\varphi = 1$) que dio $\theta_{A2} = 0$, y para ($\varphi = 0,5$), dio $\theta_a = -0,00399 \text{ rad}$

Para $\varphi = 1$, $Y_D = 0,1\text{cm}$ y para $\varphi = 0,5$ $Y_B = 0,13\text{ cm}$. El desplazamiento estático del punto de impacto en este caso dio menor por lo que este caso empeora la situación del coeficiente de carga dinámica. Sin embargo el hecho de que los eslabones puedan comportarse más elásticos que un empotramiento rígido, igual que en el caso anterior, si reduce sensiblemente el momento que soportan. Así para $\varphi = 1$, $M_A = - PL/16$ y para $\varphi = 0,5$, $M_A = - PL/32 = - 0,0127 qL^2$, o sea, se reduce a la mitad en momento en el empotramiento.

2.7 Influencia de la posición y número de los apoyos elásticos.

2.7.1 Esquema de Análisis de la Tabilla con Apoyos Elásticos y las Cargas a considerar.

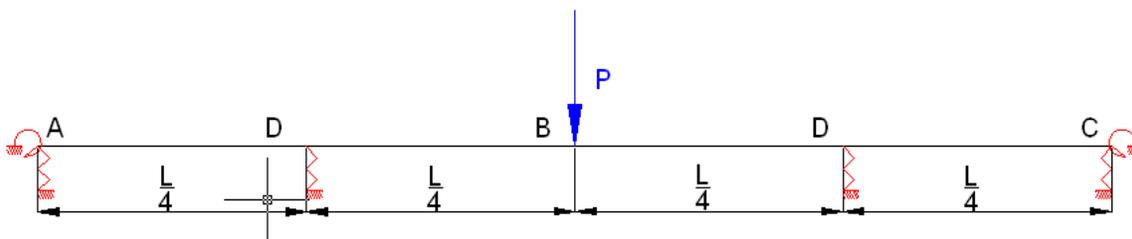


Fig. 2.32 Esquema de Análisis con dos Empotramientos Elásticos y dos Apoyos Elásticos de las Tablillas, sin carga distribuida y una sola piedra grande impactando en el centro de la luz.

2.7.2 Solución del Sistema Hiperestático.

Se seguirá la misma Metodología que en los casos anteriores.

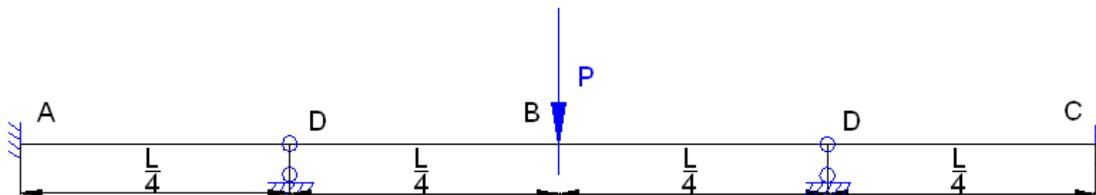


Fig. 2.33 Esquema de la viga hiperestática con apoyos rígidos.

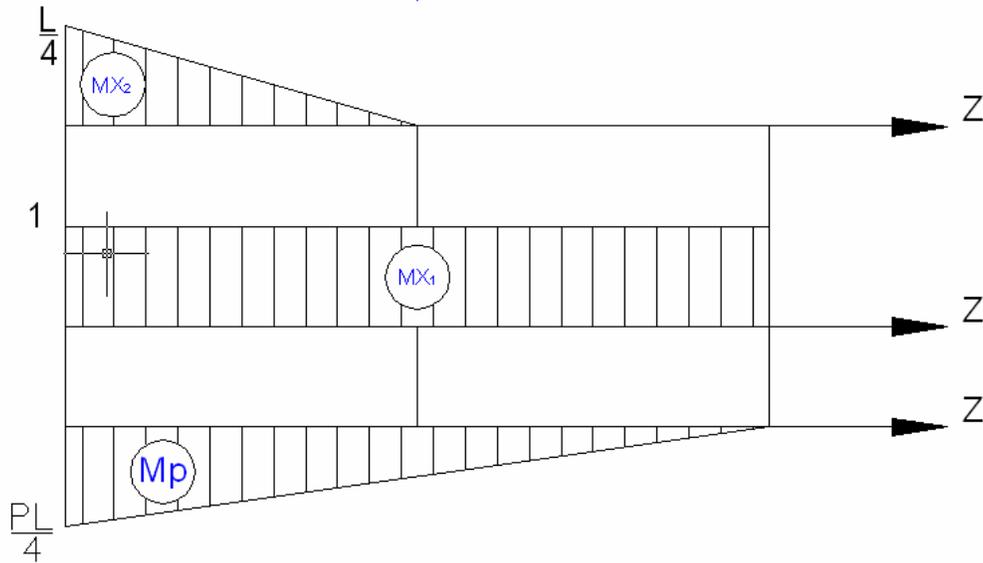


Fig. 2.34 Diagramas unitarios de las incógnitas y de la carga.

Ecuaciones canónicas

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 + \delta_{1p} = 0 \tag{2.65}$$

$$\delta_{12} * X_1 + \delta_{22} * X_2 + \delta_{2p} = 0 \tag{2.66}$$

Coefficientes de las Ecuaciones.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(1 * 1 * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l}{2} \right) \qquad \delta_{11} = \frac{l}{2EI_x}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} * \frac{l}{4} * 1 * \frac{l}{4} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^2}{32} \right) \quad \delta_{12} = \frac{l^2}{32EI_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l^3}{192} \right) \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{192EI_x}$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right)$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} * 1 * \frac{Pl}{4} * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Pl^2}{16} \right) \quad \delta_{1p} = -\frac{Pl^2}{16EI_x}$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * (\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2) * h * l \right)$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * \left(\frac{Pl}{8} + 2\frac{Pl}{4} \right) * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} \right)$$

$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} * \left(\frac{5l}{8} \right) * \frac{Pl^2}{16} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{5Pl^3}{768} \right) \quad \delta_{2p} = -\frac{5Pl^3}{768EI_x}$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.65)

$$\frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{32EI_x} * X_2 + \left(-\frac{Pl^2}{16EI_x} \right) = 0$$

$$\frac{l}{2EI_x} * X_1 + \frac{l^2}{32EI_x} * X_2 = \left(\frac{Pl^2}{16EI_x} \right) \quad \frac{X_1}{2} + \frac{l}{32} * X_2 = \left(\frac{Pl}{16} \right) \quad \frac{X_1}{2} + \frac{X_2 l}{32} = \left(\frac{Pl}{16} \right)$$

$$16X_1 + X_2 l = 2Pl \quad (2.67)$$

Sustituyendo los δ en la ecuación (2.66)

$$\frac{l^2}{32EI_x} * X_1 + \frac{l^3}{192EI_x} * X_2 + \left(-\frac{5Pl^3}{768EI_x} \right) = 0$$

$$\frac{l^2}{32EI_x} * X_1 + \frac{l^3}{192EI_x} * X_2 = \left(\frac{5Pl^3}{768EI_x} \right) \quad \frac{l^2}{32} * X_1 + \frac{l^3}{192} * X_2 = \left(\frac{5Pl^3}{768} \right)$$

$$\frac{X_1}{32} + \frac{X_2 l}{192} = \left(\frac{5Pl}{768} \right)$$

$$24X_1 + 4X_2 l = 5Pl \quad (2.68)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (2.67) y (2.68)

$$16X_1 + X_2 l = 2Pl \quad \times (3)$$

$$24X_1 + 4X_2 l = 5Pl \quad \times (-2)$$

Se obtiene y sumando entonces ambas ecuaciones:

$$48X_1 + 3X_2 l = 6Pl$$

$$48X_1 - 84X_2 l = -10Pl$$

$$-5X_2 l = -4Pl \quad X_2 = \frac{-4Pl}{-5l} \quad X_2 = \frac{4P}{5}$$

Sustituyendo X_2 en (2.67)

$$16X_1 + \left(\frac{4P}{5} \right) l = 2Pl \quad 16X_1 = 2Pl - \frac{4Pl}{5} \quad 16X_1 = \frac{10Pl - 4Pl}{5}$$

$$16X_1 = \frac{6Pl}{5} \quad X_1 = \frac{6Pl}{5 * 16} \quad X_1 = \frac{6Pl}{80} \quad X_1 = \frac{3Pl}{40}$$

Hallando el Momento en el empotramiento:

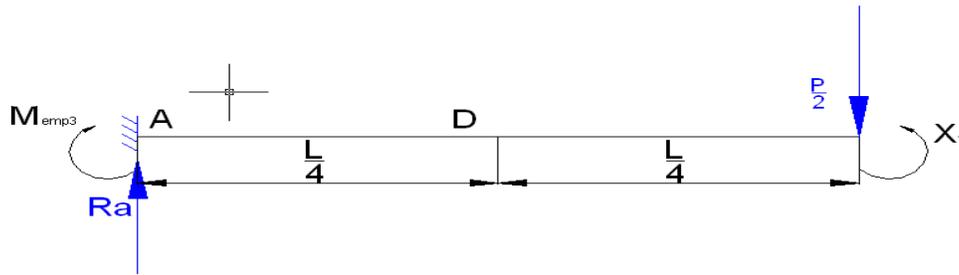


Fig. 2.35 Diagrama de fuerzas de la viga hiperestática para calcular M_{emp} .

Cálculo del momento de empotramiento

$$\sum M_a = 0$$

$$M_{emp2} - \frac{3Pl}{40} + \frac{P}{2} * \frac{l}{2} + \frac{4P}{5} * \frac{l}{4} = 0$$

$$M_{emp2} = \frac{3Pl}{40} - \frac{Pl}{4} + \frac{4Pl}{20} \qquad M_{emp2} = \frac{3Pl - 10Pl + 8Pl}{40} \qquad M_{emp2} = \frac{Pl}{40}$$

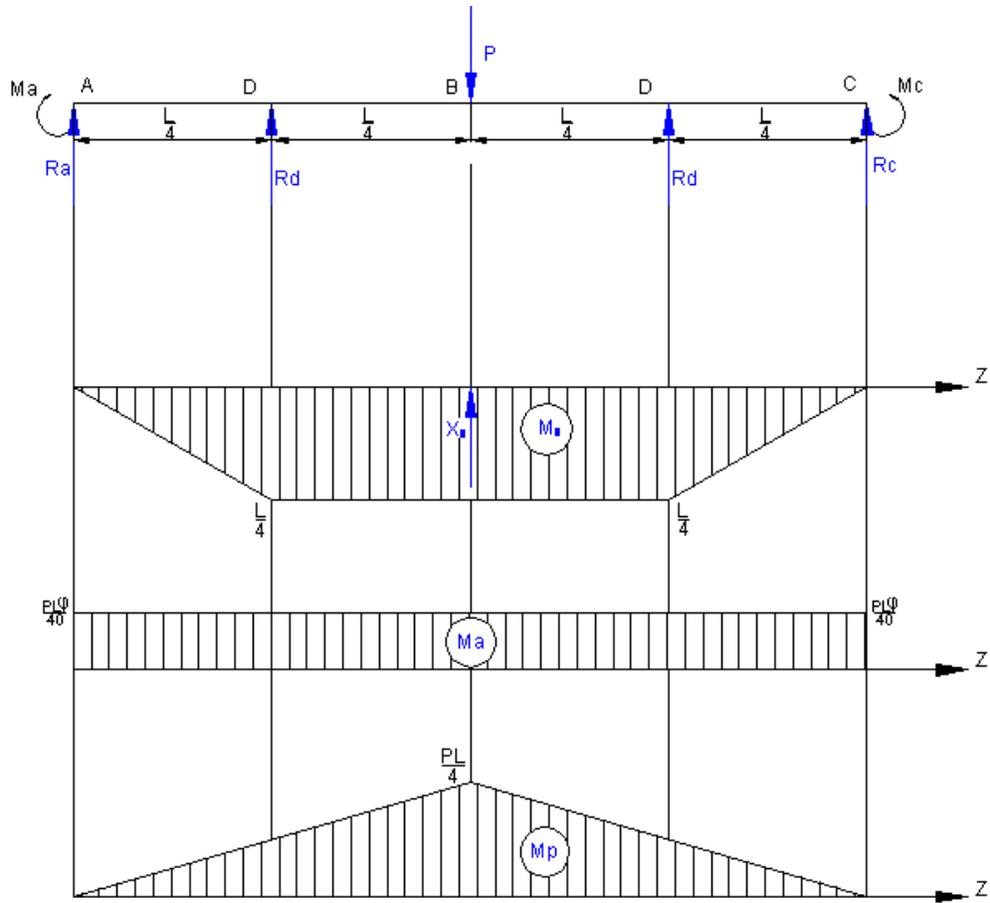


Fig. 2.36 Diagrama unitario de las incógnita \$X_1\$ y de las cargas.

Aplicando el Método de las Fuerzas. Ahora solo se tiene una ecuación canónica:

$$\delta_{11} * X_1 + \delta_{1p} = 0 \quad (2.69)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(h * \bar{h} * l \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} \right) + \left(\frac{l}{4} * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(\frac{l^3}{192} \right) + \left(\frac{l^3}{64} \right) \right] \quad \delta_{11} = \frac{2}{EI_x} \left[\frac{l^3 + 3l^3}{192} \right] \quad \delta_{11} = \frac{2}{EI_x} \left[\frac{4l^3}{192} \right] = \frac{8l^3}{192EI_x}$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{24EI_x}$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(-\frac{1}{3} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} * (h_1 + h_2) * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} * h * \bar{h} * l \right) + 2 \left(-h * \bar{h} * l \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(-\frac{1}{3} * \frac{l}{4} * \frac{Pl}{8} * \frac{l}{4} \right) + \left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{Pl}{8} + \frac{P^1l}{4} \right) * \frac{l}{4} * \frac{l}{4} \right) + \left(-\frac{1}{2} * \frac{l}{4} * \frac{Pl\varphi}{40} * \frac{l}{4} \right) + \left(-\frac{l}{4} * \frac{Pl\varphi}{40} * \frac{l}{4} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(-\frac{Pl^3}{384} \right) + \left(-\left(\frac{3Pl}{8} \right) * \frac{l^2}{32} \right) + \left(-\frac{Pl^3\varphi}{1280} \right) + \left(-\frac{Pl^3\varphi}{640} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(-\frac{Pl^3}{384} \right) + \left(-\frac{3Pl^3}{256} \right) - \left(\frac{Pl^3\varphi}{1280} \right) - \left(\frac{Pl^3\varphi}{640} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EI_x} \left[\left(\frac{-10Pl^3 - 45Pl^3 - 3Pl^3\varphi - 6Pl^3\varphi}{3840} \right) \right] = \frac{2}{EI_x} \left[\left(\frac{-55Pl^3 - 9Pl^3\varphi}{3840} \right) \right]$$

$$\delta_{1p} = \frac{2Pl^3}{3840EI_x} (-55 - 9\varphi) \quad \delta_{1p} = -\frac{Pl^3}{1920EI_x} (55 + 9\varphi)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.69)

$$\frac{l^3}{24EI_x} * X_1 + \left(-\frac{Pl^3}{1920EI_x} (55 + 9\varphi) \right) = 0$$

$$\frac{l^3}{24EI_x} * X_1 = \left(\frac{Pl^3}{1920EI_x} (55 + 9\varphi) \right) \quad \frac{X_1}{24} = \left(\frac{P}{1920} (55 + 9\varphi) \right)$$

$$80X_1 = P(55 + 9\varphi) \quad X_1 = \frac{P}{80} (55 + 9\varphi) = R_{D3} \quad (2.70)$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en el eje **y** se obtiene

$$\sum F_y = Ra + Rd - P + Rd + Rc$$

$$Ra + Rd - P + Rd + Rc = 0$$

$$2Ra + 2Rd - P = 0 \quad 2Ra = P - 2Rd \quad Ra = \frac{P}{2} - Rd$$

$$Ra = \frac{P}{2} - X_1 \quad (2.71)$$

Sustituyendo $X_1 = R_{B2}$ en ecuación (2.71)

$$R_{A3} = \frac{P}{2} - X_1 \quad R_{A3} = \frac{P}{2} - \frac{P}{80}(55 + 9\varphi)$$

$$R_{A3} = \frac{40P - 55P - 9P\varphi}{80} \quad R_{A3} = \frac{-15P - 9P\varphi}{80} \quad R_{A3} = -\frac{P}{80}(15 + 9\varphi)$$

2.7.3 Solución para cuando $\varphi = 0$.

La Constante de rigidez del apoyo D

$$C_D = \frac{1}{C_{v_D}} + \frac{1}{C(lam)_D} + \frac{1}{C_{v(inf)}} \quad (2.72)$$

$$C_D = \frac{1}{1,82 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}} + \frac{1}{1,92 \times 10^8 \text{ Kgf/cm}} + \frac{1}{68244,3 \text{ Kgf/cm}}$$

$$C_D = 1,5 \times 10^{-6} \text{ Kgf/cm}$$

C_D – coeficiente de rigidez del punto B

C_{v_D} - Coeficiente de rigidez del apoyo o viga B

$C_{v(inf)}$ - Coeficiente de rigidez de la viga inferior.

$C(lam)_D$ - Coeficiente de rigidez de la lámina.

$$Cv_D = \frac{Eac * d_D * B_C}{h_D} \quad (2.73)$$

$$Cv_D = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 1\text{cm} * 30\text{cm}}{33\text{cm}} \quad Cv_D = 1,82 \times 10^6 \text{ kgf/cm}$$

$$C(lam)_D = \frac{Eac * d_D * B_C}{l(lam)_B} \quad (2.74)$$

$$C(lam)_D = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 * 16\text{cm} * 30\text{cm}}{5\text{cm}} \quad C(lam)_D = 1,92 \times 10^8 \text{ Kgf/cm}$$

$$Cv(\text{inf}) = \frac{(192)EI_x}{L^3} \quad (2.75)$$

$$Cv(\text{inf}) = \frac{(192) * \left(2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2\right) * (3308\text{cm}^4)}{(265\text{cm})^3} \quad Cv(\text{inf}) = 68244,3\text{cm Kgf/cm}$$

Cálculo de la pendiente en el origen

$$EI_x \theta_{B3} = EI_x \theta_{A3} + M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right) + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)^2}{2} \quad (2.76)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A3} = Ma_2 \left(\frac{l}{2}\right) - \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{Ra_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{Rd \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} \quad EI_x \theta_{A3} = -\frac{\left(\frac{-15P}{80}\right) \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{55P}{80} \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{\left(\frac{-15Pl^2}{320}\right) \frac{55Pl^2}{1280}}{2} - \frac{55Pl^2}{2} \quad EI_x \theta_{A3} = \frac{15Pl^2}{640} - \frac{55Pl^2}{2560}$$

$$EI_x \theta_{A3} = \frac{60Pl^2 - 55Pl^2}{2560}$$

$$\theta_{A3} = \frac{5Pl^2}{2560EI_x} \quad (2.77)$$

$$\theta_{A3} = \frac{5 * (11965,05) * (140)^2}{2560 * (2 \times 10^6) * (57,35)} \quad \theta_{A3} = \frac{1,172 \times 10^9}{2,936 \times 10^{11}} \quad \theta_{A3} = 0,00000399 \text{ rad}$$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos:

$$y_{A3} = -C_A * R_{A3} \quad (2.78)$$

$$y_{A3} = -\left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg/cm}\right) * \frac{15 * (11965,05)}{80} \quad y_{A3} = -0,00574 \text{ cm}$$

$$y_{D3} = -C_D * R_{D3} \quad (2.79)$$

$$y_{D3} = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg/cm}\right) * \frac{55 * (11965,05)}{80} \quad y_{D3} = -0,123 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)^3}{6} \quad (2.80)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{4}\right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x * (-0,00574) + EI_x * \left(\frac{5Pl^2}{2560EI_x}\right) \frac{l}{4} + \frac{\left(\frac{-15P}{80}\right) \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{\frac{55P}{80} \left(\frac{l}{4}\right)^3}{6}$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) + \left(\frac{5Pl^3}{10240EI_x} \right) + \left(\frac{-15Pl^3}{640} \right) + \frac{55Pl^3}{5120}$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{5Pl^3}{10240} \right) - \frac{15Pl^3}{3840} + \frac{55Pl^3}{30720}$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{15Pl^3 - 120Pl^3 + 55Pl^3}{30720} \right)$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) - \frac{50Pl^3}{30720EI_x}$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) - \frac{50 * (11965,05) * (140)^3}{30720 * (2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{B3} = (-0,00574) - \frac{1,64 \times 10^{12}}{3,52 \times 10^{12}} \quad Y_{B3} = (-0,00574) - 0,46 \quad Y_{B3} = -0,47 \text{ cm}$$

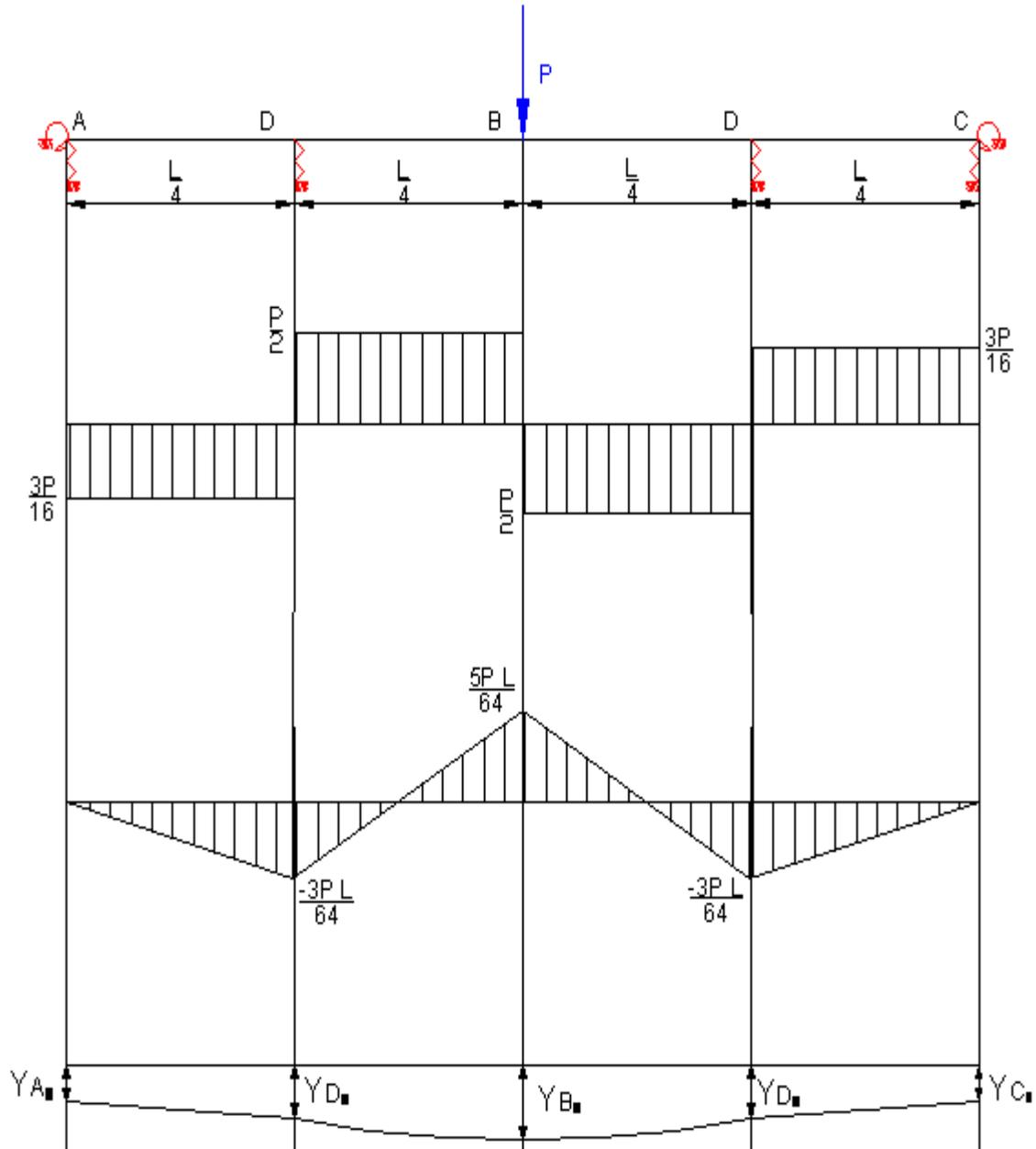


Fig. 2.37 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\varphi = 0$

2.7.4 Solución para cuando $\varphi = 1$.

Calculo de la pendiente en el origen:

$$EI_x \theta_{B3} = EI_x \theta_{A3} + M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^2}{2} \quad (2.81)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A3} = -M_{A3} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} - \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{Pl \left(\frac{l}{2} \right)}{40} - \frac{\left(\frac{-24P}{80} \right) \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} - \frac{64P \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{Pl^2}{80} - \frac{\left(\frac{-24Pl^2}{320} \right)}{2} - \frac{64Pl^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{Pl^2}{80} + \frac{24Pl^2}{640} - \frac{64Pl^2}{2560}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{-32Pl^2 + 96Pl^2 - 64Pl^2}{2560}$$

$$EI_x \theta_{A3} = 0$$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A3} = -C_A * R_{A3}$$

$$y_{A3} = -\left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg}f / \text{cm} \right) * \frac{24 * (11965,05)}{80} \quad y_{A3} = -0,00918 \text{ cm}$$

$$y_{D3} = -C_D * R_{D3}$$

$$y_d = -\left(15 \times 10^{-6} \text{ Kg}f / \text{cm} \right) * \frac{64 * (11965,05)}{80} \quad y_{D3} = -0,14 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^3}{6} \quad (2.82)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} \right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{4} \right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00918) + \frac{Pl \left(\frac{l}{2} \right)^2}{40} + \frac{-24P \left(\frac{l}{2} \right)^3}{80} + \frac{64P \left(\frac{l}{4} \right)^3}{80}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00918) + \frac{Pl^3}{2} + \frac{-24Pl^3}{6} + \frac{64Pl^3}{6}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00918) + \frac{Pl^3}{640} - \frac{24Pl^3}{3840} + \frac{64Pl^3}{30720}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00918) + \frac{48Pl^3 - 192Pl^3 + 64Pl^3}{30720}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00918) - \frac{80Pl^3}{30720} \quad Y_{B3} = \frac{EI_x (-0,00918) - \frac{80Pl^3}{30720}}{EI_x} \quad (2.84)$$

$$Y_{B3} = \frac{(2 \times 10^6) * (57,35) * (-0,00918) - \frac{80 * (11965,05) * (140)^3}{30720}}{(2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{B3} = \frac{(-1,15 \times 10^7) - 8,55 \times 10^7}{(2 \times 10^6) * (57,35)} \quad Y_{B3} = \frac{-9,7 \times 10^7}{1,14 \times 10^8} \quad Y_{B3} = -0,85 \text{ cm}$$

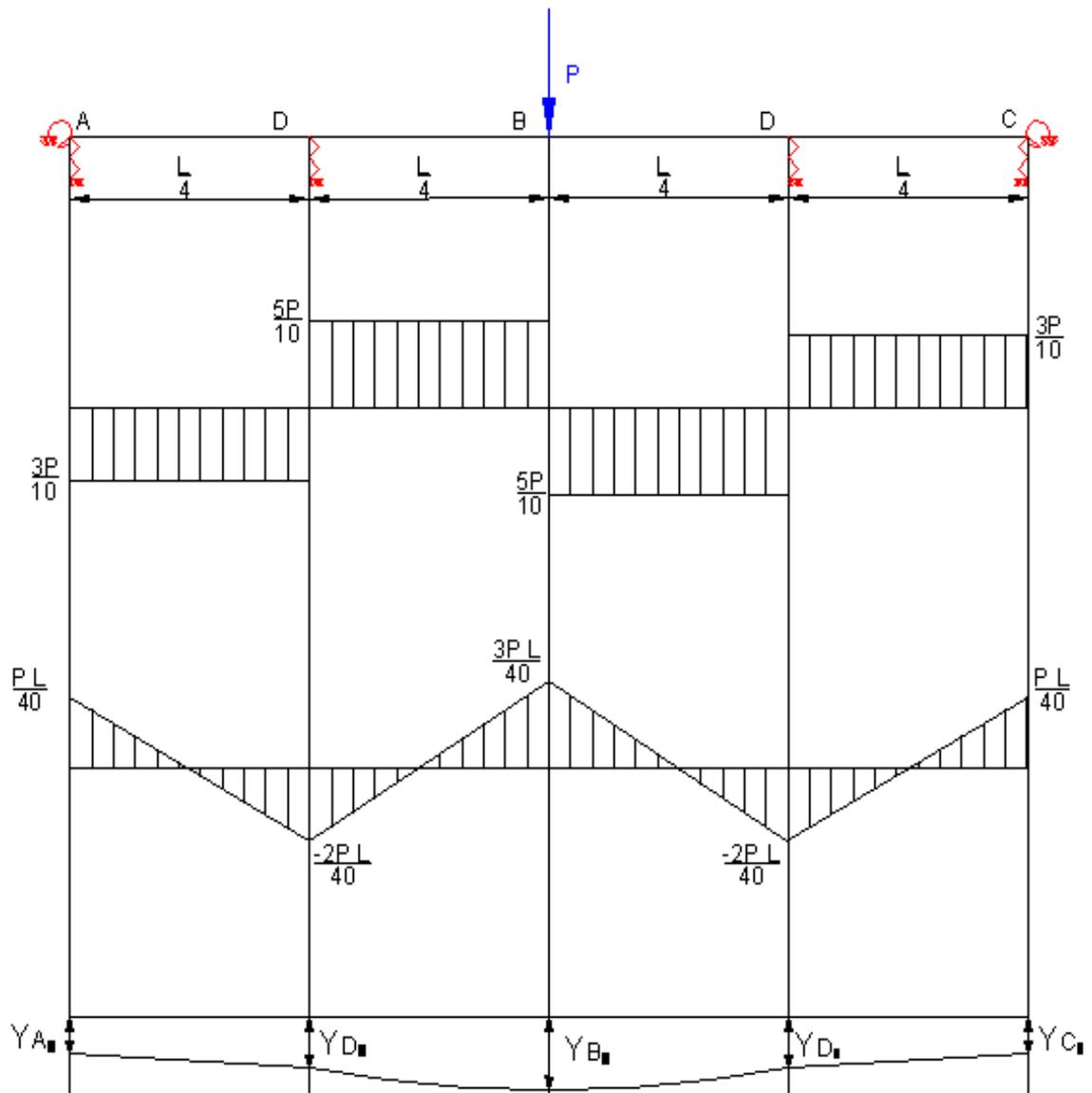


Fig. 2.38 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\phi = 1$

2.7.5 Solución para cuando $\varphi = 0,5$.

Calculo de la pendiente en el origen

$$EI_x \theta_{B3} = EI_x \theta_{A3} + M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right) + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0 \right)^2}{2} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)^2}{2} \quad (2.85)$$

 Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x \theta_{A3} = -M_{A3} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} - \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{0,5Pl}{40} \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{\left(\frac{-19,5P}{80} \right) \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} - \frac{59,5P \left(\frac{l}{4} \right)^2}{2}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{0,5Pl^2}{80} - \frac{\left(\frac{-19,5Pl^2}{320} \right)}{2} - \frac{59,5Pl^2}{1280}$$

$$EI_x \theta_{A3} = -\frac{0,5Pl^2}{80} + \frac{19,5Pl^2}{640} - \frac{59,5Pl^2}{2560}$$

$$EI_x \theta_{A3} = \frac{-16Pl^2 + 78Pl^2 - 59,5Pl^2}{2560}$$

$$\theta_{A3} = \frac{2,5Pl^2}{2560EI_x} \quad (2.86)$$

$$\theta_{A3} = \frac{2,5 * (11965,05) * (140)^2}{2560 * (2 \times 10^6) * (57,35)} \quad \theta_{A3} = \frac{5,86 \times 10^8}{2,93 \times 10^{11}} \quad \theta_{A3} = 0,002 \text{ cm}$$

Cálculo del desplazamiento de los apoyos

$$y_{A3} = -C_A * R_{A3} \quad (2.87)$$

$$y_{A3} = -\left(2,56 \times 10^{-6} \text{ Kg}f / \text{cm} \right) * \frac{19,5 * (11965,05)}{80} \quad y_{A3} = -0,00746 \text{ cm}$$

$$y_{D3} = -C_D * R_{D3} \quad (2.88)$$

$$y_{D3} = -\left(15 \times 10^{-6} \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}}\right) * \frac{59,5 * (11965,05)}{80} \quad y_{D3} = -0,133 \text{ cm}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)^3}{6} \quad (2.89)$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x Y_0 + EI_x \theta_0 \frac{l}{4} + \frac{M_{A3} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{R_{A3} \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{R_{D3} \left(\frac{l}{4}\right)^3}{6}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00746) + EI_x * \left(\frac{2,5Pl^2}{2560EI_x}\right) + \frac{0,5Pl \left(\frac{l}{2}\right)^2}{40} + \frac{-19,5P \left(\frac{l}{2}\right)^3}{80} + \frac{59,5P \left(\frac{l}{4}\right)^3}{80}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00746) + EI_x * \left(\frac{2,5Pl^2}{2560EI_x}\right) + \frac{0,5Pl^3}{320} + \frac{-19,5Pl^3}{640} + \frac{59,5Pl^3}{640}$$

$$EI_x Y_{B3} = EI_x (-0,00746) + EI_x * \left(\frac{2,5Pl^2}{2560EI_x}\right) + \frac{0,5Pl^3}{640} - \frac{19,5Pl^3}{3840} + \frac{59,5Pl^3}{30720}$$

$$Y_{B3} = (-0,00746) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{7,5Pl^3 + 24Pl^3 - 156Pl^3 + 59,5Pl^3}{30720}\right)$$

$$Y_b = (-0,00546) - \frac{65Pl^3}{30720} \quad Y_{B3} = (-0,00546) - \frac{65 * (11965,05) * (140)^3}{30720 * (2 \times 10^6) * (57,35)}$$

$$Y_{B3} = (-0,00546) - \frac{2,13 \times 10^{12}}{3,52 \times 10^{12}} \quad Y_{B3} = -0,00546 - 0,605 \quad Y_{B3} = -0,610 \text{ cm}$$

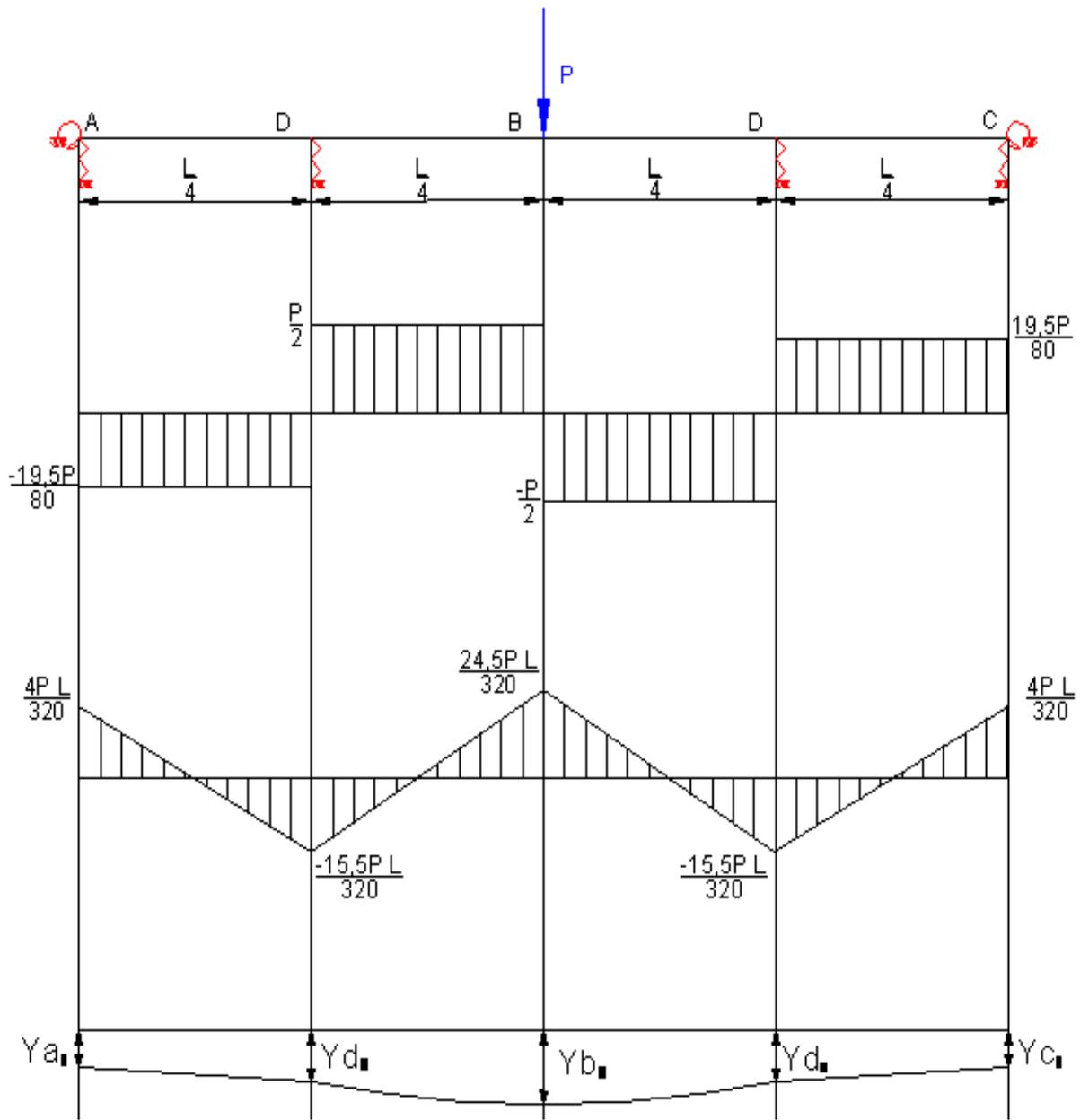


Fig. 2.39 Diagramas de Fuerzas de Cortante y Momentos Flectores con Apoyos y Empotramientos Elásticos para $\phi = 0,5$

2.7.6 Análisis de los Resultados.

En el caso analizado el impacto tampoco se produce directamente encima de un apoyo, pero el punto de impacto está separado de la zona de los eslabones por otros dos apoyos elásticos. En este caso el desplazamiento estático de dicho punto dependerá menos de la rigidez de los apoyos correspondientes a los eslabones (empotramientos elásticos) y por esta razón la flecha en el punto de impacto será mayor pues no se verá tan afectada por los empotramientos a pesar de que la luz distancia entre apoyos en la zona de impacto es la misma que en el caso anterior. Así por ejemplo el desplazamiento estático del punto de impacto en este caso dio mayor que en los dos casos anteriores por lo que este caso mejora la situación del coeficiente de carga dinámica Para $\varphi = 0$, $y_B = 0,47$ cm. Para $\varphi = 1$, $y_B = 0,85$ cm. Para $\varphi = 0,5$, $y_B = 0,61$ cm Sin embargo el hecho de que los eslabones puedan comportarse más elásticos que un empotramiento rígido, igual que en el caso anterior, si reduce sensiblemente el momento que soportan. Así para $\varphi = 1$, $M_A = - PL/40$ y para $\varphi = 0,5$, $M_A = - PL/80$, o sea, se reduce a la mitad en momento en el empotramiento y el mismo es mucho menor que en el caso anterior. Esta variante debe ser mejor para los eslabones.

2.8 Resumen de los Resultados Obtenidos.

En la Tabla 2.1 se resumen los resultados obtenidos en el capítulo.

Tabla 2.1 Resumen de los Resultados Obtenidos				
Coeficiente de Rigidez del Empotramiento φ	Momento en el Empotramiento (Eslabón) M_A	Carga en el Empotramiento (Eslabón) R_A	Momento Flector Máximo sobre la Tablilla $M_{f_{max}}$	Flecha en el punto de impacto $\delta_{est. imp.}$ en cm
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central				
1	$qL^2/48$	$qL/4$	$qL^2/48$	0,199
0,5	$39qL^2/3072$	$7qL/32$	$135qL^2/3072$	0,202
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento.				
1	$PL/16$	$P/2$	$PL/16$	0,100
0,5	$PL/32$	$13P/32$	$10PL/128$	0,134
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.				
1	$PL/40$	$3P/10$	$3PL/40$	0,85
0,5	$PL/80$	$19,5P/80$	$24,5PL/320$	0,61

2.9 Conclusiones del Capítulo.

1. Se profundizó en los conceptos de Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos y en los métodos de solución de vigas hiperestáticas, como base para cumplimentar el Objetivo Central del Capítulo.
2. Se desarrolló el Método General de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos como Novedad Científica Fundamental de la Investigación. La metodología desarrollada se aplicó al caso de las tablillas del Transportador TP1 con sus Apoyos y Empotramientos Elásticos con vistas a establecer su influencia en las cargas en los eslabones.
3. Se evaluaron tres variantes diferentes de número y ubicación de apoyos elásticos, diferentes tipos de cargas, y diferente posición del punto de impacto para establecer la influencia de la elasticidad de las tablillas, la elasticidad y posición de los apoyos de las tablillas y la propia elasticidad de los eslabones en la magnitud del desplazamiento estático del punto de impacto, en la magnitud del momento en el empotramiento (eslabones) y de la carga radial sobre estos últimos.
4. En general se concluye que desde el punto de vista del desplazamiento del punto de impacto y por lo tanto del menor coeficiente de carga dinámica es que se elimine el apoyo elástico central de manera que la piedra impacte en una zona elástica de la tablilla. Esta condición aumenta un poco el Momento Flector Máximo sobre la Tablilla con relación al caso inicial (Caso 1) sin embargo por ejemplo en el Caso 3 donde el desplazamiento en el punto de impacto es mayor, el Momento Flector máximo es menor que en el Caso 2.
5. Desde el punto de vista de la fuerza de reacción en el eslabón el Caso 3 es también menor que el Caso 2.
6. En el Caso 3 el Momento en el Eslabón (Empotramiento Elástico) es también menor que en el Caso 2.
7. Se concluye finalmente que la mejor ubicación de los apoyos de las tablillas estudiados es la correspondiente al Caso 3 desde todos los puntos de vista.

Capítulo III Evaluación de la Resistencia Mecánica Dinámica de los Eslabones y las Tablillas.

3.1 Cálculo del Coeficiente de Carga Dinámica durante el Impacto Piedra - Tablilla del Transportador Alimentador TP1.

3.1.1 Elementos que intervienen en el desplazamiento estático del Sistema Piedra - Tablilla del Transportador Alimentador TP1.

El coeficiente de carga dinámica durante el impacto de las piedras que caen desde un camión cualquiera y el Sistema de Tablillas del Transportador Alimentador TP1 depende del desplazamiento estático de los elementos elásticos que intervienen en el proceso. En el Capítulo II se evaluó la influencia de la colocación y elasticidad de los apoyos en el desplazamiento estático de la piedra y los elementos elásticos del sistema de tablillas del Transportador, pero en la realidad en el desplazamiento estático interviene un elemento muy importante que es el colchón de caliza que se forma en el transportador que amortigua cualquier impacto de las piedras. De esta manera el desplazamiento estático resultante es:

$$\delta_{res} = \delta_{est. tab.} + \delta_{est. colchón.} \quad (3.1)$$

Donde:

δ_{res} Desplazamiento estático resultante del sistema en cm.

$\delta_{est. tab}$ Desplazamiento estático dado por la posición y elasticidad de los apoyos de las tablillas.

$\delta_{est. cal.}$ Desplazamiento estático determinado por el colchón de caliza que se crea en la base del Transportador TP1

El desplazamiento estático de las tablillas y sus apoyos tomando en cuenta la elasticidad de estos últimos fue obtenido para cada caso analizado en el epígrafe anterior y aparecen tabulados en la Tabla 2.1. Se verá a continuación como se calculará el desplazamiento estático en el contacto piedra – colchón de caliza.

3.1.1 Cálculo del desplazamiento estático del contacto piedra – colchón de caliza.

En la Fig. 3.1 se muestra un esquema del contacto piedra – colchón de caliza. El mismo se puede interpretar según la Teoría de los Cuerpos en Contacto de Hertz como el caso de contacto entre una esfera y un plano.

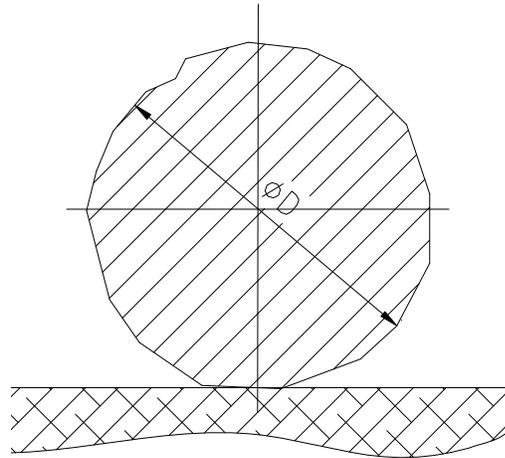


Fig. 3.1 Esquema del contacto piedra – colchón de caliza

Considerando la máxima roca posible, teniendo en cuenta la más grande existente en la cantera, de diámetro 1,5 m, de forma esférica y conociendo el peso específico de la caliza, $\gamma = 2,69 \text{ g/cm}^3 \approx 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, según (Orus Asso, 1962)

$$m = V \cdot \gamma = \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma$$

$$m = \frac{4}{3} \pi (75)^3 2,6 \cdot 10^{-3}$$

$$m = 4594,6 \text{ kg} = 45,07 \text{ kN}$$

$R \rightarrow$ Radio de la esfera

$V \rightarrow$ Volumen de la esfera

Según (Pisarenko, 1989) para el caso de contacto esfera (piedra) - plano (colchón de caliza):

$$\delta_1 = 0,82553 \sqrt[3]{\frac{P^2}{R} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2} \quad (3.2)$$

Donde:

$P \rightarrow$ Peso de la roca en condiciones estáticas.

$\mu_1 \rightarrow$ Coeficiente de Poisson de la roca caliza.

$\mu_2 \rightarrow$ Coeficiente de Poisson del colchón de caliza.

$E_1 \rightarrow$ Módulo de elasticidad a las tensiones normales de la roca de caliza.

$E_2 \rightarrow$ Módulo de elasticidad a las tensiones normales del material del colchón.

Para determinar las propiedades mecánicas del colchón, se consideró este último como si fuera equivalente a un terreno arcilloso poco compactado ya que ese material viene suelto en el camión y cae al transportador, o sea, el se corresponde con un material de bajo módulo de elasticidad. Según datos tomados de: (Iturralde, 1978) para un suelo con esas características:

$$E_2 = 70 \text{ kgf} / \text{cm}^2 \approx 7 \text{ MPa} = 0,7 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\mu_2 = 0,42$$

Según datos tomados de: (Mirolivov, 1985) y (Pisarenko, 1989) se pudo conocer que:

$$E_1 = 42 \cdot 10^4 \text{ kgf} / \text{cm}^2 \approx 4,2 \cdot 10^4 \text{ MPa} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

El coeficiente de Poisson para la roca caliza no fue encontrado en la literatura consultada, pero se precisó mediante la información disponible por la Empresa Nacional de Investigaciones aplicadas (ENIA N°9) del MICONS que su valor es aproximadamente:

$$\mu_1 = 0,27$$

En resumen:

$$P = 45,07 \text{ kN}$$

$$R = 75 \text{ cm}$$

$$E_1 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ kN / cm}^2$$

$$E_2 = 0,7 \text{ kN / cm}^2$$

$$\mu_1 = 0,27$$

$$\mu_2 = 0,42$$

$$\delta_{est.colchón} = 0,8255 \sqrt[3]{\frac{(45,07)^2}{75} \left(\frac{1-0,27^2}{4,2 \cdot 10^3} + \frac{1-0,42^2}{0,7} \right)^2} = 2,77 \text{ cm}$$

3.1.2 Cálculo del desplazamiento estático resultante.

El desplazamiento estático resultante es la suma del desplazamiento de la tablilla en el punto de impacto o flecha en el punto de impacto que fue obtenida para cada caso en el capítulo anterior y el desplazamiento estático originado por la piedra colocada estáticamente sobre el colchón de caliza que se obtuvo en el epígrafe anterior.

Este desplazamiento aparece calculado en la Tabla 3.1 para los tres esquemas de Análisis estudiados en el capítulo anterior con empotramiento rígido en los eslabones ($\varphi = 1$) y con empotramiento elástico con coeficiente de rigidez ($\varphi = 0,5$). Estas consideraciones permiten por un lado apreciar no sólo la influencia de las cargas, posición y número de los apoyos elásticos, sino también la influencia de la rigidez del empotramiento elástico.

Se puede apreciar en la Tabla 3.1 que la mejor variante desde el punto de vista de la acción dinámica de las cargas es la variante 3.

Tabla 3.1 Desplazamiento Estático Resultante			
Coeficiente de Rigidez del Empotramiento φ	Flecha en el punto de impacto $\delta_{est. imp.}$ en cm	Desplazamiento estático del colchón de piedra $\delta_{est. colchón}$ en cm.	Desplazamiento estático resultante en el punto de impacto $\delta_{est.}$ en cm
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central			
1	0,199	2,77	2,970
0,5	0,202	2,77	2,972
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento.			
1	0,100	2,77	2,870
0,5	0,134	2,77	2,904
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.			
1	0,85	2,77	3,62
0,5	0,61	2,77	3,38

3.1.3 Cálculo del coeficiente de carga dinámica.

El cálculo del coeficiente de carga dinámica se realizará mediante la ecuación dada por (Pisarenko, 1989):

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}} \cdot \frac{1}{1 + k_m \cdot \frac{m_0}{m}}} \quad (3.3)$$

Para el cálculo se necesitan los siguientes datos:

H → Altura de caída del cuerpo que golpea.

m_0 → Masa del cuerpo golpeado.

m → Masa del cuerpo que golpea.

δ_{est} → Desplazamiento estático provocado en el cuerpo golpeado por el cuerpo que golpea en su caída.

k_m → Coeficiente de reducción de la masa del cuerpo golpeado al punto donde ocurre el impacto.

En el caso analizado el cuerpo golpeado es muy pequeño en comparación con el cuerpo que golpea y se puede por lo tanto prescindir de la masa del cuerpo golpeado. En (Miroljubov, 1986) se plantea que al prescindir de la masa del cuerpo golpeado el coeficiente de carga dinámica da mayor que el real lo que implica una situación más crítica.

Para esta consideración y suponiendo además que la altura de caída es mucho mayor que el desplazamiento estático, la expresión (3.3) se reduce a:

$$k_{din} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{est}}} \quad (3.4)$$

3.1.4 Cálculo de la altura de caída de la piedra.

En la Fig. 3.2 se muestra una vista de la Plataforma de Descarga del Transportador TP1 con un camión en la posición de volteo donde se pueden apreciar las dimensiones vinculadas con la altura de caída de una piedra.

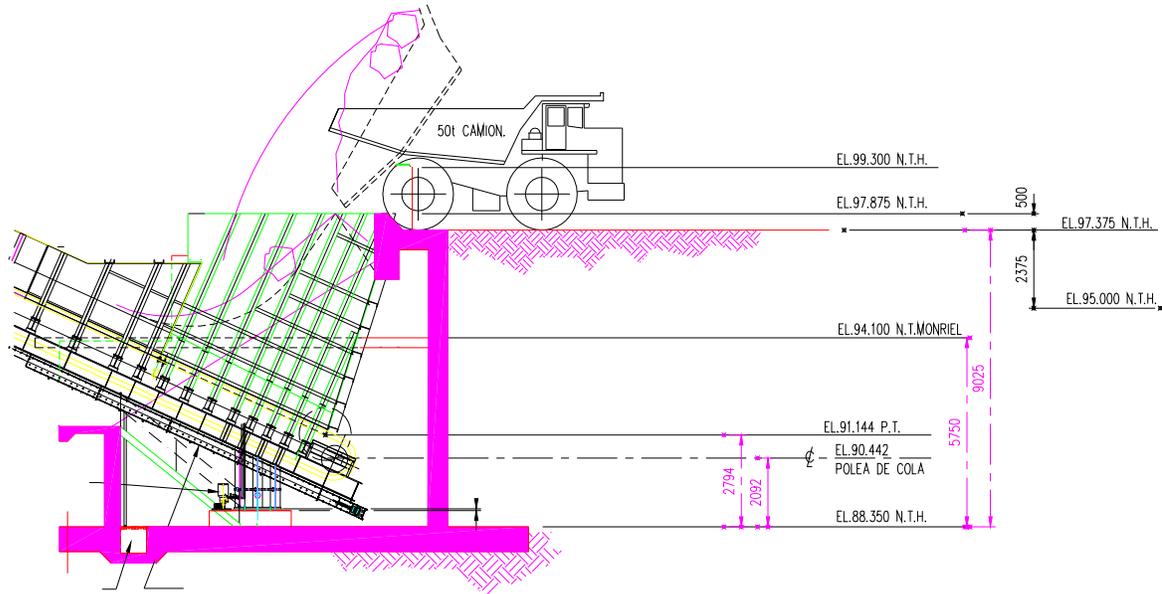


Fig. 3.2 Vista de la Plataforma de Descarga del Transportador TP1

Desde el piso de la plataforma hasta el fondo del foso existe una profundidad de 9,025 m y se ha considerado en el presente trabajo que las piedras como golpean a una altura desde el fondo del foso promedio entre las cotas de 2 794 m = 2,74 m y 5 750 mm = 5,75 m, o sea, a una altura del fondo de 4, 272 m. O sea que la altura de caída medida desde el nivel del piso será:

$$H_1 = 9,025 - 4,272 = 4,753 \text{ m} = 475,3 \text{ cm}$$

Para calcular la altura de caída de una piedra desde el camión al transportador hay que sumar la altura desde al camión al nivel del piso. En la Fig. 3.3 se muestran las dimensiones de los camiones VOLVO utilizados para el transporte del mineral donde se puede apreciar que para la posición de volteo del camión la altura desde el borde superior (posición más crítica de una piedra) hasta el piso es:

$$H_2 = L + B \cdot \text{sen } \alpha_2 = 0,841 + 5,82 \cdot \text{sen } 72^\circ = 6,736 \text{ m} = 6 \text{ 73, 6 cm}$$

La altura total de caída de una piedra desde su posición más crítica hasta el colchón será:

$$H = H_1 + H_2 = 4,753 + 6.736 = 11,5 \text{ m} = 1\ 150 \text{ cm}$$

Pos	Metric (mm)		Imperial (Feet)	
	A35E	A40E	A35E	A40E
A	11 182	11 265	36'8"	37'0"
A ₂	6 242	6 404	20'6"	21'0"
B	5 531	5 820	18'2"	19'1"
C	3 716	3 768	12'2"	12'4"
C ₁	3 545	3 596	11'8"	11'10"
C ₂	1 769	1 769	5'10"	5'10"
D	3 101	3 101	10'2"	10'2"
E	1 278	1 278	4'2"	4'2"
F	4 578	4 518	15'0"	14'10"
G	1 820	1 940	6'0"	6'4"
H	1 683	1 706	5'6"	5'7"
I	650	495	2'2"	1'7"
J	2 939	3 152	9'8"	10'4"
K	2 314	2 455	7'7"	8'1"
L	899	841	2'11"	2'9"
M	7 246	7 284	23'9"	23'11"
N	8 826	8 885	28'11"	29'2"
N ₁	4 423	4 335	14'6"	14'3"
O	3 106	3 374	10'2"	11'1"
O ^{***}	3 305	3 497	10'10"	11'6"
P	2 870	3 074	9'5"	10'1"
R	580	628	1'11"	2'1"
R ₁	668	716	2'2"	2'4"
V	2 534	2 636	8'4"	8'8"
V [*]	2 625	-----	8'7"	-----
W	3 258	3 432	10'8"	11'3"
W ^{*)}	3 410	3 570	11'2"	11'9"
X	521	576	1'9"	1'11"
X ₁	602	657	2'0"	2'2"
X ₂	754	806	2'6"	2'8"
Y	2 534	2 636	8'4"	8'8"
Y [*]	2 625	-----	8'7"	-----
Z	3 258	3 432	10'8"	11'3"
Z ^{*)}	3 410	3 570	11'2"	11'9"
a ₁	23,3°	24,3°	23,3°	24,3°
a ₂	70°	72°	70°	72°
a ₃	45°	45°	45°	45°

A35E: Unloaded machine with 26,5 R25
A40E: Unloaded machine with 29,5 R25
*) A35E with optional 775/65R29 tires
**) A40E with optional 875/65R29 tires

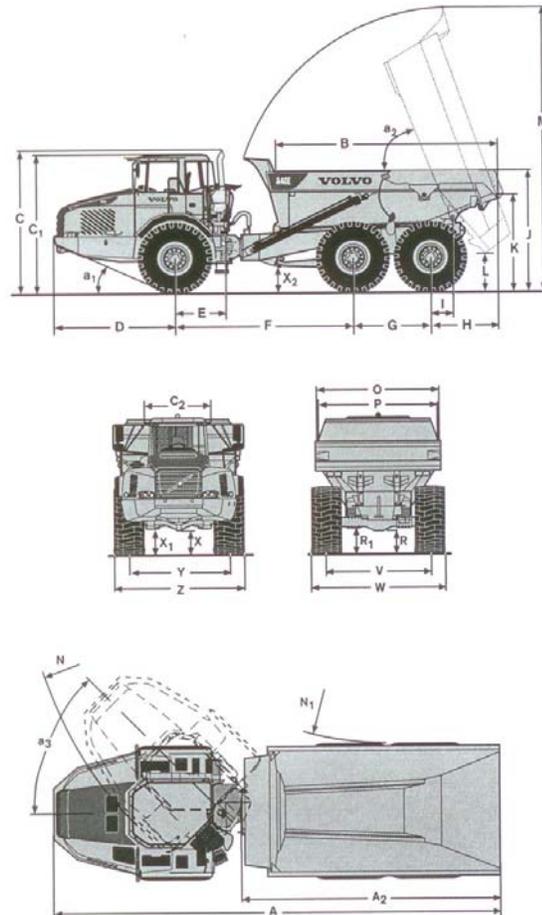


Fig. 3.3 Dimensiones de los Camiones Volvo

3.1.5 Cálculo del coeficiente de carga dinámica y de las cargas dinámicas.

El coeficiente de carga dinámica y las cargas dinámicas se dan en la Tabla 3.2:

Tabla 3.2 Coeficiente de Carga Dinámica y Cargas Dinámicas				
Coeficiente de Rigidez del Empotramiento φ	Coeficiente de Carga Dinámica del Impacto $k_{din.}$	Momento en el Empotramiento (Eslabón) $M_{A\ din.}=M_A \cdot k_{din.}$	Momento Flector Dinámico Máximo $M_{f\ din.max}=M_f \cdot k_{din.}$	Carga en el Empotramiento (Eslabón) $R_{A\ din.}=R_A \cdot k_{din.}$
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central				
1	27,83	1107.9	1107.9	94.96
0,5	27,82	674.9	2336	83
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento.				
1	28,31	5582	5582	616
0,5	28,14	2774	6935.8	256
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.				
1	25,21	3976.7	11930	340
0,5	26,98	2177.9	13033.8	296.4

3.2 Metodología de cálculo de las tensiones en los eslabones

3.2.1 Cálculo de las tensiones tangenciales de torsión

Por tratarse de una sección no circular muy compleja en la literatura no aparece expresiones de cálculo para los parámetros geométricos de la sección a la torsión, haciéndose necesario simplificarla en un conjunto de secciones que si aparecen en la literatura de Mecánica de Materiales. En la Fig. 3.4 se muestra una vista de la sección del eslabón en la zona de Fractura.



Fig. 3.4 Vista de la Sección del Eslabón en la zona de Fractura

En la Fig. 3.5 se muestra un esquema simplificado de la sección, Como se aprecia la parte superior son dos secciones rectangulares con orificios roscados donde se fijan las tablillas y en la parte inferior es una sección en forma de pentágono. Para poder realizar el cálculo de las tensiones tangenciales en la sección se descompondrá en partes para las cuales aparecen las expresiones de cálculo en la literatura.

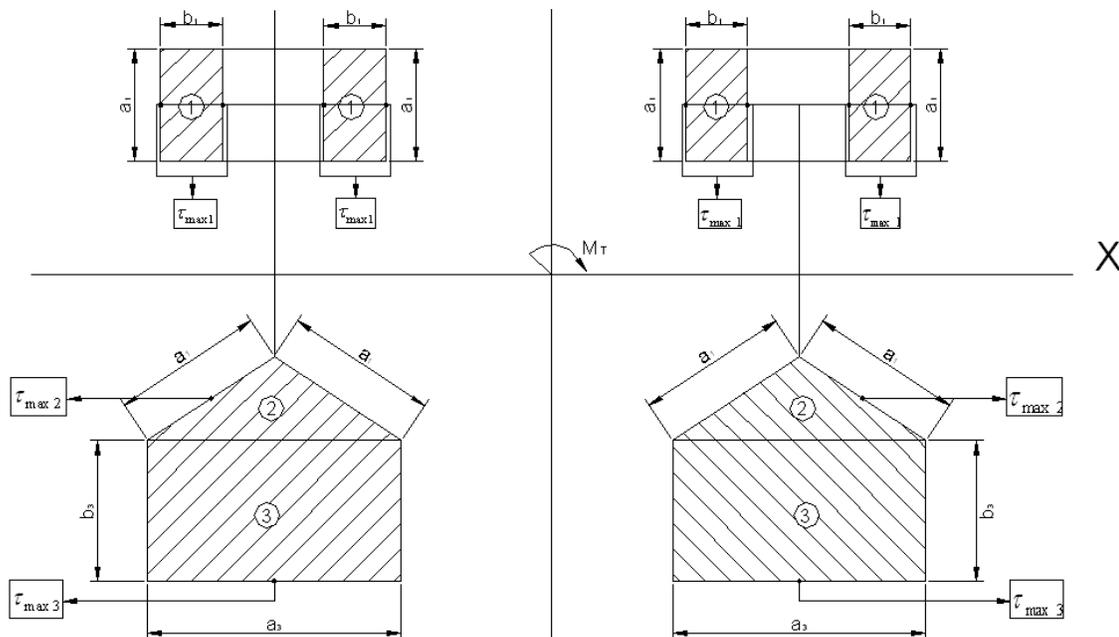


Fig. 3.5 Esquema simplificado de la sección del eslabón en la zona de fractura

La sección del eslabón está sometida a un momento torsor M_T . Cada una de las partes integrantes de la sección asimila una parte de ese momento torsor de manera que

$$M_T = 4M_{T1} + 2M_{T2} + 2M_{T3} \quad (3.5)$$

El elemento que vincula a todas las partes integrantes es que el ángulo de torsión unitario de la sección es único de manera que

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \frac{\varphi_i}{\ell} \quad (3.6)$$

O sea:

Para las secciones rectangulares las expresiones del ángulo unitario de torsión según, (Feudosiev, 1985) son:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{\ell} = \frac{M_{T1}}{G\beta_1 b_1^3 a_1} \quad (3.7)$$

Donde: $\beta_1 = f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$

$$\text{Y } \theta_3 = \frac{\varphi_3}{\ell} = \frac{M_{T3}}{G\beta_3 b_3^3 a_3} \quad (3.8)$$

Donde: $\beta_3 = f\left(\frac{a_3}{b_3}\right)$

Para la sección triangular

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{\ell} = \frac{80 M_{T2}}{G * \sqrt{3} * a_2^4} \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.7); (3.8) y (3.9) en (3.6) tratando de expresar $M_{T1} = f(M_{T1})$ y $M_{T3} = f(M_{T1})$ se obtiene

$$\theta_2 = \theta_1 \quad \frac{80 M_{T2}}{G * \sqrt{3} * a_2^4} = \frac{M_{T1}}{G * \beta_1 * b_1^3 * a_1}$$

$$M_{T2} = M_{T1} \left(\frac{\sqrt{3} * a_2^4}{80 * \beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \quad (3.10)$$

$$\theta_3 = \theta_1 \quad \frac{M_{T3}}{G * \beta_3 * b_3^3 * a_3} = \frac{M_{T1}}{G * \beta_1 * b_1^3 * a_1}$$

$$M_{T3} = M_{T1} \left(\frac{\beta_3 * b_3^3 * a_3}{\beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.1) y despejando el momento torsor M_{T1} se obtiene

$$M_T = 4M_{T1} + 2 \left(M_{T1} \left(\frac{\sqrt{3} * a_2^4}{80 * \beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \right) + 2 \left(M_{T1} \left(\frac{\beta_3 * b_3^3 * a_3}{\beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \right)$$

$$M_{T1} = \frac{M_T}{4 + 2 \left(M_{T1} \left(\frac{\sqrt{3} * a_2^4}{80 * \beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \right) + 2 \left(M_{T1} \left(\frac{\beta_3 * b_3^3 * a_3}{\beta_1 * b_1^3 * a_1} \right) \right)}$$

$$M_{T1} = \frac{M_T (80 * \beta_1 * b_1^3 * a_1)}{320 (\beta_1 * b_1^3 * a_1) + (2\sqrt{3} * a_2^4) + 160 (\beta_3 * b_3^3 * a_3)} \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.10) y (3.11) se pueden calcular los momentos torsores M_{T2} y M_{T3} . Conociendo los momentos torsores se pueden obtener las tensiones tangenciales máximas en cada una de las secciones

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{T1}}{\alpha_1 * b_1^2 * a_1} \quad (3.13)$$

Donde: $\alpha_1 = f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$

$$\tau_{\max 2} = \frac{20M_{T2}}{a_2^3} \quad (3.14)$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{T3}}{\alpha_3 * b_3^2 * a_3} \quad (3.15)$$

Donde: $\alpha_3 = f\left(\frac{a_3}{b_3}\right)$

3.2.2 Cálculo de las tensiones normales de flexión

Las tensiones normales de flexión se calcularán en los mismos puntos donde se calcularon las tensiones tangenciales máximas de torsión (Fig. 3.6)

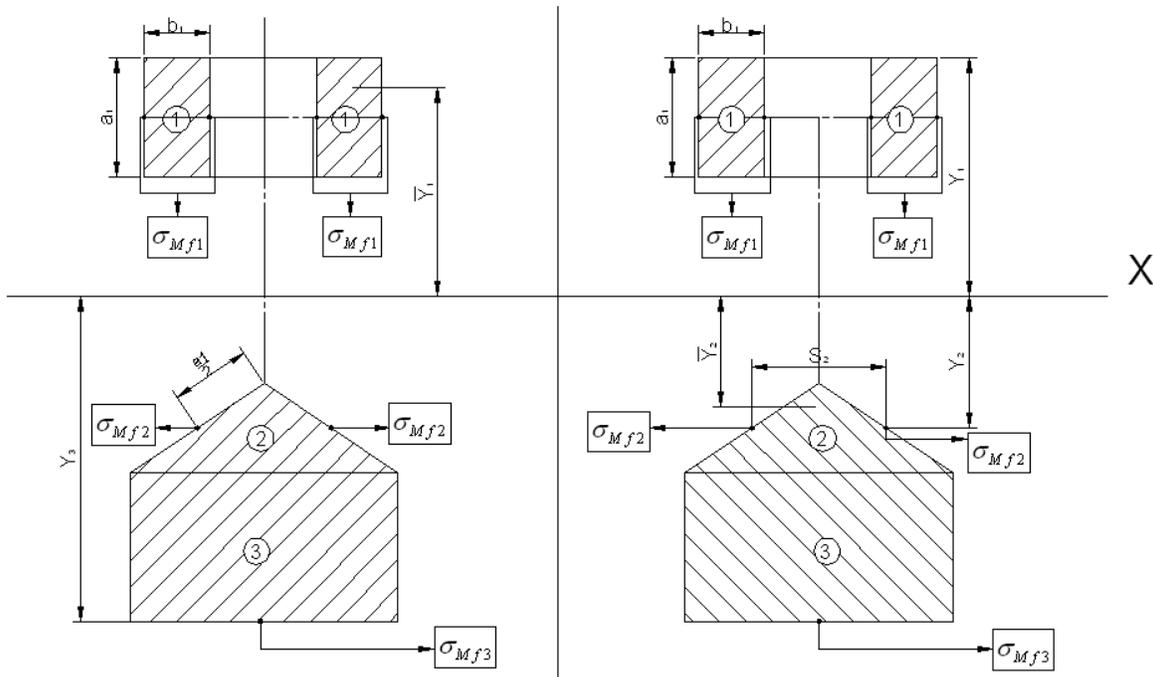


Fig. 3.6 Coordenadas de los puntos para el cálculo de las tensiones normales

Las tensiones se calcularan en dichos puntos por la ecuación de Navier

$$\sigma_{Mf1} = \frac{Mf * Y_1}{I_x} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{Mf2} = \frac{Mf * Y_2}{I_x} \quad (3.17)$$

$$\sigma_{Mf3} = \frac{Mf * Y_3}{I_x} \quad (3.18)$$

Donde:

Mf -Es el momento flector en la sección

I_x -Es el momento de inercia de toda la sección con relación al eje del centroide X

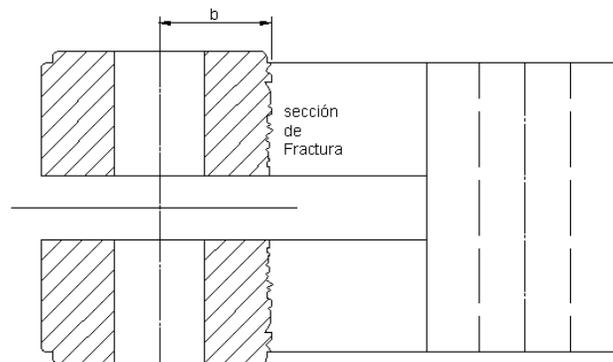


Fig. 3.7 Brazo de momento en la sección de fractura

El momento flector en la sección de fractura es igual ala reacción correspondiente en el eslabón por el brazo b (Fig. 3.7)

O sea:

$$Mf = R_A * b \quad (3.19)$$

Las tensiones tangenciales provocadas por la fuerza de cortante $Q = R$ en estos mismos puntos se calculan por la ecuación de Zhuravski.

$$\tau_{Q1} = \frac{Q * S'_{X1}}{b * I_x}$$

$$\tau_{Q1} = \frac{Q * \left(\frac{a_1}{2}\right) * b_1 * \bar{Y}_1}{b * I_x} \quad (3.20)$$

$$\tau_{Q2} = \frac{Q * S'_{X2}}{S_2 * I_x}$$

$$\tau_{Q2} = \frac{Q * \left[\left(4a_1 * b_1 * \bar{Y}_1\right) - \left(\frac{1}{2} * S_2 * \frac{a_2}{2} \cos 30^\circ * \bar{Y}_2\right) \right]}{S_2 * I_x} \quad (3.21)$$

$$\tau_{Q3} = 0 \quad (3.22)$$

3.2.3 Calculo de las tensiones normales de tracción.

El Par de Giro Nominal del TP1 es $M = 354\,000 \text{ N} - \text{m} = 35\,400 \text{ kN} - \text{cm}$

$$F_{Trac} = \frac{M_{Trac}}{D} \quad (3.23) \quad F_{Trac} = \frac{35\,400}{75} \quad F_{Trac} = 472 \text{ kN}$$

El Área de la sección transversal del eslabón se obtuvo con el Software Mechanical Desktop $A = 33,02 \text{ cm}^2$. De donde:

$$\sigma_T = \frac{F_t}{A} \quad (3.24) \quad \sigma_T = \frac{472}{33,032} \quad \sigma_T = 13 \text{ kN/cm}^2$$

3.2.4 Calculo de los valores de las tensiones de trabajo.

En las Tablas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 aparecen los valores de las tensiones en los diferentes puntos de la sección y los valores de las tensiones tangenciales y normales resultantes en condiciones de carga dinámica.

Tabla 3.3 Valores de las Tensiones Tangenciales en la Sección

φ	$Q_{din.}$ kN	τ_{Q1} kN/cm ²	τ_{Q2} kN/cm ²	τ_{Q3} kN/cm ²	$M_{Tdin.}$ kN-cm	$M_{t1 din.}$ kN-cm	τ_{Mt1} kN/cm ²	$M_{t2 din}$ kN-cm	τ_{Mt2} kN/cm ²	$M_{t3 din}$ kN-cm	τ_{Mt3} kN/cm ²
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central											
1	94.9 6	0.32	6.10	0	1107.9	33.84	33.74	209	52.6	363	74.38
0,5	83	0.28	5.31	0	674.9	20.6	20.53	127.3	32.02	221	45.3
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento											
1	316	2.15	40.5	0	5582	170.5	169.9	1053.7	265	1829.5	374.85
0,5	256	1.74	32.7	0	2774	84.7	84.4	523	131.5	908.5	186
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.											
1	340	1.15	21.76	0	3976.7	121.5	121.1	750.8	188.8	1303.6	267
0,5	296. 4	1	18.9	0	2127.9	64.9	64.7	401.7	101	696.3	142.7

Tabla 3.4 Valores de las Tensiones Tangenciales Resultantes en la Sección									
φ	τ_{Q1} kN/cm ²	τ_{Q2} kN/cm ²	τ_{Q3} kN/cm ²	τ_{Mt1} kN/cm ²	τ_{Mt2} kN/cm ²	τ_{Mt3} kN/cm ²	$\tau_{1\ res.}$ kN/cm ²	$\tau_{2\ res.}$ kN/cm ²	$\tau_{3\ res.}$ kN/cm ²
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central									
1	0.32	6.10	0	33.74	52.6	74.38	34,06	58,7	74,38
0.5	0.28	5.31	0	20.53	32.02	45.3	20,8	37,3	45,3
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento									
1	2.15	40.5	0	169.9	265	374.85	172	305,5	374,85
0.5	1.74	32.7	0	84.4	131.5	186	86	164	186
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.									
1	1.15	21.76	0	121.1	188.8	267	122	210,56	267
0.5	1	18.9	0	64.7	101	142.7	65,7	101	142,7

Tabla 3.5 Valores de las Tensiones Normales en la Sección							
φ	N. kN	σ_N kN/cm ²	$R_{A \text{ din.}}$ kN	$M_{f \text{ din}} = R_{A \text{ din}} \times b$ kN – cm	σ_{Mf1} kN/cm ²	σ_{Mf2} kN/cm ²	σ_{Mf3} kN/cm ²
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central							
1	472	13	94.96	522.3	7	1.02	3.96
0,5	472	13	83	456.8	6.12	0.86	3.47
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento							
1	472	13	316	1754	23.5	3.3	13.3
0,5	472	13	256	1417.5	18.5	2.69	10.5
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.							
1	472	13	340	1874.7	25	3.56	14.3
0,5	472	13	296.4	1630	21.8	3	12.4

Tabla 3.6 Valores de las Tensiones Normales Resultantes en la Sección							
φ	σ_N kN/cm ²	σ_{Mf1} kN/cm ²	σ_{Mf2} kN/cm ²	σ_{Mf3} kN/cm ²	$\sigma_{res.1}$ kN/cm ²	$\sigma_{res.2}$ kN/cm ²	$\sigma_{res.3}$ kN/cm ²
Caso 1 Carga distribuida q a lo largo de toda la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando directamente sobre el único apoyo elástico central							
1	13	7	1.02	3.96	20	14,02	16,96
0.5	13	6.12	0.86	3.47	19,12	13,86	16,47
Caso 2 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y dos cargas concentradas (piedras grandes) impactando en los puntos medios entre el apoyo elástico central y el empotramiento							
1	13	23.5	3.3	13.3	36,5	16,3	26,3
0.5	13	18.5	2.69	10.5	31,5	15,69	23,5
Caso 3 Sin carga distribuida q a lo largo de la tablilla y una carga concentrada (piedra grande) impactando en el punto medios entre los dos apoyos elásticos equidistantes del centro de la luz y de los empotramientos.							
1	13	25	3.56	14.3	38	16,56	27,3
0.5	13	21.8	3	12.4	34,8	16	25,4

3.2.5 Comprobación de la resistencia estática de los eslabones a la sobrecarga instantánea provocada por un impacto de una piedra de 1,5 m de diámetro.

Esta posibilidad se evaluó para el punto más crítico de la sección para cada caso de carga a través de la Condición de paso al Estado límite según la Cuarta Hipótesis de Resistencia (Hubert - Von Mises - Hencki) para el estado tensional plano sometido a tensiones normales y tangenciales simultáneamente, o sea:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{lim}$$

Los resultados se dan en la Tabla 3.7

Tabla 3.7 Tensión equivalente y Tensiones Límites en los Eslabones en Condiciones de Impactos Severos							
Caso No.	φ	Punto de la Sección	σ kN/cm ²	τ kN/cm ²	$\sigma_{eq.}$ kN/cm ²	σ_f kN/cm ²	σ_u kN/cm ²
1	1	3	16,96	74,38	129,94	148,7	182
1	0,5	3	16,47	45,30	80,17		
2	1	3	26,30	374,85	649,79		
2	0,5	3	23,50	186,00	323,02		
3	1	3	27,30	267,00	463,26		
3	0.5	3	25,4	142,70	248,47		

Como se aprecia de la Tabla 3.7, si el eslabón estuviera realmente acoplado a la tablilla como un elemento absolutamente rígido ($\varphi = 1$), su capacidad resistente a un impacto, incluso amortiguado por la tierra que esta normalmente sobre las tablillas, provocado por una piedra de 1,5 m sería nula, o sea, con excepción de para el Caso 1 que es un caso extremadamente idealizado las tensiones no sólo superan el límite de fluencia del acero de los eslabones, sino su resistencia máxima. Es bueno resaltar que el acero de los eslabones es extremadamente resistente tal como fue investigado por una institución alemana certificada. En la realidad el eslabón tiene una conexión elástica con la tablilla, cuyo coeficiente de rigidez es difícil de pronosticar, pero en la propia Tabla 3.7 se muestran los resultados en esos mismos puntos con un coeficiente de rigidez intermedio entre el empotramiento rígido ($\varphi = 1$) y la articulación rígida pura ($\varphi = 0$), o sea, ($\varphi = 0,5$) y se aprecia como las tensiones disminuyen, pero también en todos los casos las tensiones superan las tensiones límites y un impacto de este orden puede provocar perfectamente la aparición de una grieta que desencadene un proceso de fisuración progresiva y la fractura por fatiga. Se verá a continuación cual es el comportamiento desde el punto de vista de la fatiga de los eslabones.

3.3 Cálculo de las tensiones equivalentes para el régimen inestable de trabajo del transportador TP1 y de los factores de seguridad a la fatiga.

Teniendo en cuenta que el régimen de explotación del TP1 con relación al tamaño de las piedras que procesa es completamente inestable y aleatorio se realizó un estudio durante dos semanas de la frecuencia de aparición de piedras de gran tamaño y se obtuvo la siguiente cuadro de frecuencias: 0,4 % de piedras entre 1 y 1,5 m de diámetro: $\beta_1 = 0,04$; 1,6 % de piedras entre 0,5 y 1 m de diámetro: $\beta_2 = 0,16$; , 48 % del tiempo de piedras entre 0,2 y 0,5 m de diámetro: $\beta_3 = 0,48$; y el 50 % restante de piedras con diámetros menores de 0,2 m: $\beta_4 = 0,50$. Utilizando la Hipótesis Acumulativa se cálculo una Tensión Equivalente para el cálculo del factor de seguridad a la fatiga según el Método Clásico bajo régimen estable con ciclo de trabajo intermitente, según la ecuación:

$$\sigma_{eq} = \sqrt[m]{\sum_1^n \beta_i \sigma_i^m} \quad (3.25)$$

Donde β_i es la frecuencia de aparición de las piedras y σ_i es la tensión provocada en los laterales por el peso de la piedra correspondiente, $m = 9$ para el caso de la fatiga volumétrica según (Dobrovolski[, 1975) y n es el número total de intervalos en el cual se clasificaron las piedras. Los intervalos y las tensiones σ_i aparecen en la Tabla 3.6

El factor de seguridad a la fatiga bajo las tensiones normales se calculó por la conocida expresión:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma * \sigma_a}{\varepsilon * \beta} + \left\langle \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \right\rangle * \sigma_m} \quad (3.26)$$

Como el ciclo de trabajo es pulsante para el cual:

$$\sigma_a = \sigma_{Mf} \quad y \quad \sigma_m = \sigma_N$$

El Acero de los eslabones fue investigado por el Instituto de Aplicaciones para la Optimización de Materiales, Procesos y Tratamientos Térmicos “Dr. Sommer Material Technology” de Alemania en su Reporte No. 2008 – 17173 – 1, que se muestra en el Anexo 1 y en el cual se certifica que el acero posee una Resistencia Máxima:

$$\sigma_u = 1\,820 \text{ MPa} = 182 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_f = 1\,497 \text{ MPa} = 148,7 \text{ kN/cm}^2$$

Los límites de fatiga se estimaron por las relaciones dadas por (Dobrovolski, 1975):

$$\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_u = 78,3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_0 = 0,60 \sigma_u = 109,2 \text{ kN/cm}^2$$

El factor de concentración de tensiones se calculó para la zona 1 de la sección como el caso de una placa plana de acero con orificio, según los datos de (Pisarenko, 1989), $k_\sigma = 1,3 - 1,8$, sin embargo por tratarse de un orificio roscado se aumentó a $k_\sigma = 2$ y $k_\tau = 1 + 0,6(k_\sigma - 1) = 1,6$. Para las zonas 2 y 3 de la sección los factores de concentración de tensiones son $k_\sigma = k_\tau = 1$

El factor de tamaño se tomó como un valor medio para las tres zonas en $\varepsilon = 0,6$.

El factor de estado de la superficie se tomó según (Pisarenko, 1989), para rugosidades propias de las superficies laminadas $\beta = 0,8$.

El factor de seguridad bajo las tensiones tangenciales provocadas por la fuerza de cortante y el momento torsor, se calculó de igual manera para un ciclo inestable con las mismas características que para las tensiones normales. Las tensiones tangenciales τ_i , aparecen de igual manera en la Tabla 3.4.

La tensión tangencial para el régimen estable equivalente por su efecto al inestable real se obtuvo como:

$$\tau_{eq} = \sqrt[m]{\sum_1^n \beta_i \tau_i^m} \quad (3.27)$$

El factor de seguridad a la fatiga bajo las tensiones tangenciales se calculó por la conocida expresión:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau * \tau_a}{\varepsilon * \beta} + \left\langle \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \right\rangle * \tau_m} \quad (3.28)$$

Como el ciclo de trabajo de las tensiones tangenciales es intermitente se tiene que:

$$\tau_a = \tau_m = \tau_{eq} / 2 \quad (3.29)$$

Los límites de fatiga a cortante fueron estimados según (Dobrovolski, 1975) son:

$$\tau_{-1} = 0,22 \cdot \sigma_u = 40 \text{ kN/cm}^2 \quad \tau_0 = 0,30 \cdot \sigma_u = 54,6 \text{ kN/cm}^2$$

El factor de seguridad resultante a la fatiga se obtuvo por la clásica ecuación:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (3.30)$$

Los resultados del cálculo de los factores de seguridad a las tensiones normales, tangenciales y resultantes para los tres casos de carga y los tres puntos evaluados en la sección para $(\varphi = 1)$ y $(\varphi = 0,5)$ se dan en la Tabla 3. 8

Tabla 3,8 Factores de seguridad a la fatiga para los diferentes casos de carga y puntos de la sección					
Caso No.	φ	Punto de la Sección	n_{σ}	n_{τ}	$n_{res.}$
1	1	1	3,5	1,06	1,04
1	1	2	9,7	0,90	0,90
1	1	3	5,0	0,50	0,50
1	0,5	1	3,8	1,54	1,46
1	0,5	2	10	1,40	1,40
1	0,5	3	5,5	0,72	0,71
2	1	1	2,3	0,31	0,30
2	1	2	8	0,18	0,18
2	1	3	3,7	0,14	0,14
2	0,5	1	2,7	0,63	0,63
2	0,5	2	8,9	0,33	0,33
2	0,5	3	6,5	0,39	0,39
3	1	1	8,18	0,44	0,44
3	1	2	6,02	0,26	0,26
3	1	3	3,4	0,20	0,20
3	0,5	1	2,4	0,86	0,86
3	0,5	2	8,4	0,45	0,45
3	0,5	3	3,8	0,38	0,38

3.4 Conclusiones del Capítulo.

1. El Acero de los eslabones fue investigado por el Instituto de Aplicaciones para la Optimización de Materiales, Procesos y Tratamientos Térmicos “Dr. Sommer Material Technology” de Alemania en su Reporte No. 2008 – 17173 – 1, que se muestra en el Anexo 1 y en el cual se certifica que el acero posee una Resistencia Mecánica muy elevada.
2. Considerando el tamaño máximo posible a descargar en el TP1, teniendo en cuenta la más grande existente en la cantera, de diámetro 1,5 m, de forma esférica y conociendo el peso específico, se elaboró un modelo de Hertz para calcular el desplazamiento estático que tendría una piedra de estas características apoyada sobre un colchón de tierra caliza, tal como el que se supone deba existir en el TP1 cuando las piedras golpeen y considerando el desplazamiento estático provocado por dicha piedra apoyada sobre la tablilla y su sistema de apoyos elásticos, se calculó entonces el desplazamiento estático resultante en cada caso de carga. De este análisis se puede concluir que el impacto de la piedra directamente sobre uno de los apoyos sería muy grave desde el punto de vista del coeficiente de carga dinámica, si no hay apoyo en el lugar del apoyo el desplazamiento estático de la tablilla es mucho mayor y se amortigua el impacto. Si el punto de impacto se acerca a los empotramientos aunque no exista apoyo en el lugar del impacto, la situación también empeora. Queda claro también que el colchón de tierra caliza sobre las tablillas amortigua considerablemente el impacto de las piedras.
3. Considerando estos coeficientes de cargas dinámicas se calcularon las tensiones dinámicas y se evaluó la resistencia a las sobrecargas instantáneas dinámicas de los eslabones. Se concluyó que si el eslabón estuviera realmente acoplado a la tablilla como un elemento absolutamente rígido ($\varphi = 1$), su capacidad resistente a un impacto, incluso amortiguado por el colchón de arcilla, que esta normalmente sobre las tablillas, provocado por una piedra de 1,5 m sería nula, o sea, con excepción de para el Caso 1 que es un caso extremadamente idealizado las tensiones no sólo superan el límite de fluencia del acero de los eslabones, sino su resistencia máxima.

En la realidad el eslabón tiene una conexión elástica con la tablilla, cuyo coeficiente de rigidez es difícil de pronosticar, pero en la propia Tabla 3.7 se muestran los resultados en esos mismos puntos con un coeficiente de rigidez intermedio entre el empotramiento rígido ($\varphi = 1$) y la articulación rígida pura ($\varphi = 0$), o sea, ($\varphi = 0,5$) y se aprecia como las tensiones disminuyen, pero también en todos los casos las tensiones superan las tensiones límites y un impacto de este orden puede provocar perfectamente la aparición de una grieta que desencadene un proceso de fisuración progresiva y la fractura por fatiga.

4. Teniendo en cuenta que el régimen de explotación del TP1 con relación al tamaño de las piedras que procesa es completamente inestable y aleatorio se realizó un estudio durante dos semanas de la frecuencia de aparición de piedras de gran tamaño y se obtuvo la siguiente cuadro de frecuencias: 0,4 % de piedras entre 1 y 1,5 m de diámetro: $\beta_1 = 0,04$; 1,6 % de piedras entre 0,5 y 1 m de diámetro: $\beta_2 = 0,16$; 48 % del tiempo de piedras entre 0,2 y 0,5 m de diámetro: $\beta_3 = 0,48$; y el 50 % restante de piedras con diámetros menores de 0,2 m: $\beta_4 = 0,50$ y utilizando la Hipótesis Acumulativa se cálculo una Tensión Equivalente para el cálculo del factor de seguridad a la fatiga según el Método Clásico bajo régimen estable con ciclo de trabajo intermitente correspondiente a cada caso. El factor de seguridad resultante a la fatiga da, con excepción del Caso 1 idealizado de carga en que da superior a 1 en algunos situaciones, siempre da menor que 1 lo que confirma, que a pesar del acero muy resistente, los eslabones no son capaces de soportar los impactos cíclicos de las piedras y fallan por fatiga.
5. Se concluye que la existencia de un apoyo directamente en la posición de los eslabones es lo que provoca que estos se vean sometidos a torsión, lo que crea tensiones tangenciales de torsión extremadamente grandes que son las causantes directas de la falla de los mismos.

Conclusiones Generales

1. Se profundizó en la Teoría General de los Transportadores de Tablillas y en las particularidades del Transportador Alimentador TP1 de sus tablillas, apoyos y eslabones, así como de su Plataforma Alimentadora y de los camiones empleados en la alimentación. Se establecieron los parámetros fundamentales del Transportador Alimentador TP1 de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” y se caracterizó la avería de los eslabones.
2. Se profundizó en los conceptos de Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos y en los Métodos Generales de Solución de Vigas Hiperestáticas y se desarrolló el Método General de Solución de Vigas Hiperestáticas con Apoyos Elásticos y Empotramientos Elásticos lo cual constituye la Novedad Científica Fundamental de la Investigación, ya que estos son conceptos nuevos y dicho método no aparece descrito en la literatura.
3. Al diseñar la ingeniería de la Planta de Trituración y Secado de la Empresa “Cementos Cienfuegos S.A.” se cometieron varios errores al colocar en primer lugar la Plataforma Alimentadora del Transportador Alimentador TP 1 muy elevada con relación a la Estera del Transportador, a casi a 12 m de altura y la descarga del TP1 a más de 2,5 m de diferencia con relación al nivel de la Criba, sin valorar que en las condiciones cubanas podían llegar a la Planta piedras de gran tamaño, con pesos que pueden alcanzar hasta 7 toneladas o más.. Una piedra de estas dimensiones dejada caer desde esas alturas provoca cargas de impacto excesivamente grandes que según Investigaciones realizadas anteriormente afectó sensiblemente la integridad estructural de la Criba y se vio la necesidad y la posibilidad real de acercar la descarga a la criba. Esta situación ha continuado provocando afectaciones en el sistema, como son las reiteradas averías por fractura en los eslabones del Transportador.

Producto de los frecuentes y reiterados impactos de las cargas de operación, a principios del año 2006, apenas transcurrido un año de explotación aparecieron las primeras grietas de fatiga en ambos laterales de la Criba, que provocaron reiteradas reparaciones en “situ”, con un total de 570 horas de paradas hasta que fueron sustituidos por los laterales nuevos. La pérdida económica para la Empresa en este tiempo de parada fue de 6 208 440 USD. En la actualidad se está presentando una situación similar con los eslabones del transportador lo que ha motivado la presente investigación.

4. El coeficiente de carga dinámica como se conoce depende del desplazamiento estático del punto de impacto. Se analizaron diferentes casos de carga para poder evaluar la incidencia que posee la posición del impacto y de los apoyos en el desplazamiento estático del sistema y por lo tanto en el coeficiente de carga dinámica. Se evaluaron tres variantes diferentes de número y ubicación de apoyos elásticos, diferentes tipos de cargas, y diferente posición del punto de impacto para establecer la influencia de la elasticidad de las tablillas, la elasticidad y posición de los apoyos de las tablillas y la propia elasticidad de los eslabones en la magnitud del desplazamiento estático del punto de impacto, en la magnitud del momento en el empotramiento (eslabones) y de la carga radial sobre estos últimos. En general se concluye que desde el punto de vista del desplazamiento del punto de impacto y por lo tanto del menor coeficiente de carga dinámica es que se elimine el apoyo elástico central de manera que la piedra impacte en una zona elástica de la tablilla. Esta condición aumenta un poco el Momento Flector Máximo sobre la Tablilla con relación al caso inicial (Caso 1), lo cual sería necesario evaluar que incidencia pudiera tener en la resistencia de las tablillas, sin embargo, por ejemplo en el Caso 3 donde el desplazamiento en el punto de impacto es mayor, el Momento Flector máximo es menor que en el Caso 2. Desde el punto de vista de la fuerza de reacción en el eslabón el Caso 3 es también menor que el Caso 2. En el Caso 3 el Momento en el Eslabón (Empotramiento Elástico) es también menor que en el Caso 2.

Se concluye finalmente que la mejor ubicación de los apoyos de las tablillas estudiados es la correspondiente al Caso 3 desde todos los puntos de vista.

5. El Acero de los eslabones fue investigado por el Instituto de Aplicaciones para la Optimización de Materiales, Procesos y Tratamientos Térmicos “Dr. Sommer Material Technology” de Alemania en su Reporte No. 2008 – 17173 – 1, que se muestra en el Anexo 1 y en el cual se certifica que el acero posee una elevada Resistencia.
6. Considerando el tamaño máximo posible a descargar en el TP1, teniendo en cuenta la más grande existente en la cantera, de diámetro 1,5 m, de forma esférica y conociendo el peso específico, se elaboró un modelo de Hertz para calcular el desplazamiento estático que tendría una piedra de estas características apoyada sobre un colchón de tierra caliza, tal como el que se supone deba existir en el TP1 cuando las piedras golpeen y considerando el desplazamiento estático provocado por dicha piedra apoyada sobre la tablilla y su sistema de apoyos elásticos, se calculó entonces el desplazamiento estático resultante en cada caso de carga. De este análisis se puede concluir que el impacto de la piedra directamente sobre uno de los apoyos sería muy grave desde el punto de vista del coeficiente de carga dinámica, si no hay apoyo en el lugar del apoyo el desplazamiento estático de la tablilla es mucho mayor y se amortigua el impacto. Si el punto de impacto se acerca a los empotramientos aunque no exista apoyo en el lugar del impacto, la situación también empeora. Queda claro también que el colchón de tierra caliza sobre las tablillas amortigua considerablemente el impacto de las piedras.

7. Considerando estos coeficientes de cargas dinámicas se calcularon las tensiones dinámicas y se evaluó la resistencia a las sobrecargas instantáneas dinámicas de los eslabones. Se concluyó que si el eslabón estuviera realmente acoplado a la tablilla como un elemento absolutamente rígido ($\varphi = 1$), su capacidad resistente a un impacto, incluso amortiguado por el colchón de arcilla, que esta normalmente sobre las tablillas, provocado por una piedra de 1,5 m sería nula, o sea, con excepción de para el Caso 1 que es un caso extremadamente idealizado las tensiones no sólo superan el límite de fluencia del acero de los eslabones, sino su resistencia máxima. En la realidad el eslabón tiene una conexión elástica con la tablilla, cuyo coeficiente de rigidez es difícil de pronosticar, pero en la propia Tabla 3.7 se muestran los resultados en esos mismos puntos con un coeficiente de rigidez intermedio entre el empotramiento rígido ($\varphi = 1$) y la articulación rígida pura ($\varphi = 0$), o sea, ($\varphi = 0,5$) y se aprecia como las tensiones disminuyen, pero también en todos los casos las tensiones superan las tensiones límites y un impacto de este orden puede provocar perfectamente la aparición de una grieta que desencadene un proceso de fisuración progresiva y la fractura por fatiga.
8. Teniendo en cuenta que el régimen de explotación del TP1 con relación al tamaño de las piedras que procesa es completamente inestable y aleatorio se realizó un estudio durante dos semanas de la frecuencia de aparición de piedras de gran tamaño y se obtuvo la siguiente cuadro de frecuencias: 0,4 % de piedras entre 1 y 1,5 m de diámetro: $\beta_1 = 0,04$; 1,6 % de piedras entre 0,5 y 1 m de diámetro: $\beta_2 = 0,16$; , 48 % del tiempo de piedras entre 0,2 y 0,5 m de diámetro: $\beta_3 = 0,48$; y el 50 % restante de piedras con diámetros menores de 0,2 m: $\beta_4 = 0,50$ y utilizando la Hipótesis Acumulativa se cálculo una Tensión Equivalente para el cálculo del factor de seguridad a la fatiga según el Método Clásico bajo régimen estable con ciclo de trabajo intermitente correspondiente a cada caso.

El factor de seguridad resultante a la fatiga da, con excepción del Caso 1 idealizado de carga en que da superior a 1 en algunas situaciones, siempre da menor que 1 lo que confirma, que a pesar del acero muy resistente, los eslabones no son capaces de soportar los impactos cíclicos de las piedras y fallan por fatiga.

9. Se concluye que la existencia de un apoyo directamente en la posición de los eslabones es lo que provoca que estos se vean sometidos a torsión, lo que crea tensiones tangenciales de torsión extremadamente grandes que son las causantes directas de la falla de los mismos.

Recomendaciones

A partir de los resultados de este trabajo se recomienda lo siguiente:

1. Se recomienda continuar profundizando en la investigación en lo relativo a la posición de los apoyos de las tablillas, teniendo en cuenta fundamentalmente que la existencia de un apoyo directamente en la posición de los eslabones es lo que provoca que estos se vean sometidos a torsión, lo que crea tensiones tangenciales de torsión extremadamente grandes que son las causantes directas de la falla de los eslabones.
2. Se recomienda evaluar la posibilidad de diseñar una resbaladera que haga que las piedras grandes rueden suavemente hasta una posición adelantada del TP1 y la tierra caliza y las piedras pequeñas pasen a través de las vigas de la misma separadas unos 50 cm entre ellas de manera que no puedan pasar piedras mayores que esa dimensión.

Referencia Bibliográfica.

1. Goytisolo R. Perfeccionamiento de los Esquemas de Análisis y de los Métodos de Cálculo de los Elementos de Máquinas y Equipos. 2005 ;
2. Goytisolo R. . Una formulación más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. 2005 Oct 12;
3. Feodosiev V.I. Resistencia de Materiales. 3rd ed. Moscú: Editorial MIR; 1985.
4. Beer F.P, Jonhston E.R . Mecánica de los Materiales. 2nd ed. Colombia: Mc Graw – Hill; 1993.
5. Pisarenko G.S, Yakovlev A.P, Matveev V.K. Manual de Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR; 1989.
6. Fitzgerald F. Mecánica de Materiales. México: Editorial Alfaomega S.A; 1996.
7. Fogiel M. Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids. New Jersey: Editorial REA; 1988.
8. Mott R.L. Resistencia de Materiales Aplicada. 3rd ed. México: Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A; 1996.
9. Spiegel L, Limbrunner G.F. Applied Statics and Strength of Materials. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, Inc; 1999.
10. Olsen G.A. Elements of Mechanics of Materials. New York: John Wiley & Sons; 1952.
11. Casals, J. M, Ríos, R, Villellas, A. Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón. 1997 11 Abril 9;
12. Broek, D. Control for the Chemical Process Industries. St. Louis: The Materials Technology Institute of the Chemical Process Industries. Inc; 1983.
13. Volmir A. Problemas de Resistencia de Materiales. Moscú: Edit. MIR; 1986.
14. Nodal, Fernando. Estudio Teórico y Experimental del Empotramiento Elástico. 2003 ;62.
15. Hidalgo, Carlos. Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes tipos de cojinetes de rodamientos. 2009 ;59.

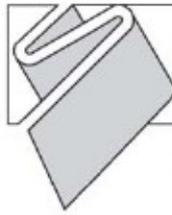
Bibliografía

1. Goytisoló R. . Una formulación más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. 2005 Oct 12;
2. Solecki R. , Jai R. Advanced Mechanics of Materials. Oxford University Press. 2003 ;
3. Den Hartog, J.P. Advanced Strength of Materials. New York: McGraw / Hill Company; 1952.
4. Goytisoló R. Algunas consideraciones acerca del Planteamiento de la Condición de Resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Moh. 1989 ;
5. Gurney, T. R. An analysis of some fatigue crack propagation data for steels to pulsation tension loading. Welding Inst. Res. Rept. 1978 ;59.
6. Romvari P. Análisis de las regularidades del desarrollo de las grietas de fatiga en los materiales. Moscú: Probl. Prochnosti ; 1980.
7. Spiegel L, Limbrunner G.F. Applied Statics and Strength of Materials. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, Inc; 1999.
8. Mott R.L. Applied Strength of Materials. 2nd ed. New Jersey: Editorial Prentice-Hall; 1990.
9. Broek, D. Control for the Chemical Process Industries. St. Louis: The Materials Technology Institute of the Chemical Process Industries. Inc; 1983.
10. Faires V.M. Diseño de Elementos de Máquinas. México: Editorial UTEHA; 1996.
11. Shigley, J. E, Mitchell, L. D. Diseño en Ingeniería Mecánica. México: Editorial McGraw Hill; 1985.
12. Shigley, J.E , Mischkie, C. Diseño en Ingeniería Mecánica. México: Editorial McGraw Hill Interamericana; 2001.
13. Dobrovolski V. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial MIR; 1980.

14. Ivanov M.N. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial Vichaya Schkola ; 1991.
15. Reshetov, D. Elementos de Máquinas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación; 1985.
16. Olsen G.A. Elements of Mechanics of Materials. New York: John Wiley & Sons; 1952.
17. Hidalgo, Carlos. Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes tipos de cojinetes de rodamientos. 2009 ;59.
18. Nodal, Fernando. Estudio Teórico y Experimental del Empotramiento Elástico. 2003 ;62.
19. Casals, J. M, Ríos, R, Vilellas, A. Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón. 1997 11 Abril 9;
20. Avilés R. Fatiga de materiales en el diseño y análisis mecánico. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Bilbao; 1995.
21. Rolfe S.T, Barson J.M. Fracture and fatigue control in structures. Applications of Fracture Mechanics. New Jersey: Prentice Hall, Inc; 1977.
22. Potapov V.D. Fundamentos de las Teorías de la Elasticidad y de la Plasticidad. Moscú: Vischaya Sckola; 1990.
23. Orlov, P. Ingeniería del Diseño Tomo I. Moscú: Editorial MIR; 1985.
24. Pisarenko G.S, Yakovlev A.P, Matveev V.K. Manual de Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR; 1989.
25. Machin EB, Gonzales JS. Maquinas de Transporte Continuo.
26. Partón, V. Z. Mecánica de la Destrucción. Moscú: Editorial MIR; 1990.
27. Goytisolo R. Mecánica de la Fractura. 2000 ;
28. Beer F.P, Jonhston E.R . Mecánica de los Materiales. 2nd ed. Colombia: Mc Graw – Hill; 1993.
29. Fitzgerald F. Mecánica de Materiales. México: Editorial Alfaomega S.A; 1996.

30. Kawasaki T. Outline of JWES standard for critical assessment of defects with regard to brittle fractures and some cases studies. Bratislava: Bratislava; 1979.
31. Goytisolo R. Perfeccionamiento de los Esquemas de Análisis y de los Métodos de Cálculo de los Elementos de Máquinas y Equipos. 2005 ;
32. Blake, A. Practical Fracture Mechanic in Design. New York: Marcel Dekker. Inc; 1996.
33. Fogiel M. Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids. New Jersey: Editorial REA; 1988.
34. Miroljubov I. Problemas de Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR ; 1935.
35. Volmir A. Problemas de Resistencia de Materiales. Moscú: Edit. MIR; 1986.
36. Feodosiev V.I. Resistencia de Materiales. 3rd ed. Moscú: Editorial MIR; 1985.
37. Seely F.B. Resistencia de Materiales. México: Editorial Hispano Americana; 1954.
38. Stiopin P. A. Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR; 1985.
39. Timoshenko S. Resistencia de Materiales. Madrid: Editorial ESPASA_CALPE S.A; 1962.
40. Mott R.L. Resistencia de Materiales Aplicada. 3rd ed. México: Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A; 1996.

Anexos



Dr. Sommer

MATERIALS TECHNOLOGY

Application Institute
for the Optimisation
of Material, Process and
Heat Treatment Applications

Documentation
of a material investigation

Report No. 2008-17173-1
for:

Aumund Fördertechnik GmbH
D-47495 Rheinberg, Germany

July 11, 2008

Reports & Lab
independent expert with own
metallurgical lab



Activity area SoLab

In case of questions, contact:

[Dr. Peter Sommer](#)
[Dipl.-Ing. Frank Bartkowski](#)

Dr. Sommer Werkstofftechnik GmbH
Hellenthalstrasse 2 · D-47661 Issum
Telephone: 02835 - 9606-0 Telefax: 02835 - 9606-60
E-mail: info@werkstofftechnik.com
www.werkstofftechnik.com



DAP-PL-3476.00

Documentation of a material investigation

Report No.: 2008-17173-1

Customer: AUMUND Fördertechnik GmbH
Saalhoffer Str. 17
D-47495 Rheinberg
Mr. Liß

Contact:

Order Date: 17.06.2008
Part received: 17.06.2008
Release of Order: 26.06.2008

Task: Identification of the cause of cracks

Part: Chain link, Ref. 98817
Material: not specified

Storage of part(s): Parts will be picked up by the customer
Microsection(s): The microsections will be stored for 10 years

Issum, 11 July, 2008

Pages: 13
Encl.: 5

Expert

Processed by

This document has been created electronically and is valid without signature.

Dr.-Ing. Peter Sommer



i.A. Dipl.-Ing. Juliane Fischer

1.0 Procedure

From the above client we received a fractured chain link with Ref. No. 98817 and the dimensions 300 x 260 x 250 mm, Fig. 1. This chain link came from a conveyor chain of an crusher feeder belt BPB-X-2000 and had been in use since July 2004 with 6000 hours of operation annually. The chain link exhibited a fracture in the area of the cross-hole. The first cracks were discovered in the area of the cross-hole after a running time of 27 months. In the meantime, about 50 % of the chain links are cracked in the same area.

Concerning the operating mode of the crusher feeder belt, we were told that limestone from the quarry with a side length of up to 1000 mm is tipped onto the conveyor by 60 ton trucks from a height of about 8 m. The belt was to be covered with a cushion of material. That was not always guaranteed at the beginning of the operation.

The chain link was manufactured from heat treated steel and was supposed to have a strength of about 1300 MPa. The exact quality grade of the steel was not known.

The objective of the examination was to clarify the cause of the crack of the chain link.

2.0 Examinations and Results

2.1 Macroscopic Investigations

The chain link submitted for investigation exhibited a crack in the area of the core hole, Fig. 2. The crack ran through the entire web. A lenticular incipient crack area was detected on the fracture surface, which extended from the center of the web in the direction of the cross-hole, Fig. 3. Due to the heavy corrosion and a dark deposit, it was to be clarified not clearly, whether if this had been an incipient fatigue crack, Fig. 4. However, there is a high probability that this had been an incipient fatigue fracture, since the structure of the fracture was clearly distinguishable from the residual forced fracture. The share of the fatigue fracture was about 25-30%.

2.2 Determination of Chemical Composition

The chemical composition in the core area of the chain link was determined by using an optical emission spectrometer (OES), Table 1. Due to the location of the measuring point, there was no longer any influence by the surface.

The result of the emission spectrometric analysis showed, that the examined chain link had been made from the material 37MnB5, material-No. 1.5538. Since no material specification was known, the analysis of the material 37MnB5 was shown for information only. The partially small deviations from these nominal values were neither significant nor damage relevant.

The steel batch exhibited a sufficient quantity of fine grain stabilizing alloying elements. All other accompanying elements of the residual analysis were assessed as inconspicuous and were clearly below the limiting values according to DIN EN 10020.

Nominal analysis 37MnB5, 1.5532 DIN EN 10263-4	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cr %	Cu %	Ti %	B %	Al %	N %
	0.35	max.	1.15	max.	max.	max.	max.	-	0.0008	-	-
	0.40	0.30	1.45	0.025	0.025	0.30	0.25	-	0.0050	-	-
Measuring results	0.37	0.24	1.11	0.012	0.020	0.20	0.18	0.048	0.0055	0.023	0.012
Trace elements	As %	Pb %	W %	Zn %	Sb %	Sn %	V %	Mo %	Nb %	Co %	Ni %
Measuring results	0.012	0.001	< DL	0.007	0.009	0.011	0.006	0.022	0.002	0.01	0.07
Evaluation	Aluminium/nitrogen ratio Al/N								1.92		

< DL = below detectable limit

Table 1: Analysis results of measurement and analysis evaluation

2.3 Tensile Test

For the determination of the strength values a material segment was manufactured from the chain link. From this part a round tensile test specimen acc. to DIN EN 10002 was made. The tensile test was performed at room temperature.

The test results documented in Table 2 showed, that the tensile strength was clearly above the aspired value of ≈ 1300 MPa.

Component	Dimensions of test specimen			Test results			
	Diameter [mm]	Cross section [mm ²]	Gauge length L ₀ [mm]	R _{p0,2} [MPa]	R _m [MPa]	A [%]	Z [%]
	Requirements :				-	≈ 1300	-
Chain link	10.00	78.54	50	1497	1820	8	22

Tabelle 2: Ergebnisse des Zugversuchs an dem Kettenglied

2.4 Metallographic Investigations

As shown in Fig. 5, a microsection was extracted from the area of the crack flank and metallographically prepared for the metallographic examination. Even in an unetched condition, numerous manganese sulfides and for boron-alloyed typical titanium carbonitrides were already visible. The content of oxidic inclusions was inconspicuous, which is why it was decided to forego a formal assessment of the degree of purity according to DIN 50602.

The surface was slightly decarburized and the entire forged surface exhibited copper-enriched grain boundaries at a depth of approx. 20-30 μm , Fig. 6 and 7. Below the incipient fatigue fracture, further incipient cracks existed in the area of these grain boundaries, Fig. 8. A small quantity of corrosion products had been deposited on the surface.

The residual forced fracture was characterized by secondary cracks, which were preferably oriented on manganese sulfides and titanium carbonitrides, Fig. 9 to 11. For better contrast, these images were documented in an unetched condition.

The heat treated microstructure consisted of a fine-acicular tempered martensite microstructure, Fig. 12. Here, too, the titanium carbonitrides could be clearly seen.

2.5 Investigations in the Scanning Electron Microscope (SEM)

For the assessment of copper segregation, measurements were implemented by using a scanning electron microscope by means of energy dispersive X-ray analysis (EDX) at 20 kV acceleration voltage. The EDX measuring method does not allow a quantitative specification of the carbon content. The contents of this element were assessed qualitatively only.

The measurements indicated, that copper and nickel had been enriched at the grain boundaries in comparison to the initial concentrations by the factor 10, Fig. 13a to 13c.

2.6 Hardness Test

The hardness test was performed in the core of the component according to the Brinell method, Table 3. The hardness values shown in Table 3 correspond to the original read-out values. The mean value was corrected according to the specifications in DIN EN ISO 6507-1 - method M2, with the measuring value deviation b as determined from long-term device monitoring. The standard measuring uncertainty U_{Corr} was determined and documented.

Measuring position	Measured hardness values [HB 2,5/187,5]					Mean value [HB]	b [HB]	corr. mean value [HB]	U_{Corr} [HB]	Test result [HB]
	1. value	2. value	3. value	4. value	5. value					
A	532	529	526	527	525	528	-0.75	529	± 3.5	421 ± 3.5

Table 3: Results of Brinell hardness tests (core)

3.0 Summary

The result of this examination indicates that the fracture had started as a fatigue fracture and that it had finally completely ruptured with a considerably large residual forced fracture surface. The material used to manufacture the part corresponded to a boron-alloyed heat treated steel of type 37MnB5, material No. 1.5532, and was without any objections.

The tensile strength was clearly above the aspired value of 1300 MPa. However this was classified as non damage relevant.

The heat treated microsection was also structured optimally fine-acicular. Tempered martensite was present exclusively. The surface was slightly decarburized, which was viewed as being typical for forging.

In contrast to that, the enrichment of copper and nickel at the grain boundaries was conspicuous. An enrichment of this kind occurs, if there is a high level of oxygen present in the furnace during austenitization in the heat treatment process. The oxygen oxidizes the iron, while causing the oxidation-stable elements copper and nickel to enrich at the surface. Due to this enrichment, a concentration slope is created in comparison to the base material, which leads to a diffusion of these two elements at the grain boundaries.

Soft copper has a yield strength of only 40-80 MPa and a tensile strength of approx. 200 MPa. In the microscopic range, the grain boundaries probably consists of a thinly spread pure copper-nickel alloy, resulting in a significant reduction of the yield strength and tensile strength in the area near the surface.

Extensive studies of this subject were implemented in the Technology Forum Werkstoff & Wärme (Material & Heat), which were published in (1).

The copper enrichment at the grain boundaries can be prevented either by steel batches with a particularly low content of copper and nickel or by means of a correspondingly adjusted furnace atmosphere in the heat treatment furnace. Steel batches with a low copper and nickel content can only be obtained through the use of LD production batches. The high level of scrap used in the production of electric steel always results in significantly higher copper and nickel contents.

However, the small area of the fatigue fracture, respectively, the very large area of the residual forced fracture, clearly indicates that the part had been exposed to an extremely high load. This high load level has triggered a fatigue fracture with very fine incipient cracks at the weakened grain boundaries. The operating time of at least 27 months with a total of approx. 68,000 cycles also clearly indicates that the formation of these incipient cracks would not have occurred under „usual“ operating conditions. Otherwise, failures would have occurred much earlier. Therefore, it must be assumed that individual events with very high stresses or loads have probably occurred, which have caused the incipient cracks as well as the continued propagation of a crack towards a fatigue fracture.

Literature

(1): Sommer P.: Unerwünschte Sauerstoffreaktionen bei der Wärmebehandlung. Der Wärmebehandlungsmarkt 3/2006, Page 5-9. (refer to encl.)

End of Report



Fig. 1: Documentation of the chain link supplied for examination

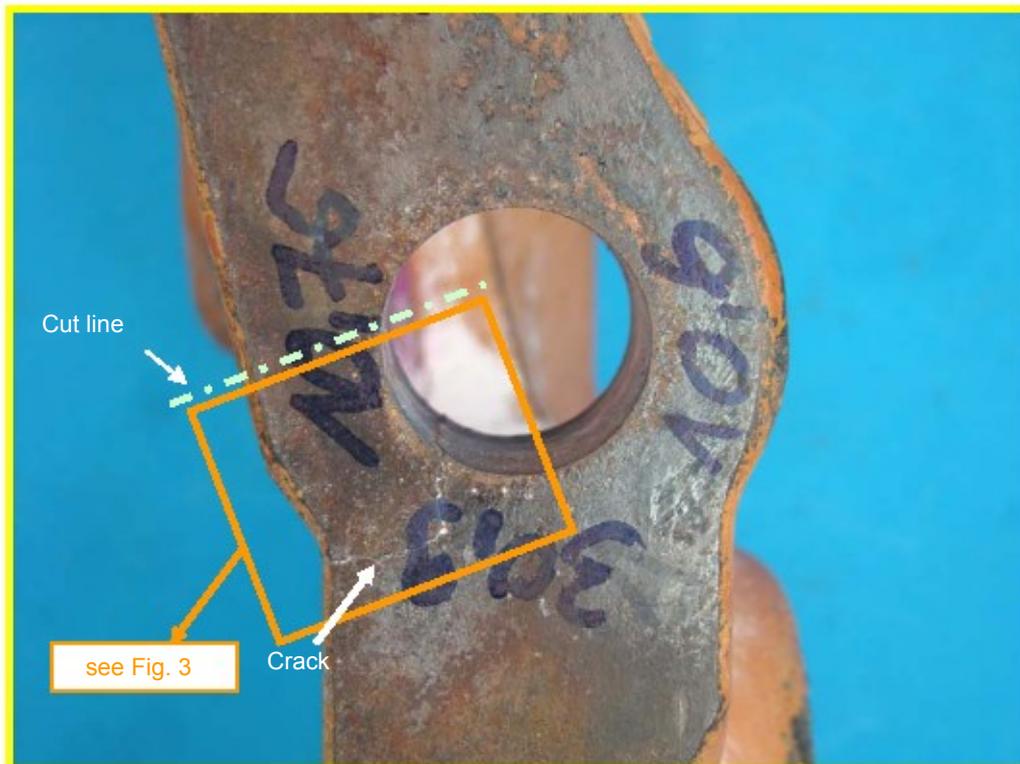


Fig. 2: Crack in the area of cross-hole

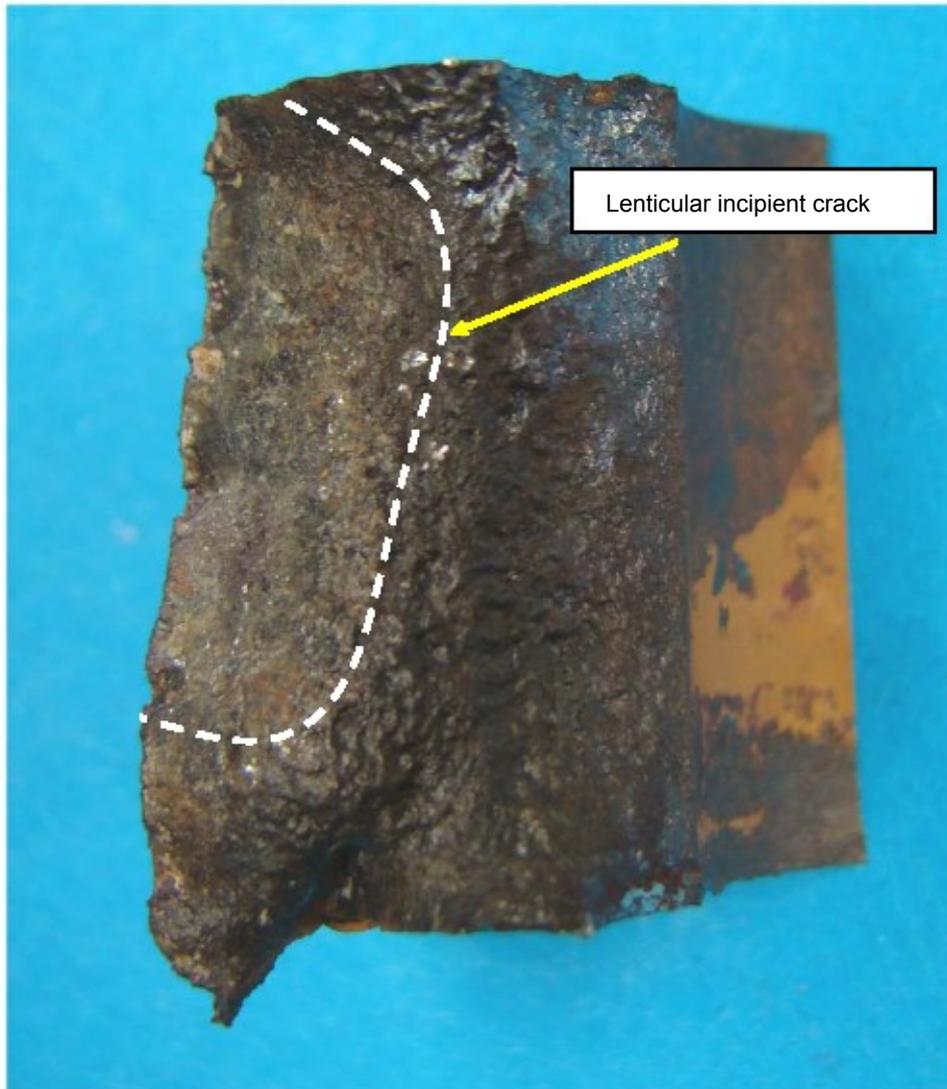


Fig. 3: Detail view of exposed crack surface

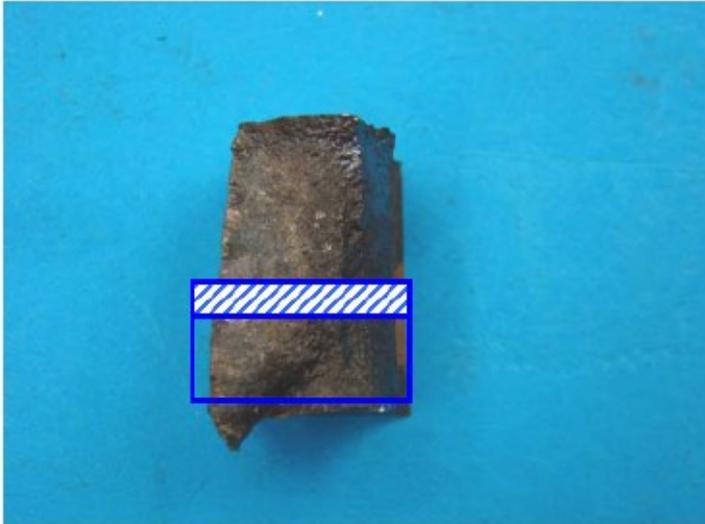


Fig. 4
Marking of microsection location

Component: Chain link
Position: Fracture surface
File: 17173b08

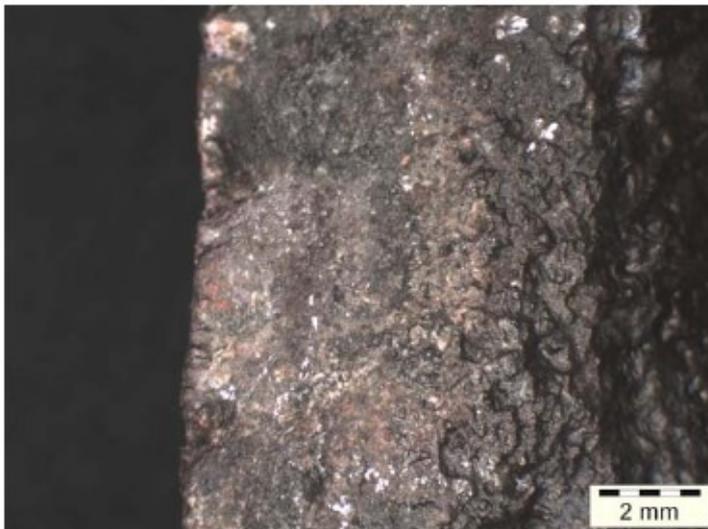


Fig. 5
Fracture surface in the area of the
lenticular incipient crack

Component: Chain link
Position: Fracture surface
File: 17173m01
Magnification: 7,5 : 1

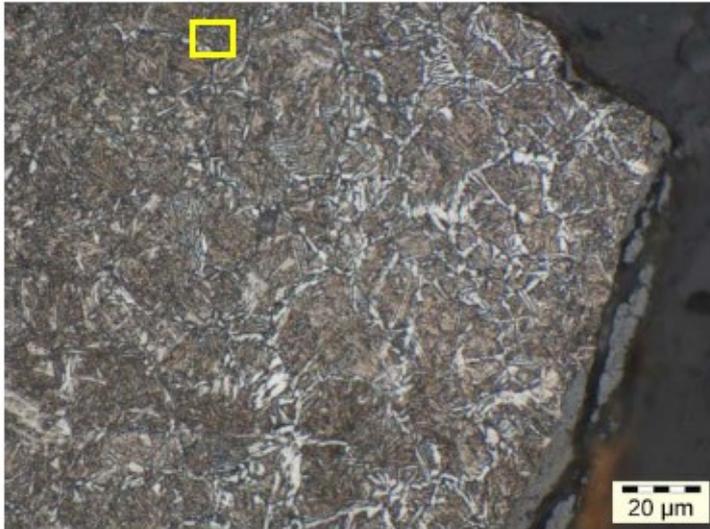


Fig. 6
 Start of crack on the decarburized forged surface

Component: Chain link
 Position: Start of crack on the surface
 File: 17173m12d
 Magnification: 500 : 1
 Etching medium: 3% nitric acid

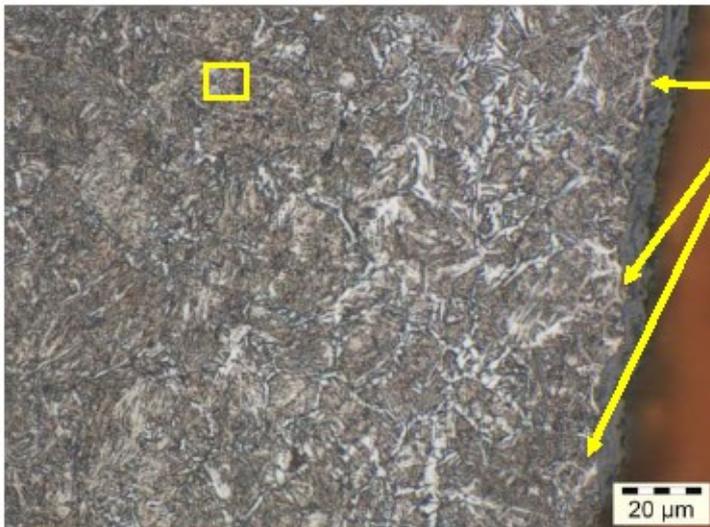


Fig. 7
 Decarburization and copper segregation at the grain boundaries

Component: Chain link
 Position: Surface
 File: 17173m10d
 Magnification: 500 : 1
 Etching medium: 3% nitric acid



Fig. 8
 Further incipient cracks at the surface covered with copper grain boundaries

Component: Chain link
 Position: Surface
 File: 17173m11d
 Magnification: 500 : 1
 Etching medium: 3% nitric acid



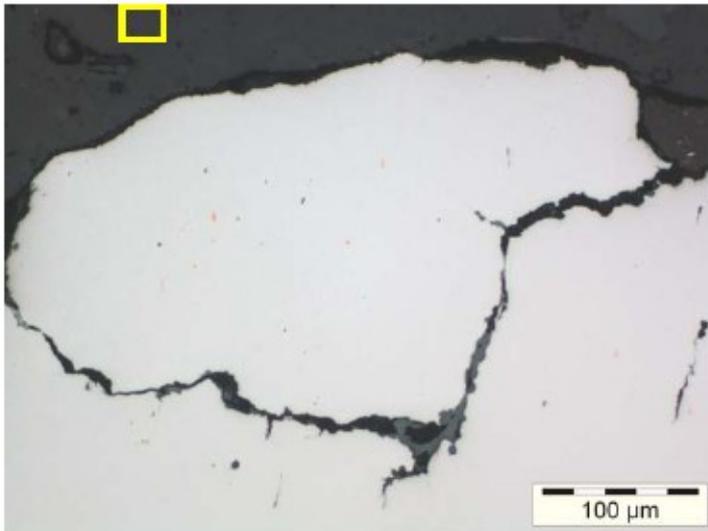


Fig. 9
Residual forced fracture surface with
crack orientation on manganese sulfides

Component: Chain link
Position: Fracture surface
File: 17173m04c
Magnification: 200 : 1
Unetched state

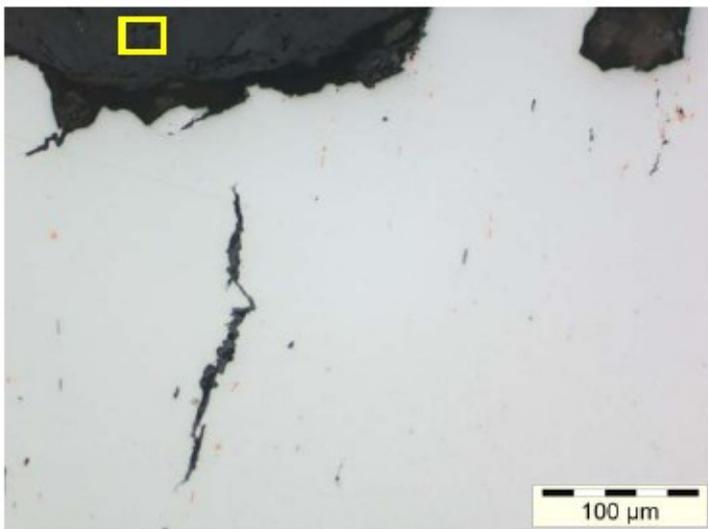


Fig. 10
Residual forced fracture surface with
crack orientation on manganese sulfides

Component: Chain link
Position: Fracture surface
File: 17173m05c
Magnification: 200 : 1
Unetched state

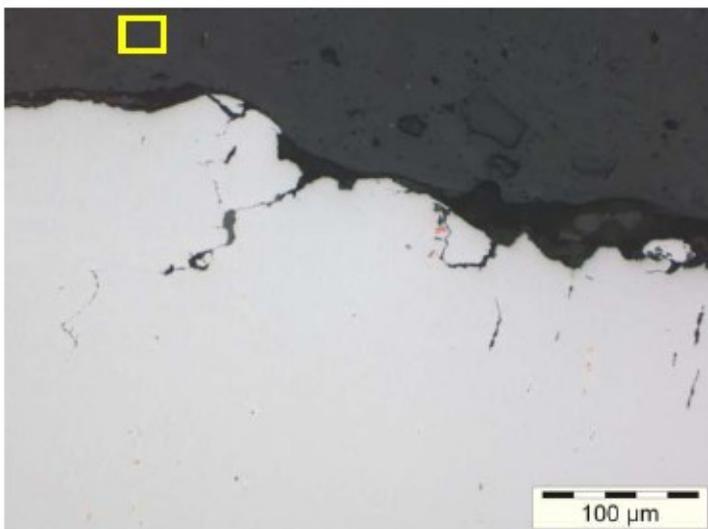


Fig. 11
Residual forced fracture surface with
crack orientation on manganese sulfides
and titanium carbonitrides

Component: Chain link
Position: Fracture surface
File: 17173m06c
Magnification: 200 : 1
Unetched state



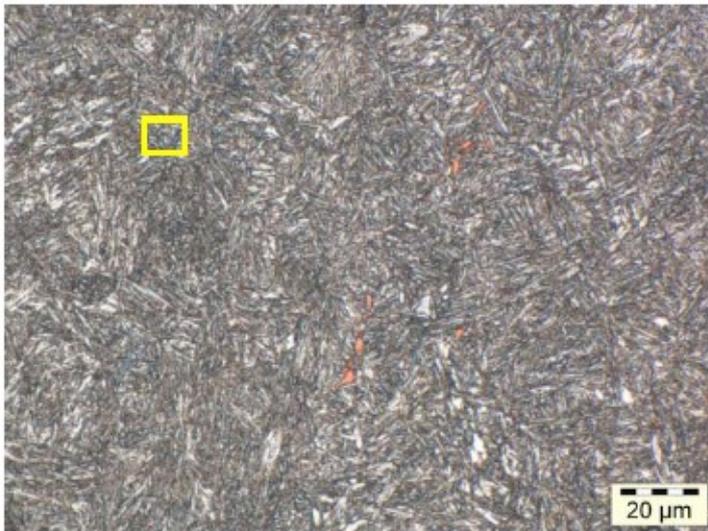


Fig. 12
Fine-acicular martensitic heat treated
microstructure, manganese sulfides and
titanium carbonitrides

Component: Chain link
Position: Core
File: 17173m09d
Magnification: 500 : 1
Etching medium: 3% nitric acid





Fig. 13a
 Marking of measuring position

Component: Chain link
 Position: Grain boundary
 File: 17173m11d

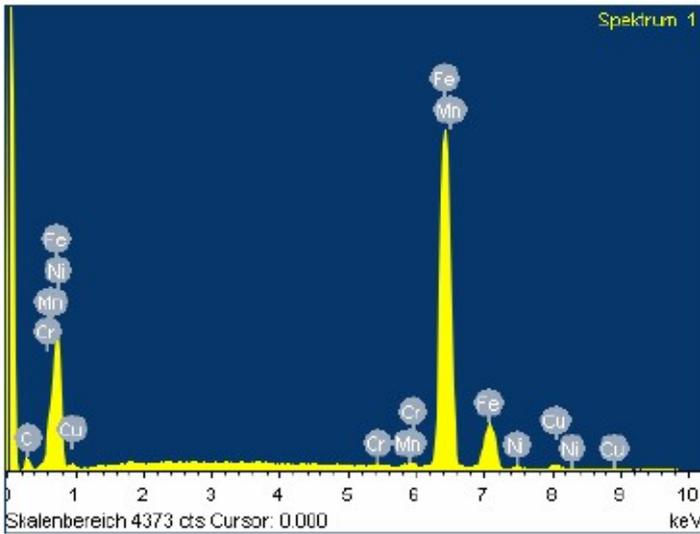


Fig. 13b
 EDX spectrum at marked position in
 Fig. 13a

Component: Chain link
 Position: Grain boundary

Element
 Weight %
 Weight %
 Sigma Atom %

Element	Weight %	Weight %	Sigma Atom %
CK	8.63	0.61	30.59
Cr K	0.29	0.09	0.23
Mn K	0.81	0.14	0.63
Fe K	86.86	0.65	66.19
Ni K	1.40	0.19	1.01
Cu K	2.01	0.23	1.35

Fig. 13c
 Quantitative results of

EDX spectrum in Fig. 13b

Component: Chain link
 Position: Grain boundary

Unerwünschte **Undesired** Sauerstoffreaktionen **Oxygen Reactions** bei der Wärmehandlung **in Heat Treatment**



Dr. Peter Sommer

Bei der Wärmebehandlung werden die zu behandelnden Bauteile naturgemäß einer hohen Temperatur ausgesetzt. Bereits bei Temperaturen ab 200°C ist die Temperatur ausreichend hoch, dass es zu chemischen Reaktionen zwischen der Stahloberfläche und dem Sauerstoff der Luft kommt. Mit zunehmender Behandlungstemperatur nehmen die Wechselwirkungen zwischen der umgebenden Atmosphäre und der Bauteiloberfläche zu. Zur Vermeidung dieser meist unerwünschten Reaktionen an der Oberfläche werden unterschiedlichste Schutzmaßnahmen ergriffen, die bei richtiger Anwendung die unerwünschte Reaktion verhindern. Zu den Maßnahmen zählen u. a.:

- Behandlung in Salzschnmelzen
- Verwendung von schützenden Folien
- Einsatz inerter Schutzgase, z.B. Stickstoff, Argon
- Verwendung neutraler Schutzgase, z.B. CO/H₂-haltige Gase
- Wärmebehandlung unter Vakuum
- Einpacken in verbrauchte und inaktive Pulver
- Bestreichen der Oberfläche mit Schutzpasten

Die Schutzwirkung der vorgenannten Maßnahmen ist nur dann zu gewährleisten, wenn sowohl die Auswahl als auch die Anwendung sachgerecht durchgeführt werden. Das Nichtbeachten des Zusammenspiels der Behandlungstemperatur mit der Umgebungsatmosphäre und dem Zustand der Stahloberfläche führt immer wieder zu Fehlern an wärmebehandelten Bauteilen.

By Dr. Peter Sommer

By nature of the heat treatment process, the treated components are subjected to high temperatures. Temperatures from 200°C and above are already high enough to allow chemical reactions between the steel surface and the oxygen in the air to take place. With rising heat treatment temperatures, the interactions between the ambient atmosphere and the surface of the component are increasing, as well. To avoid these, mostly unwanted, reactions on the surface, various different preventive measures are taken, which, if applied correctly, prevent the unwanted reactions. These measures include, among others:

- treatment in salt bathes
- use of protective foils
- use of inert protective gases, such as nitrogen, argon
- use of protective atmospheres, such as gases containing CO/H₂
- vacuum heat treatment
- packing in spent and inactive powders
- covering the surface with protective paste

The protective effect of the above measures can only be guaranteed, if the selection as well as the application are carried out expertly and correctly. Failure to observe the interplay of the treatment temperature with the ambient atmosphere and the condition of the steel surface time and again results in defects of heat treated components.

The probably best known surface reaction is oxidation. In case of doing without a protective gas atmosphere, the oxygen existing in the air leads to oxidation and, at higher temperatures, to decarburization, as well. The formation of an oxide layer is not always undesired, in nitrocarburizing with subsequent oxidation or oxinitriding, the formation of thin, but dense Fe₃O₄ layer on the surface of the component is even desirable. It provides a high level of resistance against corrosion and thus considerably improves corrosion resistance.

In most cases, a very thin oxide layer, also described as annealing color, is hardly objectionable. These oxide layers are very thin and reflect the various wave lengths (colors) of visible light differently, thus causing the coloration on the surface. In many heat treatment shops, a poster with a color chart of these annealing colors, Fig. 1, is hanging on a wall.

This thin oxide layer is also created, if, for example, components are pre-oxidized prior to nitriding/nitrocarburizing or carburizing/carbo-nitriding. This layer is completely removed again in a

Bild 1: Farbtabelle der Anlassfarben für unlegierte Stähle

Fig. 1: Color chart of annealing colors for unalloyed steels

FARBENBEZEICHNUNG	TEMPERATUR in Celsius/°F
Weißgelb	200°
Strohgelb	220°
Goldgelb	230°
Gelbbraun	240°
Braunrot	250°
Rot	260°
Purpurrot	270°
Violett	280°
Dunkelblau	290°
Kornblumenblau	300°
Hellblau	320°
Blaugrau	340°
Grau	360°

Hochlegierte Stähle lassen die Anlassfarben erst bei höheren Temperaturen auftreten.

Die wohl bekannteste Oberflächenreaktion ist die Oxidation. Bei Verzicht auf eine Schutzgasatmosphäre führt der in der Luft vorhandene Sauerstoff zu einer Oxidbildung und bei höheren Temperaturen auch zu einer Entkohlung. Die Ausbildung einer Oxidschicht ist nicht in allen Fällen unerwünscht, beim Nitrocarburieren mit nachfolgender Oxidation bzw. beim Oxinitrieren ist die Bildung einer dünnen, aber dichten Fe₃O₄-Schicht an der Bauteiloberfläche sogar erwünscht. Sie liefert einen hohen Widerstand gegen einen Korrosionsangriff und verbessert somit die Korrosionsbeständigkeit erheblich.

In den meisten Fällen ist eine sehr dünne Oxidschicht, die auch als Anlassfarbe bezeichnet wird, kaum störend. Diese Oxidschichten sind sehr dünn und reflektieren die unterschiedlichen Wellenlängen (Farben) des sichtbaren Lichts verschieden, wodurch die Färbung der Oberfläche entsteht. In sehr vielen Wärmebehandlungsbetrieben schmückt die Farbtafel dieser Anlassfarben, Bild 1, als Poster eine Wand.

Diese dünne Oxidschicht entsteht auch dann, wenn z.B. vor dem Nitrieren/Nitrocarburieren oder Aufkohlen/Carbonitrieren voroxidiert wird. In der nachfolgenden Prozessstufe mit entsprechend hohen H₂-Gehalten wird diese Schicht wieder vollständig reduziert.

Unerwünschte Oxidbildung beim Vergüten in einem Förderbandofen

Dünne Oxidschichten sind, wie zuvor beschrieben, nicht störend und werden in H₂-haltigen Atmosphären wieder vollständig beseitigt. Wird die Oxidschicht aber zu dick, kann es zu unangenehmen Begleiterscheinungen kommen. In Bild 2a ist eine ca. 8-10 µm dicke, leicht ablösbare Schicht im metallographischen Schliff dargestellt. Eine derart dicke Oxidschicht kann bei einem kontrollierten Voroxidieren, das typischerweise bei 400°C durchgeführt wird, nicht entstehen. Diese Oxidschicht ist durch eine ungewollte Atmosphäresituation in einem Förderbandofen entstanden. Bei der Behandlung von Schüttgütern und Hohlteilen ist das Einbringen von Luftsauerstoff in den Ofenraum unvermeidbar. Unter üblichen Prozessbedingungen ist allerdings das Oxidationspotenzial bei Erreichen einer ausreichend hohen Temperatur so gering, dass eine derart starke Oxidation nicht auftritt.

Entstehen aber Störungen, z.B. durch eine zu weit geöffnete Ofentür auf der Eingangsseite oder durch starken Luftzug, der auf die Eingangstür drückt, kann die in den Ofen hineinreichende Luftzunge so groß werden, dass die hier beobachtete Oxidation eintritt. Die dann nachfolgende Reduktion in der Schutzgasatmosphäre führte in diesem Fall nur noch zu einer unvollständigen Reduktion des Oxids. Mittels energiedispersiver Röntgenanalyse (EDX) im Rasterelektronenmikroskop war sehr deutlich zu erkennen, dass in dieser leicht ablösbaren Schicht nicht reduziertes Eisenoxid und reduzierte Eisenpartikel nebeneinander vorlagen, Bilder 2b und 2c.

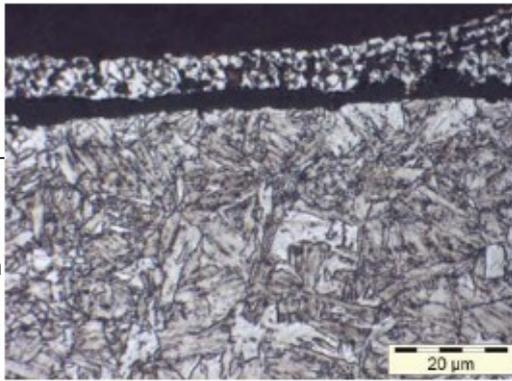


Bild 2a: Abgelöste Oberflächenschicht nach einer Vergütungsbehandlung in einem Förderbandofen

Fig. 2a: Flaked-off surface layer after tempering treatment in a conveyor furnace

subsequent process stage with correspondingly high contents of H₂.

Undesired formation of oxide during tempering in a conveyor belt furnace

Thin oxide layers, as described above, are not objectionable and are completely removed again in atmospheres containing H₂. However, should the oxide layer become too thick, there may be undesired side effects. Fig. 2a shows an easily removable layer with a thickness of approx. 8-10 µm in a metallographic section. An oxide layer of such a thickness cannot form in controlled pre-oxidation, which is typically carried out at a temperature of 400°C. This oxide layer must have been created by an unintentional atmosphere situation in a conveyor belt furnace. In the treatment of bulk goods and hollow components, the ingestion of oxygen from the ambient air into the furnace chamber is unavoidable. However, under usual processing conditions, the oxidation potential upon reaching of a sufficiently high temperature is so low, that such a heavy oxidation will not occur.

However, if disturbances are created, for example, by a wide open furnace door on the inlet side

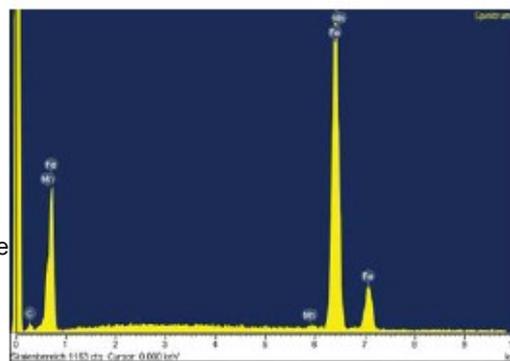


Bild 2b: EDX-Spektrum der Stahlmatrix in der abgelösten Schicht

Fig. 2b: EDX spectrum of steel matrix in the flaked-off layer

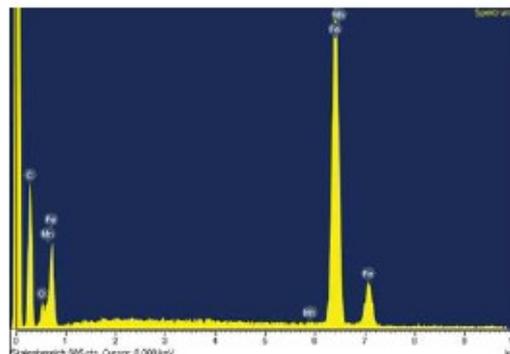
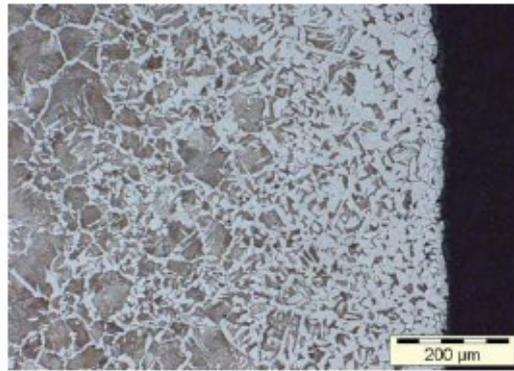


Bild 2c: EDX-Spektrum des Oxids mit Resten an Ölkohle in der abgelösten Schicht

Fig. 2c: EDX spectrum of oxide with residue of oil carbon in the flaked-off layer

Bild 3: Entkohlte Oberfläche nach einer Normalglühung ohne Schutzgas

Fig. 3: Decarburized surface after normalizing without protective gas



Selbst eine längere Verweildauer unter reduzierten Bedingungen hätte diesen Fehler nicht mehr vermeiden können. Der Oxidanteil in der Schicht hätte zwar noch abgenommen, eine Verbindung zur Stahloberfläche wäre aber nicht mehr möglich gewesen. Aufgrund des unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten des Eisenoxids hatte sich das Eisenoxid bereits weitestgehend von der Oberfläche abgelöst bzw. war stark porig geworden.

Eine kontinuierliche Messung der Atmosphäre im vorderen Teil des Förderbandofens führte recht schnell zu dem Verursacher der übermäßig intensiven Oxidbildung. Eine Schutzwand zwischen dem Ofen und dem Rolltor war entfernt worden und beim Öffnen des Rolltores war in wenigen Sekunden zu erkennen, dass der Sauerstoffgehalt im Ofenraum stark anstieg.

Unerwünschte Entkohlungen beim Glühen

Bei höheren Temperaturen kommt es nicht nur zur Oxidation, sondern auch zu Entkohlungen. Der Luftsauerstoff reagiert sowohl mit dem Eisen als auch mit dem Kohlenstoff. Bei gleicher oder größerer Oxidationsgeschwindigkeit des Eisens im Vergleich zum Kohlenstoff würde die Entkohlung gar nicht sichtbar sein. Die jeweils entkohlte Schicht würde dann ja oxidiert. Tatsächlich ist die Diffusionsgeschwindigkeit des Kohlenstoffs an die Oberfläche größer und damit wächst die Entkohlungstiefe schneller als die Oxidationsschicht. Dies führt zu den bekannten Gefügebildern einer entkohlten Randzone, nach z.B. einer Normalglühung an Luft, Bild 3.

Der Einsatz von Stickstoff als Schutzgas kann eine geringfügige Entkohlung nur in besonderen Fällen vollständig verhindern. Der Stickstoff ist dafür aber selbst gar nicht verantwortlich und auch bei Verwendung von hochreinem Stickstoff aus einer Flüssiggasanlage mit Sauerstoffgehalten unter 5 ppm ist vielfach eine leichte Entkohlung unvermeidbar. Das Bild 4 zeigt die leicht entkohlte Oberfläche eines im Röhrenofen unter Stickstoff normalisierten Bauteils.

Vermeidbar ist die Entkohlung nur dann, wenn der verwendete Wärmebehandlungssofen gasdicht ist und vor Beginn einer Glühbehandlung evakuiert wurde. Diese Bedingungen liegen bei einem Vakuumofen vor, der nach der Evakuierung zur konvektiven Erwärmung mit Stickstoff gefüllt wird.

or a strong draft acting on the inlet door, the air cone entering the furnace may become too large, causing the oxidation observed here to occur. In this case, the subsequent reduction in the protective gas atmosphere merely resulted in an incomplete reduction of the oxide. By means of energy dispersive x-ray analysis (EDX) with a scanning electron microscope, the coexistence of non-reduced iron oxide and reduced iron particles was very clearly visible in this easily removable layer, Fig. 2b and 2c.

Even a longer soaking time under reducing conditions would not have been enough to avoid this defect. While the oxide content in the layer would have been diminished, a fusion to the steel surface would no longer have been possible. Due to the different coefficient of thermal expansion of iron oxide, the iron oxide had already separated from the surface to a large extent or had become heavily porous.

A continual measurement of the atmosphere in the front section of the conveyor furnace quickly identified the cause of the excessively intensive formation of oxide. A protective wall between the furnace and the roller shutter had been removed and, when the roller shutter opened, it took only seconds to detect the sharply increased oxygen readings in the furnace.

Undesired decarburization during annealing

At higher temperatures there is not only oxidation, but also decarburization. The oxygen in the air reacts with the iron as well as with the carbon. In case of equal or greater oxidation speed of the iron in comparison to the carbon, the decarburization would not be visible at all. In this case, the respective decarburized layer would be oxidized. In fact, the diffusion speed of the carbon towards the surface is greater and thus the decarburizing depth grows faster than the oxidation layer. This leads to the well-known microstructures of a decarburized boundary zone, for example, after normalizing in air, Fig. 3.

The use of nitrogen as a protective gas is able to completely prevent a slight decarburization only in special cases. However, the nitrogen itself is not even responsible for this, and even when high-purity nitrogen from a liquid gas supply with oxygen contents below 5 ppm is used, a slight decarburization is still unavoidable in many cases. Fig. 4 shows the slightly decarburized surface of a component normalized in a tube furnace under nitrogen.

Decarburization is avoidable, only if the heat treatment furnace used is gas tight and is evacuated prior to the start of the annealing process. These conditions exist in a vacuum furnace, which after the evacuation is filled with nitrogen for convective heating. The GDOS profile in Fig. 5 shows a completely decarburization free surface after vacuum hardening.

However, decarburization also occurs at considerably lower temperatures, as strikingly shown by the results of a systematic series of measurements of the roller bearing steel 100Cr6. Soft

Das GDOS-Profil in Bild 5 zeigt eine völlig entkohlungsfreie Oberfläche nach einer Vakuumhärtung.

Zu einer Entkohlung kommt es aber auch bei erheblich niedrigeren Temperaturen, wie die Ergebnisse einer systematischen Messreihe an dem Wälzlagerstahl 100Cr6 eindrucksvoll zeigen. Das Weichglühen an Luft mit einer Dauer von jeweils 8h bei Temperaturen unter der Ac1-Umwandlungstemperatur führte zu markanten Entkohlungen, Bild 6.

Indirekte Reaktionen durch Oxidationsprozesse

Während das Eisen und der Kohlenstoff sehr intensiv mit Sauerstoff reagieren und zu den zuvor beschriebenen Reaktionen führen, findet bei den Legierungselementen Kupfer und Nickel diese Oxidation aus thermodynamischen Gründen nicht statt. Beide Elemente sind im Stahl nicht oxidationsfähig. Die Folge hiervon ist, dass sich bei einer oxidierend geführten Wärmebehandlung diese Elemente an der Oberfläche anreichern und dann über die Korngrenzen eindiffundieren, Bild 7. Diese Kupfer- und Nickelsegregation führt zu einer starken Schwächung des oberflächennahen Bereichs. Eine direkte Folge ist die Erhöhung der Rissgefahr beim Abschrecken, Bild 8, und die Bruchgefahr unter Einsatzbedingungen.

Die Gefahr der Kupfer- und Nickelsegregation ist bei höheren Kupfer- und Nickelgehalten ausgeprägter, sie tritt jedoch auch schon bei Gehalten von 0,10 % Kupfer und/oder Nickel auf.

Als sehr unangenehm ist dabei die Tatsache zu bewerten, dass eine einmal geschädigte Oberfläche, z.B. aus einer Vorbehandlung selbst dann die Risiken birgt, wenn die abschließende oder nachfolgende Wärmebehandlung nicht unter oxidierenden Bedingungen stattfindet. Dies bedeutet, dass selbst eine Vakuumwärmebehandlung nicht vor diesem Fehlerbild sicher ist, wenn zuvor segregierte Oberflächen entstanden sind und nicht mechanisch abgearbeitet wurden.

Diese Thematik wurde sehr detailliert in einem Untersuchungsbericht des Technologie Forums Werkstoff & Wärme untersucht.

Oxidationsvorgänge in sauerstoffarmen Atmosphären

Ein sehr bekanntes Phänomen der Sauerstoffreaktionen bei der Wärmebehandlung ist selektive Randoxidation in CO/H₂-haltigen Atmosphären. Obwohl in einer derartigen Schutzgasatmosphäre der Sauerstoffpartialdruck sehr gering ist, lässt sich gerade diese unerwünschte Reaktion nicht vermeiden.

Der Sauerstoff diffundiert in die Oberfläche und oxidiert in besonders intensiver Weise die sauerstoffaffinen Legierungselemente Chrom und Silizium. Dabei entstehen globulare Oxide in der Kornmitte und korngrenzenorientierte Oxide, Bild 9. Besonders letztere Oxidform ist als sehr ungünstig anzusehen, da insbesondere die dynamischen Festigkeitseigenschaften deutlich reduziert werden. Die Oxide wirken wie Rissankeimungen und sind nicht selten Ausgangspunkt für Dauerbrüche.

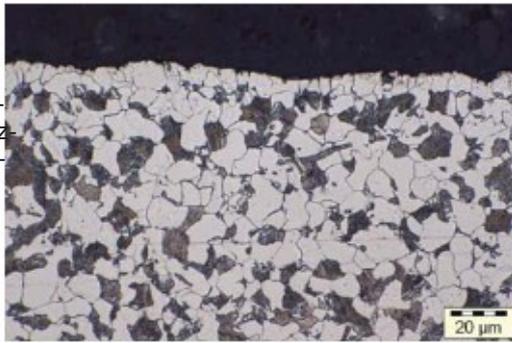


Bild 4: Geringe Randentkohlung nach einer Normalglühung unter reinem Stickstoff

Fig. 4: Slight boundary decarburization after normalizing under pure nitrogen

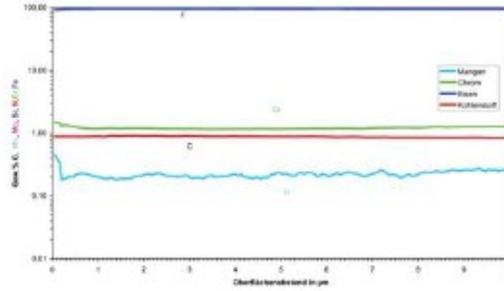


Bild 5: GDOS-Profil einer entkohlungsfreien Oberfläche nach dem Vakuumhärten

Fig. 5: GDOS profile of a decarburization-free surface after vacuum hardening

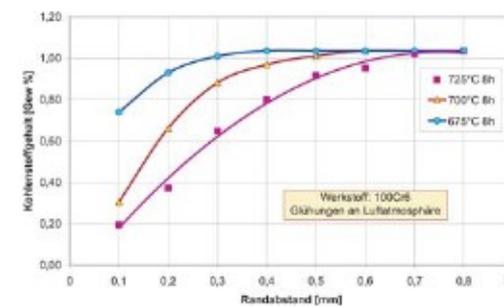


Bild 6: Kohlenstoffprofile des Stahls 100Cr6 nach dem Glühen an Luft

Fig. 6: Carbon profiles of steel 100Cr6 after annealing in air

annealing in the air with a duration of 8 hours at temperatures below the Ac₁ transformation temperature resulted in distinctive decarburization, Fig. 6.

Indirect reactions through oxidation processes

While iron and carbon react very intensively with oxygen and lead to the above described reactions, this oxidation does not take place with the alloying elements copper and nickel due to thermodynamic reasons. Both elements are not able to oxidize in the steel. The consequence of this is, that in an oxidizing controlled heat treatment these elements are enriched at the surface and then they diffuse in beyond the grain boundaries, Fig. 7. This segregation of copper and nickel leads to a serious weakening of the area near the surface. A direct

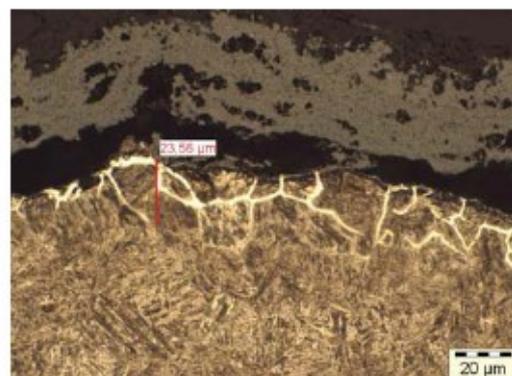


Bild 7: Kupfer- und nickelanreicherte Korngrenzen nach einem schutzgasfreien Austenitisieren

Fig. 7: Copper and nickel-enriched grain boundaries after austenizing without protective gas

Bild 8: Rissbildungen als Folge der Korngrenzen-schwächung durch Kupfer und Nickel

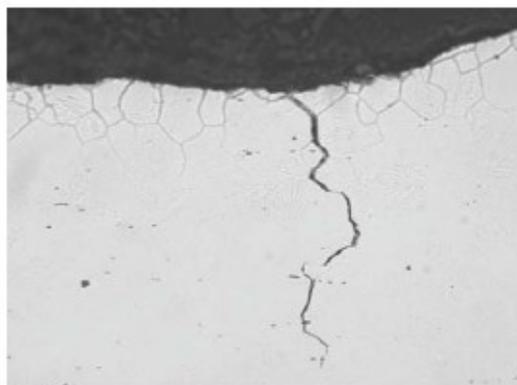


Fig. 8: Crack patterns as a consequence of grain boundary weakening by copper and nickel

Bild 9: Randoxidation nach dem Gasaufkohlen und Einsatzhärten

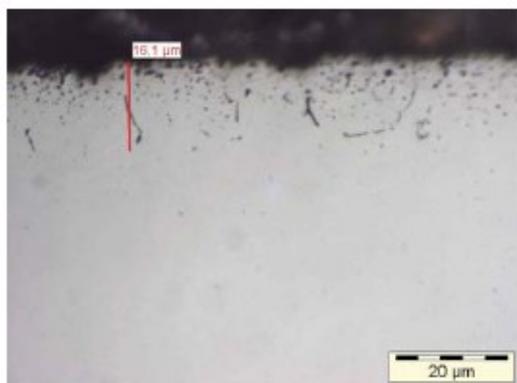


Fig. 9: Boundary oxidation after gas carburizing and case hardening

Bild 10: Eigenspannungsprofil nach Bildung einer Bainit/Perlit-Oberflächenschicht (Quelle: H. Müller, „Entstehung, Ermittlung und Bewertung von Eigenspannungen“ DGM-Fortbildungsseminar März 2006

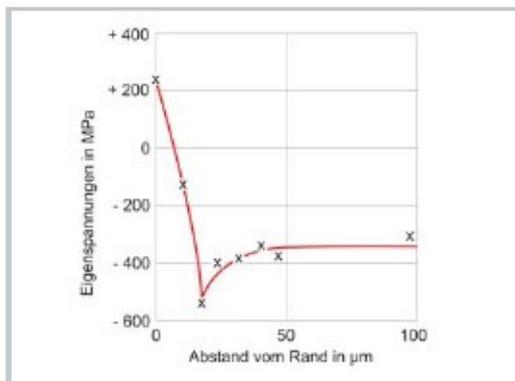


Fig. 10: Internal stress profile after formation of a bainite/pearlite surface layer (Source: H. Müller, „Creation, Investigation and Evaluation of Internal Stresses“ DGM Further Education Seminar March 2006

Durch die Oxidation der Legierungselemente entsteht zusätzlich eine legierungsverarmte Randzone mit reduzierter Härtebarkeit. Dies wiederum hat zur Folge, dass beim Abschrecken die kritische Abkühlgeschwindigkeit zur Martensitbildung nicht erreicht wird und ein oberflächennaher Saum mit einem Perlit-Bainit-Gefüge entsteht. Das martensitfreie Gefüge weist eine erheblich geringere Härte auf und führt zusätzlich zu ungünstigen Zugeigenspannungen im oberflächennahen Bereich, Bild 10.

Die insgesamt negativen Auswirkungen der Randoxidation insbesondere nach dem Einsatzhärten können nur durch ein Abschleifen oder durch eine Oberflächenverfestigung mittels Kugelstrahlbehandlung kompensiert werden.

Bei der Schadensfalldiagnostik rissbehafteter Bauteile ist die Randoxidation mitunter ein Indikator zur Beurteilung des Riss-Entstehungszeitpunkts. Wenn die Randoxidation an den Rissflanken in gleicher Intensität ausgebildet ist wie an der Oberfläche selbst, muss dieser Riss bereits bei der Austenitisierung vorgelegen haben. Ein Abschreckspannungsriss würde dagegen keine Randoxidationsmerkmale aufweisen.

consequence is the increased risk of cracks during quenching, Fig. 8, and the risk of fractures under operating conditions.

The risk of copper and nickel segregation is more pronounced at higher contents of copper and nickel, but it may already occur at contents of 0.10% copper and/or nickel.

In this respect, it is a very unpleasant fact that, once a surface has been damaged, for example, in a previous heat treatment stage, still involves these risks, even if the finalizing or subsequent heat treatment takes place under non-oxidizing conditions. This means, that even a vacuum heat treatment is not safe from this defect, if segregated surfaces were previously created and not removed mechanically.

This topic has been described in great detail in a study report published by the Technology Forum Werkstoff & Wärme (Material & Heat).

Oxidation processes in low-oxygen atmospheres

A very well-known phenomenon of oxygen reactions during heat treatment is the selective intergranular oxidation in atmospheres containing CO/H₂. Even though the partial oxygen pressure in such an atmosphere is very low, it is exactly this undesired reaction that cannot be avoided. The oxygen diffuses into the surface and oxidizes the oxygen-affine alloying elements chromium and silicon in a particular intensive way. In this process, globular oxides are created in the center of the grain, as well as intergranular oxides at the grain boundaries, Fig. 9. Particularly the latter form of oxides should be viewed as a very unfavorable, since especially the strength characteristics are reduced significantly. The oxides act like incipient cracks and are quite frequently the starting point of fatigue fractures.

Due to the oxidation of alloying elements, an additional low-alloyed boundary zone with reduced hardenability is created. This in turn leads to the consequence that, during quenching, the critical cooling rate for the formation of martensite is not reached and a small area with a pearlite-bainite microstructure forms near the surface. The martensite free microstructure has a significantly lower hardness and in addition leads to unfavorable internal tensile stresses in the area near the surface, Fig. 10.

The overall negative effects of the intergranular oxidation, in particular after case hardening, can only be compensated by grinding off or by compacting the surface by means of a shot peening treatment.

In the diagnosis of failures of cracked components, intergranular oxidation is sometimes an indicator for the assessment of the time the crack has been created. If the intergranular oxidation at the flanks of the crack is developed with the same intensity as on the surface itself, the crack must have already been there at the time of austenizing. In contrast, a quenching stress crack would exhibit no boundary oxidation characteristics.