



Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”

**“Facultad de Ingeniería Mecánica”
Departamento Mecánica Aplicada**

TRABAJO DE DIPLOMA

TÍTULO: *Desarrollo, optimización y aplicación de la teoría de los tubos compuestos de dos materiales.*

AUTOR: Denis Villafaña Pérez.

TUTOR: Dr. Rafael Goytisoló Espinosa.

Dr.C. M^a de Lourdes Bravo Estévez.

Ing. Ramón Pérez Soca

Junio 2009

**“Año del 50 Aniversario del Triunfo de la
Revolución”**

AVAL DEL TUTOR

Por este medio, certificamos que el Trabajo de Diploma: ***Desarrollo, optimización y aplicación de la teoría de los Tubos Compuestos de dos materiales para el distribuidor hidráulico de la alzadora de caña BMH-2 de la Empresa “T-15 de la Provincia Cienfuegos.”***

Del Autor: **Denis Villafaña Pérez.**

Tutoreado por: **Dr. Rafael Goytisoló Espinosa, Dr.C. M^a de Lourdes Bravo Estévez y Ing. Ramón Pérez Soca,** Perteneciente a Centro de Estudios: **CEDON,** Facultad: **Ingeniería Mecánica, Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez.”**

Institución donde se aplica el Resultado: **Empresa “T-15 de la Provincia Cienfuegos”**
Está listo para ser Defendido, habiendo cumplido satisfactoriamente todos los Objetivos Previstos en el Trabajo.

Para que así conste se firma el presente Aval en Cienfuegos el 17 de Junio del 2009.

Tutor: Dr. Rafael Goytisoló Espinosa.

**DECLARACION DE AUTORIDAD
UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS**



“Carlos Rafael Rodríguez”

Sistema de Documentación y Proyecto.

Hago constar que el presente trabajo fue realizado en la Empresa T-15 del MINAZ en la provincia de Cienfuegos como parte de la culminación de los estudios en la especialidad de Ingeniería Mecánica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la Universidad de Cienfuegos para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente, que además no podrá ser presentado sin la aprobación de la Universidad de Cienfuegos.

Firma del autor.

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido según acuerdo de la dirección del centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de este envergadura, referido a la temática señalada.

Información Científico Técnico
Nombre y Apellidos. Firma.

Vice Decano.

Nombre y Apellidos. Firma.

Firma del Tutor

Sistema de Documentación y Proyecto.
Nombre y Apellido. Firma.

Agradecimientos



Resulta difícil delimitar en una cuartilla todo el agradecimiento de quienes contribuyeron, de un modo u otro al logro de mi empeño, la gratitud es el más legítimo pago al esfuerzo ajeno, es reconocer que todo lo que somos, es la suma del sudor de los demás, es tener conocimiento de que un hombre solo no vale nada y que la dependencia humana, además de obligada es hermosa.

En especial quiero agradecer a:

- Mis padres, fuentes de amor y dedicación en mi vida como estudiante.
- Mi novia, por ser la puerta que nunca se cerró en los momentos más importantes.
- Mi familia, que siempre estuvo a mi lado, dándome el ánimo en mis años de estudiantes.
- Mis tutores por poner a mi disposición su sabiduría, experiencia y ayuda en todo momento, y en especial al **Dr. Rafael Goytisoló Espinosa** que con su interés e ingenio logró la materialización de este trabajo.
- Mis amistades que fueron una mano extendida durante estos inolvidables cinco años.
- Mis profesores por poner todo su empeño y haberme brindado todos sus conocimientos.
- Y aquellas personas a las cuales no olvidaré y que significaron mucho en mi vida como universitario.

A todos,

MUCHAS GRACIAS .

Dedicatoria

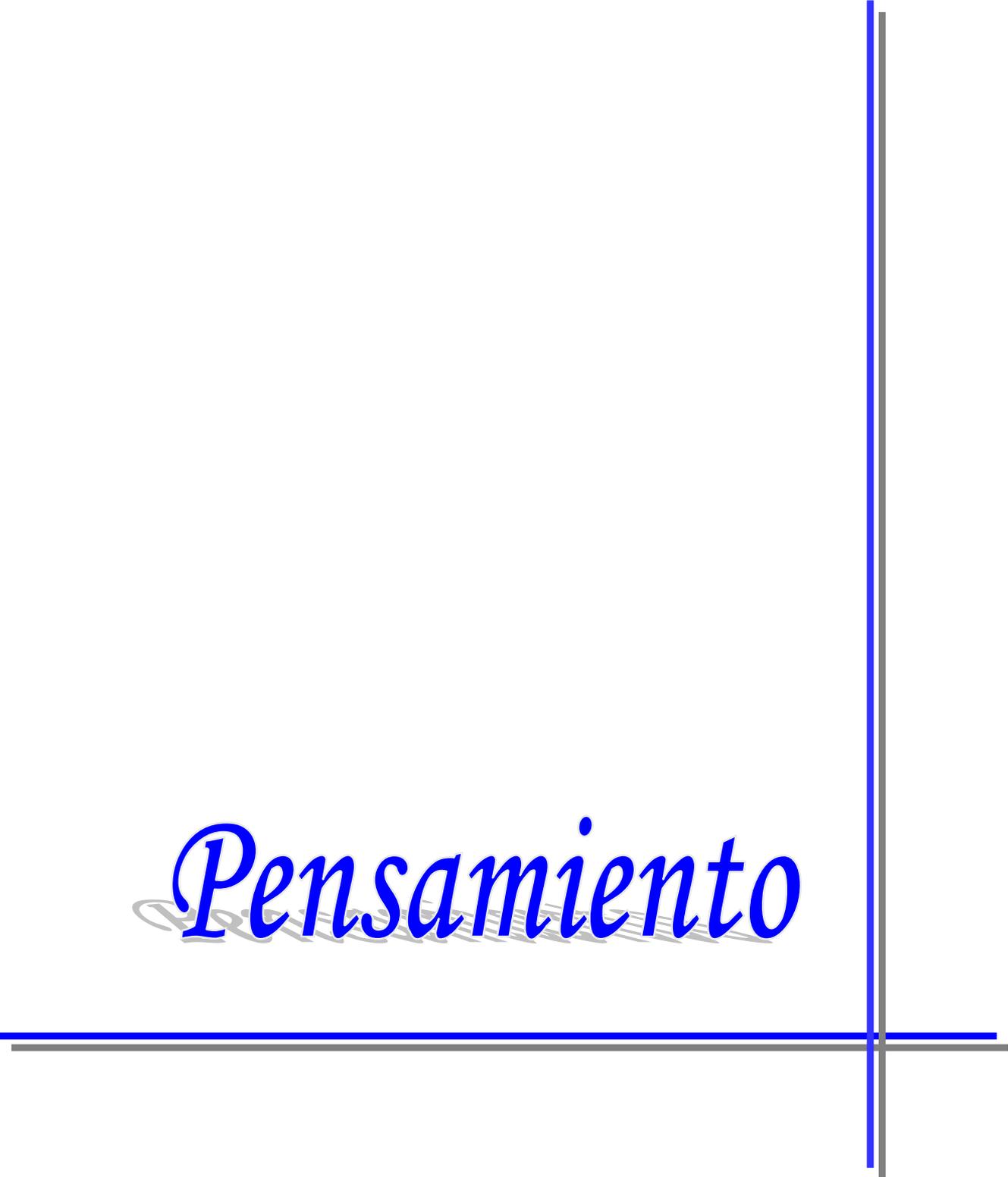


Muchas personas hicieron posible que pudiese recorrer este camino, pero no todas marcaron de igual manera, dedico:

- A mis tutores que me brindaron las herramientas para llevar a cabo esta investigación.
- A quien me dio la vida, y me ha enseñado a conducirme en ella con todo el amor del mundo, mi estimada madre.
- A mi padre, que también ha sabido guiarme y de quien heredé las fuerzas para seguir adelante y nunca rendirme ante situaciones difíciles.
- A una de las personas más importantes de mi vida en estos momentos, la cual me ha dado siempre mucho amor y apoyo sin límites desde que la conocí: mi novia.
- A mis lindos abuelos aunque uno de ellos no está en estos momentos conmigo pero siempre lo tengo presente.
- Y todas aquellas personas que han dado un pedacito de si para contribuir a este trabajo y saben que les agradeceré por siempre.

A TODOS, MUCHAS GRACIAS.

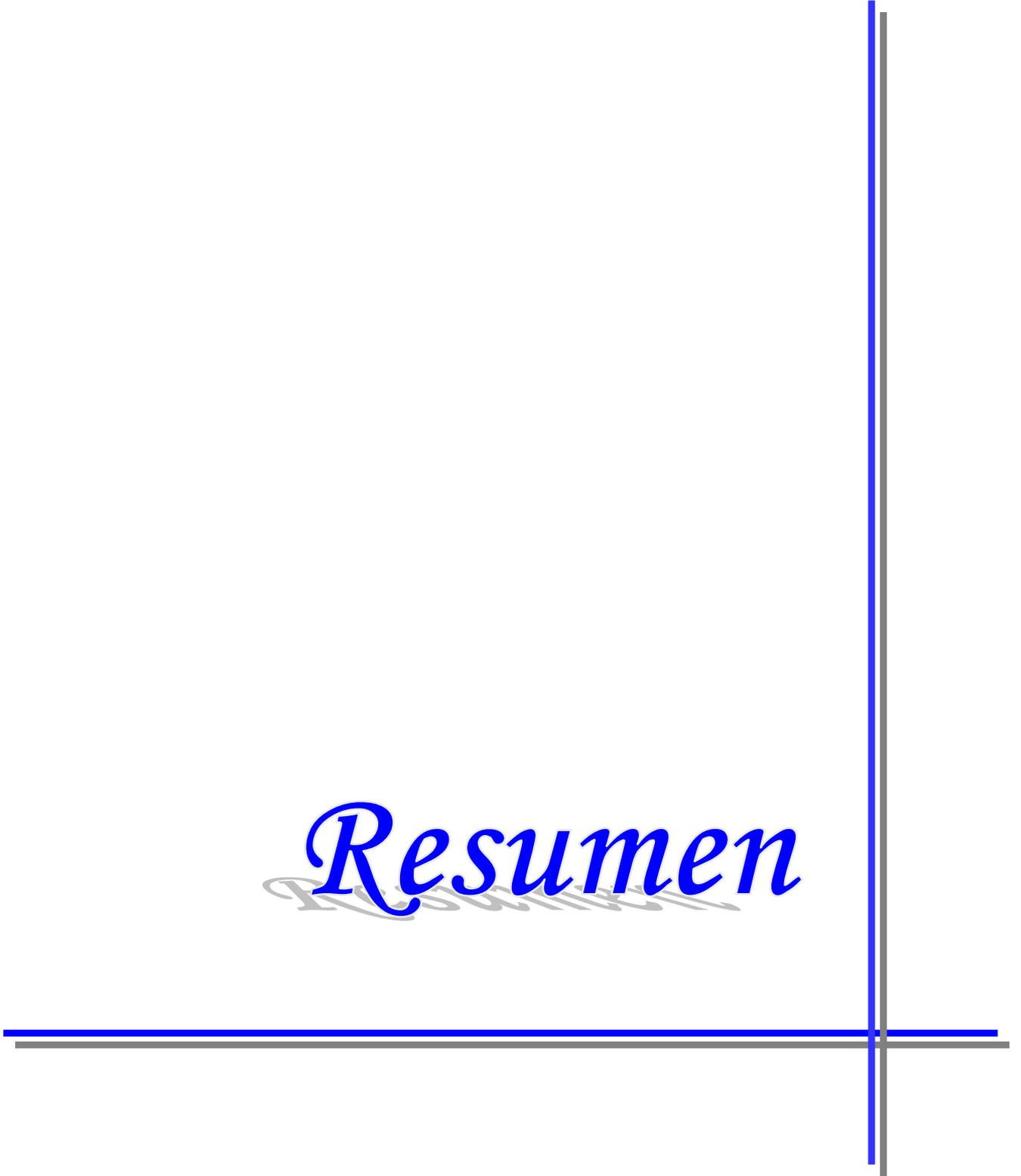
Pensamiento



*Conocer algo a fondo
Y ejercerlo auténticamente,
Confiere una formación más superior,
A conocer a medias centenares de cosas.*

Goethe

Resumen



En el Trabajo se analiza en primer lugar la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y las limitaciones que poseen los Tubos Simples para poder soportar grandes presiones. Se describe la variante tecnológica de construir Tubos Compuestos y se profundiza en la aplicación de las Condiciones de Gadolín para poder optimizar su diseño y lograr la capacidad de soportar el doble de la presión interior de los Tubos Simples. En el Trabajo se destaca como en la literatura científica se describe la Teoría de los Tubos Compuestos y las Condiciones de Gadolín sólo para el caso de materiales iguales en ambos tubos, El colectivo de Mecánica Aplicada de la Facultad de Mecánica de la Universidad de Cienfuegos trabaja en el desarrollo y en las aplicaciones de la Teoría de los Tubos Compuestos para dos materiales diferentes, pudiendo incluso ser alguno de ellos frágil. En el Trabajo se desarrollan las ecuaciones de esta Teoría y se aplican las Condiciones de Gadolín para todas las combinaciones de tubos posibles. Los resultados obtenidos se aplican en el trabajo a la evaluación de la resistencia durante la recuperación del distribuidor de la Alzadora de Caña BMH-II. En el mismo se describe la avería que sufre este distribuidor, la estructura metalográfica del hierro fundido del mismo y su caracterización, tipo de hierro fundido, su dureza y resistencia mecánica. Se describen también el cálculo de la tensión máxima de trabajo mediante el procesamiento por el método de los elementos finitos, lo que permite precisar dónde surge la grieta y la modelación de su crecimiento. Finalmente se realiza la evaluación de la resistencia de los casquillos de acero y del cuerpo del distribuidor mediante la aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos y de las expresiones de cálculo obtenidas.

Índice

Introducción. -----	1
Situación Problemática: -----	2
Hipótesis -----	2
Objetivo general. -----	2
Objetivos específicos -----	3
Capítulo 1 -----	4
Estado del Arte sobre los Tubos de Paredes Gruesas, las Uniones por interferencia y los Tubos Compuestos. -----	4
1.1. Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas. -----	4
1.1.1. Ecuación Diferencial del Problema de Lamé. -----	4
1.1.2. Determinación de tensiones y desplazamientos en tubos simples de paredes gruesas. -----	6
1.1.2.1. Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior y exterior simultáneamente. -----	6
1.1.2.2. Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior solamente. -----	8
1.1.2.3. Cilindro de pared gruesa sometido a presión exterior solamente. -----	9
1.2 Teoría de las Uniones por Interferencia. -----	10
1.2.1 Generalidades de las Uniones por interferencia.-----	10
1.2.2 Diseño de uniones por interferencia. -----	11
1.3 Presión Límite que puede soportar un cilindro de pared gruesa de espesor infinito. -----	17
1.4 El Tubo Compuesto como alternativa para elevar la presión máxima que puede soportar un Tubo de Pared Gruesa. -----	18
1.5 Optimización de los tubos compuestos. Condiciones de Gadolín -----	21
1.6 Conclusiones del Capítulo. -----	22
Capítulo2 -----	23
Desarrollo de la Teoría de los Tubos Compuestos de dos materiales diferentes en los tubos interior y exterior. -----	23
2.1. Teoría de los Tubos Compuestos de materiales iguales en el tubo interior y en el exterior. -----	23
2.2 Optimización de los Tubos Compuestos. Condiciones de Gadolín -----	25
2.3 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales dúctiles diferentes en el tubo interior y en el exterior. -----	27
2.4 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior, para el caso de material dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior. -----	33
2.5 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior, para el caso de material frágil en el tubo interior y dúctil en el exterior. -----	37
2.6 Nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr desarrollada en la UCf que resulta universal para cualquier combinación de los materiales de los tubos interior y exterior. -----	39

2.6.1 Generalidades sobre las distintas Hipótesis de Resistencia. -----	39
2.6.2 Desarrollo de la Nueva formulación Matemática de la Teoría de Mohr. -----	41
2.7 Aplicación de la nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr en el desarrollo de la Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior.	48
2.8 Conclusiones del Capítulo. -----	52
Capítulo 3-----	54
Evaluación de avería y de la posibilidad de elevar la Capacidad Portante del Cuerpo de Hierro Fundido del Distribuidor Hidráulico de la Alzadora Cañera BMH – II, mediante colocación de un casquillo interior dúctil y la aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos-----	54
3.1 Generalidades de la alzadora BMH – II. -----	54
3.2 Principio de funcionamiento de la alzadora BMH-II -----	54
3.3 Caracterización del Material. -----	55
3.4 Cálculo de la Tensión Máxima de Trabajo mediante el Procesamiento por el Método de los Elementos Finitos-----	58
3.5 Aplicación de la Mecánica de la Fractura para evaluar la Capacidad Portante del Cuerpo del Distribuidor y la posibilidad de agrietamiento bajo carga. -----	59
3.5.1 Tenacidad a la Fractura del Material. -----	59
3.5.2 Caracterización del estado tensional en la zona de la grieta y modelo empleado para su estudio según la Mecánica de la Fractura. -----	59
3.5.3 Aplicación de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica en la obtención de la Curva de Resistencia Residual y la determinación del Tamaño Crítico de la Grieta. -----	59
3.5.4 Aplicación de la Mecánica de la Fractura Subcrítica en la Evaluación del Crecimiento de las Grietas. -----	61
3.6. Análisis de la Resistencia de los Casquillos de Acero y del Cuerpo del Distribuidor mediante la Aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos en la Recuperación del Distribuidor. -----	62
3.7. Aplicación de la Expresiones Obtenidas para la Optimización de los Tubos Compuestos de dos materiales diferentes mediante las Condiciones de Gadolín en el Análisis de la Resistencia de los Casquillos de Acero y del Cuerpo en la Recuperación del Distribuidor Hidráulico de la alzadora BMH – II. -----	67
3.8 Conclusiones del Capítulo. -----	69
Conclusiones-----	70
Recomendaciones-----	72
Referencias Bibliográficas-----	73
Bibliografía-----	75

Introducción



Introducción.

La Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas (Problema de Lamé en la Teoría de la Elasticidad) surge a finales del siglo XIX como una necesidad de elevar la capacidad de soportar altas presiones en las tuberías de sistemas hidráulicos y en recipientes en general y la misma aparece descrita ya en la literatura Clásica y Avanzada de Resistencia de Materiales de mediados del siglo XX (Den Hartog 1952; Seely F.B 1954; Olsen G.A 1952; Timoshenko S 1962). Sin embargo muy rápidamente se descubrió que estos tubos aunque se aumentara infinitamente sus dimensiones no eran capaces de soportar presiones mayores que la mitad de la tensión permisible de los materiales de que estaban fabricados.

Como respuesta a esta limitante se han desarrollado soluciones vinculadas con la forma de fabricación de los tubos de paredes gruesas como son: los tubos pretensados y los tubos compuestos, los cuales teóricamente pueden hasta duplicar la capacidad de carga con relación a los tubos simples, sin embargo los tubos pretensados, por ejemplo, son una solución aplicable exclusivamente a materiales dúctiles con un elevado % de elongación y realmente la respuesta a las altas presiones no es tan efectiva como los tubos compuestos, relativamente fáciles de controlar durante su fabricación.

Para los tubos compuestos por otro lado, los cuales constituyen el Objeto de Estudio y que se verán en detalle en el presente trabajo, pueden teóricamente duplicar la capacidad de soportar altas presiones con relación a los tubos simples, e incluso, se han desarrollado las condiciones de Gadolín, mediante las cuales se puede optimizar la resistencia igualando las tensiones equivalentes del tubo interior y en el tubo exterior y optimizar las dimensiones de los tubos para que estas tensiones sean mínimas. La Teoría de los Tubos Compuestos y las Condiciones de Gadolín aparecen descritas en (Feodosiev V.I. 1985) pero solamente para materiales iguales en el tubo exterior y en el interior, lo que limita ampliamente sus aplicaciones. En el Manual de Resistencia de Materiales de Pisarenko, que recoge lo más avanzado de la Mecánica de Materiales, de la antigua URSS hasta el año de su publicación, sólo aparece tratada la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y en Síntesis los Tubos Compuestos, pero no se detallan las Condiciones de Optimización de Gadolín ni para materiales iguales ni diferentes en los tubos.

En la mayoría de la literatura más moderna de Mecánica de Materiales de América no aparece la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas o se trata de forma muy elemental (Beer F.P. and Jonhston E.R 1993; Fitzgerald F 1996; Fogiel M 1988; Mott R.L. 1990; Mott R.L 1996; Spiegel L., Limbrunner G.F 1999) e incluso en la literatura de Mecánica de Materiales Avanzada y de Teoría de la Elasticidad (Solecki R. and Jai R 2003; Aleksandrov A. V., Potapov V.D 1990) se desarrolla la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y Tubos Compuestos, pero

no se habla de esta teoría para materiales diferentes, ni se mencionan las Condiciones de Optimización de Gadolín.

Hay que destacar que la Teoría de los Tubos Compuestos presenta numerosas aplicaciones, donde sería necesario conocer sus ecuaciones, no sólo para materiales iguales en ambos tubos, sino para materiales diferentes en los tubos interior y exterior.

Así por ejemplo en la zafra 2001-2002 operaron 57 nuevas alzadoras del modelo BMH-II ensambladas en Cuba por el SIME, en 10 complejos agroindustriales azucareros de 7 provincias, con excelentes resultados, las mismas son autopropulsadas y montadas sobre tres neumáticos en forma de triciclo. La máquina es capaz de desarrollar una velocidad superior al modelo de alzadora tradicional, al que supera tanto en peso promedio de los bultos de caña como en capacidad de maniobra en zonas de terrenos irregulares, con mejores condiciones de trabajo para los operadores y mayor rendimiento general. Esta alzadora tiene la posibilidad de llenar los camiones o carretas en menos tiempo, presenta un consumo de combustible inferior a la alzadora tradicional y puede operar en campos de hasta 35 grados de pendiente, según se ha podido comprobar. La máquina cuenta con un circuito hidráulico principal para su traslación, otro secundario para el movimiento de la grúa que recoge la caña y un sistema de bombeo auxiliar de refrigeración del aceite.

A la Empresa T-15 de Cienfuegos se le asignaron cuatro alzadoras de este modelo la cual tiene gran importancia ya que agilizan el trabajo y la producción es más eficiente.

Situación Problémica:

En los últimos años se ha presentado un problema en estas máquinas, que consiste en el surgimiento de grietas en el cuerpo del distribuidor ya que el material de este, es hierro fundido gris de grafito laminar, y no es el adecuado para soportar las altas presiones hidráulicas de trabajo del sistema hidráulico de la alzadora BMH-II, por lo que se produce la fractura del cuerpo. El Distribuidor Hidráulico no es más que el mecanismo que está alimentado por una bomba hidráulica y es el encargado de darle el mando al brazo de la alzadora para que rote en diferentes posiciones. El colectivo de Mecánica Aplicada de la Facultad de Mecánica de la Universidad de Cienfuegos desarrolla una Investigación para darle solución a este problema mediante la recuperación del cuerpo de hierro fundido. El presente trabajo es parte de esa investigación y en el mismo se ha formulado la siguiente:

Hipótesis

Es posible mediante la Aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos para materiales diferentes en la pieza interior y exterior realizar el cálculo del espesor adecuado de un casquillo de acero que será colocado por interferencia en la posición del agujero del distribuidor donde se produce la fractura y realizar el cálculo de la interferencia necesaria entre el tubo interior de acero

y el tubo exterior de hierro fundido con el objetivo de soportar la presión interior requerida en esas secciones del distribuidor, pero para ello se necesita desarrollar la Teoría de los Tubos Compuestos de dos Materiales Diferentes en el tubo Exterior y el Interior, ya que en el caso mencionado el Tubo Interior sería de acero dúctil y Tubo Exterior sería el cuerpo de hierro fundido frágil del distribuidor.

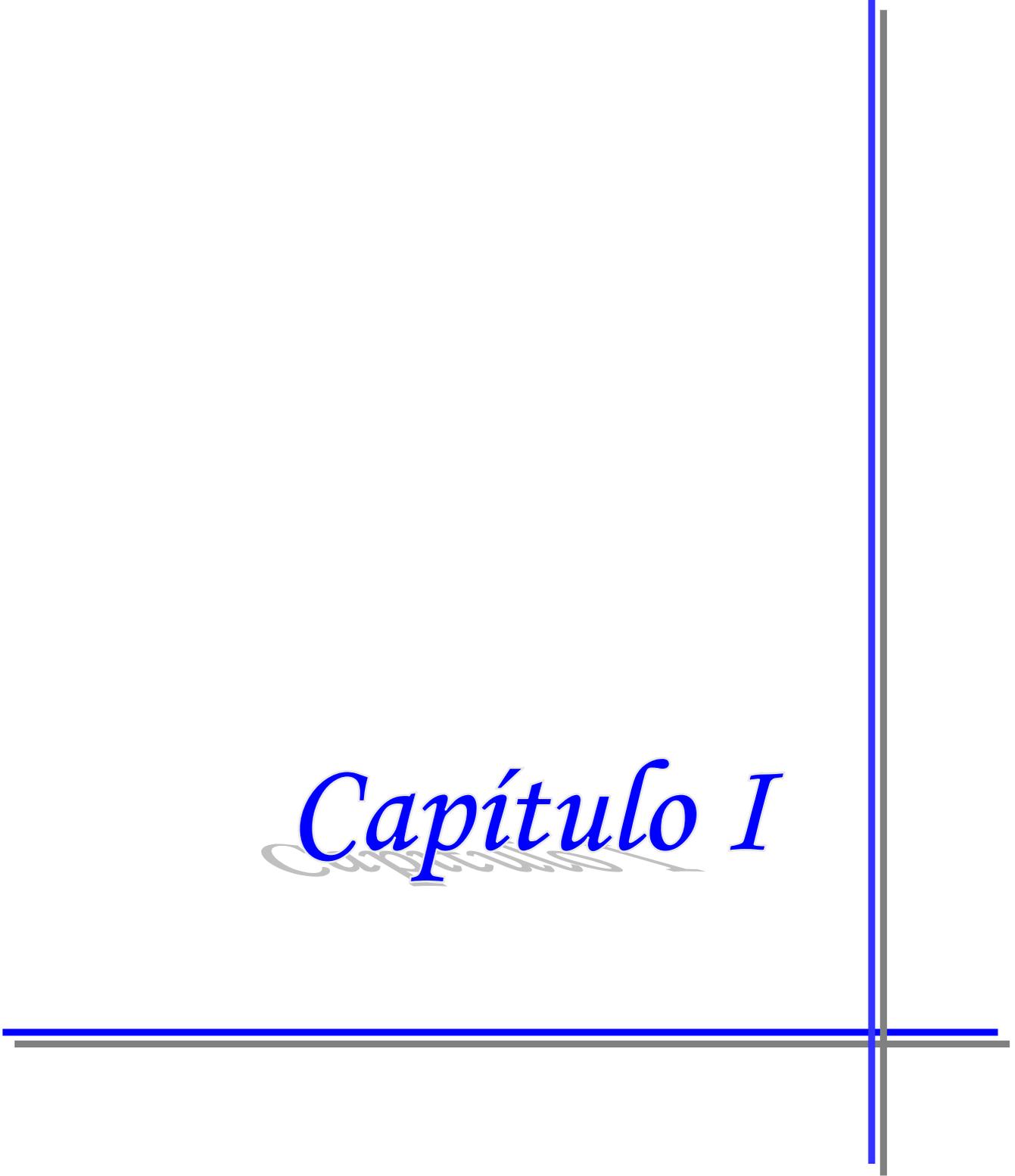
Objetivo general.

Desarrollar y Optimizar las ecuaciones fundamentales de la Teoría de los Tubos Compuestos de materiales diferentes en ambos tubos para evaluar la posibilidad de emplearla para desarrollar una Tecnología de Recuperación del Distribuidor Fracturado de la Alzadora BMH II.

Objetivos específicos

1. Profundizar en la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas, las Uniones por Interferencia, en la Teoría de los Tubos Compuestos de Materiales Iguales y en las Condiciones de Optimización de Gadolín para sobre esta base poder desarrollar la Teoría de los Tubos Compuestos de Materiales Diferentes.
2. Desarrollar como Aportes Científicos fundamentales del trabajo las ecuaciones de los Tubos Compuestos de Materiales Diferentes en ambos tubos, aplicando en los mismos las Condiciones de Optimización de Gadolín en las siguientes variantes:
 - a) Materiales dúctiles diferentes en ambos tubos, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia.
 - b) Material frágil en el tubo exterior y dúctil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
 - c) Material dúctil en el tubo exterior y frágil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
 - d) Materiales diferentes en ambos tubos, dúctiles o frágiles aplicando la Nueva Formulación Matemática de la Teoría de las Tensiones Límites de Mohr desarrollada por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos.
3. Evaluar la posibilidad de aplicar la variante b) de los Tubos Compuestos desarrollada para obtener: el diámetro de la superficie de encaje del tubo interior que garantice igualdad de resistencia entre el tubo interior de acero y el tubo exterior de hierro fundido durante la explotación y la interferencia necesaria en el encaje, para el caso de la recuperación del Distribuidor de la Alzadora BMH II.

Capítulo I



Capítulo 1

Estado del Arte sobre los Tubos de Paredes Gruesas, las Uniones por interferencia y los Tubos Compuestos.

1.1. Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas.

1.1.1. Ecuación Diferencial del Problema de Lamé.

Las ecuaciones del Problema de Lamé se describen en la literatura de Resistencia de Materiales (Feodosiev V.I. 1985). Supongamos un cuerpo homogéneo de forma cilíndrica solicitado por una carga exterior simétrica con relación al eje del cilindro y que no cambia a lo largo del mismo. Al aplicar la carga se producirán desplazamientos en los puntos del cilindro. Partiendo de la condición de simetría estos desplazamientos serán radiales (Fig. 1.1a). Designemos por u el desplazamiento radial de un punto A cualquiera.

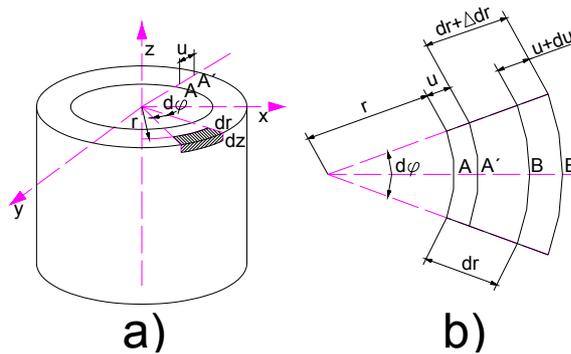


Fig. 1.1. Esquema de un Tubo de Pared Gruesa

Separaremos del cuerpo un elemento diferencial de volumen en forma de cuña de dimensiones dr , $r d\phi$ y dz (Fig.1.1a) y analicemos los desplazamientos y deformaciones en las direcciones radial y circunferencial (Fig. 1.1 b).

Si se analiza el segmento de longitud dr se obtiene que:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{du}{dr} \tag{1.1}$$

Y si se analiza la deformación de la circunferencia que pasa por el punto A tenemos que:

$$\epsilon_t = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r + u) - 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{u}{r} \tag{1.2}$$

En la dirección longitudinal bajo la acción de la presión actuando sobre los fondos del cilindro se produce también una variación de la longitud del segmento dz , de manera que:

$$\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \tag{1.3}$$

El estado tensional que surge en el elemento de la pared será un estado tensional triaxial (Fig.1.2a), en el cual las tensiones normales en las diferentes caras son tensiones principales ya que debido a la simetría geométrica y de las cargas no surgen tensiones tangenciales.

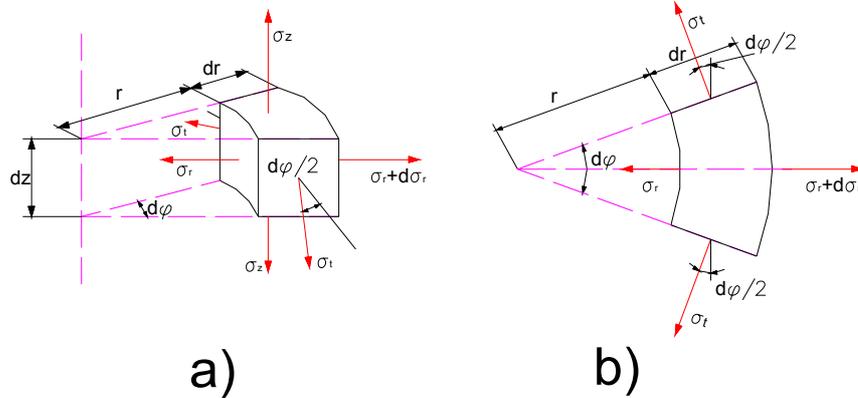


Fig. 1.2 Paralelepípedo recto rectangular extraído de la pared de un Tubo de Pared Gruesa y tensiones en sus caras.

Proyectando todas las fuerzas en la dirección radial (Fig.1.2 b) se tiene:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \cdot dz - \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz - 2 \cdot \sigma_t \cdot dr \cdot dz \cdot \text{sen}\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0 \quad (1.4)$$

Considerando $\text{sen}\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cong \frac{d\varphi}{2}$ y despreciando los diferenciales de orden superior. Después de simplificar se tiene que:

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \cdot r - \sigma_t = 0 \quad (1.5)$$

Expresemos esta relación en función del desplazamiento radial u. Según la Ley de Hooke generalizada.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \mu \cdot (\sigma_t + \sigma_z)] \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)] \quad (1.7)$$

Resolviendo (1.6) y (1.7) para despejar σ_r y σ_t se obtiene que:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t) + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z \quad (1.8)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z \quad (1.9)$$

$$\text{Como: } \varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{y} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (1.10)$$

Sustituyendo las expresiones (1.10) en (1.8) y (1.9) y estas a su vez en (1.5), se obtiene finalmente que:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (1.11)$$

Que puede ser escrita así:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] = 0 \quad \text{ó} \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(u \cdot r)}{dr} \right] = 0 \quad (1.13)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como Ecuación Diferencial del Problema de Lamé, científico Francés que en el año 1833 resolvió originalmente el cálculo de tensiones y desplazamientos en cilindros de paredes gruesas.

La solución de esta ecuación es:

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (1.14)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración que dependen de las condiciones específicas de contorno.

1.1.2. Determinación de tensiones y desplazamientos en tubos simples de paredes gruesas.

1.1.2.1. Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior y exterior simultáneamente.

Consideremos un cilindro de pared gruesa de radio interior (a) y radio exterior (b) sometido a una presión interior (p_a) y a una presión exterior (p_b) (Fig.1.3).

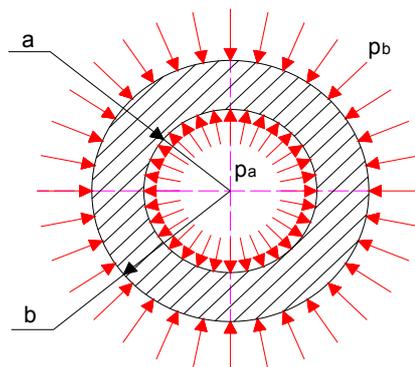


Fig. 1.3 Cilindro de Pared Gruesa con presión interior y exterior simultánea

Teniendo en cuenta que:

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{y} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (1.15)$$

Se tiene que:

$$\varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (1.17)$$

Sustituyendo (1.16) y (1.17) en las expresiones (1.8) y (1.9):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) - C_2 \cdot (1-\mu) \cdot \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z \quad (1.18)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) + C_2 \cdot (1-\mu) \cdot \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z \quad (1.19)$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de borde siguientes:

Para $r = a$ $\sigma_r = -p_a$, y (1.20)

Para $r = b$ $\sigma_r = -p_b$

Sustituyendo las condiciones de borde (1.20) en (1.18) y (1.19) resolviendo las ecuaciones se obtiene que:

$$C_1 = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_z \quad (1.21)$$

$$C_2 = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2^2 - r_1^2} (p_1 - p_2) \quad (1.22)$$

La magnitud de la tensión σ_z se puede hallar partiendo del equilibrio del tubo en la dirección longitudinal. (Fig.1.4). Aplicando el Método de las Secciones.

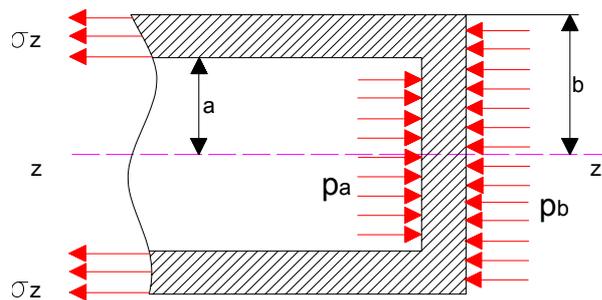


Fig. 1.4 Corte del tubo por un plano meridional para hallar σ_z

$$\sum F_z = \sigma_z \cdot \pi \cdot (b^2 - a^2) + p_b \cdot \pi \cdot b^2 - p_a \cdot \pi \cdot a^2 = 0 \quad (1.23)$$

$$\sigma_z = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \quad (1)$$

Sustituyendo finalmente (1.21), (1.22) y (1.24) en (1.18) y (1.19) se obtiene que:

$$\sigma_r = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 \cdot b^2}{r^2} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \quad (1.25)$$

Y sustituyendo (1.21), (1.22) y (1.24) en (1.15) se obtiene que:

$$u = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \quad (1.26)$$

Si no existiera la tensión en la dirección longitudinal, o sea, $\sigma_z = 0$.

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \quad (1.27)$$

1.1.2.2. Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior solamente.

Si $(p_a) = (p)$ y $(p_b) = 0$, las expresiones (1.24), (1.25), (1.26) y (1.27) se reducen a:

$$\sigma_z = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \quad (1.28)$$

$$\sigma_r = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (1.29)$$

$$u = \frac{p}{E} \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot b^2}{r} \right] \quad (1.30)$$

$$u = \frac{p}{E} \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot b^2}{r} \right] \quad (\text{para } \sigma_z = 0) \quad (1.31)$$

Analicemos como varían σ_r y σ_t a lo largo del radio (Fig. 1.5).

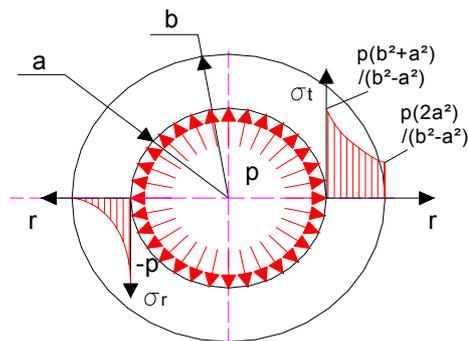


Fig. 1.5 Variación de σ_r y σ_t a través del radio de un tubo con presión interior solamente.

Para $r = a$ tenemos:

$$\sigma_{tr=a} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{rr=a} = -p$$

Para $r = b$ tenemos:

$$\sigma_{tr=b} = p \cdot \frac{2 \cdot a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{rr=b} = 0$$

Además:

$$\sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

Para $r = a$ (Punto A), se produce el punto más peligroso, siendo:

$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_z = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p$$

La tensión equivalente máxima será para este punto. Según la Tercera Hipótesis:

$$\sigma_{eq}^{max} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]_t \quad (1.32)$$

1.1.2.3. Cilindro de pared gruesa sometido a presión exterior solamente.

Si $p_a = 0$ y $p_b = p$ las expresiones (1,24), (1,25), (1,26) y (1.27) quedan como sigue:

$$\sigma_z = -\frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \quad (1.33)$$

$$\sigma_r = -\frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (1.34)$$

$$u = -\frac{p}{E} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot a^2}{r} \right] \quad (1.35)$$

$$u = -\frac{p}{E} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[(1 - \mu) \cdot r + \frac{(1 + \mu) \cdot a^2}{r} \right] \quad (\text{para } \sigma_z = 0) \quad (1.36)$$

La distribución de σ_t y σ_r a lo largo del radio queda como se muestra en la Fig. (1.6).

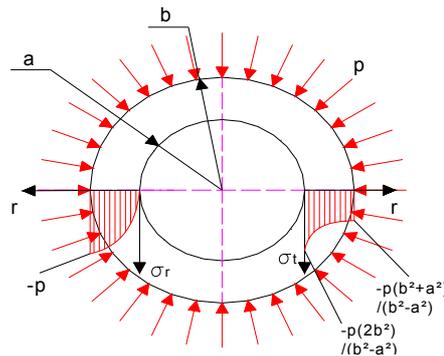


Fig. 1.6 Variación de σ_r y σ_t a través del radio de un tubo con presión exterior solamente

Para $r = a$ tenemos:

$$\sigma_{tr=a} = -\rho \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{rr=a} = 0$$

Para $r = b$ tenemos:

$$\sigma_{tr=b} = -\rho \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{rr=b} = -\rho$$

Además:

$$\sigma_z = -\rho \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2}$$

El punto más crítico sigue siendo el punto A, donde:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_z = -\rho \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} \quad y \quad \sigma_3 = \sigma_t = -\rho \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2}$$

La tensión equivalente máxima será, por la Tercera Hipótesis:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^{max} &= \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t \\ \sigma_{eq}^{max} &= 0 - \left(-\rho \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \right) = \rho \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]_t \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.2 Teoría de las Uniones por Interferencia.

1.2.1 Generalidades de las Uniones por interferencia.

Las uniones forzadas o por interferencia pertenecen al grupo de las uniones permanentes y basan su funcionamiento en aprovechar el apriete que se alcanza por la diferencia de diámetro entre las piezas (Fig. 1.6)

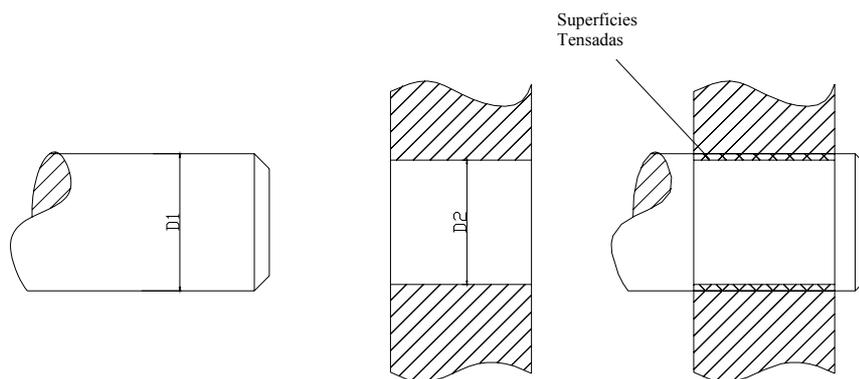


Fig. 1.6 – Principio de funcionamiento de las uniones por interferencia.

Estas uniones se caracterizan por su sencillez constructiva, la buena concentricidad que se alcanza entre el cubo y la espiga o eje, la alta capacidad de carga y la buena resistencia a las cargas de impacto, aunque se necesita una elevada exactitud en la fabricación de los asientos de las piezas y la resistencia a la fatiga se ve ligeramente afectada como resultado de la

concentración de tensiones y la corrosión por contacto de las superficies conjugadas, estos últimos aspectos puede ser mejorado a través de la aplicación de tratamientos térmicos, la deformación en frío del árbol o el cubo o haciendo ranuras de descarga en los árboles.

Los ajustes más utilizados para este tipo de uniones son:

$$\frac{H7}{r5} \quad \frac{H6}{s5} \quad \frac{H7}{p6} \quad \frac{H7}{r6} \quad \frac{H7}{s6} \quad \frac{H7}{s7} \quad \frac{H7}{u7} \quad \frac{H8}{u8}$$

El montaje de las uniones por interferencia se realiza mediante varios métodos:

- Montaje a presión.
- Calentamiento de la pieza exterior.
- Enfriamiento de la pieza interior.
- Combinación de los anteriores.

El montaje a presión garantiza un mejor centrado de la unión pero tiene el inconveniente de que se produce un alisamiento por desgarramiento de las superficies de unión, lo que provoca que la capacidad de transmitir carga de la unión sea menor que cuando se utilizan métodos térmicos para el montaje al reducirse el coeficiente de fricción, en la literatura se plantea que la capacidad de transmitir carga de una unión montada por métodos térmicos es 1,5 veces la de la misma unión montada a presión.

1.2.2 Diseño de uniones por interferencia.

Las Uniones por Interferencia aparecen abordadas en la literatura de Elementos de Máquinas (Dobrovolski V 1980; Faires V.M 1996; Ivanov M.N 1991; Orlov, P 1985; Reshetov, D 1985; Shigley, J. E 1985; Shigley, J.E y Mischkie 2001). El cálculo de proyecto de las uniones por interferencia tiene dos objetivos fundamentales:

- La selección del ajuste entre los elementos de la unión, para lo cual se debe determinar el apriete requerido para garantizar que la unión sea capaz de transmitir las cargas que se desean y el cálculo del apriete máximo que admiten las piezas interior y exterior sin que se produzca su avería.
- La determinación de la fuerza necesaria para el montaje a presión o de las temperaturas requeridas para el montaje térmico, o ambas en el caso de ensamblaje mixto.

La capacidad portante de la unión depende del apriete que se logre con el ajuste seleccionado. Producto de ese apriete, en las superficies acopladas surge una presión específica (p) debido a la deformación elástica de las piezas unidas lo que se puede apreciar en la Fig. 1.7.

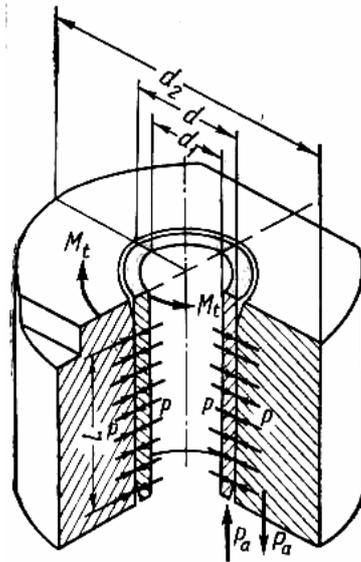


Fig. 1.7 Presión en la superficie de ensamble en una Unión por Interferencia.

La relación entre la interferencia (apriete de la unión) y la presión que se origina en la superficie de ensamble o de encaje se establece a través de la expresión:

$$p = \frac{\delta}{d \cdot \left(\frac{C_i}{E_i} + \frac{C_e}{E_e} \right)} \quad \text{MPa} \quad (1.38)$$

Donde:

δ - Apriete en la unión, mm.

d - Diámetro nominal de las piezas unidas, mm.

C_i y C_e - Coeficientes de las Ecuaciones del Problema de Lamé para la pieza interior y exterior respectivamente.

$$C_i = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \mu_i \quad \text{y} \quad C_e = \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} - \mu_e \quad (1.39)$$

μ_i y μ_e - Coeficientes de Poisson de las piezas interior y exterior respectivamente.

d_1 – Diámetro interior de la pieza interior, mm.

d_2 – Diámetro exterior de la pieza exterior, mm.

De la ecuación de Lamé se puede concluir claramente que la capacidad portante es proporcional al apriete alcanzado y se incrementa con el módulo de elasticidad de los materiales de la unión.

Es evidente que una vez que se conozca la presión máxima que soportan los elementos de la unión se puede conocer el apriete máximo que soportará la unión.

La distribución de tensiones en las piezas de una unión por interferencia se obtienen a partir del estudio de los tubos de paredes gruesas ya que la pieza exterior se puede considerar un tubo sometido a presión interior y la interior un tubo sometido a presión exterior. En la Fig. 1.8 se muestra la distribución de las tensiones radiales y tangenciales o circunferenciales después del ensamblaje en estas uniones.

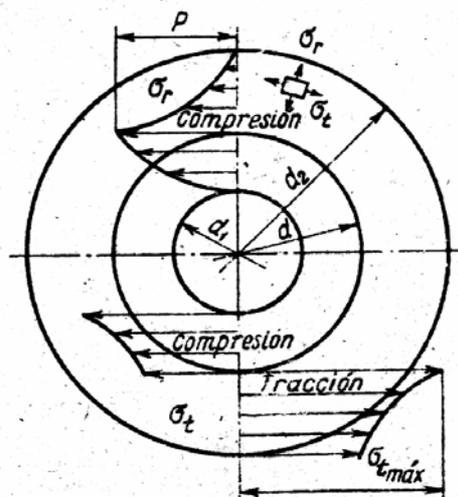


Fig. 1.8 – Distribución de tensiones en uniones por interferencia.

De la figura se concluye que para la pieza exterior las máximas tensiones ocurren en la superficie interior.

$$\sigma_{t r=a} = p \cdot \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} \quad (1.40)$$

$$\sigma_{r r=a} = -p$$

Determinado entonces la tensión equivalente por alguna de las Hipótesis de Resistencia de acuerdo al material de la misma se puede determinar la presión máxima que soporta la pieza exterior.

Así por ejemplo para materiales dúctiles, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia:

$$\sigma_{eq}^{max} = p \cdot \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} - (-p) = p \cdot \frac{2 \cdot d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \leq [\sigma]_t \quad (1.41)$$

$$p_{max} = \frac{[\sigma]_t \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{2 \cdot d_2^2} \quad (1.42)$$

Para el caso de los materiales frágiles, aplicando la Teoría Clásica de Mohr.

$$\sigma_{eq}^{max} = p \cdot \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} - k \cdot (-p) = p \cdot \frac{d_2^2(1+k) + d_1^2(1-k)}{d_2^2 - d_1^2} \leq [\sigma]_t \quad (1.43)$$

k – Es la relación entre el límite de resistencia a compresión y a tracción del material frágil.

En la pieza interior sometida a una presión exterior la tensión equivalente máxima se produce también en la superficie interior y se determina como:

Así por ejemplo para materiales dúctiles, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^{max} &= \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t \\ \sigma_{eq}^{max} &= 0 - \left(-p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \right) = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]_t \\ p_{max} &= \frac{[\sigma]_t \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{2 \cdot d_2^2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para el caso de los materiales frágiles, aplicando la Teoría Clásica de Mohr.

$$\sigma_{eq}^{max} = 0 - k \left(-p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \right) = k \cdot p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]_t \quad (1.45)$$

Y como $k = [\sigma]_t / [\sigma]_c$

$$p_{max} = \frac{[\sigma]_c \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{2 \cdot d_2^2} \quad (1.46)$$

Sustituyendo en menor valor de p_{max} en la expresión de Lamé (1.38) se obtiene la ecuación para determinar el apriete máximo que la unión admite.

$$\delta_{max} = p_{max} \cdot d \cdot \left[\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right] \quad \text{mm} \quad (1.47)$$

Para determinar el apriete mínimo necesario en la unión para garantizar que pueda transmitir las cargas actuantes es necesario analizar el carácter de estas.

- Uniones sometidas a carga axial.

La condición que garantiza la capacidad portante de la unión es:

$$P_{axial} < \frac{P_{req} \cdot f \cdot A}{n} \quad (1.48)$$

Donde:

P_{req} – presión requerida en el encaje para transmitir la fuerza axial P_{axial} que se desea. MPa.

f – Coeficiente de fricción. $f = 0,08$ ensamblaje a presión, $f = 0,14$ ensamblaje por temperatura.

El coeficiente de fricción es mayor en el ensamblaje por temperatura pues no se produce desgarramiento de las irregularidades y estas se entrelazan entre si y transmiten mayor carga.

A – Área de la superficie conjugada, mm^2 .

$$A = \pi \cdot d \cdot l$$

n – Factor de Seguridad

La presión requerida para resistir la carga axial se determina como:

$$P_{req} = \frac{P_{ax} \cdot n}{f \cdot A} = \frac{P_{ax} \cdot n}{f \cdot \pi \cdot d \cdot l} \quad (1.49)$$

Sustituyendo la presión requerida en la ecuación de Lamé, se determina el apriete mínimo requerido en la unión.

$$\delta_{min} = \frac{P_{ax} \cdot n}{f \cdot \pi \cdot d \cdot l} \cdot d \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) = \frac{P_{ax} \cdot n}{f \cdot \pi \cdot l} \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \quad mm \quad (1.50)$$

- Unión sometida a un Momento Torsor.

La condición que garantiza la capacidad portante de la unión es:

$$M_t < \frac{P \cdot f \cdot A \cdot d}{2 \cdot n} \quad (1.51)$$

$$P_{req} = \frac{2 \cdot n \cdot M_t}{f \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot d} \quad (1.52)$$

Y el apriete mínimo:

$$\delta_{min} = \frac{M_t \cdot n}{f \cdot \pi \cdot d \cdot l} \cdot d \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) = \frac{M_t \cdot n}{f \cdot \pi \cdot l} \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \quad mm \quad (1.53)$$

- Uniones donde actúan simultáneamente una fuerza axial y un momento torsor.

La condición que garantiza la capacidad portante de la unión en este caso es:

$$\sqrt{\left(\frac{2 \cdot Mt}{d}\right)^2 + P_{ax}^2} < \frac{\pi \cdot d \cdot l \cdot P \cdot f}{n} \quad (1.54)$$

$$\delta_{min} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2 \cdot Mt}{d}\right)^2 + P_{ax}^2}}{\pi \cdot l \cdot f} \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2}\right) \cdot n \text{ mm} \quad (1.55)$$

Es importante señalar que en el caso del montaje a presión las superficies sufren un alisamiento que reduce el apriete final, por lo que es necesario incrementar el apriete mínimo una magnitud u .

$$\delta_{min}' = \delta_{min} + u$$

$$u = 1,2 (R_{Z1} + R_{Z2})$$

R_z – Rugosidad de las superficies antes del montaje, mm.

Al seleccionar el ajuste para la unión es obligatorio garantizar que el apriete máximo de este sea menor que el máximo admisible por la unión y que el mínimo sea mayor que el mínimo requerido para garantizar la transmisión de la carga de trabajo de la unión.

La temperatura requerida para el montaje térmico se puede determinar por la siguiente ecuación:

$$t_{cal.} = \frac{\delta_{max} + \delta_0}{\alpha \cdot d} + t_a \quad ^\circ\text{C} \quad (1.56)$$

$$t_{enf.} = t_a - \frac{\delta_{max} + \delta_0}{\alpha \cdot d} \quad ^\circ\text{C} \quad (1.57)$$

Donde:

δ_{max} – Apriete máximo del ajuste seleccionado para la unión.

δ_0 – Holgura mínima para el montaje. Se toma como la holgura del ajuste móvil H8/h8.(Dobrovolski V 1980).

α - Coeficiente de dilatación térmica del material correspondiente.

$$\alpha = 12 \times 10^{-6} \quad ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{acero}$$

$$\alpha = 10.5 \times 10^{-6} \quad ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{hierro fundido}$$

$$\alpha = 17 \times 10^{-6} \quad ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{bronce}$$

La fuerza necesaria para el montaje en frío se puede determinar como:

$$P_m = P \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot f \quad , \quad N \quad (1.58)$$

P – Presión entre las piezas para el apriete máximo del ajuste seleccionado, MPa.

f – Coeficiente de fricción durante el montaje a presión.

1.3 Presión Límite que puede soportar un cilindro de pared gruesa de espesor infinito.

Se analizará ahora el caso opuesto al de la sección anterior, es decir, el de un cilindro de pared tan grande que sus dimensiones exteriores se pueden considerar infinitas, o sea: $b \rightarrow \infty$. Para un tubo de pared gruesa sometido a presión interior, se tiene que:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{r^2 + b^2}{b^2 - a^2} \right) \quad (1.59)$$

Si $b \rightarrow \infty$, aplicando L'Hospital:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_t = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{p \cdot a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{r^2 + b^2}{b^2 - a^2} \right) \right] = \frac{p \cdot a^2}{r^2}$$

O sea:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot a^2}{r^2} \quad (1.60)$$

Construyendo los gráficos $\sigma_t = f(r)$ y $\sigma_r = f(r)$ se obtiene que:

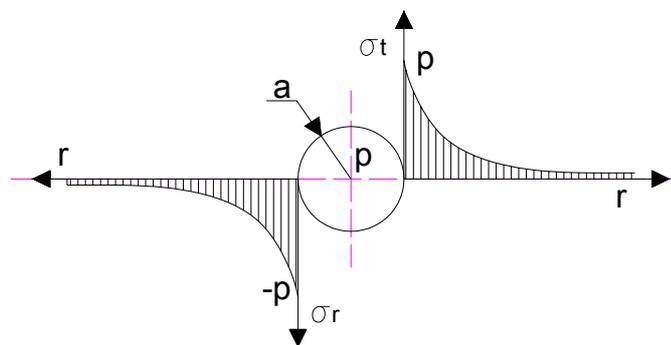


Fig. 1.9 Distribución de tensiones en un tubo de espesor infinito

En este caso $\sigma_1 = \sigma_t = p$, $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 = \sigma_r = -p$

La tensión equivalente por la tercera hipótesis, da como resultado:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_t \\ \sigma_{eq} &= p - (-p) \leq [\sigma]_t \\ p_{\max} &= \frac{[\sigma]_t}{2}\end{aligned}\tag{1.61}$$

Aun cuando el cilindro tenga espesor infinito no se puede alcanzar con un tubo simple una presión mayor que la mitad de la tensión admisible del material. La forma externa del tubo cuando la pared es gruesa no tiene ninguna significación pues, por ejemplo si $r = 4a$, se tiene de la (1.60) que:

$$\sigma_r = \mp \frac{p \cdot}{16}\tag{1.62}$$

O sea, las tensiones son solo un 5 % de la tensión máxima y el material que está más allá de dicho radio está subutilizado.

1.4 El Tubo Compuesto como alternativa para elevar la presión máxima que puede soportar un Tubo de Pared Gruesa.

Una de las alternativas constructivas para aumentar la capacidad de carga de los cilindros de paredes gruesas es el empleo de tubos compuestos. En estos se logra una distribución de tensiones mucho más racional a través del espesor. Un tubo compuesto está constituido por dos tubos uno exterior y otro interior. El diámetro exterior del tubo interior es ligeramente mayor al diámetro interior del tubo exterior y ellos se encajan por interferencia uno dentro del otro (Fig.1.10).

Producto del encaje por interferencia de ambos tubos en la superficie de contacto surge una presión p_k , la cual es interior para el tubo exterior y exterior para el tubo interior. Bajo la acción de esta presión el tubo exterior aumentará su radio interior en la magnitud $+u_2$ y el tubo interior disminuirá su radio exterior en la magnitud $-u_1$, de manera que:

$$\Delta = u_2 + (-u_1) = u_2 - u_1\tag{1.63}$$

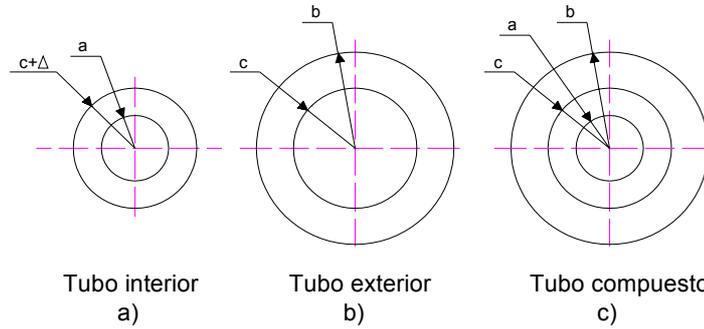


Fig. 1.10 Tecnología de fabricación de un Tubo Compuesto.

Se verá a continuación cómo se puede determinar u_1 y u_2 . El desplazamiento radial u en un tubo de pared gruesa en el cual $\sigma_z = 0$ se calcula por la expresión clásica de los tubos de paredes gruesas, o sea:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{r} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}$$

Para el cilindro exterior:

$$p_a = p_k, p_b = 0, a = c, b = b \text{ y } r = c$$

De modo que:

$$u_2 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} \cdot p_k - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} \cdot p_k \quad (1.64)$$

Para el cilindro interior:

$$p_a = 0, p_b = p_k, a = a, b = c \text{ y } r = c$$

De modo que:

$$u_1 = -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{c^3}{b^2 - a^2} \cdot p_k - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{b^2 - c^2} \cdot p_k \quad (1.65)$$

Como $\Delta = u_2 - u_1$, se obtiene que despejando p_k

$$p_k = \frac{E \cdot \Delta}{2 \cdot c^3} \cdot \frac{(c^2 - a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{(b^2 - a^2)} \quad (1.66)$$

Las tensiones que se originan producto de la presión p_k se muestran en la Fig.1.11.

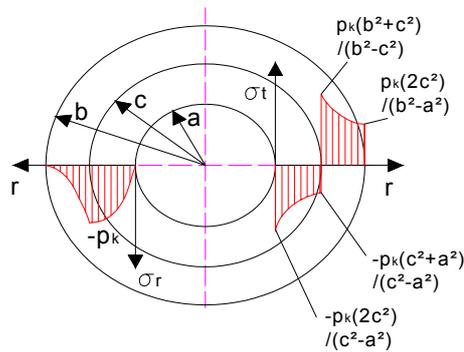


Fig. 1.11 Tensiones originadas durante el ensamblaje del Tubo.

Si el cilindro se somete a una presión interior p en el diámetro a , las tensiones originadas por p son las mostradas en la Fig.1.12.

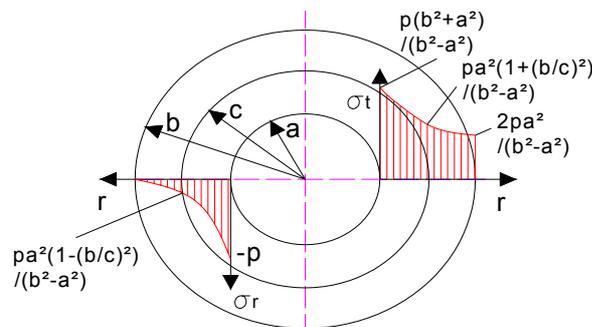


Fig. 1.12 Tensiones originadas por la presión interior p .

Al superponerse las tensiones previas originadas por la presión que surge durante el ensamble p_k mas las tensiones que surgen por la presión de trabajo p . Se obtiene el cuadro resultante de tensiones que se muestra en la Fig.1.13.

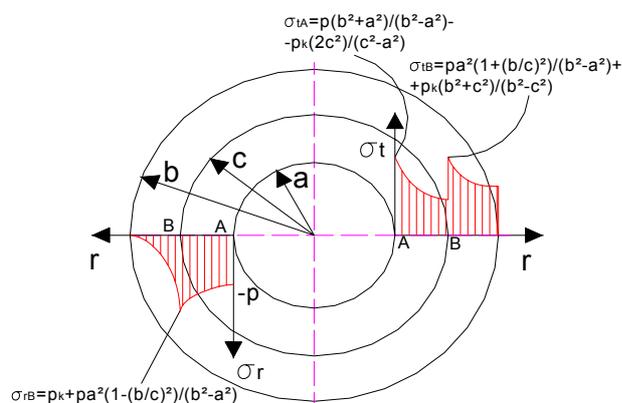


Fig. 1.13 Tensiones resultantes en el tubo compuesto en operación

1.5 Optimización de los tubos compuestos. Condiciones de Gadolín

La máxima resistencia se obtiene cuando $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$, aplicando esta condición según la Tercera Hipótesis, se obtiene que:

$$p \cdot \frac{b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{c^2 \cdot (b^2 - a^2)} = p_k \cdot \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (1.67)$$

Sustituyendo (1.66) en (1.67) se obtiene que:

$$\delta = 2 \cdot \Delta = \frac{4 \cdot p}{E} \cdot \frac{c \cdot b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{b^2 \cdot (c^2 - a^2) + c^2 \cdot (b^2 - c^2)} \quad (1.68)$$

Que es la interferencia diametral requerida para lograr que $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$. La expresión de σ_{eq} para esta condición es:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eqA} = \sigma_{eqB} = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right] \quad (1.70)$$

Para hallar el valor de c para el cual σ_{eq} es mínima, se obtiene:

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dc} = 0 \rightarrow c = \sqrt{a \cdot b} \quad (1.71)$$

Sustituyendo finalmente este valor de C en σ_{eq} se obtiene:

$$\sigma_{eq}^{\min} = p \cdot \frac{b}{b - a} \leq [\sigma]_t \quad (1.72)$$

Si hallamos el límite de esta expresión cuando $b \rightarrow \infty$, se obtiene:

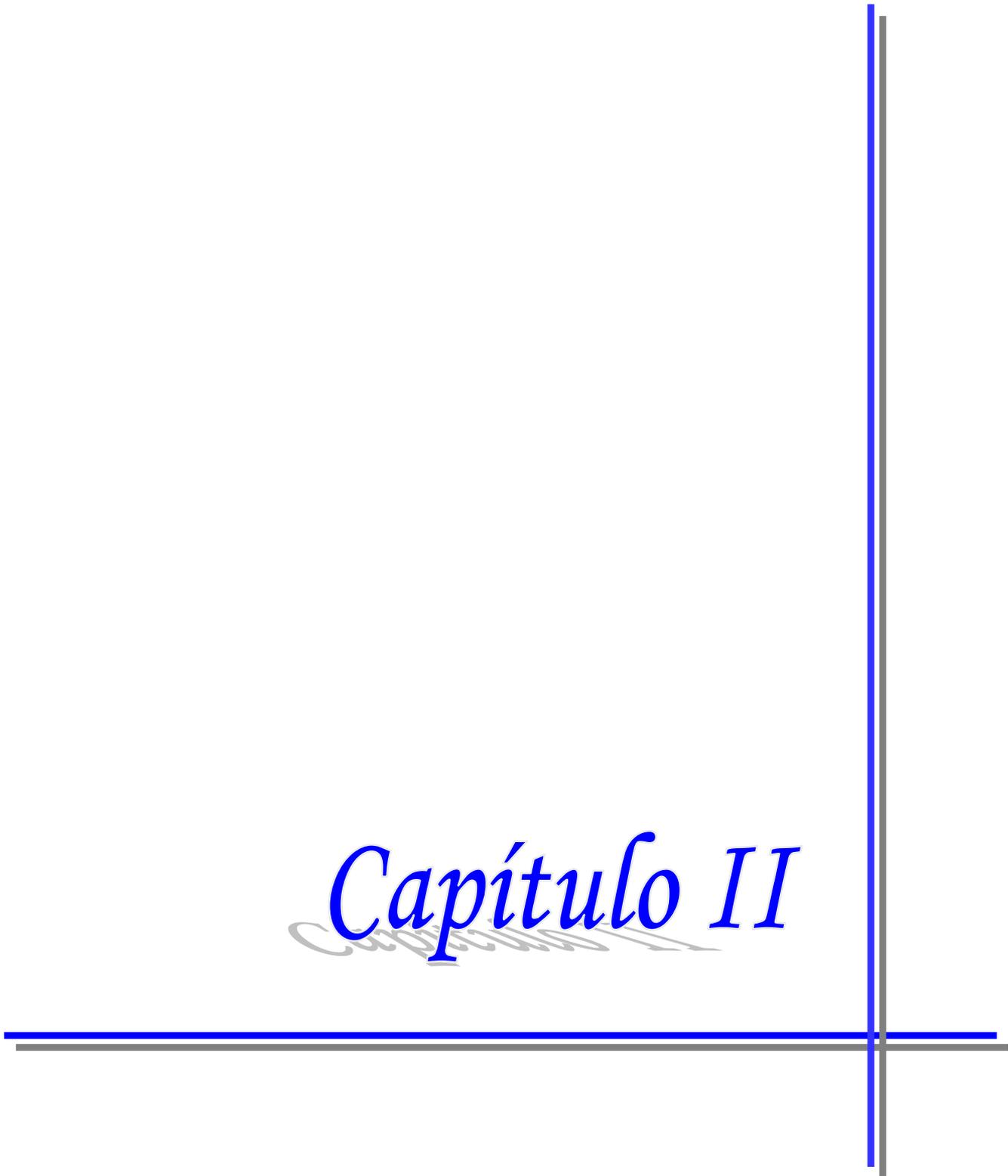
$$\sigma_{eq}^{\min} = p \leq [\sigma]_t \text{ de donde: } p_{\max} = [\sigma]_t$$

La presión máxima que puede soportar el tubo compuesto se duplica con relación al tubo simple. Estas ecuaciones de optimización de la resistencia han sido desarrolladas para tubos de iguales materiales y se conocen en la Mecánica de Materiales como Condiciones de Gadolín.

1.6 Conclusiones del Capítulo.

1. Se profundizó en la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y se demostró que la máxima presión que puede soportar un tubo, incluso de espesor infinito, es la mitad de la tensión admisible del material de que está hecho.
2. Se profundizó en la Teoría de las Uniones por Interferencia, ya que los Tubos Compuestos no son más que un tubo interior ensamblado por interferencia dentro de uno exterior.
3. Se profundizó en la Teoría de los Tubos Compuestos de iguales materiales como alternativa para elevar la capacidad de carga de los Tubos de Paredes Gruesas y en las Condiciones de Optimización de Gadolín, con vistas a su aplicación en el desarrollo de los Tubos de Paredes Gruesas de Materiales Diferentes.

Capítulo II



Capítulo 2

Desarrollo de la Teoría de los Tubos Compuestos de dos materiales diferentes en los tubos interior y exterior.

2.1. Teoría de los Tubos Compuestos de materiales iguales en el tubo interior y en el exterior.

Como se vio en el Capítulo I durante el ensamblaje del tubo compuesto surgen tensiones producto de la presión p_k que aparece en la superficie de encaje de ambos tubos debido a la interferencia. Las tensiones que se originan producto de la presión p_k se muestran en la (Fig.2.1.)

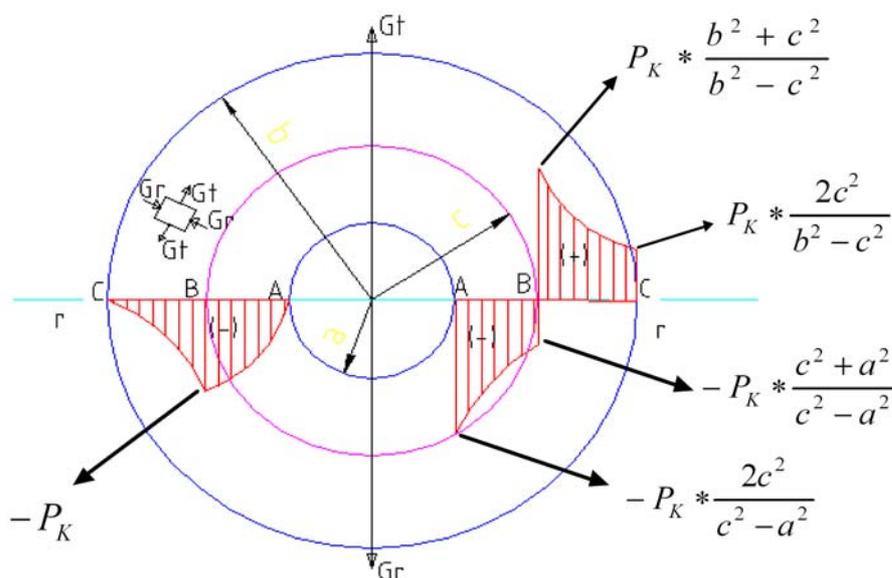


Fig. 2.1 Tensiones originadas durante el ensamblaje del Tubo Compuesto.

La presión P_k que sigue durante el ensamblaje depende de la interferencia radial Δ de las cualidades elásticas de los materiales y de las dimensiones de las piezas ensambladas durante el encaje de la pieza interior en el orificio de la exterior, al ser el radio de esta última menor en una magnitud Δ , se produce desplazamientos en estos radios de manera que el radio interior de la pieza exterior aumentará en una magnitud (U_2) y el exterior de la pieza interior disminuirá en una magnitud (U_1). La suma algebraica de estos desplazamientos radiales tienen que ser igual a Δ .

O sea:

$$U_2 - U_1 = \Delta \tag{2.1}$$

Aquí (U_1) es negativo, lo que se convierte realmente en una suma.

Aplicando la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas se tiene que:

$$U_1 = -\frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} \cdot P_K - \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \cdot P_K$$

De la misma forma se puede hallar (U_2).

$$U_2 = -\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} \cdot P_K + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} \cdot P_K$$

E_1 y E_2 - Son los módulos de elasticidad de las piezas interior y exterior respectivamente.

μ_1 y μ_2 - Son los coeficientes de Poisson de los materiales de las piezas interior y exterior respectivamente.

De acuerdo con la ecuación (2.1) se tiene que despejando P_K .

$$P_K = \frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)} \quad (2.2)$$

Las tensiones durante el ensamble de los tubos dependen del valor de esta presión P_K .

Después de que está ensamblado el tubo interior en el tubo exterior el conjunto está listo para trabajar con una presión interior (p), dado que el tubo interior está sometido a compresión, tendría que anularse estas tensiones de compresión para que el tubo interior aumentara sus tensiones de tracción, pero las tensiones provocadas por la presión de trabajo (p) en el tubo exterior son menores que en el interior. En la Fig. 2.2 se muestran las tensiones provocadas por (p).

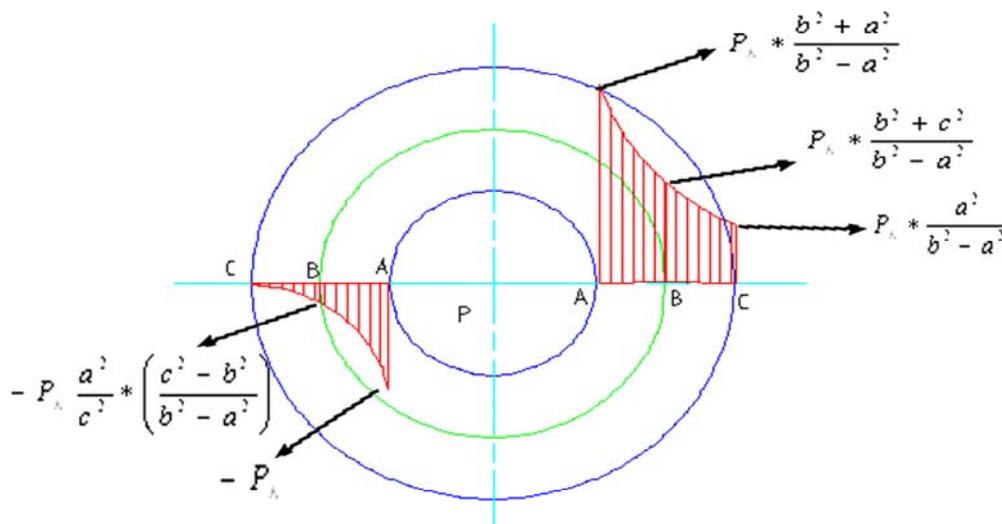


Fig. 2.2 Tensiones originadas por la presión interior p después de ensamblado el tubo y puesto en explotación.

Al superponerse las tensiones previas originadas por la presión que surge durante el ensamble p_k mas las tensiones que surgen por la presión de trabajo p . Se obtiene el cuadro resultante de tensiones que se muestra en la Fig. 2.3.

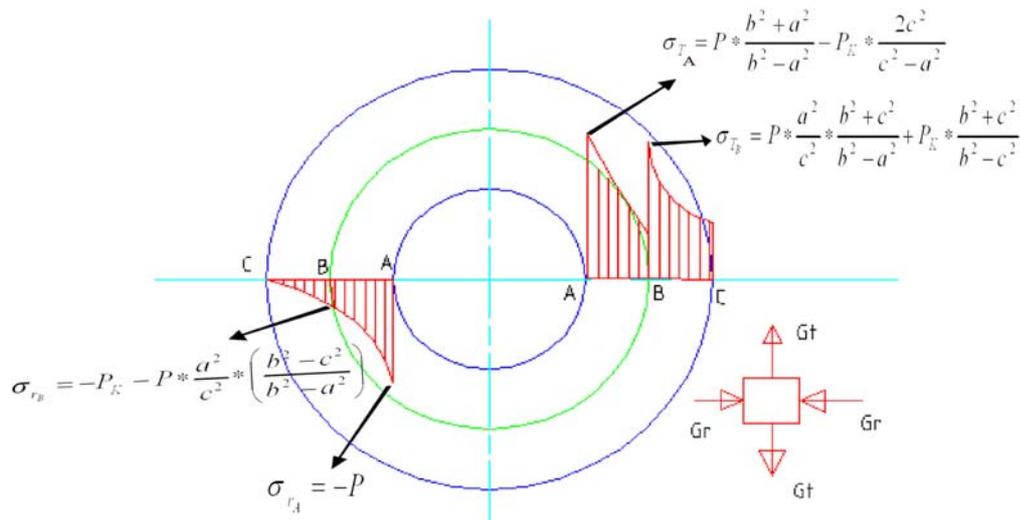


Fig. 2.3 Tensiones resultantes en el tubo compuesto en operación

2.2 Optimización de los Tubos Compuestos. Condiciones de Gadolín

La condición de optimización de los tubos compuestos en el caso de materiales iguales en el tubo interior y exterior consiste en igualar las tensiones equivalentes en los puntos A y B del tubo (Feodosiev V.I. 1985). La máxima resistencia se obtiene cuando $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$, aplicando esta condición según la Tercera Hipótesis, se obtiene que:

$$p \cdot \frac{b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{c^2 \cdot (b^2 - a^2)} = p_k \cdot \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (2.3)$$

La presión p_k que aparece en el encaje durante el ensamblaje con una interferencia Δ se muestra en la expresión (2.4) esta expresión aparece deducida en el Capítulo I.

$$p_k = \frac{E \cdot \Delta}{2 \cdot c^3} \cdot \frac{(c^2 - a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{(b^2 - a^2)} \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.4) en (2.2) y despejando $\delta = 2 \Delta$ se obtiene que:

$$\delta = 2 \cdot \Delta = \frac{4 \cdot p}{E} \cdot \frac{c \cdot b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{b^2 \cdot (c^2 - a^2) + c^2 \cdot (b^2 - c^2)} \quad (2.5)$$

Que es la interferencia diametral requerida para lograr que $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$. La expresión de σ_{eq} para esta condición es:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eqA} = \sigma_{eqB} = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right] \quad (2.6)$$

La optimización del Tubo consiste en hallar el valor de c para el cual σ_{eq} es mínima. Derivando σ_{eq} e igualando a cero, se obtiene:

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dc} = 0 \rightarrow c = \sqrt{a \cdot b} \quad (2.7)$$

Sustituyendo finalmente este valor de C en σ_{eq} se obtiene:

$$\sigma_{eq}^{\min} = p \cdot \frac{b}{b-a} \leq [\sigma]_t \quad (2.8)$$

Como se vio anteriormente, si hallamos el límite de esta expresión cuando $b \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\sigma_{eq}^{\min} = p \leq [\sigma]_t \text{ de donde: } p_{\max} = [\sigma]_t \quad (2.9)$$

La presión máxima que puede soportar el tubo compuesto se duplica con relación al tubo simple. Estas ecuaciones de optimización de la resistencia han sido desarrolladas para tubos de iguales materiales y se conocen en la Mecánica de Materiales como Condiciones de Gadolín. La Teoría de los Tubos Compuestos y las Condiciones de Gadolín aparecen descritas en (Feodosiev V.I. 1985) pero solamente para materiales iguales en el tubo exterior y en el interior, lo que limita ampliamente sus aplicaciones. En el Manual de Resistencia de Materiales de Pisarenko, que recoge lo más avanzado de la Mecánica de Materiales, de la antigua URRS hasta el año de su publicación, sólo aparece tratada la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y en Síntesis los Tubos Compuestos, pero no se detallan las Condiciones de Optimización de Gadolín ni para materiales iguales ni diferentes en los tubos. En la mayoría de la literatura más moderna de Mecánica de Materiales de América no aparece la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas o se trata de forma muy elemental (Beer F.P. and Jonhston E.R 1993; Fitzgerald F 1996; Fogiel M 1988; Mott R.L. 1990; Mott R.L 1996; Spiegel L., Limbrunner G.F 1999) e incluso en la literatura de Mecánica de Materiales Avanzada y de Teoría de la Elasticidad (Solecki R. and Jai R 2003; Aleksandrov A. V., Potapov V.D 1990) se desarrolla la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y Tubos Compuestos, pero no se habla de esta teoría para materiales diferentes, ni se mencionan las Condiciones de Optimización de Gadolín. En el presente Capítulo se desarrollarán las ecuaciones de los Tubos Compuestos y se aplicarán las condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y exterior en sus tres posibles variantes:

1. Ambos tubos de materiales dúctiles pero diferentes.
2. El tubo interior dúctil y el exterior frágil.
3. El tubo interior frágil y el exterior dúctil.

2.3 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales dúctiles diferentes en el tubo interior y en el exterior.

Las tensiones equivalentes se pueden calcular en los puntos A y B de acuerdo con algunas de las Hipótesis de Resistencia. Si ambos materiales son dúctiles se puede usar la tercera Hipótesis de Resistencia.

$$\begin{aligned}\sigma_{eq_A} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{Ta} - \sigma_{Ra} = P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - (-P) \\ \sigma_{eq_A} &= P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{eq_B} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{Tb} - \sigma_{Rb} \\ \sigma_{eq_A} &= P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \left(-P_K - P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right) \\ \sigma_{eq_A} &= P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

En el caso de materiales diferentes la condición de optimización no se logra igualando las tensiones equivalentes, sino dividiendo la condición de resistencia para el tubo A entre la condición de resistencia del tubo B. Esta relación para óptima resistencia debe ser igual a la relación entre las tensiones admisibles a tracción, o a la relación entre las tensiones límites a tracción de los dos materiales tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma_{eq_A}}{\sigma_{eq_B}} = \frac{[\sigma]_{tA}}{[\sigma]_{tB}} = \frac{\sigma_{lim.tA}}{\sigma_{lim.tB}} = K \quad (2.12)$$

De esta ecuación de $\sigma_{eq_A} = K \sigma_{eq_B}$ se puede despejar P_K e igualando entonces la expresión obtenida de P_K con la ecuación (2.2) se puede despejar Δ , que será la interferencia radial que garantiza la igualdad de resistencia entre ambos tubos.

$$\begin{aligned}\sigma_{eq_A} &= K \cdot \sigma_{eq_B} \\ P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} &= K \cdot \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right] \\ P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} &= K \cdot P \left(\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) + K \cdot P_K \left(\frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right)\end{aligned}$$

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - K \cdot P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} = K \cdot P \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$-P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - K \cdot P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} = K \cdot P \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$P_K \left(-\frac{2c^2}{c^2 - a^2} - K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right) = K \cdot P \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$P_K = \frac{P \left(K \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) \cdot (-1)}{\left(-\frac{2c^2}{c^2 - a^2} - K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right) \cdot (-1)}$$

$$P_K = \frac{P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left(-K \frac{a^2}{c^2} + 1 \right)}{\left(\frac{2c^2}{c^2 - a^2} + K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right)}$$

Descomposición de P_K

Descomposición de numerador.

$$P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left(-K \frac{a^2}{c^2} + 1 \right)$$

$$-P \cdot K \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{c^2} + P \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{-P \cdot K \cdot a^2 \cdot 2b^2 + c^2 \cdot P \cdot 2b^2}{c^2(b^2 - a^2)}$$

$$\frac{P2b^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)}$$

Descomposición de denominador.

$$\frac{2c^2}{c^2 - a^2} + K \frac{2b^2}{b^2 - c^2}$$

$$\frac{2c^2(b^2 - c^2) + K \cdot 2b^2(c^2 - a^2)}{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}$$

$$\frac{2[c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)]}{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}$$

Ambas.

$$\frac{\frac{P2b^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)}}{\frac{2[c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)]}{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}} = \frac{P2b^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{2[c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)]}$$

$$P_K = \frac{Pb^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{[c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)]} \quad (2.13)$$

Igualando P_K en la ecuación (2.2) se obtiene Δ .

$$P_K = \frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)} \quad (2.2)$$

$$\frac{Pb^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{[c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)]} = \frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)}$$

$$\Delta = \frac{Pb^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \cdot \left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right) \quad (2.14)$$

El valor de P_K obtenido se sustituye en la expresión (2.10) quedando expresado la ecuación de la tensión equivalente en función de $p, a, b, c, E_1, E_2, \mu_1$ y μ_2 .

$$\begin{aligned} \sigma_{eqA} &= P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \left[P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right] \\ \sigma_{eqA} &= \frac{P2b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\left(\frac{Pb^2(-K \cdot a^2 + c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right)}{\left(c^2 - a^2 \right)} \\ \sigma_{eqA} &= \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{2P \cdot b^2(-K \cdot a^2 + c^2) \cdot (b^2 - c^2)}{(b^2 - a^2) \cdot (c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2))} \\ \sigma_{eqA} &= \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(-K \cdot a^2 + c^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right] \quad (2.15) \end{aligned}$$

Derivando el valor de σ_{eq} obtenido con relación a c , e igualando a 0 se puede obtener el valor de c para que $\sigma_{eq \min}$. O sea, $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial c} = 0$ y sustituyendo finalmente ese valor de c en la expresión obtenida de σ_{eq} se obtiene el valor de $\sigma_{eq \min} = f(p, a, b, c \text{ y } K)$. Esta operación de derivación de σ_{eq} y el despeje de c valor para el cual se obtiene $\sigma_{eq \min}$, se realizó en todos los casos que veremos a continuación utilizando el Software (Derive 6.)

$$\sigma_{eq_A} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(c^2 - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right]$$

$$\sigma_{eq_A} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{c^2b^2 - c^4 - Ka^2b^2 + Ka^2c^2}{c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Ka^2b^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \left(\frac{-2Pb^2}{b^2 - a^2} \right) \cdot \left[\frac{(2cb^2 - 4c^3 + 2cKa)(c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Kb^2a^2) - (c^2b^2 - c^4 - Ka^2b^2 + Ka^2c^2)(2cb^2 - 4c^3 + 2cKb^2)}{(c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Kb^2a^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{-2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[\frac{2c^3b^4 - 2c^5b^2 + 2Kb^4c^3 - 2Kab^4c - 4b^2c^5 + 4c^7 - 4Kb^2c^5 + 4Kab^2c^3 + 2Kab^2c^3 - 2Ka^2c^5 + 2Kab^2c^3 - 2K^2a^4b^2c - 2b^4c^3}{[c^2(b^2 - c^2 + Kb^2) - Kb^2a^2]^2} \right]$$

$$+ \frac{4b^2c^5 - 2Kb^4c^3 + 2b^2c^5 - 4c^7 + 2Kb^2c^5 + 2Kab^2c^3 - 4Kab^2c^3 + 2K^2a^4b^2c - 2Kab^2c^3 + 4Ka^2c^5 - 2K^2a^2b^2c^3}{[c^2(b^2 - c^2 + Kb^2) - Kb^2a^2]^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{-2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[\frac{-4Kb^2c^5 - 2Ka^2c^5 - 2K^2a^4b^2c + 2Kb^2c^5 + 2K^2a^2b^4c + 4Ka^2c^5}{[c^2(b^2(K+1) - c^2) - a^2b^2k]^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{-2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[\frac{-2Kb^2c^5 + 2Ka^2c^5 - 2K^2a^4b^2c + 2K^2b^4c}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{4b^2cKp}{b^2 - a^2} \cdot \left[\frac{b^2c^4 - a^2c^4 + Ka^4b^2 - K^2a^2b^4}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{4b^2cKp}{b^2 - a^2} \cdot \left[\frac{c^4(b^2 - a^2) - Ka^2b^2(b^2 - a^2)}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2} \right] = \frac{4b^2cKp}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{(b^2 - a^2)(c^4 - Ka^2b^2)}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{4b^2cKp(c^4 - Ka^2b^2)}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2}$$

Igualando a 0.

$$\frac{4b^2cKp(c^4 - Ka^2b^2)}{\left[a^2b^2k - c^2\left[b^2(K+1) - c^2\right]\right]^2} = 0$$

$$4b^2cKp(c^4 - Ka^2b^2) = 0$$

$$c^4 - Ka^2b^2 = 0$$

$$c^2 = \sqrt{Kab}$$

$$c = \sqrt[4]{K} \sqrt{ab} \tag{2.16}$$

Sustituyendo c en la expresión obtenida.

$$\sigma_{eq\ min} = \sigma_{eqA}$$

Sustituyendo c^2 en σ_{eqA} .

$$\sigma_{eq\ min} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(c^2 - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right]$$

$$\sigma_{eq\ min} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(\sqrt{Kab} - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - \sqrt{Kab})}{\sqrt{Kab}(b^2 - \sqrt{Kab}) + K \cdot b^2(\sqrt{Kab} - a^2)} \right]$$

Resolviendo el corchete.

$$\frac{\sqrt{Kab}(b^2 - \sqrt{Kab}) + Kb^2(\sqrt{Kab} - a^2) - (\sqrt{Kab} - Ka^2)(b^2 - \sqrt{Kab})}{\sqrt{Kab}(b^2 - \sqrt{Kab}) + Kb^2(\sqrt{Kab} - a^2)}$$

$$\frac{\sqrt{Kab}^3 - Ka^2b^2 + K\sqrt{Kab}^3 - Kb^2a^2 - (\sqrt{Kab}^3 - ka^2b^2 - Ka^2b^2 + K\sqrt{Ka}^3b)}{\sqrt{Kab}^3 - Ka^2b^2 + K\sqrt{Kab}^3 - Kb^2a^2}$$

$$\frac{\sqrt{Kab}^3 - Ka^2b^2 + K\sqrt{Kab}^3 - Kb^2a^2 - \sqrt{Kab}^3 + ka^2b^2 + Ka^2b^2 - K\sqrt{Ka}^3b}{b^2(\sqrt{Kab} - Ka^2 + K\sqrt{Kab} - Ka^2)}$$

$$\frac{K\sqrt{K}ab^3 - K\sqrt{K}a^3b}{b^2(\sqrt{K}ab(1+K) - Ka^2(1+1))} = \frac{K\sqrt{K}ab(b^2 - a^2)}{b^2(\sqrt{K}ab(1+K) - 2Ka^2)}$$

$$\sigma_{eq\ min} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{K\sqrt{K}ab(b^2 - a^2)}{b^2(\sqrt{K}ab(1+K) - 2Ka^2)}$$

$$\sigma_{eq\ min} = \frac{2Pb^2 K \sqrt{K} ab}{\sqrt{K} ab(1+K) - 2Ka^2} \quad (2.17)$$

Para validar las expresiones si se hace $K = 1$, se trataría de materiales iguales en los tubos interior y exterior y se debería obtener:

$c = \sqrt{ab}$ y la expresión de $\sigma_{eq\ min} = p \cdot \frac{b}{b-a}$, lo que se comprueba fácilmente a través de las ecuaciones (2.16) y (2.17).

Las Ecuaciones (2.2), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) representan las Ecuaciones de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de optimización de Gadolín para el caso de un tubo de dos materiales dúctiles diferentes en los tubos interior y exterior.

2.4 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior, para el caso de material dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior.

Si se trata de materiales diferentes pero el material del tubo interior es dúctil y el del tubo exterior es frágil, entonces para la pieza interior de material dúctil se puede plantear la Condición de Resistencia por la Tercera Hipótesis de Resistencia, pero la pieza exterior de material frágil sería necesario calcular por la Teoría de Mohr.

Para la pieza interior, al igual que el caso anterior:

$$\sigma_{eqA} = P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_{tA} \quad (2.18)$$

Para la pieza exterior de material frágil utilizaremos en esta primera evaluación la Teoría Clásica de Mohr. O sea:

$$\sigma_{eqB} = \sigma_1 - \gamma \cdot \sigma_3 = \sigma_{tB} - \gamma \cdot \sigma_{rB} \leq [\sigma]_{tB}$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + P_K \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \gamma \left[-P_K - P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right]$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + \gamma \cdot P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} + P_K \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \gamma \cdot P_K$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2 + c^2 + \gamma b^2 - \gamma c^2 \right] + P_K \frac{b^2 + c^2 + \gamma b^2 - \gamma c^2}{b^2 - c^2}$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2(1 + \gamma) + c^2(1 - \gamma) \right] + P_K \left[\frac{b^2(1 + \gamma) + c^2(1 - \gamma)}{b^2 - c^2} \right] \quad (2.19)$$

$$\text{Aquí: } \gamma = \frac{[\sigma]_{tB}}{[\sigma]_{cB}} \quad (2.20)$$

$$\text{Y si se designa a } K = \frac{[\sigma]_{ta}}{[\sigma]_{tB}} \quad (2.21)$$

Se tiene que

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2(1 + \gamma) + c^2(1 - \gamma) \right] + P_K \left[\frac{b^2(1 + \gamma) + c^2(1 - \gamma)}{b^2 - c^2} \right] \right]$$

De esta ecuación se puede despejar P_K , o sea la presión en el encaje de los tubos que garantiza la igualdad de resistencia entre el tubo interior u exterior e igualando esta con la expresión (2.2) se puede despejar Δ que será la interferencia radial que garantiza la igualdad de resistencia entre ambos tubos.

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)] + P_K \left[\frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right] \right]$$

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \cdot \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)] \right] + P_K \left[K \cdot \frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right]$$

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - K \cdot \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)] \right] = P_K \left[K \cdot \frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right] + P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - K \cdot \left[\frac{Pa^2 [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]}{c^2(b^2 - a^2)} \right] = P_K \left[\frac{K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]$$

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \frac{K[Pa^2 [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]]}{c^2(b^2 - a^2)} = P_K \left[\frac{(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \right]$$

$$\frac{c^2(2Pb^2) - K[Pa^2 [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]]}{c^2(b^2 - a^2)} = P_K \left[\frac{(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \right]$$

$$P_K = \frac{\frac{c^2(2Pb^2) - K[Pa^2 [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]]}{c^2(b^2 - a^2)}}{\left[\frac{(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \right]}$$

$$P_K = \frac{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2 [b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]] \cdot (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2) [(c^2 - a^2) \cdot [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2]} \quad (2.22)$$

Sustituyendo este valor de p_K en la ecuación (2.18) de σ_{eqA} , se obtiene:

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eq_A} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]] \cdot (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \cdot [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2} \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eq_A} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{2c^2 \cdot \{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]] \cdot (b^2 - c^2)\}}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \cdot [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2}$$

$$\sigma_{eq_A} = \frac{2Pb^2 \{c^2((c^2 - a^2) \cdot [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2)\} - (2.23)}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \cdot [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)2c^2}$$

$$- 2c^2 \cdot \{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]] \cdot (b^2 - c^2)\}$$

Derivando σ_{eq_A} se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{4ckP \{4b^2c^4 - a^2k[b^4(\gamma+1)^2 + 2b^2c^2(\gamma+1)(1-\gamma) + c^4(\gamma-1)^2]\}}{\{a^2k[b^2(\gamma+1) + c^2(1-\gamma)] - c^2[b^2(k(\gamma+1)+2) - c^2(k(\gamma-1)+2)]\}^2}$$

E igualando la derivada a 0 y despejando c se obtiene:

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot k^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(\gamma+1)}}{\sqrt{(a \cdot \sqrt{k}(\gamma-1) + 2b)}} \quad (2.24)$$

Al sustituir en c, k=1 y $\gamma=1$ se debe obtener la condición para materiales dúctiles iguales en ambos tubos, lo que como se aprecia se cumple satisfactoriamente, sirviendo esto de validación para las ecuaciones

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{b}}{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Las Ecuaciones (2.2), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) y (2.24) representan las Ecuaciones de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de optimización de Gadolín para el caso de un tubo de dos materiales dúctiles diferentes, dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior.

Si se sustituye la Ecuación (2.24) en la expresión (2.23), se obtiene la expresión de $\sigma_{eq_{min}}$.

2.5 Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior, para el caso de material frágil en el tubo interior y dúctil en el exterior.

Si el tubo exterior es el que es dúctil y el interior es frágil, se aplica al exterior la Tercera Hipótesis de Resistencia y al interior la Teoría de Mohr.

Para las piezas interior frágil:

$$\sigma_{eqA} = \sigma_{ta} - \gamma \sigma_{ra} = P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - \gamma(-p) \leq [\sigma]_{Ta}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{P(b^2 + a^2 + \gamma b^2 - \gamma a^2)}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_{Ta}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{P[b^2(1 + \gamma) + a^2(1 - \gamma)]}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_{Ta} \quad (2.25)$$

Para la pieza exterior dúctil:

$$\sigma_{eqB} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{tB} - \sigma_{rB} = P \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \leq [\sigma]_{TB} \quad (2.26)$$

$$\text{Aquí: } \gamma = \frac{[\sigma]_{tA}}{[\sigma]_{cA}} \quad (2.27) \quad \text{y} \quad K = \frac{[\sigma]_{tA}}{[\sigma]_{tA}} \quad (2.28)$$

Se tiene que:

$$\frac{P[b^2(1 + \gamma) + a^2(1 - \gamma)]}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right]$$

$$\frac{P[b^2(1 + \gamma) + a^2(1 - \gamma)]}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = \frac{2b^2 P K a^2}{c^2(b^2 - a^2)} + P_K \frac{K 2b^2}{b^2 - c^2}$$

$$\frac{P[b^2(1 + \gamma) + a^2(1 - \gamma)]}{b^2 - a^2} - \frac{2b^2 P K a^2}{c^2(b^2 - a^2)} = P_K \frac{K 2b^2}{b^2 - c^2} + P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{P[b^2(1 + \gamma) + a^2(1 - \gamma)]}{b^2 - a^2} - \frac{2b^2 P K a^2}{c^2(b^2 - a^2)} = P_K \left[\frac{K 2b^2}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]$$

$$P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - \frac{2b^2PKa^2}{c^2(b^2 - a^2)} = P_K \left[\frac{K2b^2}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]$$

$$\frac{P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - \frac{2b^2PKa^2}{c^2(b^2 - a^2)}}{\left[\frac{K2b^2}{b^2 - c^2} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]} = P_K$$

$$\frac{c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2}{\frac{(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}} = P_K$$

$$P_K = \frac{[c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2](c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)[(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)]} \quad (2.29)$$

Sustituyendo P_K en la ecuación 2 para obtener Δ

$$\frac{[c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2](c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)[(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)]} =$$

$$\frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)}$$

$$\Delta = \frac{[c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2](c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)[(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)]} \cdot \left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right) \quad (2.30)$$

Sustituir P_K en la ecuación 3 que es σ_{eqA}

$$\sigma_{eqA} = \frac{p[b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)]}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{p[b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)]}{b^2 - a^2} - \frac{[c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2](c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)[(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)]} \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{p[b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)]}{b^2 - a^2} - \frac{2c^2 \{ [c^2P \left[\frac{b^2(1+\gamma) + a^2(1-\gamma)}{b^2 - a^2} \right] - 2b^2PKa^2](b^2 - c^2) \}}{c^2(b^2 - a^2)[(c^2 - a^2)2Kb^2 + 2c^2(b^2 - c^2)]}$$

$$\sigma_{eq_A} = \frac{p[b^2(1+\gamma)+a^2(1-\gamma)]\{c^2[(c^2-a^2)2kb^2+2c^2(b^2-c^2)]-2c^2(b^2-c^2)\{c^2p[b^2(1+\gamma)+a^2(1-\gamma)]-2b^2PKa\}}{c^2(b^2-a^2)\{c^2-a^2\}2kb^2+2c^2(b^2-c^2)} \quad (2.31)$$

Derivando σ_{eq_A} con respecto a c

$$\frac{\partial \sigma_{eq_A}}{\partial c} = \frac{2b^2ckp \{c^4(\gamma+1) - a^2[b^2(2k-\gamma+1) + 2c^2(\gamma-1)]\}}{\{a^2b^2k - c^2[b^2(k+1) - c^2]\}^2}$$

E igualando la ecuación 0 se despeja c.

$$\frac{2b^2ckp \{c^4(\gamma+1) - a^2[b^2(2k-\gamma+1) + 2c^2(\gamma-1)]\}}{\{a^2b^2k - c^2[b^2(k+1) - c^2]\}^2} = 0$$

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\left[\sqrt{a^2(\gamma-1)^2 + b^2(\gamma+1)(2k-\gamma+1)} \cdot \text{SIGN}(a) + a(\gamma-1) \right]}}{\sqrt{(\gamma+1)}} \quad (2.32)$$

A modo de validación si se sustituye en la ecuación de c, los valores de $k = 1$ y $\gamma = 1$ lo que corresponde al primer caso analizado, materiales dúctiles tanto en el tubo interior como en el exterior, el valor de c obtenido debe dar igual que para ese caso. Al sustituir $k = 1$ y $\gamma = 1$ se obtiene que:

$$c = \frac{|a|^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{|b|}}{a} = \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}}{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{a} = \sqrt{a \cdot b}$$

Lo que se corresponde con el caso mencionado. Las Ecuaciones (2.2), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) y (2.32) representan las Ecuaciones de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de Optimización de Gadolín para el caso de un tubo de dos materiales dúctiles diferentes, frágil en el tubo interior y dúctil en el exterior.

2.6 Nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr desarrollada en la UCf que resulta universal para cualquier combinación de los materiales de los tubos interior y exterior.

2.6.1 Generalidades sobre las distintas Hipótesis de Resistencia.

A través de la historia de la Mecánica de los Materiales los científicos han tratado de explicar las causas de la destrucción de los materiales y en ese empeño se han formulado numerosas hipótesis. En la literatura de Mecánica de Materiales y de Resistencia de Materiales (Beer F.P. and Johnston E.R 1993; Feodosiev V.I. 1985; Fitzgerald F 1996; Fogiel M 1988; Miroliubov I

1985; Mott R.L. 1996; Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. 1989; Stiopin P. A. 1985) se explican estas hipótesis y los criterios que utiliza cada una de ellas como causa de la destrucción. De todas las hipótesis planteadas se reconocen en la literatura cinco clásicas que son: Primera Hipótesis o Criterio de las Tensiones Normales Máximas de Galileo – Leibnitz, llamada también de Clebsch – Rankine, Segunda Hipótesis o Criterio de las Deformaciones Lineales Máximas de Mariotte – Grashof, llamada también de Saint Venant, Tercera Hipótesis o Criterio de la Tensión Tangencial Máxima de Coulomb, llamada también de Guest, Cuarta Hipótesis o Criterio de las Tensiones Tangenciales Octaédricas o de la Energía Unitaria de Deformación del Cambio de Forma, conocida como de Huber – Mises – Henke, o simplemente en muchos textos de Von Mises y la Quinta Hipótesis o Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. De todas estas hipótesis los diferentes autores coinciden en afirmar que la Cuarta Hipótesis es un criterio exacto de plasticidad, o sea, que ella explica con exactitud las causas de destrucción de los materiales dúctiles y todos los fenómenos asociados con la falla de estos materiales. A través de esta teoría se explica, por ejemplo, que la fluencia de los materiales dúctiles sometidos a torsión se alcanza cuando la tensión tangencial alcanza el valor de la fluencia a cortante, cuyo valor según la hipótesis debe ser: $\tau_f = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_f$, donde σ_f es el límite de fluencia a tracción, resultado este que se confirma cerradamente en los experimentos. En las publicaciones de los últimos años se han planteado otras muchas hipótesis, la mayoría de ellas aparecen expuestas en las referencias (Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. 1989; Stiopin P. A. 1985), sin embargo, a pesar de estos numerosos intentos hay que reconocer que la única hipótesis que explica con bastante exactitud la destrucción tanto de los materiales dúctiles, como la de los frágiles, es la Quinta Hipótesis o Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, que es una de las pocas hipótesis que permite considerar la diferencia de la resistencia de los materiales frágiles a la tracción y la compresión. Los diferentes autores de Resistencia de Materiales o de Mecánica de Materiales no han sido todo lo justos que se debe al referirse a la Teoría de Mohr y partiendo de que, para el caso particular de los materiales dúctiles, la Teoría de Mohr coincide en su planteamiento con la Tercera Hipótesis, la consideran simplemente como una generalización de ésta, sin valorar en toda su magnitud el mérito de esta Teoría. Uno de los pocos autores que sitúa esta Teoría en el lugar que se merece es (Feodosiev V.I. 1985) destacando que el mérito de la Teoría de Mohr radica en que no se formula ningún criterio como causa de la destrucción, sino que se enfoca el proceso de destrucción de los materiales desde el punto de vista fenomenológico, o sea, su planteamiento se basa en la descripción lógica del fenómeno de la destrucción que es lo más natural y lo más lógico. El Autor y los Tutores del presente trabajo se declaran fervientes seguidores de estos

planteamientos y se proponen contribuir a demostrar que la Teoría de Mohr es la única vía posible de poder evaluar el fenómeno de la destrucción de los materiales dúctiles y de los frágiles a través de una forma universal, con una única formulación matemática que además contribuye a reducir los errores tanto de materiales dúctiles como frágiles

2.6.2 Desarrollo de la Nueva formulación Matemática de la Teoría de Mohr.

La formulación clásica de la condición de paso al estado límite según la Teoría de Mohr es la siguiente:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \gamma \cdot \sigma_3 = \sigma_{lt} \tag{2.33}$$

Donde:

$$\gamma = \frac{\sigma_{lt}}{\sigma_{lc}}, \tag{2.34}$$

σ_{lt} = tensión límite a tracción del material y σ_{lc} = tensión límite a compresión del mismo.

Los diagramas de tensiones límites para materiales dúctiles y materiales frágiles obtenidos para estados tensionales planos según este planteamiento, se muestran respectivamente en la (Fig.2.4 a y b).

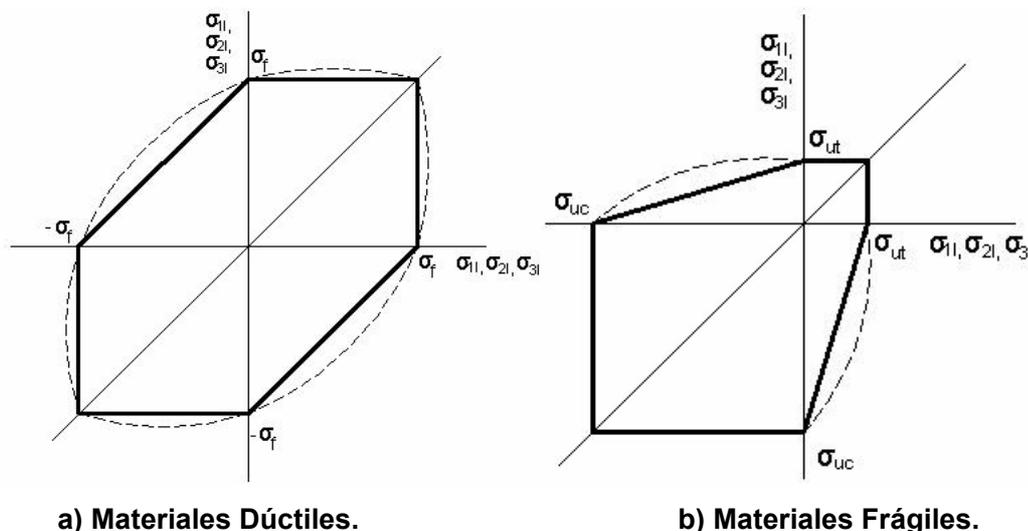


Fig. 2.4 Diagramas de Tensiones Límites según la Teoría Clásica de Mohr.

En líneas de trazos discontinuos se muestra también la forma de los diagramas de tensiones límites obtenidos experimentalmente, como se verá más adelante. Como se aprecia la formulación clásica de la Teoría de Mohr arroja ciertas deferencias con relación a los diagramas experimentales, sobre todo en el segundo y cuarto cuadrantes, tanto para materiales dúctiles como frágiles. Por ejemplo, para materiales dúctiles, de acuerdo a la formulación clásica de Mohr se obtiene que para el estado tensional de cortante puro ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = -\sigma$), la

destrucción se produce cuando $\tau_f = 0,5 \sigma_f$, lo cual no coincide con los resultados de la cuarta hipótesis mencionados anteriormente, introduciendo un 15,5 % de error. Para el caso de los materiales frágiles se obtiene para el caso del estado tensional de cortante puro que la destrucción ocurre cuando $\tau_u = \sigma_{ut} / (1 + k)$, introduciendo un error considerable ya que para los materiales frágiles se confirma experimentalmente que la destrucción bajo el estado tensional de cortante puro ocurre cerradamente cuando $\tau_u \cong \sigma_{ut}$. El hecho de que existan estas diferencias con los resultados experimentales no quiere decir de ninguna manera que la Teoría de Mohr sea inexacta, sino simplemente que la expresión de la envolvente límite empleada en la formulación matemática de la Teoría Clásica de Mohr no es la más adecuada, ya que para obtener la misma solamente se tomaron en consideración los mayores círculos de Mohr correspondientes a los estados tensionales límites de tracción uniaxial y de compresión uniaxial.

En el presente trabajo se demostrará que la formulación matemática de la envolvente de Mohr, incorporando en el análisis un tercer círculo: el mayor de los tres círculos de Mohr para el caso del estado tensional límite de cortante puro, no sólo conduce a una formulación matemática mucho más exacta de la condición de resistencia según esta hipótesis, que reduce sensiblemente los errores en el segundo y cuarto cuadrante, sino que vincula el proceso de destrucción con el signo que posea la tensión media $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$, que exista en el plano donde surge la tensión tangencial es máxima. Según los criterios manejados en el presente trabajo, para los materiales dúctiles el mecanismo de destrucción es siempre el corrimiento de los átomos de la red cristalina producto de la presencia de la tensión tangencial máxima, mecanismo que está absolutamente confirmado por la Tercera y la Cuarta Hipótesis, esto proceso es independiente del signo que posea la tensión media del estado tensional. Sin embargo en el caso de los materiales frágiles el mecanismo de destrucción es extremadamente dependiente del signo de la tensión media σ_m . De la Teoría del Estado Tensional se conoce que en el plano donde ocurre la tensión tangencial máxima existe una tensión normal cuya magnitud es precisamente σ_m , si la tensión normal $\sigma_m > 0$, el mecanismo de destrucción predominante no es precisamente el corrimiento de los átomos producto de la presencia de la tensión tangencial máxima, sino la separación directa de las partículas producto de la presencia de la tensión normal σ_m de tracción la cual favorece este proceso de separación. Cuando por el contrario $\sigma_m < 0$, el mecanismo de destrucción predominante es el corrimiento de los átomos en la red cristalina, interferido este corrimiento por la presencia de una tensión normal de compresión que hace más difícil el proceso de corrimiento en la medida que la tensión media de compresión se haga cada vez mayor, haciendo que el material se comporte como más resistente. Esto como se verá es lo que se observa en los resultados experimentales y lo confirma la formulación

matemática de la Teoría de Mohr que se describirá a continuación en el presente trabajo. Estas consideraciones fueron expuestas hace ya 20 años en el trabajo (Goytisolo R 1989).

La correspondencia entre la teoría y la práctica de los diagramas de tensiones límites trazados para cada una de las hipótesis de resistencia para los estados tensionales planos, ha sido confirmada experimentalmente. Así por ejemplo el Académico N.N. Davidenkov (Stiopin P. A 1985) realizó ensayos con diferentes materiales dúctiles y frágiles sometidos a estados tensionales planos con probetas en forma de tubos, de manera de poder lograr estados tensionales planos con diferentes relaciones entre las tensiones principales. Los tubos eran sometidos a la acción simultánea de una carga axial (de tracción o de compresión) y a una presión interior. En la Fig. 2.5 a) se muestra el primero y cuarto cuadrante (el segundo cuadrante es simétrico con relación al cuarto) del diagrama de tensiones límites obtenido por Davidenkov con probetas de hierro fundido gris cuya composición química era: C – 3,48 %, Si – 2,21 % y Mn – 0,52 %. Las probetas eran tubos con diámetro exterior 14 mm y espesor 0,75 mm. Del diagrama se aprecia que la resistencia máxima a la tracción de dicho material era $\sigma_{ut} = 19 \text{ kgf/mm}^2 = 186,4 \text{ MPa}$ y la resistencia máxima a la compresión era mucho mayor $\sigma_{uc} = 63 \text{ kgf/mm}^2 = 618 \text{ MPa}$, siendo $k = \sigma_{ut}/\sigma_{uc} = 0,3$. Para estados tensionales planos de tracción biaxial la destrucción de este material ocurría cuando cualquiera de las dos tensiones principales alcanzaba el valor de $\sigma_{ut} = 19 \text{ kgf/mm}^2 = 186,4 \text{ MPa}$. Para estados tensionales planos mixtos, o sea, una tensión principal de tracción y otra de compresión (segundo o cuarto cuadrantes), siempre que fuera $\sigma_3 > -23 \text{ kgf/mm}^2 = -225,6 \text{ MPa}$ la destrucción ocurría cuando $\sigma_1 = \sigma_{ut} = 19 \text{ kgf/mm}^2 = 186,4 \text{ MPa}$ y cuando la tensión de compresión comenzaba a aumentar en magnitud, o sea, $\sigma_3 < -23 \text{ kgf/mm}^2 = -225,6 \text{ MPa}$ la tensión de tracción en el momento de la destrucción se hacía cada vez menor mientras la de compresión aumentaba, llegando a $\sigma_3 = \sigma_{uc} = -63 \text{ kgf/mm}^2 = -618 \text{ MPa}$ cuando la tensión de tracción se hacía cero (estado uniaxial límite de compresión). Para el estado tensional plano de cortante puro $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_3 = -\sigma$, la destrucción se produjo cuando $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sigma_{ut} = 19 \text{ kgf/mm}^2 = 186,4 \text{ MPa}$. Si se aplicara la Formulación Clásica de Mohr para este material con $k = \sigma_{ut} / \sigma_{uc} = 19 / 63 = 0,3$ la destrucción bajo el estado tensional de cortante puro debía haber ocurrido cuando $\tau_u = \sigma_{ut} / (1 + \gamma) = 0,77 \sigma_{ut}$, cuando los propios resultados de Davidenkov confirman que la destrucción ocurre cuando $\tau_u = \sigma_{ut}$, lo que implica un 23 % de error con relación a los experimentos.

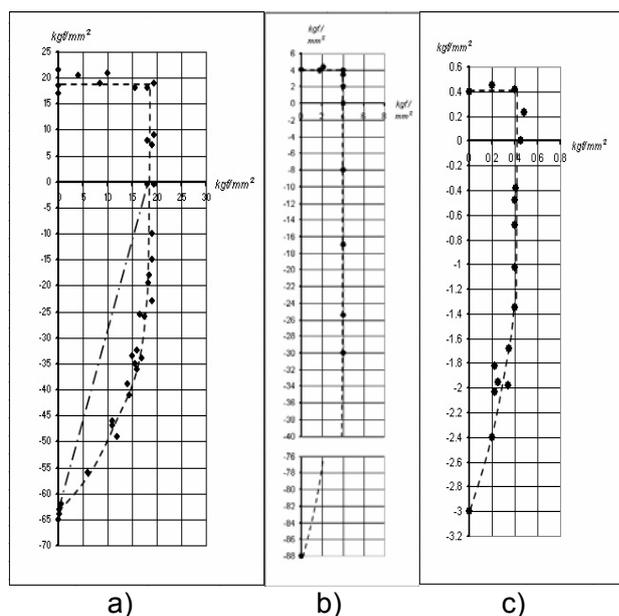


Fig. 2 .5 Resultados experimentales de N.N. Davidenkov para materiales frágiles.

N.N. Davidenkov investigó otros materiales frágiles como fueron el vidrio y el yeso medicinal. Las probetas de vidrio eran tubos de 35 mm de diámetro interior con 1 mm de espesor de pared y las de yeso medicinal de 39,5 mm de diámetro interior y 3 mm de pared. Los resultados experimentales se muestran en las Figs. 2.5 b) y 2 c). En estas se muestran igualmente el primero y segundo cuadrante de los diagramas de tensiones límites experimentales obtenidos. En ningún caso fue investigado el tercer cuadrante. En todos los materiales frágiles investigados se confirma que la destrucción para el estado tensional de cortante puro ocurre cuando $\tau_u = \sigma_{ut}$, o sea, cuando la tensión tangencial alcanza el valor de la resistencia máxima a tracción. N.N. Davidenkov investigó también algunos materiales dúctiles. Los diagramas de tensiones límites obtenidos para estos materiales se muestran en la Fig. 2.6. Los materiales dúctiles investigados por Davidenkov fueron el acero y el cobre. El diagrama de tensiones límites en estos casos no los ploteó con los valores absolutos de las tensiones límites, sino con el cociente entre la tensión principal correspondiente y la tensión límite a tracción, que en el caso de los materiales dúctiles coincide con el límite de fluencia a tracción del material

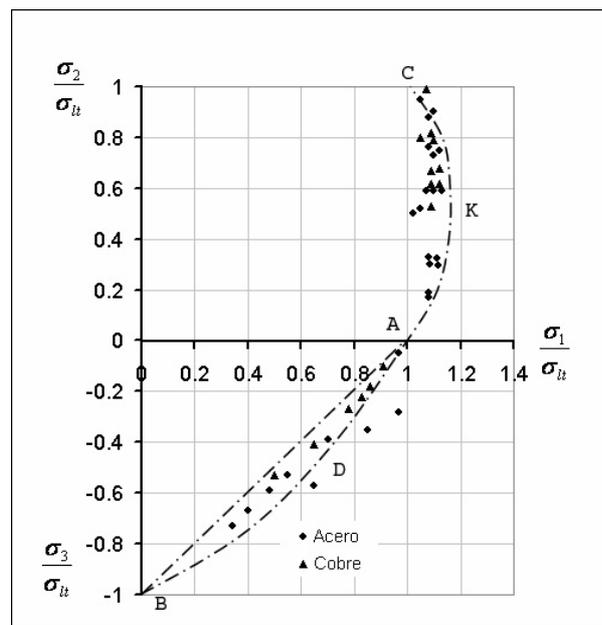


Fig. 2.6 Resultados experimentales de N.N. Davidenkov para materiales dúctiles.

De los diagramas se aprecia la correspondencia de los resultados experimentales con la Cuarta Hipótesis para el estado tensional de cortante puro, o sea, la destrucción bajo este estado tensional, en el caso de los materiales dúctiles, ocurre cuando: $\tau_f = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_f$, lo que se diferencia en un 15,5 % con los resultados predichos por la Teoría Clásica de Mohr.

Se analizará a continuación cómo siguiendo el razonamiento lógico de Mohr e incorporando estos resultados experimentales obtenidos para el estado tensional de cortante puro, se puede obtener una formulación matemática más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr. Se verá primero cómo obtener la ecuación de la evolvente límite utilizando el mayor de los tres círculos de Mohr correspondiente a los estados tensionales límites uniaxial de tracción y de cortante puro.

En la Fig. 2.7 se muestran estos círculos límites y el mayor de los tres círculos de Mohr de un estado tensional cualquiera en el cual las tensiones principales σ_1 y σ_3 han sido aumentadas proporcionalmente en su magnitud n veces, hasta que el mayor de los tres círculos de Mohr para ese estado tensional se hace tangente en el punto C a la evolvente límite ABC, formada por los círculos límites correspondientes al estado uniaxial límite de tracción y el límite de cortante puro.

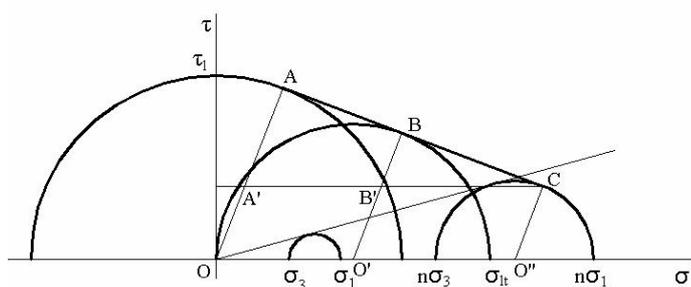


Fig.2.7 Modelo de la evolvente límite obtenida con el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes al estado tensional límite de tracción uniaxial y al estado tensional límite de cortante puro. ($\sigma_m > 0$)

De la Fig. 2.7 se tiene que:

$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{BB'}{B'C}$$

Donde:

$$AA' = \tau_1 - n(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$BB' = \sigma_{lt}/2 - n(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$A'C = O'' = n(\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

$$B'C = n(\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_{lt}/2$$

Sustituyendo y procesando la expresión obtenida, considerando que la tensión límite a cortante se pueda expresar como una función de la tensión límite a tracción, o sea, $\tau_1 = \varphi \sigma_{lt}$, se obtiene que:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1 - \varphi}{\varphi} \right) = \frac{\sigma_{lt}}{n}$$

La cual constituye en esencia una nueva formulación de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, para el caso de que la tensión normal que aparece en el plano donde la tensión tangencial es máxima sea:

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 > 0$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1 - \varphi}{\varphi} \right) \leq [\sigma]_t \quad (2.35)$$

Si se toma el factor de seguridad $n = 1$ se obtiene la condición de paso al estado límite para estos estados tensionales:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1 - \varphi}{\varphi} \right) = \sigma_{lt} \quad (2.36)$$

Se expondrá a continuación cómo obtener la ecuación de la evolvente límite utilizando el mayor de los tres círculos de Mohr correspondiente a los estados tensionales límites uniaxial de compresión y de cortante puro. En la Fig. 2.8 se muestran estos círculos límites y el mayor de los tres círculos de Mohr de un estado tensional cualquiera en el cual las tensiones principales

σ_1 y σ_3 han sido aumentadas proporcionalmente en su magnitud n veces, hasta que el mayor de los tres círculos de Mohr para ese estado tensional se hace tangente en el punto C a la evolvente límite ABC, formada por los círculos límites correspondientes al estado uniaxial límite de compresión y el límite de cortante puro.

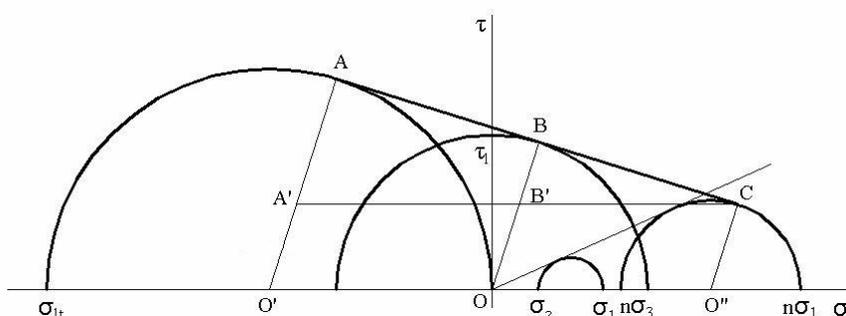


Fig. 2.8 Modelo de la evolvente límite obtenida con el mayor de los tres círculos de Mohr correspondientes al estado tensional límite de compresión uniaxial y al estado tensional límite de cortante puro. ($\sigma_m < 0$)

De la Fig. 2.8 se tiene que:

$$\frac{AA''}{A'C} = \frac{BB'}{B'C}$$

Donde:

$$AA' = \sigma_{lc}/2 - n(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$BB' = \tau_1 - n(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$A'C = \sigma_{lc}/2 + n(\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

$$B'C = O''O' = n(\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

Sustituyendo y procesando la expresión obtenida, considerando al igual que en el caso anterior que la tensión límite a cortante se pueda expresar como una función de la tensión límite a tracción, o sea, $\tau_1 = \varphi \sigma_{lt}$ y considerando además que $\sigma_{lt} = k \sigma_{lc}$ se obtiene que:

$$\frac{\sigma_1}{\varphi} - k(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{\sigma_{lt}}{n} \tag{2.37}$$

La cual constituye también una nueva formulación de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, pero en este caso para cuando la tensión normal que aparece en el plano donde la tensión tangencial es máxima sea: $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$

La condición de resistencia es:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1}{\varphi} - k(\sigma_1 + \sigma_3) \leq [\sigma]_t \tag{2.38}$$

Si se toma el factor de seguridad $n = 1$ se obtiene la condición de paso al estado límite para estos estados tensionales:

$$\frac{\sigma_1}{\varphi} - k(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_{lt} \quad (2.39)$$

Construyendo los diagramas de tensiones límites con las condiciones de paso al estado límite dadas por las ecuaciones (2.36), para cuando $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 > 0$ y (2.39), para cuando $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 < 0$, se obtienen los diagramas de tensiones límites mostrados en la Figs. 2.9 a) y 2.9 b), para las nuevas formulaciones matemáticas obtenidas. Como se puede apreciar de los diagramas de tensiones límites obtenidos, la nueva formulación matemática de la condición de resistencia de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr reduce sensiblemente el error de esta Teoría para el segundo y cuarto cuadrante tanto para los materiales dúctiles como para los frágiles. El error de la formulación clásica para el estado tensional de cortante puro del 15,5 % para los materiales dúctiles y del 23 % o más para los materiales frágiles, se reduce a cero con el nuevo planteamiento.

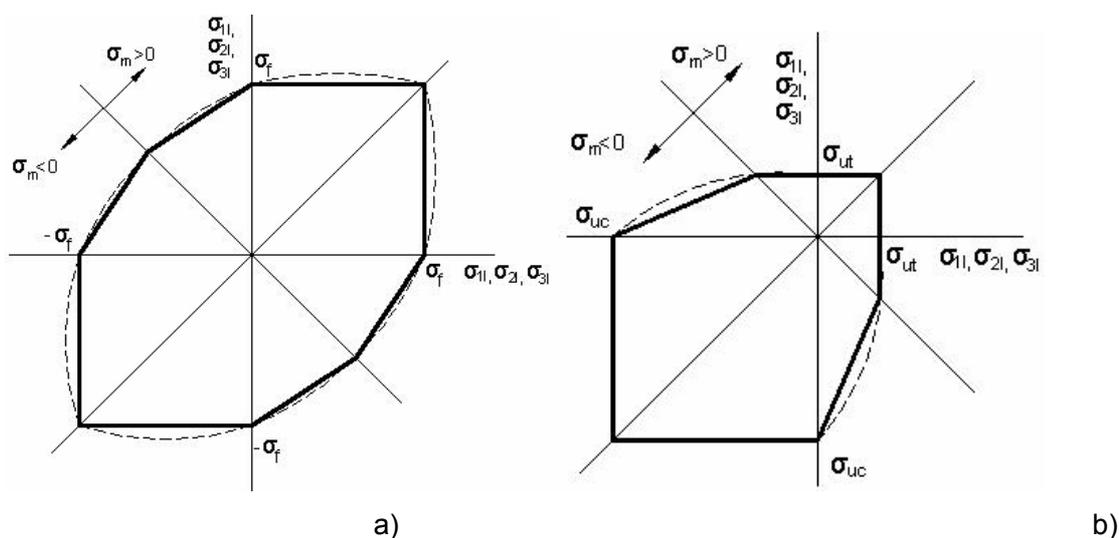


Fig. 2.9 Diagramas de tensiones límites para los materiales Dúctiles (a) y frágiles (b) según la nueva formulación matemática de la Condición de Resistencia según la Teoría de Mohr.

2.7 Aplicación de la nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr en el desarrollo de la Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior.

Se verá a continuación qué expresiones de cálculo se obtienen aplicando la nueva expresión de la Teoría de Mohr obtenida por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos. Estas expresiones son generales tanto para materiales dúctiles como frágiles y conducen a una reducción de los errores que se introducen al evaluar la resistencia con la

Tercera Hipótesis en el caso de los dúctiles o con la Teoría Clásica de Mohr en los materiales frágiles. Estas expresiones se aplican dividiendo el campo de tensiones en dos zonas.

Si $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \geq 0$, entonces:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \leq [\sigma]_T, \quad (2.40) \quad \text{Aquí: } \varphi = \frac{\tau_{lim}}{\sigma_{limt}} \quad (2.41)$$

Para materiales dúctiles: $\varphi \cong 0.6$ y para frágiles $\varphi \cong 1$

Si $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \leq 0$; entonces:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1}{\varphi} - k(\sigma_1 + \sigma_3) \leq [\sigma]_T; \quad (2.42) \quad \text{Aquí } k = \frac{\sigma_{limt}}{\sigma_{limt}} \quad (2.43)$$

La relación $k = \frac{[\sigma]_{tA}}{[\sigma]_{tB}} = \frac{\sigma_{limA}}{\sigma_{limB}}$ depende de los materiales que se empleen en el tubo interior y en el

exterior. Para materiales dúctiles $k=1$ y para frágiles $k < 1$

$$\sigma_{eqA} = \sigma_{tA} \frac{\sigma_1}{\varphi} - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \sigma_{rA} \leq [\sigma]_{tA}$$

$$\sigma_{eqA} = P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \cdot P \leq [\sigma]_{tA}$$

$$\sigma_{eqA} = P \left[\frac{\varphi b^2 + \varphi a^2 + b^2 - a^2 - \varphi b^2 + \varphi a^2}{\varphi(b^2 - a^2)} \right] - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_{tA}$$

$$\sigma_{eqA} = P \left[\frac{2\varphi a^2 + b^2 - a^2}{\varphi(b^2 - a^2)} \right] - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_{tA} \quad (2.44)$$

$$\sigma_{eqB} = \sigma_{tB} - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \sigma_{rB} \leq [\sigma]_{tB}$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + P_K \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \left(-P_K - P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right) \sigma_{rB} \leq [\sigma]_{tB}$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) \left(P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right) + P_K \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \right) (P_K)$$

$$\sigma_{eq} = P \cdot \frac{a^2}{c^2(b^2 - a^2)\phi} (\phi b^2 + \phi c^2 + b^2 - c^2 - \phi b^2 + \phi c^2) + P_K \cdot \frac{(\phi b^2 + \phi c^2 + b^2 - c^2 - \phi b^2 + \phi c^2)}{\phi(b^2 - c^2)}$$

$$\sigma_{eq} = P \cdot \frac{a^2}{c^2(b^2 - a^2)\phi} (2\phi c^2 + b^2 - c^2) + P_K \cdot \frac{(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)} \leq [\sigma]_{t_b} \quad (2.45)$$

La condición de igualdad de resistencia

$$P \left[\frac{2\phi a^2 + b^2 - a^2}{\phi(b^2 - a^2)} \right] - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2(b^2 - a^2)\phi} (2\phi c^2 + b^2 - c^2) + P_K \cdot \frac{(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)} \right]$$

$$P \left[\frac{2\phi a^2 + b^2 - a^2}{\phi(b^2 - a^2)} \right] - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = KP \cdot \frac{a^2}{c^2(b^2 - a^2)\phi} (2\phi c^2 + b^2 - c^2) + P_K \cdot \frac{K(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)}$$

$$\frac{P(2\phi a^2 + b^2 - a^2)}{\phi(b^2 - a^2)} - \frac{KPa^2(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)\phi} = P_K \cdot \frac{K(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)} + P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{P(2\phi a^2 + b^2 - a^2)}{\phi(b^2 - a^2)} - \frac{KPa^2(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)\phi} = P_K \left[\frac{K(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]$$

$$P_K = \frac{\frac{P(2\phi a^2 + b^2 - a^2)}{\phi(b^2 - a^2)} - \frac{KPa^2(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)\phi}}{\left[\frac{K(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{\phi(b^2 - c^2)} + \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]}$$

$$P_K = \frac{\frac{Pc^2(2\phi a^2 + b^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)\phi} - \frac{KPa^2(2\phi c^2 + b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)\phi}}{\left[\frac{(K(2\phi c^2 + b^2 - c^2))(c^2 - a^2) + (\phi(b^2 - c^2))2c^2}{(\phi(b^2 - c^2))(c^2 - a^2)} \right]}$$

$$P_k = \frac{[Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2))(c^2 - a^2)}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} \quad (2.46)$$

Sustituyendo P_k en la ecuación 2.2 para despejar Δ .

$$P_k = \frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{[Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2))(c^2 - a^2)}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} &= \\ \frac{\Delta}{\left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)} &= \\ \Delta = \frac{[Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2))(c^2 - a^2)}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} & \cdot \\ \cdot \left(\frac{1 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right) & \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sustitución de P_k en la ecuación de σ_{eqA}

$$\begin{aligned} \sigma_{eqA} &= P \left[\frac{2\varphi a^2 + b^2 - a^2}{\varphi(b^2 - a^2)} \right] - P_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \\ \sigma_{eqA} &= P \left[\frac{2\varphi a^2 + b^2 - a^2}{\varphi(b^2 - a^2)} \right] - \frac{[Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2))(c^2 - a^2)}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \\ \sigma_{eqA} &= \frac{P(2\varphi a^2 + b^2 - a^2)}{\varphi(b^2 - a^2)} - \frac{2c^2 \{ [Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2)) \}}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} \\ \sigma_{eqA} &= \frac{p(2\varphi a^2 + b^2 - c^2)\{c^2[(c^2 - a^2)K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2) + \varphi(b^2 - c^2)2c^2]\}}{c^2\varphi(b^2 - a^2)[K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + \varphi 2c^2(b^2 - c^2)]} - \\ &\quad - \frac{2c^2 \{ [Pc^2(2\varphi a^2 + b^2 - a^2) - KPa^2(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)](\varphi(b^2 - c^2)) \}}{[c^2(b^2 - a^2)\varphi][K(2\varphi c^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (\varphi(b^2 - c^2))2c^2]} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Derivando σ_{eqA}

$$\frac{\partial \sigma_{eqA}}{\partial c} = \frac{4ckp \left\{ 2b^2c^4\varphi - a^2 \left[b^4(k+2\varphi-1) + 2b^2c^2(k-1)(2\varphi-1) + c^4(k-1)(2\varphi-1)^2 \right] \right\}}{\left\{ a^2k \left[b^2 + c^2(2\varphi-1) \right] - c^2 \left[b^2(k+2\varphi) + c^2(k(2\varphi-1) - 2\varphi) \right] \right\}^2}$$

Igualando a 0 y despejando c se obtiene:

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \sqrt{\left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2(k-1)(2\varphi-1)^2 - b^2(k+2\varphi-1)} \cdot \sqrt{(-\varphi) + a(1-2\varphi)(k-1)} \right]}}{\sqrt{a^2(k-1)(2\varphi-1)^2 - 2b^2\varphi}} \quad (2.50)$$

Al sustituir $k = 1$ y $\varphi = 0.6$ se obtiene:

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot |b|^{\frac{3}{2}}}{b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^3}}{b} = \frac{b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{Lo que permite validar esta}$$

ecuación.

Las Ecuaciones (2.2), (2.40), (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.49) y (2.50) representan Ecuaciones Universales para los Tubos Compuestos y de las Condiciones de Optimización de Gadolín para el caso de un tubo de dos materiales diferentes en los tubos interior y exterior en cualquiera de sus combinaciones.

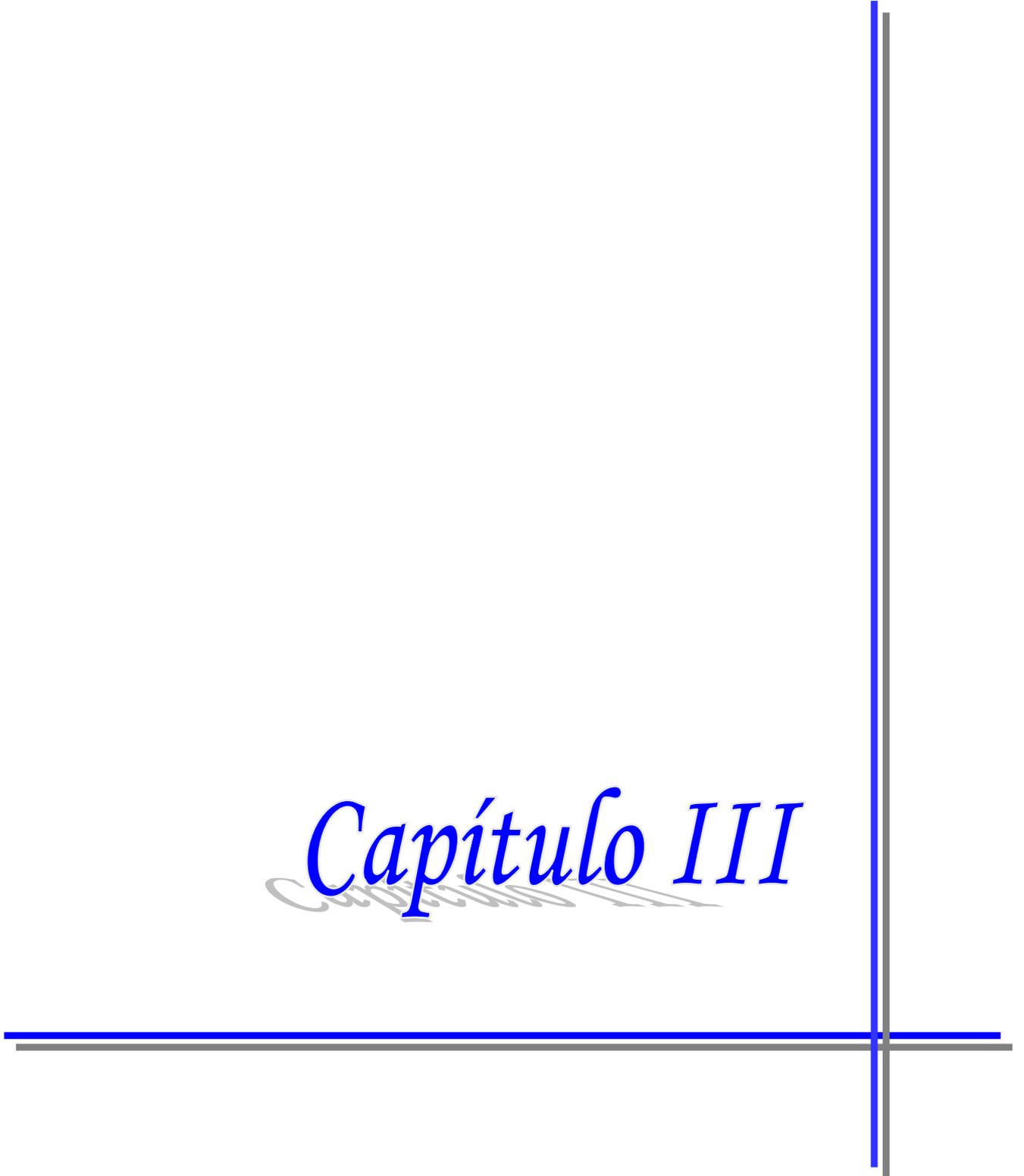
2.8 Conclusiones del Capítulo.

1. Se desarrolló la Teoría de los Tubos Compuestos para materiales diferentes en ambos tubos, aplicando en la misma las Condiciones de Optimización de Gadolín para las siguientes variantes:
 - a) Materiales dúctiles diferentes en ambos tubos, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia.
 - b) Material frágil en el tubo exterior y dúctil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
 - c) Material dúctil en el tubo exterior y frágil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
2. Se profundizó en el estudio de la formulación clásica de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr, y se pudo comprobar que al ser aplicada a la evaluación de la resistencia de estados tensionales mixtos (estados tensionales con combinación de tensiones principales positivas y con tensiones principales negativas) introduce un determinado por ciento de error a causa del limitado número de valores experimentales

utilizados en la estimación de la forma de la envolvente límite, error que puede ser reducido si se introducen más puntos experimentales.

3. En el estudio se pudo comprobar cómo utilizando los resultados experimentales obtenidos por el Académico N.N. Davidenkov y otros autores en el Colectivo de Mecánica Aplicada de la UCf se pudo establecer que la tensión tangencial límite para el estado tensional de cortante puro se puede relacionar con la tensión normal límite para el estado uniaxial de tracción por la siguiente relación: $\tau_l = \varphi \sigma_{lt}$ donde el coeficiente $\varphi = 0,6$ para materiales dúctiles y $\varphi = 1$ para materiales frágiles.
4. De los resultados experimentales obtenidos para estados tensionales planos por diferentes autores, es posible concluir que en la destrucción de sólidos sometidos a estados tensionales mixtos hechos de materiales dúctiles, el mecanismo de destrucción es independiente de la magnitud de la tensión media del estado tensional, pero si el material es frágil el mecanismo de destrucción no es el mismo cuando la tensión σ_m que surge en el plano donde la tensión tangencial es máxima es positiva, que cuando la tensión media σ_m es negativa.
5. Incorporando en el análisis de la estimación de la envolvente límite, el círculo límite correspondiente al estado tensional de cortante puro, se obtuvo por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la UCf, una nueva formulación matemática de la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr que reduce sensiblemente el error de la formulación clásica para el segundo y cuarto cuadrante del Diagrama de Tensiones Límites.
6. Se desarrolló la Teoría de los Tubos Compuestos y se aplicaron las Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en ambos tubos, dúctiles o frágiles aplicando la Nueva Formulación Matemática de la Teoría de las Tensiones Límites de Mohr desarrollada por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos. Las ecuaciones obtenidas son universales para cualquier combinación de materiales en los tubos.

Capítulo III



Capítulo 3

Evaluación de avería y de la posibilidad de elevar la Capacidad Portante del Cuerpo de Hierro Fundido del Distribuidor Hidráulico de la Alzadora Cañera BMH – II, mediante colocación de un casquillo interior dúctil y la aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos

3.1 Generalidades de la alzadora BMH – II.

Desde la zafra 2001-2002 han venido operando 57 nuevas alzadoras del modelo BMH-II (Ver Fig. 3.1) con excelentes resultados. La misma es autopropulsada y montada sobre tres neumáticos en forma de triciclo, es capaz de desarrollar una velocidad superior al modelo de alzadora tradicional así como en cuanto a consumo y rendimiento de trabajo.



Fig. 3.1 Vista de la Alzadora de Caña BMH - II.

3.2 Principio de funcionamiento de la alzadora BMH-II

La alzadora cuenta con un circuito hidráulico principal para su traslación, otro secundario para el movimiento de la grúa que recoge la caña y un sistema auxiliar de refrigeración del aceite.

Este circuito presenta tres bombas hidráulicas en las cuales dos de ellas se dirigen a los distribuidores y la otra es la que va conectada al hidromotor la cual realiza la función de autopropulsión. De las dos bombas que se dirigen a los distribuidores, una de ellas va hacia un distribuidor de una sección y esta tiene un comando que hace que mueva el brazo de forma vertical hacia arriba y hacia abajo, el otro distribuidor está compuesto por dos secciones (palancas), una de estas palancas permite la rotación del brazo y la otra hace que la jaiba se abra o se cierre, todo esto es realizado por el operario. Este distribuidor sufre averías durante la explotación producto de grietas que aparecen en el tabique entre dos de los orificios para

válvulas. En la (Fig. 3.2) se muestra una vista del cuerpo del distribuidor donde está presente la grieta marcada en rojo.



Fig. 3.2 Vista del Cuerpo de Hierro Fundido del Distribuidor de la Alzadora de Caña BMH – II con grieta.

3.3 Caracterización del Material.

Al material del distribuidor hidráulico de la alzadora BMH – II se le realizaron varios estudios en los cuales se obtuvieron algunos resultados que permitieron caracterizar el tipo de material, su dureza, su resistencia mecánica, etc.

Como la estructura del hierro fundido consta de base metálica y de grafito, sus propiedades dependerán de la base metálica como de la cantidad y del carácter de las inclusiones de grafito. El hierro fundido puede conceptuarse como un acero lleno de una gran cantidad de huecos y grietas (inclusiones de grafito). Como es natural, cuanto mayor sea el volumen que ocupen los huecos tanto más bajas serán las propiedades del hierro fundido. A igualdad del volumen de los huecos (es decir, de la cantidad de grafito), las propiedades del hierro fundido dependerán de su forma y su distribución. Por consiguiente, cuanto más grafito haya en la estructura, más baja serán sus propiedades mecánicas; cuanto más burdas sean las inclusiones de grafito más romperán la base metálica y peor serán las propiedades mecánicas. Las propiedades mecánicas bajas resultan cuando las inclusiones de grafito forman un esqueleto cerrado.

¿Sobre qué propiedades ejercen mayor influencia las inclusiones de grafito de forma laminar, que desempeñan el papel de grietas e incisiones agudas dentro del metal? Si las cargas son de tracción, se hace más fácil la formación de focos de rotura en los extremos de las inclusiones de grafito. Por las propiedades mecánicas, los hierros fundidos se caracterizan por tener una baja

resistencia al desarrollo de las grietas y por consiguiente ponen de manifiesto unas propiedades mecánicas bajas en los ensayos de tracción. Cuando las tensiones son de compresión la tendencia al desarrollo de grietas es nula o muy pequeña, sólo se originan por la tendencia al deslizamiento en los planos a 45° , por lo que las propiedades mecánicas de la fundición a la compresión resultan ser muy altas. Por esto la resistencia máxima a la compresión es cuatro a cinco veces mayores que las de tracción. Lo dicho se refiere principalmente a la fundición gris con inclusiones laminares de grafito. A medida que se van redondeando las inclusiones del grafito va disminuyendo su influencia negativa.

Cuando el tipo de material es hierro fundido se dice que la fundición en dependencia del estado en que se encuentra el carbono se distingue:

- Fundición Blanca
- Fundición Gris
- Fundición de Alta Resistencia
- Fundición Maleable.

Durante la observación metalográfica de la estructura del material de los distribuidores se supo que el mismo es: Hierro fundido Gris. En el Hierro Fundido Gris el carbono se encuentra en alto grado o en su totalidad en estado libre en forma de grafito laminar, tal como se aprecia en la (Fig. 3.3).



Fig. 3.3 Estructura Metalográfica del Hierro Fundido Gris de los Distribuidores

En la microestructura de la Fundición Gris conviene distinguir la base metálica grisácea de las inclusiones del grafito de color negro. El grafito está clasificado de la siguientes formas: Tipo: A, B, C, D, E. esta forma es de tipo C, así como se muestra en la (Fig. 3.3), este tipo, no es de buena calidad ya que las láminas de grafito tienen una gran tendencia a la formación de grietas cuando están sometidas a tracción.

Por la estructura de la base metálica, las fundiciones se dividen en:

- Fundición gris perlítica
- Fundición gris ferrítico - perlítica
- Fundición gris ferrítica

Como resultado de la observación en el Microscopio Metalográfico se concluyo que el Hierro Fundido es del Tipo es ferrítico - perlítico con grafito laminar. En la Fundición Gris ferrítico - perlítica: la estructura de la misma está formada por ferrita más perlita e inclusiones de grafito. En esta fundición la cantidad de carbono ligado es menor que el 0,8% de carbono.

El grafito de las fundiciones puede tener cuatro formas principales:

- Grafito laminar
- Vermicular
- Grafito nodular
- Grafito esferoidal

En la fundición gris ordinaria, como la del Distribuidor de la Alzadora el grafito toma la forma de vetas pequeñas, este grafito se llama laminar.

Al cuerpo del distribuidor se le realizaron mediciones de dureza como resultado de las cuales se obtuvo una dureza media de 188 HB. La resistencia de los Hierros Fundidos bajo tensiones normales está determinada, como se explicó anteriormente, por la estructura del metal básico y por la forma de las inclusiones de grafito. En la (tabla. 3.1) se muestra una comparación entre ellos.

Grafito	Laminar	Vermicular	Nodular	Esferoidal
δ , %	0.2 – 0.5	1 – 1.5	5 – 10	10 - 15

La ductilidad depende muy poco de la estructura del metal básico (los valores más bajos son típicos de las fundiciones perlíticas, los más altos, de las ferríticas) la dureza HB, está determinada por la estructura de la base metálica y tiene los valores de la (Tabla 3.2).

Fundición	Ferrítica	Ferrito + perlítica	Perlítica
Dureza HB	150	200	250

La dureza depende poco de la forma del grafito. Las inclusiones de grafito son un factor perjudicial, pero en ciertas condiciones puede ser útil. La existencia del grafito facilita la

mecanización, hace que la viruta sea frágil y se rompa cuando la herramienta llega a la inclusión de grafito. La fundición tiene buenas propiedades de antifricción debidas a sus cualidades lubricantes, la existencia de segregaciones de grafito amortigua rápidamente las vibraciones y las oscilaciones de resonancia. También la fundición es casi insensible a los cambios externos de forma, concentradores de tensiones, marcas de las herramientas, del desgaste, etc. Todas estas ventajas de la fundición hacen de ella un material de construcción muy valioso.

Según la observación metalografía de la estructura y las mediciones de dureza realizadas que arrojaron como valor medio HB = 188, se concluye que el material se corresponde un Hierro Fundido Gris de baja resistencia, similar a la Fundición Gris FG 12, pudiendo tomarse una Resistencia Máxima a la Tracción: $\sigma_{ut} = 120$ MPa y una Resistencia Máxima a la Compresión: $\sigma_{uc} = 500$ MPa, el cual tiene una dureza entre HB = 143 y 229 según (Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. 1989).

3.4 Cálculo de la Tensión Máxima de Trabajo mediante el Procesamiento por el Método de los Elementos Finitos

El procesamiento del Distribuidor en la Zona de la Grieta por el Método de los Elementos Finitos con el Software COSMOS Design Start, cuyos resultados se muestran en la (Fig. 3.4 a)) permitió precisar que la zona derecha de la superficie agrietada está ligeramente más tensionada que la zona izquierda, lo que permitió argumentar la hipótesis de que la grieta puede comenzar en el borde inferior derecho de la zona agrietada, según un Modelo de Grieta de Cuarto de Elipse, tal como se muestra en la (Fig. 3.4 b)).

El Factor de Intensidad de Tensiones se obtuvo entonces para un modelo de grieta superficial de cuarto de elipse en una placa plana de dimensiones finitas bajo un estado tensional uniaxial de tracción, según el Caso dado por (Broek, D 1983).

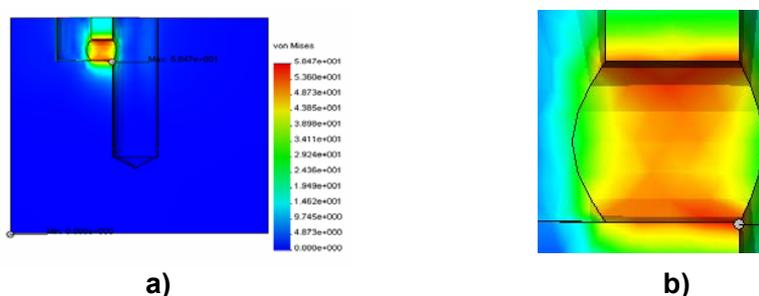


Fig. 3.4 Procesamiento por Elementos Finitos

3.5 Aplicación de la Mecánica de la Fractura para evaluar la Capacidad Portante del Cuerpo del Distribuidor y la posibilidad de agrietamiento bajo carga.

3.5.1 Tenacidad a la Fractura del Material.

La Tenacidad a la Fractura de la Fundición Gris no se pudo hallar a través de la correlación clásica de Rolfe – Barsón entre K_{Ic} y la energía CVN del ensayo de impacto Charpy con probeta entallada en V (Rolfe–Barsón, 1972), la cual es válida exclusivamente para los aceros, necesariamente en este caso hay que utilizar los valores reportados en la literatura para este material. Como tenacidad a la fractura de la fundición Gris se localizaron, los valores límites para Fundiciones Grises, el valor mínimo de $K_{Ic\ min} = 3.16\ MPa \cdot \sqrt{m}$, reportado por (Partón, V. Z.1990) y el mayor valor encontrado en la literatura consultada $K_{Ic\ max} = 22\ MPa \cdot \sqrt{m}$ reportado en el trabajo (Casals, 1997). Tratándose de una Fundición Gris de Baja Resistencia se utilizará en el análisis un valor de la Tenacidad a la Fractura bajo, o sea:

$$K_{Ic\ min} = 4\ MPa \cdot \sqrt{m}$$

3.5.2 Caracterización del estado tensional en la zona de la grieta y modelo empleado para su estudio según la Mecánica de la Fractura.

La sección de falla por fatiga está sometida a un estado tensional plano, por tratarse de un elemento que puede ser considerado un Tubo de Pared Gruesa en presencia de tensiones normales de tracción y de compresión como se vio anteriormente, pero por tratarse de un material frágil donde las grietas se desarrollan fundamentalmente en la zona de tracción y como se pudo comprobar en la evaluación de la resistencia estática, la tensión σ_3 de compresión no determina en la resistencia y se puede considerar que se trata, según los Modos de Carga Mecánica de la Fractura del Modo I de Carga en una Grieta de Cuarto de Elipse (Blake, A. 1996; Broek, D 1983; Goytisolo R. 2000).

3.5.3 Aplicación de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica en la obtención de la Curva de Resistencia Residual y la determinación del Tamaño Crítico de la Grieta.

El Factor de Intensidad de Tensiones para el Tipo de Grieta considerado según (Broek, D 1983) es:

$$K_I = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \tag{3.1}$$

$$\beta = \frac{1.25 \cdot M_k \left(\frac{a}{t} \right)}{\phi \left(\frac{a}{b} \right)} \tag{3.2}$$

De donde, para las proporciones de los posibles defectos del metal se puede suponer que la relación a / b , esté caracterizada por la relación: $a \cong 0,25 b$.

Para esta relación según el gráfico de $\phi^2 = f(a / b)$ que da Broek se puede tomar: $\phi = 1.14$. Para obtener los valores de M_k fue necesario obtener una función de $M_k = f(a / t)$ haciendo uso del Software Curve Expert, obteniéndose la siguiente:

$$M_k = 1,0577 \cdot (a / t)^2 - 0,555 \cdot (a / t) + 1.1006 \quad (3.3)$$

Para los datos geométricos del distribuidor se obtiene que en la zona de fractura $t \cong 4 \text{ mm}$. Partiendo de la condición de fractura: $K_I = K_{Ic}$ y despejando σ se obtiene la expresión para obtener la Gráfica de Resistencia Residual, o sea:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (3.4)$$

Con esta expresión se obtuvo la Gráfica de Resistencia Residual obtenida en la (Fig. 3.5)

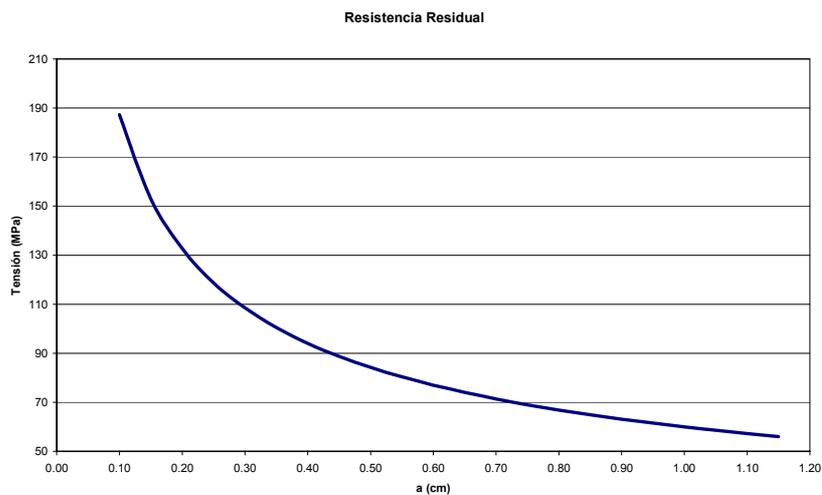


Fig. 3.5 Gráfica de Resistencia Residual para el Modelo de Grieta empleado.

De este gráfico y de las Tablas de EXCEL correspondientes se pudo obtener que para la tensión normal de trabajo para la cual: $\sigma_{\max} = 58,47 \text{ MPa}$, obtenida según resultados del Modelo de Elementos Finitos que contempla las condiciones de rigidez y concentración de tensiones en esa zona, la profundidad crítica de la grieta da: $a_c = 1.05 \text{ mm}$.

3.5.4 Aplicación de la Mecánica de la Fractura Subcrítica en la Evaluación del Crecimiento de las Grietas.

Las grietas crecen desde algún microdefecto cualquiera que esté presente en la estructura cristalina del metal, o a partir de una huella del proceso de maquinado de los mismos, en la zona de la superficie agrietadas, mediante un proceso de incubación y de fisuración progresiva posterior hasta que alcanza el tamaño crítico ya determinado, momento en el cual se produce la fractura frágil total. Para la evaluación del crecimiento subcrítico se utilizó la Razón de Crecimiento de Paris (Blake, A. 1996; Broek, D 1983; Goytisoló R. 2000)

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n \quad \text{m/ciclo} \quad (3.5)$$

En general el exponente n varía entre 2 y 3 para los diferentes materiales, aunque puede tomar valores mayores. Se tomará en el análisis n = 2.5 (valor medio). La constante C depende en general del valor n y de la razón de asimetría del ciclo $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, pero según (Avilés R. 1995) cuando el exponente n está entre 2 y 3 la dependencia de C y n = f(r) es despreciable. La correlación entre C y n aparece obtenida en diferentes fuentes de la literatura (Gurney, T. R 1978; Kawasaki T. 1979; Romvari P. 1980; Tanaka, K. 1997), sin embargo la que más se ajusta al caso analizado, por tratarse de fractura frágil, es la señalada en (Kawasaki T. 1979).

$$C = 5.48 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{577.8^n} \quad (3.6)$$

Para n = 2.5 se tiene que C = 6.8287 · 10⁻¹²

Donde, para el caso analizado considerando un ciclo de trabajo intermitente:

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min};$$

$$K_{\min} = 0$$

De donde se tiene que:

$$\Delta K_I = \beta \cdot \Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (3.7)$$

$$\text{y } \Delta \sigma = \sigma_{\max} = 58 \text{ MPa}$$

En la (Fig. 3.6) se muestra el gráfico de crecimiento subcrítico de las grietas obtenido para el modelo anterior para un $\Delta \sigma = 58 \text{ MPa}$.

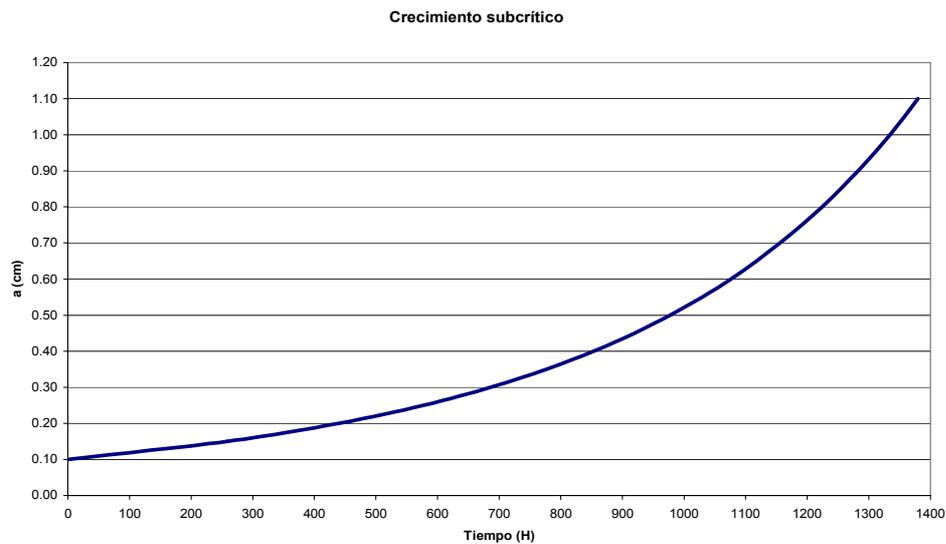


Fig. 3.6 Gráfica de Crecimiento Subcrítico para el Modelo de Grieta empleado.

En el Gráfico de Crecimiento Subcrítico de las grietas obtenido para el modelo anterior para un $\Delta\sigma = 58$ MPa con el $a_c = 1.05$ mm esta tiene un número de ciclos de 13 577 ciclos y su tiempo de vida es de 28 días después de puesto en la Máquina, lo que confirma que el hierro fundido empleado no es adecuado para esta aplicación.

3.6. Análisis de la Resistencia de los Casquillos de Acero y del Cuerpo del Distribuidor mediante la Aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos en la Recuperación del Distribuidor.

Durante la explotación, el agujero recuperado mediante la colocación de un casquillo de acero con cierta interferencia, funciona como un tubo compuesto. O sea:

- Actúa la presión p_k provocada en el diámetro de encaje producto de la interferencia que provoca en el tubo de acero interior tensiones de compresión de manera que:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0; \quad \sigma_2 = \sigma_r = -p_k \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \sigma_t = -p_k \times \frac{2d^2}{d^2 - d_1^2} \quad (3.8)$$

Donde:

p_k : Presión provocada por la interferencia en MPa.

d : Diámetro de la superficie de encaje en mm.

d_1 : Diámetro interior del casquillo de acero en mm.

En el tubo de hierro fundido exterior esta presión provoca tensiones normales en las direcciones tangencial y radial de manera que:

$$\sigma_1 = \sigma_t = p_k \times \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} ; \quad \sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ y } \sigma_3 = -p_k \quad (3.9)$$

Donde:

d_2 : Diámetro exterior de la pieza o tubo de hierro fundido en mm.

- Actúa también la presión interior p nominal del distribuidor que provoca en el tubo interior de acero, tensiones de tracción de manera que:

$$\sigma_1 = \sigma_t = p \times \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} , \quad \sigma_2 = \sigma_z = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_3 = -p \quad (3.10)$$

Donde:

p : Presión nominal del distribuidor en MPa.

En el tubo exterior de hierro fundido esta presión provoca también tensiones de tracción, de manera que:

$$\sigma_1 = \frac{p \times d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} \left(1 + \frac{d_2^2}{d^2} \right); \quad \sigma_2 = \sigma_z = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \frac{p \times d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} \left(1 - \frac{d_2^2}{d^2} \right) \quad (3.11)$$

Esta última tensión resulta negativa. Para poder lograr optimizar la resistencia del distribuidor debería cumplirse que las tensiones en el tubo interior de acero sean a la tensión permisible del acero, como la tensión en el tubo exterior de hierro fundido sean a la tensión admisible del hierro fundido. Esta condición de optimización se planteará en función de las tensiones equivalentes respectivas, según la Tercera Hipótesis de Resistencia para el tubo interior de acero dúctil y según la Teoría de Mohr para el tubo exterior de hierro fundido frágil, de manera que:

$$K_{ac} = \frac{\sigma_{eq \text{ acero}}}{(\sigma)_{t \text{ acero}}^2} = K_{hofo} = \frac{\sigma_{eq \text{ hofo}}}{(\sigma)_{t \text{ hofo}}^2} \quad (3.12)$$

Según la Tercera Hipótesis para el Tubo Interior Dúctil o Casquillo de Acero:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq \text{ acero}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = p \times \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} - p_k \frac{2d^2}{d^2 - d_1^2} - (-p) \\ \sigma_{eq \text{ acero}} &= p \times \frac{2d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} - p_k \frac{2d^2}{d^2 - d_1^2} \text{ y} \\ K_{ac} &= \frac{1}{(\sigma)_{tac}} \left[\frac{2d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} - p_k \frac{2d^2}{d - d_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Según la Teoría de Mohr para el Tubos Exterior Frágil o Cuerpo de Hierro Fundido

$$\sigma_{eqhofo} = \sigma_1 - \gamma\sigma_3 = \sigma_{ip} + \sigma_{ipk} - \gamma(\sigma_{rp} + \sigma_{rpk})$$

Donde

$$\gamma = \frac{\sigma_{ut hofo}}{\sigma_{uc hofo}} \quad (3.14)$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes se obtiene:

$$\sigma_{eqhofo} = p \left(\frac{d^2(1-k) + d_2^2(1+k)}{d_2^2 - d_1^2} \right) + p_k \left(\frac{d_2^2(1+k) + d^2(1-k)}{d_2^2 - d^2} \right) \quad (3.15)$$

y

$$K_{hofo} = \frac{1}{(\sigma)_{thof}} \left[p \left(\frac{d^2(1-k) + d_2^2(1+k)}{d_2^2 - d_1^2} \right) + p_k \left(\frac{d_2^2(1+k) + d^2(1-k)}{d_2^2 - d^2} \right) \right] \quad (3.16)$$

El proceso de evaluar la posibilidad de que $K_{ac} = K_{hofo}$, condición de máxima resistencia se evaluó mediante el Software EXCEL antes de desarrollar las ecuaciones de los Tubos Compuestos para Materiales Diferentes y de la aplicación de las Condiciones de Gadolín desarrolladas en el Capítulo II del presente trabajo, como se verá a continuación.

Se evaluó primero que sucede en el cuerpo del distribuidor si se coloca el casquillo de acero en su posición sin interferencia, o sea, $p_k = 0$. El criterio manejado en este análisis fue que la interferencia entre el casquillo de acero y el cuerpo de hierro fundido siempre perjudicaría la resistencia del distribuidor ya que provoca tensiones de tracción en la pieza exterior que es el cuerpo de hierro que es precisamente la más débil. En la (Fig.3.7) se muestra la gráfica obtenida para el agujero pequeño con $d_1 = 33$ mm y $d_2 = 51$ mm. Y se va variando d el diámetro del encaje (diámetro exterior del casquillo de acero) donde se puede apreciar que aumentando el diámetro del casquillo de acero, el parámetro K_{ac} de este se mantendrá constante ya que $p_k = 0$ (Ecuación 3.13) y K_{hofo} disminuye pues la mayor parte de la carga la asimila el acero

(Ecuación 3.16). El termino $k = \frac{\sigma_{ut hofo}}{\sigma_{uc hofo}} = 120/500 = 0,24$

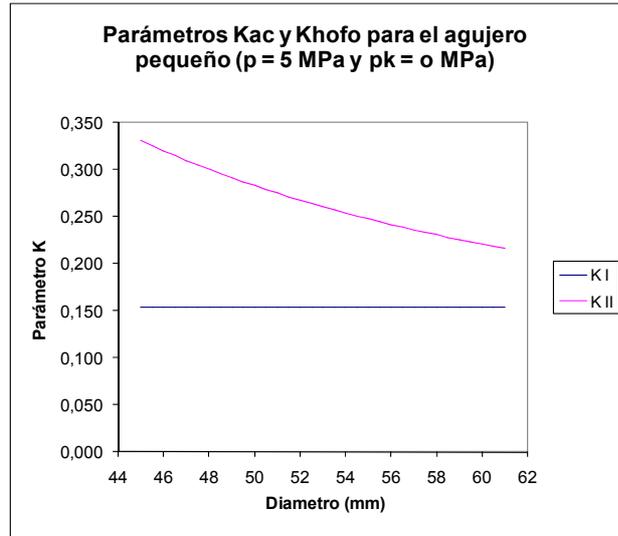


Fig. 3.7 Parámetros de Resistencia $K_{ac} = K_I$ y $K_{hofo} = K_{II}$ para el agujero pequeño sin interferencia.

Como se aprecia sin interferencia lo ideal sería un casquillo de hacer de espesor 9 mm, o sea, no tendría sentido dejar un casquillo de hierro fundido en el cuerpo, o sea, sustituir todo por acero. Sin embargo se hace necesario dejar una cierta interferencia entre casquillo de acero y cuerpo de hierro fundido, por lo que se evaluó que sucede con una interferencia de $\delta = 0,01 \text{ mm}$ y un valor de p_k que dependerá del valor de d elegido. En el gráfico de la (Fig. 3.8) se muestra el resultado.

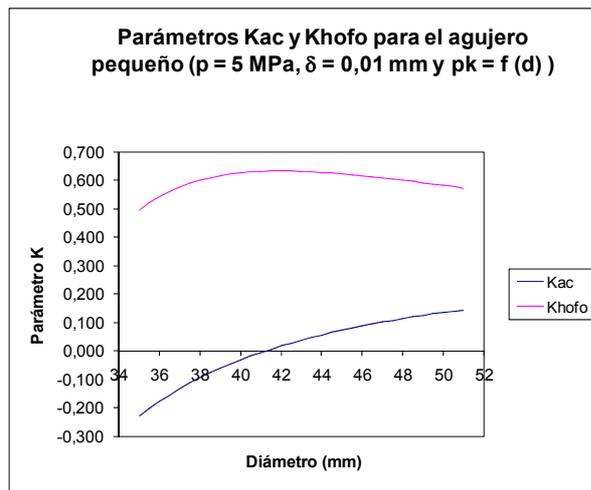


Fig. 3.8 Parámetros de Resistencia $K_{ac} = K_I$ y $K_{hofo} = K_{II}$ para el agujero pequeño con $\delta = 0,01 \text{ mm}$

Como se aprecia en este caso la resistencia del hierro fundido empeora pues el valor K_{hofo} aumenta con relación al caso sin interferencia, sin embargo la resistencia del casquillo de acero mejora pues K_{ac} disminuye con relación al caso anterior. Para valores muy pequeños del diámetro d el valor de K_{ac} da negativo pues el efecto de p_k predomina sobre el efecto de la presión p y crea tensiones de compresión en el casquillo de acero. De todas maneras se aprecia que aumentando el diámetro del casquillo de acero por encima de $d = 42$ mm se mejora la resistencia del hierro fundido ya que K_{hofo} comienza a disminuir. El mismo análisis se realizó para el agujero de mayor diámetro con $d_1 = 43$ mm y $d_2 = 61$ mm. Los resultados se muestran en las (Fig. 3.9 y 3.10).

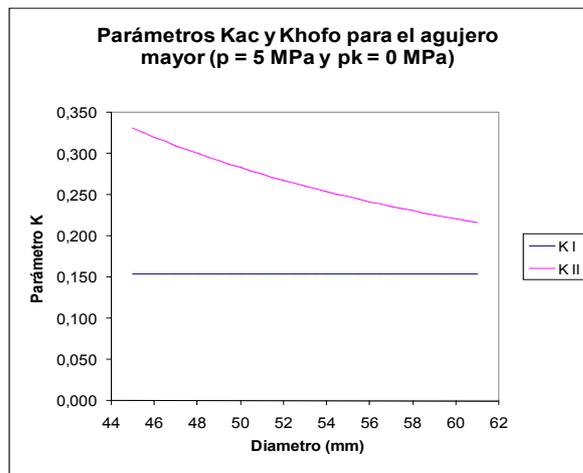


Fig. 3.9 Parámetros de Resistencia $K_{ac} = K_I$ y $K_{hofo} = K_{II}$ para el agujero grande sin interferencia.

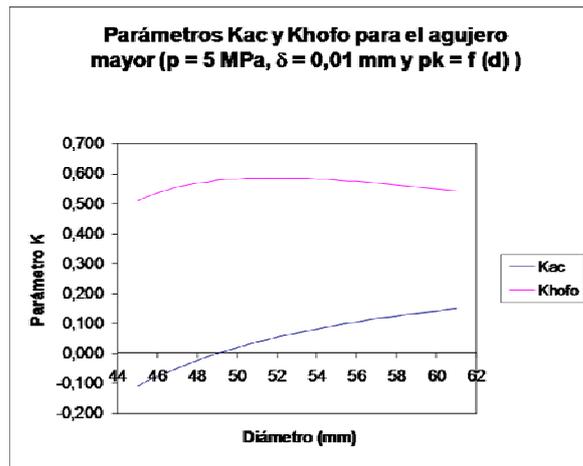


Fig. 3.10 Parámetros de Resistencia $K_{ac} = K_I$ y $K_{hofo} = K_{II}$ para el agujero grande con $\delta = 0,01$ mm

Como se aprecia los resultados son similares, sólo que en este caso la mejora de la resistencia del cuerpo de hierro fundido se comienza a producir para un diámetro del casquillo de $d = 51$ mm.

La solución propuesta está en función de estos resultados, o sea, el espacio entre orificios en el distribuidor es igual a 14 mm. Para distribuir ese espacio entre los dos casquillos y un pequeño espacio intermedio de hierro fundido se propone para el agujero pequeño colocar un casquillo de diámetro exterior $d = 43$ mm, o sea, de espesor $s = 5$ mm y para el agujero grande $d = 51$ mm, o sea, de espesor $s = 4$ mm, quedando de esta manera un espesor de hierro fundido de $s = 5$ mm entre ambos casquillos de acero, suficiente para depositar un cordón de soldadura muy fino para fijar definitivamente los casquillos de acero al cuerpo de hierro fundido. En estas condiciones para ambos agujeros $K_{ac} \approx 0,05$ y $K_{hofo} \approx 0,6$, lo que resultan buenos indicadores de resistencia, no resultando fácil mejorar mucha más la resistencia del conjunto de acuerdo con los resultados obtenidos en este análisis. Esta solución para la recuperación del distribuidor ya se está aplicando por el MINAZ.

3.7. Aplicación de la Expresiones Obtenidas para la Optimización de los Tubos Compuestos de dos materiales diferentes mediante las Condiciones de Gadolín en el Análisis de la Resistencia de los Casquillos de Acero y del Cuerpo en la Recuperación del Distribuidor Hidráulico de la alzadora BMH – II.

En el Epígrafe 2.4 se abordó el desarrollo de la Teoría de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de Optimización de Gadolín para el caso de dos materiales diferentes en los tubos, dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior. La expresión obtenida para calcular el valor del radio del encaje c al aplicar las Condiciones de Optimización de Gadolín es la siguiente:

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot k^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(\gamma + 1)}}{\sqrt{(a \cdot \sqrt{k}(\gamma - 1) + 2b)}} \tag{3.17}$$

Calculando c por esta expresión para los agujeros pequeño y grande del Distribuidor Hidráulico se obtiene, partiendo de que el casquillo de acero es de acero grado 20 para el cual: $\sigma_{ftA} = 240$ MPa y el cuerpo del distribuidor es de Fundición Gris FG 12 con: $\sigma_{ut B} = 120$ MPa o sea:

$$K = \frac{[\sigma]_{Ita}}{[\sigma]_{ItB}} = 2. \text{ Para el hierro fundido } \gamma = \frac{\sigma_{u t hofo}}{\sigma_{u c hofo}} = 0,24$$

Para el Agujero Pequeño con $a = 16,5$ mm, $b = 26$ mm, se obtuvo: $c = 23,8$ mm que corresponde con $d = 47,6$ mm. Este resultado se corresponde plenamente con los resultados obtenidos en el epígrafe anterior donde se concluyó que la situación ideal era prácticamente aumentar al máximo el espesor del casquillo de acero y que con una interferencia pequeña de

$\delta = 0,01$ mm se apreciaba que aumentando el diámetro exterior del casquillo de acero por encima de $d = 42$ mm se mejoraba la resistencia del hierro fundido. Para lograr este resultado de acuerdo con la expresión de Δ que fue obtenida para lograr la igualdad de resistencia entre el casquillo de acero y el cuerpo de hierro fundido hace falta una interferencia mucho más grande: $\delta = 2 \Delta = 0,398$ mm, que provocaría una presión de ajuste en el encaje de $p_k = 0,0612$ MPa, todo lo cual conduciría a reducir la tensión equivalente de ambas piezas a $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB} = 16,5$ MPa, menos de la tercera parte del valor obtenido por el Método de los Elementos Finitos.

Para el Agujero Grande con $a = 21,5$ mm, $b = 31$ mm, se obtuvo: $c = 30,5$ mm que corresponde con $d = 61$ mm. Este resultado también se corresponde plenamente con los resultados obtenidos en el epígrafe anterior donde se concluyó que la situación ideal era aumentar al máximo el espesor del casquillo de acero y que con una interferencia pequeña de $\delta = 0,01$ mm se apreciaba que aumentando el diámetro exterior del casquillo de acero por encima de $d = 51$ mm se mejoraba la resistencia del hierro fundido. Para lograr este resultado de acuerdo con la expresión de Δ obtenida para lograr la igualdad de resistencia entre el casquillo de acero y el cuerpo de hierro fundido hace falta una interferencia mucho más grande: $\delta = 2 \Delta = 0,106$ mm, que provocaría una presión de ajuste en el encaje de $p_k = 0,00276$ MPa, todo lo cual conduciría a reducir la tensión equivalente de ambas piezas a $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB} = 19,25$ MPa, menos de la tercera parte del valor obtenido por el Método de los Elementos Finitos.

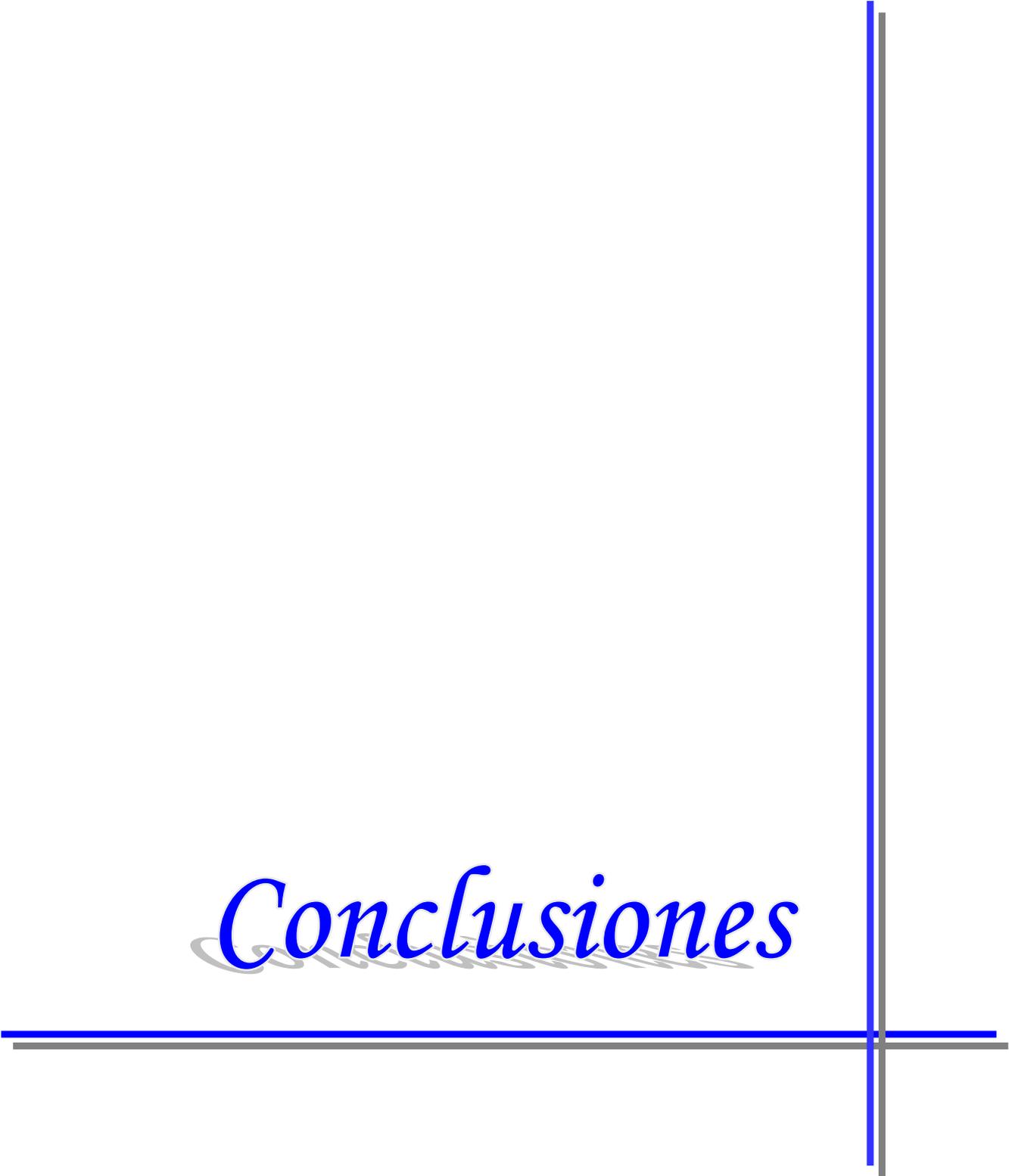
Se evaluó también que ocurriría si se mejorara la calidad del acero del casquillo digamos por ejemplo a acero grado 45 con: $\sigma_{fA} = 360$ MPa, o sea: $K = \frac{[\sigma]_{fA}}{[\sigma]_{fB}} = 3$, Los resultados fueron:

Para el Agujero Pequeño con $a = 16,5$ mm, $b = 26$ mm, se obtuvo en este caso: $c = 28,1$ mm que corresponde con $d = 56,2$ mm. Este diámetro es mayor que el diámetro exterior del casquillo de acero, o sea, que en este caso no es racional utilizar un acero de mucha mayor resistencia que el cuerpo de hierro fundido del distribuidor pues no se logra la igualdad de resistencia de ambos tubos dentro de las dimensiones racionales. Para el Agujero Grande con $a = 21,5$ mm, $b = 31$ mm, se obtuvo: $c = 36,2$ mm que corresponde con $d = 72,4$ mm. En este caso sucede exactamente lo mismo no se puede lograr la igualdad de resistencia con los diámetros preestablecidos.

3.8 Conclusiones del Capítulo.

1. Se caracterizó el material del cuerpo del distribuidor que es de hierro fundido gris con una dureza de 188 HB y una estructura del grafito ferrita – perlítica laminar que no es una fundición resistente a la tracción. Se consideró que era equivalente a la Fundición Gris FG12.
2. Mediante la Aplicación del Método de los Elementos Finitos mediante el Software Cosmos Design Star se determinó que la tensión de trabajo en la pared de hierro fundido es de $\sigma = 58,47$ MPa.
3. Aplicando la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica y la Mecánica de la Fractura Subcrítica se obtuvo que una grieta o defecto superficial de cuarto de elipse de profundidad $a_c = 1,05$ mm provoca la fractura del cuerpo en esa sección y que la vida residual partiendo de un defecto microscópico hasta que se destruye la pieza bajo esa tensión es de sólo 28 días, lo que permite afirmar que el mencionado hierro fundido no es adecuado para esta aplicación.
4. Se aplicó inicialmente mediante prueba y error la Teoría de los Tubos Compuestos para Materiales Diferentes, en el cuerpo interior de acero y en el exterior hierro fundido concluyéndose que para una adecuada resistencia del distribuidor recuperado se necesita: para el agujero pequeño colocar un casquillo de diámetro exterior $d = 43$ mm, o sea, de espesor $s = 5$ mm y para el agujero grande $d = 51$ mm, o sea, de espesor $s = 4$ mm, quedando de esta manera un espesor de hierro fundido de $s = 5$ mm entre ambos casquillos de acero, suficiente para depositar un cordón de soldadura muy fino para fijar definitivamente los casquillos de acero al cuerpo de hierro fundido. Esta solución para la recuperación del distribuidor ya se está aplicando por el MINAZ desde hace más de tres meses con muy buenos resultados.
5. Finalmente se aplicaron las ecuaciones obtenidas en el presente trabajo para optimizar la resistencia de los Tubos Compuestos de dos Materiales mediante las Condiciones de Gadolín, concluyéndose que la solución que fue aplicada pudiera ser optimizada utilizando para el agujero pequeño un casquillo de acero grado 20 con diámetro exterior $d = 47,6$ mm, o sea, de espesor $s = 7,3$ mm y para el agujero grande $d = 61$ mm, o sea, de espesor $s = 9$ mm. Sin embargo esta solución optimizada no hubiera podido ser aplicada realmente porque en este caso el espesor disponible para los dos casquillos es de sólo 14 mm y esta solución requeriría 16,3 mm, no quedando espacio disponible para colocar el pequeño cordón de soldadura que se considera necesario.

Conclusiones



Conclusiones

1. Se profundizó en la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas, las Uniones por Interferencia, en la Teoría de los Tubos Compuestos de Materiales Iguales, en las Condiciones de Optimización de Gadolín y en las Hipótesis de Resistencia para sobre esta base poder desarrollar la Teoría de los Tubos Compuestos de Materiales Diferentes
2. Se Desarrolló el Aporte Científico fundamentales del Trabajo que fue la obtención de las ecuaciones de los Tubos Compuestos de Materiales Diferentes en ambos tubos, aplicando en los mismos las Condiciones de Optimización de Gadolín en las siguientes variantes:
 - a) Materiales dúctiles diferentes en ambos tubos, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia.
 - b) Material frágil en el tubo exterior y dúctil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
 - c) Material dúctil en el tubo exterior y frágil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.
 - d) Materiales diferentes en ambos tubos, dúctiles o frágiles aplicando la Nueva Formulación Matemática de la Teoría de las Tensiones Límites de Mohr desarrollada por el Colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos.
3. Se evaluó la resistencia del cuerpo de Hierro Fundido Gris del Distribuidor de la Alzadora BMH II, para lo cual:
 - Se caracterizó el material del cuerpo del distribuidor que es de hierro fundido gris lo cual presentó una dureza de 188 HB y una estructura del grafito ferrita – perlítica laminar por lo que es una fundición no muy buena a la tracción. Se consideró que era equivalente a la Fundición Gris FG 12.
 - Mediante la Aplicación del Método de los Elementos Finitos mediante el Software Cosmos Design Star se determinó que la tensión de trabajo en la pared de hierro fundido es de $\sigma = 58,47$ MPa.
 - Aplicando la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica y la Mecánica de la Fractura Subcrítica se obtuvo que una grieta o defecto superficial de cuarto de elipse de profundidad $a_c = 1,05$ mm provoca la fractura del cuerpo en esa sección y que la vida residual partiendo de un defecto microscópico hasta que se destruye la pieza bajo esa tensión es de sólo 28 días, lo que permite afirmar que el mencionado hierro fundido no es adecuado para esta aplicación.
 - Se aplicó la Teoría de los Tubos Compuestos para Materiales Diferentes, en el cuerpo interior acero y en el exterior hierro fundido obteniéndose que para optimizar

la resistencia del distribuidor recuperado se necesita: para el agujero pequeño colocar un casquillo de diámetro exterior $d = 43$ mm, o sea, de espesor $s = 5$ mm y para el agujero grande $d = 51$ mm, o sea, de espesor $s = 4$ mm, quedando de esta manera un espesor de hierro fundido de $s = 5$ mm entre ambos casquillos de acero, suficiente para depositar un cordón de soldadura muy fino para fijar definitivamente los casquillos de acero al cuerpo de hierro fundido.

4. Finalmente se aplicaron las ecuaciones obtenidas en el presente trabajo para optimizar la resistencia de los Tubos Compuestos de dos Materiales mediante las Condiciones de Gadolín, concluyéndose que la solución que fue aplicada pudiera ser optimizada utilizando para el agujero pequeño un casquillo de acero grado 20 con diámetro exterior $d = 47,6$ mm, o sea, de espesor $s = 7,3$ mm y para el agujero grande $d = 61$ mm, o sea, de espesor $s = 9$ mm. Sin embargo esta solución optimizada no hubiera podido ser aplicada realmente porque en este caso el espesor disponible para los dos casquillos es de sólo 14 mm y esta solución requeriría 16,3 mm, no quedando espacio disponible para colocar el pequeño cordón de soldadura que se considera necesario.

Recomendaciones



Recomendaciones

- Utilizar las ecuaciones de la Teoría de los Tubos Compuestos de dos Materiales Diferentes y de las Condiciones de Gadolín para su Optimización en otras aplicaciones industriales.
- Los Morteros de Combate tienen que ser ligeros y muy resistentes. Se propone utilizar esta Teoría de los Tubos Compuestos de dos Materiales Diferentes y de las Condiciones de Gadolín para diseñar morteros de dos materiales. Un material resistente en el tubo interior y uno menos resistente en el exterior. El conjunto puede ser de menor espesor que los actuales y mucho más barato.

Referencias Bibliográficas



Referencias Bibliográficas

1. , Aleksandrov A. V., Potapov V.D. 1990. *Fundamentos de las Teorías de la Elasticidad y de la Plasticidad*. Moscú.
2. , Avilés R. . 1995. *Fatiga de materiales en el diseño y análisis mecánico*. Bilbao.
3. , Beer F.P. and Jonhston E.R . 1993. *Mecánica de los Materiales*. Colombia.
4. , Blake, A. . 1996. *Practical Fracture Mechanic in Design*. New York.
5. , Broek, D. 1983. *Fracture Control for the Chemical Process Industries*.
6. , Casals, J. M.; Rios, R.; Villellas, A. 1997. *Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón*.
7. , Den Hartog. 1952. *Advanced Strength of Materials*. 2nd ed. New York.
8. , Dobrovolski V. 1980. *Elementos de Máquinas*. Moscú: MIR.
9. , Faires V.M. 1996. *Diseño de Elementos de Máquinas*. México: UTEHA.
10. , Feodosiev V.I. 1985. *Resistencia de los materiales* . 3rd ed. Moscú: MIR.
11. , Fitzgerald F. 1996. *Mecánica de Materiales*. México: Alfaomega S.A. de C.V.
12. , Fogle M. 1988. *Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids*. New Jersey: REA.
13. , Goytisoló R. 1989. "Algunas consideraciones acerca del Planteamiento de la Condición de Resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr."
14. , Goytisoló R. 2005. "Una formulación más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales límites de Mohr."
15. , Goytisoló R. . 2000. "Maestría de Mecánica Aplicada." Universidad de Cienfuegos.
16. , Gurney, T. R. 1978. *An analysis of some fatigue crack propagation data for steels to pulsation tension loading*. *Welding Inst. (USA)*.
17. , Ivanov M.N. 1991. *Elementos de Máquinas*. Moscú: Vichaya Schkola .
18. , Kawasawa T. . 1979. *Outline of JWES standard for critical assessment of defects with regard to brittle fractures and some cases studies*. I. I. W.: Annual Assembly.
19. , Miroliubov I. 1985. *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR .
20. , Mott R.L. 1996. *Resistencia de Materiales Aplicada*. 3rd ed. México: Prentice- Hall Hispanoamericana S.A.
21. , Mott R.L. 1990. *Applied Strength of Materials*. 2nd ed. New Jersey: Prentice- Hall.

22. , Olsen G.A. 1952. *Elements of Mechanics of Materials*. New York.
23. , Orlov, P. 1985. *Ingeniería del Diseño*. Moscú: MIR.
24. , Partón, V. Z. . 1990. *Mecánica de la Destrucción*. Moscú: MIR.
25. , Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. . 1989. *Manual de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
26. , Reshetov, D. 1985. *Elementos de Máquinas*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
27. , Rolfe S.T., Barson J.M. . 1977. *Fracture and fatigue control in structures*. New Jersey.
28. , Romvari P. . 1980. *Análisis de las regularidades del desarrollo de las grietas de fatiga en los materiales*. Moscú.
29. , Seely F.B. 1954. *Resistencia de Materiales*. México: Hispano Americana.
30. , Shigley, J. E. 1985. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: Mc Graw Hill.
31. , Shigley, J.E y Mischkie. 2001. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: McGraw Hill Interamericana.
32. , Solecki R. and Jai R. 2003. *Advanced Mechanics of Materials*. Oxford University .
33. , Spiegel L., Limbrunner G.F. 1999. *Applied Statics and Strength of Materials*. New Jersey: Prentice Hall.
34. , Stiopin P. A. 1985. *Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
35. , Tanaka, K. . 1997. *A tentative explanation for two parameter*. (USA).
36. , Timoshenko S. 1962. *Resistencia de Materiales*. Madrid: ESPASA_CALPE S.A.
37. , Volmir A. 1986. *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.

Bibliografía



Bibliografía

1. . 1996. *Recuperación de piezas por métodos de soldadura*. IMAGO.
2. , Aleksandrov A. V., Potapov V.D. 1990. *Fundamentos de las Teorías de la Elasticidad y de la Plasticidad*. Moscú.
3. , Avilés R. . 1995. *Fatiga de materiales en el diseño y análisis mecánico*. Bilbao.
4. , Beer F.P. and Jonhston E.R . 1993. *Mecánica de los Materiales*. Colombia.
5. , Blake, A. . 1996. *Practical Fracture Mechanic in Design*. New York.
6. , Broek, D. 1983. *Fracture Control for the Chemical Process Industries*.
7. , Casals, J. M.; Ríos, R.; Villellas, A. 1997. *Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón*.
8. , Casals, J. M.; Ríos, R.; Villellas, A. 1997. *Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón. Anales de Mecánica de la Fractura*.
9. , Den Hartog. 1952. *Advanced Strength of Materials*. 2º ed. New York.
10. , Dobrovolski V. 1980. *Elementos de Máquinas*. Moscú: MIR.
11. , Faires V.M. 1996. *Diseño de Elementos de Máquinas*. México: UTEHA.
12. , Feodosiev V.I. 1985. *Resistencia de los materiales* . 3º ed. Moscú: MIR.
13. , Fitzgerald F. 1996. *Mecánica de Materiales*. México: Alfaomega S.A. de C.V.
14. , Fogiel M. 1988. *Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids*. New Jersey: REA.
15. , Goytisoló R. 1989. "Algunas consideraciones acerca del Planteamiento de la Condición de Resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr."
16. , Goytisoló R. 2005. "Una formulación más exacta de la condición de resistencia según la Teoría de los Estados Tensionales Límites de Mohr."
17. , Goytisoló R. . 2000. "Maestría de Mecánica Aplicada." Universidad de Cienfuegos.
18. , Guliáev, A. P. 1978. *Metalografía*. Moscú: Mir.
19. , Gurney, T. R. 1978. *An analysis of some fatigue crack propagation data for steels to pulsation tension loading*. *Welding Inst. (USA)*.
20. , Ivanov M.N. 1991. *Elementos de Máquinas*. Moscú: Vichaya Schkola .
21. , Kawasaki T. . 1979. *Outline of JWES standard for critical assessment of defects with regard to brittle fractures and some cases studies*. *I. I. W.: Annual Assembly*.

22. , Miroljubov I. 1985. *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR .
23. , Mott R.L. 1996. *Resistencia de Materiales Aplicada*. 3° ed. México: Prentice- Hall Hispanoamericana S.A.
24. , Mott R.L. 1990. *Applied Strength of Materials*. 2° ed. New Jersey: Prentice- Hall.
25. , Olsen G.A. 1952. *Elements of Mechanics of Materials*. New York.
26. , Orlov, P. 1985. *Ingeniería del Diseño*. Moscú: MIR.
27. , Partón, V. Z. . 1990. *Mecánica de la Destrucción*. Moscú: MIR.
28. , Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. . 1989. *Manual de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
29. , Reshetov, D. 1985. *Elementos de Máquinas*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
30. , Rolfe S.T., Barsom J.M. . 1977. *Fracture and fatigue control in structures*. New Jersey.
31. , Romvari P. . 1980. *Análisis de las regularidades del desarrollo de las grietas de fatiga en los materiales*. Moscú.
32. , Seely F.B. 1954. *Resistencia de Materiales*. México: Hispano Americana.
33. , Shigley, J. E. 1985. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: Mc Graw Hill.
34. , Shigley, J.E y Mischkie. 2001. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. México: McGraw Hill Interamericana.
35. , Solecki R. and Jai R. 2003. *Advanced Mechanics of Materials*. Oxford University .
36. , Spiegel L., Limbrunner G.F. 1999. *Applied Statics and Strength of Materials*. New Jersey: Prentice Hall.
37. , Stiopin P. A. 1985. *Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.
38. , Tanaka, K. . 1997. *A tentative explanation for two parameter*. (USA).
39. , Timoshenko S. 1962. *Resistencia de Materiales*. Madrid: ESPASA_CALPE S.A.
40. , Volmir A. 1986. *Problemas de Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR.