

UNIVERSIDAD
CIENFUEGOS

Carlos Rafael Rodríguez

**Centro de Estudios y Desarrollo de la
Oleohidráulica y la Neumática
CEDON**

Trabajo de Diploma

*Estudio teórico de cinco casos de cargas en
árboles con dos apoyos articulados,
empotrados y con empotramiento elástico*

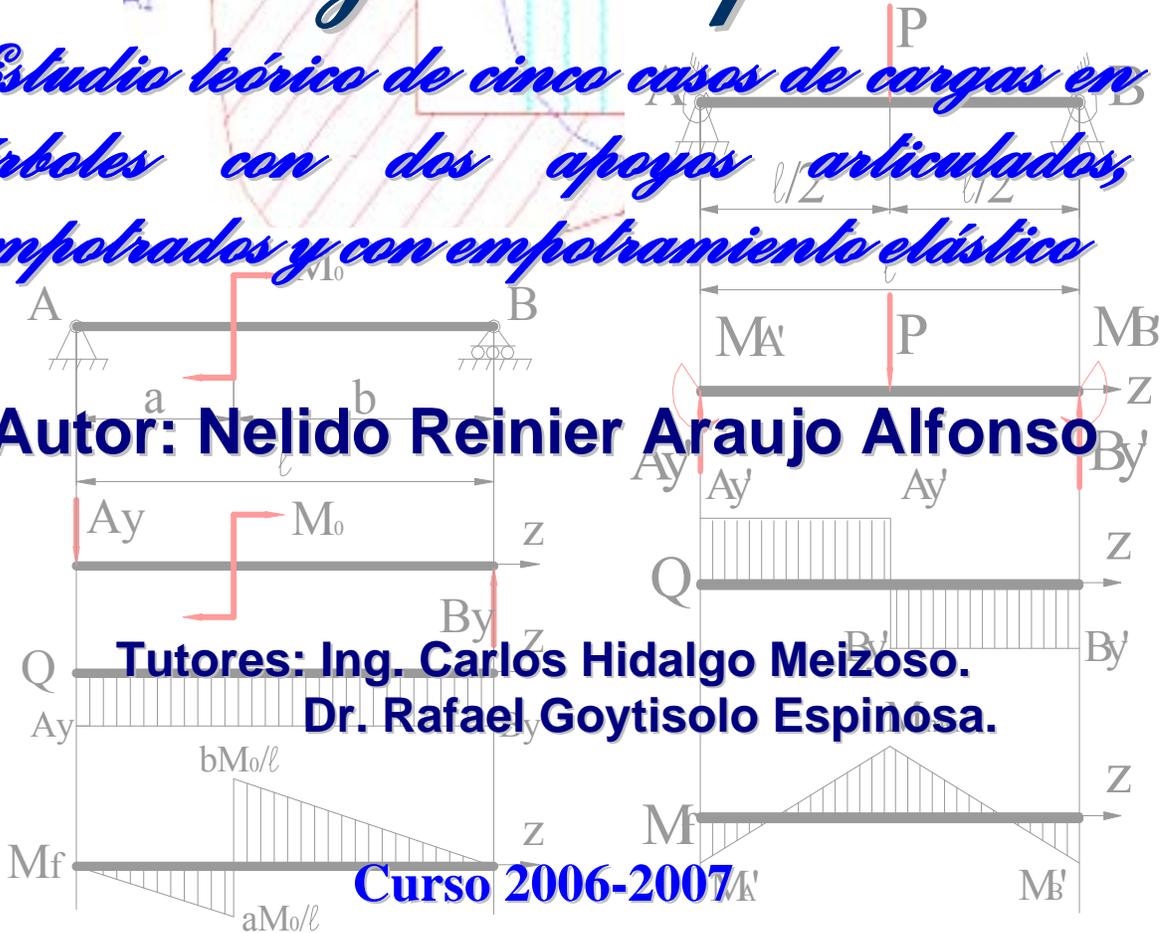
Autor: Nelido Reinier Araujo Alfonso

Tutores: Ing. Carlos Hidalgo Meizoso.

Dr. Rafael Goytisolo Espinosa.

Curso 2006-2007

“Año de la Revolución Energética en Cuba”



Resumen

Los soportes de maquinas y estructuras han sido idealizados a través de tres esquemas de análisis típicos que son: El apoyo articulado móvil, El apoyo articulado fijo y el apoyo empotrado.

Sin embargo estos apoyos idealizados se alejan de la realidad, puestos que los apoyos articulados introducen en los elementos de fuerzas internas, flechas y pendientes muchos mayores que los reales, mientras que los apoyos empotrados, introducen por el contrario fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes muchos menores que los reales. Estas diferencias son compensadas normalmente con el factor de seguridad el cual compensa de una forma no totalmente exacta los posibles errores.

En el presente trabajo se realiza una búsqueda bibliográfica del estado actual de los métodos de cálculo para árboles y se resuelven cinco casos de árboles sometidos a cargas diversas determinándose sus diagramas de M_f , Q , así como la ecuación de la flecha (para cualquier punto del árbol). Para apoyos articulado, empotrados y con empotramientos elásticos.

Introducción

Los soportes de los árboles de las máquinas históricamente se han idealizado a través de tres esquemas típicos: el apoyo articulado móvil, el apoyo articulado fijo y el apoyo empotrado, sin embargo, estos esquemas idealizados se alejan en cierta medida de la realidad. Los apoyos articulados provocan en los mismos: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes, mucho mayores que los reales y los apoyos empotrados: fuerzas internas, tensiones, flechas y pendientes mucho menores que las que existen en la realidad.

Estas insuficiencias de los esquemas de análisis se han asimilado históricamente través del controvertido factor de seguridad, encargado de llevar sobre su espalda todas las imprecisiones e incertidumbres de los cálculos.

Algunos autores han utilizado esquemas más exactos considerando la posible elasticidad en los apoyos, en el sentido que no necesariamente la flecha sea cero, fundamentalmente en aplicaciones muy específicas como ocurre en el cálculo de la velocidad crítica [7]. Los tutores del presente trabajo han utilizado este esquema en la solución de algunos problemas prácticos concreto [16].

En las construcciones civiles es conocido el esquema de viga sobre una fundación elástica lo que implica que el elemento pueda estar apoyado sobre una base elástica [2,10,27] Este tipo de apoyo también ha sido utilizado por los tutores del presente trabajo en el caso de los árboles de los molinos de caña[3]

El surgimiento y desarrollo de la Mecánica de la Fractura en los últimos 40 años, ha proporcionado un nuevo enfoque de la Mecánica de los Materiales y del Diseño y una necesidad de perfeccionar los Esquemas de Análisis. La aplicación de la Metodología de Gestión de Vida obliga a realizar cálculos exactos de tensiones con

el propósito de pronosticar con adecuada exactitud la vida del elemento de máquina o estructura.

El Problema Científico planteado se puede enunciar como sigue:

Existe una excesiva idealización en los Esquemas de Análisis empleados tradicionalmente en los apoyos de los árboles de las máquinas, lo que impide en cierta medida calcular las tensiones y desplazamientos con una exactitud adecuada para algunas aplicaciones.

La identificación de este Problema ha permitido formular la siguiente **Hipótesis:**

Es posible emplear un Esquema de Análisis que rompa con los paradigmas clásicos existentes en este sentido y que permita calcular con una mayor aproximación con la realidad, las tensiones y los desplazamientos en los elementos de máquinas y estructuras.

En el presente trabajo se aspira a demostrar la viabilidad de la Hipótesis planteada para lo cual se ha definido el siguiente **Objetivo General**:

Elaborar los conceptos más generales de un nuevo tipo de apoyo para árboles denominado en este trabajo como: **Empotramiento Elástico** y

demostrar teóricamente la mayor aproximación de este tipo de apoyo con la realidad.

Los **Objetivos Específicos** del Trabajo son:

1. Investigar en la literatura los conceptos y procedimientos establecidos acerca de los diferentes tipos de apoyos empleados en el cálculo de árboles.

2. Realizar los cálculos para cinco casos de árboles con apoyos sometidos a diferentes sistemas de cargas, así como sus esquemas de análisis y diagramas de cortante (Q) y momento flector (Mf).

Capítulo I. Estado actual de la temática objeto de estudio.

1.1 Esquemas de Análisis y Modelos matemáticos de los apoyos clásicos.

Esquemas de Análisis y los modos matemáticos de los apoyos clásicos utilizados en los sistemas planos en la literatura de Mecánica Teórica [4, 5, 6] son:

1.1.1 Apoyo Articulado Móvil (AAM).

Esquemas de Análisis de la Articulación Móvil se muestra en las Fig. 1.1 a) y b).

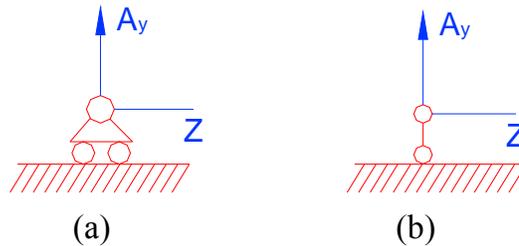


Fig 1.1 Esquema de análisis del Apoyo Articulado Móvil

El Modelo matemático de este apoyo se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} A_Z &= 0 & \delta_{AZ} &\neq 0 \\ A_Y &\neq 0 & \delta_{AY} &= 0 \\ M_A &= 0 & \phi_A &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Donde:

A_Z - Fuerza de reacción del apoyo en la dirección del eje longitudinal Z.

A_Y - Fuerza de reacción del apoyo en la dirección del eje vertical Y.

M_A - Momento de reacción del apoyo con relación al eje X, perpendicular al plano de la figura.

δ_{AZ} y δ_{AY} - Desplazamientos lineales del punto A donde está ubicado el apoyo en las direcciones Z y Y respectivamente.

θ_A - Desplazamiento angular (pendiente) del punto A donde está ubicado el apoyo.

1.1.2 Apoyo Articulado Fijo (AAF).

Esquemas de Análisis de este apoyo se muestra en las Fig. 1.2 a) y b).

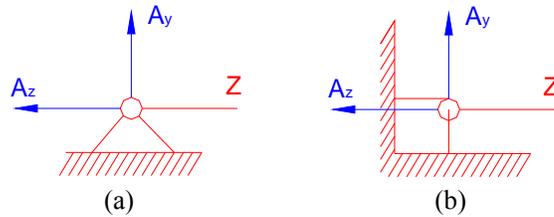


Fig 1.2 Esquema de Análisis del Apoyo Articulado Fijo.

El modelo matemático de este apoyo es:

$$\begin{aligned} A_Z &\neq 0 & \delta_{AZ} &= 0 \\ A_y &\neq 0 & \delta_{Ay} &= 0 \\ M_A &= 0 & \phi_A &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.3 Empotramiento Rígido (ER).

Esquemas de Análisis de este apoyo se muestra en la Fig. 1.3

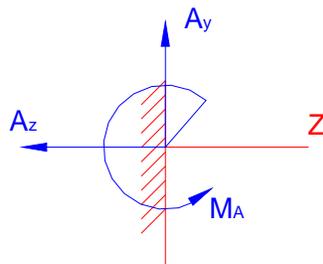


Fig 1.3 Esquema de análisis del Empotramiento Rígido

El modelo matemático de este apoyo es:

$$\begin{aligned}
 A_z &\neq 0 & \delta_{AZ} &= 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{Ay} &= 0 \\
 M_A &\neq 0 & \phi_A &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

1.2 Esquemas de Análisis y modelos matemáticos de algunos apoyos elásticos utilizados en la literatura técnica.

En la literatura técnica se utilizan otros modelos que consideran en cierta medida las propiedades elásticas de los apoyos. Estos modelos son:

1.2.1 El Apoyo Articulado Móvil Elástico (AAME).

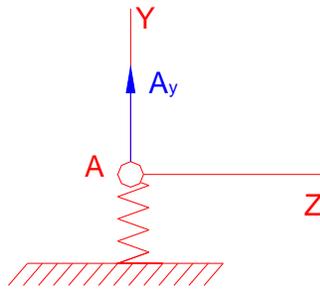


Fig 1.4 Esquema de análisis del Apoyo Articulado Elástico Móvil

Este tipo de apoyo se modela esquemáticamente tal como se muestra en la Fig. 1.4.

El modelo matemático se expresa como:

$$\begin{aligned}
 A_z &= 0 & \delta_{AZ} &\neq 0 \\
 A_y &\neq 0 & \delta_{Ay} &= -\frac{A_y}{C_A} \neq 0 \\
 M_A &= 0 & \phi_A &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

El signo menos indica que la reacción es sentido contrario al desplazamiento del apoyo.

C_A - Constante de rigidez del apoyo en cm/kgf, plg/lb , etc.

1.2.2 El Apoyo Articulado Elástico Fijo (AAEF).

El esquema de Análisis se representa tal como se muestra en la Fig. 1.5.

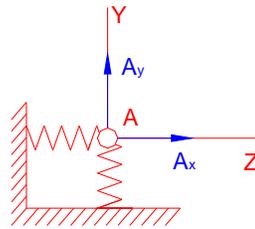


Fig 1.5 Esquema de análisis del Apoyo Articulado Elástico Fijo

El modelo matemático en este caso es:

$$\begin{aligned} A_Z \neq 0 & \quad \delta_{AZ} - \frac{A_Z}{C_A} \neq 0 \\ A_y \neq 0 & \quad \delta_{Ay} = -\frac{A_y}{C_A} \neq 0 \\ M_A = 0 & \quad \phi_A \neq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.2.3 La Fundación Elástica.

El esquema de Análisis de la Fundación Elástica se muestra en la Fig. 1.6

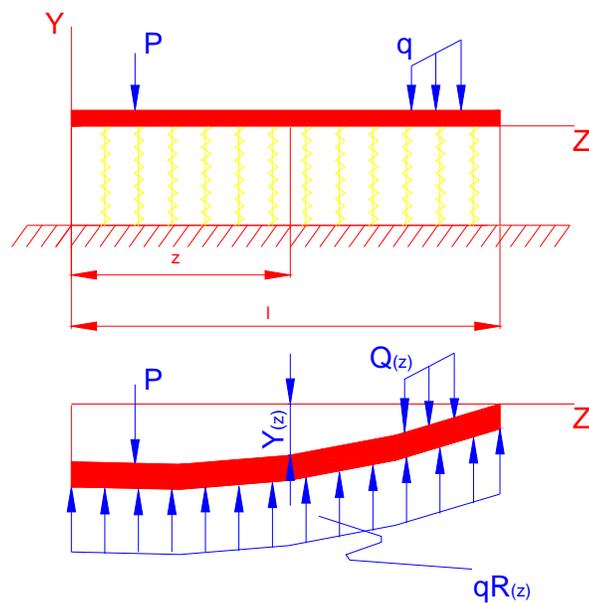


Fig 1.6 Esquema de análisis de viga sobre Fundación Elástica

El modelo matemático se expresa en este caso como:

$$q_{R(Z)} = -\alpha g Y_{(Z)} \quad \text{kgf / cm} \quad (1.6)$$

Donde:

$q_{R(Z)}$ es la intensidad de la fuerza de reacción distribuida a una coordenada Z del origen, producida por la base elástica sobre la viga. Esta reacción es una fuerza no uniformemente distribuida, la intensidad de la fuerza $q_{R(Z)}$ depende de la flecha que adopte la viga en esa

coordenada Z , o sea: $Y_{(Z)}$, la constante de rigidez de la fundación α se expresa en unidades de fuerza por unidad de área kgf/cm^2 . $Y_{(Z)}$ es la flecha de la viga a una coordenada Z del origen en cm. El signo menos indica que la reacción es contraria a la flecha.

1.3 Consideraciones prácticas de algunos autores acerca de los modelos empleados para simplificar los apoyos y las reacciones en los mismo.

En la literatura de Mecánica Teórica [4, 5, 21, 35] sólo se hace referencia a los apoyos rígidos clásicos, ningún autor hace referencia a ningún otro tipo de apoyo que contemple una rigidez intermedia entre los apoyos articulados y los empotrados.

En la literatura de Mecánica de Materiales, la mayoría de los autores se refieren también exclusivamente a los apoyos rígidos clásicos, sin contemplar en ningún caso la elasticidad de los apoyos [6, 12, 13,14, 22, 23, 24, 35, 36, 39]. Otro grupo de autores trata de alguna manera los apoyos elásticos mencionados anteriormente [2, 7, 10, 11, 28] y solo en [25] se mencionan la posibilidad de que los empotramientos no sean perfectamente rígidos, pero sin profundizar en las cualidades ni en el modelo físico – matemático de este tipo de esquema de análisis y muchos menos en los procedimientos de cálculos.

En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles esquemas de análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo:

Wilson [40] al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar: cajas de bolas, rolletes, cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión.

Mas adelante expresa: “Si el soporte de la viga no permite movimiento relativo a lo largo del eje de la misma, entonces surgirá una restricción adicional que provocara una fuerza axial como resultado de dicha restricción”. Este efecto axial se desprecia siempre en los problemas de Diseño de Máquinas y continua diciendo: “El apoyo empotrado, como reacciones una fuerza y un momento que no permiten rotación alguna en el plano de deflexión del elemento. La pendiente de la curva elástica del elemento es cero en el apoyo empotrado, los que son utilizados para representar soportes muy rígidos”. Cuando se refiere

a las reacciones en los cojinetes en el diseño de árboles, explica que: “generalmente los mismos están soportados por dos cojinetes, como regla, los cuales son considerados como soportes simples o simples apoyos”. Al construir diagramas de momentos flectores, tanto en elementos sometidos a flexión como en el diseño de árboles, sólo se refiere a los apoyos clásico y sus reacciones correspondientes.

Los autores que abordan el Diseño por el Método de los Elementos Finitos (MEF) [19, 27, 39], emplean diferentes tipos de elementos que se diferencian por su forma, a través de las posiciones relativas de sus nodos y por los grados de libertad, es decir por las posibles direcciones del movimiento de cada nodo, Eligiendo adecuadamente estos elementos en las zonas de apoyo es posible modelar apoyos con diferente rigideces y lograr una mayor aproximación a la realidad que en los clásicos apoyos articulados y empotrados. Esta cualidad del MEF puede ser utilizada en la práctica para lograr aproximaciones más exactas a la realidad, sin embargo esta vía no resulta siempre aplicable y no tiene la generalidad de las soluciones analíticas.

Uno de los autores rusos que aborda con mayor rigor el empleo de los esquemas de análisis complejos en el Diseño de Elementos de Máquinas es Birger [19]. En el Capítulo I donde se refiere a los esquemas de análisis, las reacciones en los apoyos, las fuerzas internas y las tensiones se refiere única y exclusivamente a apoyos articulados y empotrados rígidos. Posteriormente en el cálculo de árboles, al referirse a los esquemas de análisis, explica que en el cálculo de los mismos los apoyos se consideran articulados y las reacciones se sitúan como regla en el centro de su longitud. Este esquema según las consideraciones de dicho autor es lo suficientemente exacto para apoyos con Cojinetes de Rodamiento de Simple Hilera. (Sin entre uno y otro tipo con Cojinetes de Rodamientos de Simple Hilera e incluso la considera exacta para cojinetes de Rodamientos de Doble Hilera Autodeslizantes). Añade que si se emplean dos cojinetes de rodamiento como apoyo es conveniente en el esquema análisis no considerar los cojinetes exteriores y ubicar el apoyo articulado en el centro del cojinete interior como se muestra en la Fig. 1.7. Birger al analizar los esquemas de análisis empleados en los árboles, expresa algunas consideraciones como son: En el caso de árboles que utilicen cojinetes de rodamientos, situados en los extremos de los árboles, la posición en el apoyo en el esquema de análisis se debe ubicar en la mitad del cojinete. Cuando en el apoyo se ubican dos cojinetes se recomienda ubicar el apoyo en la posición del cojinete interior tal como se muestra en la Fig. 1.9 y en el caso de árboles con cojinetes de deslizamientos, la posición del apoyo en el esquema estará a una distancia del apoyo interior igual $0.5d$ o menor pero nunca inferior a $(0.25 - 0.35)d$.

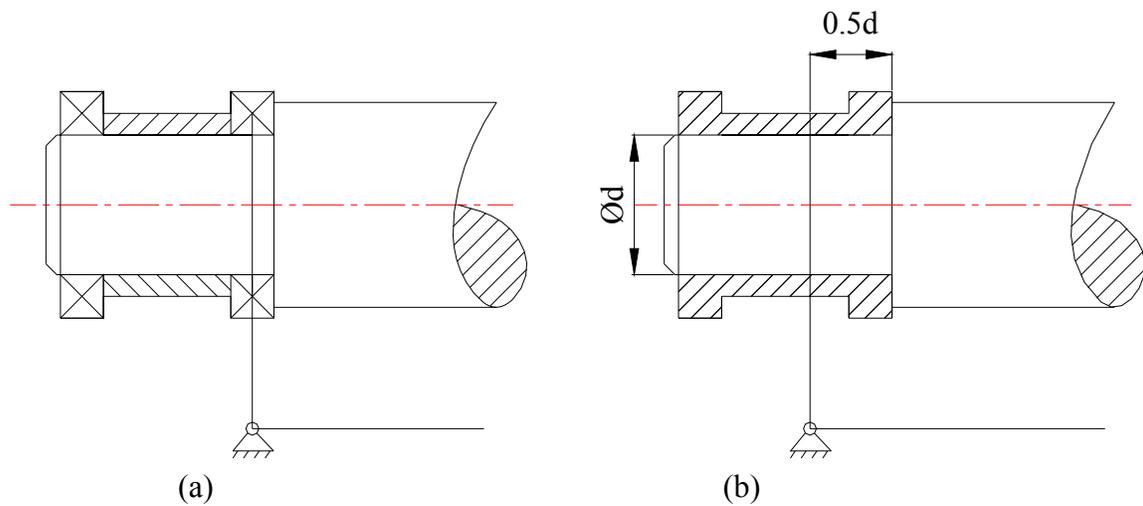


Fig. 1.7 Esquema de Análisis en apoyos de árboles según Birger.

Estas recomendaciones dadas por Birger sobre los apoyos de los árboles, toman en cuenta en cierta medida la diferencia en las rigideces de los apoyos y compensa un poco la imprecisión al utilizar Apoyos articulados Rígidos.

Reshetov [29] por su lado plantea que los árboles y ejes se calculan a flexión como vigas sobre apoyos articulados. Para los árboles montados en cojinetes, uno por cada apoyo, este esquema es bastante exacto.

Cuando en el apoyo se montan dos cojinetes Fig. 1.8 a), recomienda situar dos apoyos articulados tal como se muestra en la Fig. 1.8 b). En estas circunstancias, las reacciones en el apoyo interior siempre serán mayores en el exterior. También es posible colocar un solo apoyo articulado a una distancia igual a un tercio de la distancia entre apoyos con relación a la posición del cojinete interior tal como se muestra en la Fig. 1.8 c). También es posible colocar el apoyo en la posición del cojinete interior tal como se muestra en la Fig. 1.8 d) esta consideración es por supuesto menos crítica para el árbol.

Plantea finalmente que el cálculo exacto de todos los árboles se debe llevar a cabo según el esquema de una viga con apoyos elásticos sin profundizar en estos.

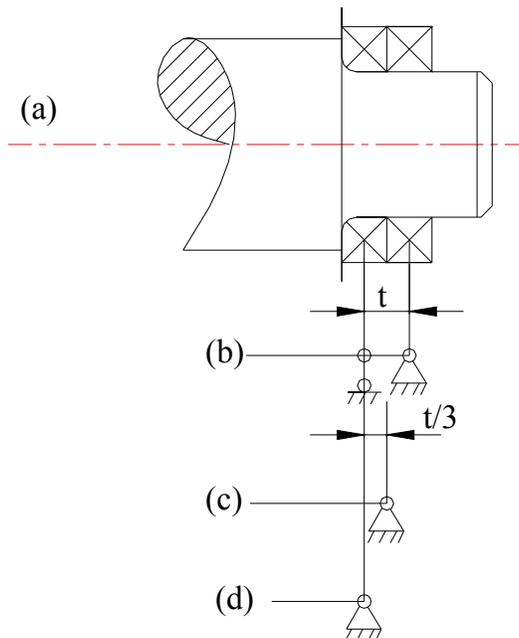


Fig. 1.8 Esquema de Análisis para apoyos de árboles sobre cojinetes de rodamientos según Reshetov.

En el caso de árboles montados sobre cojinetes de deslizamientos no autolineante en el apoyo articulado conviene situarlo a una distancia de $(0.25 - 0.30)d$ a partir del borde interior del cojinete, pero nunca mayor que la mitad del diámetro (d) del árbol, como se muestra en la Fig. 1.9

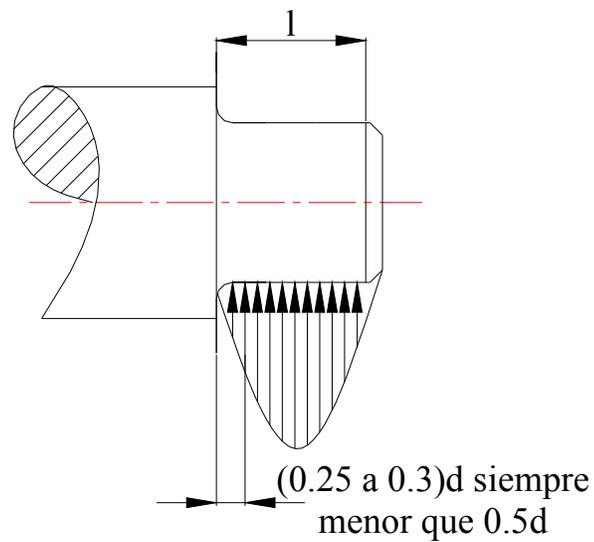


Fig. 1.9 Cojinetes de deslizamiento según Reshetov.

Señala también que para el cálculo de flechas y pendientes se emplean los métodos corrientes de Resistencia de Materiales, pero recomienda tener en cuenta la pérdida de rigidez del árbol por la cavidad de los chaveteros y el incremento de la rigidez por la presencia del cubo de los elementos acoplados al árbol en el cálculo de árboles de las vibraciones, considera los apoyos articulados o empotrados pero no considera otras situaciones con relación a la rigidez de los apoyos.

En el cálculo de árboles a las vibraciones, considera los apoyos articulados o empotrados pero no considera otras situaciones con relación a la rigidez de los apoyos.

El resto de los autores consultados [1, 8, 9, 20, 26,30, 31,32, 33, 34] no aporta ningún elemento nuevo sobre este en particular, limitándose en el mejor de los casos a consideraciones similares.

1.2.4 Esquemas de Análisis y modelo matemático del Empotramiento Elástico.

El Empotramiento Elástico no es analizado en ninguna de las fuentes bibliográficas consultadas en el presente trabajo. Solamente en los trabajos [25] se menciona la posibilidad de que los empotramientos puedan no tener una rigidez absoluta, sin abordar ningún otro análisis más profundo sobre esto en particular.

En el presente trabajo se modela el empotramiento tal como se muestra en la Fig. 1.10.

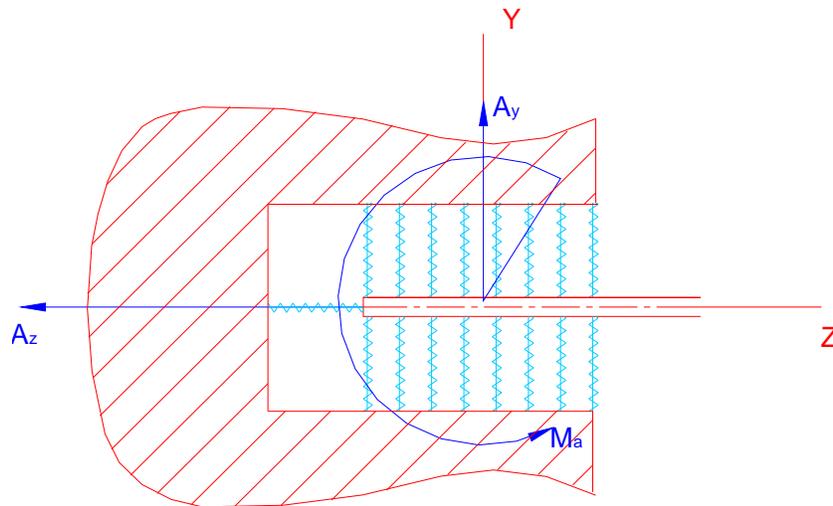


Fig 1.10 Esquema de análisis de un Empotramiento Elástico

El modelo matemático de este apoyo se puede expresar como sigue.

$$A_z \neq 0 \quad \delta_{AZ} - \frac{A_z}{C_A} \neq 0$$

$$A_y \neq 0 \quad \delta_{Ay} = -\frac{A_y}{C_A} \neq 0$$

$$M_A \neq 0 \quad \phi_A - \frac{\Delta_A}{CB''} \neq 0$$

Los signos menos indican al igual que en los casos elásticos anteriores, que las fuerzas son contrarias a los referidos desplazamientos.

Un esquema de Análisis simplificado del Empotramiento Elástico, el cual será utilizado en los análisis que se realizarán en lo adelante se muestra en la Fig. 1.11.

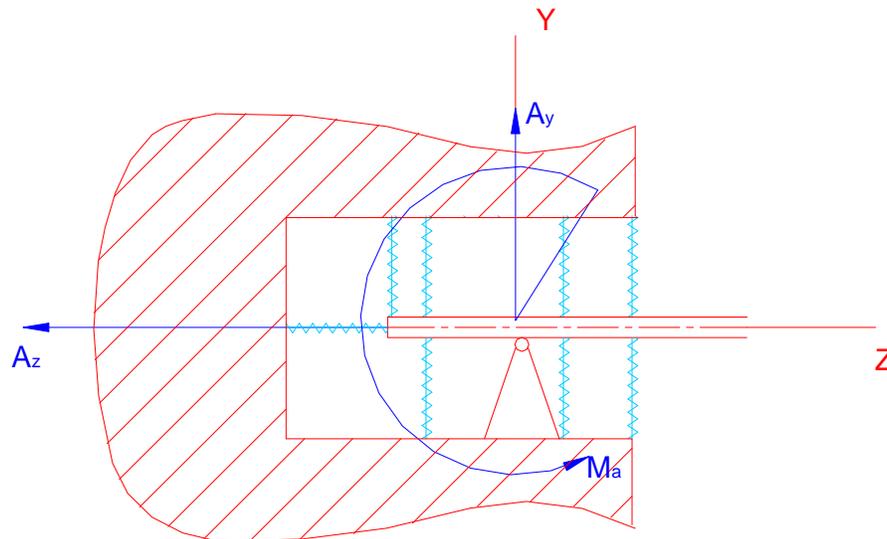


Fig 1.11 Esquema de análisis de un Empotramiento Elástico

El modelo matemático de este apoyo se puede expresar como sigue:

$$A_z \neq 0$$

$$\delta_{AZ} = 0$$

$$A_y \neq 0$$

$$\delta_{Ay} = 0$$

$$M_A \neq 0$$

$$\phi_A - \frac{M_A}{CA} \neq 0$$

Este modelo simplificado del Empotramiento Elástico se denominara Empotramiento Parcialmente Elástico.

Capítulo II. Demostración teórica del coeficiente de rigidez (ϕ) de apoyos con empotramientos elásticos.

2.1 Solución de un árbol hiperestático con un empotramiento elástico por el Método de las Fuerzas.

Para ilustrar la aplicación del Método de las Fuerzas en el caso de árboles hiperestáticos con Empotramientos Elásticos su utilizará, a modo de ejemplificación, un árbol con un Empotramiento Elástico y un Apoyo Articulado Móvil, bajo la acción de una carga simple como la mostrada en la Fig. 2.1

En este caso existe una ligadura suplementaria y por lo tanto un grado de hiperestaticidad.

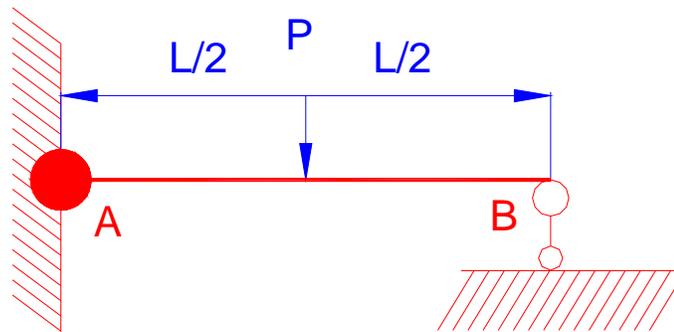


Fig 2.1 Arbol Hiperestático con un empotramiento elástico

Para resolver Sistemas Hiperestáticos con Empotramientos Elásticos es necesario elegir como Sistema Base aquel que resulta de eliminar las ligaduras suplementarias, pero sustituyendo los Empotramientos Elásticos por articulaciones fijas o móviles según sea necesario en el Sistema en particular. El Sistema Equivalente se construye entonces como es clásico, sustituyendo las ligaduras eliminadas por las fuerzas que las representan. En la Fig. 2.2 se muestra el Sistema Equivalente correspondiente al Sistema mostrado en la Fig. 2.1.

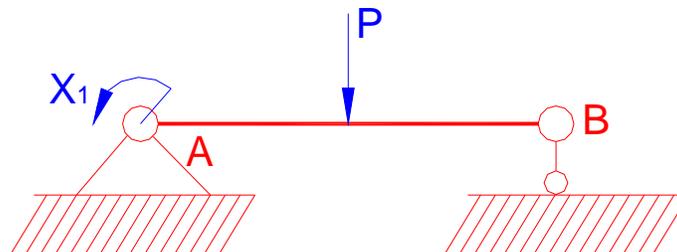


Fig 2.2 Sistema Equivalente

Las ecuaciones canónicas, en el caso de los Empotramientos Elásticos, se plantean partiendo de las condiciones de que los desplazamientos en las direcciones de las fuerzas X_i no necesariamente son iguales a cero, por tratarse precisamente de Empotramientos Elásticos, donde los desplazamientos reales dependerán de la rigidez del apoyo. Como se expresó en el Capítulo I, en los análisis se utilizará el Modelo Matemático Simplificado de Empotramiento Elástico, al cual se le denominará también como Empotramiento Parcialmente Elástico, para el cual:

$$\delta_{A_z} = 0 \quad \delta_{A_y} = 0 \quad \theta_A \neq 0 \quad (2.1)$$

Por lo tanto, la ecuación canónica en este caso se escribirá como sigue:

$$\theta_1 \quad (x_1, \quad p) \quad = \quad -\theta_A \quad (2.2)$$

De donde:

$$\delta_{1X} + \delta_{1P} = -\theta_A \quad (2.3)$$

Ecuación que se puede escribir de la forma:

$$\delta_{11}X_1 \quad + \delta_{1P} \quad = \quad -\theta_A \quad (2.4)$$

El signo menos del término de la derecha indica que la pendiente del apoyo A será en sentido contrario a la dirección del momento X_1 ubicado. Se hallarán a continuación los coeficientes de la ecuación canónica. Para esto construiremos el gráfico unitario de la fuerza X_1 y el gráfico de P.

El gráfico unitario de X_1 se muestra en la Fig. 2.3 y el de la carga P en la Fig.2.4.

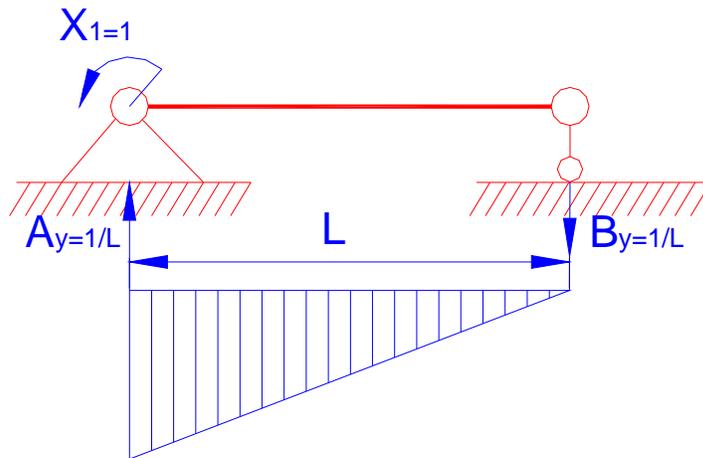


Fig 2.3 Grafico Unitario de la Fuerza (X_1)

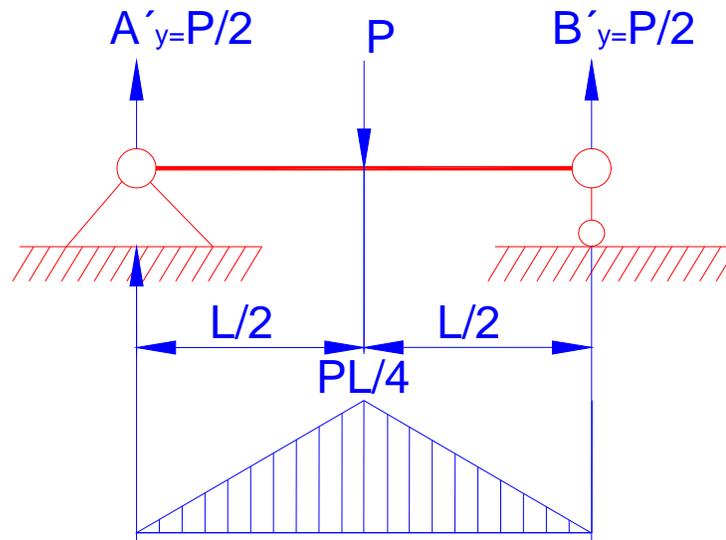


Fig 2.4 Grafico de la Carga P

El coeficiente δ_{11} será:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L \right) = \frac{L}{3EI} \quad (2.5)$$

El coeficiente δ_{1p} será:

$$\delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1 \cdot \left(L + \frac{L}{2} \right) \frac{PL}{4}}{6} \right] = -\frac{3PL^2}{48EI}$$

(2.6)

Sustituyendo en la Ecuación Canónica correspondiente

$$\frac{L}{3EI} X_1 - \frac{3PL^2}{48EI} = -\theta_A$$

(2.7)

Despejando X_1 se tiene que:

$$M_A = X_1 = \frac{3PL^2 - 48EI\theta_A}{16L}$$

(2.8)

Si se tratara de un empotramiento rígido $\theta_A = 0$ y el momento en el empotramiento sería:

$$M_A = X_{\theta_A=0} = \frac{3}{16} PL$$

(2.9)

Como se trata de un empotramiento elástico, el momento en el empotramiento será menor, o sea, una fracción φ del valor de M_A donde:

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

Si $\varphi = 0$ entonces la rigidez a la flexión del empotramiento es mínima y el momento que surgirá en el mismo será cero, o sea coincidirá con el apoyo articulado, si $\varphi = 1$ el empotramiento será perfectamente rígido.

En general para el empotramiento elástico se tiene que:

$$M_{Ae} = \varphi_A M_A$$

En el caso analizado:

$$M_{Ae} = \frac{3}{16} PL \varphi_A$$

(2.11)

Igualando las expresiones (2.8) y (2.11) y despejando φ_A se obtiene la expresión del coeficiente de rigidez del empotramiento elástico en función de la pendiente en el mismo. Para el ejemplo analizado

$$\varphi_A = \frac{3PL^2 - 48EI\theta_A}{3PL^2}$$

(2.12)

$$\varphi_A = 1 - \frac{16EI}{PL^2} \cdot \theta_A$$

(2.13)

El valor de θ_A se puede estimar, se puede calcular aproximadamente o se puede medir experimentalmente.

Así por ejemplo, según Pisarenko [27] para una viga con apoyos articulados la pendiente en los apoyos se puede calcular por la expresión:

$$\theta_A = \frac{P L^2}{16 E I} \text{ rad}$$

(2.14)

Si se sustituye este valor en la Ecuación 2.13 para calcular el coeficiente φ_A del apoyo se obtendrá $\varphi_A = 1$, lo cual se corresponde con el coeficiente de rigidez del apoyo articulado. Ahora bien si se tratara por ejemplo de un árbol de diámetro $d = 2$ cm de acero con $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², montado sobre cojinetes de rodamientos, con una carga $P = 1\,000$ kgf en el centro de la distancia entre apoyos $L = 20$ cm, si se adopta el Esquema de Análisis correspondiente a apoyos articulados teóricamente la pendiente en el apoyo se puede calcular por la expresión (2.14), obteniéndose $\theta_A = 0,0156$ rad. Ahora bien los cojinetes de rodamientos, dependiendo del tipo, tienen una pendiente máxima admisible, por ejemplo Dobrovolski [8] plantea que en el caso de los rodamientos de bolas de simple hilera la pendiente en los apoyos no debe exceder de $\theta_A = 0,008$ rad, casi la mitad de la pendiente obtenida para apoyos articulados rígidos. Si se sustituye este valor de la pendiente en la Ecuación 2.13 para calcular el coeficiente de rigidez requerido en el apoyo se obtendrá que el valor de φ_A debía ser: $\varphi_A = 0,49$ para satisfacer los requerimientos de rigidez del árbol con esas dimensiones y ese material. La pregunta que se impone es ¿Tendrá realmente un cojinete de bolas de simple hilera ese coeficiente de rigidez o será necesario elevar el diámetro del árbol?. La respuesta a esta pregunta es parte del contenido del presente trabajo.

En el presente trabajo se determinará experimentalmente el coeficiente φ_A de los árboles con diferentes tipos cojinetes de rodamientos.

2.2 Casos analizados de cargas, diagramas de Q, Mf, así como flecha y pendiente para cualquier punto de la viga.

En el presente trabajo se utilizará para los cálculos de los desplazamientos en los árboles del método de los parámetros iniciales planteado por Pisarenko [28] el cual plantea que:

1. El origen de coordenadas se elige en el último punto izquierdo de la viga en cuestión, y es común para todos los tramos.

2. La expresión para el momento flector $M(z)$ se compone mediante el cálculo de los momentos de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección examinada tomada a una distancia z desde el origen de coordenadas.
3. Al incluir en las ecuaciones el momento exterior concentrado M aplicado a cierta distancia (a) desde el origen de coordenadas, aquel se multiplica por el factor $(z-a)^0$ igual a uno.
4. En el caso de la ruptura de la carga distribuida (por ejemplo, en la sección $z = d$ Fig. 2.5), ésta se prolonga hasta el final del tramo en cuestión, introduciendo, para restablecer la carga que realmente actúa sobre la viga, la carga compensadora de dirección contraria (la carga complementaria extrapolada y la que la compensa se muestran, generalmente, con línea de trazos).

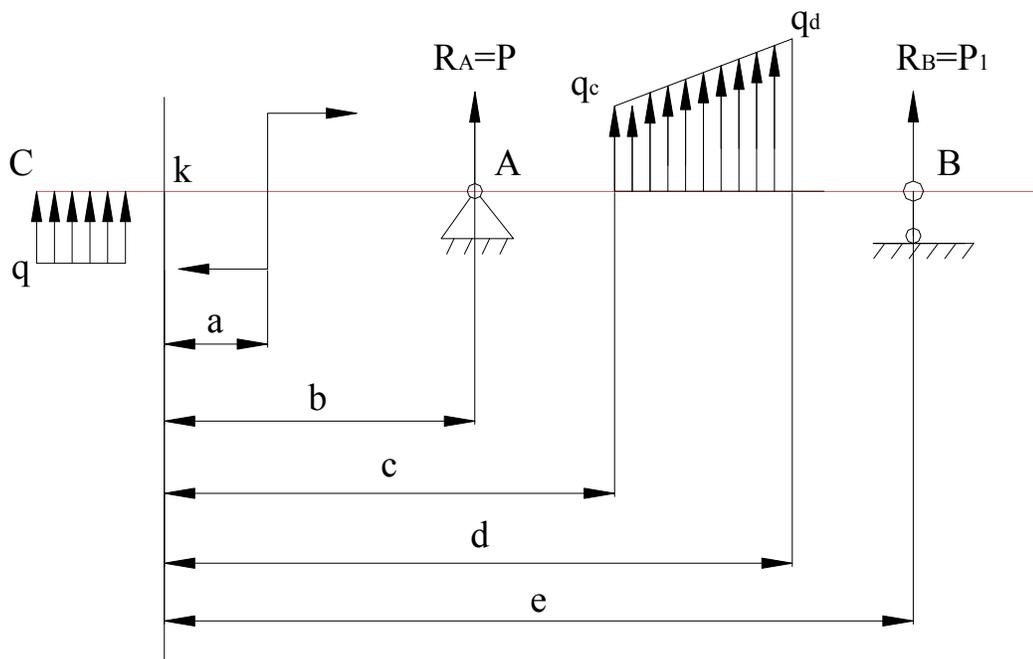


Fig 2.5 Viga sometida a diversas cargas.

5. las ecuaciones para determinar la flecha y la pendiente serán:

$$\begin{aligned}
 EI_x \theta_{(z)} = & EI_x \theta_{(0)} + \sum M(z-a) + \sum P \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q_c \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q_d \frac{(z-d)^3}{6} + \\
 & + \sum k \frac{(z-c)^4}{24} - \sum k \frac{(z-d)^4}{24}
 \end{aligned} \tag{I}$$

$$EI_x y_{(z)} = EI_x y_{(0)} z + \sum M \frac{(z-a)^2}{2} + \sum P \frac{(z-b)^3}{6} + \sum q_c \frac{(z-c)^4}{24} - \sum q_d \frac{(z-d)^4}{24} + \sum k \frac{(z-c)^5}{120} - \sum k \frac{(z-d)^5}{120} \quad (II)$$

Donde:

$$k = \frac{q_d - q_c}{d - c}$$

θ_0 y $M_0 \rightarrow$ Parámetros Iniciales

La ecuación obtenida (II) se denomina, generalmente, ecuación universal de la línea elástica, teniendo en cuenta que esta puede emplearse para los esquemas de cálculo de cualquiera de las vigas.

2.2.1 Caso I Viga con Momento (M_0) Aplicado a una distancia “a” del apoyo A

2.2.1.1 Sistema Articulado

Para solucionar el sistema primero simplificamos el mismo, como no existen ligaduras suplementarias entonces pasamos a realizar sumatoria de fuerzas a lo largo del eje “y” y sumatoria de momentos en el punto “A”.

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & & \sum M_A = 0 \\ A_y - B_y = 0 & & M_0 - B_y \cdot l = 0 \\ A_y = B_y & & B_y = \frac{M_0}{l} \\ A_y = B_y = \frac{M_0}{l} & & \end{aligned}$$

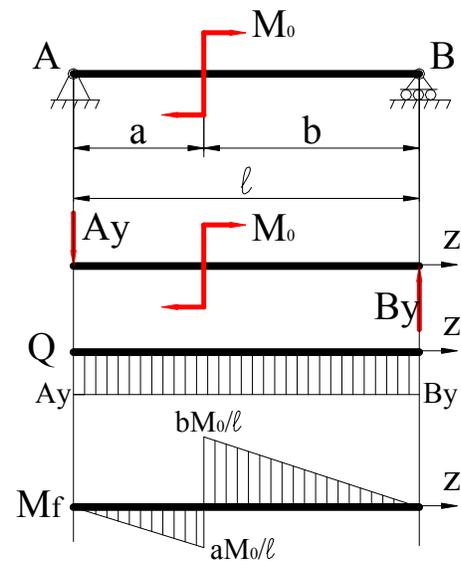


Fig 2.6. Esquemas de sollicitación de

la viga Articulada, Diagramas de Q y Mf

Después de tener construidos los diagramas de cortante “Q” y momento flector “M” podemos a determinar la flecha “y” y la pendiente “ θ ” a lo largo de la viga.

Como primer paso se debe calcular la flecha en el extremo B de la viga ya que en este y en el extremo A la flecha es cero y por lo tanto podremos determinar θ_0 con la ayuda del método de los parámetros de origen.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z + M_o \frac{(z-a)^2}{2} - A_y \frac{(z)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 \cdot l = -M_o \frac{(b)^2}{2} + M_o \frac{(l)^2}{6}$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{M_o}{6 \cdot l} (l^2 - 3b^2)$$

Segundo después de haber obtenido $EI_x \theta_0$ podemos obtener θ en cualquier punto de la viga, analizando la misma en dos tramos:

1. Tramo del punto A hasta el punto de aplicación de M_o .
2. Tramo del punto de aplicación de M_o hasta el punto B.

Pendiente entre A y M_o (θ_1)

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 - A_y \frac{(z)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\theta_1 = \frac{M_o}{6lEI_x} (l^2 - 3b^2 - 3z^2)$$

Pendiente entre M_o y B (θ_2)

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + M_o(z-a) - A_y \frac{(z)^2}{2} \quad a \leq z \leq (b=a)=l$$

$$\theta_2 = \frac{M_o}{6lEI_x} [(l^2 - 3b^2 - 3z^2 + 6l(z-a))]$$

Para determinar la flecha en cualquier punto de la viga la dividiremos en dos tramos iguales a los utilizados para determinar la pendiente.

Flecha entre A y M_o (y_1)

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 \cdot z - A_y \frac{(z)^3}{6} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$y_1 = \frac{M_o}{6lEI_x} [(l^2 - 3b^2)z - z^3]$$

Flecha entre M_o y B (y_2)

$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 \cdot z + Mo \frac{(z-a)^2}{2} - A_y \frac{(z)^3}{6}$$

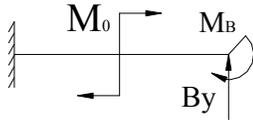
$$y_2 = \frac{Mo}{6EI_x} [3l(z-a)^2 + (l^2 - 3b^2)z - z^3]$$

$$a \leq z \leq (b+a) = l$$

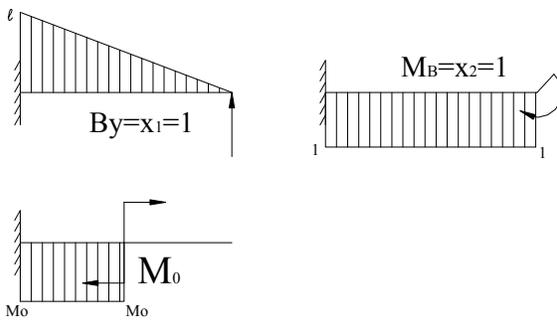
2.2.1.2 Sistema Empotrado

Para resolver este sistema procedemos igual que el anterior solo que en este caso al simplificar el sistema nos encontramos con que tenemos una ligadura suplementaria por lo que nos auxiliamos del método de Vereshiaguin.

Sistema Equivalente (Vereshiaguin).



Sistema de Cargas Unitarias.



Mf

Sistema de Ecuaciones Canónicas

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1M_0} \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-l^2}{2} \quad \delta_{22} = l$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2M_0} \quad \delta_{1M_0} = -M_0 \frac{(l+b)a}{l} \quad \delta_{2M_0} = aM_0$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$x_1 = By = aM_0 \frac{6b}{l^3}$$

$$x_2 = M_B = aM_0 \frac{(2b-a)}{l^2}$$

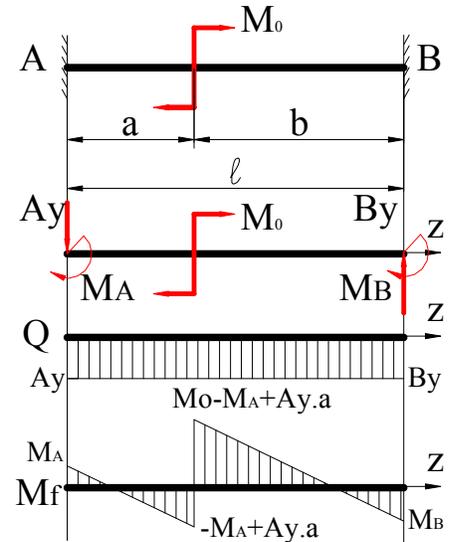


Fig. 2.7 Esquemas de sollicitación de

la viga

Empotrada, Diagramas de Q y

Sustituyendo los valores de B_y y M_B en el sistema general y realizando sumatoria de fuerzas y momento, podemos determinar A_y y M_A .

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 & \sum M_A &= 0 \\ A_y - B_y &= 0 & M_A + M_o &= M_B - B_y \cdot l = 0 \\ A_y &= B_y & M_A &= bM_o \frac{(2a-b)}{l^2} \\ A_y &= B_y & &= aM_o \frac{6b}{l^3}\end{aligned}$$

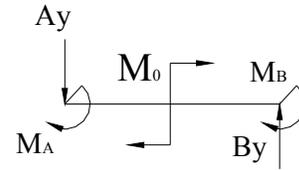


Fig. Sistema general simplificado

Para determinar la pendiente y la flecha en cualquier punto, debemos tener en cuenta que para un sistema empotrado, en ambos extremos la flecha y la pendiente son cero (En este sistema al igual que en el articulado dividiremos en dos parte la viga).

Para θ en cualquier parte entre A y Mo $\rightarrow \theta_1$

$$\begin{aligned}EI_x \theta_1 &= M_A(z) - A_y \frac{(z)^2}{2} & 0 \leq z \leq a \\ \theta_1 &= \frac{bM_o}{l^3 EI_x} [(2a-b)lz - 3az^2]\end{aligned}$$

Para θ en cualquier parte entre Mo y B $\rightarrow \theta_2$

$$\begin{aligned}EI_x \theta_2 &= M_o(z-a) + M_A(z) - A_y \frac{(z)^2}{2} & a \leq z \leq (b+a) = l \\ \theta_2 &= \frac{aM_o}{l^3 EI_x} [(l+3b)lz - 3bz^2 - l^3]\end{aligned}$$

Flecha entre A y Mo $\rightarrow y_1$

$$\begin{aligned}EI_x y_1 &= M_A \frac{(z)^2}{2} - A_y \frac{(z)^3}{6} & 0 \leq z \leq a \\ y_1 &= \frac{bz^2 M_o}{2l^3 EI_x} [(2a-b)l - 2az]\end{aligned}$$

Flecha entre Mo y B $\rightarrow y_2$

$$\begin{aligned}EI_x y_2 &= M_o \frac{(z-a)^2}{2} + M_A \frac{(z)^2}{2} - A_y \frac{(z)^3}{6} & a \leq z \leq (b+a) = l \\ y_2 &= \frac{aM_o}{2l^3 EI_x} [al^3 - 2l^3 z + (l+3b)lz^2 - 2bz^3]\end{aligned}$$

2.2.1.3 Sistema con Empotramiento Elástico.

Al igual que en los anteriores sistemas procedemos a simplificarlos, en este caso los momentos en los apoyos serán igual al producto de los momentos en los apoyos en un sistema empotrado por los coeficientes de rigidez de cada apoyo (φ_A, φ_B : Los cuales dependerán del rodamiento a utilizar). Al realizar sumatoria de fuerzas y momento tenemos que:

$$M'_A = M_{emp} \cdot \varphi_A$$

$$M'_B = M_{emp} \cdot \varphi_B$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & & \sum M_A = 0 \\ A'_Y - B'_Y = 0 & & M'_A + M'_B + M_O - B'_Y \cdot l = 0 \\ A'_Y = B'_Y & & B'_Y = \frac{M'_A + M'_B + M_O}{l} \end{aligned}$$

$$A'_Y = B'_Y = \frac{M'_A + M'_B + M_O}{l}$$

$$A'_Y = B'_Y = \frac{M_O}{l^3} [2ab(\varphi_A + \varphi_B) - b^2\varphi_A - a^2\varphi_B + l^2]$$

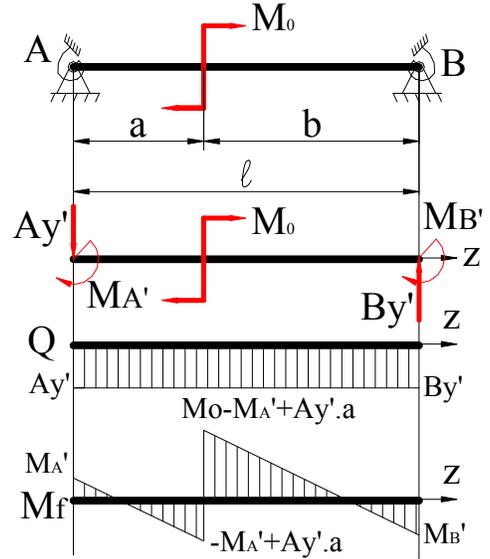


Fig. 2.8 Esquemas de Solicitación de la viga con Empotramiento Elástico, Diagramas de Q y M_f

Para el calculo de la pendiente y la flecha en cualquier punto, primero determinamos $EI_x\theta_0$

con la ecuación de la flecha para $y_B = 0$, luego con este determinamos los restantes parámetros (En este sistema al igual que en los anteriores dividiremos en dos parte la viga).

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z + M_O \frac{(z-a)^2}{2} + M'_A \frac{(z)^2}{2} - A'_Y \frac{(z)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{1}{6l} [(l^2 - 3b^2)M_O - (2M'_A - M'_B)l^2]$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{M_O}{6 \cdot l} [l^2 - 3b^2 - (2ab - b^2)\varphi_A + (2ab - a^2)\varphi_B]$$

Para θ en cualquier parte entre A y Mo $\rightarrow \theta_1$

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 + M'_A(z) - A'_Y \frac{(z)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$EI_x \theta_1 = \left[\frac{M_O}{6l} (l^2 - 3b^2 - 3z^2) - \frac{M'_A}{6l} (2l^2 - 6lz + 3z^2) + \frac{M'_B}{6l} (l^2 - 3z^2) \right]$$

$$\theta_1 = \frac{M_O}{6l^3 EI_x} \left\{ \left[(l^2 - 3b^2 - 3z^2)l^2 \right] + \left[(2ab - b^2)(6zl - 2l^2 - 3z^2)\varphi_A \right] - \left[(2ab - a^2)(3z^2 - l^2)\varphi_B \right] \right\}$$

Para θ en cualquier parte entre Mo y B $\rightarrow \theta_2$

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + M_o(z-a) + M'_A(z) - A_y \frac{(z)^2}{2} \quad a \leq z \leq (b+a) = l$$

$$EI_x \theta_2 = \left[\frac{M_o}{6l} (l^2 + 6lz - 6al - 3b^2 - 3z^2) + \frac{M'_A}{6l} (6lz - 3z^2 - 2l^2) + \frac{M'_B}{6l} (l^2 - 3z^2) \right]$$

$$\theta_2 = \frac{M_o}{6l^3 EI_x} \left\{ \left[(l^2 + 6lz - 6al - 3b^2 - 3z^2) \right]^2 + \left[(2ab - b^2)(6zl - 2l^2 - 3z^2) \varphi_A \right] + \left[(2ab - a^2)(l^2 - 3z^2) \varphi_B \right] \right\}$$

Flecha entre A y Mo $\rightarrow y_1$

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 z + M'_A \frac{(z)^2}{2} - A'_y \frac{(z)^3}{6} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$y_1 = \frac{M_o z}{6l^3 EI_x} \left\{ (l^2 - 3b^2 - z^2) \right]^2 + \left[(3zl - 2l^2 - z^2)(2ab - b^2) \varphi_A \right] + \left[(l^2 - z^2)(2ab - a^2) \varphi_B \right] \right\}$$

Flecha entre Mo y B $\rightarrow y_2$

$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 z + M_o \frac{(z-a)^2}{2} + M'_A \frac{(z)^2}{2} - A'_y \frac{(z)^3}{6} \quad a \leq z \leq (b+a) = l$$

$$y_2 = \frac{M_o}{6l^3 EI_x} \left\{ \left[3a^2 l - (2l^2 + 3a^2)z + 3lz^2 - z^3 \right]^2 + \left[(3zl - 2l^2 - z^2)(2ab - b^2)z \varphi_A \right] + \left[(l^2 - z^2)(2ab - a^2)z \varphi_B \right] \right\}$$

2.2.2 Caso II Viga con Carga (P) Aplicado en el centro de la longitud (l)

2.2.2.1 Sistema Articulado

Para solucionar el sistema primero simplificamos el mismo, como no existen ligaduras suplementarias entonces pasamos a realizar sumatoria de fuerzas a lo largo del eje "y" y sumatoria de momentos en el punto "A".

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & & \sum M_A = 0 \\ P - A_y - B_y = 0 & & \frac{Pl}{2} - B_y \cdot l = 0 \\ A_y = P - B_y & & B_y = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

$$A_y = B_y = \frac{P}{2}$$

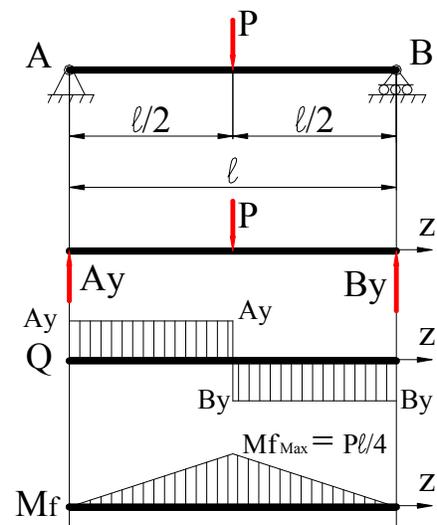


Fig. 2.9 Esquemas de sollicitación de

la viga

Articulada, Diagramas de Q y Mf

Después de tener construidos los diagramas de cortante “Q” y momento flector “M” podemos determinar la flecha “y” y la pendiente “θ” a lo largo de la viga.

Como primer paso se debe calcular la flecha en el extremo B de la viga ya que en este y en el extremo A la flecha es cero y por lo tanto podremos determinar θ_0 con la ayuda del método de los parámetros de origen.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 \cdot l = -\frac{Pl^3}{12} + \frac{Pl^3}{48} = -\frac{(4-1)Pl^3}{48}$$

$$EI_x \theta_0 = -\frac{Pl^3}{16}$$

Segundo después de haber obtenido $EI_x \theta_0$ podemos obtener θ en cualquier punto de la viga, analizando la misma en dos tramos:

3. Tramo del punto A hasta el punto de aplicación de P.
4. Tramo del punto de aplicación de P hasta el punto B.

Pendiente entre A y P (θ_1)

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{P}{16EI_x} (4z^2 - l^2)$$

Pendiente entre P y B (θ_2)

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^2}{2} \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{P}{16EI_x} (8zl - 3l^2 - 4z^2)$$

Para determinar la flecha en cualquier punto de la viga la dividiremos en dos tramos iguales a los utilizados para determinar la pendiente.

Flecha entre A y P (y_1)

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 \cdot z + A_Y \frac{(z)^3}{6} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$y_1 = \frac{P}{48EI_x} (4z^2 - 3l^2)$$

Flecha entre P y B (y_2)

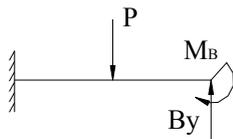
$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 \cdot z + A_Y \frac{(z)^3}{6} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^3}{6} \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{P}{48EI_x} (l^3 - 9l^2 + 12lz^2 - 4z^3)$$

2.2.2.2 Sistema Empotrado

Para resolver este sistema procedemos igual que el anterior solo que en este caso al simplificar el sistema nos encontramos con que tenemos una ligadura suplementaria por lo que nos auxiliamos del método de Vereshiaguin.

Sistema Equivalente (Vereshiaguin).



Sistema de Cargas Unitarias.

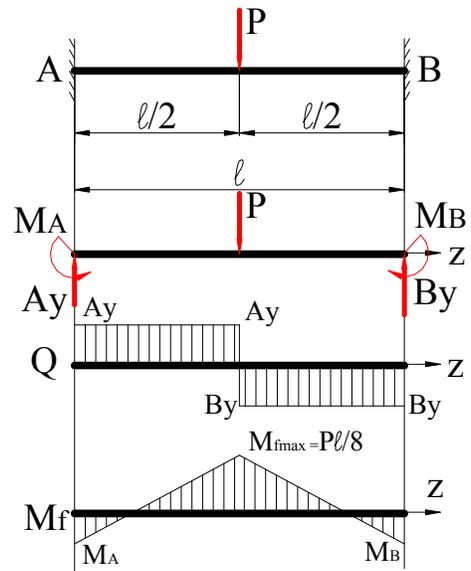
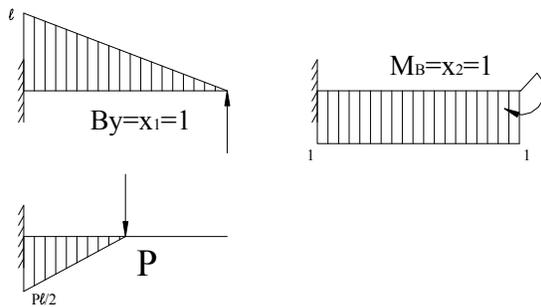


Fig. 2.10 Esquemas de sollicitación de la viga

Empotrada, Diagramas de Q y

Mf

Sistema de Ecuaciones Canónicas

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1P} \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-l^2}{2} \quad \delta_{22} = l$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2P} \quad \delta_{1P} = -\frac{5Pl^3}{48} \quad \delta_{2P} = \frac{Pl^2}{8}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$x_1 = B_y = \frac{P}{2}$$

$$x_2 = M_B = \frac{Pl}{8}$$

Sustituyendo los valores de B_y y M_B en el sistema general y realizando sumatoria de fuerzas y momento, podemos determinar A_y y M_A .

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_A = 0$$

$$P - A_y - B_y = 0 \qquad \frac{Pl}{2} + M_B - M_A - B_y \cdot l = 0$$

$$A_y = P - B_y \qquad M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$$

$$A_y = B_y = \frac{P}{2}$$

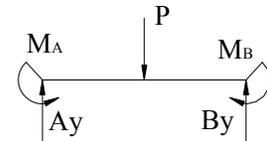


Fig. Sistema general

simplificado

Para determinar la pendiente y la flecha en cualquier punto, debemos tener en cuenta que para un sistema empotrado, en ambos extremos la flecha y la pendiente son cero (En este sistema al igual que en el articulado dividiremos en dos parte la viga).

Para θ en cualquier parte entre A y P $\rightarrow \theta_1$

$$EI_x \theta_1 = A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A z \qquad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{Pz}{8EI_x} (2z - l)$$

Para θ en cualquier parte entre P y B $\rightarrow \theta_2$

$$EI_x \theta_2 = A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A (z) - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^2}{2} \qquad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{P}{8EI_x} (3zl - 2z^2 - l^2)$$

Flecha entre A y P $\rightarrow y_1$

$$EI_x y_1 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{z^2}{2} \qquad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$y_1 = \frac{Pz^2}{48EI_x} (4z - 3l)$$

Flecha entre P y B $\rightarrow y_2$

$$EI_x y_2 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{(z)^2}{2} - P \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{P}{48EI_x} (l^3 - 6l^2 z + 9lz^2 - 4z^3)$$

2.2.2.3 Sistema con Empotramiento Elástico.

Al igual que en los anteriores sistemas procedemos a simplificarlos, en este caso los momentos en los apoyos serán igual al producto de los momentos en los apoyos en un sistema empotrado por los coeficientes de rigidez de cada apoyo (φ_A , φ_B : Los cuales dependerán del rodamiento a utilizar). Al realizar sumatoria de fuerzas y momento tenemos que:

$$M'_A = M_{emp} \cdot \varphi_A$$

$$M'_B = M_{emp} \cdot \varphi_B$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$P - A'_Y - B'_Y = 0$$

$$M'_B - M'_A + \frac{Pl}{2} - B'_Y \cdot l = 0$$

$$A'_Y = P - B'_Y$$

$$B'_Y = \frac{P}{8}(\varphi_B - \varphi_A + 4)$$

$$A'_Y = \frac{P}{8}(\varphi_A - \varphi_B + 4)$$

$$M_{f \max} = A'_Y \frac{l}{2} - M'_A$$

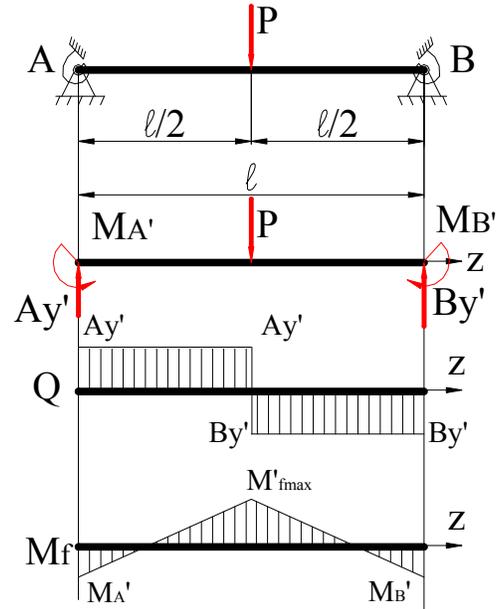


Fig. 2.11 Esquemas de Solicitación de la viga Empotramiento Elástico, Diagramas de Q y Mf

la viga Empotramiento Elástico, Diagramas de Q y Mf

Para el calculo de la pendiente y la flecha en cualquier punto, primero determinamos $EI_x \theta_0$ con la ecuación de la flecha para $y_B = 0$, luego con este determinamos los restantes parámetros (En este sistema al igual que en los anteriores dividiremos en dos parte la viga).

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z - M'_A \frac{(z)^2}{2} + A'_Y \frac{(z)^3}{6} - P \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{Pl^2}{48}(2\varphi_A + \varphi_B - 3)$$

Para θ en cualquier parte entre A y P $\rightarrow \theta_l$

$$EI_x \theta_l = EI_x \theta_0 + A'_Y \frac{(z)^2}{2} - M'_A (z) \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$\theta_l = \frac{P}{48EI_x} \left[(2l^2 - 6lz + 3z^2) \varphi_A + (l^2 - 3z^2) \varphi_B + (4z^2 - l^2) \beta \right]$$

Para θ en cualquier parte entre P y B $\rightarrow \theta_2$

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} - M'_A(z) - P \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^2}{2} \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{P}{48EI_x} \left[(2l^2 - 6lz + 3z^2) \varphi_A + (l^2 - 3z^2) \varphi_B + (8zl - 4z^2 - 3l^2) \beta \right]$$

Flecha entre A y P $\rightarrow y_1$

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 z + A_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$y_1 = \frac{Pz}{48EI_x} \left[(2l^2 + z^2 - 3lz) \varphi_A + (l^2 - z^2) \varphi_B + (4z^2 - 3l^2) \beta \right]$$

Flecha entre P y B $\rightarrow y_2$

$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 z + A_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} - P \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{P}{48EI_x} \left[(2l^2 + z^2 - 3lz) z \varphi_A + (l^2 - z^2) z \varphi_B + (l^3 - 9l^2 z + 12lz^2 - 4z^3) \beta \right]$$

2.2.3 Caso III Viga con Carga (P) Aplicado en un punto cualquiera a una distancia (a) del apoyo (A).

2.2.3.1 Sistema Articulado

Para solucionar el sistema primero simplificamos el mismo realizando sumatoria de fuerzas a lo largo del eje "y" y sumatoria de momentos en el punto "A".

$$\sum F_y = 0$$

$$P - A_y - B_y = 0$$

$$A_y = P - B_y$$

$$A_y = \frac{Pb}{l}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$Pa - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{Pa}{l}$$

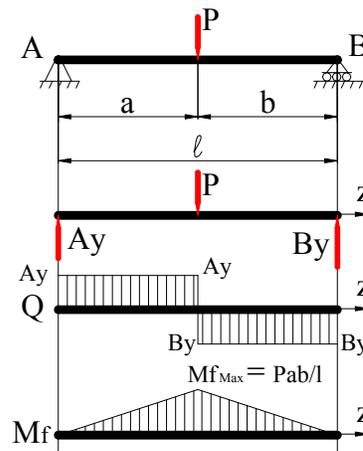


Fig. 2.12 Esquemas de sollicitación de la viga Articulada, Diagramas de

Q y Mf

Después de tener construidos los diagramas de cortante “Q” y momento flector “M” podemos a determinar la flecha “y” y la pendiente “θ” a lo largo de la viga.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} - \frac{P(z-a)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 \cdot l = \frac{P(l-a)^3}{6} - \frac{Pbl^3}{6l}$$

$$EI_x \theta_0 = -\frac{Pb}{6l}(b^2 - l^2)$$

Segundo después de haber obtenido $EI_x \theta_0$ podemos obtener θ en cualquier punto de la viga, analizando la misma en dos tramos:

Pendiente entre A y P (θ_1)

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\theta_1 = \frac{Pb}{6EI_x}(b^2 - l^2 + 3z^2)$$

Pendiente entre P y B (θ_2)

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} - \frac{P(z-a)^2}{2} \quad a \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{P}{6EI_x} [3a(-z^2 + 2zl - al) + b(b^2 - l^2)]$$

Para determinar la flecha en cualquier punto de la viga la dividiremos en dos tramos iguales a los utilizados para determinar la pendiente.

Flecha entre A y P (y_1)

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$y_1 = \frac{Pbz}{6EI_x}(b^2 - l^2 + z^2)$$

Flecha entre P y B (y_2)

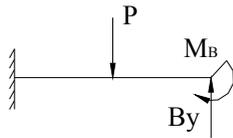
$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} - \frac{P(z-a)^3}{6} \quad a \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{P}{6EI_x} \left[zb(b^2 - l^2 + z^2) - l(z-a)^3 \right]$$

2.2.3.2 Sistema Empotrado

Para resolver este sistema procedemos igual que el anterior solo que en este caso al simplificar el sistema nos encontramos con que tenemos una ligadura suplementaria por lo que nos auxiliamos del método de Vereshiaguin.

Sistema Equivalente (Vereshiaguin).



Sistema de Cargas Unitarias.

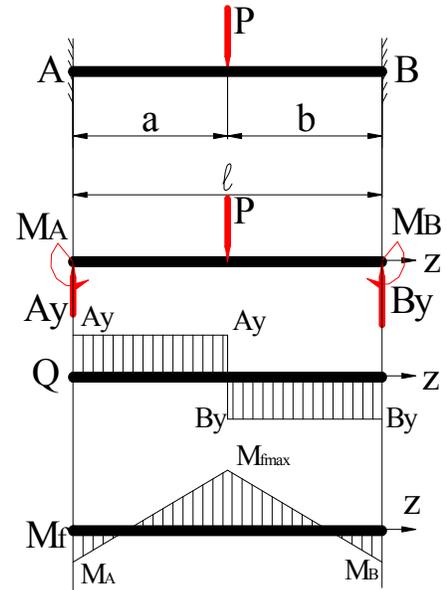
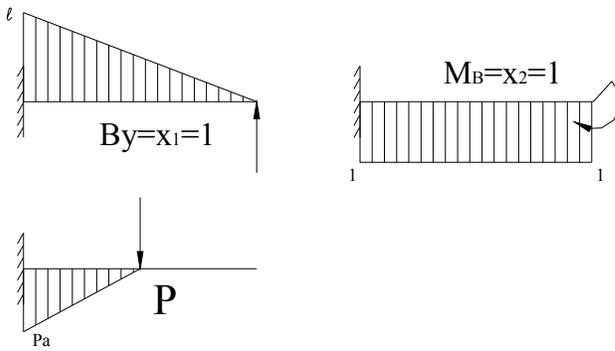


Fig. 2.13 Esquemas de sollicitación de Empotrada, Diagramas de Q y

la viga

Mf

Sistema de Ecuaciones Canónicas

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1P} \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^2}{2} \quad \delta_{22} = l$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2P} \quad \delta_{1P} = -\frac{Pa^2}{6}(2l+b) \quad \delta_{2P} = \frac{Pa^2}{2}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$x_1 = By = Pa^2 \frac{(3b+a)}{l^3}$$

$$x_2 = M_B = Pa^2 \frac{b}{l^2}$$

Sustituyendo los valores de B_y y M_B en el sistema general y realizando sumatoria de fuerzas y momento, podemos determinar A_y y M_A .

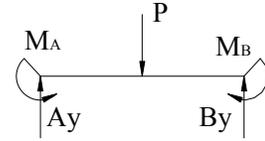
$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$P - A_y - B_y = 0 \quad Pa + M_B - M_A - B_y \cdot l = 0$$

$$A_y = P - B_y \quad M_A = Pb^2 \frac{a}{l^2}$$

$$A_y = Pb^2 \frac{(3a+b)}{l^3}$$

$$M_{f_{\max}} = 2P \frac{b^2 a^2}{l^3}$$



Para determinar la pendiente y la flecha en cualquier punto, debemos tener en cuenta que para un sistema empotrado, en ambos extremos la flecha y la pendiente son cero (En este sistema al igual que en el articulado dividiremos en dos parte la viga).

Para θ en cualquier parte entre A y P $\rightarrow \theta_1$

$$EI_x \theta_1 = A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A z \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\theta_1 = \frac{Pb^2 z}{2l^3 EI_x} [(3a+b)z - 2al]$$

Para θ en cualquier parte entre P y B $\rightarrow \theta_2$

$$EI_x \theta_2 = A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A (z) - \frac{P(z-a)^2}{2} \quad a \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{Pa^2}{2l^3 EI_x} [-z^2(a+3b) + 2lz(a+2b) - l^3]$$

Flecha entre A y P $\rightarrow y_1$

$$EI_x y_1 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{z^2}{2} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$y_1 = \frac{Pb^2 z^2}{6l^3 EI_x} [(3a+b)z - 3al]$$

Flecha entre P y B $\rightarrow y_2$

$$EI_x y_2 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{(z)^2}{2} - P \frac{(z-a)^3}{6} \quad a \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{Pa^2}{6l^3 EI_x} [-z^3(a+3b) + 3lz^2 + al^3]$$

2.2.3.3 Sistema con Empotramiento Elástico.

Al igual que en los anteriores sistemas procedemos a simplificarlos, en este caso los momentos en los apoyos serán igual al producto de los momentos en los apoyos en un sistema empotrado por los coeficientes de rigidez de cada apoyo (φ_A, φ_B : Los cuales dependerán del rodamiento a utilizar). Al realizar sumatoria de fuerzas y momento tenemos que:

$$M'_A = M_{emp} \cdot \varphi_A$$

$$M'_B = M_{emp} \cdot \varphi_B$$

$$\sum Fy = 0$$

$$P - A'_Y - B'_Y = 0$$

$$A'_Y = P - B'_Y$$

$$A'_Y = \frac{P}{l^3} (ab^2\varphi_A - a^2b\varphi_B - al^2 + l^3)$$

$$M_{f\max} = A'_Y a - M'_A$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M'_B - M'_A + Pa - B'_Y \cdot l = 0$$

$$B'_Y = \frac{Pa}{l^3} (ab\varphi_B - b^2\varphi_A + l^2)$$

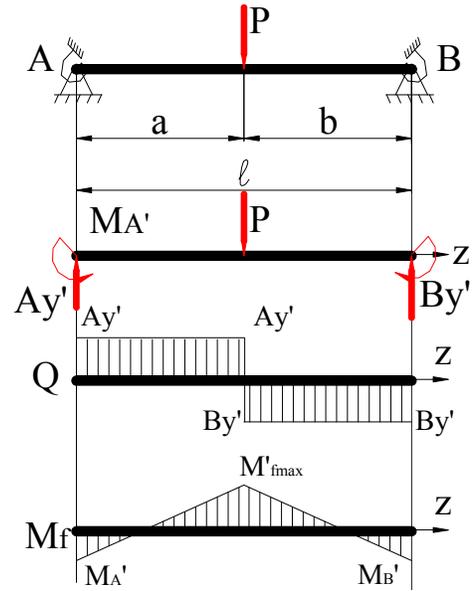


Fig. 2.14 Esquemas de Solicitación de la viga con Empotramiento Elástico, Diagramas de Q y Mf

Para el calculo de la pendiente y la flecha en cualquier punto, primero determinamos $EI_x\theta_0$ con la ecuación de la flecha para $y_B = 0$, luego con este determinamos los restantes parámetros (En este sistema al igual que en los anteriores dividiremos en dos parte la viga).

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z - M'_A \frac{(z)^2}{2} + A'_Y \frac{(z)^3}{6} - P \frac{(z-a)^3}{6} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{P}{6l} [2ab^2\varphi_A + a^2b\varphi_B - ab(a+2b)]$$

Para θ en cualquier parte entre A y P $\rightarrow \theta_1$

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 + A'_Y \frac{(z)^2}{2} - M'_A (z) \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\theta_1 = \frac{Pb}{6l^3 EI_x} \left\{ ab\varphi_A (2l^3 + 3z^2) + a^2\varphi_B (l^3 - 3z^2) + l [3lz^2 - 6abz - al(a+2b)] \right\}$$

Para θ en cualquier parte entre P y B $\rightarrow \theta_2$

$$EI_x \theta_2 = EI_x \theta_0 + A'_y \frac{(z)^2}{2} - M'_A(z) - P \frac{(z-a)^2}{2} \quad a \leq z \leq l$$

$$\theta_2 = \frac{Pa}{6l^3 EI_x} \left[b^2 (2l^2 - 6lz + 3z^2) \varphi_A + ab(l^2 - 3z^2) \varphi_B - 3al^2 z^2 + 6al^3 z - al^2(3al + ab + 2b^2) \right]$$

Flecha entre A y P $\rightarrow y_1$

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 z + A'_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} \quad 0 \leq z \leq a$$

$$y_1 = \frac{Pzb}{6l^3 EI_x} \left[ab(2l^2 + z^2 - 3lz) \varphi_A + a^2(l^2 - z^2) \varphi_B + l^2(z^2 - 2ab - a^2) \right]$$

Flecha entre P y B $\rightarrow y_2$

$$EI_x y_2 = EI_x \theta_0 z + A'_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} - P \frac{(z-a)^3}{6} \quad a \leq z \leq l$$

$$y_2 = \frac{Pa}{6l^3 EI_x} \left\{ b^2 z(2l^2 + z^2 - 3lz) \varphi_A + 9bz(l^2 - z^2) \varphi_B - l^2 \left[z^3 - 3lz^2 + z(ab + 2b^2 + 3al) - a^2 l \right] \right\}$$

2.2.4 Caso IV Viga con Carga (q) aplicado a lo largo de la viga uniformemente

2.2.4.1 Sistema Articulado

Para solucionar el sistema primero simplificamos el mismo, como no existen ligaduras suplementarias entonces pasamos a realizar sumatoria de fuerzas a lo largo del eje "y" y sumatoria de momentos en el punto "A".

$$\sum F_y = 0$$

$$ql - A_y - B_y = 0$$

$$A_y = P - B_y$$

$$A_y = B_y = \frac{ql}{2}$$

$$M_{f_{\max}} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{ql^2}{2} - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{2}$$

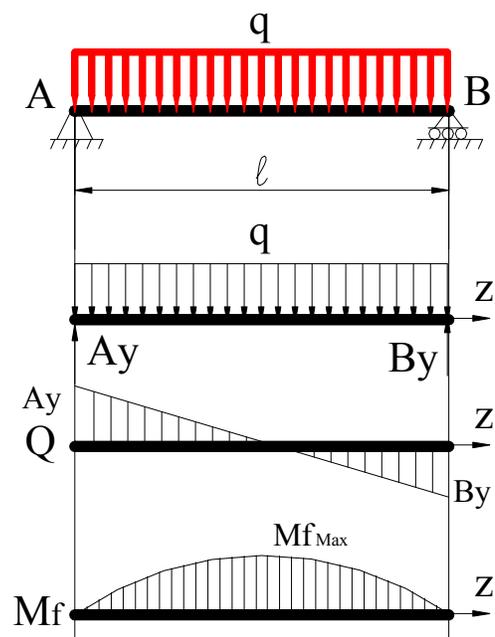


Fig. 2.15 Esquemas de sollicitación de la viga Articulada, Diagramas de Q y Mf

Después de tener construidos los diagramas de cortante “Q” y momento flector “M” podemos a determinar la flecha “y” y la pendiente “θ” a lo largo de la viga.

$$EI_X y_B = EI_X \theta_0 \cdot z + A_Y \frac{(z)^3}{6} - \frac{q(z)^4}{24} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_X \theta_0 \cdot l = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12}$$

$$EI_X \theta_0 = -\frac{ql^4}{24}$$

Determinación de la flecha y la pendiente.

Pendiente entre A y B (θ_l)

$$EI_X \theta_1 = EI_X \theta_0 + A_Y \frac{(z)^2}{2} - q \frac{z^3}{6} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\theta_1 = \frac{q}{24EI_X} (-l^3 + 6lz^2 - 4z^3)$$

Flecha entre A y B (y_1)

$$EI_X y_1 = EI_X \theta_0 \cdot z + A_Y \frac{(z)^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz}{24EI_X} (-l^3 + 2lz^2 - z^3)$$

2.2.4.2 Sistema Empotrado

Para resolver este sistema procedemos igual que el anterior solo que en este caso al simplificar el sistema nos encontramos con que tenemos una ligadura suplementaria por lo que nos auxiliamos del método de Vereshiaguin.

Sistema de Cargas Unitarias.

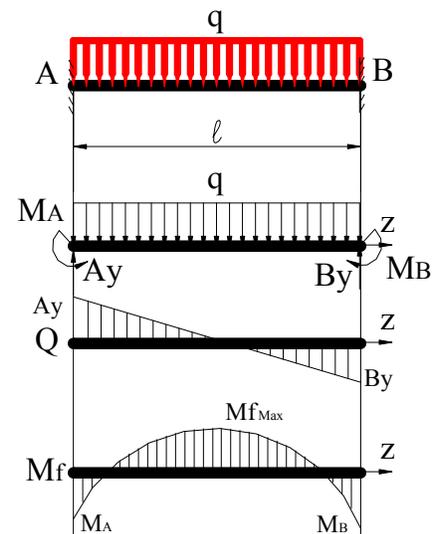
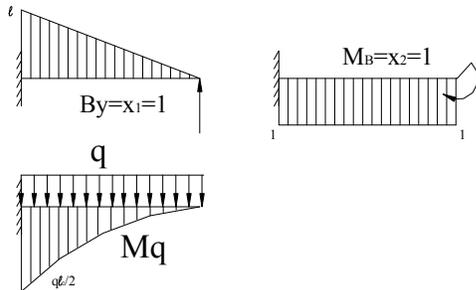


Fig. 2.16 Esquemas de sollicitación de la viga Empotrada, Diagramas de Q y Mf

Sistema de Ecuaciones Canónicas

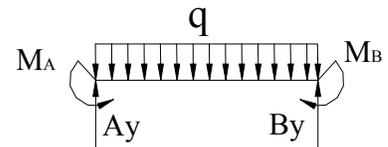
$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 &= -\delta_{1P} & \delta_{11} &= \frac{l^3}{3} & \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{-l^2}{2} & \delta_{22} &= l \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 &= -\delta_{2P} & \delta_{1P} &= -\frac{ql^4}{8} & \delta_{2P} &= \frac{ql^3}{6} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= B_y = \frac{ql}{2} \\ x_2 &= M_B = \frac{ql^2}{12} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de B_y y M_B en el sistema general y realizando sumatoria de fuerzas y momento, podemos determinar A_y y M_A .

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \quad \sum M_A = 0 \\ ql - A_y - B_y = 0 & \quad \frac{ql^2}{2} + M_B - M_A - B_y \cdot l = 0 \\ A_y = ql - B_y & \quad M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \\ A_y = B_y = \frac{ql}{2} & \\ M_{f/2} &= \frac{ql^2}{24} \end{aligned}$$



Sistema general

simplificado

Para determinar la pendiente y la flecha en cualquier punto, debemos tener en cuenta que para un sistema empotrado, en ambos extremos la flecha y la pendiente son.

Para θ en cualquier parte entre A y B $\rightarrow \theta_l$

$$\begin{aligned} EI_x \theta_l &= A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A z - q \frac{z^3}{6} & 0 \leq z \leq l \\ \theta_l &= \frac{qz}{12EI_x} (3lz - l^2 - 2z^2) \end{aligned}$$

Flecha entre A y B $\rightarrow y_l$

$$EI_x y_1 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{z^2}{2} - q \frac{z^4}{24} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz^2}{24EI_x} (2lz - l^2 - z^2)$$

2.2.4.3 Sistema con Empotramiento Elástico.

Al igual que en los anteriores sistemas procedemos a simplificarlos, en este caso los momentos en los apoyos serán igual al producto de los momentos en los apoyos en un sistema empotrado por los coeficientes de rigidez de cada apoyo (φ_A, φ_B : Los cuales dependerán del rodamiento a utilizar). Al realizar sumatoria de fuerzas y momento tenemos que:

$$M'_A = M_{emp} \cdot \varphi_A$$

$$M'_B = M_{emp} \cdot \varphi_B$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$ql - A'_Y - B'_Y = 0 \quad M'_B - M'_A + \frac{ql^2}{2} - B'_Y \cdot l = 0$$

$$A'_Y = ql - B'_Y \quad B'_Y = \frac{ql}{24}(3 - \varphi_B - \varphi_A)$$

$$A'_Y = \frac{ql}{12}(\varphi_A - \varphi_B + 6)$$

$$M_{f \max} = A'_Y \frac{l}{2} - M'_A - \frac{ql^2}{8}$$

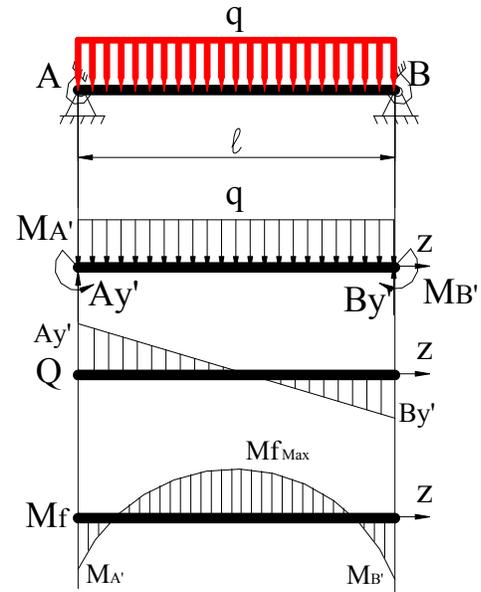


Fig. 2.17 Esquemas de Solicitación de la viga con Empotramiento Elástico, Diagramas de \$Q\$ y \$M_f\$

Para el calculo de la pendiente y la flecha en cualquier punto, primero determinamos \$EI_x \theta_0\$ con la ecuación de la flecha para \$y_B=0\$, luego con este determinamos los restantes.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z - M'_A \frac{(z)^2}{2} + A'_Y \frac{(z)^3}{6} - q \frac{(z)^4}{24} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{ql^3}{72}(2\varphi_A + \varphi_B - 3)$$

Para \$\theta\$ en cualquier parte entre A y B \$\rightarrow \theta_l\$

$$EI_x \theta_l = EI_x \theta_0 + A'_Y \frac{(z)^2}{2} - M'_A(z) - q \frac{z^3}{6} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\theta_l = \frac{q}{72EI_x} [2(2l^2 - 6lz + 3z^2)\varphi_A + (l^2 - 3z^2)\varphi_B + (6lz^2 - l^3 - 4z^3)\beta]$$

Flecha entre A y B \$\rightarrow y_l\$

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 z + A'_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} - q \frac{z^4}{24} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz}{72EI_x} \left[(2l^2 + z^2 - 3lz) \varphi_A + (l^2 - z^2) \varphi_B + 3(2lz^2 - z^3 - l^3) \right]$$

2.2.5 Caso V Viga con Carga (q) aplicado a lo largo de la viga no uniforme.

2.2.5.1 Sistema Articulado

Para solucionar el sistema primero simplificamos el mismo, como no existen ligaduras suplementarias entonces pasamos a realizar sumatoria de fuerzas a lo largo del eje “y” y sumatoria de momentos en el punto “A”.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$\frac{ql}{2} - A_y - B_y = 0 \quad \frac{ql^2}{3} - B_y \cdot l = 0$$

$$A_y = \frac{ql}{2} - B_y \quad B_y = \frac{ql}{3}$$

$$A_y = \frac{ql}{6}$$

$$M_{f_{\max}} = ql^2$$

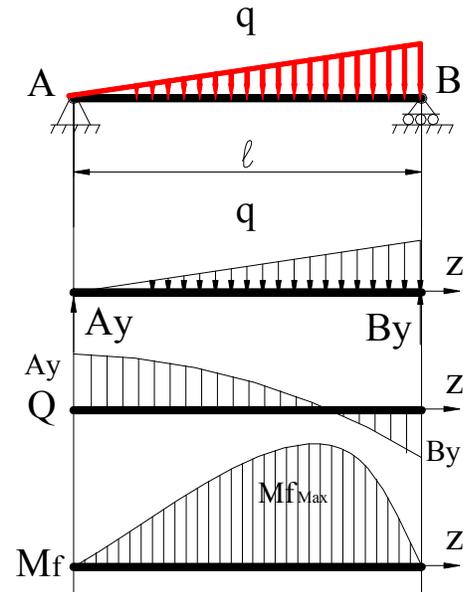


Fig. 2.18 Esquemas de sollicitación de la viga Articulada, Diagramas de Q y Mf

Después de tener construidos los diagramas de cortante “Q” y momento flector “M” podemos a determinar la flecha “y” y la pendiente “θ” a lo largo de la viga.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} - \frac{k(z)^5}{120} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 \cdot l = \frac{ql^4}{36} - \frac{ql^4}{120}$$

$$EI_x \theta_0 = -\frac{ql^4}{360}$$

Determinación de la flecha y la pendiente.

Pendiente entre A y B (θ_l)

$$EI_x \theta_1 = EI_x \theta_0 + A_y \frac{(z)^2}{2} - k \frac{z^4}{24} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\theta_1 = \frac{q}{360lEI_x} (-13l^4 + 180l^2 z^2 - 15z^4)$$

Flecha entre A y B (y_1)

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 \cdot z + A_y \frac{(z)^3}{6} - k \frac{z^5}{120} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz}{360lEI_x} (-13l^4 + 10l^2 z^2 - 3z^4)$$

2.2.4.2 Sistema Empotrado

Para resolver este sistema procedemos igual que el anterior solo que en este caso al simplificar el sistema nos encontramos con que tenemos una ligadura suplementaria por lo que nos auxiliamos del método de Vereshiaguin.

Sistema de Cargas Unitarias.

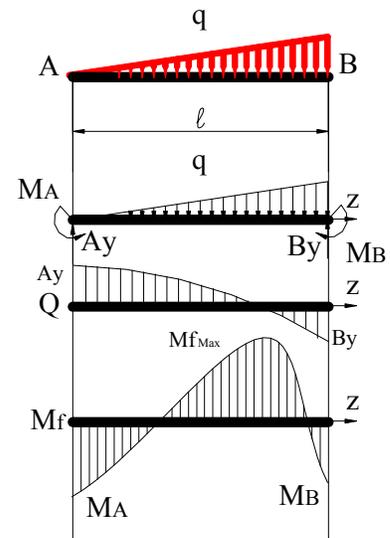
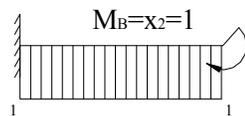
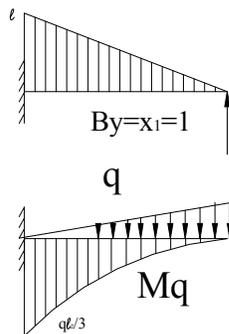


Fig. 2.19 Esquemas de sollicitación de la viga

Empotrada, Diagramas de Q y Mf

Sistema de Ecuaciones Canónicas

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1P} \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-l^2}{2} \quad \delta_{22} = l$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2P} \quad \delta_{1P} = -\frac{ql^4}{12} \quad \delta_{2P} = \frac{ql^3}{9}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$x_1 = B_y = \frac{7ql}{20}$$

$$x_2 = M_B = \frac{ql^2}{20}$$

Sustituyendo los valores de B_y y M_B en el sistema general y realizando sumatoria de fuerzas y momento, podemos determinar A_y y M_A .

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_A = 0$$

$$\frac{ql}{2} - A_y - B_y = 0 \qquad \frac{ql^2}{3} + M_B - M_A - B_y \cdot l = 0$$

$$A_y = \frac{ql}{2} - B_y \qquad M_A = M_B = \frac{ql^2}{30}$$

$$A_y = \frac{3ql}{20}$$

$$M_{f/2} = \frac{ql^2}{46.6}$$

Para determinar la pendiente y la flecha en cualquier punto, debemos tener en cuenta que para un sistema empotrado, en ambos extremos la flecha y la pendiente son.

Para θ en cualquier parte entre A y B $\rightarrow \theta_l$

$$EI_x \theta_1 = A_y \frac{(z)^2}{2} - M_A z - k \frac{z^4}{24} \qquad 0 \leq z \leq l$$

$$\theta_1 = \frac{qz}{120EI_x} (9l^2 z - 4l^3 - 5z^3)$$

Flecha entre A y B $\rightarrow y_l$

$$EI_x y_1 = A_y \frac{(z)^3}{6} - M_A \frac{z^2}{2} - k \frac{z^5}{120} \qquad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz^2}{120EI_x} (3l^2 z - 2l^3 - z^3)$$

2.2.4.3 Sistema con Empotramiento Elástico.

Al igual que en los anteriores sistemas procedemos a simplificarlos, en este caso los momentos en los apoyos serán igual al producto de los momentos en los apoyos en un sistema empotrado por los coeficientes de rigidez de cada apoyo (φ_A, φ_B : Los cuales dependerán del rodamiento a utilizar). Al realizar sumatoria de fuerzas y momento tenemos que:

$$M'_A = M_{emp} \cdot \varphi_A$$

$$M'_B = M_{emp} \cdot \varphi_B$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{ql}{2} - A'_Y - B'_Y = 0$$

$$M'_B - M'_A + \frac{ql^2}{2} - B'_Y \cdot l = 0$$

$$A'_Y = \frac{ql}{2} - B'_Y$$

$$B'_Y = \frac{ql}{60} (20 + \varphi_B - 2\varphi_A)$$

$$A'_Y = \frac{ql}{60} (2\varphi_A - 3\varphi_B + 10)$$

$$M_{f \max} \frac{137l}{250} = 137 A'_Y \frac{l}{250} - M'_A - \frac{18769ql^2}{62500}$$

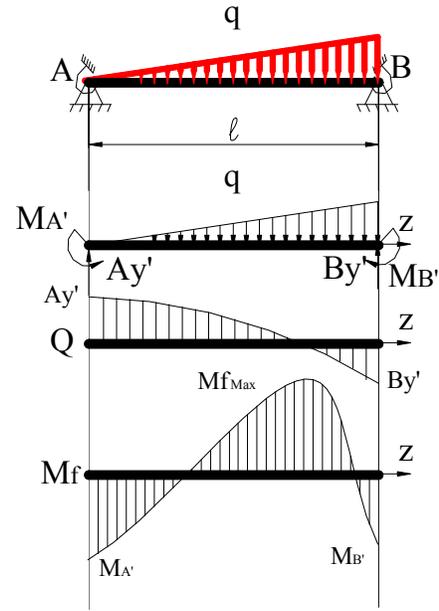


Fig. 2.20 Esquemas de Sollicitación de la viga con Empotramiento Elástico, Diagramas de Q y M_f

Q y M_f

Para el calculo de la pendiente y la flecha en cualquier punto, primero determinamos $EI_x \theta_0$ con la ecuación de la flecha para $y_B = 0$, luego con este determinamos los restantes.

$$EI_x y_B = EI_x \theta_0 \cdot z - M'_A \frac{(z)^2}{2} + A'_Y \frac{(z)^3}{6} - k \frac{(z)^5}{120} = 0 \quad \text{para } z = l$$

$$EI_x \theta_0 = \frac{ql^3}{360} (4\varphi_A + 3\varphi_B - 7)$$

Para θ en cualquier parte entre A y B $\rightarrow \theta_l$

$$EI_x \theta_l = EI_x \theta_0 + A'_Y \frac{(z)^2}{2} - M'_A (z) - k \frac{z^4}{24} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\theta_l = \frac{q}{360EI_x} \left[2l^2 (2l^2 - 6lz + 3z^2) \varphi_A + (l^2 - 3z^2) 3l^2 \varphi_B - 7ql^4 \right] + 30l^2 z^2 + 15z^4$$

Flecha entre A y B $\rightarrow y_l$

$$EI_x y_1 = EI_x \theta_0 z + A'_y \frac{(z)^3}{6} - M'_A \frac{(z)^2}{2} - k \frac{z^5}{120} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$y_1 = \frac{qz}{360EI_x} \left[(2l^2 + z^2 - 3lz) 2l^2 \varphi_A + (l^2 - z^2) 3l^2 \varphi_B - 7l^4 + 10l^2 z^2 - 3z^4 \right]$$

Conclusiones

1. Del análisis bibliográfico realizado se pudo concluir lo siguiente:

- En la Literatura de Mecánica Teórica sólo se hace referencia a tres tipos de Apoyos: el Apoyo Articulado Móvil, el Apoyo Articulado Fijo y el Empotramiento Perfectamente Rígido.
- Algunos autores de la Mecánica de Materiales y del Diseño de Elementos de Máquinas contemplan la posibilidad de que las ligaduras establecidas por los Apoyos Articulado no sean perfectamente rígidas, o sea, los desplazamientos en la dirección de las reacciones de estos apoyos no sean cero. Estos Apoyos se denominan Apoyos Articulado Elásticos.
- Un tipo de Esquema de Análisis que contempla la rigidez real del soporte es la Fundación Elástica, pero este es aplicable sólo cuando el elemento esta apoyado en toda una superficie o a lo largo de una línea.
- Algunos autores que enfrentan el Diseño de Elementos de Máquinas introducen un conjunto de consideraciones prácticas que conducen en cierta medida a tener en cuenta la rigidez de los soportes, pero las mismas están basadas en criterios empíricos y constituyen simplificaciones poco rigurosas desde el punto de vista técnico.

2. Se estableció la Metodología General para la construcción de los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores en árboles con empotramiento parcialmente elástico.

3. Se aplicó la Metodología para los cinco casos clásicos de carga: Momento concentrado en un punto cualquiera de la luz, carga concentrada en el centro de la luz, carga concentrada en un punto cualquiera de la luz, carga uniformemente distribuida y no uniformemente distribuida, demostrándose teóricamente la factibilidad de construir los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores y calcular los desplazamientos en árboles para los cuales se conocen los coeficientes de rigidez de los apoyos.

Recomendaciones

1. Realizar la demostración de más formas de cargas, así como explotar las posibilidades de los esquemas de análisis para árboles partidos y con más de dos apoyos.
2. Justificar experimentalmente la obtención de nuevos coeficientes de rigidez para otros cojinetes de rodamientos.

Bibliografía

1. Anuriev, V.I. Manual del Constructor de Maquinarias..Moscú: Editorial MIR, 1987. —584p
2. Arquero Esteban, Francisco. Cálculo Práctico del Hormigón Armado. Tomo I. Barcelona: Editorial CEAC, S.A, 1970. --- 237p
3. Arzola N. Esquema de análisis de los árboles de los molinos de caña de azúcar y aplicación de la Mecánica de la Fractura en la determinación del período entre inspecciones. Tesis en opción del Grado Científico de Doctor en Ciencias Técnicas. 2003.
4. Bedford A., Fowler W. Engineering Mechanics. Statics. Third Edition, New Jersey: Prentice Hall, 2002.--583 p.
5. Beer F.P., Jonhston E.R. Mecánica Vectorial para Ingenieros. 2T. México: Mc Graw – Hill, 1984.—972 p.
6. _____Mecánica de los Materiales. 2ª. Ed. Colombia: Mc Graw – Hill, 1993.—738 p.
7. Birger I.A., Shorr B.F., Shneiderovich R.M. Cálculo de Resistencia de Piezas de Máquinas. Moscú: Editorial Mashinostroenie, 1966.-- 616 p.
8. Dobrovolski V. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial MIR, 1970.--692 p.
9. Faires V.M./ Diseño de Elementos de Máquinas. México : Editorial UTEHA, 1985.-- 802 p.
10. Feodosiev V.I. Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR, 3ª Ed.1985.—583 p.
11. _____Diez conferencias sobre Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR, 1993.—179 p.
12. Fernández Levy, Gilda S. Resistencia de Materiales. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.—511p.

13. Fitzgerald F. Mecánica de Materiales. México: Editorial Alfaomega S.A. de C.V., 1996.--560 p.
14. Fogiel M. Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids. New Jersey: Editorial REA, 1988 .—1140 p.
15. Goytisoló R. Diseño de Elementos de Máquina. Las Villas: Editado por el Dpto. Mecánica Teórica y Aplicada. UCLV, 1973.--188p.
16. Goytisoló R., Cabello J.J. Hernández R. y otros. Análisis de la falla del Trunium de salida del Molino No. 1 de crudo de la Empresa de Cemento “Karl Marx”. Trabajo presentado en el XI Forum Nacional de Ciencia y Técnica, 1996.—69 p.
17. Grahan Kelly S. Fundamentals of Mechanical Vibratios. New York: Mc Graw Hill, Inc, 1993.—643 p.
18. Hawkes B. Cadcam. Madrid: Paraninfo S.A.,1989.—336 p.
19. Ivanov, M. N. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial Vichaya Schkola, 1991.—386p.
15. Merian J.L. Mecánica. La Habana: E.R. 1972.—438 p.
16. Mott R.L. Applied Strength of Materials. New Jersey: Editorial Prentice- Hall, 2ª. Ed. 1990.—559 p.
17. Mott R.L. Resistencia de Materiales Aplicada. México: Editorial Prentice- Hall Hispanoamericana S.A. 3ª. Ed. 1996.—640 p.
18. .Mukanov K. Design of metal structures. Moscú: Editorial MIR, 1968. --- 517p
19. Olsen G.A. Elements of Mechanics of Materials. La Habana: Editora de la Asociación de Estudiantes de Ingeniería, 1962.—536 p.
20. Orlov, P., Ingeniería del Diseño. Moscú: Editorial MIR, 1985.
21. Partón V.Z. Mecánica de la Destrucción. Moscú : Editorial MIR, 1990.--415 p.
22. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. Manual de Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR, 1989,-- 693 p.

23. Reshetov, D. Elementos de Máquinas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1985.—830p.
24. Roylance, T.F. Engineering Desing. Great Britain: Pergamon Press, 1966.—345p.
25. Shigley J.E. El Proyecto en Ingeniería Mecánica. La Habana : Editora Revolucionaria, 1969.-- 658 p.
26. Shigley, J. E./ Diseño en Ingeniería./ México: Editorial Mc Graw Hill, 1977. -- 785 p.
27. Shigley, J. E.; Mitchell, L. D./ Diseño en Ingeniería Mecánica./ México: Editorial Mc Graw Hill, 1985. -- 915 p.
28. Shigley, J.E y Mischkie, C., Diseño en Ingeniería Mecánica. México: Editorial McGraw Hill Interamericana. 2001.—943 p.
29. Spiegel L., Limbrunner G.F. Applied Statics and Strength of Materials. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, 1999.—644 p.
30. Timoshenko S. Teoría de la Estabilidad Elástica. Buenos Aires: Editorial EDIAR,1961.—549 p.
31. Timoshenko S. Resistencia de Materiales. Moscú : Editorial Nauka, 1965.—480p.
32. 37. Volmir A. Problemas de Resistencia de Materiales. Moscú; Editorial MIR, 1986.—477 p.
33. 38. Wilson Ch. Computer Integred Maschine Design. New Jersey: Prentice Hall, 1997.—646 p.