



## **TRABAJO DE DIPLOMA**

**TÍTULO: Influencia del alabeo y la torsión restringida en la magnitud de las tensiones para uniones soldadas a tope con configuración geométrica compleja sometidas a torsión.**

**AUTOR: Osdiel Hernández Pérez**

**TUTORES: Dr. Rafael Goytisoló Espinosa  
Dr. Hernán Hernández Herrera**

**CURSO 2005- 2006**

**DECLARACIÓN DE AUTORIDAD.  
UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS  
“CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ”**

Hago constar que el presente trabajo de diploma fue realizado en la Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez” como parte de la culminación de los estudios de la especialidad Ingeniería Mecánica, autorizando a que el mismo sea utilizado por la institución para los fines que estime conveniente, ya sea parcial o totalmente y que este no será presentado en evento ni publicado sin la aprobación de la Facultad.

---

Firma del autor

Los abajo firmantes certificamos que el presente trabajo ha sido revisado según acuerdo de la dirección de nuestro centro y el mismo cumple los requisitos que debe tener un trabajo de esta envergadura referido a la temática señalada.

---

Información Científico Técnico.

Nombre y Apellidos. Firma.

---

Computación.

Nombre y Apellidos. Firma.

---

Firma de los tutores

---

Sistema de Documentación y Proyecto.

Nombre y Apellidos. Firma.

# Dedicatoria

A mis padres que con su cariño y preocupación, han sabido encaminarme en la vida desde mis primeros años.

A mi abuela por el amor y apoyo que me ha brindado.

# Agradecimientos

# Agradecimientos

A mis tutores por sus valiosas ideas y orientaciones constantes.

A todos mis amigos y familiares, quienes de una manera u otra han contribuido a mi preparación en la vida y como profesional.



# Pensamiento

“El ingeniero es un mediador entre el filósofo y el obrero; y como intérprete entre dos extraños, debe entender el lenguaje de ambos, razón por la cual tiene la absoluta necesidad de poseer tanto los conocimientos prácticos como los teóricos.”

Henry Palmer, 1818.

*Resumen*

## **Resumen.**

En el trabajo se realiza un análisis crítico de las distintas expresiones de cálculo para determinar el valor de las tensiones máximas en las uniones soldadas de Configuración Geométrica Compleja sometidas a torsión, destacándose que para las mismas, dichas expresiones de cálculo presentan omisiones y contradicciones con la Mecánica de Materiales pues este tipo de perfil donde la relación longitud- espesor es mayor que 10 debe considerarse como un contorno de paredes delgadas. Por ello se aplica en el presente trabajo la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas para obtener nuevas expresiones de cálculo las cuales brindan valores de las tensiones máximas locales más cercanos a los obtenidos por el Método de los Elementos Finitos. Se analiza el caso de la unión empotrada donde aparece el efecto de torsión restringida apreciándose como en los puntos más cercanos al empotramiento los valores de las tensiones son 1,4 veces superiores a los obtenidos para esta misma unión sometida a torsión libre debido a los diferentes aspectos presentes en esta sollicitación los cuales son explicados en el trabajo. Estos valores de las tensiones también son comparados con los obtenidos el Método de los Elementos Finitos mostrando una buena correspondencia entre los mismos.

# *Índice*

<b>Índice</b>	<u><b>Pág</b></u>
<b>Introducción</b> .....	1
<b>Capítulo 1. Estado actual de los métodos y expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas sometidas a torsión.</b> .....	8
1.1 Tratamiento del cálculo de las tensiones en las uniones soldadas en la literatura especializada de Mecánica de Materiales.....	8
1.2 Tratamiento del cálculo de las tensiones en uniones soldadas en la literatura especializada de Diseño de Elementos de Máquinas.....	9
1.3 Tratamiento del cálculo de las tensiones en uniones soldadas en la literatura especializada de soldadura.....	9
1.4 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en las Investigaciones de las Uniones Soldadas.....	11
1.5 Expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope propuestas por Faïres.....	12
1.6 Expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope propuestas por Schimpke – Horn – Ruge .....	14
1.7 Crítica de las expresiones empleadas por los diferentes autores mencionados en los epígrafes anteriores para el cálculo de las tensiones tangenciales en las uniones soldadas a tope con perfiles de configuración geométrica compleja.....	16
<b>Capítulo II. Cálculo de las tensiones tangenciales en las uniones soldadas sometidas a torsión libre.</b> .....	18
2.1 Método propuesto para determinar las tensiones tangenciales máximas en uniones soldadas con perfiles de configuración geométrica compleja sometidos a torsión.....	18
2.2 Análisis comparativo de las expresiones dadas por Faïres <sup>[20]</sup> y las expresiones propuestas para una sección soldada a tope rectangular.....	21
2.3 Torsión en perfiles de paredes delgadas .....	22
2.3.1 Tensiones tangenciales en la torsión en perfiles de paredes delgadas. ---	22

2.3.2 Perfil cerrado de paredes delgadas corrugadas.-----	30
2.3.3. Perfil cerrado multicelular.-----	31
2.4 Expresiones propuestas para el cálculo de las tensiones tangenciales máximas para diferentes uniones con perfiles de configuración geométrica compleja sometidos a torsión.-----	35
2.5 Ejemplo de cálculo de la expresión propuesta para determinar las tensiones tangenciales máximas en una unión soldada con perfil abierto no desarrollable sometido a torsión libre.-----	39
<b>Capítulo III. Influencia de la torsión restringida en la magnitud de las tensiones en uniones soldadas sometidas a torsión.-----</b>	<b>45</b>
3.1 Alabeo de las secciones transversales de la barra de paredes delgadas sometidas a torsión.-----	45
3.2 Torsión restringida en barras de paredes delgadas de perfil abierto.-----	49
3.3 Cálculo de una unión soldada con perfil abierto no desarrollable sometido a torsión restringida. -----	56
Conclusiones Generales -----	68
Recomendaciones -----	70
Bibliografía	
Anexos	

# *Introducción*

## **Introducción.**

Shigley, uno de los más prestigiosos autores de Diseño de Elementos de Máquinas, el cual desde el año 1964 hasta la fecha ha publicado varios libros de texto<sup>[55,56,57,58]</sup>, al abordar el Tema de las Uniones Soldadas expresa: “Una de las dificultades que afronta el ingeniero en el diseño al trabajar con uniones soldadas es que a esta materia no se le ha dedicado el mismo estudio riguroso que a otros procesos, materiales y elementos mecánicos. No se sabe por qué; pero quizás sea porque las características geométricas no se prestan a un fácil tratamiento matemático. Desde luego esto significa que se ha introducido un elemento adicional de incertidumbre, lo cual debe compensarse mediante el uso de factores de seguridad de mayor magnitud en el diseño”.

De este planteamiento de Shigley y como resultado de un profundo análisis de la bibliografía relacionada con el cálculo de las tensiones en las uniones soldadas se puede afirmar que las expresiones de cálculo de las tensiones en las uniones soldadas son susceptibles al perfeccionamiento. Este tipo de unión ha sido la “Cenicienta” de los Elementos de Máquinas, ningún autor ha abordado, por ejemplo, el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja, sometidas a torsión considerando la unión como un perfil de paredes delgadas. En el trabajo<sup>[33]</sup> se abordó el cálculo de las costuras de filete tomando en cuenta esta consideración pero no se enfrentó el cálculo de las uniones a tope. Tampoco ningún autor ha enfrentado el cálculo de las uniones soldadas sometidas a torsión considerando el efecto de la torsión restringida. En las recomendaciones del trabajo<sup>[33]</sup> se destaca la necesidad de realizar estudios que permitan profundizar en este aspecto.

Para realizar cálculos en condiciones de cargas cíclicas se necesitan los valores de las tensiones locales máximas y por supuesto el ciclo de variación de las mismas el cual depende de la variación de la carga aplicada desde  $P_{mín}$  hasta  $P_{máx}$ .

Los métodos empleados para evaluar la resistencia en condiciones de cargas cíclicas en las costuras soldadas mencionadas no se fundamentan tampoco en el cálculo de las

tensiones máximas locales, sino que como regla utilizan coeficientes de reducción de las tensiones admisibles del material del cordón, que toman en cuenta la variabilidad de la carga aplicada desde  $P_{\min}$  hasta  $P_{\max}$ , pero no utilizan el criterio de calcular el coeficiente de seguridad a la fatiga empleando las tensiones máximas y mínimas, ni los factores que se incorporan en los cálculos clásicos de fatiga, como son: el factor de concentración de tensiones, el factor de tamaño, el factor de estado de la superficie, etc.; que incorporan al cálculo de las tensiones locales máximas y mínimas, calculadas por los métodos clásicos de la Mecánica de Materiales, el peligro que representan el efecto suplementario de la concentración de tensiones, y los posibles defectos del cordón en dichas zonas.

En el trabajo citado anteriormente se destaca como los cordones de soldadura empleados en las diferentes uniones soldadas tienen como regla una relación longitud a espesor  $\frac{l}{s} > 10$ . En estas condiciones los cordones de soldadura, cualquiera que sea su configuración geométrica, se comportan como Perfiles de Paredes Delgadas. Las evaluaciones realizadas en el citado trabajo han permitido comprobar que la consideración del cordón de soldadura como un Perfil de Paredes Delgadas permite obtener valores de las tensiones máximas locales que se corresponden mucho mejor con las obtenidas por el Método de los Elementos Finitos y más próximas a estos valores que las obtenidas por los Métodos Clásicos.

En el caso de las uniones con perfiles de configuración geométrica compleja sometidos a torsión, aunque los autores determinan las tensiones máximas, las expresiones brindadas por ellos en algunos casos presentan omisiones y contradicciones con la Teoría de la Mecánica de Materiales.

A todos estos argumentos hay que añadir que los cordones de soldadura son elementos muy sensibles a la aparición de defectos durante su ejecución, de aquí que el fenómeno de la concentración de tensiones en las costuras no esté presente sólo a causa de sus características geométricas, sino a consecuencia también de estos defectos, la probabilidad de la falla por fatiga del cordón en presencia de cargas variables es muy elevada. Esta situación ha provocado que se generalice el criterio de

que la soldadura es un método de unión muy deficiente para uniones que trabajan en condiciones de cargas cíclicas, sin detenerse a pensar que, por ejemplo, los árboles son elementos de máquinas con considerables cambios de forma en los que se producen elevados efectos de concentración de tensiones y en los cuales la variación cíclica de las tensiones se produce a una frecuencia de miles de ciclos por minuto, sin embargo los métodos de cálculo permiten apreciar con una adecuada exactitud los valores de las tensiones máximas locales por lo que pueden ser adecuadamente calculados y se puede impedir su falla por fatiga. Simplemente hay que concluir que las tensiones máximas locales en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja, no están siendo correctamente calculadas y se hace necesario resolver esta insuficiencia. Es por esta razón que desde su surgimiento hace cuatro décadas y en el posterior desarrollo de una nueva Rama de la Mecánica de los Sólidos Deformables: La Mecánica de la Fractura, se le ha prestado especial atención en las aplicaciones de esta nueva tecnología a los cordones de soldadura.

La Mecánica de la Fractura ha planteado una nueva necesidad a la Mecánica de Materiales, la de pronosticar los plazos de desarrollo de los defectos que pudieran existir en los cordones de soldadura, lo que exige que para lograr esto con una exactitud aceptable desde el punto de vista ingenieril, se requiere determinar las tensiones máximas locales que surgen en los cordones de soldadura con una exactitud superior.

Es importante aclarar que en el presente trabajo no se aspira a elaborar un método para evaluar la resistencia de las costuras soldadas, donde intervienen aspectos vinculados con las propiedades mecánicas del metal base, del metal de la soldadura y aspectos tecnológicos como son: el método de soldadura y las particularidades propias de su ejecución, aspectos estos que han sido mucho más estudiados y que constituyen investigaciones de otra índole. En el presente trabajo se plantea única y exclusivamente el desarrollo de expresiones de cálculo para determinar las tensiones locales máximas en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión, aplicando consecuentemente los métodos establecidos en la Mecánica de Materiales.

Esta situación ha permitido identificar el siguiente **Problema Científico**: En la literatura de Mecánica de materiales, Diseño de Elementos de Máquina y en la literatura especializada de Soldadura no se hace énfasis en las expresiones de cálculo de las tensiones en secciones de configuración geométrica compleja soldadas a tope sometidas a torsión y en ningún caso se menciona como tomar en cuenta el efecto de torsión restringida en la magnitud de estas tensiones.

Identificada esta problemática científica se ha planteado la siguiente **Hipótesis**: Es posible obtener, con la aplicación correcta y minuciosa de la Mecánica de Materiales, expresiones de cálculo más adecuadas para determinar los valores de las tensiones máximas, en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

A partir de este enunciado de Hipótesis se deriva como **Objeto de Estudio** del presente trabajo: El perfeccionamiento del cálculo de las tensiones máximas en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión. Para darle cumplimiento a ello se plantean como **Objetivos Generales**:

1. Desarrollar expresiones para el cálculo de las tensiones máximas locales en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.
2. Establecer una metodología de cálculo de las tensiones para poder evaluar el efecto de la torsión restringida en la magnitud de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

El cumplimiento de los objetivos generales se realiza mediante el desarrollo de los **Objetivos Específicos** identificados a continuación:

- Aplicar la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas en la obtención de expresiones de cálculo de las tensiones tangenciales máximas en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión libre.

- Aplicar la Teoría de la Torsión Restringida en el caso de los Perfiles de Paredes Delgadas de configuración geométrica compleja sometidos a torsión para evaluar su influencia en la magnitud de las tensiones.
- Comparar los resultados obtenidos por las expresiones de cálculo propuestas con los resultados obtenidos por el Método de los Elementos Finitos.

Para el cumplimiento de estos objetivos se realizaron las siguientes **Tareas de Investigación:**

- Profundizar en el estado del arte con relación a los métodos y expresiones propuestas para el cálculo de las tensiones en las uniones soldadas a tope sometidas a torsión.
- Profundizar en el estado del arte con relación a la teoría de los métodos de cálculo de los Perfiles de Paredes Delgadas.
- Aplicar el Método de los Elementos Finitos al cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.
- Realizar un estudio comparativo de los resultados obtenidos por los métodos y expresiones propuestas, con las obtenidas por el Método de los Elementos Finitos que sirvan como vía de comprobación de la validez de las expresiones propuestas.

Como resultados del trabajo realizado se consideran **Aportes Científicos:**

- Las nuevas expresiones de cálculo para determinar los valores de las tensiones máximas en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión, obtenidas mediante la aplicación de la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas, que permiten obtener valores de las tensiones máximas locales que se ajustan mejor a los obtenidos por el Método de los Elementos Finitos.

- El esclarecimiento de la influencia del efecto de torsión restringida en la magnitud de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

### **Valor Práctico del Trabajo:**

El valor práctico fundamental de esta investigación es que en ella se obtienen expresiones de cálculo que permiten obtener los valores de las tensiones tangenciales máximas que surgen en los puntos más críticos de las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión, más cercanos estos a los obtenidos por el Método de los Elementos Finitos, lo que da la posibilidad de realizar una evaluación más objetiva de la resistencia mecánica aplicando los Métodos Generales empleados en el Diseño de Elementos de Máquinas en particular bajo condiciones de carga cíclica, además se puede realizar un pronóstico mucho más certero de los plazos de desarrollo de los defectos y micro grietas existentes en estos cordones de soldadura aplicando los Métodos de la Mecánica de la Fractura.

### **Métodos de Investigación Empleados**

Entre los Métodos Científicos empleados en la Investigación se pueden citar los siguientes:

#### **Métodos Generales**

Se utilizarán los métodos inductivo - deductivo e hipotético - deductivo durante el estudio de los métodos y expresiones de cálculo existentes en la literatura consultada, la posible aplicación de los métodos de evaluación de los Estados Tensionales y de Evaluación de la Resistencia de los Elementos de Máquinas, la posible aplicación de la Teoría General de los Perfiles de Paredes Delgadas y durante la identificación del Problema Científico, la Hipótesis, los Objetivos Generales y las Tareas Científicas del Trabajo.

### **Métodos Lógicos**

Se utilizó el método analítico-sintético e inductivo-deductivo como métodos fundamentales de investigación durante la obtención de las nuevas expresiones de cálculo. Mediante el análisis y la inducción se evaluaron los diferentes efectos por separado, la síntesis y la deducción permitió integrar las partes analizadas en la obtención de nuevas expresiones que conducen al perfeccionamiento general del cálculo de las tensiones máximas locales en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

### **Métodos Matemáticos**

Se empleó el Método Numérico de los Elementos Finitos a través de Software: Cosmos Design Star para validar las expresiones para el cálculo analítico de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

# *Capítulo 1*

## **Capítulo I. Estado actual de los métodos y expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas sometidas a torsión.**

### **1.1 Tratamiento del cálculo de las tensiones en las uniones soldadas en la literatura especializada de Mecánica de Materiales.**

No todos los autores de Mecánica de Materiales abordan el Tema de las Costuras Soldadas, así por ejemplo, Beer <sup>[5]</sup>, Feodosiev <sup>[22,23]</sup>, Fitzgerald <sup>[25]</sup>, Spiegel <sup>[60]</sup>, Timoshenko<sup>[62]</sup>, abordan el Tema de Cortante Puro, sin hacer mención a este tipo de unión, se limitan exclusivamente a tratar las Uniones Remachadas dentro de este Tema.

Otros autores como Fogiel <sup>[26]</sup>, Miroljubov <sup>[43]</sup>, Mott <sup>[44]</sup>, Pisarenko <sup>[48]</sup>, Volmir<sup>[63]</sup>, se limitan a mencionar este tipo de unión y sólo, resuelven ejemplos muy elementales determinando tensiones en los casos más simples.

Algunos profundizan más en el cálculo de las tensiones en este tipo de uniones, entre estos se encuentran: Gilda Fernández <sup>[24]</sup> y Olsen <sup>[46]</sup>, no obstante, se puede afirmar que en la literatura técnica de Mecánica de Materiales y Resistencia de Materiales se aporta muy poco acerca de los métodos y expresiones para el cálculo de las tensiones en las costuras soldadas.

Es necesario aclarar que el cálculo de las tensiones en costuras soldadas a tope, por los métodos descritos en la literatura, se realiza por expresiones que no difieren en lo absoluto de las estudiadas en esta literatura de Mecánica de Materiales y los autores consideran innecesario referirse a ellas, sin embargo se evidencia que en el caso de la torsión se maneja casi unánimemente la analogía con la torsión en barras de sección

circular sometida a torsión, sólo el Tratado General de Soldadura de Schimpke P, Horn H. A y Ruge J.<sup>[52,53]</sup> menciona la aplicación de la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas en el cálculo de las tensiones de las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión, pero no se desarrollan expresiones para el cálculo de estas tensiones en perfiles de configuración geométrica compleja.

### **1.2 Tratamiento del cálculo de las tensiones en uniones soldadas en la literatura especializada de Diseño de Elementos de Máquinas.**

Algo parecido ocurre con la literatura técnica de Elementos de Máquinas, no todos los autores tratan este tema con la misma profundidad. Por ejemplo: Birger <sup>[6]</sup> e Ivanov <sup>[38]</sup> lo tratan de forma elemental y enfocan solamente los casos más simples de cálculo de estas uniones. Otros como Dobrovolski <sup>[14]</sup>, Iusilievich <sup>[37]</sup>, Wilson <sup>[67]</sup> o de Estructuras Metálicas como: Mukanov <sup>[45]</sup>, profundizan un poco más y tratan incluso el cálculo a fatiga de estas uniones, pero no consideran los casos más complejos de carga. Algunos como Faires <sup>[20]</sup>, Hall <sup>[32]</sup>, Orlov <sup>[47]</sup>, Reshetov <sup>[49]</sup>, Schimpke <sup>[52,53]</sup> y Shigley <sup>[55,56,57,58]</sup> tratan este tema con la mayor complejidad, sin embargo existen en ellos una gran divergencia en los métodos y expresiones empleadas en los cálculos con algunos aspectos contradictorios en los cuales se profundizará en los siguientes epígrafes.

### **1.3 Tratamiento del cálculo de las tensiones en uniones soldadas en la literatura especializada de soldadura.**

En este sentido se consultaron las principales revistas donde podían aparecer artículos que abordaran el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope, dentro de estos se pueden citar: Welding Journal, Welding Research, Marine Technology, Welding Innovation, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, Transaction of Japan Society of Mechanical Engineers, Machine Design, Welding, Brazing and Soldering, Mechanical Engineering, Welding and Cutting, Canadian

Journal of Civil Engineering, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Internacional Journal of Numerical Methods in Engineering, Internacional Journal of Fatigue, Engineering Fracture Mechanics, Welding Design and Fabrication y otras publicaciones correspondientes a Congresos de Soldadura, Manuales en general; las Revistas Cubanas Ingeniería Mecánica y Centro Azúcar en lo fundamental los números correspondientes a los últimos 10 años.

Se revisaron además normas de distintos países como son las Normas de Soldadura de la American Welding Society (AWS)<sup>[3]</sup> de Estados Unidos, las Normas Alemanas (DIN)<sup>[12,13]</sup>, las Normas Españolas (ICS)<sup>[34,35,36]</sup>, las Normas Europeas (EN)<sup>[16,17,18]</sup>, Normas relacionadas de la ANSI/API<sup>[1]</sup> y ANSI/AWS<sup>[2]</sup> de Estados Unidos. Con relación a las Normas Técnicas consultadas hay que decir que en ellas se reflejan los mismos criterios y expresiones de cálculo a los cuales se hace referencia en la literatura de Elementos de Máquinas y Especializada consultadas y referenciadas en el presente trabajo.

En la literatura Especializada la inmensa mayoría de los autores<sup>[15,66]</sup> abordan los problemas relativos a la elevación de la resistencia de las uniones soldadas mediante el mejoramiento y control de los parámetros tecnológicos, su ejecución o los materiales de soldadura sin enfrentar el cálculo de las tensiones que aparecen en estas.

Otro grupo importante de autores destacan la importancia que tienen las tensiones residuales que están presentes en la casi totalidad de las uniones soldadas y la influencia que tienen estas en el agrietamiento y la destrucción de las mismas<sup>[27,39,40,41,42,54,59,68]</sup>.

En la literatura consultada se enfrenta también la evaluación de la resistencia de las costuras soldadas aplicando los Métodos de la Mecánica de la Fractura<sup>[64,65]</sup> pero sin aportar nada nuevo al cálculo analítico de las tensiones.

Entre los libros y Manuales Especializados en soldadura consultados se encuentran los siguientes<sup>[45,51,52,53]</sup>; en ninguno de estos con excepción del Tratado General de

Soldadura de Schimpke P, Horn H.A y Ruge. J<sup>[52,53]</sup> se menciona la aplicación de la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas en el cálculo de las tensiones de las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión.

#### **1.4 Aplicación del Método de los Elementos Finitos en las Investigaciones de las Uniones Soldadas.**

El Método de los Elementos Finitos constituye en sí un Método Numérico para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan un problema específico. El mismo se ha convertido hoy en día en una potente arma para la investigación ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por los métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado costo tanto económico como en tiempo de desarrollo. El Método de los Elementos Finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, mucho más fácil y económico que diseñar, construir, probar y modificar un prototipo. Sin embargo, por su esencia de ser un procedimiento matemático que discretiza funciones que en la realidad son continuas, constituye en sí un método aproximado de cálculo. El mismo es empleado en las más variadas ramas de la ciencia desde la medicina hasta la ingeniería, es utilizado tanto para determinar valores de fuerzas y tensiones en diferentes piezas de máquinas y estructuras como para modelar diferentes procesos de fabricación. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el Método de los Elementos Finitos, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de Elementos Finitos, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación. Los Fundamentos del Método de los Elementos Finitos aparecen analizados en detalle en las referencias <sup>[4,7,9,21,27,69]</sup>. Particularmente en el campo de la soldadura se utiliza para la investigación de los campos de temperatura y

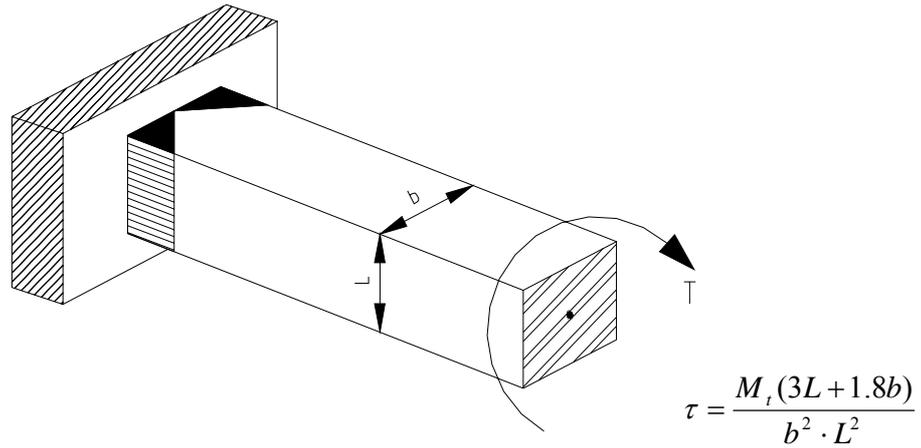
sus efectos <sup>[30,31,61]</sup>. El Método de los Elementos Finitos se emplea también para la evaluación de Tensiones Residuales en la Soldadura<sup>[27]</sup>. Específicamente en el cálculo de tensiones en las uniones soldadas se emplean para validar los cálculos analíticos realizados. En este sentido se pueden señalar algunos trabajos importantes como son<sup>[10,19]</sup>. Muchos investigadores trabajan en esta línea general y han estudiado cuidadosamente cuales son los modelos óptimos para las diferentes aplicaciones determinando de esta forma que tipos de elementos a utilizar, características de las solicitaciones a que estarán sometidas etc., ellos basan sus trabajos en las estimaciones de los errores donde proponen metodologías para los mismos, en sus artículos <sup>[8,11,24,29]</sup> todos coinciden que los resultados a obtener están en correspondencia con el modelo y el sistema real que se haya adoptado y con la calidad que se resuelva el mismo siendo una obligatoriedad la convergencia de los casos a analizar. La misma puede lograrse de tres maneras: se puede disminuir el tamaño de los elementos (afinamiento de la malla), se puede aumentar el grado del polinomio de interpolación, o se pueden hacer simultáneamente las dos cosas, Además, se puede realizar localmente, es decir mejorando la discretización en aquellas zonas en las que se produce un mayor error. Los requisitos de convergencia se plantean sobre la base de la siguiente fundamentación: Si se analiza un problema utilizando cada vez una malla más fina de elementos, se generará una secuencia de soluciones aproximadas. Es importante que tal secuencia converja a la solución exacta, es decir, que el error entre la solución aproximada y la exacta tienda a cero cuando el número de elementos tienda a infinito (o su tamaño tienda a cero). Aunque en los problemas reales no puede obtenerse un valor exacto del error de discretización, se ha demostrado<sup>[19]</sup> que existe una convergencia asintótica de la solución del problema en función a los parámetros de "número de grados de libertad", o el "tamaño de los elementos".

### **1.5 Expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope propuestas por Faïres.<sup>[20]</sup>**

Las expresiones empleadas por Faïres<sup>[20]</sup> para el cálculo de las tensiones en el caso de uniones soldadas de configuración geométrica compleja se muestran en la Tabla que

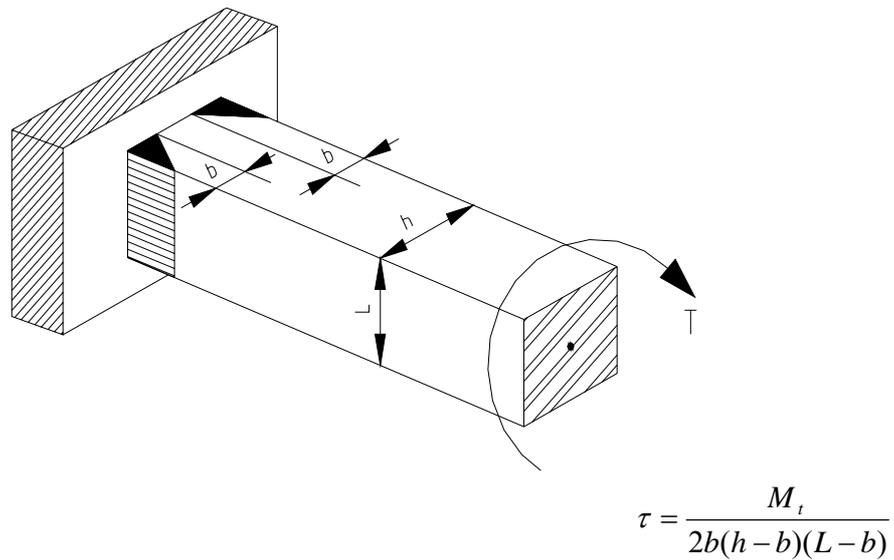
aparece en el Anexo A donde se incluyen tanto costuras de filete como a tope. Para el caso que nos ocupa de uniones a tope, Faires<sup>[20]</sup> solo trata dos casos 29 y 30 en el Anexo A, presentados a continuación.

- **Caso 29**



**Figura 1.1 Soldadura a tope con penetración completa**

- **Caso 30**



**Figura 1.2 Soldadura a tope con penetración incompleta.**

Faires<sup>[20]</sup> presenta estas expresiones sin aclarar que procedimiento emplea para obtenerlas.

## 1.6 Expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope propuestas por Schimpke – Horn – Ruge<sup>[52,53]</sup>

Estos autores proponen para:

### Cálculo a cortante directo

$$\tau_{sol} = \frac{P}{\sum(a \cdot l)} \quad \tau_{adm} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{adm} \quad (1.1)$$

Cálculo de las secciones solicitadas a torsión.

Mediante el momento de torsión  $M_t$  se producen en la sección tensiones de cortante, cuya ley de distribución es más complicada que la de las tensiones normales debidas al momento flector. La máxima tensión de cortante debida a la torsión es

$$\tau_{t\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (1.2)$$

En superficies circulares y anulares crece la tensión de torsión linealmente con la distancia al centro de gravedad. El valor máximo se produce en el borde.

En secciones rectangulares, la tensión de cortante máxima se halla en el centro de los lados largos. Para  $h < 3b$  se distribuye la tensión de torsión en los lados largos aproximadamente en forma parabólica hasta los vértices, en donde su valor es nulo. Para  $h > 3b$  permanece aproximadamente constante en una longitud de  $h-3b$ , en el centro de los lados largos y después disminuye hasta el valor de cero. En el centro de los lados cortos es  $\tau_\tau = \eta \cdot \tau_{\tau\max}$  disminuyendo en forma parabólica hasta el valor de cero en los vértices.

Con secciones de perfiles compuestas de rectángulos de longitudes  $l_1, l_2, l_3 \dots$  y anchos  $b_1, b_2, b_3 \dots$  (p. ej., secciones I, U y L), se reparten las tensiones de un modo semejante al caso de las secciones rectangulares. En secciones cerradas, de paredes delgadas de cuerpos huecos de forma cualquiera, se puede hallar la tensión de cortadura resultante con ayuda de la ley de Bredt.

$$\tau_{t\text{máx}} = \frac{M_t}{2 \cdot F_U \cdot s_{\text{mín}}} \quad (1.3)$$

Aquí  $s_{\text{mín}}$  es el espesor de pared más delgada y  $F_U$  la superficie encerrada por la pared.

**Tabla 1.1 Parámetros geométricos de las secciones según Schimpke – Horn – Ruge<sup>[52,53]</sup>.**

Sección	Momento de inercia $J_t$	Momento resistente $W_t$
Anillo circular	$\frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$	$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$
Círculo	$\frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$\frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Rectángulo	$\eta_3 \cdot b^3 \cdot h$	$\eta_2 \cdot b^2 \cdot h$
Secciones de perfil compuesto.	$\frac{1}{3} (b^3 l_1 + b^3 l_2 + \dots)$	$\frac{J_t}{b_{\text{máx}}}$
Secciones huecas cerradas... (U = línea periférica media)	$\frac{4F_U^2 \cdot s}{U}$	$2F_U \cdot s$

En la Tabla 1.1 se han reunido los momentos de inercia y de resistencia, para la torsión.

Para las secciones rectangulares se aplican los siguientes coeficientes:

**Tabla 1.2 Coeficientes para las secciones rectangulares.**

h/b	1	1.5	2	3	4	6	8	10	$\infty$
n <sub>1</sub>	1.000	0.858	0.796	0.753	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743
n <sub>2</sub>	0.208	0.231	0.246	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
n <sub>3</sub>	0.140	0.196	0.229	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

**1.7 Crítica de las expresiones empleadas por los diferentes autores mencionados en los epígrafes anteriores para el cálculo de las tensiones tangenciales en las uniones soldadas a tope con perfiles de configuración geométrica compleja.**

De la revisión bibliográfica se puede observar como la mayoría de los autores<sup>[32,49,55,56,57,58]</sup> consultados en la literatura abordan el cálculo de las tensiones máximas en las uniones soldadas de Perfiles de Configuración Geométrica Compleja sometidas a torsión basándose en la analogía con la torsión en barras de sección circular, sin prestarle atención al hecho de que en la Teoría de la Mecánica de Materiales, está muy claro que esta expresión es válida solamente para las secciones circulares y es incorrecta cuando se emplea en secciones que no son circulares debido a que no se cumple la Hipótesis de las Secciones Planas. Por otro lado, de la Teoría de la Torsión en los Perfiles de Paredes Delgadas está claro, basándose en la Ley de Paridad de las Tensiones Tangenciales que las tensiones tangenciales tienen que ser necesariamente tangentes al contorno, o sea, no pueden tener la orientación propuesta por este método. Sólo los autores Schimpke – Horn – Ruge<sup>[52,53]</sup> analizan estas uniones como Perfiles de Paredes Delgadas pero no profundizan en las expresiones para determinar el valor de las tensiones máximas para las diferentes configuraciones geométricas complejas.

# *Capítulo 2*

## **Capítulo II: Cálculo de las tensiones tangenciales en las uniones soldadas sometidas a torsión libre.**

### **2.1 Método propuesto para determinar las tensiones tangenciales máximas en uniones soldadas con perfiles de configuración geométrica compleja sometidos a torsión.**

En el Capítulo I, epígrafe 1.7 se plantea que el método utilizado por los diferentes autores<sup>[32,49,55,56,57,58]</sup> en la literatura para determinar las tensiones tangenciales máximas en las uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión presenta contradicciones con la Mecánica de Materiales; por lo que, desde el punto de vista de la Mecánica de Materiales, es preciso analizarlas como perfiles de sección transversal no circular o como perfiles de paredes delgadas.

En el Tabla 2.1 se muestran las expresiones dadas por Feodosiev<sup>[22,23]</sup> de los parámetros geométricos  $W_t$  e  $I_t$  de la sección a la torsión, en el caso de barras macizas no circulares y en la Tabla 2.2 para barras de paredes delgadas de perfiles abiertos desarrollables, abiertos no desarrollables y para los perfiles cerrados.

La expresión general propuesta para calcular las tensiones tangenciales máximas de torsión es la clásica expresión de la torsión donde  $W_t$  adaptará la expresión correspondiente de acuerdo con el tipo de sección.

$$\tau_{Mt} = \frac{Mt}{W_t}$$

(2.1)

Donde:

$Mt$  – Momento torsor sobre la costura, que actúa con relación al eje centroidal perpendicular al plano de la unión.

$W_t$  – Parámetro geométrico de la sección de la costura a torsión, considerada esta como una sección maciza no circular o como un perfil de paredes delgadas de acuerdo con el caso analizado.

En los epígrafes subsiguientes se profundizara en la Teoría de la Torsión en perfiles de paredes delgadas con vistas a su posterior aplicación al cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope.

**Tabla 2.1 Parámetros geométricos  $W_t$  y  $I_t$  de las secciones macizas no circulares**

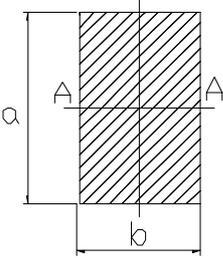
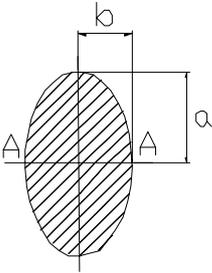
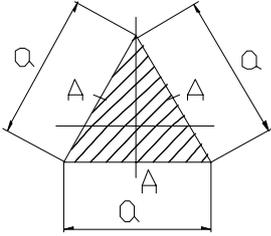
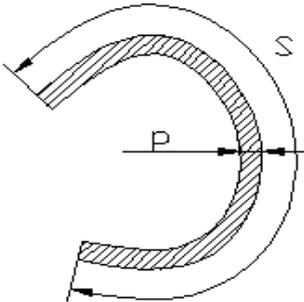
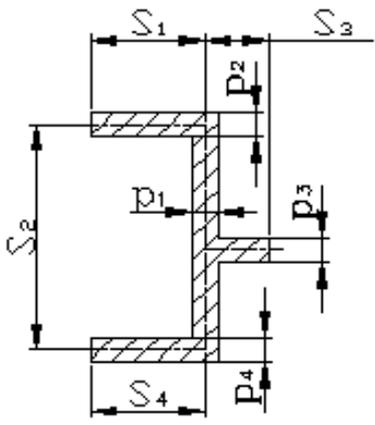
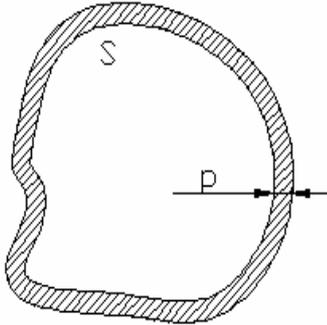
SECCIÓN		$W_t$	$I_t$	
S E C C I O N E S M A C I Z A S	R E C T Á N G U L O		$\alpha \cdot b^2 a$	$\beta \cdot b^2 a$
	E L I P S E		$\frac{\pi b^2 a}{2}$	$\frac{\pi b^3 a^3}{a^2 + b^2}$
	T R I Á N G U L O		$\frac{a^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3} \cdot a^4}{80}$

Tabla 2.2 Parámetros geométricos  $W_t$  y  $I_t$  de los perfiles paredes delgadas

SECCIÓN		$W_t$	$I_t$
PERFIL ABIERTO		$\frac{1}{3} \cdot \rho^2 \cdot s$	$\frac{1}{3} \cdot \rho^2 \cdot s$
SECCIONES COMPUESTAS FINAS		$\frac{I_t}{\rho_{\max}}$	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot s_i$
PERFIL CERRADO		$2 \cdot F^* \cdot \rho_{\min}$	$\frac{4 \cdot (F^*)^3}{\int_s \frac{ds}{\rho}}$

## 2.2 Análisis comparativo de las expresiones dadas por Faires<sup>[20]</sup> (Epígrafe 1.5) y las expresiones propuestas para una sección soldada a tope rectangular.

El caso 29 dado por Faires<sup>[20]</sup> constituye una unión soldada a tope de una barra de sección rectangular con penetración completa del cordón, de aquí que la sección de la soldadura se puede considerar como una sección rectangular sometida a torsión. Faires<sup>[20]</sup> no hace ningún comentario acerca de la dependencia en la magnitud de la tensión  $\tau$  de acuerdo con las proporciones de la sección: Relación L/b; aunque la expresión que ofrece depende de L y de b, sin embargo, de la Teoría de la Torsión en barras de sección no circular Tablas 1.1 y 1.2 y Tabla 2.1 se aprecia que la tensión depende de la relación L/b.

En la Tabla 2.3 se da la comparación de las tensiones dadas por Faires<sup>[20]</sup> para una sección rectangular y la obtenidas por la torsión en perfiles rectangulares.

**Tabla 2.3 Análisis comparativo de la expresión de Faires<sup>[20]</sup> y la propuesta para una sección rectangular.**

	Faires <sup>[20]</sup>	Expresión propuesta
<b>L/b</b>	$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Mt(3L+1.8b)}{b^2 L^2}$	$\tau_{m\acute{a}x} = A \frac{Mt}{Lb^2}$
1	$\tau_{m\acute{a}x} = 4.8 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 4.8 \frac{Mt}{b^3}$
1.5	$\tau_{m\acute{a}x} = 2.80 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 2.89 \frac{Mt}{b^3}$
1.75	$\tau_{m\acute{a}x} = 2.30 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 2.39 \frac{Mt}{b^3}$
2	$\tau_{m\acute{a}x} = 1.95 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 2.03 \frac{Mt}{b^3}$
2.5	$\tau_{m\acute{a}x} = 1.49 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 1.55 \frac{Mt}{b^3}$
3	$\tau_{m\acute{a}x} = 1.20 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 1.24 \frac{Mt}{b^3}$

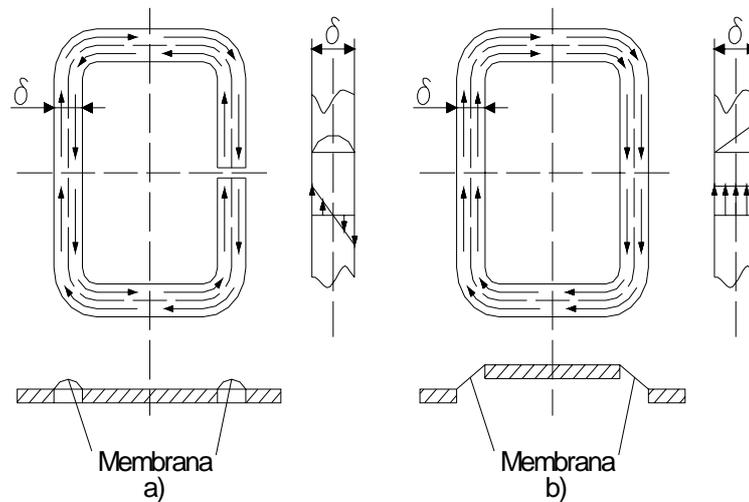
4	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.86 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.88 \frac{Mt}{b^3}$
6	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.55 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.56 \frac{Mt}{b^3}$
8	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.40 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.41 \frac{Mt}{b^3}$
10	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.32 \frac{Mt}{b^3}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 0.32 \frac{Mt}{b^3}$

Del análisis comparativo realizado en la Tabla 2.3 podemos concluir que prácticamente no existe diferencia en los resultados obtenidos por ambas expresiones. O sea que Faires<sup>[20]</sup> utiliza la Teoría de la Torsión en Barras de Sección no Circular donde la tensión depende de la relación L/b; la tensión realmente disminuye al aumentar la relación L/b. La expresión dada por Faires<sup>[20]</sup> resulta más cómoda que la proporcionada por la Teoría de la Torsión en Barras de Sección Rectangular porque no hay que utilizar ninguna tabla.

## 2.3 Torsión en perfiles de paredes delgadas

### 2.3.1. Tensiones tangenciales en la torsión en perfiles de paredes delgadas.

Para el cálculo de las tensiones tangenciales en la torsión de los perfiles de paredes delgadas, estos se dividen en abiertos y cerrados. El carácter de la distribución de las tensiones tangenciales a través del espesor de la pared es diferente en ellos y se establece fácilmente utilizando la analogía de la membrana. Supongamos una placa plana con un orificio de configuración similar a las del perfil, sobre la cual se estira una membrana y se le aplica una presión normal a la superficie de la misma. La membrana se deformará de manera distinta según sea el perfil cerrado o abierto. Esta diferencia se ilustra en la Fig. 2.1.



**Figura 2.1 Analogía de la membrana para un perfil abierto (a) y cerrado (b).**

Para el caso del perfil abierto se puede admitir que las tensiones se distribuyen linealmente dentro del espesor de la pared. De un lado de la línea media del contorno las tensiones tangenciales tienen un sentido y del otro lado sentido contrario (Fig. 2.1 a). En el caso del perfil cerrado las tensiones se distribuyen prácticamente casi uniformemente a través del espesor.

El cálculo de las tensiones y las deformaciones en el caso de los perfiles abiertos se fundamenta en el hecho de que la magnitud y distribución de las tensiones en la sección no se modifica mucho si se endereza el perfil. Es decir, las tensiones en un perfil abierto de configuración curvilínea serán aproximadamente las mismas que una rectilínea. De aquí que para un perfil de paredes delgadas abierto, que puede ser desarrollado y convertido en un rectángulo, se utilizan las mismas expresiones que para la sección rectangular cuando la relación entre los lados es muy grande. En este caso, uno de los lados es el perímetro  $s$  y el otro es el espesor  $\delta$ .

Como  $\frac{s}{\delta} \rightarrow \infty$  se tiene que  $\alpha = \beta = 0,333$  y se tiene que la tensión tangencial máxima y el ángulo de torsión se calculan respectivamente como:

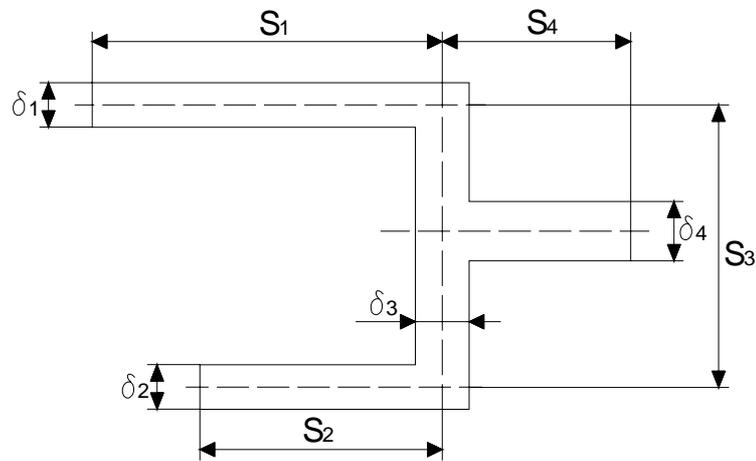
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot M_t}{\sum s_j \cdot \delta^2} \quad (2.2)$$

$$W_t = \frac{\delta^2 \cdot s}{3} \quad \text{y} \quad s = \sum s_j \quad (2.3)$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} = \frac{3 \cdot M_t \cdot l}{G \cdot \delta^3 \cdot \sum s_j} = \theta \cdot l \quad (2.4)$$

$$I_t = \frac{\delta^3 \cdot s}{3} \quad \text{y} \quad s = \sum s_j \quad (2.5)$$

Cuando se trata de un perfil de paredes delgadas abierto compuesto que no puede ser enderezado y transformado en un rectángulo, se opera de la siguiente manera: se interpreta el momento torsor interno  $M_t$  como la suma de los momentos internos que surgen en cada una de las diferentes porciones de la sección (Fig. 2.2).



**Figura 2.2 Perfil de paredes delgadas abierto no desarrollable.**

Despejando  $M_t$  de la expresión (2.4) para un tramo  $i$  cualquiera:

$$M_{ti} = \frac{G \cdot \varphi_i}{3 \cdot l} \cdot \delta_i^3 \cdot s_i \quad (2.6)$$

El momento torsor resultante será la suma de los momentos internos de las diferentes partes componentes de la sección:

$$M_t = \sum M_{ti} \quad (2.7)$$

Y como el ángulo de torsión  $\varphi$  es el mismo para cualquier porción de la sección, o sea,  $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n$ , se tiene que:

$$M_t = \frac{G \cdot \varphi}{3 \cdot l} \cdot \sum \delta_i^3 \cdot s_i \text{ y como, } \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \text{ se tiene:}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum \delta_i^3 \cdot s_i \quad (2.8)$$

Por la analogía de la membrana se establece que la mayor tensión se produce en el tramo de mayor espesor  $\delta_{\max}$ .

Para una porción  $i$  cualquiera de la sección se puede despejar  $\tau_i$  en función de  $M_{ti}$  de la expresión (2.2). O sea:

$$\tau_i = \frac{3 \cdot M_{ti}}{\delta_i^2 \cdot s_i} \text{ y,} \quad (2.9)$$

$$M_{ti} = \frac{\tau_i \cdot \delta_i^2 \cdot s_i}{3} \quad (2.10)$$

Igualando (2.6) y (2.10) se tiene:

$$\frac{G \cdot \varphi_i}{3 \cdot l} \cdot \delta_i^3 \cdot s_i = \frac{\tau_i \cdot \delta_i^2 \cdot s_i}{3}$$

De donde:

$$\tau_i = \frac{G \cdot \varphi}{l} \cdot \delta_i \quad (2.11)$$

De donde  $\tau_{\max}$  se produce para  $\delta_i = \delta_{\max}$ . O sea:

$$\tau_{\max} = \frac{G \cdot \varphi}{l} \cdot \delta_i \quad (2.12)$$

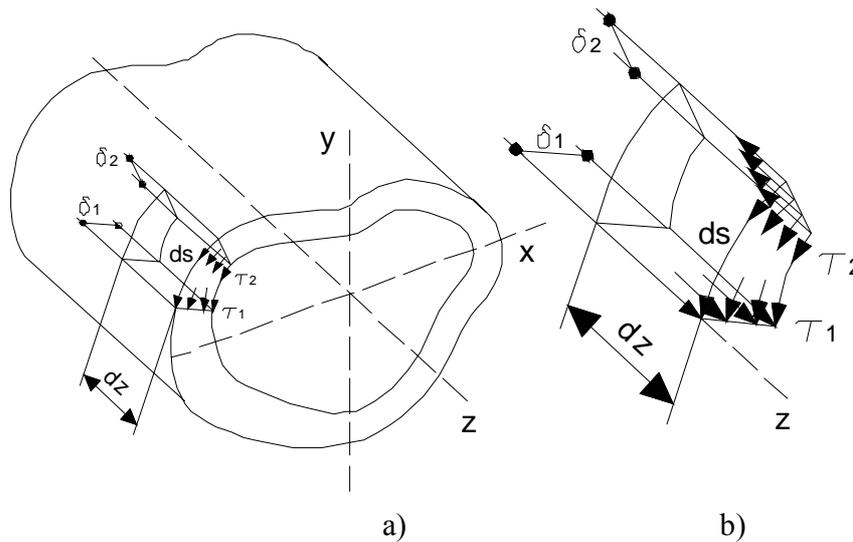
Y como  $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot M_t \cdot \delta_{\max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n} \quad (2.13)$$

Siendo:  $W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}} = \frac{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n}{3 \cdot \delta_{\max}}$  (2.14)

El método de determinación de las tensiones para este caso es aproximado ya que no tiene en cuenta la elevación de las tensiones en los ángulos interiores. Empleando la analogía de la membrana puede apreciarse que las tensiones en estos lugares son particularmente altas cuando el radio de curvatura es pequeño, de ahí la necesidad de emplear curvas suaves para estos ángulos.

Analicemos ahora la determinación de las tensiones tangenciales en una barra de paredes delgadas de perfil cerrado. En este caso, como se vio anteriormente, las tensiones se distribuyen uniformemente dentro del espesor (Fig. 2.1 b).



**Figura 2.3 Perfil de paredes delgadas cerrado.**

De la barra de paredes delgadas de perfil cerrado mostrada en la Fig. 2.3 a) separemos el prisma elemental de longitud  $dz$ . Proyectando las fuerzas en la dirección del eje  $z$  se cumple que (Fig. 2.3 b):

$$\sum F_i = \tau_1 \cdot \delta_1 \cdot dz - \tau_2 \cdot \delta_2 \cdot dz = 0$$

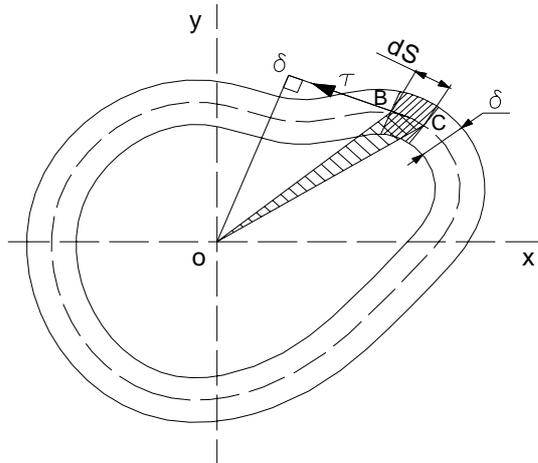
De modo que:

$$\tau_1 \cdot \delta_1 = \tau_2 \cdot \delta_2 = \tau \cdot \delta = cte \quad (2.15)$$

Como los puntos 1 y 2 están escogidos de forma arbitraria se concluye que el producto  $\tau\delta$  no varía a lo largo del contorno de la barra. El momento de las tensiones tangenciales con relación a un punto arbitrario O, será igual al momento torsor. O sea (Fig. 2.4).

$$M_t = \int_S \tau \cdot \delta \cdot ds \cdot OA = \tau \cdot \delta \cdot \int_S OA \cdot ds$$

$$(2.16)$$



**Figura 2.4 Sección del perfil de paredes delgadas cerrado.**

El producto  $OA \cdot ds$  es igual al doble del área encerrada en el triángulo OBC y la integral de ese producto  $\int_S OA \cdot ds$  es igual al área sectorial de la sección con relación al punto O y es numéricamente igual al doble del área encerrada en la línea media del contorno  $A^*$ .

$$\int_S OA \cdot ds = \omega = 2 \cdot A^* \quad (2.17)$$

De la ecuación (2.16) se tiene que:

$$M_t = 2 \cdot \tau \cdot \delta \cdot \int_S \frac{1}{2} \cdot OA \cdot ds = 2 \cdot \tau \cdot \delta \cdot A^* \quad (2.18)$$

De donde:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot A^*} \quad (2.19)$$

$$W_t = 2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min} \quad (2.20)$$

La expresión para el cálculo del desplazamiento angular  $\varphi$  para la barra de perfil cerrado se halla comparando la energía potencial de la barra expresada, por un lado en función de  $\tau$  y por otro en función de  $M_t$  y de  $\varphi$ .

La energía potencial unitaria de deformación en función de las tensiones principales para un estado tensional cualquiera es:

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] \quad (2.21)$$

Para el estado tensional de cortante puro:

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0 \quad y \quad \sigma_3 = -\tau \quad \text{donde:}$$

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[ \tau^2 + \tau^2 - 2 \cdot \mu \cdot (-\tau^2) \right] = \frac{2 \cdot \tau^2 \cdot (1 + \mu)}{2 \cdot E} \quad (2.22)$$

$$\text{Pero: } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (2.23)$$

Donde:

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \quad (2.24)$$

La energía potencial total acumulada en el volumen elemental de dimensiones  $ds$ ,  $dz$  y  $\delta$  (Fig. 2.3 b) será:

$$dU = U_0 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot \delta \cdot ds \cdot dz \quad (2.25)$$

Y la energía potencial de toda la barra será:

$$U = \int_s \int_l \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot \delta \cdot ds \cdot dz = \frac{\tau^2 \cdot \delta^2 \cdot l}{2 \cdot G} \cdot \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (2.26)$$

Y como según la expresión (2.18),  $\tau \cdot \delta = \frac{M_t}{2 \cdot A^*}$ , se tiene que:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A^{*2}} \cdot \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (2.27)$$

Y para relacionar esta energía con el desplazamiento angular se tiene que también:

$$U = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi \quad (2.28)$$

Igualando (2.27) y (2.28) se tiene que, despejando  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{4 \cdot G \cdot A^{*2}} \cdot \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (2.29)$$

Y como en general  $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}$ , se tiene que:

$$I_t = \frac{4 \cdot A^{*2}}{\int_s \frac{ds}{\delta}} \quad (2.30)$$

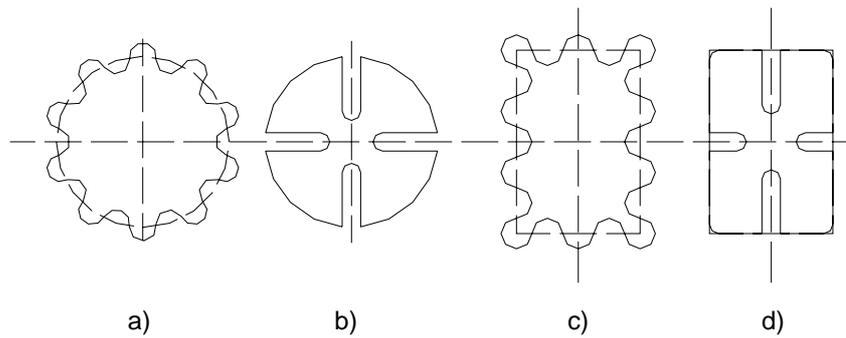
Y si el espesor  $\delta$  es constante a través de todo el contorno:

$$I_t = \frac{4 \cdot A^{*2}}{s} \quad (2.31)$$

Donde  $s$  es la longitud total de la línea media del contorno.

### **2.3.2 Perfil cerrado de paredes delgadas corrugadas.**

En la Fig. 2.5 se muestran algunos perfiles de paredes delgadas cerrados con el contorno corrugado.

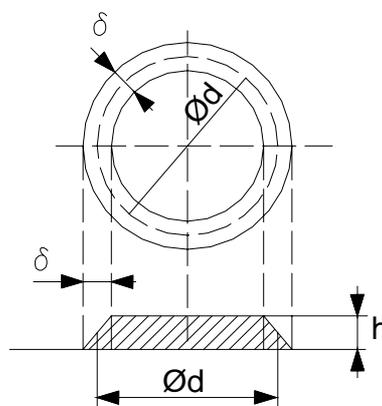


**Figura 2.5 Perfiles cerrados de paredes delgadas corrugadas.**

Estos perfiles son igualmente resistentes que los perfiles lisos correspondientes, ya que la resistencia depende de  $W_t = 2 \cdot A \cdot \delta$  y el área encerrada en la línea media del contorno es la misma. Sin embargo la rigidez depende de  $I_t = \frac{4 \cdot A^2 \cdot \delta}{s}$  y es inversamente proporcional al perímetro. En los perfiles corrugados se aumenta el perímetro del contorno sin aumentar el área encerrada dentro del mismo, lo que hace que los perfiles sean igualmente resistentes que los lisos, pero mucho menos rígidos.

### 2.3.3. Perfil cerrado multicelular.

En la torsión en barras de cualquier sección se cumple la analogía de la membrana, que establece la analogía entre la pendiente de la membrana y la tensión tangencial y entre el volumen y el momento torsor.



**Figura 2.6 Analogía de la membrana para un perfil cerrado circular.**

Para un perfil cualquiera:

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2 \cdot A^* \cdot \delta} \quad (2.32)$$

Para un perfil cerrado anular, de paredes delgadas  $A^* = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  (2.33)

Y el volumen encerrado en la membrana producto a su deformación, el cual es proporcional al momento torsor, es:

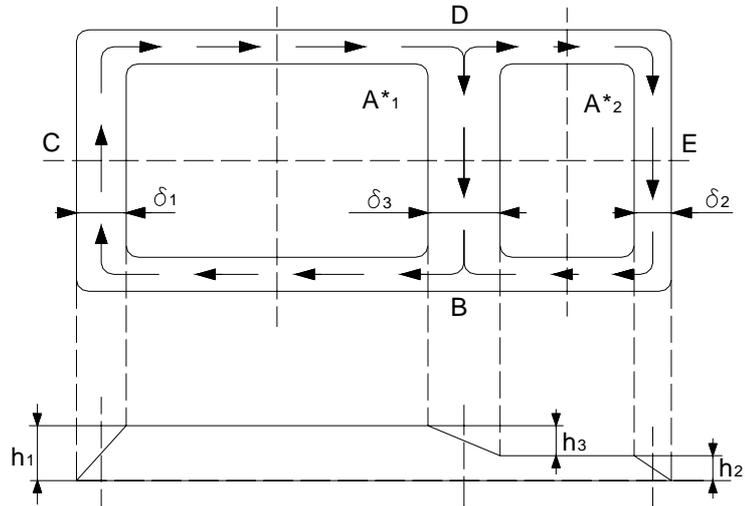
$$M_t \cong 2 \cdot V = 2 \cdot \left( \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right) \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2}{2} \cdot h \quad (2.34)$$

Sustituyendo (2.33) y (2.34) en (2.32):

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot A^* \cdot \delta} = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{2} \cdot h}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \delta} = \frac{h}{\delta} \quad (2.35)$$

Partiendo de esta condición se pueden hallar las expresiones para el cálculo de la resistencia y de la rigidez de los perfiles de paredes delgadas cerradas multicelulares.

Analicemos como se deforma la membrana de este tipo de perfil. En la Fig. 2.7 se muestra un perfil cerrado multicelular compuesto por dos células de diferentes espesores en la pared y divididos por un tabique también de diferente espesor.



**Figura 2.7 Perfil cerrado multicelular compuesto por dos células.**

Partiendo de la condición (2.35) se tiene que:

$$\tau_1 = \frac{h_1}{\delta_1}, \quad \tau_2 = \frac{h_2}{\delta_2} \quad \text{y} \quad \tau_3 = \frac{h_3}{\delta_3} = \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1 \cdot \delta_1 - \tau_2 \cdot \delta_2}{\delta_3} \quad (2.36)$$

Por la analogía de la membrana, se tiene que:

$$M_{ti} = 2 \cdot (V_1 + V_2) = 2 \cdot (A^*_1 \cdot h_1 + A^*_2 \cdot h_2) = 2 \cdot A^*_1 \cdot \tau_1 \cdot \delta_1 + 2 \cdot A^*_2 \cdot \tau_2 \cdot \delta_2 \quad (2.37)$$

Ahora bien para cada célula se cumple que:

$$\tau_i = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_{ti}}{2 \cdot A_i^* \cdot \delta_i} \quad \text{De donde} \quad \frac{1}{\delta_i} = \frac{2 \cdot \tau_i \cdot A_i^*}{M_{ti}} \quad (2.38)$$

$$\text{Y } \theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{ti}}{G \cdot l_{ti}} = \frac{M_{ti}}{4 \cdot G \cdot A_i^*} \cdot \int_s \frac{ds}{\delta_i} \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.39) se tiene que:

$$\theta = \frac{M_{tj}}{4 \cdot G \cdot A_j^*} \int_s \frac{2 \cdot \tau_j \cdot A_j^*}{M_{tj}} \cdot ds = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_j^*} \int_s \tau_j \cdot ds \quad (2.40)$$

O sea:

$$\int_s \tau_j \cdot ds = 2 \cdot A_j^* \cdot G \cdot \theta \quad (2.41)$$

Como las tensiones son constantes a lo largo del contorno en las paredes donde el espesor es constante, se puede plantear para cada célula:

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \cdot S_j = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A_j^* \quad (2.42)$$

Donde j es un tramo del contorno donde el espesor sea constante. O sea:

Para la célula 1:

$$\tau_1 \cdot s_1 + \tau_3 \cdot s_3 = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A_1^* \quad (2.43)$$

Para la célula 2:

$$\tau_2 \cdot s_2 - \tau_3 \cdot s_3 = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A_2^* \quad (2.44)$$

Ya que en la célula 2 la tensión en la pared de espesor  $\delta_3$  tiene sentido contrario que la de espesor  $\delta_2$ .

Simultaneando las ecuaciones (2.36), (2.37), (2.43) y (2.44) se obtiene finalmente que:

$$\tau_1 = M_t \cdot \frac{\delta_3 \cdot s_2 \cdot A_1^* + \delta_2 \cdot s_3 \cdot (A_1^* + A_2^*)}{2 \cdot [\delta_1 \cdot \delta_3 \cdot s_2 \cdot A_1^{*2} + \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot s_1 \cdot A_2^{*2} + \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot s_3 \cdot (A_1^* + A_2^*)^2]} \quad (2.45)$$

$$\tau_2 = M_t \cdot \frac{\delta_3 \cdot s_1 \cdot A_2^* + \delta_1 \cdot s_3 \cdot (A_1^* + A_2^*)}{2 \cdot \left[ \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot s_2 \cdot A_1^{*2} + \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot s_1 \cdot A_2^{*2} + \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot s_2 \cdot (A_1^* + A_2^*)^2 \right]} \quad (2.46)$$

$$\tau_3 = M_t \cdot \frac{\delta_1 \cdot s_2 \cdot A_1^* - \delta_2 \cdot s_1 \cdot A_2^*}{2 \cdot \left[ \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot s_2 \cdot A_1^{*2} + \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot s_1 \cdot A_2^{*2} + \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot s_3 \cdot (A_1^* + A_2^*)^2 \right]} \quad (2.47)$$

Y el ángulo unitario de torsión:

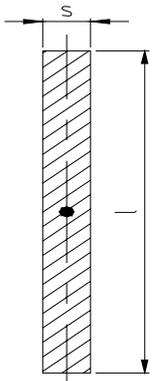
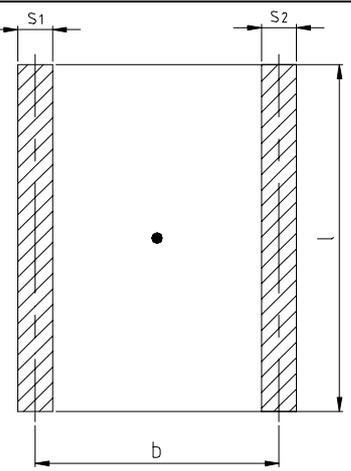
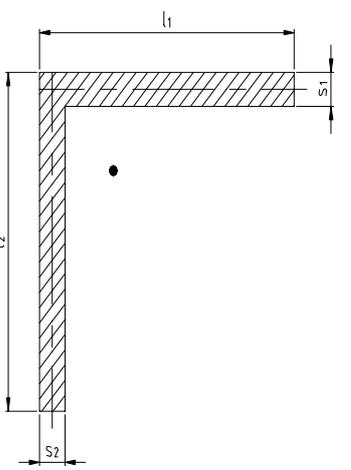
$$\theta = \frac{\tau_1 \cdot s_1 + \tau_3 \cdot s_3}{2 \cdot G \cdot A_1^*} \quad (2.48)$$

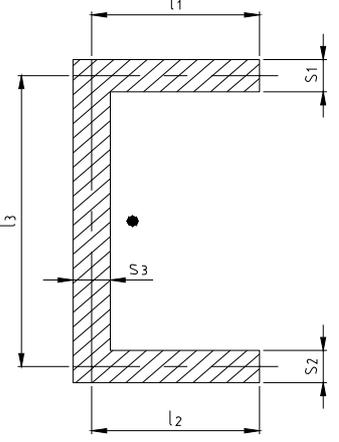
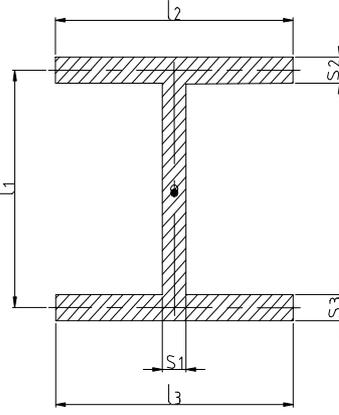
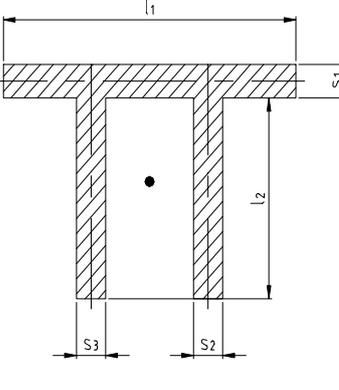
Si la pared DB está en el plano de simetría y  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$  y  $A_1^* = A_2^*$ , se obtiene que  $\tau_3 = 0$ . En este caso todo el momento torsor lo absorbe la pared exterior y el alma queda sin solicitar.

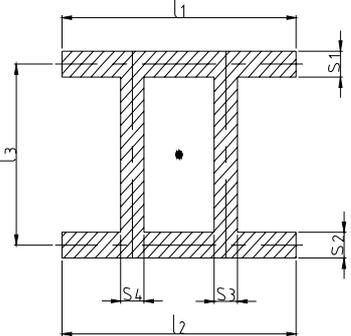
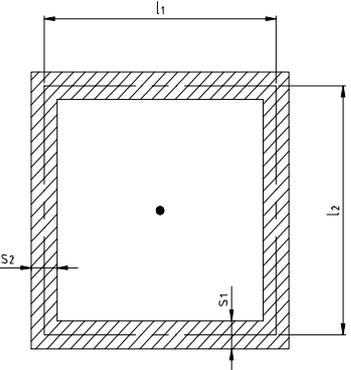
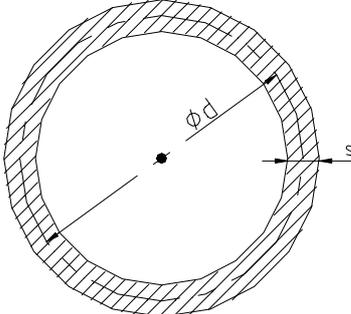
#### **2.4 Expresiones propuestas para el cálculo de las tensiones tangenciales máximas para diferentes uniones con perfiles de configuración geométrica compleja sometidos a torsión.**

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en el epígrafe 2.2 para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión, se obtuvieron las nuevas expresiones para el cálculo de las tensiones de diferentes uniones soldadas sometidas a torsión. En la Tabla 2.2 se muestran las expresiones propuestas en el presente trabajo considerando las uniones como Perfiles de Paredes Delgadas. En general las expresiones obtenidas aplicando la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas son muy simples. Estas expresiones no aparecen descritas en ninguna de las fuentes bibliográficas consultadas.

**Tabla 2.2 Expresiones propuestas para el cálculo de las tensiones tangenciales máximas en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja.**

No	Tipo de sección	Expresiones propuestas para el cálculo de $\tau_{Mt}$	
		Expresión general	Para espesor $s = \text{cte}$
1		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 \cdot l}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 \cdot l}$
2		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{\text{máx}}}{l \cdot (s_1^3 + s_2^3)}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{2 \cdot l \cdot s^2}$
3		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{\text{máx}}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 (l_1 + l_2)}$

4		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{\max}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3 + l_3 s_3^3}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 (l_1 + l_2 + l_3)}$
5		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{\max}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3 + l_3 s_3^3}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 (l_1 + l_2 + l_3)}$
6		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{\max}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3 + l_2 s_3^3}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 (l_1 + 2 \cdot l_2)}$

7		$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{max}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3 + l_3 s_3^3 + l_3 s_4^3}$	$\tau_{Mt} = \frac{3 \cdot Mt}{s^2 (l_1 + l_2 + 2 \cdot l_3)}$
8		$\tau_{Mt} = \frac{0.5 \cdot Mt}{l_1 \cdot l_2 \cdot s_{min}}$	$\tau_{Mt} = \frac{0.5 \cdot Mt}{l_1 \cdot l_2 \cdot s}$
9		$\tau_{Mt} = \frac{2 \cdot Mt}{\pi \cdot d^2 \cdot s_{min}}$	$\tau_{Mt} = \frac{2 \cdot Mt}{\pi \cdot d^2 \cdot s}$

2.5 Ejemplo de cálculo de la expresión propuesta para determinar las tensiones tangenciales máximas en una unión soldada con perfil abierto no desarrollable sometido a torsión libre.

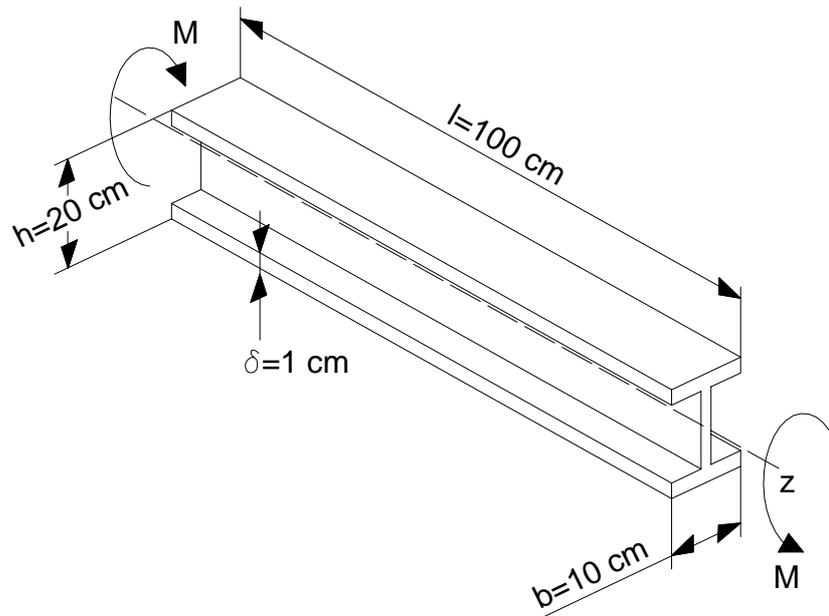


Figura 2.8 Perfil abierto no desarrollable sometido a torsión libre.

En este epígrafe se ilustrará el cálculo de las tensiones tangenciales de torsión para el caso de un perfil abierto no desarrollable como se muestra en la Fig. 2.8 y se comparará con los resultados obtenidos aplicando el Método de los Elementos. El momento aplicado a la unión es de  $8 \cdot 10^5\text{ N mm}$ .

Expresión propuesta para el cálculo de las tensiones tangenciales aplicando la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas para un contorno No Desarrollable.

$$\tau_{Mt} = \frac{Mt}{Wt} \quad (2.49)$$

$Wt$  - Parámetro geométrico de la sección de la costura a torsión, considerada está como un perfil de paredes delgadas calculado en el plano de la costura.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3 \cdot Mt \cdot s_{m\acute{a}x}}{l_1 s_1^3 + l_2 s_2^3 + l_3 s_3^3} \quad (2.50)$$

Teniendo en cuenta que  $s_1 = s_2 = s_3 = \delta$  ;  $l_1 = l_2 = b$  y  $l_3 = h$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3 \cdot Mt}{\delta^2 (2b + h)} \quad (2.51)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 10^5}{10^2 (2 \cdot 100 + 180)} = \frac{24 \cdot 10^5}{38000} = 63.16 \text{ MPa}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 63.16 \text{ MPa}$$

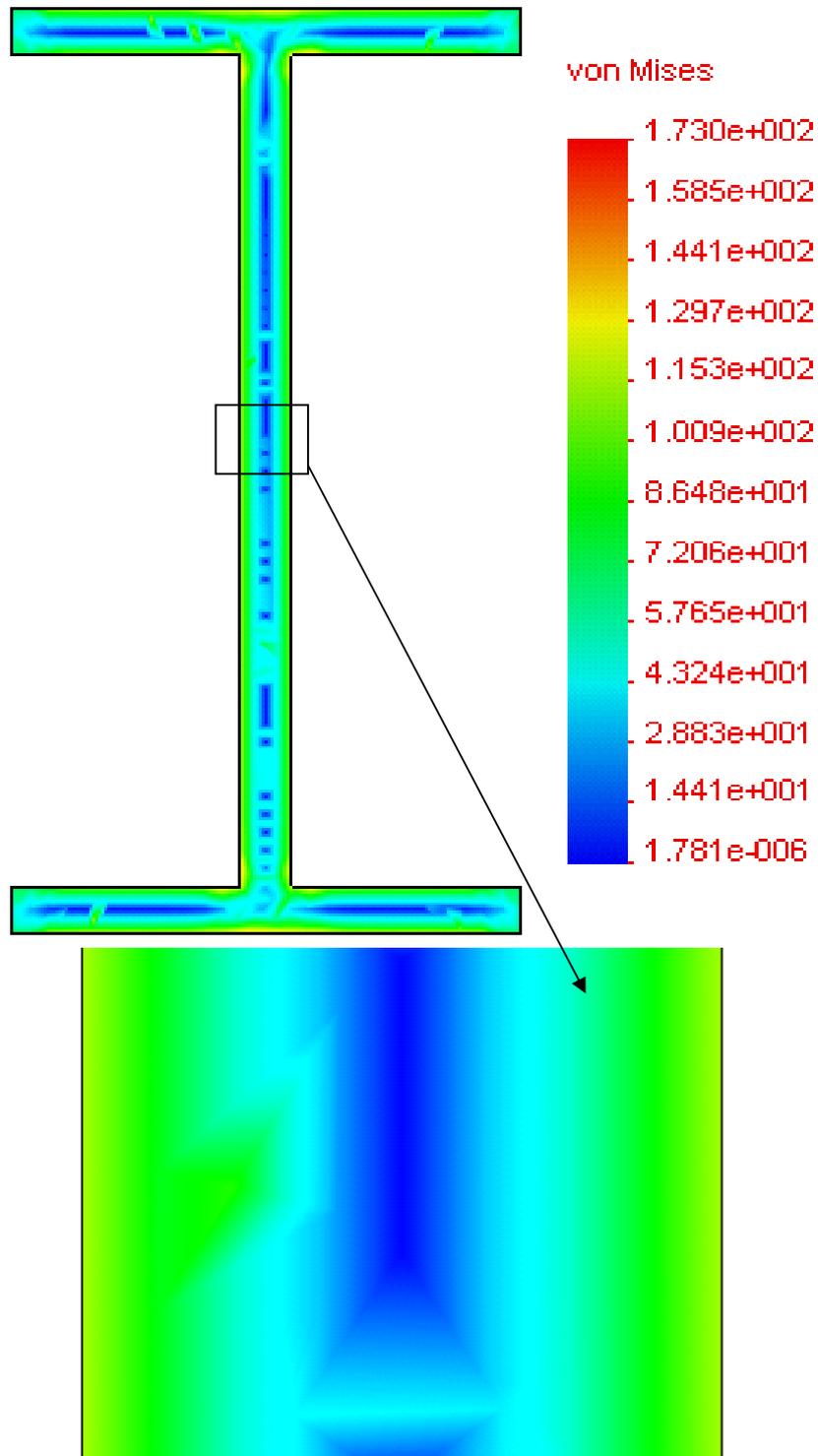
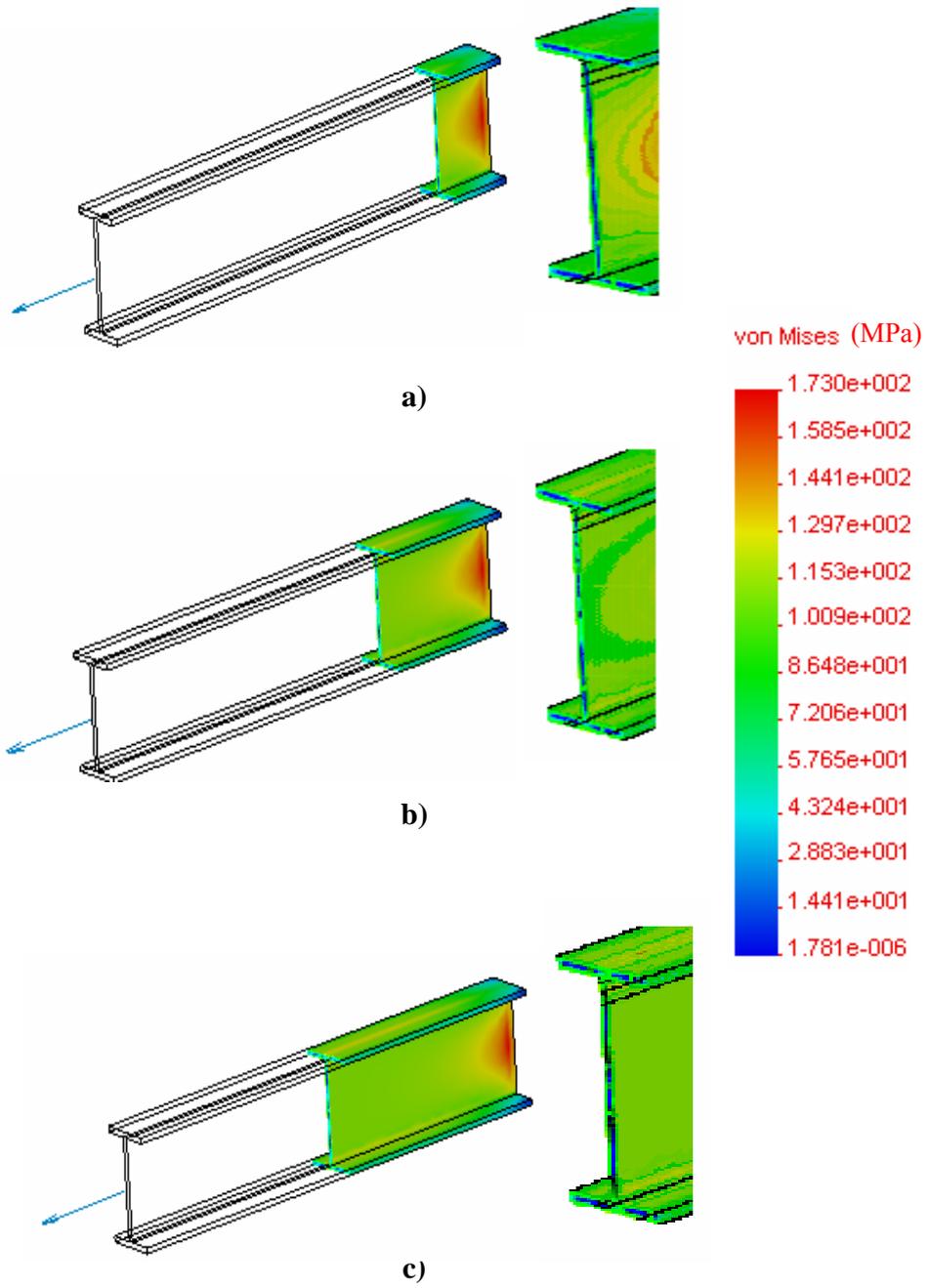
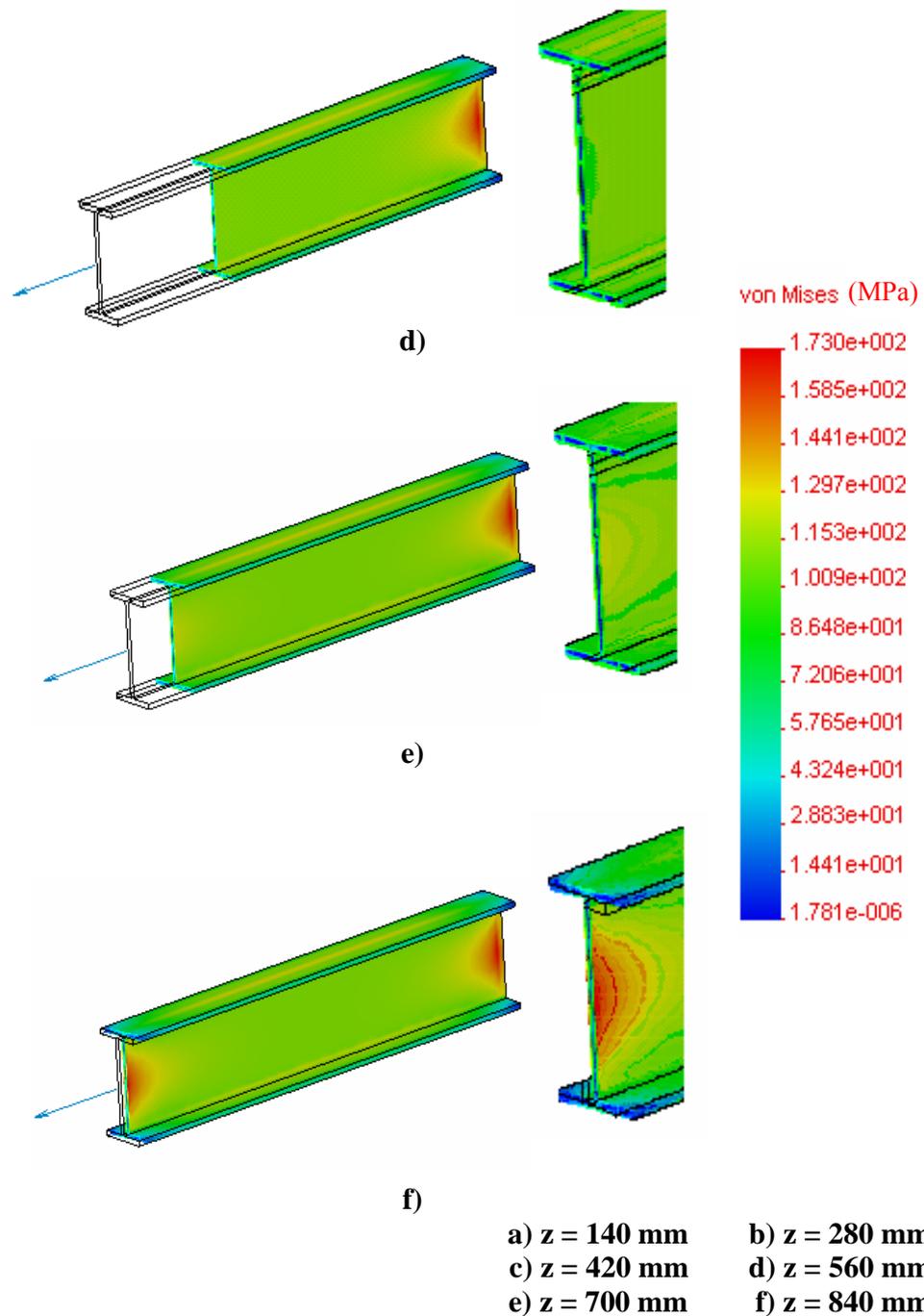


Figura 2.9 Cuadro de tensiones en la sección de la barra en la mitad de su longitud para el caso de torsión libre.





**Figura 2.10** Distribución de tensiones obtenidas por el Método de Elementos Finitos para diferentes secciones a lo largo de la longitud de la viga definida por la coordenada  $z$  a partir del extremo libre posterior.

En las Fig. 2.9 se muestran los cuadros de tensiones para diferentes secciones a lo largo de toda la longitud de la viga I analizada, donde se aprecia claramente que con excepción de los extremos donde están aplicados los momentos (principio de Saint Venant), en el resto de las secciones el cuadro de tensiones es el mismo con una correspondencia absoluta con el cuadro de tensiones que debía existir de acuerdo con la Teoría de la Torsión en Perfiles de Paredes Delgadas (Analogía de la Membrana).

En la Fig. 2.10 se observa el cuadro de tensiones en la sección ubicada en la mitad de la viga, ampliada. Como se puede inferir del cuadro de colores la tensión es máxima en todo el contorno y alcanza una magnitud  $\sigma_{eq} = 115.3$  MPa según el criterio de Von Mises.

La Tensión tangencial máxima según este propio criterio de Von Mises (4<sup>ta</sup> Hipótesis de Resistencia)  $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} = 66.6$  MPa, el cálculo analítico aplicando la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas arrojó  $\tau_{m\acute{a}x} = 63.16$  MPa, lo que es una excelente correspondencia con el Método de Elementos Finitos.

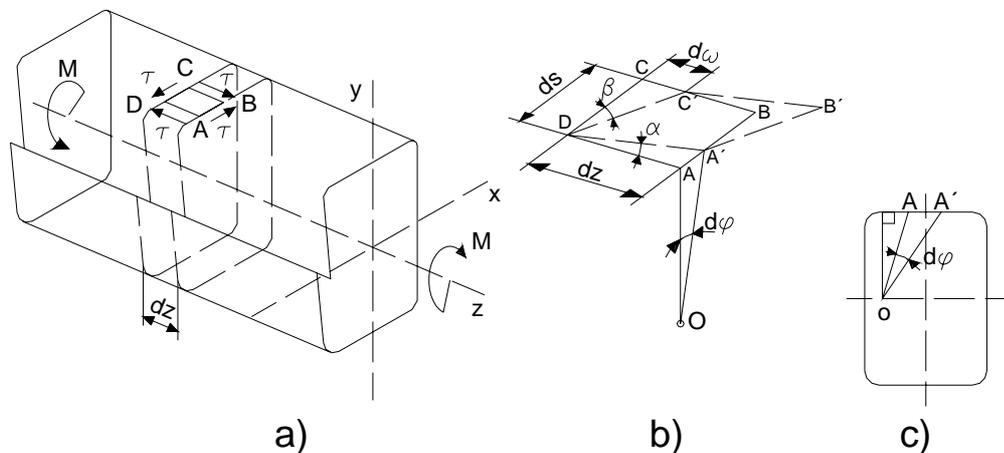
# *Capítulo 3*

### Capítulo III. Influencia de la torsión restringida en la magnitud de las tensiones en uniones soldadas sometidas a torsión.

#### 3.1 Alabeo de las secciones transversales de la barra de paredes delgadas sometidas a torsión.

Hasta ahora hemos analizado el cálculo de las tensiones tangenciales y las deformaciones angulares de las barras de paredes delgadas sometidas a torsión libre. Se analizará a continuación las particularidades relacionadas con la aparición de tensiones normales en las secciones transversales de la barra torsionada, a causa del alabeo de la sección.

Se parte del supuesto que la sección transversal no modifica su configuración, sin embargo, los puntos de la sección reciben ciertos desplazamientos a lo largo del eje de la barra, es decir, se produce lo que se conoce como alabeo de la sección.



**Figura 3.1 Torsión de una barra de perfil abierto.**

Durante la torsión la sección transversal gira respecto a cierto punto inmóvil O que denominaremos centro de torsión. De acuerdo con la Ley de Hooke para la distorsión, las tensiones tangenciales que surgen en la sección originan una distorsión  $\gamma$  en el elemento diferencial ABCD (Fig. 3.1 a y b). El ángulo de distorsión  $\gamma$  es igual a la suma  $\alpha + \beta$ . O sea:

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (3.1)$$

Determinemos estos sumandos por separado:

$\tan \alpha \cong \alpha = \frac{AA'}{dz}$ , pero  $AA' \cong r \cdot d\varphi$ , siendo  $r$  la distancia del centro de torsión a la tangente a la línea del contorno en el punto  $A$ .

Se tiene por tanto que:

$$\alpha = r \cdot \frac{d\varphi}{dz} = r \cdot \theta \quad (3.2)$$

Designando por  $w$  los desplazamientos en la dirección del eje  $z$

$$\tan \beta \cong \beta = \frac{dw}{ds} \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.1)

$$\gamma = r \cdot \theta + \frac{dw}{ds} \quad (3.4)$$

Y como según la Ley de Hooke,  $\tau = G \cdot \gamma$ , sustituyendo y despejando  $dw$ , se tiene que:

$$dw = \left( \frac{\tau}{G} - r \cdot \theta \right) \cdot ds \quad (3.5)$$

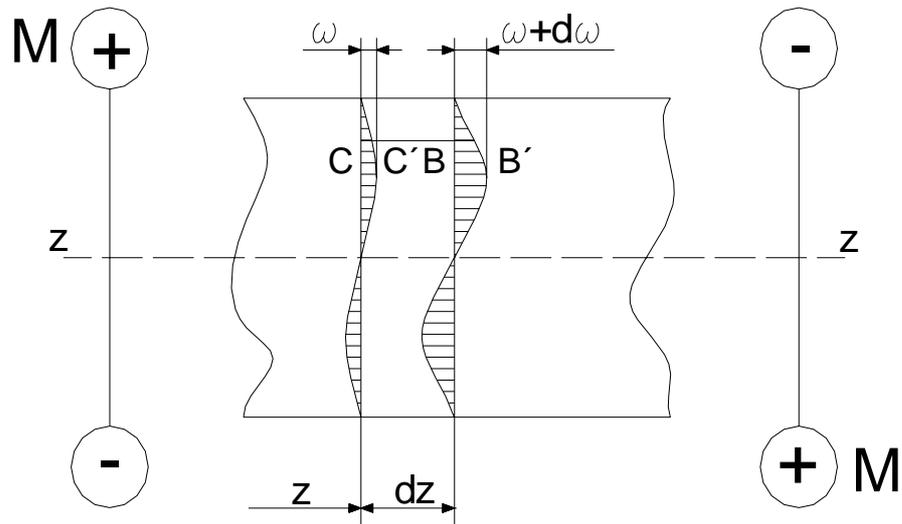
Y como para la línea media del contorno, en el caso de los perfiles abiertos,  $\tau=0$ . Entonces:

$$dw = -\theta \cdot r \cdot ds = -\theta \cdot dw \quad (3.6)$$

pero  $r \cdot ds = dw$ . Finalmente:

$$w = -\theta \cdot \int dw = -\theta \cdot \omega \quad (3.7)$$

Si el ángulo unitario de torsión  $\theta$ , varía a lo largo del eje  $z$ , variará también  $w$  y surgirán tensiones normales en la sección (Fig. 3.2). Esto ocurre cuando se imponen ligaduras a la sección.



**Figura 3.2 Tensiones normales que surgen en la sección.**

O sea:

$$\theta = f(z) \quad (3.8)$$

Así por ejemplo para el segmento CB se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{w + dw - w}{dz} = \frac{dw}{dz} \quad (3.9)$$

Pero como según (3.7):  $w = -\theta \cdot \omega$  y según (3.8):  $\theta = f(z)$ , se tiene que:

$$\frac{dw}{dz} = -\omega \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (3.10)$$

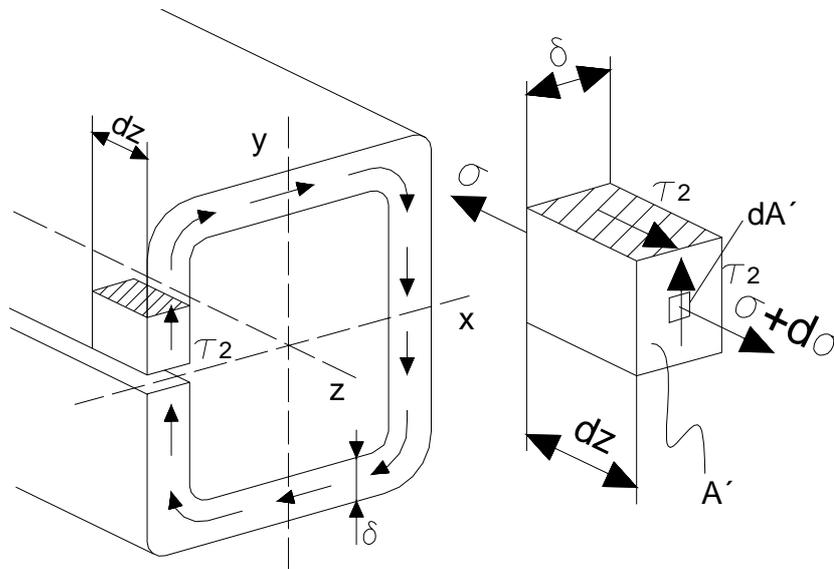
y

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = -\omega \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (3.11)$$

Y como según la Ley de Hooke para las tensiones normales:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = -E \cdot \omega \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (3.12)$$

La aparición de las tensiones normales que varían a lo largo del eje z conduce a la aparición de tensiones secundarias en la sección de la barra,  $\tau_2$  (Fig. 3.3).



**Figura 3.3 Tensiones secundarias que aparecen en la sección de la barra.**

Si aislamos un elemento de longitud  $dz$  y establecemos la sumatoria de fuerzas en la dirección del eje z, considerando además que el elemento está en equilibrio, se tiene que:

$$\sum F_z = \tau_2 \cdot \delta \cdot dz + \int_{A'} (\sigma + d\sigma) \cdot dA' - \int_{A'} \sigma \cdot dA' = 0 \quad (3.13)$$

Despejando  $\tau_2$  de (3.13):

$$\tau_2 = -\frac{1}{\delta} \cdot \int_{A'} \frac{d\sigma}{dz} \cdot dA' \quad (3.14)$$

De la expresión (3.12) se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{dz} = -E \cdot \omega \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (3.15)$$

Sustituyendo finalmente (3.15) en (3.14) se tiene:

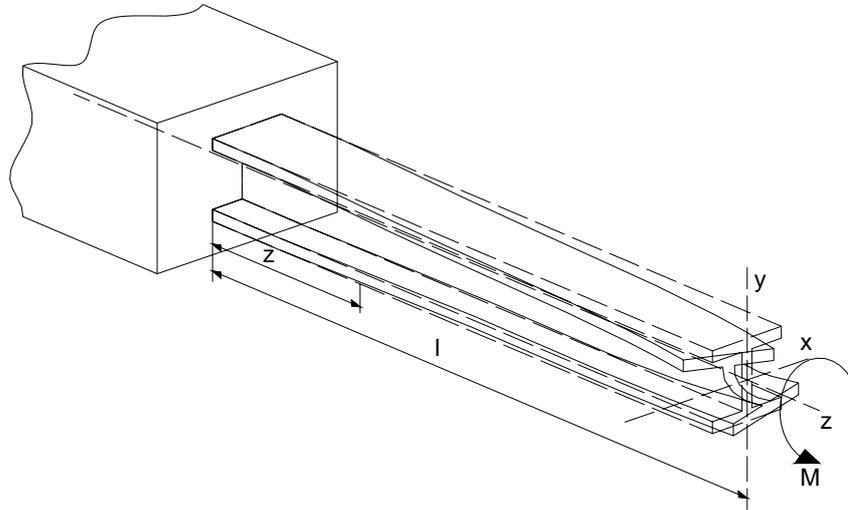
$$\tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \int_{A'} \omega \cdot dA' \quad (3.16)$$

Las tensiones tangenciales secundarias  $\tau_2$  se distribuyen uniformemente en el espesor del perfil y por lo tanto no son iguales a cero en la línea media de la sección, como ocurre con las tensiones tangenciales primarias  $\tau_1$ .

Este resultado se encuentra en cierta contradicción con la suposición inicial de que en la línea media del contorno las tensiones tangenciales son iguales a cero. Es decir, que cuando el ángulo de torsión  $\theta$  es variable, la ley real de variación de  $w$  en la sección se diferencia de la ley del área sectorial. Esto, sin embargo, no influye sensiblemente sobre las dependencias fundamentales y las expresiones obtenidas, las cuales permiten determinar con suficiente exactitud las magnitudes de las tensiones normales y de las tensiones tangenciales secundarias cuando  $\theta$  es variable.

### **3.2 Torsión restringida en barras de paredes delgadas de perfil abierto.**

Se entiende por torsión restringida el caso cuando se limita el alabeo de la sección, por ejemplo cuando la barra está empotrada en un extremo (Fig. 3.4).



**Figura 3.4 Barra de sección doble T sometida a torsión restringida.**

En el empotramiento los desplazamientos en la dirección del eje z, w, de todos los puntos de la sección son iguales a cero. A medida que nos alejamos de esta sección, el alabeo y el ángulo unitario de torsión aumentan. En las secciones donde está limitado el alabeo surgen tensiones normales, las cuales constituyen un sistema de fuerzas auto equilibrado. O sea, la suma de las fuerzas en la dirección del eje z y los momentos flectores con relación a los ejes x e y tienen que ser iguales a cero, lo cual se expresa por las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum F_z &= \int_A \sigma \cdot dA = 0 \\
 \sum M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0 \\
 \sum M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Pero como:  $\sigma = -E \cdot \omega \cdot \frac{d\theta}{dz}$

Las expresiones (3.17) se pueden escribir así:

$$\left. \begin{aligned} \int_A \omega \cdot dA &= 0 \\ \int_A \omega \cdot y \cdot dA &= 0 \\ \int_A \omega \cdot x \cdot dA &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

En estas expresiones como se vio anteriormente el área sectorial se refiere al centro de torsión. De las dos últimas expresiones se deduce por lo tanto que como los momentos sectoriales lineales  $\int_A \omega \cdot y \cdot dA$  y  $\int_A \omega \cdot x \cdot dA$  con relación al centro de torsión tienen que ser cero, entonces en la torsión restringida, el centro de torsión coincide con el centro de flexión.

La primera de las condiciones (3.18) hay que cumplirla desde la construcción del diagrama del área sectorial. En el caso de un perfil simétrico el punto inicial para calcular el área sectorial se debe situar en el plano de simetría. Para el caso general se construye el diagrama de  $\omega_0$  para un origen arbitrario.

Entonces el área sectorial referida al centro de torsión que coincide con el centro de flexión será:

$$\omega = \omega_0 + C \quad (3.19)$$

Donde C es un valor constante.

Y como de acuerdo a la primera de las condiciones (3.18) el momento estático sectorial tiene que ser igual a cero. Se tiene que cumplir que:

$$\int_A \omega \cdot dA = \int_A \omega_0 \cdot dA + C \cdot A = 0 \quad (3.20)$$

De (3.20) se despeja la constante C:

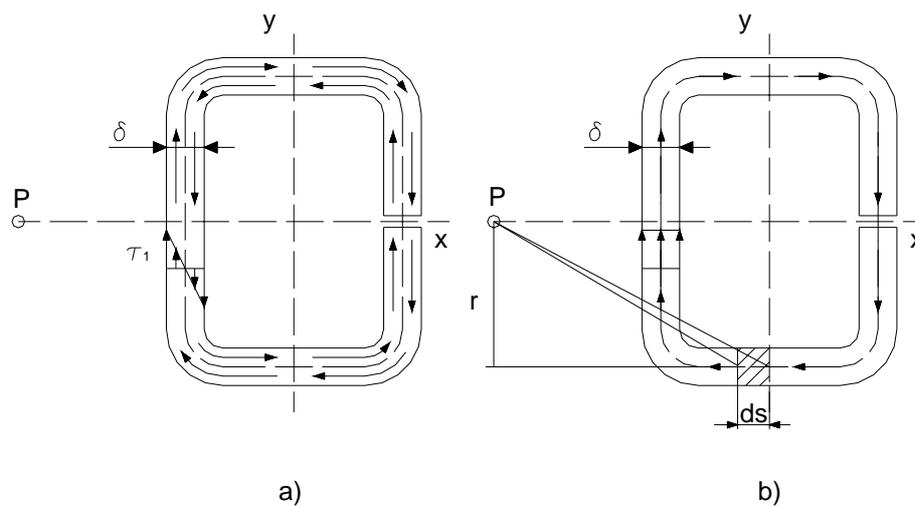
$$C = -\frac{\int_A \omega_0 \cdot dA}{A} \quad (3.21)$$

Esta magnitud se debe sumar a los valores de  $\omega_0$  en todos los puntos del contorno y de esta manera el diagrama de  $\omega$  obtenido satisface la condición  $\int_A \omega \cdot dA = 0$ . Este

diagrama correspondiente al polo que coincide con los centros de flexión y de torsión y que satisface la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección del eje z se denomina diagrama del área sectorial principal.

En la torsión restringida, además de las tensiones tangenciales primarias provocadas por el momento M (Fig. 3.5 a) surgirán tensiones tangenciales secundarias originadas por la restricción del alabeo (Fig. 3.5 b), de manera que el momento torsor resultante en cada sección será igual a la suma de los dos momentos, de modo que:

$$M_t = M_1 + M_2 \quad (3.22)$$



**Figura 3.5 Tensiones tangenciales provocadas por el efecto de torsión restringida.**

El momento  $M_1$  será igual a:

$$M_1 = G \cdot I_t \cdot \theta$$

Donde  $I_t$  es la característica geométrica de la sección que ya conocemos (expresiones (2.5) y (2.8)) y que dependen de la geometría de la sección.

El momento de las tensiones tangenciales secundarias  $\tau_2$  con relación al polo P (centro de torsión) será:

$$M_2 = \int_s \tau_2 \cdot \delta \cdot ds \cdot r = \int_{A'} \tau_2 \cdot \delta \cdot d\omega \quad (3.23)$$

Y como según (3.16):

$$\tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \int_{A'} \omega \cdot dA' \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.23) se tiene que:

$$M_2 = E \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \int_{A'} \left( \int_{A'} \omega \cdot dA' \right) \cdot d\omega \quad (3.25)$$

La integral de la expresión (3.25) se resuelve por partes:

$$u = \int_A \omega \cdot dA' \quad dv = d\omega$$

$$du = \omega \cdot dA' \quad v = \omega$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

De donde:

$$\int_{A'} \left( \int_{A'} \omega \cdot dA' \right) \cdot d\omega = \omega \cdot \int_{A'} \omega \cdot dA - \int_{A'} \omega^2 \cdot dA' \quad (3.26)$$

La integral  $\int_{A'} \omega \cdot dA$ , que representa el momento estático del área sectorial, tiene que

ser igual a cero y la integral  $\int_{A'} \omega^2 \cdot dA'$  se denomina momento sectorial de inercia. De

donde:

$$\int_{A'} \left( \int_{A'} \omega \cdot dA' \right) \cdot d\omega = -I_{\omega} \quad (3.27)$$

Sustituyendo finalmente (3.27) en (3.25)

$$M_2 = -E \cdot I_{\omega} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (3.28)$$

Y la expresión (3.22) queda entonces como:

$$M_t = G \cdot I_t \cdot \theta - E \cdot I_{\omega} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (3.29)$$

Designando por:  $\alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega}}$  (3.30)

Se obtiene que:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2 \cdot \theta = -\alpha^2 \cdot \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad (3.31)$$

Donde  $M_t=f(z)$

La ecuación (3.31) se conoce como ecuación diferencial de la torsión restringida. La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\theta = C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot z) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot z) + \theta^* \quad (3.32)$$

Donde  $\theta^*$  es una función particular de la ecuación.

Si se trata de una barra empotrada en un extremo y con un momento M aplicado en el extremo libre (Fig. 3.4), donde  $M_t=M=const$ , la solución particular de la ecuación será:

$$\theta^* = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad (3.33)$$

O sea:

$$\theta = C_1 \cdot \sinh(\alpha \cdot z) + C_2 \cdot \cosh(\alpha \cdot z) + \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad (3.34)$$

Para hallar las constantes de integración se tienen las condiciones:

$$\left[ \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \quad \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}), \quad \frac{d(\sinh(x))}{dx} = \cosh(x), \quad \frac{d(\cosh(x))}{dx} = \sinh(x) \right]$$

Para  $z=0$ ,  $\theta=0$ ,  $\sinh 0=0$ ,  $\cosh 0=1$ . De donde:

$$C_2 = -\frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad (3.35)$$

Para  $z=l$ ,  $\theta=\theta_{\max}$  y  $\sigma = -E \cdot \omega \cdot \frac{d\theta}{dz} = 0$ , de donde:  $\frac{d\theta}{dz} = 0$

La derivada de la expresión (3.34) es:

$$\frac{d\theta}{dz} = C_1 \cdot \alpha \cdot \cosh(\alpha \cdot z) + C_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot z), \text{ evaluando para } z=l:$$

$$C_1 \cdot \alpha \cdot \cosh(\alpha \cdot l) + C_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot l) = 0$$

$$C_1 = -C_2 \cdot \tanh(\alpha \cdot l) = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.36) y (3.35) en (3.34), se tiene que:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot [1 + \tanh(\alpha \cdot l) \cdot \sinh(\alpha \cdot z) - \cosh(\alpha \cdot z)] \quad (3.37)$$

El desplazamiento angular del extremo libre será:

$$\varphi = \int_0^l \theta \cdot dz = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\alpha \cdot l} \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \right] \quad (3.38)$$

En el caso de la torsión libre:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (3.39)$$

Las tensiones normales en la sección del empotramiento son:

$$\sigma = -E \cdot \omega \cdot \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{E \cdot M_t}{G \cdot I_t} \cdot \omega \cdot \alpha \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \quad (3.40)$$

Y los momentos  $M_1$  y  $M_2$  serán:

$$M_1 = G \cdot I_t \cdot \theta = M_t \cdot (1 + \tanh(\alpha \cdot l) \cdot \operatorname{senh}(\alpha \cdot z) - \cosh(\alpha \cdot z)) \quad (3.41)$$

$$M_2 = -E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} = -E \cdot I_\omega \cdot \alpha^2 \cdot \left[ \theta - \frac{M_t}{G \cdot I_t} \right] \quad (3.42)$$

Sustituyendo en (3.42) las expresiones (3.30) y (3.37):

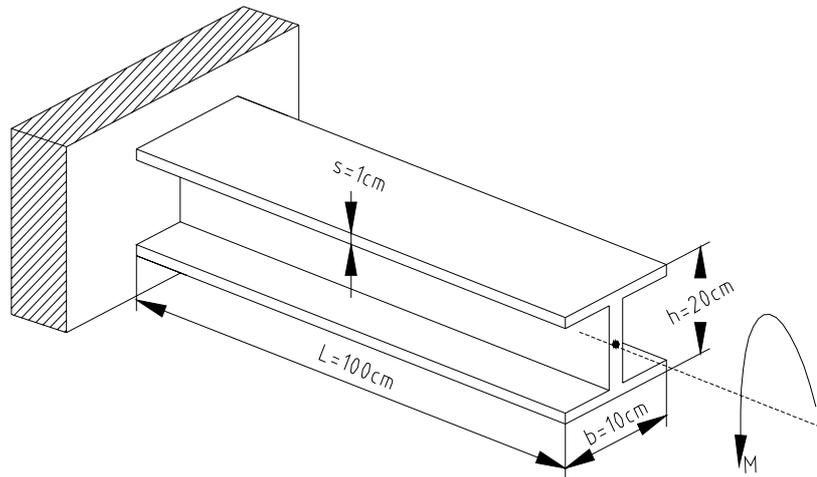
$$M_2 = -M_t \cdot (\tanh(\alpha \cdot l) \cdot \operatorname{senh}(\alpha \cdot z) - \cosh(\alpha \cdot z)) \quad (3.43)$$

La tensión  $\tau_2 = \frac{M_2}{W_2}$ , donde de (3.24) y (3.25):  $W_2 = \frac{\delta \cdot I_\omega}{\int_{A'} \omega \cdot dA'}$  (3.44)

### 3.3 Cálculo de una unión soldada con perfil abierto no desarrollable sometido a torsión restringida.

Se analizará una barra de perfil I cuyas dimensiones se señalan en la Fig. 3.6 que tiene un espesor constante en todo el perímetro  $s = 10$  mm, de acero de bajo contenido de carbono con  $\mu=0,3$ ,  $E=2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup> y  $G=0,77 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>. Se desea

comparar el comportamiento de la viga bajo torsión libre y bajo torsión restringida, para lo cual debe construir los gráficos de momentos, tensiones y desplazamientos angulares para ambos extremos libres y para un extremo empotrado en función de  $M_t$ .



**Figura 3.6 Barra de perfil doble T empotrada en un extremo, sometida a torsión.**

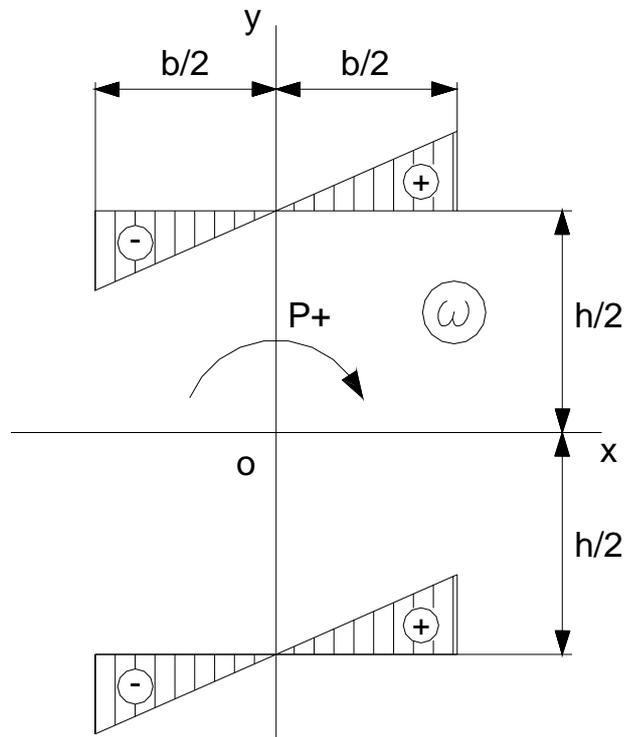
Para el extremo izquierdo empotrado (torsión restringida)

Calculemos primero el momento sectorial de inercia  $I_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA$

Como  $dA = \delta \cdot ds$ , la integral de  $I_\omega$  se puede escribir así:

$$I_\omega = \delta \cdot \int \omega \cdot \omega \cdot ds \quad (3.45)$$

Lo cual se puede interpretar como la integral del producto de dos funciones, o sea,  $\omega$  por si mismo y el producto hallado por el espesor  $\delta$ . Hallemos primero el diagrama del área sectorial  $\omega$ . En este caso por la condición de simetría se conoce la posición del centro de torsión, el cual coincide con el centroide O. En la Fig. 3.7 se muestra el diagrama del área sectorial  $\omega$  con relación al centroide O.



**Figura 3.7 Diagrama del área sectorial  $\omega$  con relación al centroide O.**

Resolviendo la integral por la regla de Vereschaguin:

$$I_{\omega} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot h}{4} \cdot \frac{b \cdot h}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot \delta = \frac{1}{24} \cdot b^3 \cdot h^2 \cdot \delta \text{ [cm}^6\text{]}$$

$$\alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega}} = \frac{G \cdot \frac{\delta^3}{3} \cdot (2 \cdot b + h)}{E \cdot \frac{1}{24} \cdot b^3 \cdot h^2 \cdot \delta} = \frac{G}{E} \cdot \frac{8 \cdot \delta^2 \cdot (2 \cdot b + h)}{b^3 \cdot h^2} \quad (3.46)$$

$$\alpha^2 = \frac{0,77 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{8 \cdot 1^2 \cdot (2 \cdot 10 + 20)}{10^3 \cdot 20^2} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

$$\alpha = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha \cdot l = 1,75$$

El desplazamiento angular en el extremo libre será:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\alpha \cdot l} \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \right] \quad (3.47)$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot 100}{0,77 \cdot 10^4 \cdot \frac{40}{3}} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{1,75} \cdot \tanh(1,75) \right] = 0,45 \cdot 10^{-3} \cdot M_t \quad [\text{rad}]$$

El momento  $M_1$ :

$$M_1 = G \cdot I_t \cdot \theta = M_t \cdot (1 + \tanh(\alpha \cdot l) \cdot \operatorname{senh}(\alpha \cdot z) - \cosh(\alpha \cdot z)) \quad (3.48)$$

Para  $z=0$

$$M_1 = M_t \cdot (1 - 1) = 0, \tau_1 = 0$$

Para  $z=l$ ,

$$M_1 = M_t \cdot (1 + 0,9414 \cdot 2,79 - 2,96) = 0,6665 \cdot M_t \quad [\text{kNcm}]$$

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_t} = \frac{0,6665 \cdot M_t}{\frac{40}{3}} = 5 \cdot 10^{-2} \cdot M_t \quad [\text{kN/cm}^2]$$

El momento  $M_2$

$$M_2 = -M_t \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \cdot \operatorname{senh}(\alpha \cdot z) - \cosh(\alpha \cdot z) \quad (3.49)$$

$$\text{Para } z=0, M_2 = -M_t \cdot (0 - 1) = M$$

$$\text{Para } z=l, M_2 = -M_t \cdot (0,9414 \cdot 2,79 - 2,96) = 0,3335 \cdot M_t \quad \text{kNcm}$$

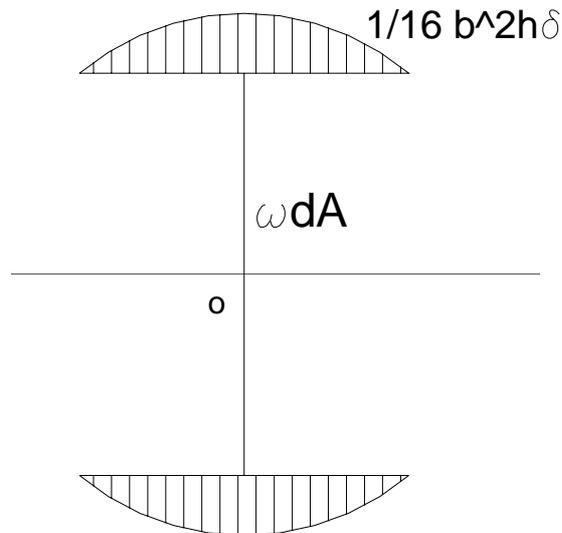
La tensión  $\tau_2 = \frac{M_2}{W_2}$ . Hallemos primero el módulo  $W_2 = \frac{\delta \cdot I_\omega}{\int_A \omega \cdot dA}$

$$\text{El momento estático } \int_A \omega \cdot dA = \int_s \omega \cdot \delta \cdot ds$$

Y como el espesor es constante  $\int_A \omega \cdot dA = \delta \cdot \int_s \omega \cdot ds$

La integral  $\int_s \omega \cdot ds$  no es más que el área encerrada en el diagrama del área sectorial

en cada punto del contorno. En la Fig. 3.8 se muestra el diagrama  $\int_A \omega \cdot dA$ .



**Figura 3.8 Diagrama de  $\int_A \omega \cdot dA$ .**

El valor de  $W_2$  será mínimo donde  $\int_A \omega \cdot dA$  sea máximo. O sea:

$$W_{2\min} = \frac{\delta \cdot \frac{1}{24} \cdot b^3 \cdot h^2 \cdot \delta}{\frac{1}{16} \cdot b^2 \cdot h \cdot \delta} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \cdot \delta$$

$$W_{2\min} = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 1 = \frac{400}{3} \text{ cm}^3$$

La tensión  $\tau_2$ :

Para el empotramiento:  $M_2 = M_t$

$$\tau_2 = \frac{M_2}{W_{2\min}} = \frac{M_t}{\frac{400}{3}} = 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot M_t \quad \left[ \text{kN/cm}^2 \right]$$

Para el extremo libre  $M_2 = 0,3335 \cdot M_t$  [kNcm]

$$\tau_2 = \frac{M_2}{W_{2\min}} = \frac{0,3335 \cdot M_t}{\frac{400}{3}} = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot M_t \quad \left[ \text{kN/cm}^2 \right]$$

La tensión tangencial resultante:

$$\tau_r = \tau_1 + \tau_2 \quad (3.50)$$

Para el empotramiento,  $z=0$ :

$$\tau_r = 0 + 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot M_t = 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot M_t$$

Para el extremo libre  $z=l$ :

$$\tau_r = \left( 5 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2} \right) \cdot M_t = 5,25 \cdot 10^{-2} \cdot M_t \quad \left[ \text{kN/cm}^2 \right]$$

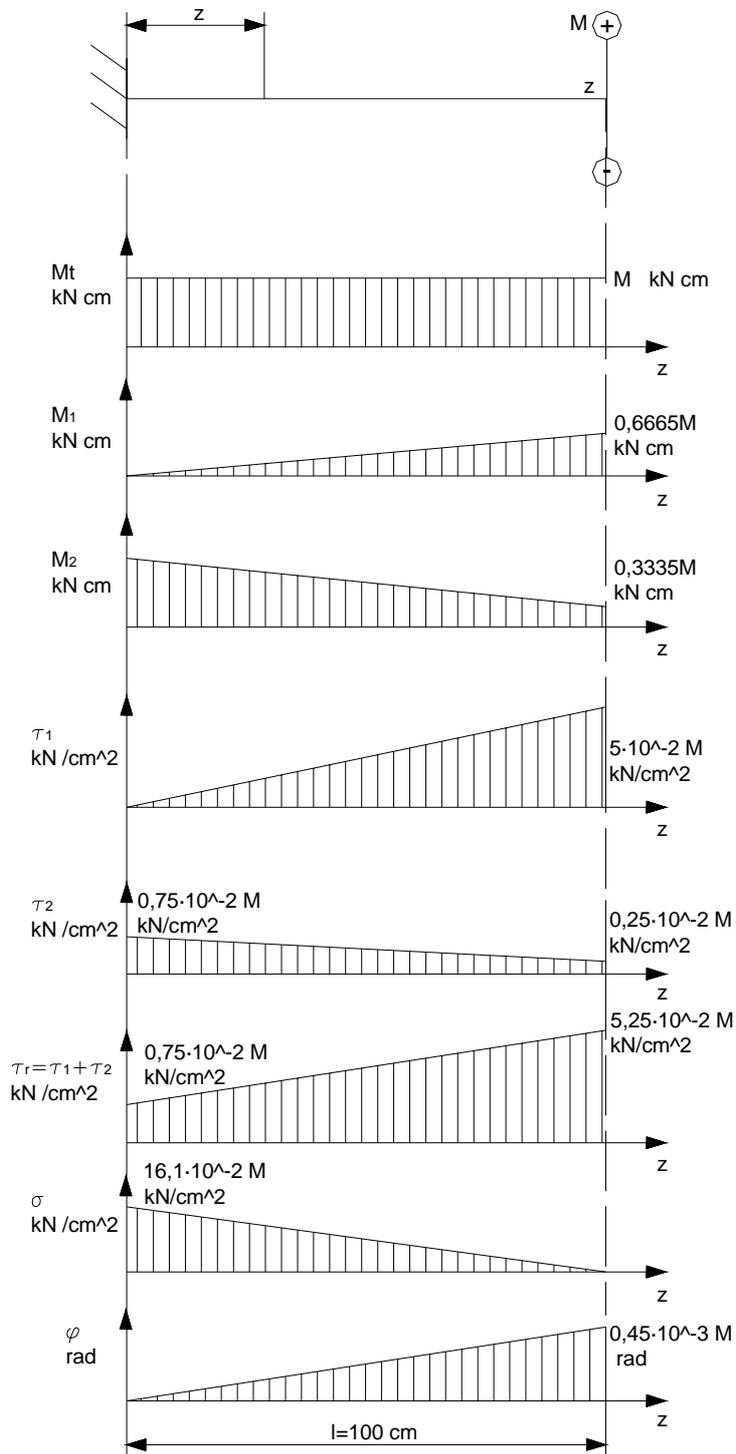
Las tensiones normales en la sección del empotramiento serán:

$$\sigma_{\max} = \frac{E \cdot M_t}{G \cdot I_t} \cdot \omega \cdot \alpha \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \quad (3.50)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot M_t}{0,77 \cdot 10^4 \cdot \frac{40}{3}} \cdot \frac{10 \cdot 20}{4} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 0,9414$$

$$\sigma_{\max} = 16,1 \cdot 10^{-2} \cdot M_t \quad \left[ \text{kN/cm}^2 \right]$$

Los diagramas para la torsión restringida son (Fig. 3.9):



**Figura 3.9 Diagramas para la torsión restringida.**

Con los resultados obtenidos en la figura 3.9 podemos calcular la tensión tangencial máxima para cualquier valor de momento aplicado. Si realizamos los cálculos para un momento  $M_t = 8 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$  (80 kN-cm) igual al tomado en el Capítulo II para torsión libre.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.52)$$

Donde:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad (3.53)$$

$$y \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad (3.54)$$

Conociendo de la figura 3.9 que:

$$\sigma = 16.1 \cdot 10^{-2} \cdot M_t = 16.1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 = 12.88 \text{ KN/cm}^2$$

$$\sigma = 128.8 \text{ MPa}$$

$$\tau = 0.75 \cdot 10^{-2} \cdot M_t = 0.75 \cdot 10^{-2} \cdot 80 = 0.6 \text{ KN/cm}^2$$

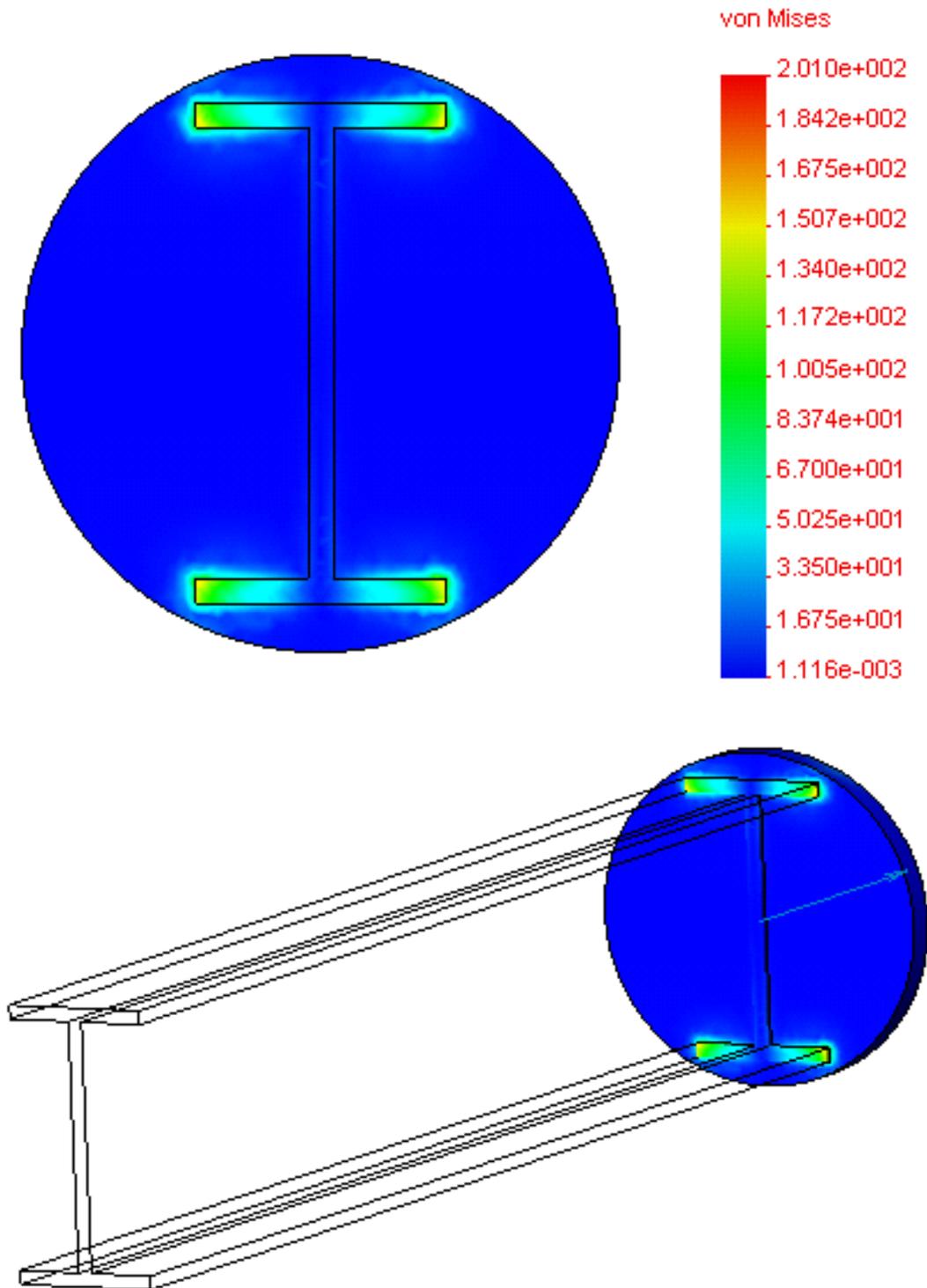
$$\tau = 6 \text{ MPa}$$

Sustituyendo (3.53) y (3.54) en (3.52) tenemos que:

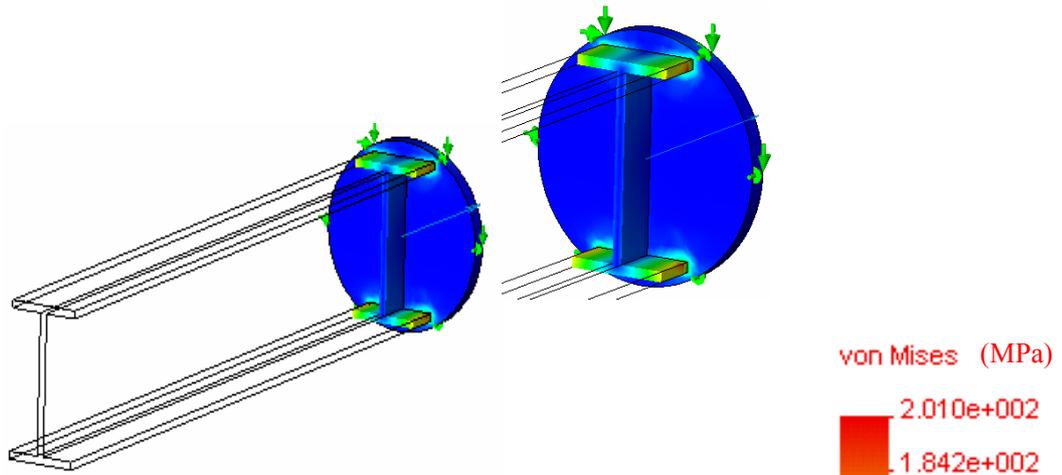
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}}{2} \quad (3.55)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sqrt{128.8^2 + 4 \cdot 6^2}}{2} = 64.68$$

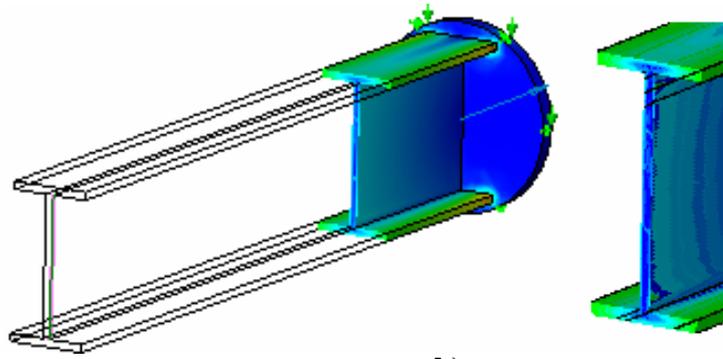
$$\tau_{m\acute{a}x} = 64.68 \text{ MPa}$$



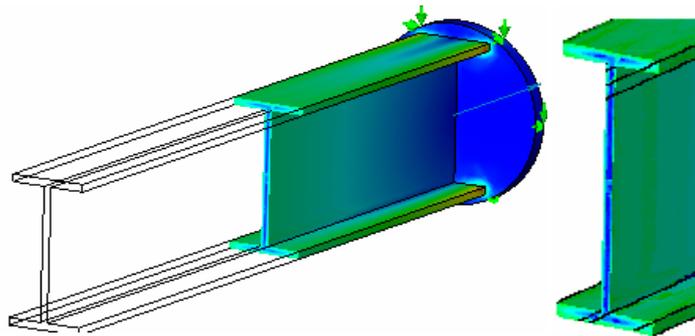
**Figura 3.10** Cuadro de tensiones en la sección próxima al empotramiento para el caso de torsión restringida.



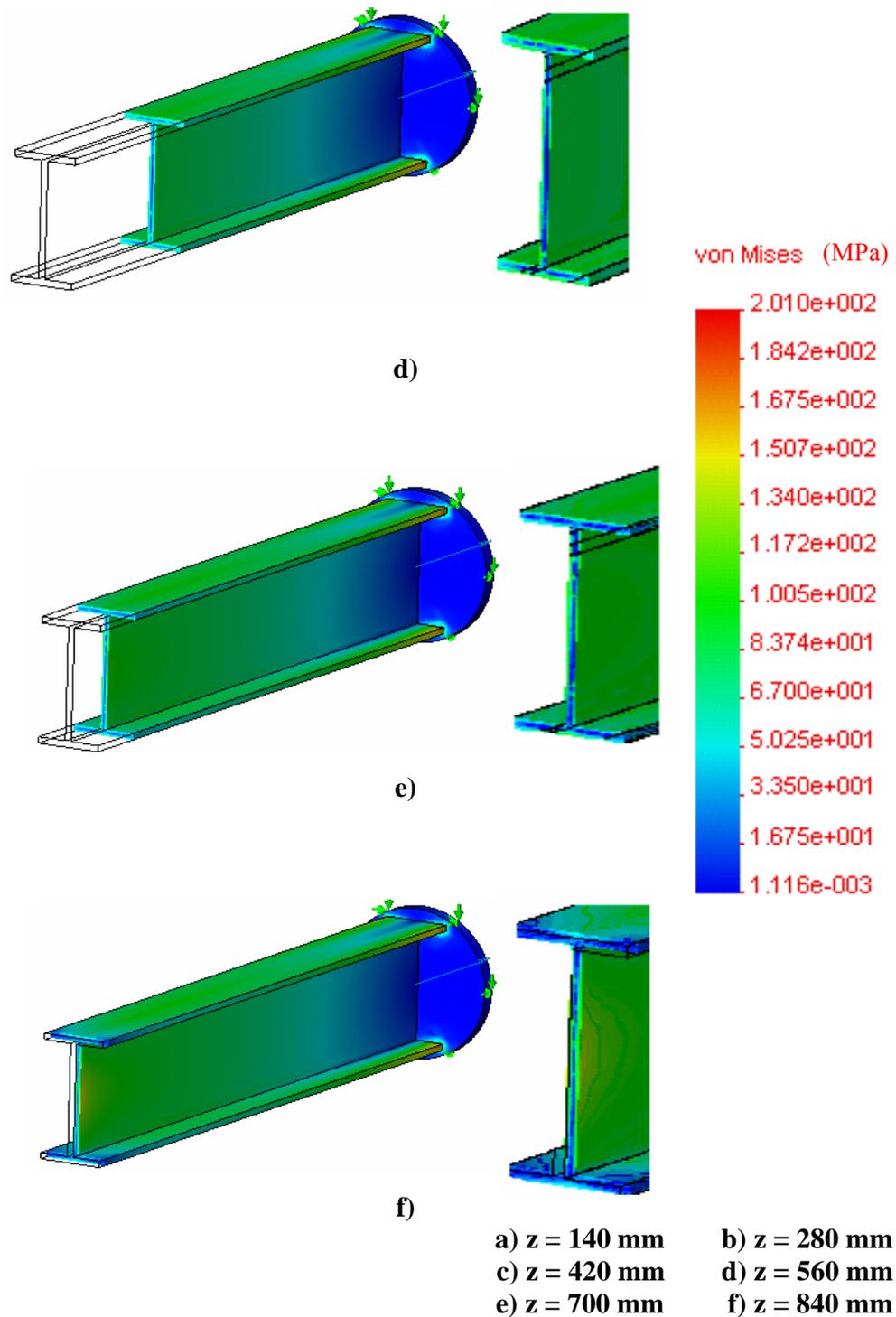
a)



b)



c)



**Figura 3.11** Distribución de tensiones obtenidas por el Método de Elementos Finitos para diferentes secciones a lo largo de la longitud de la viga definida por la coordenada  $z$  a partir del extremo posterior empotrado.

En la Fig. 3.10 se observan los cuadros de tensiones en una sección muy próxima al empotramiento de la barra de sección I analizada con un extremo empotrado y en la Fig. 3.11 se muestran también los cuadros de tensiones en otras secciones alejadas del empotramiento. Como se puede apreciar de estas figuras el cuadro de tensiones en el empotramiento es diferente al del resto de la barra. En el empotramiento hay efectos locales, dados por un lado, por la restricción que representa el empotramiento al alabeo (Torsión Restringida) y por otro lado la concentración de tensiones que representa el cambio de dirección del flujo de fuerzas en esta unión soldada a tope en T. En el propio empotramiento, de acuerdo con el cuadro de colores, se aprecian zonas con un color naranja donde las tensiones pueden alcanzar valores de  $\sigma_{eq} = 167.5$  MPa.

O sea:  $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} = 96.7$  MPa; 1.45 veces mayores que en la torsión libre donde la concentración de tensiones es prácticamente nula, en el resto de la barra coincide con la torsión libre.

En el análisis realizado en la Fig. 3.9 se aprecia como en la barra de perfil I empotrada en un extremo, el efecto de la torsión restringida provoca que la tensión tangencial resultante en la sección va disminuyendo del extremo libre al extremo empotrado, sin embargo, la tensión normal que aparece en la sección por el efecto de la restricción al alabeo aumenta en la medida que nos acercamos al empotramiento, modificándose totalmente el estado tensional, pero se puede apreciar como a pesar de este cambio la tensión tangencial máxima  $\tau_{m\acute{a}x}$  del estado tensional en cada sección prácticamente no varía. Esto se corresponde en gran medida en lo que se aprecia en los cuadros de tensiones de Elementos Finitos donde con excepción del empotramiento en las restantes secciones  $\tau_{m\acute{a}x} = \text{const} = 66.6$  MPa. El efecto de elevación de tensiones en el empotramiento se debe fundamentalmente a la concentración de tensiones.

*Conclusiones*

## Conclusiones.

- 1- El análisis de la bibliografía sobre el cálculo de las tensiones en las uniones soldadas a tope confirma que muy pocos autores profundizan en las expresiones para el cálculo de las tensiones en uniones soldadas a tope de configuración geométrica compleja sometidas a torsión. Shigley<sup>[55,56,57,58]</sup> por ejemplo que da expresiones para diferentes uniones de geometría compleja en las uniones con costuras de filete, no da expresiones de cálculo para el caso de las uniones a tope. Faires<sup>[20]</sup> da expresiones para algunas secciones macizas sometidas a torsión. Solo Schimpke P, Horn H.A y Ruge. J<sup>[52,53]</sup> mencionan la necesidad de considerar la Teoría de los Perfiles de paredes Delgadas pero tampoco da expresiones para el caso de uniones a tope.
- 2- Mediante la aplicación de la Teoría de los Perfiles de Paredes Delgadas se obtuvieron expresiones para el cálculo de las tensiones en perfiles de paredes delgadas de configuración geométrica compleja abiertos desarrollables y no desarrollables y en algunos perfiles cerrados. Estas expresiones no aparecen descritas en ninguna de las fuentes bibliográficas revisadas.
- 3- La aplicación del Método de Elementos Finitos para una sección I no desarrollable permitió apreciar claramente que estos perfiles se comportan como perfiles de paredes delgadas, las tensiones se distribuyen uniformemente a lo largo de todo el perímetro, a lo largo de la línea media de todo el contorno la tensión es prácticamente cero y en todo el borde del contorno es máxima.
- 4- El cálculo de los valores de tensiones obtenidos por la expresión propuesta para un perfil I de determinadas dimensiones arrojó un valor de  $\tau_{m\acute{a}x} = 63.16$  MPa y mediante el Método de Elementos Finitos para ese mismo perfil arrojó  $\tau_{m\acute{a}x} = 66.6$  MPa, lo que es una correspondencia casi perfecta con una diferencia del orden de un 5%.
- 5- Se estableció un procedimiento para graficar la variación de las tensiones que surgen en este tipo de torsión aplicando la Teoría de la Torsión Restringida y demuestra que la tensión tangencial resultante producto de los efectos

primarios y secundarios de la Torsión Restringida van disminuyendo desde el extremo libre hacia el empotramiento, sin embargo, la tensión normal que surge en la sección al restringirse el alabeo va aumentando al pasar del extremo libre al extremo empotrado, a pesar de estos cambios en el tipo de tensión y su magnitud, se pudo comprobar que la tensión tangencial máxima del estado tensional que surge en las distintas secciones  $\tau_{m\acute{a}x}$  permanece prácticamente constante.

- 6- El comportamiento anterior se confirma al aplicar el Método de Elementos Finitos a dicha barra empotrada, donde se aprecia que con excepción de la zona muy próxima al empotramiento el cuadro de tensiones prácticamente no varía y  $\tau_{m\acute{a}x}=66.6$  MPa coincide con la torsión libre. En la zona del empotramiento se observan efectos muy locales que según el criterio del autor de este trabajo se debe al efecto de concentración de tensiones o al efecto de bimomento que aparece según la Teoría de la Torsión en perfiles de Paredes delgadas en la sección del empotramiento.

*Recomendaciones*

## **Recomendaciones.**

- 1- Evaluar otras secciones con perfil abierto desarrollable y cerrado para apreciar si el comportamiento observado en el presente trabajo se mantiene.
- 2- Profundizar en el Efecto de Bimomento que aparece en la Torsión Restringida para observar que efecto puede tener el mismo en las uniones soldadas a tope empotradas.

# *Bibliografía*

## BIBLIOGRAFÍA

1. ANSI/API STD 1104:1999. Soldadura de líneas de tubería e instalaciones a fines. Vig desde: 99-10.--15p.
2. ANSI/AWS D1.1 A-96. Structural Welding Code-Steel. Vig. Desde: 96-08.—12p.
3. ANSI/AWS D1.1 M-2002 An American National Standar Aproved by American National Standard. Vig. Desde: 02-03.—10p.
4. Armero, F. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. Engineering Computations 1997.
5. Beer F.P. Mecánica de Materiales/F. P. Beer, E. R. Johnston.--Colombia: Mc Graw-Hill,1993.--738 p.
6. Birger I.A. Cálculo de Resistencia de Piezas de Máquinas/ I. A. Birger, B. F. Shorr, R. M. Shneiderovich.--Moscú: Editorial Mashinostroenie, 1966.--616 p.
7. CALFEM. A. Finite Element Toolbox for matlab. Department of Mechanics and Materials. Tomado de : <http://www.byggmek.ith.se/Calfem/>.Lund University.enero 2002.
8. Carvajal, Silva. Criterios y estimadores de error en el análisis elástico lineal de estructuras planas. Tomado de: [http://guido.dic.udec.cl/docs/tesis/final\\_Blancoynegro.pdf](http://guido.dic.udec.cl/docs/tesis/final_Blancoynegro.pdf)., Agosto 2003.
9. Chandrupatla, T. Introduction to Finite Elements in Engineering/ T. Chandrupatla, A. Belengundu.--USA: Prentice Hall, 1997.--238p.
10. Chau, T.T. Numerical simulation of welding in shipbuilding.Marine/ T. T. Chau, F. Besnier.--USA: Technology V, 2003.-- 320p.
11. Cernuschi, D. J. Elementos Finitos. Ejemplo de aplicación. Consideraciones sobre el uso de los Elementos Finitos. Tomado de: <http://www.unlp.edu.ar/estruc3b/mefa>, Agosto 2003.
12. DIN 50120-79. Tensile Test on Welded Joints. Vig. Desde: 79-10.—17p.

13. DIN 50121-79. Technological Bending Test on Welded Joints and Welded Platings. Vig. Desde: 79-10.—12p.
14. Dobrovolski V. Elementos de Máquinas/ V. Dobrovolski.--Moscú: Editorial MIR, 1970.--692 p.
15. Duane K. Designing Fillet Welds for Skewed T-joints. Welding Innovation (E.U) 19,(1): 10-17, 2002.
16. EN 2517-92. Norma Europea. Uniones soldadas por arco. Vig.desde:92-01.—15p.
17. EN 287.1-92. Norma Europea. Soldeo por fusión. Vig.desde: 92-05.—12p.
18. EN 288.1-92. Norma Europea. Especificaciones y calificación de los procedimientos de soldeo para los materiales metálicos. Vig, desde: 92-10.—17p.
19. Enoki, S. Shinichi Simple finite element model with beam elements for panel part of spot-welded frame-panel structure Tsutao Source: Nippon Transactions of the Japan. Society of Mechanical Engineers (Japón) 69,(3): 80-86, March, 2003
20. Faires V.M. Diseño de Elementos de Máquinas/ V. M. Faires.--México: Editorial UTEHA, 1985.-- 802 p.
21. Felippa, Carlos A. Introduction to Finite Elements Methods/ Carlos A. Felippa.-Colorado: University of Colorado, 2001.-- 586 p.
22. Feodosiev V.I. Diez conferencias sobre Resistencia de Materiales/ V. I. Feodosiev.-- Moscú: Editorial MIR, 1993.--179 p.
23. Feodosiev V I. Resistencia de Materiales/ V. I. Feodosiev.-- Moscú: Editorial MIR, 1985.-- 583 p.
24. Fernández Levy, Gilda S. Resistencia de Materiales/ Gilda S. Fernández Levy.-- La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.-- 511 p.
25. Fitzgerald F. Mecánica de Materiales/ F. Fitzgerald.--México: Editorial Alfa Omega S.A. de C.V., 1996.--560 p.
26. Fogiel M. Problem Solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids/ M. Fogiel.--New Jersey: Editorial REA, 1988.-- 1140 p.

27. Fricke, S. Numerical weld modelling- A method for calculating weld-induced residual stresses. Nuclear Engineering and Design (E.U) 206, (3): 139-150, June 2001
28. Fu, L. Numerical simulation of inertia friction welding process by finite element method. Welding Journal (E.U) 82, (3): 65-70, March, 2003
29. Gabaldón, F. Estimación de error en problemas no lineales mediante elementos de deformaciones supuestas/ F. Gabaldón; Juan M. Goicolea, tutor.-- Proyecto de Investigación. E.T.S. Ingenieros de Caminos. Canales y Puertos Universidad Politécnica de Madrid (Madrid), 1999.-- 75h.
30. García, Y. Obtención de los campos de temperatura en juntas soldadas mediante el empleo del MEF. Revista de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V (Villa Clara) 18, (2): 31-37, 2003.
31. Goldak, John. An Adaptive Mesh-Mangement algoritm for three-dimensional automatic finite elements analysis. Mechanical Engineering. (E.U) 15, (5), 23-29, 1999.
32. Hall, A. Diseño de Máquinas/ A. Hall, A. Holowenko, H. Laughlin.--Madrid: Editorial. Dossat, 1971.--344 p.
33. Hernández Herrera, Hernan. Desarrollo y perfeccionamiento de las expresiones para el cálculo de las tensiones máximas en las uniones soldadas con costuras de filete/ Herna Hernández Herrera; Dr. Ing. Rafael Goytisoló Espinosa, tutor .—Tesis de Doctorado, UCF, 2006.—90h.
34. ICS 25.160.40-19.060. Norma Española. Ensayos Destructivos en uniones soldadas en materiales metálicos. Ensayo de tracción transversal. Vig. Desde: 96-08.—21p.
35. ICS 25.160.40-19.061. Norma Española. Ensayos Destructivos en uniones soldadas en materiales metálicos. Ensayo de doblado. Vig. Desde: 96-10.—17p.
36. ICS 25.160.40-19.062. Norma Española. Ensayos Destructivos en uniones soldadas en materiales metálicos. Examen Macroscópico y Microscópico de soldaduras. Vig. desde: 96-12.—25p.

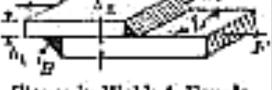
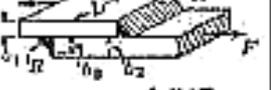
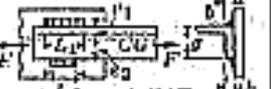
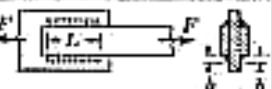
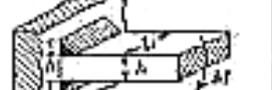
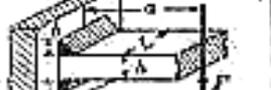
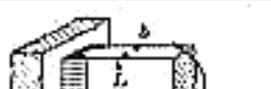
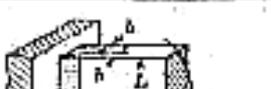
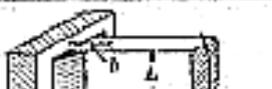
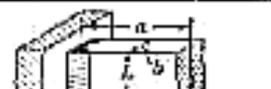
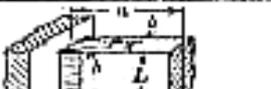
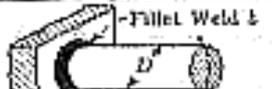
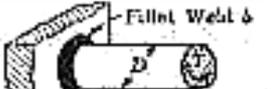
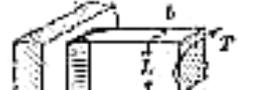
37. Iusilievich G.V. Elementos de Máquinas/ G. V. Iusilievich.--Moscu: Editorial Mashinostroenie, 1988.-- 388 p.
38. Ivanov, M. N. Elementos de Máquinas/ M. N. Ivanov.--Moscu: Editorial Vichaya Schkola, 1991.-- 386 p.
39. Lee, H. W. Fatigue strength depending on position of transverse cracks in FCAW process. Welding Journal. (E.U) 80, (1): 17-25, Enero 2001.
40. Lee, H. W. The Relationship between Residual Stresses and Transverse Weld Cracks in Thick Steel Plate. Welding Journal. (E.U) 82, (8): 43-47, Agosto 2003.
41. Masubuchi, K. Analysis of welded structures. Residual stresses, distortion and their consequences. Pergamon Press (Great Britain) 63, (2): 51-53,Febrero 1980.
42. Masubuchi, K. Prediction and control of residual, stress and distortion in welded structure, Proceeding and International Symposium on Theoretical prediction in joining and welding. Research Institute Osaka. (Japon), 29-37, Nov. 1996.
43. Miroljubov I. Problemas de Resistencia de Materiales/ I. Miroljubov.--Moscu: Editorial MIR, 1985.-- 500 p.
44. Mott, R.L. Resistencia de Materiales Aplicada/ R. L. Mott.--México: Editorial Prentice- Hall Hispanoamericana S.A.,1996.-- 640 p.
45. Mukanov, K. Design of Metal Structures/ K. Mukanov.--Moscu: Editorial MIR, 1968. -- 517 p.
46. Olsen, G.A. Elements of Mechanics of Materials/ G. A. Olsen.--La Habana: Editora de la Asociación de Estudiantes de Ingeniería, 1962.-- 536 p.
47. Orlov, P. Ingeniería del Diseño/ P. Orlov.--Moscu: Editorial MIR, 1985.-- 723 p.
48. Pisarenko, G.S. Manual de Resistencia de Materiales/ G.S. Pisarenko, A. P. Yakovlev, V. K. Matveev.--Moscu: Editorial MIR, 1989,-- 693 p.
49. Reshetov, D. Elementos de Máquinas/ D. Reshetov.--La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1985.-- 830 p.

50. Rivas, A. L. Evaluación de uniones soldadas de acero ferrítico 5cr-0,5 Mo utilizando como electrodo un acero inoxidable austenítico 309Mo. Revista de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V. (Cuba) 18, (2): 73-81, 2003
51. Roylance, T. F. Engineering Desing. Pergamon Press (Great Britain) 49, (5): 86-91, 1966.
52. Schimpke, P. Tratado General de Soldadura. Proyecto y cálculo de construcciones soldadas/ P. Schimpke, H. A. Horn, J. Ruge.--Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educacion, 1980.-- 394 p.
53. Schimpke, P. Tratado General de Soldadura. Soldadura Eléctrica/ P. Schimpke, H. A. Horn, J. Ruge.--Barcelona: Editorial Gustavo Gil, 1989.-- 462 p.
54. Seo, Seung. A Study on the Simplified Method to Calculate the Compressive Strength of Welded Structures. Journal of Ship Production [s.l.] 16, (3): 51-59, 2000.
55. Shigley, J.E. El Proyecto en Ingeniería Mecánica/ J. E. Shigley.--La Habana: Editora Revolucionaria, 1969.-- 658 p.
56. Shigley, J. E. Diseño en Ingeniería/ J. E. Shigley.--México: Editorial Mc Graw Hill, 1977.-- 785 p.
57. Shigley, J. E. Diseño en Ingeniería Mecánica/ J. E. Shigley, L. D. Mitchell.-- México: Editorial Mc Graw Hill, 1985.-- 915 p.
58. Shigley, J. E. Diseño en Ingeniería Mecánica/ J. E Shigley, C. Mischkie.-- México: Editorial Mc Graw Hill Interamericana, 2001.-- 943 p.
59. Shim, Y. Determination of residual stresses in thick-section weldments. Welding Journal (E.U) 71, (5): 73-79, 1992.
60. Spiegel L. Applied Statics and Strength of Materials/ L. Spiegel, G. F. Limbrunner.--New Jersey: Prentice Hall, 1999.-- 644 p.
61. Tekriwal, P. Finite Element Análisis of three-dimensional transient heat transfer in GMA welding. Welding Journal (E.U) 67, (9): 87-93, 1988.
62. Timoshenko S. Resistencia de Materiales/ S. Timoshenko.--Moscú : Editorial Nauka, 1965.-- 480p.
63. Volmir A. Problemas de Resistencia de Materiales/ A. Volmir.--Moscú; Editorial MIR, 1986.-- 477 p.

64. Wang, P. C. Effect of weld design on the fatigue strength of laser and resistance spot-welded tubular Tjoints for automotive applications. Welding Journal (E.U) 73,(9): 29-37, 1994.
65. Wang, P. C. Fracture mechanics parameter for the fatigue resistance of laser welds. International Journal of Fatigue (E.U) 17. (3): 25–34, 1995.
66. Wang, Z. Study of the Martensitic Structure at the Weld Interface and the Fracture Toughness of Similar Metal Joints. Welding Journal (E.U) 72, (7): 37-41, 1993.
67. Wilson Ch. Computer Integred Machine Design/ Ch. Wilson.--New Jersey: Prentice Hall, 1997.--646 p.
68. Zhang, M. Micro mechanisms of fatigue crack nucleation and short crack growth in low carbon steel under low cycle impact fatigue loading. International. Journal of Fatigue..[s.l.] 21: 82–83, 1999.
69. Zienkiewics, O. C. The Finite Eleme nt Method/O. C Zienkiewics, R. L. Taylor.--Oxford: Butterworth-Heinemann,2000.--748 p.

*Anexos*

Anexo A. - Expresiones dadas en Faies<sup>[20]</sup> para el cálculo de las tensiones en la soldadura.

 $s = \frac{F}{\delta L} \quad (31)$	 $s = \frac{F}{(b_1 + b_2)L} \quad (32)$	 $s = \frac{307F}{\delta L} \quad (33)$	 <p>Both Plates Same Thickness  <math display="block">s = \frac{307F}{\delta L} \quad (34)</math></p>
 $s = \frac{6MF}{L\delta^2} \quad (35)$	 $s = \frac{3cM}{Lb(3b_1^2 - 6b_1b_2 + 3b_2^2)} \quad (36)$	 <p>Stress in Weld A Equals          Stress in Weld B  <math display="block">s = \frac{1.414M}{(b_1 + b_2)L} \quad (37)</math></p>	 <p>Weld A <math display="block">s = \frac{1.414M}{(b_1 + b_2)L}</math>          Weld B <math display="block">s = \frac{1.414M}{b_2L(b_1 + b_2)} \quad (38)</math></p>
 $s = \frac{F}{\delta L} \quad (39)$	 $s = \frac{F}{\delta(b_1 + b_2)L} \quad (40)$	 $s = \frac{307F}{\delta L} \quad (41)$	 $s = \frac{1.414F}{\delta L(b_1 + b_2)} \quad (42)$
 $s = \frac{6M}{L\delta^2} \quad (43)$	 $s = \frac{3cM}{Lb(3b_1^2 - 6b_1b_2 + 3b_2^2)} \quad (44)$	 $s = \frac{354M}{\delta L} \quad (45)$	 $s = \frac{307M}{\delta L} \quad (46)$
 $s = \frac{6Fb}{L\delta^2} \quad s_a = \frac{F}{Lh} \quad (47)$	 $s = \frac{6cFb}{Lb(3b_1^2 - 6b_1b_2 + 3b_2^2)} \quad s_a = \frac{F}{2L\delta} \quad (48)$	 $s = \frac{1.414M}{\delta L(h + \delta)} \quad (49)$	 <p>Ave. <math display="block">s_s = \frac{307F}{\delta L}</math>          Max. <math display="block">s_c = \frac{F}{\delta L(h + b)} \sqrt{2(1 + \frac{h + b}{\delta})^2} \quad (50)</math></p>
 $s = \frac{6M}{\delta L^2} \quad (51)$	 $s = \frac{3cM}{bL^2} \quad (52)$	 $s = \frac{5.06M}{b\delta^2} \quad (53)$	 <p>Max. <math display="block">s = \frac{4.24E\delta}{bL^2}</math>          Ave. <math display="block">s_s = \frac{307F}{\delta L} \quad (54)</math></p>
 $s = \frac{6F\delta}{\delta L^2} \quad s_a = \frac{F}{L} \quad (55)$	 $s = \frac{6F\delta}{bL^2} \quad s_a = \frac{F}{2\delta L} \quad (56)$	 $s = \frac{5.06M}{b\delta^2} \quad (57)$	 $s_c = \frac{2.81T}{L\delta^2} \quad (58)$
 $s_a = \frac{7(3L + 1.8b)}{\delta^2 L} \quad (59)$	 $s_a = \frac{3cM}{2(b_1 - b_2)(L - \delta)} \quad (60)$	 $s = \frac{5.24M}{\delta[L^2 + 3L(\delta + b)]} \quad (61)$	 <p>Fillet Weld, <math display="block">s = \frac{1.414M}{\delta L + b_1 L}</math>          Butt Weld, <math display="block">s = \frac{F}{\delta L + b_1 L} \quad (62)</math></p>

## Anexo B.- Resultados de la búsqueda bibliográfica en EBSCO.

Resultados de: *soldadura*  [Añadir esta búsqueda a la carpeta](#) |  [Mostrar vínculo a esta búsqueda](#)

<http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&bQuery=soldadura&db=zbh>

Busca r:    

en   [La carpeta está vacía..](#)

[Depurar búsqueda](#) [Resultados](#) Para almacenar elementos añadidos en la carpeta para una sesión posterior, [Entrar en Mi EBSCOhost](#)

1 - 10 de 22 Páginas: 1 <a href="#">2</a> <a href="#">3</a> <a href="#">Siguiente</a>		Ordenar por	 <a href="#">Añadir (1-10)</a>
		Date	
<b>Resultados específicos por tema:</b> <a href="#">WELDING</a> <a href="#">SUBMERGED arc welding</a> <a href="#">MANGANESE</a> <a href="#">MANUFACTURING processes</a> <a href="#">FLUX (Metallurgy)</a> <a href="#">ELECTRIC welding -- Electrodes</a> <a href="#">CHROMITE</a> <a href="#">CHROMIUM</a> <a href="#">ELECTRODES</a> <a href="#">WELDED joints</a>	1. <a href="#">SOLDADURA MICROSCÓPICA.</a> Contenido, jan2006 Issue 511, p12-12, 1/4p; (AN 20265551)  <a href="#">Texto completo en PDF</a> (337K)	 <a href="#">Añadir</a>	
	2. <a href="#">Deposición metálica de Stellite grado 6 sobre AISI 316 en superficies planas mediante soldadura por fricción.</a> Ingeniería Mecánica, 2003 Issue 1, p17-22, 6p; (AN 15696326)  <a href="#">Texto completo en PDF</a> (295K)	 <a href="#">Añadir</a>	
	3. <a href="#">Modelación del perfil de soldadura y de la cavidad de vapor en la aleación de aluminio 5182 soldada con láser.</a> Ingeniería Mecánica, 2002 Issue 3, p7-14, 8p; (AN 15695130)  <a href="#">Texto completo en PDF</a> (679K)	 <a href="#">Añadir</a>	
	4. <a href="#">Electrodos austeníticos inoxidables semisintéticos para la soldadura manual por arco eléctrico: Una variante económica para las pequeñas y medianas empresas (PIME).</a> Ingeniería Mecánica, 2002 Issue 3, p19-24, 6p; (AN 15695616)  <a href="#">Texto completo en PDF</a> (34K)	 <a href="#">Añadir</a>	
	5. <a href="#">Influence of the variation of free longitude in the geometry of the narrow-joint welded union in domes of steam boilers. (English)</a> By: Díaz Cedré, Eduardo M.; Rodríguez Pérez, Manuel; Ortiz Méndez, Tamara; Pozo Morejón, Juan A.. Centro	 <a href="#">Añadir</a>	

<a href="#">SUBMERGED arc welding</a> <a href="#">MANGANESE</a> <a href="#">MANUFACTURING processes</a> <a href="#">FLUX (Metallurgy)</a> <a href="#">ELECTRIC welding -- Electrodes</a> <a href="#">CHROMITE</a> <a href="#">CHROMIUM</a> <a href="#">ELECTRODES</a> <a href="#">WELDED joints</a>	<p>Azúcar, jul-sep2002, Vol. 29 Issue 3, p62-69, 8p; Language: Spanish; (AN 20066349)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (260K)</p>	
	<p>6. <a href="#">Evaluation of the bearing capacity to impact of Hadfield welding deposits obtained from welding electrodes. (English)</a> By: Torres Alpizar, Eduardo; Rodríguez Pérez, Manuel; Paz Iglesias, Antonio. Centro Azúcar, jul-sep2002, Vol. 29 Issue 3, p70-70, 1p; Language: Spanish; (AN 20066350)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (60K)</p>	<p> <a href="#">Añadir</a></p>
	<p>7. <a href="#">Evolución microestructural de la aleación de aluminio 6061 durante el proceso de soldadura MIG.</a> Ingeniería y Desarrollo, jul-dic2002 Issue 12, p52-65, 14p; (AN 13279328)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (417K)</p>	<p> <a href="#">Añadir</a></p>
	<p>8. <a href="#">Evolución microestructural de la aleación de aluminio 6061 durante el proceso de soldadura MIG.</a> Ingeniería y Desarrollo, jul-dic2002 Issue 12, p52-65, 14p; (AN 13293304)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (417K)</p>	<p> <a href="#">Añadir</a></p>
	<p>9. <a href="#">Validación de un modelo eléctrico de soldadura anódica mediante el método de los elementos finitos. (Spanish)</a> Ingeniería Electronica, Automatica y Comunicaciones, 2002, Vol. 23 Issue 3, p12-16, 5p; Language: Spanish; (AN 21068746)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (182K)</p>	<p> <a href="#">Añadir</a></p>
	<p>10. <a href="#">Technological approach to the intensification of the welding process in the manufacturing of thick-layer domes for boilers. (English)</a> By: Díaz Cedré, Eduardo M.; Pérez, Manuel Rodríguez; Méndez, Tamara Ortiz; Pozo Morejón, Juan A.. Centro Azúcar, abr-jun2002, Vol. 29 Issue 2, p65-71, 7p; Language: Spanish; (AN 18536674)</p> <p> <a href="#">Texto completo en PDF</a> (206K)</p>	