



Facultad de Ingeniería Mecánica

Nuevos métodos de cálculo y tecnologías de fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas.

YOVANY LLODY GARCÍA

**Cienfuegos
2011**



Facultad de Ingeniería Mecánica

Nuevos métodos de cálculo y tecnologías de fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas.

Autor: M.Sc. Yovany Llody García.

Tutores: Dr.C. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa.
Dr.C. Víctor Gómez Rodríguez.

**Cienfuegos
2011**

SÍNTESIS

En el trabajo se desarrolló un nuevo esquema de análisis que establezca la interacción rotor - estator de las bombas de cavidad progresiva para calcular las fuerzas internas y desplazamientos en los rotores partiendo del esquema de análisis de viga (el rotor) sobre fundación elástica (el estator de goma). Se obtuvieron las ecuaciones que permiten calcular, para cualquier combinación de rotor y estator: la reacción del estator, la flecha y la pendiente del rotor en cualquier sección y las fuerzas internas en el rotor: fuerza de cortante y momentos flectores y sus respectivos valores máximos. Se determinó, a partir de la Teoría del Contacto entre cuerpos elásticos de Hertz, el coeficiente de rigidez de la fundación en función de la rigidez de los materiales y del ancho de la banda de contacto entre rotor y estator. A partir de la aplicación de los aspectos fundamentales de la teoría de los acoplamientos cardánicos se estableció la fuerza máxima que actúa en el extremo del rotor. El estudio de una combinación particular rotor - estator permitió establecer la ley de distribución de la reacción del estator sobre el rotor, la flecha, la pendiente, las fuerzas de cortante y momentos flectores a que está sometido el rotor en esa zona bajo la acción de la fuerza que se origina en el acoplamiento cardánico, así como la relación de éstos con la variación del ancho de la banda de contacto. Los resultados mostrados responden a un rotor hueco específico para el que se realizó el cálculo del diámetro interior crítico. Se aplicó la teoría de la deformación plástica de un tubo de pared gruesa y se describió la novedosa tecnología Aluminoforging, patentada por el autor, para elaborar rotores huecos mediante deformación plástica empleando como líquido deformante, aluminio fundido. Se desarrolló un novedoso método para el acabado superficial de rotores huecos o la manufactura de rotores macizos por arranque de virutas, patentado también por el autor con el denominativo FRETOR, el cual constituye una innovación tecnológica que permite la fabricación a gran escala de rotores con la calidad y fiabilidad requeridas para cumplir con las exigencias tecnológicas que demanda la explotación de las bombas de cavidad progresiva.

ÍNDICE.

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. GENERALIDADES DE LAS BOMBAS DE CAVIDAD PROGRESIVA. REVISIÓN DOCUMENTAL SOBRE LOS MÉTODOS DE FABRICACIÓN DE LOS ROTORES.	8
1.1. Las bombas de cavidad progresiva y su evolución.	8
1.1.1. Partes fundamentales.	8
1.1.2. Principio de funcionamiento.	10
1.1.3. Características fundamentales.	10
1.1.4. Parámetros geométricos fundamentales de la bomba. Diseño hidráulico.	12
1.1.5. Aplicaciones.	18
1.1.6. Fabricación de las bombas de cavidad progresiva en Cuba.	18
1.2. Rotores. Generalidades.	20
1.2.1. Partes y parámetros geométricos de los rotores.	20
1.2.2. Materiales empleados en la fabricación de los rotores.	21
1.2.3. Principales fallas de los rotores.	
1.3. Tecnologías utilizadas en la fabricación de rotores de bombas de cavidad progresiva. Principales características.	25 25
1.3.1. Método <u>Hidroforming</u> .	
1.3.2. El estampado y la soldadura de planchas como métodos para la fabricación de rotores huecos.	27
1.3.3. La fundición centrífuga bajo la acción de un campo magnético como método de fabricación de rotores.	28 29
1.3.4. El laminado como método de fabricación de rotores huecos.	30
1.3.5. Fabricación de rotores mediante el maquinado en un torno.	31
1.3.6. La fundición continua como método para la fabricación de rotores.	32
1.4. Cálculo de los rotores.	33
1.5. Conclusiones parciales.	34

CAPÍTULO II.

DESARROLLO DE NUEVO ESQUEMA DE ANÁLISIS PARA LA EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA DE LOS ROTORES DE LAS BOMBAS DE CAVIDAD PROGRESIVA.	35
2.1. Necesidad del empleo de un esquema de análisis exacto durante el diseño y cálculo de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.	35
2.2. Cálculo de la fuerza transversal provocado por el acoplamiento sobre el rotor.	39
2.2.1. Datos del rotor y estator.	39
2.2.2. Cálculo del momento torsor y de las fuerzas que actúan sobre el rotor.	39
2.3. Determinación del coeficiente de balastro o de rigidez de la fundación.	41
2.4. Aplicación del Método de los Parámetros de Origen en la solución del esquema de análisis.	44
2.5. Análisis general de los resultados obtenidos en la aplicación del nuevo esquema de análisis.	48
2.5.1. Procedimiento general empleado para el análisis.	48
2.5.2. Comportamiento de la flecha de la fundación, $y_{(b,z)}$.	49
2.5.3. Comportamiento de la reacción de la fundación $q_{R\ b,z}$.	51
2.5.4. Comportamiento de la pendiente del rotor en la fundación $\theta_{b,z}$.	54
2.5.5. Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$.	56
2.5.6 Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$.	58
2.6. Cálculo del momento flector máximo en función de z y b .	60
2.7. Cálculo del diámetro interior crítico (d).	62
2.7.1. Cálculo del diámetro crítico para $b = 0,5$ cm.	62
2.8. Conclusiones parciales.	65

CAPÍTULO III.	
NUEVAS TECNOLOGÍAS PARA LA FABRICACIÓN DE LOS ROTORES DE LAS BOMBAS DE CAVIDAD PROGRESIVA.	66
3.1. Necesidad del desarrollo de tecnologías de fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.	66
3.2. Generalidades del proceso de deformación plástica en frío.	67
3.3. Condiciones en el Problema Plano en la Teoría de la Plasticidad.	69
3.4. Análisis de la conformación de un tubo de paredes gruesas en caliente desde la Teoría de la Plasticidad.	70
3.5. Determinación del módulo de elasticidad del material en la zona plástica E_k para diferentes temperaturas.	75
3.6. Determinación de la presión requerida para lograr la deformación plástica del tubo una magnitud ΔDe .	70
3.7. Resultados de la deformación de tubos por el método de <u>Aluminoforging</u> .	77
3.8. Dispositivo especial para la preparación de las superficies de los rotores de las bombas de cavidad progresiva para el cromado.	81
3.9. Exactitud y calidad superficial requeridas en los rotores de las bombas de cavidad progresiva para su explotación.	88
3.10. Conclusiones parciales.	92
CONCLUSIONES GENERALES	94
RECOMENDACIONES	96
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS	98
ANEXOS	

Introducción.

Las bombas de cavidad progresiva (Cholet, 2007) mundialmente llamadas MONO en honor a su inventor el ingeniero francés el Dr. René Moineau en el año 1934, comienzan a producirse en grandes series a finales de la década del 30 del siglo pasado por una firma francesa fundada por su creador. Durante 20 años, las tecnologías de fabricación de estas bombas fueron patrimonio exclusivo de la firma fundada por el Dr. Moineau quien posteriormente vende su patente a varias firmas de renombre internacional como es el caso de la MOYNO y ROPER de origen norteamericano. En la actualidad, las principales potencias mundiales en la manufactura de equipos mecánicos: Alemania, Inglaterra, Rusia y China fabrican estas bombas. Las firmas de estos países han ocupado el mercado internacional con modelos de diferentes características que respetan el principio de funcionamiento ideado por el Dr. Moineau.

Debido a su gran versatilidad, características y campo de aplicaciones (Mono Pumps, 1990) las bombas MONO se utilizan en una gran cantidad de aplicaciones industriales para el trasiego de sustancias líquidas con diferentes características que van desde líquidos tan ligeros y limpios como el agua hasta líquidos pesados como mieles y lodos que contienen un gran número de partículas en suspensión.

La complejidad tecnológica para la manufactura de este tipo de equipamiento industrial ha incidido en que las mismas sólo sean fabricadas por grandes firmas internacionales. La principal razón de ello está dada por lo especializado del proceso de manufactura de dos de las piezas que constituyen el corazón de estos equipos como son el estator y el rotor. La literatura y los catálogos consultados refieren un incremento considerable en los precios de comercialización de estas bombas y de sus partes de repuesto en el mercado internacional.

En el caso de Cuba, las desventajas comerciales impuestas por el bloqueo norteamericano no permiten la adquisición de repuestos para muchas de las bombas adquiridas y el país se ve obligado a comprar bombas nuevas a elevados precios como el caso ocurrido en el año 1989 en la Empresa Glucosa Cienfuegos al deteriorarse el estator en la bomba de la planta de glucosa lo que provocó que se paralizara totalmente la fábrica. El país no pudo adquirir un estator de repuesto cuyo

precio se encontraba alrededor de los \$600.00 USD y la fábrica se vio obligada a comprar una bomba completa del mismo tipo a un precio de \$6 000.00 USD para solucionar el problema.

En la Empresa Glucosa Cienfuegos a partir de la paralización sufrida en el año 1989 y el desenlace económico negativo de su solución, un colectivo de trabajadores encabezados por el Ing. Antonio Llody Pérez se da a la tarea de investigar y desarrollar métodos de manufactura que permitieron crear tecnologías de manufactura no convencionales y novedosas, combinando de forma original las maquinas herramientas convencionales con que se contaba con novedosos métodos y dispositivos especiales de maquinado. Todo ello permitió responder a las demandas industriales de partes de las bombas MONO y se pudo contrarrestar el patrimonio exclusivo de las firmas internacionales en su producción.

A partir de la década del 90 comienza a funcionar en la Empresa Glucosa un taller para la recuperación de bombas de cavidad progresiva. En un inicio la recuperación o reacondicionamiento de estas bombas consistió en la fabricación de los estatores de goma por constituir el elemento que más se deteriora y cuyo desgaste puede llegar a inutilizarlas. Para la fabricación de los mismos fue necesario construir un conjunto de máquinas y dispositivos entre los que se encuentra una máquina combinada de extrusión-inyección de caucho, autoclave para vulcanización, prensa, complejos moldes de acero y varios dispositivos auxiliares los cuales permitieron desarrollar un total de 12 modelos de estatores utilizados principalmente en las industrias cubanas más sensibles desde el punto de vista económico-social como la alimenticia y azucarera.

Con la recuperación y fabricación de los rotores se inicia una nueva etapa en el reacondicionamiento de las bombas MONO en Cienfuegos. Para poder realizar esta tarea surge la necesidad de desarrollar nuevas tecnologías y dispositivos para la manufactura de los diferentes componentes de las bombas de cavidad progresiva, en particular sus rotores y sellos mecánicos.

Otra situación existente es que debido a la exclusividad en la fabricación y desarrollo de las bombas de cavidad progresiva por firmas de países desarrollados, los métodos de cálculo de sus diferentes componentes no se publican y sólo puede

encontrarse referencia a ellos en escasa información que ofrecen las patentes relacionadas con dichas bombas. El estudio documental realizado ha detectado que la mayor parte de la información sobre el diseño y la manufactura de los diferentes componentes de las bombas de cavidad progresiva está protegida bajo patentes o secreto industrial y por lo tanto, resulta difícil evaluar la calidad de los métodos de cálculo que utilizan para diseñar dichos componentes.

Para acometer la manufactura de los rotores de las bombas de cavidad progresiva en Cuba no existen esquemas de análisis que posibiliten realizar los cálculos asociados al diseño como es el caso de la determinación de las fuerzas internas y la evaluación de la resistencia de los rotores para determinar con exactitud el espesor mínimo de pared para los rotores huecos.

A partir de lo anterior surge el siguiente **problema científico** a resolver:

La ausencia de esquemas de análisis, modelos matemáticos y tecnologías de manufactura que permitan el cálculo, diseño y fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva en Cuba para garantizar la demanda de estos elementos en la industria nacional.

Para ello fue necesario llevar a cabo un proceso de investigación apoyado en métodos y técnicas que garantizaran el adecuado rigor científico.

Los argumentos expuestos conducen a formular la **hipótesis** de este trabajo como sigue:

Es posible desarrollar esquemas de análisis, modelos matemáticos y métodos de cálculo que posibiliten determinar parámetros de diseño, evaluar la resistencia mecánica y desarrollar nuevos métodos de manufactura que garanticen la fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva que demanda la industria nacional.

A partir del enunciado de la hipótesis se deriva el **objeto de estudio teórico** de este trabajo que consiste en los esquemas de análisis y modelos matemáticos que garanticen un adecuado diseño de los rotores de las bombas de cavidad progresiva y posibiliten su fabricación a partir de tecnologías de manufactura desarrolladas al efecto. El **objeto de estudio práctico** se corresponde con un amplio espectro de entidades de la industria cubana donde se utilizan las bombas MONO para el trasiego de diversas sustancias y la validez de la hipótesis se singulariza en la Empresa Glucosa Cienfuegos que de conjunto con el Centro de Estudios de la Oleohidráulica y la Neumática de la Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez” han trabajado en investigaciones conjuntas encaminadas a elevar su competitividad y prestigio.

El **objetivo general** que se persigue con esta investigación está encaminado a desarrollar métodos, modelos matemáticos y nuevas tecnologías de manufactura que permitan el cálculo, diseño y fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva que demanda la industria nacional.

El cumplimiento del objetivo general se garantiza a partir de los **objetivos específicos** identificados a continuación:

1. Desarrollar un nuevo esquema de análisis para el cálculo de las fuerzas internas de flexión y la evaluación de la resistencia de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.
2. Establecer los principios teóricos y la propuesta tecnológica para la fabricación de rotores huecos a partir de la deformación plástica en caliente de un tubo de acero inoxidable.
3. Desarrollar un método para la elaboración mecánica por arranque de virutas de los rotores de las bombas de cavidad progresiva y aplicarlo en la fabricación de rotores en la industria nacional.

Para lograr estos objetivos se hace necesario desarrollar, como principales **tareas de investigación**, las que se relacionan a continuación:

1. Realizar un estudio documental relacionado con el diseño y la manufactura de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.
2. Desarrollar un nuevo esquema de análisis para el cálculo de las fuerzas internas y la evaluación de la resistencia de los rotores de las bombas de cavidad progresiva que permita calcular con una exactitud adecuada el espesor mínimo requerido de la pared en los rotores huecos de dichas bombas.
3. Desarrollar una nueva tecnología de manufactura para fabricar rotores huecos de las bombas de cavidad progresiva a partir de la deformación plástica en caliente de un tubo de acero inoxidable.
4. Proponer una nueva tecnología de manufactura para la elaboración mecánica por arranque de virutas de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

En el transcurso de la investigación fueron utilizados diversos **métodos**, como son: el enfoque sistémico, el método histórico lógico, el método comparativo, analógico, el análisis y la síntesis, el tratamiento automatizado de la información, la investigación de operaciones, así como, del nivel matemático, el empleo de un método de análisis numérico, en específico el Método de los Elementos Finitos para calcular mediante software de avanzada las tensiones en los tubos durante la deformación plástica del mismo.

Los **resultados** de la investigación que se consideran **novedades científicas** son:

1. El desarrollo de un esquema de análisis para el contacto rotor – estator que permite la solución de este sistema hiperestático complejo.
2. El modelo para la determinación, a partir de la teoría de la plasticidad, de las presiones internas necesarias para provocar una deformación plástica en un tubo de pared gruesa de acero hasta una determinada magnitud del diámetro exterior.

Como **aportes científicos** de la investigación se declaran:

1. Determinación del coeficiente de rigidez de la fundación elástica α de la goma (Estator) no reportado en la literatura científica.
2. Método para determinar el espesor mínimo necesario en la pared en un rotor hueco deformado mediante presión interna para garantizar su resistencia mecánica en explotación.

Como **aportes tecnológicos** de la investigación se declaran:

1. El desarrollo de una nueva tecnología para la fabricación de los rotores huecos mediante deformación plástica en caliente.
2. El desarrollo de un nuevo método para la elaboración mecánica por arranque de virutas de una superficie de alta complejidad geométrica como es el caso del rotor a partir del diseño y construcción de un dispositivo especial.

Además, desde el punto de vista práctico, la fabricación en territorio nacional de elementos y componentes de las bombas de cavidad progresiva e incluso, la posibilidad de fabricar completamente estos equipos en Cuba, permite mantener en funcionamiento un gran número de los mismos dando respuesta a la gran cantidad de paradas por salida de servicio de los conjuntos o de elementos independientes en industrias sensibles desde el punto de vista económico – social.

El informe final se estructuró en tres capítulos y queda conformado de la siguiente manera:

Capítulo 1. Generalidades de las bombas de cavidad progresiva. Revisión documental sobre la fabricación de los rotores donde se describe de forma general las partes, cualidades y el funcionamiento de las bombas de cavidad progresiva, definiéndose los parámetros geométricos e hidráulicos fundamentales que caracterizan el funcionamiento de dichas bombas y los resultados de la revisión documental que implicó la literatura técnica especializada y las patentes existentes en este campo lo cual jugó un papel importante en el desarrollo de las tecnologías de fabricación de los rotores propuestas como resultado de la investigación.

Capítulo 2. Nuevo esquema de análisis y método de cálculo para rotores de las bombas de cavidad progresiva.

En el capítulo se presenta la teoría relacionada con el esquema de análisis de viga sobre fundación elástica aplicada al cálculo de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. Se aplican los aspectos fundamentales de la teoría de los acoplamientos cardánicos para establecer la fuerza máxima que actúa en el extremo del rotor. Se desarrolla un nuevo esquema de análisis basado en el esquema de viga (el rotor) sobre una fundación elástica (el estator) para la evaluación de la resistencia de los rotores. Se realiza un estudio donde se establece la ley de distribución de la reacción del estator sobre el rotor, la flecha, la pendiente, las fuerzas de cortante y momentos flectores a que está sometido el rotor en dicha zona bajo la acción de la fuerza que se origina en el acoplamiento cardánico. Se evalúa como varían estos parámetros en dependencia del ancho de la banda de contacto con el estator. Los cálculos y la validación son realizados con ayuda del Software MatLab. Se ofrecen los resultados aplicados a un rotor específico de una bomba importada.

Capítulo 3. Nuevas tecnologías para la fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

En este capítulo se aplicó la teoría de la deformación plástica de un tubo de pared gruesa y se describe una novedosa propuesta tecnológica para elaborar rotores huecos mediante deformación plástica empleando como líquido deformante aluminio fundido. Además, en este capítulo, se desarrolla un novedoso método para la fabricación mediante elaboración mecánica por arranque de virutas del rotor de una bomba de cavidad progresiva. El método y el dispositivo desarrollado se consideran novedosos teniendo en cuenta que para la manufactura de los rotores en el mundo se utilizan máquinas herramientas especializadas de uso único que poseen un elevado costo en el mercado internacional. Este dispositivo universal, constituye una innovación tecnológica que permite la fabricación a gran escala de rotores con la calidad y fiabilidad requeridas para cumplir con las exigencias tecnológicas que demanda su explotación.

Capítulo I: Generalidades de las bombas de cavidad progresiva. Revisión documental sobre los métodos de fabricación de los rotores.

1.1. Las bombas de cavidad progresiva y su evolución.

Las bombas de cavidad progresiva (Compair Holman, 2010), (Cholet, 2007) mundialmente llamadas MONO en honor a su inventor el ingeniero francés el Dr. René Moineau en el año 1934, comenzaron a producirse en grandes series a finales de la década del 30 por una firma francesa fundada por su creador. Por su gran versatilidad, características y campo de aplicaciones (LICAR, 2010),(NEMO®, 2010),(Netzsch, 2010),(Roper Pump, 2010a),(Bucher, 2007),(Huber, 2007), (Olivet, 2009),(Donahue, 2008),(Arrellano, 2007),(Nesbitt, 2006),(Moyno, 2006a), (Netzsch, 2006),(Lehman, 2006),(Moyno, 2006b),(Bratu, 2007),(Doty, 2007), (Hirschfeldt, 2010),(Orchard, 2006),(Lea, 2008),(Alemaskin, 2006),(Gardellin, 2007),(Vetter, 2009) en el trasiego de disímiles sustancias, desde líquidos tan ligeros y limpios como el agua hasta pesados como las mieles y lodos conteniendo un gran número de partículas en suspensión, han encontrado innumerables aplicaciones en casi todas las ramas industriales a nivel mundial.

Durante 20 años las tecnologías de fabricación de estas bombas fueron patrimonio exclusivo de la firma fundada por el Dr. Moineau, el cual al cabo de este período vende su patente a varias firmas de renombre internacional que rápidamente invaden el mercado internacional con la producción de modelos de diferentes características y clasificaciones pero todos basados en el mismo principio de funcionamiento.

1.1.1. Partes fundamentales.

En la figura 1.1 se muestran las partes fundamentales que componen dicha bomba:

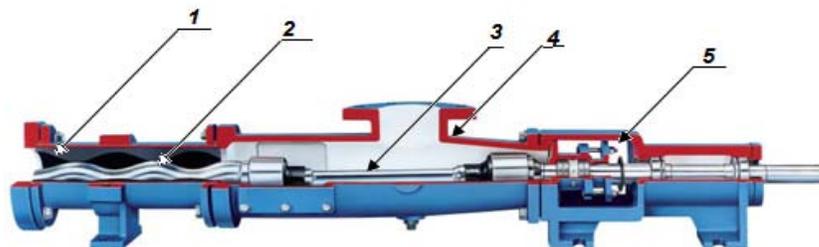


Figura 1.1. Esquema de una Bomba de cavidad progresiva (Moyno, 2009).

La bomba está compuesta por 5 subconjuntos principales (Llody García, 2008a):

1. Estator: Está constituido por una coraza o tubo de acero al que está adherido un núcleo de un compuesto elástico el cual depende de la sustancia bombeada. Su forma exterior es cilíndrica y la interior presenta una helicoidal que forma las cavidades mediante las cuales se desliza el producto bombeado. El material del estator es seleccionado cuidadosamente a partir de compuestos poliméricos (elastómeros) (Young, 2002) siendo los más utilizados: Buna - N, Caucho Natural, EPDM, Fluorelastómeros, etc.

2. Rotor: Los rotores se construyen de bronce y aceros inoxidable o al carbono cromado endurecidos mediante tratamientos térmicos (Mirza, 2008) para darles una mayor resistencia a la corrosión y a la abrasión que provocan las partículas en suspensión dentro del fluido que se bombea. Los rotores presentan una forma de tornillo sinfín excéntrico helicoidal con una sección circular constante, los mismos pueden ser huecos o macizos en dependencia de la tecnología empleada en su fabricación.

3. Sistema cardánico: Se fabrica de una aleación especial de alta resistencia, transmite el movimiento rotativo excéntrico asimilando las tensiones combinadas de flexión y torsión. Se articula con el eje y el rotor por medio de uniones tipo cardán, que se encuentran necesariamente donde pasa el fluido que se bombea. Generalmente se recubren de un elastómero, inerte a la mayor parte de los productos químicos que se trasiegan.

4. Cuerpo de succión: En dicho cuerpo se aloja la biela, y el mismo presenta la brida de succión por la cual se introduce el producto a bombear, se construye generalmente de acero inoxidable y presenta una forma cilíndrica.

5. Caja de rodamientos: Se construye de hierro fundido o acero, en ella se alojan los rodamientos que soportan el eje de transmisión, los mismos son los encargados de soportar las fuerzas axiales que se producen debidas al bombeo.

1.1.2. Principio de funcionamiento.

La bomba de cavidad progresiva (Hirschfeldt, 2008) es una bomba rotativa de tornillo sinfín excéntrico que está constituida esencialmente por un rotor de forma helicoidal y sección circular de acero que gira en el interior de un cuerpo elástico fijo denominado estator que también posee una configuración helicoidal pero de paso diferente con respecto al rotor y una doble hélice.



Figura 1.2. Principio de funcionamiento de una bomba de cavidad progresiva (Hirschfeldt., 2008a).

Durante el giro del rotor dentro del estator (figura 1.2) se origina una línea helicoidal de cierre que separa la cavidad de aspiración de la de descarga, se crea un movimiento en la dirección perpendicular al giro como resultado del cual los espacios que se forman entre el rotor y las paredes interiores del estator avanzan en dirección axial. Este efecto permite a la bomba impulsar el fluido desde la aspiración hacia la descarga sin que se formen sedimentaciones en el interior del cuerpo.

Cuando la línea helicoidal de cierre deja de existir por causa del desgaste del estator o el rotor provocados por el funcionamiento continuo de la bomba y la acción de las partículas en suspensión, se producen fallas en el funcionamiento y constituye la causa principal del deterioro de las mismas.

1.1.3. Características fundamentales.

Las bombas de cavidad progresiva fueron diseñadas combinando los avances específicos de las bombas rotatorias y las de pistón con lo que se lograron obtener características únicas que permiten su uso en el trasiego de disímiles productos (Eagle, 2010), (Roper Pump, 2010), entre las cuales se encuentran:

- **Desplazamiento positivo:** El movimiento del fluido es originado por el elemento móvil (rotor), el cual gira dentro de un elemento fijo (estator), originando cavidades que se van desplazando progresivamente a lo largo del eje de la bomba provocando un caudal uniforme y continuo.
- **Caudal uniforme y sin pulsaciones:** La descarga de estas bombas se caracteriza por un caudal uniforme, sin pulsaciones y básicamente similar bombeando líquidos de diferentes grados de limpieza, densidad o viscosidad. Su capacidad de flujo es proporcional a la velocidad, el caudal de bombeo puede superar los 200 m³/h.
- **Alto poder de succión:** Estas bombas son autocebantes incluso para cargas de succión de hasta 8,5 m.
- **Capacidad mantenida bajo amplias variaciones de NPSH:** El rendimiento de la bomba se mantiene aún bajo grandes fluctuaciones de la carga de succión.
- **Elevada presión de descarga:** Las presiones de impulsión pueden alcanzar hasta 2,4 MPa para pequeños caudales.
- **Marcha silenciosa:** El rotor girando dentro de un estator elástico de goma genera muy poco ruido. El nivel de ruido de la bomba en funcionamiento es mucho menor que 90 dB.
- **Bombea líquidos con baja tensión superficial:** Pueden bombear líquidos con baja tensión superficial, por ejemplo: Champú, sin que se afecten sus características.
- **Bombea líquidos con sólidos, materiales abrasivos, fibras o incluso gases en suspensión:** Estas bombas se ven prácticamente inafectadas por los elementos en suspensión. Solo la potencia requerida aumenta cuando el contenido de sólidos aumenta considerablemente. La presencia de un elemento elástico (el estator) entre los pares en contacto la hacen muy resistente a la abrasión. En los modelos mayores de estas bombas pueden ser bombeados líquidos con partículas en suspensión de hasta 38 mm de diámetro.

- **Reversibles:** Si se invierte el sentido de rotación, se invierte el sentido del flujo. El proceso de rodamiento y la formación de cavidades de flujo es idéntico en ambos sentidos de rotación.
- **Adaptables:** Estas bombas son adaptables a prácticamente todas las situaciones que se puedan presentar, pueden operar desde líquidos livianos hasta lodos abrasivos en cualquier posición: horizontal, vertical, inclinadas, etc.
- **Bajas velocidades internas:** La velocidad de desplazamiento de las cavidades de flujo en el interior de la bomba son pequeñas por lo que los fluidos son transportados con un mínimo de turbulencia y agitación.

1.1.4. Parámetros geométricos fundamentales de la bomba. Diseño hidráulico.

Las bombas de cavidad progresiva poseen parámetros geométricos (figura 1.3) que definen sus características hidráulicas (Hirschfeldt., 2008a).

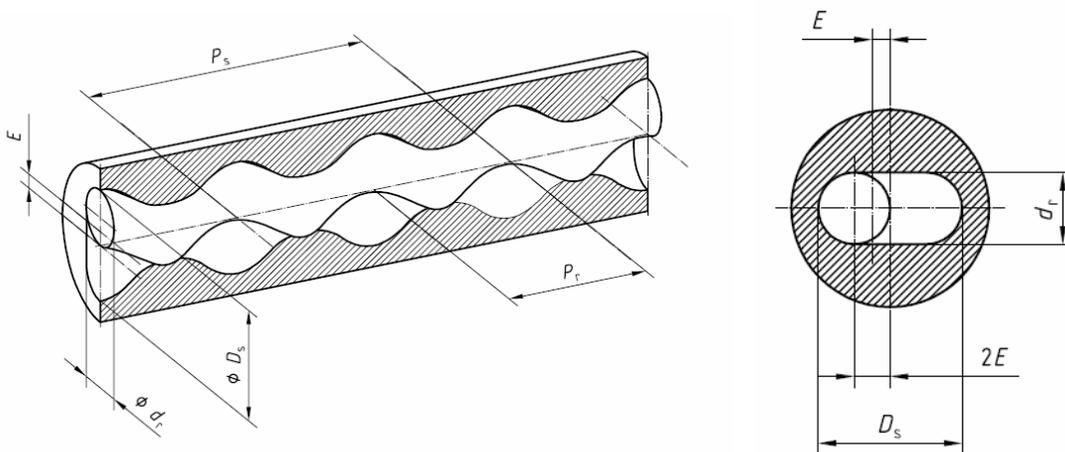


Figura 1.3. Sección hidráulica de las bombas de cavidad progresiva (Hirschfeldt., 2008a).

Entre los principales parámetros identificados en la figura 1.3 se encuentran los siguientes:

- Pr: Paso del rotor.
- Ps: Paso del Estator.
- dr: Diámetro del rotor.

- E: Excentricidad del rotor.
- Ds: diámetro que describe el rotor en un giro.
- La relación que asocia el paso del rotor y el estator es: $P_s = 2Pr$.

Se diseñan rotores y estatores de varias espiras o lóbulos (Hirschfeldt, 2008b) los cuales se combinan a partir de la relación: (espiras rotor:espiras estator). Las relaciones más frecuentes son 1:2; 2:3; 3:4; 4:5. El diseño más popular y comercializable entre los productores a nivel mundial es el diseño 1:2. Como regla debe cumplirse que:

Espiras o lóbulos estator = 1 + Espiras o lóbulos del rotor (figura 1.4).



a-) 1:2



b-) 2:3

Figura 1.4. Relación espiras o lóbulos rotor : espiras o lóbulos estator (Hirschfeldt., 2008b) .

La capacidad o caudal de la bomba viene definida por el desplazamiento o volumen que deja libre el rotor al girar en el interior del estator , este volumen por vuelta se multiplica por el número de revoluciones y por el rendimiento volumétrico.

El rendimiento volumétrico es el porcentaje del volumen que es capaz de ocupar el producto cuando pasa por la zona libre entre el estator y el rotor. Dicho rendimiento depende de las características del producto bombeado (viscosidad, peso específico, etc.) y de la presión de descarga a la que tiene que trabajar la bomba pues a medida que ésta aumenta existe un mayor porcentaje de producto que retrocede por la línea helicoidal de cierre.

El desplazamiento o volumen útil de las bombas de cavidad progresiva viene dada por la fórmula:

$$V_{UTIL} = 4.E.dr.2.Pr = 4.E.dr.Ps \quad (1.1)$$

Del análisis de la expresión anterior se puede deducir que el mantenimiento del desplazamiento o volumen útil puede lograrse modificando los restantes parámetros de las siguientes formas:

1. Aumentando dr y E , disminuyendo proporcionalmente el paso Pr .
2. Disminuyendo dr y E , aumentando proporcionalmente el paso Pr .

Entre las ventajas y desventajas de ambas opciones pueden mencionarse las siguientes:

- Si se disminuyen dr y E del rotor, se produce una disminución de la sección libre de paso que existe entre el rotor y el estator, ya que esta sección viene determinada por la formula:

$$S=4.E.dr \quad (1.2)$$

Como consecuencia con la disminución de la sección libre de paso para bombear un mismo caudal se necesita una velocidad axial de paso del producto por dicha sección muy elevada. Los valores de la velocidad axial de paso inciden en el aumento o disminución de los efectos de la abrasión del producto y, por tanto, inciden en la vida útil del estator y el rotor.

- Por otra parte, disminuir dr y E en el rotor y aumentar el paso del mismo conlleva a que el ángulo formado por el rotor y el estator se haga más pequeño, esta disminución del ángulo acerca peligrosamente las partículas solidas a la zona de circulación haciendo que se apoyen en ambas piezas aumentando el rozamiento.

Los fabricantes de primera línea (Moyno, 2009) a lo largo de varios años han experimentado y obtenido resultados modificando los parámetros dr , E y Pr , y los valores reales obtenidos les han llevado a crear un coeficiente que relacione el valor de dr del rotor con su paso que ha sido denominado R_H (relación hidráulica).

$$R_H = 2 Pr : dr = Ps : dr \quad (1.3)$$

La experiencia de varios fabricantes ha conducido a manejar dichos datos de tal forma que hoy se mantenga la relación hidráulica en los valores $R_H = 1:5$.

Todo lo que sea disminuir esta proporción conlleva un aumento en la vida útil de la bomba, y por tanto una fiabilidad mayor de funcionamiento. Diseñar la bomba con un $R_H = 1:5$ o inferior tiene el inconveniente de costos elevados a causa del aumento del tiempo para el maquinado de los rotores.

Debido a ello, algunos fabricantes sacrificando aspectos técnicos y de explotación, han tratado de introducir bombas con $R_H = 1:6$ con un menor costo de fabricación del rotor pero escondiendo la desventaja de la alta velocidad axial bajo el eslogan comercial: “con bombas de $R_H = 1:6$ se consigue bombear el mismo caudal con velocidades de rotación más bajas”. Detrás de ello se encubre la acción de la velocidad axial de paso del producto más alta que provoca un mayor rozamiento lo que ocasiona mantenimientos más costosos y la disminución de la vida útil de la bomba.

Otro aspecto a tener en cuenta en el diseño hidráulico es la capacidad de la bomba para vencer una determinada presión (Hirschfeldt., 2008a) lo cual está dado por la línea de sello hidráulico formada entre rotor – estator, para obtener esa línea de sello se requiere una interferencia entre rotor/estator, es decir una compresión entre el rotor y el estator (Figura 1.5).

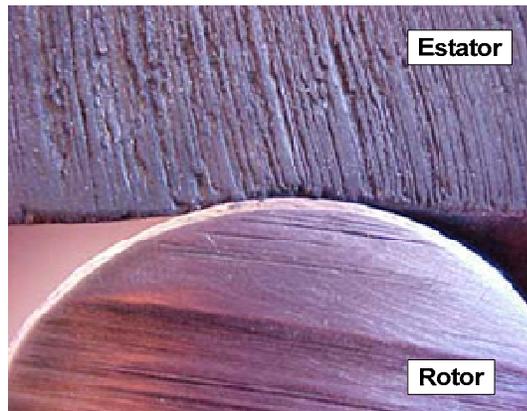


Figura 1.5. Interferencia Estator – Rotor (Hirschfeldt., 2008a).

La presión desarrollada dentro de la bomba depende básicamente de dos factores (Hirschfeldt., 2008a):

- Número de líneas de sello (etapas). (figura 1.6).
- Interferencia o compresión entre rotor y estator. (figura 1.7).

por la temperatura y el fluido manejado, se sugiere comenzar la explotación de la bomba con una baja interferencia, aunque la eficiencia de la bomba sea menor al principio, pero esto contribuye a prolongar la vida del elastómero, (Young, 2002).

La expansión del elastómero se puede dar por:

- Expansión térmica (por la temperatura del fluido o la energía térmica)
- Deformación producida por la reacción de contacto rotor – estator.
- Expansión química

Todos los parámetros anteriores definen la eficiencia volumétrica de la bomba, la cual se calcula como la relación entre el caudal real de la bomba y su caudal teórico. A una presión diferencial igual a cero, la eficiencia volumétrica debería ser igual al 100 %, aunque se pueden encontrar variaciones provocadas por pequeñas diferencias dimensionales del rotor y/o estator.

Tal como lo muestra la figura 1.8 (Hirschfeldt., 2008a), la eficiencia volumétrica de la bomba tiende a disminuir a medida que aumenta la presión diferencial dentro de ella. Esta disminución es provocada por el escurrimiento del fluido a través de la línea de sello rotor/estator desde la zona de mayor presión a la de menor.

En resumen, el escurrimiento es la diferencia entre el desplazamiento (caudal) real de la bomba a una determinada presión diferencial y el caudal real inicial a presión cero.

Puede concluirse que la eficiencia volumétrica y el escurrimiento que ocurre en las bombas de cavidad progresiva dependen fundamentalmente de:

1. La capacidad de elevación de la bomba (presión máxima o número de etapas).
2. La viscosidad del fluido.
3. La interferencia entre estator y rotor (ajuste)
4. La temperatura de trabajo (por su influencia en la dilatación del estator y la viscosidad).

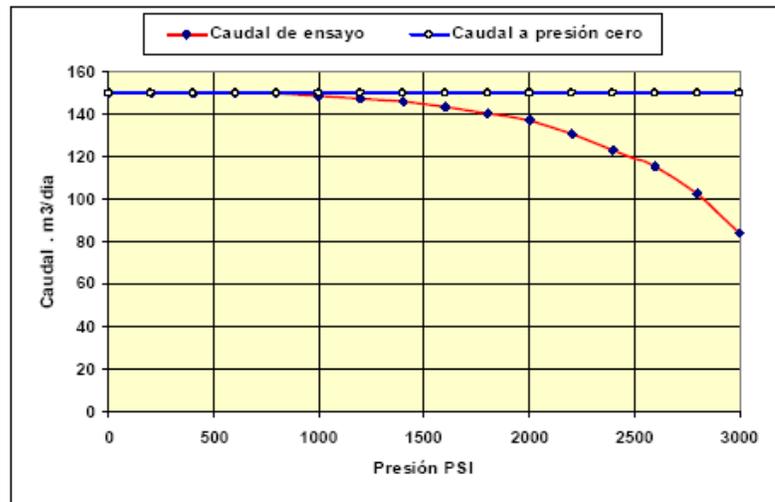


Figura 1.8 Curva característica de una bomba de cavidad progresiva (Hirschfeldt., 2008a).

1.1.5. Aplicaciones.

Las bombas de cavidad progresiva, por las cualidades mencionadas anteriormente, se caracterizan por una gran versatilidad siendo utilizadas en prácticamente todas las ramas de la industria, bombeando una enorme diversidad de fluidos.

Entre las aplicaciones más comunes se encuentran (Mono Pumps, 2010a), (Mono Pumps, 2010b), (Mono Pumps, 2010c), (Mono Pumps, 2010d), (Mono Pumps, 2010e), (Mono Pumps, 2010f), (Mono Pumps, 2010g), (Bourke, 2008) (Roper Pump, 2010b):

Industria Química: Dispersiones. Dosificación de ácidos, lodos. Colas y cremas viscosas, suspensión de látex. Resinas. Abonos, etc.

Industria del Papel y Celulosa: Lejías de sosa cáustica. Adhesivos, colas. Lechada de cal. Colorantes. Pastas.

Industria de Cosméticos: Cremas. Champús. Jabones. Pasta dentífrica. Productos básicos.

Industria Alimenticia: Mermeladas. Puré de legumbres. Miel. Glucosa. Leche. Chocolate. Yogur. Queso. Melaza. Concentrado de tomate. Zumos. Trozos de carne y pescado, etc.

Industria Siderúrgica: Aguas residuales. Lodos con mineral y escorias, etc.

Industria de Bebidas: Cerveza. Vino. Brandy. Lías. Uva entera. Levadura, etc.

1.1.6. Fabricación de las bombas de cavidad progresiva en Cuba.

En Cuba las desventajas comerciales impuestas por el bloqueo norteamericano limitan la adquisición de repuestos para las bombas de cavidad progresiva y el país se ve obligado a comprar bombas nuevas a elevados precios como el caso ocurrido en el año 1989 en la Empresa Glucosa Cienfuegos cuando, al deteriorarse el estator de la bomba de la planta de glucosa se produce una paralización total de la fábrica. Al no existir la posibilidad de adquirir un estator de repuesto a un valor aproximado de \$600.00 USD, la fabrica tuvo que comprar una bomba completa del mismo tipo a un precio de \$6 000.00 USD.

En la mencionada empresa, a partir de la paralización sufrida en el año 1989 y el desenlace económico negativo que tuvo su solución, un colectivo de trabajadores encabezados por el Ing. Antonio Llody Pérez (Llody Pérez, 1996) y en el cual participó el autor del presente trabajo, comienzan a investigar y desarrollar métodos de manufactura convencionales y no convencionales soportados en novedosos métodos y dispositivos especiales de maquinado con el objetivo de recuperar, en territorio nacional, las bombas de cavidad progresiva.

Inicialmente, la recuperación de estas bombas consistió en la fabricación de los estatores de goma, que constituyen el elemento que mayor deterioro sufre y cuyo desgaste hace que las bombas queden inutilizadas. Para la fabricación de los mismos fue necesario construir un conjunto de máquinas y dispositivos entre los que se encuentran una máquina combinada de extrusión-inyección de caucho, autoclave para vulcanización, prensa, complejos moldes de acero y varios dispositivos auxiliares los cuales permitieron desarrollar un total de 12 modelos de estatores utilizados en industrias cubanas tan sensibles como la alimenticia y azucarera.

La recuperación o fabricación de los rotores de dichas bombas constituye una etapa posterior del desarrollo de las investigaciones iniciales. Como resultado de la misma se ha logrado el desarrollo de nuevas tecnologías e ingeniosos dispositivos patentados en la actualidad (Llody García, 2009),(Llody García, 2008b) y más recientemente se han comenzado a desarrollar novedosos métodos de cálculo (López, 2009), nuevos diseños y nuevas tecnologías para la fabricación de los

diferentes componentes de las bombas de cavidad progresiva, en particular sus rotores y sellos mecánicos. Para el caso de los rotores se han planteado dos posibles tecnologías: mediante arranque de virutas (rotores macizos) desarrollada y patentada por Llody García y Llody Perez en el 2008 y mediante la deformación plástica de un tubo de acero inoxidable (rotores huecos) patentada por Llody Garcia, Llody Perez y Goytisoló en el 2009 con el denominativo de Aluminoforging y que se encuentra en la actualidad en fase de desarrollo (Alemán, 2008).

La elaboración primeramente de la tecnología de manufactura de los estatores (Llody Pérez, 1996) y posteriormente el desarrollo de un método para la fabricación de los rotores (Llody García, 2004) permitió, a partir del año 2004, la producción de los dos primeros modelos completos de bombas de cavidad progresiva denominadas All-43 y All-35 introducidas con gran aceptación en varias industrias como los combinados lácteos, industrias de conservas, industrias de jabonería entre otras (Llody Pérez & Llody García, 2004). La introducción del resultado de la investigación trajo consigo un importante efecto económico y social debido a la sustitución de importaciones y la no paralización de importantes industrias sensibles en la alimentación diaria de la población, además de tener un gran impacto medio ambiental por concepto de ineficiencia por desgastes y vertimientos por roturas imprevistas.

1.2. Rotores. Generalidades.

1.2.1. Partes y parámetros geométricos de los rotores.

En la figura 1.9 se muestran las partes de un rotor de las bombas de cavidad progresiva:



Figura 1.9. Partes que componen un rotor.

Este elemento de las bombas de cavidad progresiva está compuesto por un tornillo excéntrico helicoidal que presenta una configuración geométrica compleja (Derecha en la figura 1.9) y el acople de transmisión (Izquierda en la figura 1.9) fabricado por los métodos convencionales de maquinado debido a que no presenta complejidad. En la figura 1.10 se muestran los parámetros geométricos que caracterizan un rotor y que son empleados en el diseño y fabricación de los mismos.

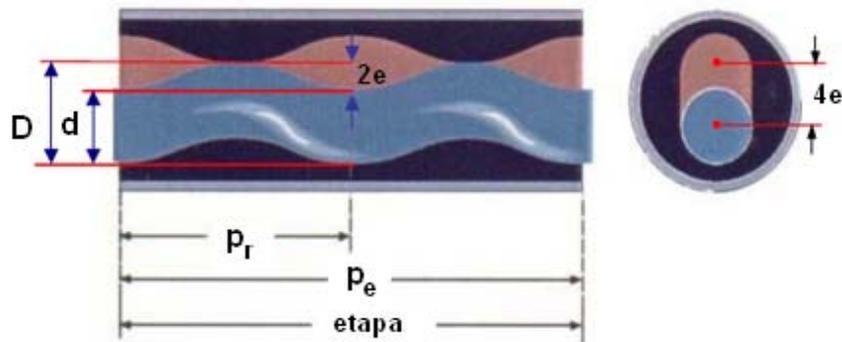


Figura 1.10. Parámetros geométricos que caracterizan los rotores (Hirschfeldt, 2008a).

Donde:

e: Excentricidad. (E)

d: Diámetro del rotor. (d_r)

D: Diámetro que describe el rotor en una revolución. (D_s)

p_r : Paso del rotor.

p_e : Paso de la etapa.

En la tabla 1.1 se ofrece una recopilación de los parámetros geométricos de los rotores presentes en bombas en explotación en varias industrias del país así como en catálogos de firmas de renombre internacional en la fabricación de bombas de cavidad progresiva.

Tabla 1.1. Parámetros geométricos de varios rotores.

Clasificación	e(mm)	d(mm)	D(mm)	Pr(mm)	L(mm)	$R_H=2Pr:d$
ALL-432	9	43	61	115	520	1: 5,35
ALL-43	8,5	43	60	100	230	1:4,65
ALL-35	6	35	47	80	185	1:4,6
SH-42	5	40	50	60	287	1:3
SH-62	6	40	52	100	450	1:5
BG 300	4	30	38	45	120	1:3
BG 320	4	30	38	45	235	1:3
BG 400	2,5	40	45	60	150	1:3
BG 420	2,5	40	45	60	285	1:3
BG 600	7,5	40	55	100	250	1:5
BG 620	7,5	40	55	100	445	1:5
BG 700	5	50	60	120	300	1:4,8
BG 720	5	50	60	120	550	1:4,8

1.2.2 Materiales empleados en la fabricación de los rotores.

La evolución de los materiales utilizados en la manufactura en general y el perfeccionamiento de las formas de su manufactura han ido introduciendo cambios en los criterios de selección de los materiales óptimos para la fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. Las exigencias que las condiciones de explotación le imponen a dichos elementos de las bombas de cavidad progresiva también han jugado un importante papel en los criterios de selección de materiales para los rotores.

Inicialmente se fabricaron a partir de aleaciones de cobre (bronces) capaces de mantener los parámetros tecnológicos en aplicaciones ligeras donde no intervinieran productos abrasivos. Posteriormente se emplearon aceros al carbono con gruesas capas de cromo duro lo cual le confería una mayor dureza a la superficie y permitía emplear las bombas en el trasiego de líquidos con partículas en suspensión y fluidos

abrasivos, con la limitante que al deteriorarse la capa de cromo en algún punto se iniciaba el desarrollo de un foco de corrosión que con el tiempo lograba levantar la mayor parte de la capa dura del cromo superficial.

Todos estos problemas presentados por los rotores y el aumento de los requerimientos impuestos por la industria moderna en cuanto a normas sanitarias y exigencias tecnológicas para el trasiego de productos que así lo requerían (alimentos en procesos asépticos, lodos residuales con gran cantidad de partículas abrasivas en suspensión, etc.) se comienzan a utilizar los aceros inoxidable que por sus propiedades cumplen con los requisitos tecnológicos necesarios en el trasiego de un gran número de productos.

El acero inoxidable más utilizado en la fabricación de los rotores es el Acero inoxidable austenítico al Cromo – Níquel “AISI-316” o según la norma GOST “10X17H13M2T”. Este grupo de aceros (austeníticos inoxidables) se emplean mucho no solo por sus altas propiedades anticorrosivas, sino también por sus buenas cualidades tecnológicas y mecánicas. Según (Guliáev, 1978) estos aceros se laminan bien en caliente y en frío, soportan la embutición profunda y el perfilado en frío y pueden soldarse eléctricamente sin que adquieran fragilidad en zonas próximas a la costura.

El tratamiento térmico de los aceros austeníticos inoxidables es relativamente sencillo y consiste en el temple en agua desde 1050-1100 °C. El calentamiento hasta estas temperaturas hace que se disuelvan los carburos de cromo y el enfriamiento rápido fija el estado de solución sólida sobresaturada. Un enfriamiento lento no es tolerable, ya que en este caso, lo mismo que el revenido, pueden precipitarse los carburos y empeorar las propiedades plásticas y anticorrosivas. Además, durante el temple se producen procesos de recristalización que eliminan los efectos de la deformación plástica que suelen sufrir estos aceros. Como resultado del temple, la dureza de los aceros austeníticos inoxidables no aumenta, sino que disminuye, por lo que, para ellos, el temple es una operación térmica de ablandamiento. Las propiedades mecánicas de los aceros austeníticos inoxidables templados

(ablandados) se caracterizan por un nivel bajo del límite de fluencia, una resistencia no muy alta y una gran plasticidad.

Según (Maslenkov, 1991), las propiedades del 10X17H13M2T para distintas temperaturas son equivalentes a las del acero AISI – 316 y se muestran en la tabla 1.2.

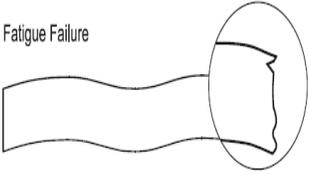
Tabla. 1.2. Propiedades mecánicas del Acero 10X17H13M2T equivalente al AISI-316 (Maslenkov, 1991)(Llave de los Aceros, 1985).

Temperatura °C	Limite fluencia MPa	Limite rotura MPa	$\delta\%$ Elongación	$\Psi\%$ Estricción del Área	E MPa	ϵ_f
800	170	210	26,6	44,1	138000	0,0012
900	132	146	38,5	50	127000	0,0010
1000	75	83	39,5	64	115000	0,0007
1100	42	47	40,5	84,4	103000	0,0004
1200	23	28	77,3	99,3	91000	0,0003
1250	18	22	79,6	100	77000	0,0002

1.2.3 Principales fallas de los rotores (Hirschfeldt, 2008a).

En la tabla 1.3 se relacionan las fallas más frecuentes en los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

Tabla 1.3 Principales fallas de los rotores (Hirschfeldt, 2008a), (Saveth, 2009).

Tipo de falla y descripción	Imagen
<p>Desgaste por abrasión sin afectar el material base. Es el desprendimiento de la capa de cromo, sin afectar el material base. Generalmente se presenta en la parte media del rotor.</p>	
<p>Cromado saltado sin afectar el material base: El cromo se desprende en forma localizada sin llegar a afectar el material base. Este desprendimiento se produce generalmente en la parte superior y es generado por el ataque del fluido a la capa de cromo.</p>	
<p>Desgaste por abrasión sin afectar el material base y sin afectar el cromado en forma total: Se presentan rayas radiales y generalmente ocurre por la acción del bombeo.</p>	
<p>Desgaste profundo localizado: Generalmente esta falla comienza por la degradación del cromo seguida de la pérdida del material base del rotor.</p>	
<p>Desgaste metal-metal: El desgaste se produce generalmente en la parte superior o inferior del rotor por rozamiento con el niple espaciador o el niple de paro, respectivamente.</p>	
<p>Falla por fatiga de los rotores: Se produce por causa de la concentración de tensiones que existe en la transición cabeza del rotor – rotor y las elevadas tensiones que se originan en ese extremo.</p>	<p>Fatigue Failure</p> 

1.3. Tecnologías utilizadas en la fabricación de rotores de bombas de cavidad progresiva. Principales características.

Los rotores son obtenidos a partir de los siguientes métodos de manufactura:

1. Por fundición sometidos a posteriores operaciones de acabado superficial y tratamientos superficiales para aumentar la dureza y calidad de manufactura,
2. Maquinados a partir de barras calibradas en máquinas de uso único.
3. Conformados a partir de la laminación de barras, estampados y soldados a partir de planchas.
4. Por deformación plástica de tubos de paredes delgadas sometidos a presión interna para el caso de los rotores huecos.

1.3.1. Método Hidroforming.

En la literatura científica consultada se hace referencia al hidroforming y se describe como el conjunto de tecnologías mediante las cuales se logra el conformado de un material (generalmente un metal) a partir de la aplicación sobre él de un fluido a alta presión (en general agua o emulsiones de agua y aceite).

El método hidroforming es un método utilizado en la fabricación de piezas por conformado en frío y fue patentado para la fabricación de rotores de bombas de cavidad progresiva por John B. Wade (Wade, 1949). Este método fue desarrollado con el objetivo de mejorar las antiguas bombas Moineau. Los rotores antiguamente eran fabricados macizos y su geometría se obtenía mediante el maquinado con un dispositivo especial en un torno (Wood, 1940) por lo que este método representó una nueva e innovadora solución en la fabricación de rotores. Consiste en realizar el conformado del rotor ejerciendo una presión hidráulica en el interior de un tubo de pared delgada que se encuentra dentro de un molde que posee la geometría del rotor a obtener.

Al aumentar la presión hidráulica en el interior, el tubo se ve sometido a un proceso simultáneo de expansión y de adelgazamiento de sus paredes hasta que, por deformación plástica alcanza la configuración del molde.

En la figura 1.11 se representan los dibujos patentados por Wade, que muestran la secuencia de pasos en el proceso de obtención de los rotores a partir de tubos en los primeros años de invención del método hidroforming.

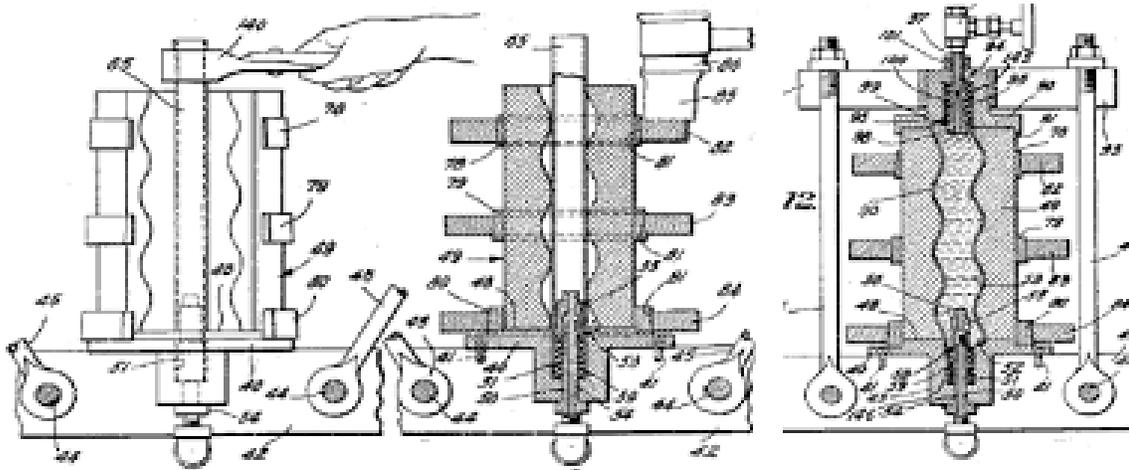


Figura 1.11. Representación de los pasos consecutivos de la deformación de un tubo dentro de un molde durante el conformado de un rotor por el método hidroforming (Wade, 1949).

Como se muestra en la figura 1.11, primeramente se realiza la introducción y sujeción del tubo de paredes delgadas en el dispositivo, se conectan y ajustan los sistemas hidráulicos por donde se introduce el agua a presión en el interior del tubo, se acercan los semimoldes a la zona de conformación y por último, se realiza la conformación del tubo mediante la aplicación de agua a presión proveniente de una bomba suministradora. Este método permitió la fabricación de rotores con un significativo ahorro del material y tiempos empleados tradicionalmente en el procedimiento de elaboración por arranque de virutas.

El método hidroforming para la fabricación de rotores de paredes delgadas es factible, pero al constituir un método de deformación plástica en frío, requiere que la operación se realice en varios pasos tecnológicos con tratamientos térmicos intermedios para eliminar la acritud que la pieza adquiere al ser deformada en frío. Con relación a esto la literatura científica consultada y la revisión de patentes realizada no reportan resultados en cuanto al conformado de tubos de paredes gruesas en caliente donde se podrían obtener los rotores en un solo paso y se

elimina la construcción de los moldes sucesivos para cada etapa disminuyendo los costos por este concepto así como los costos de los tratamientos térmicos intermedios con lo que se lograría reducir aún más el tiempo de manufactura de los rotores.

1.3.2. El estampado y la soldadura de planchas como métodos para la fabricación de rotores huecos.

La utilización del método de estampado y soldadura de planchas (Gunther, 1981) para la manufactura de rotores huecos se basa en la fabricación de dos mitades por estampado y la posterior soldadura de ambas partes. Se parte de dos planchas rectangulares cortadas a la medida precisa y de un espesor mayor que el deseado en la pared de las dos conchas finalmente estampadas.

En la figura 1.12 se muestra una de las conchas que forman la mitad del rotor estampado. Una vez conformadas ambas mitades, las conchas son sometidas a un proceso de soldadura para obtener la configuración proyectada del rotor. En la figura 1.13 se muestra un rotor hueco obtenido por este método donde es visible el cordón de soldadura.



Figura 1.12. Plancha conformada utilizada en la fabricación del rotor (Gunther, 1981).

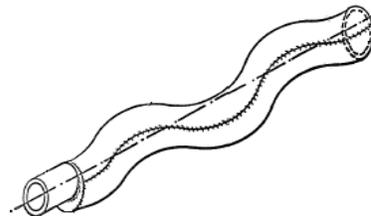


Figura 1.13. Rotor fabricado por la tecnología combinada de conformado-soldadura (Gunther, 1981).

Para la conformación de las dos mitades o conchas se utilizan dos estampas, un macho y una hembra, fabricados de forma tal que al forjar las dos planchas que conforman las dos conchas estas tengan exactamente una sección semicircular en toda su extensión, de manera tal que al unir las dos partes por la línea longitudinal de frontera, la misma coincida con la costura a soldar. Este método presenta varias desventajas que lo hacen poco utilizado, una de las mayores radica en la soldadura donde se producen grietas y deformaciones de las planchas que son inadmisibles en el trabajo posterior del rotor.

1.3.3. La fundición centrífuga bajo la acción de un campo magnético como método de fabricación de rotores.

El método de fundición centrífuga bajo la acción de un campo magnético (Ernst, 1988) es comúnmente utilizado en la manufactura de tubos libres de uniones soldadas. Este es un método de manufactura específico para la producción de piezas huecas. El método incorpora un campo magnético central a una máquina para fundición centrífuga convencional. La figura 1.14 muestra una máquina ideada para este proceso de manufactura de tubos por fundición.

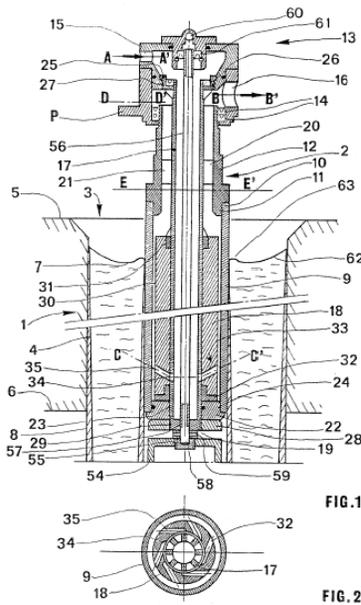


Figura 1.14. Máquina empleada por el método de fundición continua de piezas huecas (Ernst, 1988).

Este proceso puede ser aplicado a todos los metales capaces de fundirse continuamente por medio de métodos convencionales de fundición de cuerpos sólidos. El proceso es generalmente aplicado en la producción de cuerpos no macizos que posean secciones transversales con una amplia gama de formas, dentro de las cuales se encuentran los rotores helicoidales utilizados en las bombas de cavidad progresiva.

Uno de los principales problemas de la fundición centrífuga consiste en la imposibilidad de lograr espesores iguales en toda la sección de la pared obtenida y en ocasiones se presenta llenado incompleto del molde. Por eso se fabrican rotores de paredes gruesas que garanticen un mejor llenado del molde, ello no elimina los riesgos de que existan diferencias de espesores en las paredes ni de la aparición de grietas provocadas por la concentración de tensiones durante el proceso de temple de la pieza, además de aparecer defectos por inclusiones, rechupes y gases atrapados, comunes en los procesos de fundición.

1.3.4. El laminado como método de fabricación de rotores huecos.

Otra tecnología patentada para la fabricación de rotores helicoidales de las bombas de cavidad progresiva es la mostrada en las figura 1.15 y figura 1.16 (Frantisek, 1985), que permite la manufactura de rotores huecos utilizando como materia prima tubos, esta máquina y sus aditamentos permite fabricar rotores de diferentes pasos, excentricidades y diámetros.

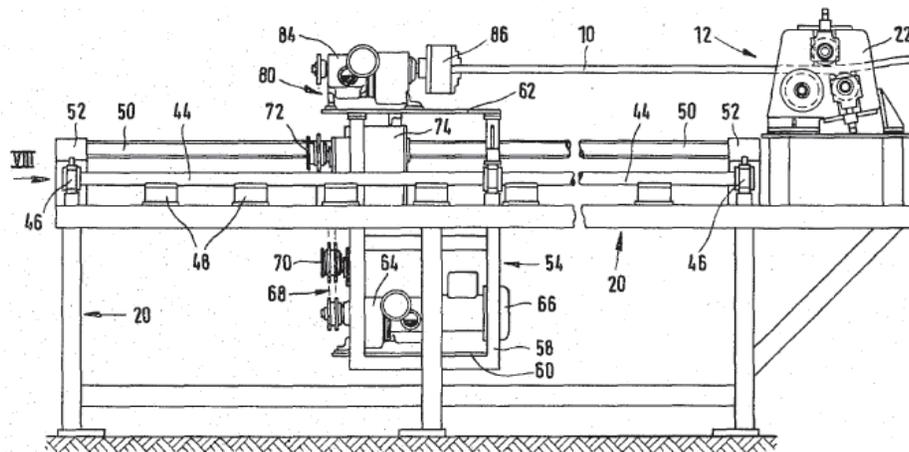


Figura 1.15. Máquina laminadora de rotores huecos (Frantisek, 1985).

El método de laminado de rotores planteado consiste en aplicarle a un árbol un movimiento longitudinal, rotándolo y doblándolo en un movimiento continuo, de manera tal que mientras el árbol es movido a lo largo de su eje central y simultáneamente rotado a través del mismo. La torsión del árbol se realiza en una dirección de tal manera que se alcance el ángulo prefijado con el eje central según se observa en la figura 1.16.

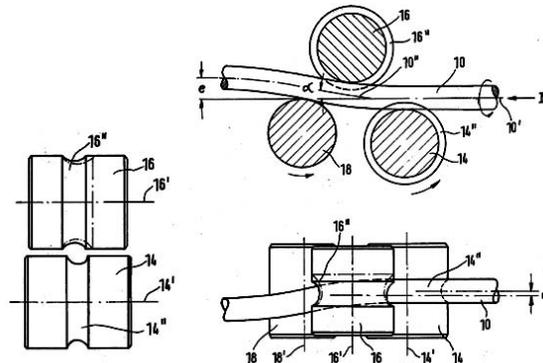


Figura 1.16. Rodillos laminadores utilizados por la máquina laminadora de rotores patentada por “Netsch-Mohnpumpen GMBH” (Frantisek, 1985).

1.3.5. Fabricación de rotores mediante el maquinado en un torno de uso único.

El método para el maquinado de rotores macizos y el dispositivo para mecanizar un rotor helicoidal utilizado en las bombas del tornillo helicoidal se encuentra registrado en (Wood, 1940). En el mismo se maquina un rotor macizo montado en un torno (figura 1.17). El procedimiento consiste en el maquinado del rotor con una herramienta que rota en círculo alrededor del mismo. La herramienta se ubica posicionada céntricamente con relación al eje del rotor macizo y el soporte de la herramienta de corte es acoplado al husillo. El plato del torno y el husillo son conectados simultáneamente así es controlado fácilmente el paso y el diámetro del producto final. Esta máquina herramienta es movida por un motor eléctrico. Este método presenta como inconveniente los altos tiempos de maquinado que se requieren además del alto costo del equipamiento tecnológico al ser una máquina especial de uso único.

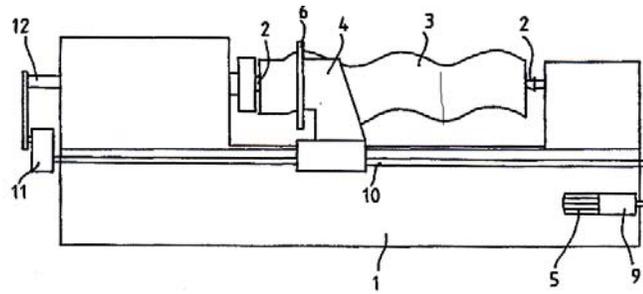


Figura 1.17. Dispositivo para mecanizar un rotor en un torno (Wood, 1940).

1.3.6. La fundición continua como método para la fabricación de rotores.

El método de fundición continua registrado en (Gunther, 1994), es un método de manufactura utilizado en específico para la producción de piezas macizas. Cuenta con un molde con la forma del tornillo helicoidal (figura 1.18).

El proceso es generalmente aplicado en la producción de cuerpos macizos que posean secciones transversales con una amplia gama de formas, dentro de las cuales se encuentran los rotores helicoidales utilizados en las bombas de cavidad progresiva. Las principales desventajas que presenta están relacionadas con las inclusiones no metálicas, los rechupes y la porosidad por gases atrapados característico en las fundiciones que ocasionan con frecuencia grietas en las piezas terminadas.

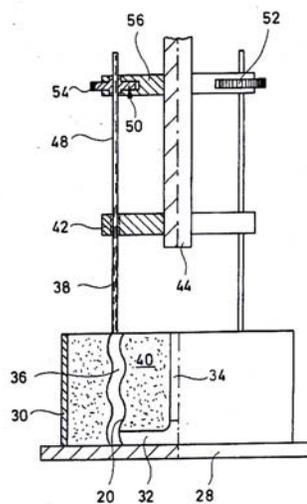


Figura 1.18. Máquina empleada por el método de fundición de piezas macizas (Gunther, 1994).

1.4. Cálculo de los rotores.

En la literatura consultada (Hirschfeldt, 2008 a), (Hirschfeldt, 2008 b), (Montilla, 2008), (Nicola, 2009) no se reporta ningún esquema de análisis para el cálculo de las tensiones de flexión que surgen en los rotores. Los cálculos que se realizan se limitan a calcular el diámetro requerido para transmitir el momento torsor incorporando las tensiones normales provocadas por la fuerza axial provocada por la presión del fluido, mediante el cálculo de la tensión equivalente utilizando la Tercera Hipótesis de Resistencia. Resulta significativo destacar que las tensiones normales provocadas por la fuerza axial debidas a la presión del fluido son de compresión sobre el rotor y tienen un valor del orden de la tercera parte de la tensión tangencial provocada por el momento torsor. De la condición de resistencia según la Tercera Hipótesis:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad (1.4)$$

Se puede entonces inferir, dado que el valor de la tensión tangencial está multiplicado por cuatro, que la influencia de las tensiones axiales en el diámetro del rotor, es doce veces más pequeña que la influencia de las tensiones tangenciales de torsión.

Por otro lado es también significativo destacar que en todas las fuentes consultadas al calcular el torque que transmite el rotor se considera exclusivamente el torque hidráulico necesario provocado por la presión del fluido, el torque de fricción provocado por las fuerzas de fricción que surge en el plano de rotación entre rotor y estator se grafica entre los elementos que consumen potencia y por lo tanto demandan torque, pero por su pequeño valor en comparación con el torque hidráulico se desprecia. Es bueno destacar que estas fuerzas no provocan flexión.

De todo esto se confirma la necesidad de elaborar un esquema de análisis y un procedimiento de cálculo de los rotores que contemple las tensiones de flexión que provocan la carga transversal originada por el acoplamiento cardánico en el extremo del rotor que si son muy importantes en el caso de las fallas ocurridas por fatiga.

1.5. Conclusiones parciales.

A partir de lo expuesto anteriormente, se puede arribar a las siguientes conclusiones:

1. Las bombas de cavidad progresiva son equipos que poseen gran diversidad de características que permiten su uso en un considerable número de aplicaciones, desde líquidos ligeros y limpios hasta lodos altamente densos y abrasivos, por lo que su demanda y las necesidades de piezas y elementos de repuesto justifican los esfuerzos encaminados a desarrollar tecnologías viables para su fabricación en Cuba.
2. En la búsqueda documental sobre la fabricación de los rotores fueron encontradas varias patentes que son descritas en el capítulo. Sin embargo, el método de conformado en caliente de un tubo para obtener rotores huecos, no es tratado por la literatura científica consultada.
3. La literatura científica consultada no aporta información relevante sobre el proceso de diseño, cálculo y manufactura de los rotores de las bombas de cavidad progresiva y en aquellos trabajos donde se enfrenta el cálculo éste se realiza considerando la tensión equivalente en el rotor considerando las tensiones normales provocadas por la fuerza axial provocada por la presión del líquido y las tensiones tangenciales provocadas por la torsión. Las primeras tienen una magnitud del orden de la tercera parte de las segundas, por lo que su influencia en el diámetro es doce veces menor que las tensiones de torsión. En ningún trabajo consultado se hace referencia a las tensiones de flexión, que si son elevadas. Estas sólo se mencionan al referirse a la falla por fatiga de los rotores.
4. La manufactura de los rotores de las bombas de cavidad progresiva, debido a la elevada complejidad geométrica que presentan, se ve limitada desde el punto de vista de los métodos de reducción de masa por arranque de virutas pues la mayor parte de los dispositivos y máquinas que reportan la literatura especializada son de uso específico o están protegidos por patentes, en su mayoría inaccesibles a la industria cubana.

Capítulo II: Desarrollo de nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

2.1. Necesidad del empleo de un esquema de análisis exacto durante el diseño y cálculo de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

Para poder diseñar y fabricar los rotores de las bombas de cavidad progresiva es indispensable poder evaluar con exactitud su capacidad resistente bajo carga. Las dimensiones exteriores de los rotores (diámetro exterior, excentricidad, paso y longitud) están determinadas por los parámetros de flujo y presión de la bomba. Así mismo, el material está condicionado en gran medida por el tipo de fluido a bombear (Hirschfeldt., 2008). Teniendo en cuenta el hecho de que en las bombas de cavidad progresiva, el rotor es el elemento impulsor del fluido, puede concluirse que, en el diseño de los rotores, es necesario considerar como una variable de gran importancia su resistencia, ya que insuficiencias en este aspecto pueden determinar cambios sustanciales en el diseño de la bomba. Para comprender a cabalidad esta afirmación es necesario entender la diferencia, por ejemplo, con el árbol de una bomba centrífuga. En este caso el elemento impulsor es el impelente y se puede modificar el diámetro del árbol hasta garantizar una adecuada resistencia sin necesidad de provocar cambios sustanciales en el elemento impulsor (Cherkasski, 1986). En el caso de una bomba de cavidad progresiva el elemento impulsor es el propio árbol.

Por otro lado en el caso de la fabricación de los rotores huecos mediante la tecnología de deformación plástica en caliente de un tubo cilíndrico hueco aplicando una presión interior a éste, aspecto que será abordado más adelante, la situación se complica pues se requiere combinar los requerimientos de diseño del rotor con los requerimientos tecnológicos del proceso de deformación plástica en caliente. Desde el punto de vista tecnológico lo mejor es que el espesor de la pared sea lo más fino posible pues de esa forma es más fácil deformar plásticamente el tubo, pues si se fabrica el tubo excesivamente fino, las tensiones crecerán y se puede producir la falla por fatiga bajo flexión y torsión en la rotación del mismo. Desde el punto de vista de la resistencia ésta es más difícil de garantizar, pues para un determinado diámetro exterior del rotor, el hecho de que sea hueco implica que el módulo de la sección es menor que el rotor

macizo correspondiente y desde el punto de vista tecnológico se requiere garantizar el espesor mínimo posible de la pared para que la presión interior a aplicar en el tubo durante el proceso de deformación plástica sea lo más pequeña posible. Esta contradicción hay que resolverla en el cálculo del rotor.

Estas situaciones determinan la necesidad de emplear en el cálculo de los rotores un esquema de análisis exacto. Los esquemas de análisis clásicos que se pudieran emplear no satisfacen estos requerimientos (Pisarenko, 1989),(Shannley, 1971),(Beer, 1989),(Niemann, 1967),(Levy, 1992),(Reshetov, 1985). En primer lugar, el rotor está apoyado en el estator prácticamente, en toda su longitud y las cargas externas que le transmite el acoplamiento cardánico están aplicadas en su extremo en voladizo. Por otra parte, la base o apoyo del rotor es un elemento elástico fabricado de goma (Estator).

Entre los esquemas de análisis que aporta la Mecánica de Materiales para estas condiciones se encuentra el esquema de viga sobre fundación elástica, utilizado ampliamente en la Ingeniería Civil (Fang, 1991),(Hansted, 2003), pero poco empleado en la Ingeniería Mecánica para el cálculo de piezas de máquinas. En la Universidad de Cienfuegos existen aplicaciones del empleo de este esquema que resultan antecedentes importantes de este trabajo (Valle, 2000),(Arzola y Goytisolo, 2005),(López, 2009),(Espinosa, 2006).

Los esquemas de análisis clásicos mucho más simples pudieran ser empleados pero resultarían completamente inexactos. Por ejemplo, un posible esquema de análisis sería considerar la reacción del estator como una carga uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud.

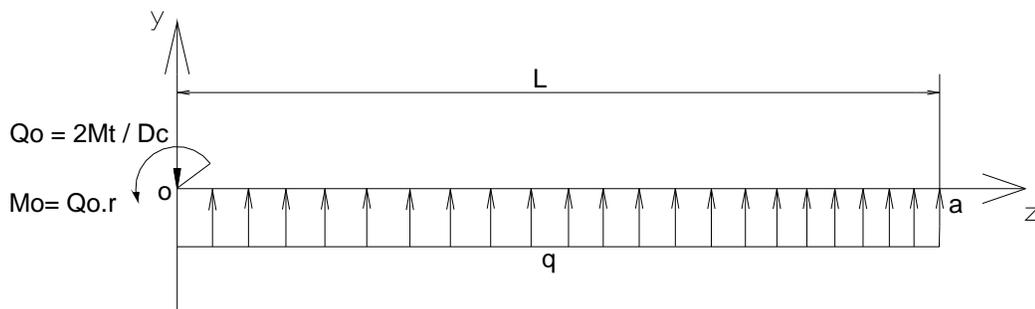


Figura 2.1. Esquema de análisis de un rotor considerando la reacción del estator uniformemente distribuida a lo largo de la longitud de contacto.

En este esquema puede garantizarse el equilibrio de fuerzas, ya que para ello se necesita que: $q = Q_o / L$, sin embargo no estará garantizado de ninguna manera simultáneamente el equilibrio de fuerzas y momentos. Por ejemplo, si se aplica sumatoria de momentos respecto al punto *a* se tiene que:

$$\sum M_a = \frac{q.L^2}{2} - Q_o.L - M_o = 0 \quad (2.1)$$

De donde:
$$q = \frac{2.(Q_o.L + M_o)}{L^2} \quad (2.2)$$

Como se aprecia los valores de *q* requeridos para garantizar el equilibrio de fuerzas y momentos son completamente diferentes, lo que demuestra que en esas condiciones no existe equilibrio y ello impide la utilización del mencionado esquema de análisis.

Otro posible esquema sería considerar la carga de reacción del estator como no uniformemente distribuida y que por su distribución ésta pueda generar una fuerza y un par equilibrantes.

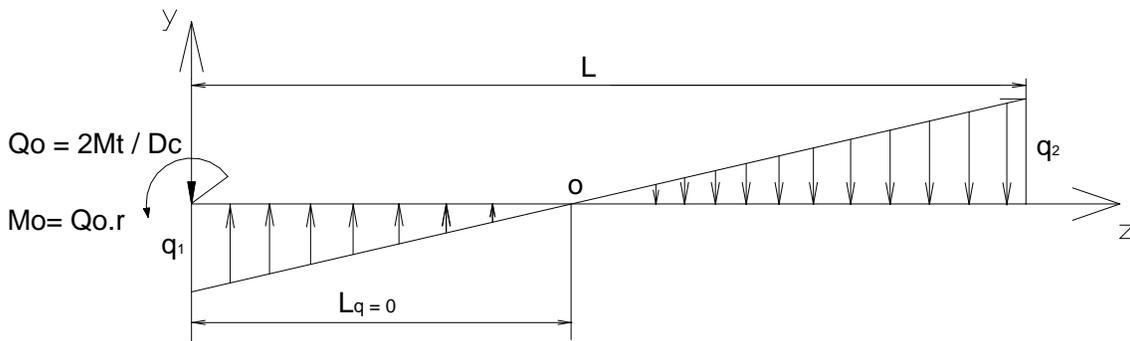


Figura 2.2. Esquema de análisis de un rotor considerando la reacción del estator no uniformemente distribuida a lo largo de la longitud de contacto.

La intensidad de la reacción q_1 tendría que ser mayor que q_2 para que la reacción pueda generar la fuerza vertical equilibrante hacia arriba que garantiza el equilibrio de fuerzas y existirá un punto *o*, para el cual $q = 0$, para que se pueda generar el par de fuerzas equilibrante. En este sistema hay tres incógnitas: q_1 , q_2 , $L_{q=0}$ y solo dos ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_o = 0 \quad (2.3)$$

Se trata de un sistema hiperestático. Para su solución será necesario aplicar el Método de las Deformaciones, considerando que el rotor gira alrededor del punto o en la fundación, pero se mantiene rígido (configuración rectilínea) y plantear entonces, la siguiente ecuación de compatibilidad de las deformaciones (ver figura 2.3).

$$\frac{\delta_1}{L_{q=0}} = \frac{\delta_2}{L - L_{q=0}} \quad (2.4)$$

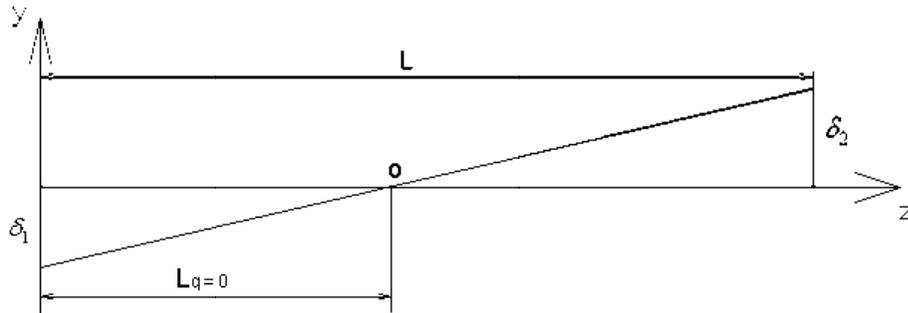


Figura 2.3. Esquema de los desplazamientos del rotor considerándolo como perfectamente rígido y al estator elástico.

Si se considera que los desplazamientos del estator δ_1 y δ_2 provocados por las reacciones q_1 y q_2 se pueden calcular como:

$$\delta_1 = \frac{q_1}{C} \quad \delta_2 = \frac{q_2}{C} \quad (2.5)$$

Donde C es la constante de rigidez del estator bajo la acción de la fuerza distribuida q y es uniforme a lo largo de toda la longitud. De este razonamiento se puede hallar una tercera ecuación:

$$\frac{q_1}{L_{q=0}} = \frac{q_2}{L - L_{q=0}} \quad (2.6)$$

Esta posible solución del problema es sólo un intento de hallar una solución aproximada de los valores de q_1 , q_2 , $L_{q=0}$.

Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores se puede concluir que los esquemas de análisis clásicos analizados reportan resultados completamente inexactos o en el mejor de los casos aproximados para la solución de este problema. Sin embargo, como se dijo con anterioridad, existe en la Mecánica de Materiales Avanzada un esquema de análisis que permite dar solución exacta al sistema hiperestático complejo que se origina en este caso: El Esquema de análisis de Viga sobre Fundación Elástica.

2.2. Cálculo de la fuerza transversal provocada por el acoplamiento sobre el rotor.

2.2.1. Datos del rotor y estator.

La aplicación del esquema de análisis de viga sobre fundación elástica se ilustrará para los datos de una bomba de cavidad progresiva con rotor hueco determinada, aunque el procedimiento general es aplicable a cualquier bomba de cavidad progresiva. Los datos del rotor y estator a analizar son los siguientes:

Potencia de la bomba, $N = 3 \text{ kW}$

$n = 400 \text{ r/min}$

Longitud del rotor, $l = 35 \text{ cm}$

Diámetro mayor del rotor, $D = 4,2 \text{ cm}$

Diámetro menor del rotor, $d = 3,2 \text{ cm}$

Módulo de elasticidad del acero, $E_a = 19\,620 \text{ kN/cm}^2$

Módulo de elasticidad de la goma del estator, $E_g = 9,81 \text{ kN/cm}^2$

2.2.2. Cálculo del momento torsor y de las fuerzas que actúan sobre el rotor.

Los acoplamientos rígidos de compensación, entre los cuales se encuentran los acoplamientos cardánicos, introducen en los árboles una fuerza complementaria radial. En el peor de los casos, cuando toda la potencia del motor se está transfiriendo a la bomba a través del cardán, la carga radial sobre los árboles puede llegar a ser igual a la fuerza circunferencial total (Dobrovolski, 1970) o sea:

$$P_{\text{max.rad}} = \frac{2.M_{\text{tor.max}}}{D_c} \quad (2.7)$$

Donde:

$M_{\text{tor.max}}$ - Momento torsor máximo [kgf-cm].

D_c – Distancia entre los puntos de apoyo del pasador del cardán $D_c = 6 \text{ cm}$.

$$M_{\text{tor.max}} = 97360 \frac{N}{n} \quad (2.8)$$

Donde:

N – Potencia del motor en kW.

n - Velocidad de giro del motor en r/min.

$$M_{\text{tor.max}} = 97360 \frac{3}{400} = 730,2 \text{ kgf.cm}$$

$$M_{tor.max.} = 730,2 \text{ kgf.cm} = 7,163 \text{ kN.cm}$$

Sustituyendo estos valores se obtiene:

$$P_{max.rad} = 243,4 \text{ kgf} = 2,388 \text{ kN}$$

Esta fuerza $P_{max.rad}$ actúa sobre el rotor en el lugar donde está ubicado el cardán, pero el estator no empieza en este lugar. Como el estator es compuesto por caucho, él actúa como una base elástica (fundación elástica). El estator está colocado a 6,5 cm del cardán, entonces en el punto donde empieza el estator esta fuerza radial se comporta como una fuerza cortante, Q_0 , y un par de momento, M_0 . Este punto se tomará como origen del sistema. La fuerza Q_0 y el momento M_0 se calcula de siguiente manera:

$$Q_o = P_{max.rad} = 2,388 \text{ kN} \quad (2.9)$$

$$M_o = P_{max.rad} \cdot 6,5 = 2,388 \text{ kN} \cdot 6,5 \text{ cm} = 15,522 \text{ kN.cm} \quad (2.10)$$

En la figura 2.4 se representa los elementos que intervienen en el cálculo anterior:

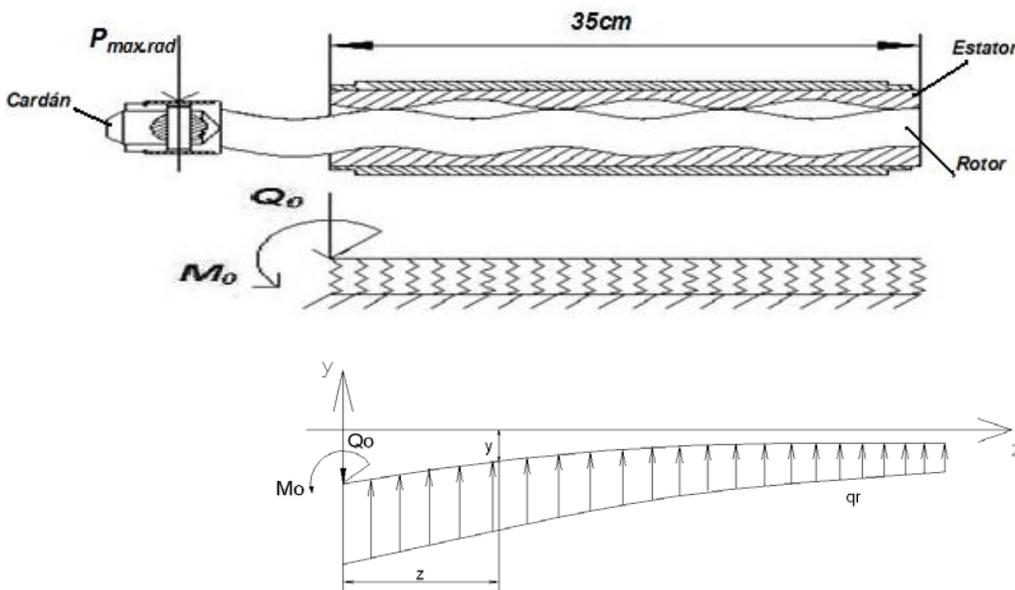


Figura 2.4. Esquema del rotor ubicado en el estator y posición relativa del cardán.

En esta figura 2.4 la reacción de la fundación es: $q_r = -\alpha \cdot y$

2.3. Determinación del coeficiente de balasto o de rigidez de la fundación.

Para desarrollar el nuevo esquema de análisis se requiere tener el valor del coeficiente de rigidez de la fundación: α , del rotor en contacto con el elastómero del estator. En la literatura consultada no se referencia ningún valor para este parámetro en el caso de materiales similares a los analizados (Donald, 2010),(Franklin, 2010). En estas fuentes se plantea que el coeficiente de balasto depende de los materiales en contacto y del tipo de contacto y se dan incluso técnicas para su determinación experimental. En otras fuentes en situaciones de contactos localizados se dan ejemplos donde se aplica la Teoría de Hertz (Fregly, 2007). En (Feodosiev, 1985) al aplicar el esquema de viga sobre fundación elástica al caso de una viga flotante se obtiene el coeficiente de balasto de la fundación en dicha aplicación analíticamente, partiendo del Principio de Arquímedes y se obtiene que el mismo depende en ese caso de la densidad del agua y del ancho de contacto entre el madero y el agua. En el caso analizado es muy importante obtener el coeficiente de balasto en función del ancho de contacto entre rotor y estator determinado por la interferencia entre estos. Para obtener este coeficiente en función de las propiedades de los materiales en contacto y del ancho de la banda de contacto provocado por la interferencia entre rotor y estator, en el presente trabajo se partió de la Teoría del Contacto de Hertz. Según (Pisarenko, 1989), para el caso de un cilindro (el rotor), en contacto, con una cavidad cilíndrica (el estator) de ejes paralelos se da una ecuación basada en la Teoría de Hertz que establece la relación entre la aproximación entre los cuerpos Y , el semiancho de contacto b entre los cilindros, la carga distribuida en el contacto y el módulo de elasticidad reducido del mismo: E_R . En el caso de cilindro y cavidad cilíndrica el ancho de contacto depende de la diferencia de radios de los cilindros. Si la diferencia de radios entre la cavidad cilíndrica y el cilindro es muy grande, teóricamente el contacto es una línea y si esa diferencia se va reduciendo pues el semiancho de contacto crecerá. En el caso analizado en el presente trabajo, el semiancho de contacto estará determinado por la interferencia entre el rotor y el estator.

La ecuación es la siguiente:

$$Y = 1,82 \cdot \frac{p}{l} \cdot \frac{(1 - \ln b)}{E_R} \quad (2.11)$$

Donde Y es la aproximación (o desplazamiento relativo) entre los cuerpos en contacto y b el semiancho de la banda de contacto (figura 2.5).

Teniendo en cuenta que $q_r = -P/l$, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$q_r = -\frac{E_R}{1,82 \cdot (1 - \ln b)} \cdot Y \quad (2.12)$$

Ahora como, para el esquema de viga sobre fundación elástica se tiene que:

$$q_r = -\alpha \cdot Y \quad (2.13)$$

Se deduce entonces que para el caso analizado:

$$\text{—————} \quad (2.14)$$

En el esquema que sigue se representa el semiancho de contacto entre el rotor y el estator:

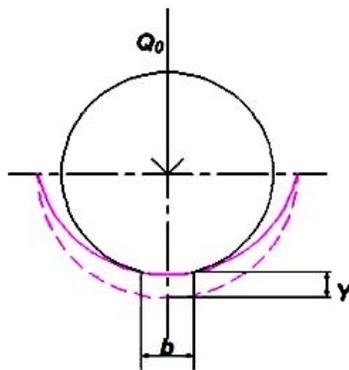


Figura 2.5. Esquema del contacto entre rotor y estator.

Es necesario explicar que la ecuación (2.12) aparece dada en (Pisarenko, 1989) para materiales iguales, o sea, $E_1 = E_2$ y $\mu_1 = \mu_2$, sin embargo de la literatura que aborda la Teoría de Hertz e incluso el propio Pisarenko explica que a pesar de estar obtenidas las expresiones para $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, para los cálculos prácticos, teniendo en cuenta que los coeficiente de Poisson para los materiales metálicos no se diferencian mucho de $\mu = 0,3$, las mismas, pueden ser utilizadas para otros valores de μ . Simplemente en este

último caso en lugar de E es necesario colocar: $E_R = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ para contemplar la

diferencia entre los módulos de elasticidad que si puede ser significativa.

La demostración del coeficiente de la ecuación (2.11) igual a $1,82/E_R$ aparece en (Goytisoló, 1973), (Levy, 1992) donde al demostrar la expresión de la aproximación

entre los ejes en el caso general de tensiones de contacto se plantea lo siguiente: La aproximación entre los ejes para materiales diferentes depende de:

$$\Delta = (1 - \mu_1^2)/E_1 + (1 - \mu_2^2)/E_2$$

Se utiliza entonces una simplificación para los aceros y materiales metálicos en general de asumir que a pesar de que los módulos de elasticidad sean diferentes se puede asumir que: $\mu_1 = \mu_2 \approx 0,3$, de donde se obtiene que:

$$\Delta = (1 - \mu_1^2)/E_1 + (1 - \mu_2^2)/E_2$$

$$\Delta = 0,91 (E_1 + E_2) / (E_1 \cdot E_2)$$

Designando por $E_R = 2 \cdot E_1 \cdot E_2 / (E_1 + E_2)$ como módulo de elasticidad reducido, se obtiene el coeficiente: $\Delta = 1,82/ER$, que aparece en dicha ecuación.

En las bombas de cavidad progresiva, dada la experiencia del autor, el ancho de la banda de contacto para las bombas de cavidad progresiva se puede considerar que varía desde $2b = 10$ mm para las bombas pequeñas hasta $2b = 40$ mm para las bombas más grandes. Como ejemplo se analizará que sucede para un semiancho de la banda de contacto $b = 5$ mm = 0,5 cm

Teniendo que:

$$E_R = \frac{2 \cdot E_a \cdot E_g}{E_a + E_g} \quad (2.15)$$

$$E_a = 19\,620 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_g = 9,81 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_R = \frac{2 \cdot 19620 \cdot 9,81}{19620 + 9,81} = 19,610 \text{ kN/cm}^2$$

Si se hubieran considerado en el caso del contacto rotor de acero ($\mu_1 = 0,3$) en contacto con estator de goma ($\mu_2 = 0,47$), las diferencias, no sólo en los módulos de elasticidad, sino en los coeficientes de Poisson, se hubiera obtenido, en lugar de la expresión clásica del módulo de elasticidad reducido, la siguiente expresión:

$$E_R = 2 \cdot E_1 \cdot E_2 / (E_1 + 0,86 \cdot E_2)$$

Como para el caso analizado:

$$E_1 = E_a = 19\,620 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_2 = E_g = 9,81 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_R = 2 \cdot E_1 \cdot E_2 / (E_1 + E_2) = 19,61 \text{ kN/cm}^2 \text{ y para } E_R = 2 \cdot E_1 \cdot E_2 / (E_1 + 0,86 \cdot E_2) = 19,61 \text{ kN/cm}^2$$

Como se aprecia el valor del módulo de elasticidad reducida sería el mismo, las diferencias se manifiestan en la tercera cifra decimal.

De donde se obtiene que, para el caso analizado:

$$\alpha = \frac{19,610}{1,82 \cdot (1 - \ln 0,5)} = 6,364 \text{ kN/cm}^2 = 63,64 \text{ MPa}$$

Según el criterio del autor, este valor es muy lógico para el caso del contacto goma – acero, ya que por ejemplo para el caso caña húmeda triturada y compactada – hierro fundido en el trabajo (Arzola y Goytisoló, 2002) se obtuvo experimentalmente un valor $\alpha = 8\,000$ MPa, valor este elevado a causa de la presencia del agua incompresible. En el trabajo (Valle, 2000) para el contacto acero – hormigón se utilizó un valor reportado en la literatura para esta contacto de $\alpha = 230$ MPa, pero en este caso la goma es por mucho más elástica. El valor de β para el caso del rotor de la bomba en contacto con el estator de goma será:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4 \cdot E_a \cdot I_x}} \quad (2.16)$$

Donde:

$$I_x = 0,05 \cdot D^2 (1 - C^4) \quad (2.17)$$

$$C = \frac{d}{D} = \frac{3,2}{4,2} = 0,76$$

$$I_x = 0,05 \cdot (4,2)^2 \cdot (1 - (0,76)^4) = 10,4 \text{ cm}^4$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{6,364}{4 \cdot 19620 \cdot 10,4}} = 0,053 \text{ cm}^{-1}$$

2.4. Aplicación del Método de los Parámetros de Origen en la solución del esquema de análisis.

Para la solución de vigas hiperestáticas sobre fundación elástica en la literatura se proponen varios métodos. En (Feodosiev, 1985) se utiliza el Método Clásico de Integración de la Ecuación Diferencial aproximada de la Curva Elástica de una Viga, pero este método resulta extremadamente engorroso, aun para los casos más simples de carga. En (Arzola y Goytisoló, 2002) se utilizó el Método de los Parámetros de Origen, el cual resulta muy práctico y exacto para incluso casos muy complejos de

carga, ya que el mismo resulta de la integración ordenada de la Ecuación Diferencial aproximada de la Curva Elástica de una Viga. En (Espinosa, 2006) se utilizó para resolver el mismo problema de Arzola, el software SAP que hace modelaciones de vigas sobre fundación elástica. La utilización de este software en el caso analizado sería extremadamente engorroso ya que, por un lado sería necesario modelar por separado cada uno de los rotores a evaluar y por otro no resulta fácil incorporar en el modelo la influencia de la interferencia. El Método de los Parámetros de Origen para las vigas sobre fundación elástica (Goytisoló, 2005); (Pisarenko, 1989) es un Método analítico, exacto que da soluciones generales aplicadas a todos los rotores. El mismo dispone de las siguientes cuatro ecuaciones para obtener las flechas, las pendientes, los momentos flectores y las fuerzas de cortante en cualquier sección de la viga a lo largo de su longitud:

$$Y_{(z)} = Y_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\theta_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - \frac{\theta_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (2.18)$$

$$\theta_{(z)} = \theta_0 \cdot J_1(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{Q_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot Y_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.19)$$

$$M_{(z)} = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (2.20)$$

$$Q_{(z)} = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.21)$$

En estas ecuaciones: Y_0 , θ_0 , M_0 y Q_0 son correspondientemente la flecha, la pendiente, el momento flector y la fuerza de cortante en el extremo izquierdo de la viga (origen de coordenadas) y se conocen como parámetros de origen. Los términos: $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$, $J_3(\xi)$ y $J_4(\xi)$ son funciones de senos y cosenos hiperbólicos conocidas como funciones de Krilov, cuyas expresiones y valores aparecen en la literatura (Pisarenko, 1989).

Los dos extremos del rotor son libres entonces los parámetros conocidos son, la fuerza de cortante y el momento flector en el origen (extremo izquierdo) y también en el extremo derecho del rotor: $M_0 = -15,522 \text{ KN-cm}$, $Q_0 = -2,388 \text{ KN}$, $M_l = 0$ y $Q_l = 0$ Los signos negativos en los valores de M_0 y Q_0 están determinados por el convenio de signos establecido por el método.

Se conocen por lo tanto dos parámetros de origen $M_0 = -15,522 \text{ KN-cm}$, $Q_0 = -2,388 \text{ KN}$, se necesita hallar los otros dos, la flecha, Y_0 , y el ángulo, θ_0 , en el origen y se conoce

que $M_l = 0$ y $Q_l = 0$. Entonces se plantean las expresiones de $M_{(z)}$ y $Q_{(z)}$ para $z = l = 35$ cm y se las iguala a cero para hallar Y_0 y θ_0 :

$$M_{(z)} = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) = 0 \quad (2.22)$$

$$Q_{(z)} = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) = 0 \quad (2.23)$$

Donde:

$$\xi = \beta \cdot z = 0,053 \text{cm}^{-1} \cdot 35 \text{cm} = 1,855 \quad (2.24)$$

De la tabla de las funciones de Krilov para vigas sobre fundación elástica (Pisarenko, 1989) haciendo algunas interpolaciones, se obtiene que:

Tabla 2.1. Funciones de Krilov para el rotor sobre fundación elástica analizado.

ξ	J_1	J_2	J_3	J_4
1,855	0,918	1,134	1,496	1,004

Sustituyendo los valores de $\beta = 0,053 \text{cm}^{-1}$, $\alpha = 63,64$ MPa y los valores de J_i correspondientes, se tiene que:

$$Y_0 = -0,064 \text{ cm}$$

$$\theta_0 = -0,00425 \text{ rad}$$

Ahora se plantean las ecuaciones para las funciones $Y(z)$, $\theta(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$ para cualquier valor de z para poder representarlas:

$$Y_{(z)} = Y_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\theta_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - \frac{\theta_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (2.25)$$

$$\theta_{(z)} = \theta_0 \cdot J_1(\xi) - \frac{M_0}{E \cdot I_x \cdot \beta} \cdot J_2(\xi) - \frac{Q_0}{E \cdot I_x \cdot \beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot Y_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.26)$$

$$M_{(z)} = M_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^3} \cdot J_4(\xi) \quad (2.27)$$

$$Q_{(z)} = Q_0 \cdot J_1(\xi) + \frac{\alpha \cdot Y_0}{\beta} \cdot J_2(\xi) + \frac{\alpha \cdot \theta_0}{\beta^2} \cdot J_3(\xi) - 4 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot J_4(\xi) \quad (2.28)$$

Resolviendo las ecuaciones para $z = l = 35$ cm, se obtiene que:

$$Y_{35} = 0,28 \text{ cm}, \theta_{35} = -0,0022 \text{ rad}, M_{35} = 0 \text{ y } Q_{35} = 0$$

Utilizando el programa MatLab se pueden evaluar estas funciones a través de toda la longitud del rotor, es decir, insertar en el mismo las expresiones matemáticas de las funciones de Krilov para poder evaluar z desde $0 \leq z \leq 35$ cm. Entonces con estos resultados se pueden representar los valores de las flechas, las pendientes, los momentos flectores y las fuerzas de cortante en cualquier sección del rotor gráficamente. Estos gráficos se muestran en la figura 2.6.

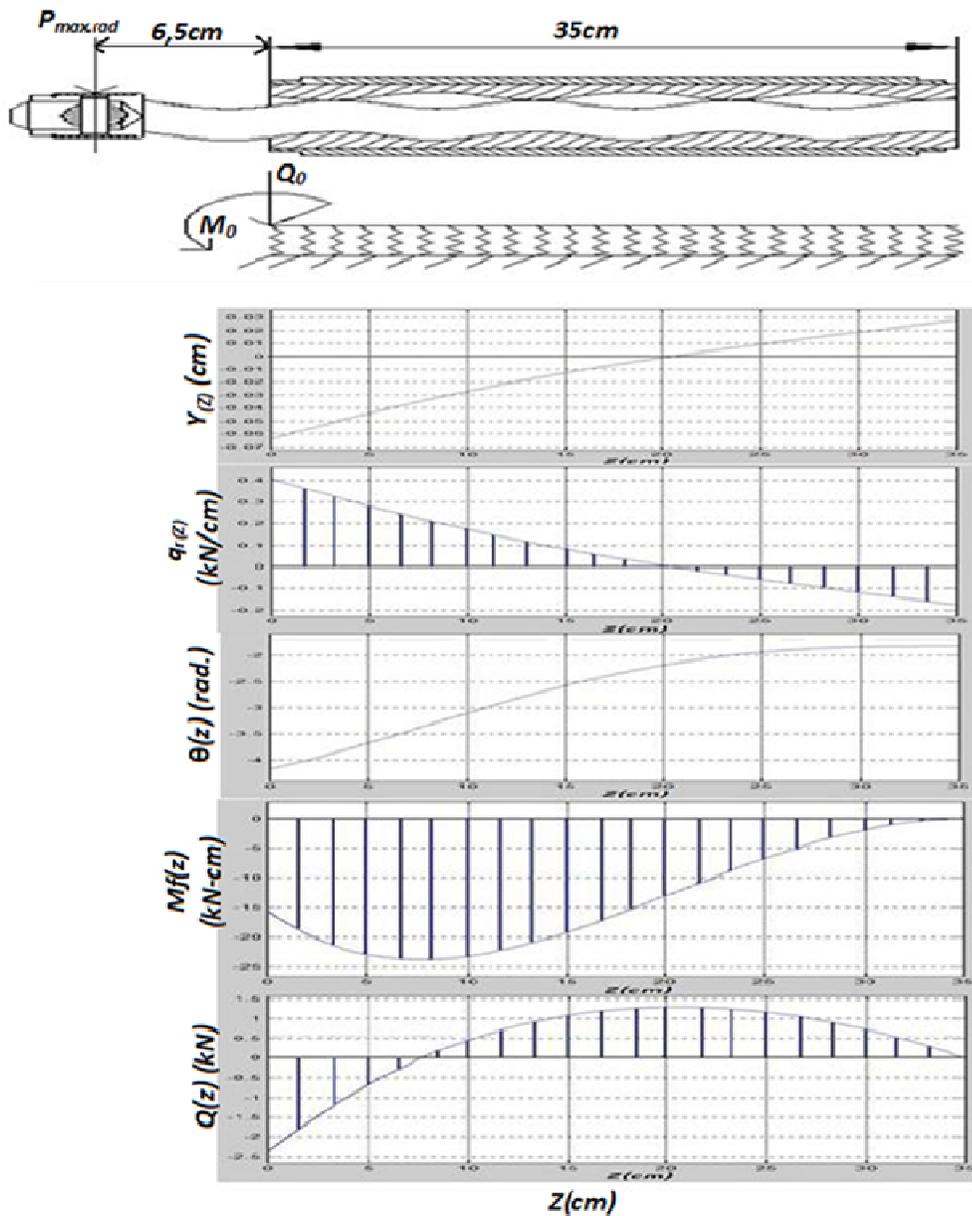


Figura 2.6. Distribución de la flecha, la reacción del rotor sobre el estator, la pendiente, el momento flector y la fuerza de cortante a lo largo del estator.

2.5. Análisis general de los resultados obtenidos en la aplicación del nuevo esquema de análisis.

2.5.1. Procedimiento general empleado para el análisis.

Como se puede observar debido a la complejidad del análisis, en los cálculos anteriores se utilizó un valor fijo de b (semiancho de contacto entre el rotor y el estator) para poder llegar a algunos resultados parciales preliminares. En este epígrafe con el objetivo de lograr más generalidad se analizará la aplicación del esquema de análisis asumiendo z y b variables. Para lograr este análisis y realizar un estudio completo de la influencia de dichas variables, debido a la complejidad de las expresiones resulta engorroso realizarlo por los métodos tradicionales, por lo que se hace necesario el uso de alguna herramienta matemática, siendo en este caso el programa computacional MatLab. Resulta necesario para realizar estos cálculos con MatLab programar las ecuaciones en el lenguaje del mismo, esto se puede ver en el Anexo I.

El método de programación consiste en aplicar las ecuaciones antes obtenidas de la metodología desarrollada para vigas sobre fundación elástica. De esta manera al igual que la sección anterior se definen las constantes iguales a las ecuaciones (2.9), (2.10), (2.15) y luego se plantean las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24),... (2.28) que definen el modelo pero en este caso considerando b y z variables.

Al ejecutar esto en MatLab se obtienen los resultados deseados, que consisten en las funciones dependientes de dos variables que describen las ecuaciones de la flecha, el cortante, el ángulo de inclinación y el momento flector como función de b y z . Esto se puede ver en los Anexos II, III, IV, V, VI.

De esta manera se tiene:

$$y = f(b, z) \quad ; \quad \theta = f(b, z)$$

$$M_f = f(b, z) \quad ; \quad Q = f(b, z)$$

Con el objetivo de ilustrar los resultados se grafican estas funciones dando la posibilidad de realizar algunos análisis. Para esto también se usa el MatLab puesto que resulta muy fácil una vez obtenidas las ecuaciones representar una gráfica en cualquier condición, ya que estas ecuaciones responden siempre al comportamiento de estas magnitudes para este rotor con los datos planteados.

2.5.2. Comportamiento de la flecha de la fundación, $y_{(b,z)}$.

Para este análisis primeramente se evalúa la función de la flecha con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir: $y = f(0.5 ; z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa la flecha en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función puede ser graficada para el dominio de z y la misma se muestra en la figura 2.7:

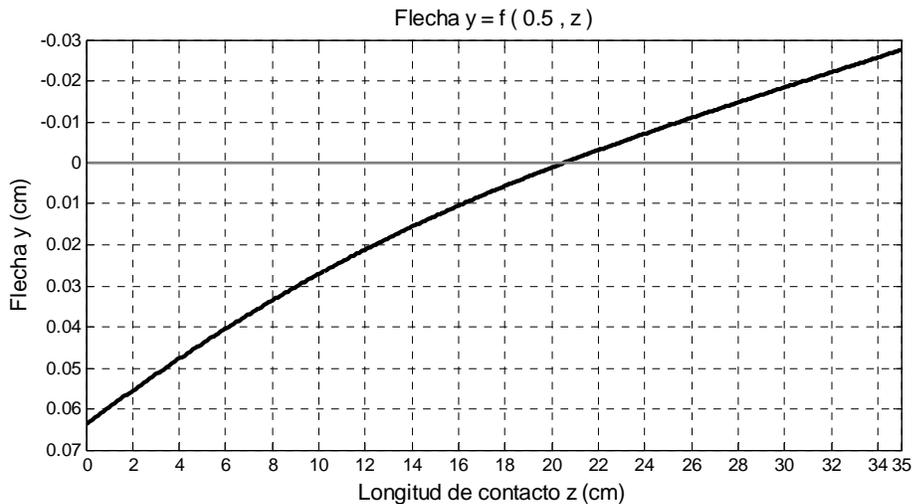


Figura 2.7. Distribución de la flecha para $b = 0,5$ cm.

Como se puede apreciar durante el funcionamiento de la bomba, cuando la carga radial Q_o , es hacia abajo el rotor se inclina de manera que es como si pivoteara en un punto a una distancia del extremo izquierdo $z = 20,5$ cm. Y si se observa en la figura 2.6 el valor de q_R en ese punto es cero de aquí que se debe esperar un mínimo desgaste del estator en esa zona.

Como se tiene la flecha expresada matemáticamente se puede obtener el resultado anterior para cualquier valor de b . En la figura 2.8 se ha graficado como en el caso anterior la dependencia de $y_{(b,z)}$ con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b : 0.5; 1; 2.

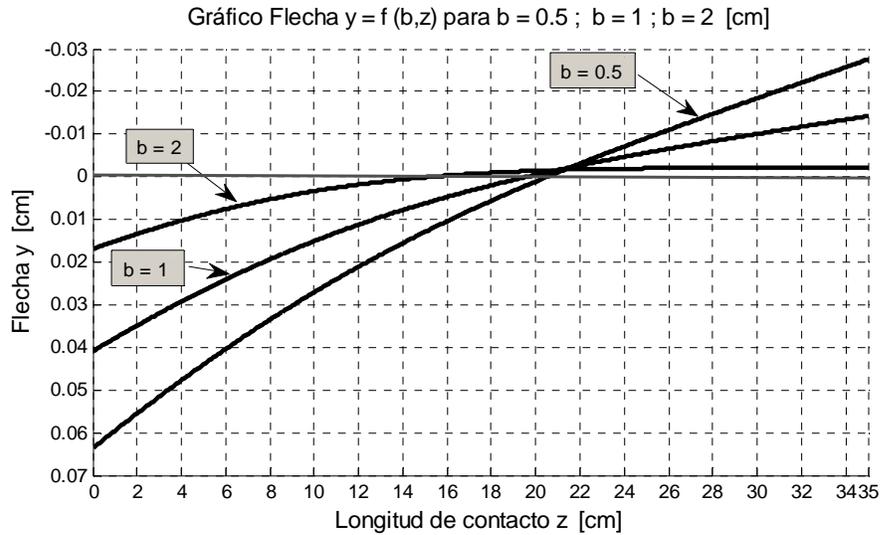


Figura 2.8. Comportamiento de la flecha para diferentes valores de b.

Como se puede apreciar de las gráficas anteriores cuando el ancho de contacto es muy grande la flecha se tiende a estabilizar en un valor fijo en la mitad posterior del rotor y por lo tanto la reacción q_R también (figura 2.11), de aquí que el desgaste será más uniforme en esta zona del rotor.

Ahora para completar el análisis de la flecha se utiliza la función de la misma en la forma tal que b y z son variables, es decir, $y = f(b, z)$. La gráfica de este análisis se representa en tres dimensiones ya que tiene dos variables y está mostrado en la figura 2.9 que se muestra a continuación:

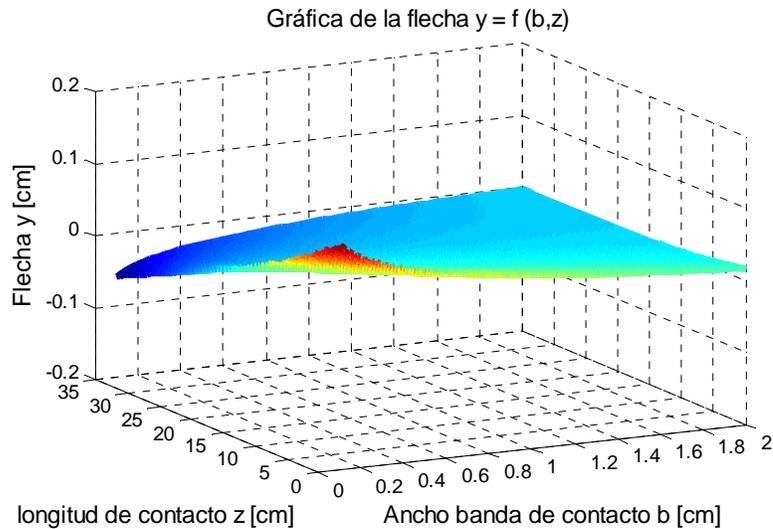


Figura 2.9. Comportamiento de la flecha $y_{(z,b)}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z.

Como se aprecia de la gráfica, para el rotor analizado, la máxima diferencia entre las flechas al comienzo y final de la fundación elástica (estator) se obtiene para valores de b muy pequeños y en esa situación, se obtiene el máximo desplazamiento y_{max} en un rotor, precisamente cuando $z = 0$ con un valor cercano a 0,2 cm, o sea, $y = 2$ mm, la flecha se estabiliza a lo largo de la longitud en un valor ligeramente superior a cero.

2.5.3. Comportamiento de la reacción de la fundación q_R b,z.

En la figura 2.10 se muestra el comportamiento de esta reacción para $b = 0,5$.

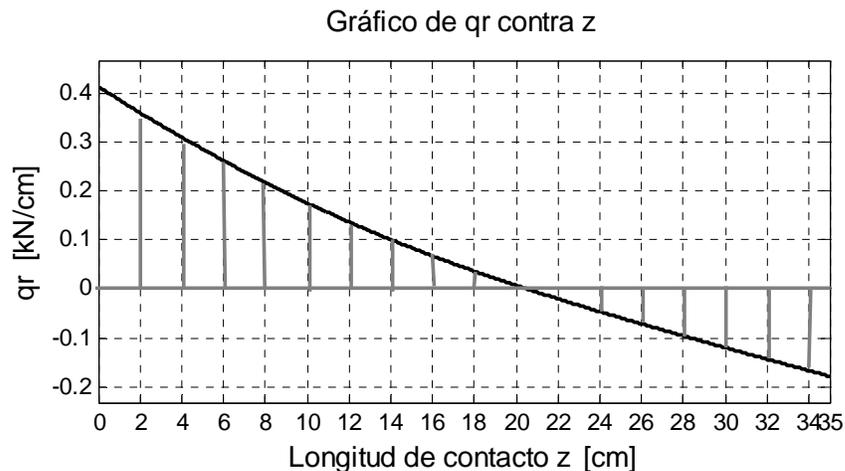


Figura 2.10. Distribución de la reacción de la fundación para $b = 0,5$ cm.

De la gráfica de q_R contra z se puede ver que:

$$q_{Rmax} = 0,41 \text{ kN/cm}$$

$$q_{Rmin} = - 0,18 \text{ kN/cm}$$

Si se halla el área debajo la curva de q_R utilizando el programa MatLab, se obtiene:

$$\int_0^{35} q_r \cdot dz = 2,388 \text{ kN} = Q_0$$

Este valor es exactamente igual a Q_0 , lo que permite validar la exactitud de los cálculos realizados, ya que al estar el rotor en equilibrio la resultante de la reacción de la fundación (integral debajo de la curva) tiene que ser igual a la fuerza transversal aplicada Q_0 , lo cual se cumple. Se integró a través de toda la longitud el producto de la reacción q_R multiplicada por la longitud z . Esto equivale a hallar el momento de la reacción con relación al origen de coordenadas. Esta integral resultó numéricamente

igual a $M_0 = 15,222 \text{ kN.cm}$, lo que confirma también que las ecuaciones obtenidas garantizan el equilibrio de momentos.

$$\int_0^{35} q_r \cdot z \cdot dz = 15,222 \text{ kN.cm} = M_0$$

El comportamiento de la reacción del estator sobre el rotor para diferentes valores de b se muestra en la figura 2.11:

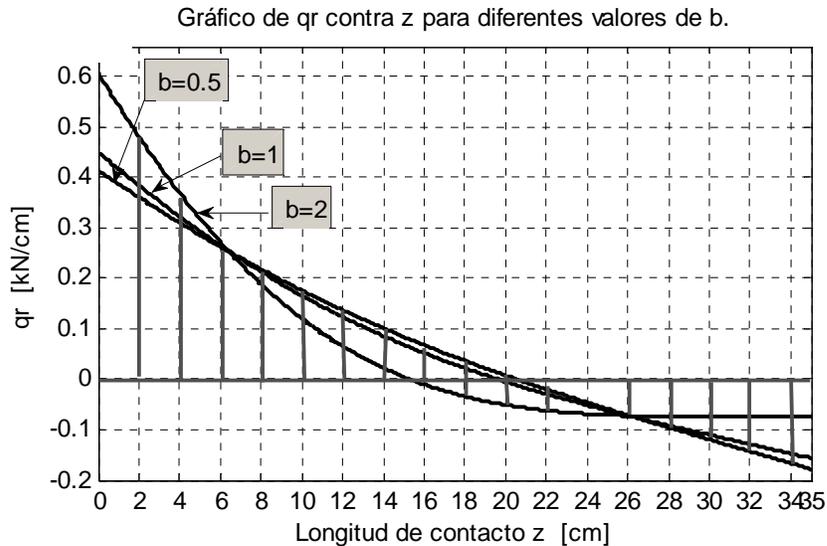


Figura 2.11. Comportamiento de la reacción de la fundación para diferentes valores b .

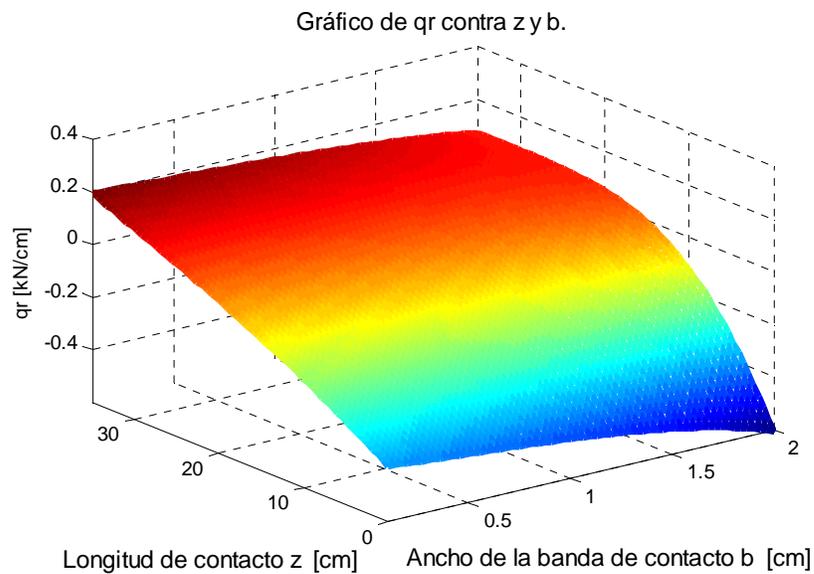


Figura 2.12. Comportamiento de la reacción de la fundación para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z .

Como se aprecia en las figuras anteriores el valor máximo de la reacción de la fundación siempre ocurre para $z = 0$, de aquí que es de esperar un máximo desgaste de los estatores en esta zona.

En la figura 2.13 se muestran simultáneamente la gráfica de distribución de la reacción cuando $b = 0,5$ cm y una foto del desgaste observado en un estator real, donde se puede observar que el desgaste es intenso en toda la zona delantera y nulo en la parte trasera. En la parte trasera del rotor el desgaste se produce en la otra mitad del estator, no mostrada en la figura.

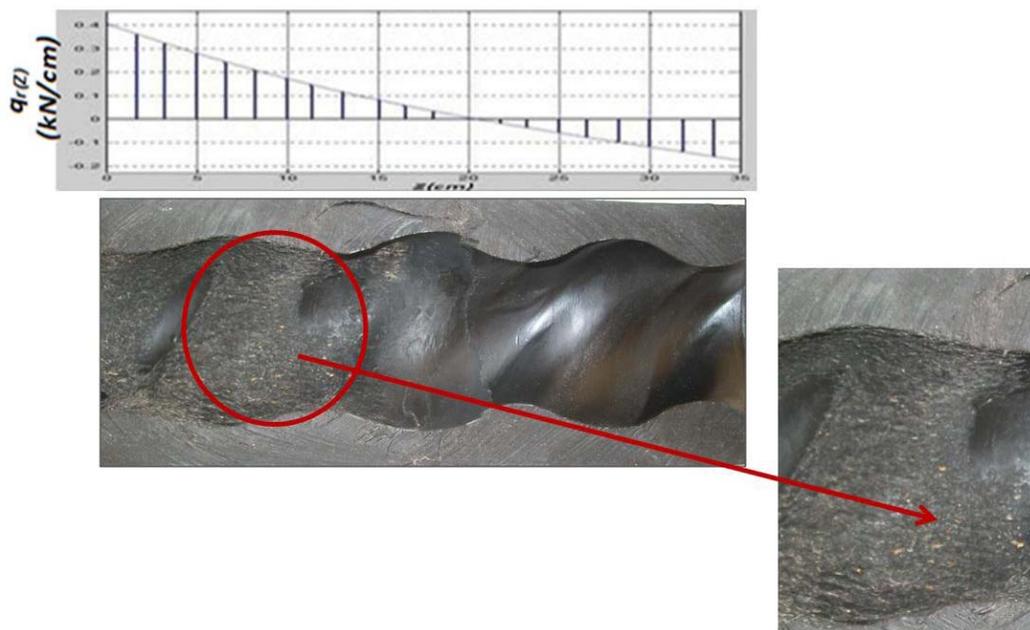


Figura 2.13. Correspondencia entre la distribución de la reacción del estator sobre el rotor y el desgaste observado en un estator real.

Es necesario destacar que la hoja de cálculo elaborada con el software MatLab puede ser utilizada para evaluar cualquier rotor, simplemente variando los datos que se le suministran y se pudieran establecer correlaciones entre los parámetros obtenidos y las observaciones reales del desgaste en los estatores para diferentes propiedades de la goma de los estatores. Esto es un aporte teórico - práctico importante del trabajo.

2.5.4. Comportamiento de la pendiente del rotor en la fundación $\theta_{b,z}$.

Para este análisis, igual que para el caso anterior, se evalúa la función del ángulo de inclinación, θ , con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir: $\theta = f(0,5; z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el ángulo de inclinación en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función puede ser graficada para el dominio de z y la misma se muestra en la figura 2.14:

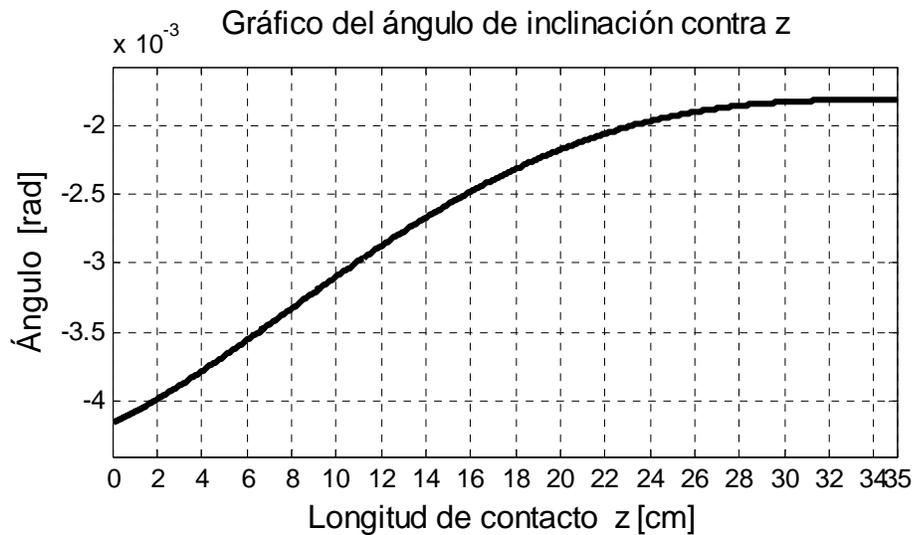


Figura 2.14. Distribución de la pendiente para $b = 0,5$ cm.

Como se aprecia la pendiente del rotor es máxima para $z = 0$ y se reduce en la medida en que se avanza en la longitud.

Como se tiene la pendiente expresada matemáticamente en función de b y z se puede obtener el resultado anterior para cualquier valor de b . En la figura 2.15 se muestra tal como se hizo con la flecha, la dependencia de la pendiente con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b : 0.5; 1; 2.

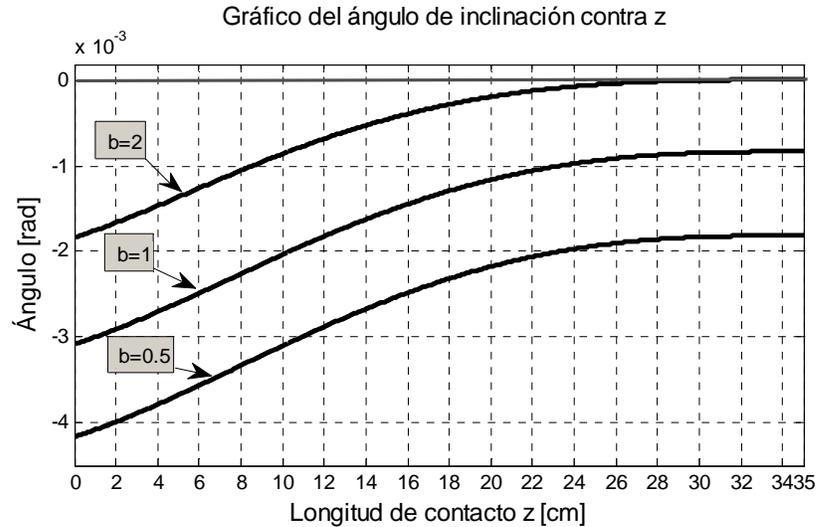


Figura 2.15. Comportamiento de la pendiente para diferentes valores de b.

Como se aprecia del gráfico anterior la distribución de la pendiente no se altera con el ancho de la banda de contacto, sólo varía el valor numérico de la pendiente y para un gran ancho de la banda de contacto el rotor no se inclina en el borde posterior (pendiente cero). Ahora para completar el análisis del ángulo de inclinación se utiliza la función de la misma tal que b y z son variables, es decir, $\theta = f(b; z)$. La gráfica de este análisis se representa en tres dimensiones ya que tiene dos variables y esto se muestra en la figura 2.16:

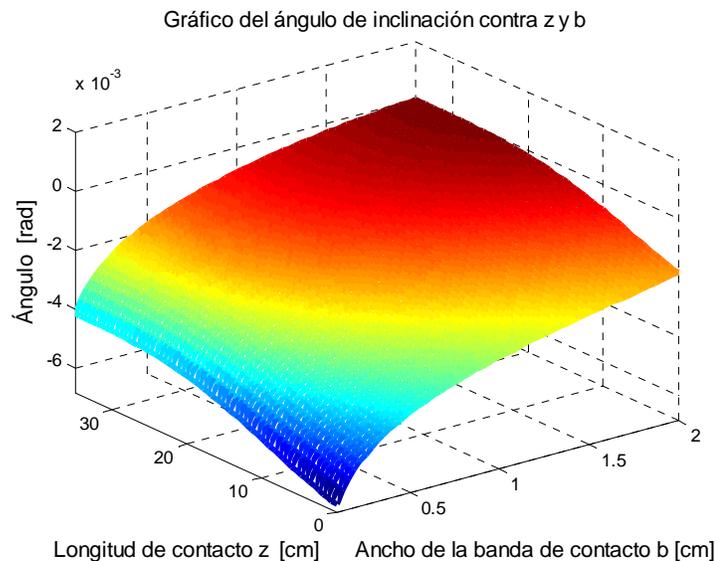


Figura. 2.16. Comportamiento de la pendiente $\theta_{(z,b)}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z.

Como se aprecia la pendiente tiene un comportamiento muy singular, es mayor para semianchos de contacto muy pequeños ($b = 0$), disminuye su valor pero prácticamente no varía a lo largo de la longitud para semianchos de contacto muy grandes ($b = 2$), incluso en este último caso es cero en una considerable longitud del rotor.

2.5.5. Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$.

El gráfico de la fuerza de cortante, Q , con un valor constante de b que se encuentre dentro del dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir: $Q = f(0,5; z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el cortante en todo el intervalo de z para un valor determinado de b . Esta función se muestra en la figura 2.17:

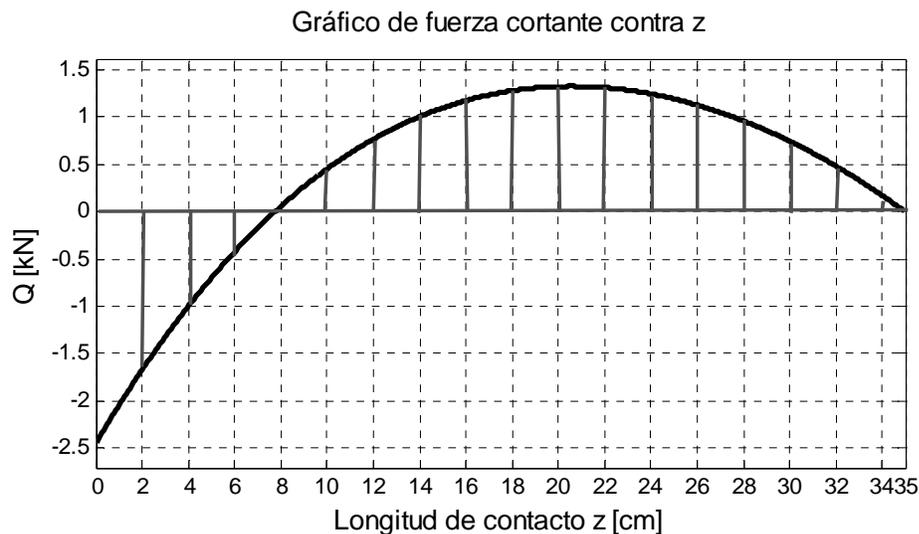


Figura 2.17. Distribución de la fuerza de cortante para $b = 0,5$ cm.

Como se muestra en la gráfica la fuerza de cortante tiene dos extremos para $z = 0$ y para un valor de z intermedio en la longitud. Resulta muy interesante analizar cómo se comportan estos extremos y su posición cuando se varía b . En la figura 2.18 se muestra como en los casos anteriores la dependencia con la longitud pero en este caso para tres valores distintos de b : 0.5; 1; 2.

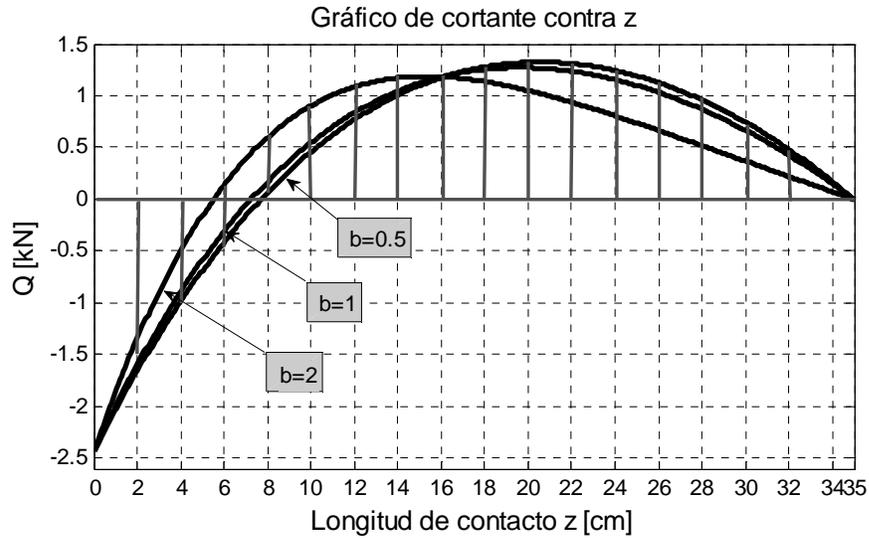


Figura 2.18. Comportamiento de la fuerza de cortante para diferentes valores de b . Como se aprecia el valor del extremo cuando $z = 0$ no se altera pues sólo depende del valor de Q_0 , el otro extremo modifica ligeramente su posición pero su valor máximo casi no se modifica y es siempre menor que Q_0 . La gráfica de comportamiento del cortante en función de las dos variables se da en la figura 2.19:

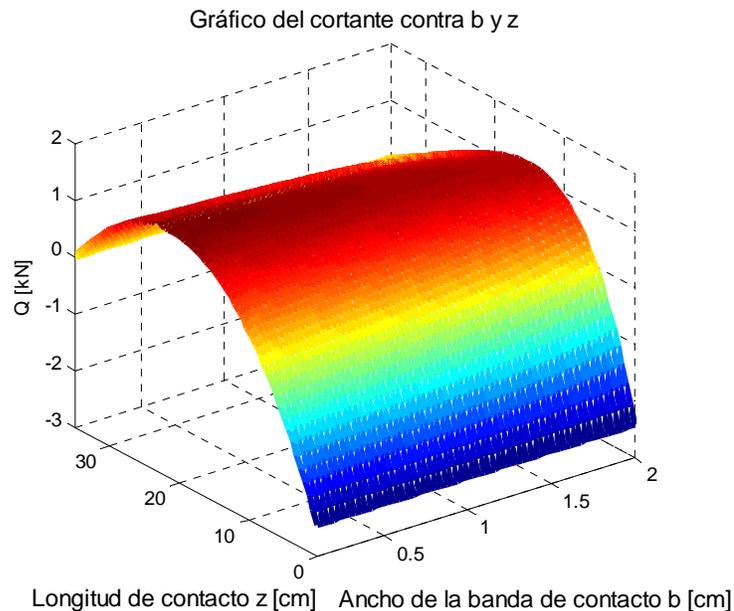


Figura 2.19. Comportamiento de la fuerza de cortante $Q_{b,z}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z .

Esta última gráfica sólo corrobora el análisis realizado para la figura 2.18.

2.5.6 Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$.

La función del momento flector, M , con un valor constante de b que se encuentre dentro el dominio del mismo, en este caso se toma $b = 0,5$ cm, es decir, $M = f(0,5; z)$. De esta manera se obtiene una función dependiente de una sola variable que expresa el momento flector en todo el intervalo de z para este valor de b . Esta función se muestra en la figura 2.20:

Gráfico de momento flector contra z .

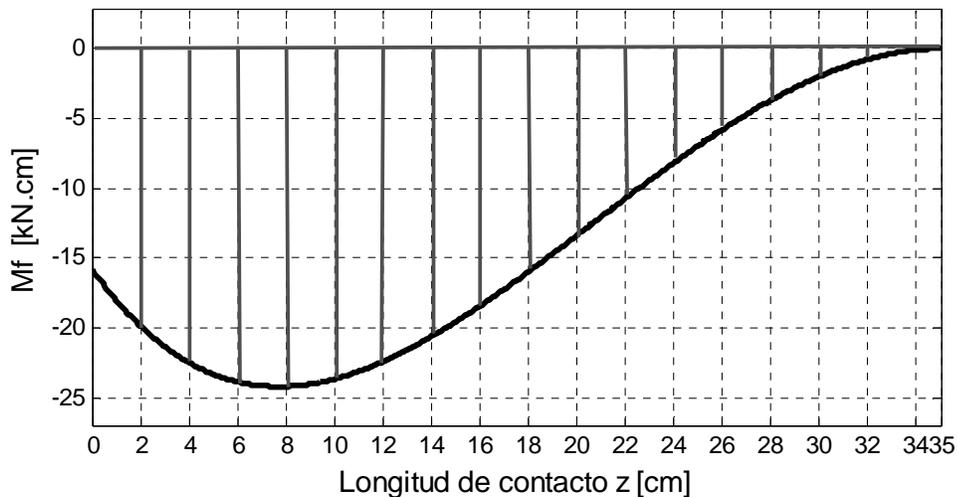


Figura 2.20. Distribución del momento flector para $b = 0,5$ cm.

La gráfica para tres valores distintos de b se da en la figura 2.21:

Gráfico de momento flector contra z

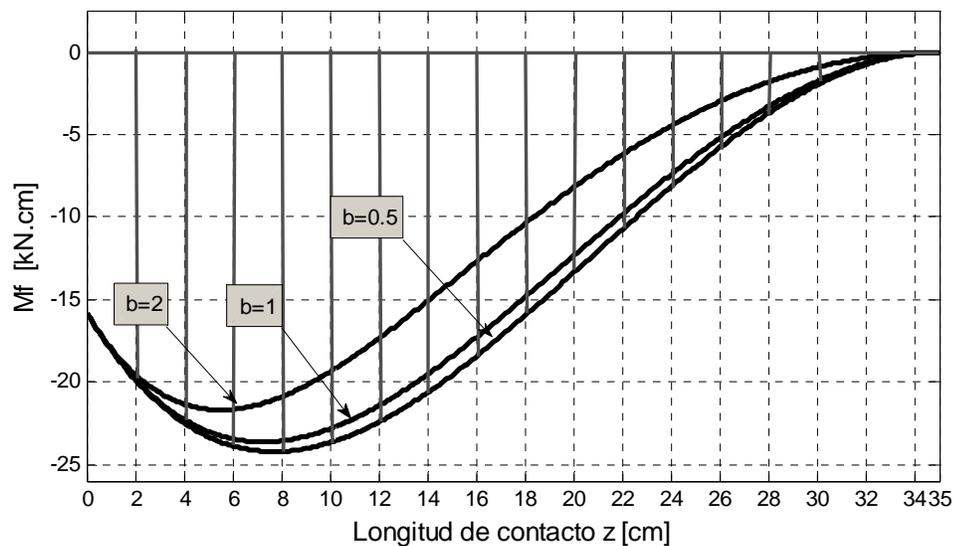


Figura 2.21. Comportamiento del momento flector para diferentes valores de b .

Como se aprecia en las figuras 2.20 y 2.21, la posición del momento flector máximo y su valor, prácticamente no dependen del ancho de contacto, pero es significativo que ocurre en un punto interior del estator y su valor es mayor que el momento concentrado transmitido por el acoplamiento. Esto es un aporte significativo en el conocimiento del comportamiento de estas bombas.

Ahora para completar el análisis del momento flector se utiliza la función del mismo en la forma tal que b y z son variables, es decir: $M = f(b; z)$. La gráfica de este análisis se muestra en la figura 2.22:

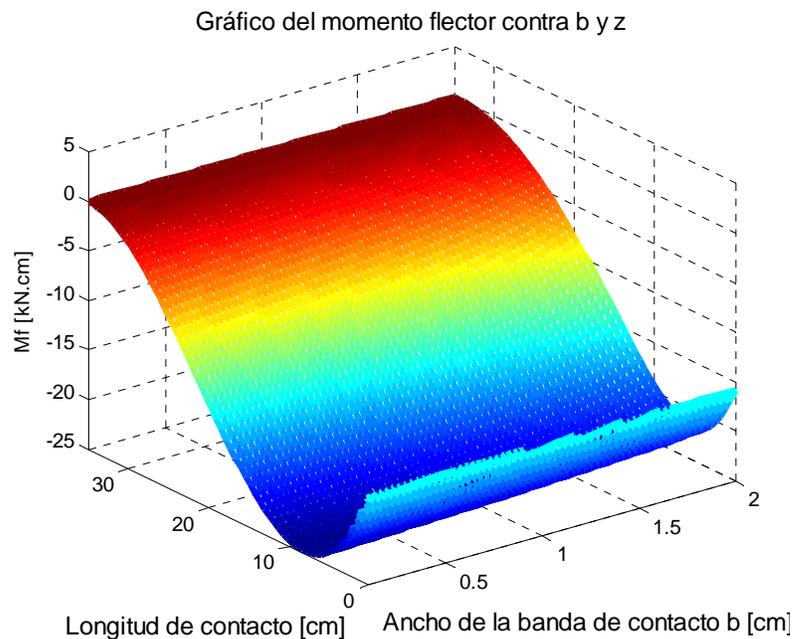


Figura 2.22. Comportamiento del momento flector $M_{b,z}$ para diferentes valores de b en todo el campo de valores de z .

Esta gráfica simplemente corrobora el análisis hecho para la figura 2.21 pues como se observa el momento flector máximo casi no varía ni en magnitud ni en posición.

2.6. Cálculo del momento flector máximo en función de z y b.

Para hallar el momento flector máximo se parte de que el mismo ocurre cuando la derivada del momento flector es igual a cero y como la derivada de la función $M(z,b)$ es igual a la función del cortante $Q(z,b)$, se puede plantear:

$$Q(z,b) = 0 \longrightarrow M(z,b) = M_{f \max} \quad (2.29)$$

Utilizando el programa MatLab se trata de resolver analíticamente la ecuación planteada, para despejar z en función de b que serian los valores para los cuales el momento flector es máximo, esta operación no fue posible, ya que por su complejidad no existe un despeje analítico de la misma. Ante esta limitación se procede a resolver dicha ecuación mediante un método numérico matricial.

Este método consiste en evaluar la expresión $Q(z,b) = 0$ con los valores de una matriz columna cuyos elementos van a ser 'n' valores igualmente distribuidos en el intervalo del posible dominio de b.

Donde:

$$D_b = \{b \in R : 0 \leq b \leq 2\}$$

n: número de elementos que se desea tener en la matriz b_{num} .

En este caso se toma:

$$n = 200$$

b_{num} : matriz columna de n valores igualmente distribuidos en el dominio de b.

Al evaluar elemento a elemento de la matriz b_{num} en la ecuación $Q(z,b) = 0$ se obtiene una matriz columna cuyos elementos van a ser las funciones de $Q(z, b_{num}) = 0$, esto implica que cada elemento será ahora una ecuación de una sola variable, que si puede ser resuelta numéricamente por el MatLab. De esta forma se obtiene una matriz de igual orden que las matrices anteriores donde cada elemento es el valor de z correspondiente a cada valor de b para los cuales el momento flector es máximo. De esta manera:

$$M_{f \max} = M(z_{num}, b_{num}) \quad (2.30)$$

Donde:

z_{num} : matriz columna de n valores de z para los cuales el momento flector es máximo.

M_{fmax} : matriz columna cuyos elementos son los valores del momento flector máximo.

Luego de tener los valores de M_{fmax} , z_{num} y b_{num} matricialmente definidos en el MatLab resulta muy fácil obtener cualquier gráfica de la dependencia de M_{fmax} con las otras dos variables independiente (figuras 2.23 y 2.24). De esta manera se obtiene finalmente la gráfica de momento flector máximo (M_{fmax}) en dependencia con la longitud (z) y el ancho de contacto (b) esto se puede ver en la figura 2.23.

Como se aprecia en esta gráfica el momento flector máximo ocurre siempre, para el rotor analizado de longitud 35 cm, alrededor de una posición próxima a los 7 cm y como se aprecia en las gráficas de las figuras 2.24 y 2.25 el valor del momento flector máximo varía de una forma muy singular, pero su magnitud como se puede apreciar no varía realmente significativamente.

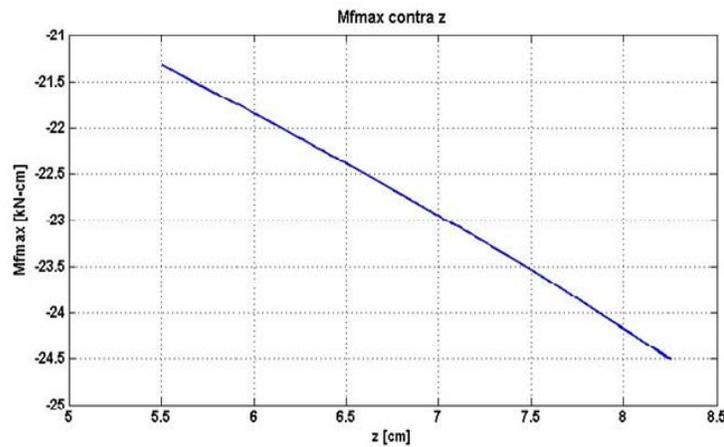


Figura 2.23. Comportamiento de la posición donde el momento flector es máximo.

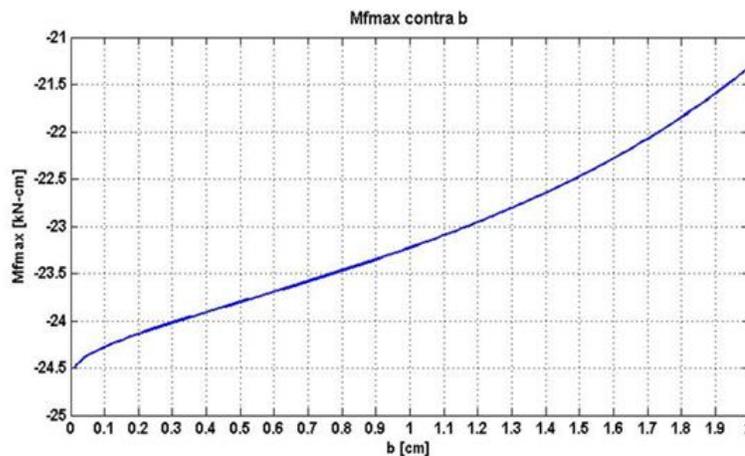


Figura 2.24. Comportamiento del valor del momento flector máximo para diferentes valores de b.

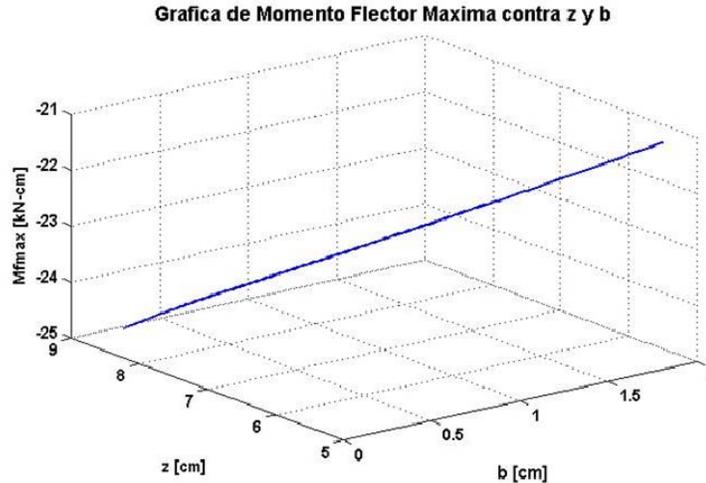


Figura 2.25. Comportamiento del valor del momento flector máximo para los diferentes valores de z_{Mfmax} y de b .

2.7. Cálculo del diámetro interior crítico (d).

2.7.1. Calculo del diámetro crítico para $b = 0,5$ cm.

Como el rotor analizado es un rotor hueco, se necesita calcular el diámetro interior crítico con que trabaja el rotor sin falla. Los diámetros del árbol se determinan por la condición de la resistencia mecánica, la ecuación para el cálculo previo de árboles con vistas a garantizar su resistencia a la fatiga (Dobrovolski, 1970).

$$M_{r\max} \leq W \cdot \sigma_{adm.flexIII} \quad (2.31)$$

Donde:

$M_{r\max}$: Momento reducido máximo.

W : Módulo de la sección

$\sigma_{adm.flex III}$: Tensión admisible del acero para ciclo simétrico

Ahora W para un árbol hueco es dado por la ecuación siguiente:

$$W = 0,1 \cdot D^3 (1 - c^4) \quad c = d / D \quad (2.32)$$

Donde, las dimensiones del rotor evaluado son:

D: Diámetro exterior = 42 mm

d: Diámetro interior = 32 mm

c: relación del diámetro interior del rotor respecto al exterior.

Los valores de tensión admisible, para este cálculo, dependen del material y el régimen de funcionamiento del rotor. En este caso tiene un régimen en que el carácter del cambio de las tensiones corresponde al ciclo simétrico, el régimen III.

Los valores de las tensiones admisibles para los aceros al carbono y aleados corresponden aproximadamente por los regímenes a la siguiente proporción:

$$\sigma_{adm.flex.I} : \sigma_{adm.flex.II} : \sigma_{adm.flex.III} = 3,8 : 1,7 : 1 \quad (2.33)$$

Donde: $\sigma_{adm.flex.I} = 0,33\sigma_u$

Entonces:

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{3,8} = \frac{0,33 \cdot \sigma_u}{3,8} \quad (2.34)$$

Donde:

$$\sigma_u = 70 \text{kgf} / \text{mm}^2 = 68,65 \text{kN} / \text{cm}^2 \quad (2.35)$$

Sustituyendo 2.35 en 2.34 se obtiene:

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{3,8} = \frac{0,33 \cdot 68,65}{3,8} = 5,96 \text{kN} / \text{cm}^2$$

Ahora la ecuación se queda:

$$\frac{M_{r \max}}{W} \leq \sigma_{III} \quad (2.36)$$

$$\frac{M_{r \max}}{0,1 \cdot D^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)} \leq \sigma_{III}$$

Haciendo algunas transformaciones matemáticas queda que el diámetro menor del rotor debe ser:

$$d \leq D \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{M_{r \max}}{0,1 \cdot D^3 \cdot \sigma_{III}}} \quad (2.37)$$

El momento reducido máximo se halla con los valores del momento flector máximo y el momento torsor máximo, para las condiciones más críticas, por la siguiente ecuación:

$$M_{r \max} = \sqrt{M_{f \max}^2 + M_{t \max}^2} \quad (2.38)$$

$$M_{t \max} = 7,163 \text{ kN.cm.}$$

$$M_{f \max} = 23,8 \text{ kN.cm.}$$

Utilizando esta ecuación se puede calcular el diámetro crítico del rotor dado las condiciones siguientes:

$$b = 0,5 \text{ cm}$$

$$z = 35 \text{ cm}$$

Con estas condiciones los datos son:

$$M_{r \max} = 24,95 \text{ kN.cm}$$

$$D = 4,2 \text{ cm}$$

Ahora sustituyendo estos valores en la ecuación 2.27 se obtiene:

$$d \leq (4,2) \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{24,95}{0,1 \cdot (4,2)^3 \cdot 5,96}}$$

$$d \leq (4,2) \cdot \sqrt[4]{1 - 0,564} = 3,41 \text{ cm}$$

$$d \leq 3,41 \text{ cm}$$

Es decir que el diámetro interior del rotor debe ser menor o igual a 3,41 cm para que no ocurra falla por fatiga y para cumplir los requerimientos de resistencia. Como se aprecia las dimensiones del rotor analizado (d: Diámetro interior = 32 mm) están adecuadamente seleccionadas, aunque si resulta conveniente desde el punto de vista tecnológico, el diámetro interior se puede aumentar ligeramente hasta un valor próximo a 34 mm con vistas a reducir el espesor de la pared del tubo.

2.8. Conclusiones parciales del capítulo.

1. Se elaboró un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia de los rotores de las bombas de cavidad progresiva considerando el estator como una fundación elástica, mediante el cual se obtienen las interacciones que se producen entre rotor y estator bajo la acción de la fuerza radial y el momento provocado por el acoplamiento cardánico en el extremo del rotor y, a partir de ésta interacción se obtienen las ecuaciones de la flecha, la pendiente, el momento flector y las fuerza de cortante en cualquier rotor en contacto con un estator.
2. Se elaboró un programa utilizando el Software MatLab que permite, para cualquier combinación de rotor con un estator de una bomba de cavidad progresiva de parámetros y materiales conocidos, realizar el estudio del comportamiento de la flecha del rotor de acero en contacto con la goma del estator, la reacción del estator sobre el rotor como una carga no uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, la pendiente que adquiere el rotor en contacto con el estator y la distribución del momento flector y de la fuerza de cortante interna a lo largo de la longitud del rotor.
3. La integración de la reacción distribuida del estator sobre el rotor a lo largo de la longitud resultó igual a la carga transversal aplicada al mismo y la integración del producto de esta reacción distribuida multiplicada por la coordenada z longitudinal resultó numéricamente igual al momento concentrado aplicado en el origen al rotor, lo que sirve de validación de que la distribución obtenida para la reacción del estator es exactamente la que ocurre pues garantiza el equilibrio del rotor.
4. La intensidad de la reacción del estator sobre el rotor es la causa fundamental del desgaste del estator y la comparación de la distribución de la reacción con el desgaste observado en un estator real coinciden cerradamente.
5. El esquema de análisis elaborado y el procedimiento de evaluación de la resistencia correspondiente permiten evaluar la resistencia de cualquier rotor y en el caso de los rotores huecos permite calcular el diámetro interior máximo necesario para garantizar la resistencia.

Capítulo III. Nuevas tecnologías para la fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

3.1. Necesidad del desarrollo de tecnologías de fabricación de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

En los capítulos anteriores se ha abordado reiteradamente la necesidad, desde el punto de vista económico y por el elevado impacto social que genera la salida de funcionamiento de una bomba de cavidad progresiva, de contar con procedimientos y metodologías propias que permitan la fabricación, en territorio nacional, de los elementos de repuesto y de la fabricación, a demanda, de estas bombas.

En el capítulo 2 se hace referencia al hecho de que, para poder diseñar y fabricar los rotores, es indispensable poder evaluar con exactitud su capacidad resistente bajo carga. Los trabajos investigativos y las innovaciones que han estado vinculadas a los resultados de los mismos han llevado a desarrollar un novedoso método que permite la fabricación de rotores huecos lo que posibilita disminuir considerablemente el peso de estos elementos y el gasto de material asociado a ello. Para poder garantizar la resistencia bajo carga de cualquier rotor que se fabrique se necesita combinar los requerimientos de diseño del mismo con las exigencias tecnológicas del nuevo método que se propone. En este Capítulo se presentan dos nuevos métodos de manufactura desarrollados por el autor:

El primero para la fabricación de rotores huecos mediante deformación plástica en caliente, denominado Aluminoforging (Patente concedida) que presenta la gran ventaja con relación a la tecnología conocida de Hidroforming que permite conformar tubos de acero inoxidable de paredes gruesas que no lo permite la tecnología Hidroforming (Empleada en tubos de paredes delgadas).

El segundo para la fabricación mediante arranque de virutas de los rotores macizos, mediante el empleo del dispositivo especial FRETOR (Patente concedida) que se utiliza actualmente para la fabricación de todas las bombas de cavidad progresiva que se producen en el Taller de fabricación y recuperación de estas bombas en la Empresa Glucosa Cienfuegos y se utilizará para el acabado de la superficie de los rotores huecos que sean fabricados.

3.2. Generalidades del proceso de deformación plástica en frío.

Uno de los elementos más significativos encontrados en la revisión documental desarrollada lo constituye el hecho de que, en la manufactura de los rotores huecos helicoidales utilizados en las bombas de cavidad progresiva, no se reporta la utilización de la deformación plástica en caliente de un tubo.

La literatura técnica da cuenta de la utilización de la tecnología Hidroforming (Wade, 1949) para lograr el conformado de piezas de diferentes configuraciones a partir de la acción de una presión hidráulica sobre las paredes internas de tubos de paredes finas de diferentes secciones. Este método es en realidad un proceso de deformación plástica en frío que utiliza agua a alta presión a temperatura ambiente, el cual presenta algunas limitaciones que han constituido el punto de partida para las investigaciones sobre la tecnología de conformado en caliente.

El Hidroforming como método de conformado en frío necesita realizarse en varias etapas debido a que aparece en el metal el fenómeno conocido por “acritud” o hardening (endurecimiento en frío) lo que conlleva a que, para la obtención de la pieza final, se requiera de tratamientos térmicos intermedios (recocidos contra acritud) (Lajtin, 1973),(Doyle, 1988),(Malishev, 1987),(Kucher, 1989),(Benediet, 1984),(Zúev, 1988),(M. González, 2010),(Jorochoilov, 1988) que elevan los gastos, provocan retrasos en el proceso y pueden ocasionar la destrucción de las piezas si no se cumplen con las medidas de control durante la conformación.

Además de lo anterior, según aumenta el endurecimiento de las capas del material crecen las tensiones y ello exige considerables valores de la presión necesaria para la conformación lo que limita la capacidad de este proceso de manufactura.

En la figura 3.1 se muestran los cambios que surgen en las propiedades mecánicas del acero por medio del prensado en frío. Como se observa, ocurre una disminución de las propiedades de plasticidad y un incremento de la dureza del material y de su límite de rotura, lo que conduce al incremento de las tensiones requeridas lo que demanda altos valores de fuerzas y energía de conformación.

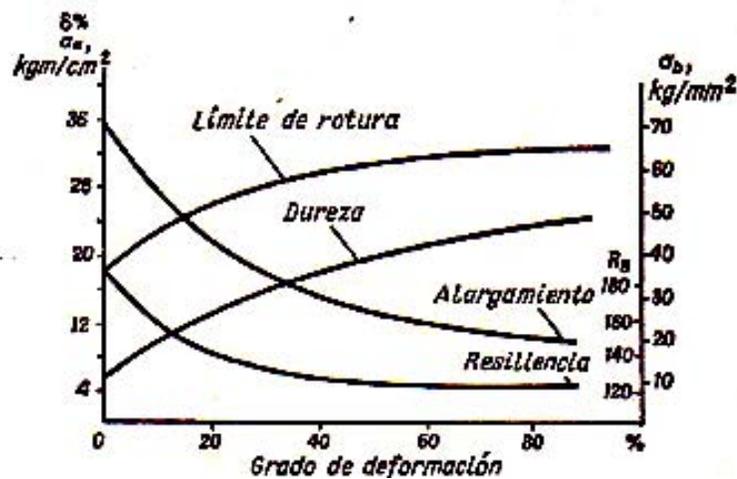


Figura 3.1. Cambios de las propiedades mecánicas del acero por medio del prensado en frío, (Gallardo, 1992).

Unido a lo anterior, los altos precios de una instalación de Hidroforming en el mercado internacional, limitan las posibilidades del país para invertir en esta tecnología por consideraciones económicas.

A partir del análisis de las principales limitaciones de orden técnico, tecnológico y económico que se generan durante el proceso de conformado a presión en frío se ha patentado un nuevo método que tiene como principio lograr la deformación plástica en caliente de un tubo utilizando en su interior un metal en estado líquido sometido a presión para lograr el conformado de la pieza diseñada.

El Aluminoforging, nombre con el que se ha patentado dicho proceso, es un método de conformado a presión en caliente que puede ser empleado para la conformación de piezas que exijan de grandes deformaciones plásticas, como es el caso de los rotores helicoidales huecos para las bombas de cavidad progresiva. Con este método de manufactura la forma final de la pieza no solo se realiza con menor gasto de trabajo de conformación ya que las presiones que se necesitan son considerablemente menores que para el conformado en frío, sino que el proceso se realizará en una sola etapa de conformación, debido al comportamiento de los metales sometidos a altas temperaturas sobre todo en lo que se refiere a la capacidad de cambiar de tamaño y forma sin destruirse bajo la acción de fuerzas exteriores y de conservar la forma al cesar la acción de dichas fuerzas, con un

mínimo de recuperación de sus dimensiones. La figura 3.2 muestra un grafico donde se aprecia el comportamiento de las propiedades plásticas al variar la temperatura en los aceros.

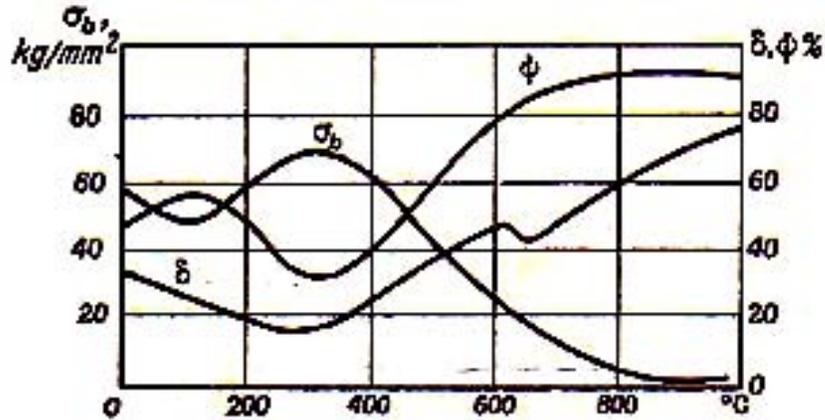


Figura 3.2. Influencia de la temperatura sobre las propiedades mecánicas del acero, (Gallardo, 1992).

3.3. Condiciones de Plasticidad en el Problema Plano en la Teoría de la Plasticidad.

En el caso del estado tensional plano ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) existen en el elemento, mientras que $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, las tensiones deben cumplir las ecuaciones de equilibrio, las cuales en ausencia de fuerzas másicas se plantean como sigue (Aleksandrov, 1990):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

y en la zona de deformación plástica, la condición de fluencia o de plasticidad (Birger, 1975), según la Cuarta Hipótesis de Huber – Mises – Henke, se plantea para que ocurra la deformación plástica tiene que cumplirse que la intensidad de tensiones σ_i sea igual a la tensión de fluencia:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_f \quad (3.2)$$

Y según la Tercera Hipótesis de Coulomb:

$$\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_f \quad (3.3)$$

3.4. Análisis de la conformación de un tubo de paredes gruesas en caliente desde la Teoría de la Plasticidad.

La ejecución de un proceso de conformación presupone, en el material a conformar un determinado grado de plasticidad, entendiéndose éste como la capacidad para variar la forma en proporciones satisfactoriamente grandes bajo el efecto de fuerzas exteriores sin que este pierda su cohesión.

Se asume que la materia prima para la fabricación de un rotor mediante la conformación en caliente a presión es un tubo de pared gruesa sometido a la acción de una presión interior p (figura 3.3). El material se considerará elasto – plástico y el estado tensional plano $\sigma_z = 0$ (el eje z coincide con el eje del tubo y es perpendicular al plano del dibujo) (Aleksandrov, 1990).

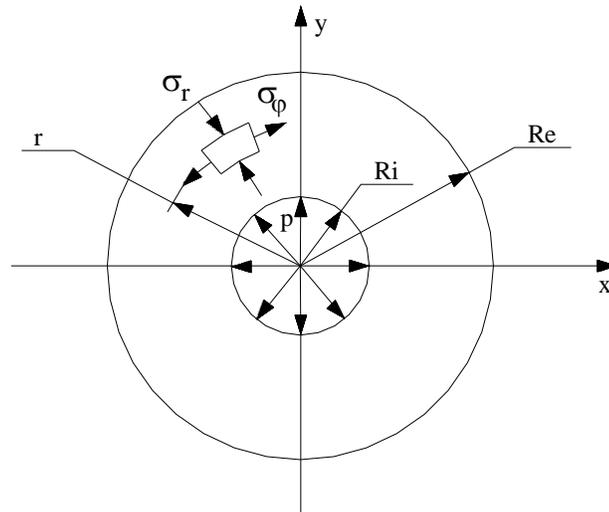


Figura 3.3. Tubo de pared gruesa bajo presión interior.

Mientras que la presión interior sea pequeña el tubo se deformará elásticamente y las tensiones en un sistema polar de coordenadas se determinan por las ecuaciones de los tubos de paredes gruesas. O sea:

$$\sigma_{\varphi} = A + \frac{B}{r^2}; \dots \sigma_r = A - \frac{B}{r^2}; \dots \tau = 0 \quad (3.4)$$

Donde: A y B son constantes que dependen de las condiciones de contorno.

De esta manera las tensiones longitudinales σ_{φ} y radiales σ_r son principales y la tercera tensión principal en el caso del estado deformacional plano será:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\phi}{2} \quad (3.5)$$

Como el estado tensional en el tubo analizado, que no posee restricciones longitudinales, es plano entonces:

$$\sigma_z = 0 \quad (3.6)$$

En la medida que se eleva la presión p las tensiones en el punto examinado crecen proporcionalmente hasta que se alcance el estado de fluencia. Como resultado de esta situación en una región anular ubicada en la superficie interior de la pared del tubo con un radio exterior r_f aparecerá el estado plástico.

$$Ri \leq r_f \leq Re$$

En la zona de fluencia (Aleksandrov, 1990) las tensiones deben satisfacer la condición de equilibrio:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (3.7)$$

y la condición de plasticidad ($\sigma_\phi > \sigma_r$)

$$\sigma_\phi - \sigma_r = 2k \quad (3.8)$$

En esta expresión $k = \frac{\sigma_f}{2}$

Sustituyendo (3.8) en (3.7) se obtiene que:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2k}{r}$$

La solución de esta ecuación tiene la forma

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{r_f} + C \quad (3.9)$$

Donde C es la constante de integración.

Sustituyendo (3.9) en (3.8) se tiene que:

$$\sigma_\phi = 2k \left(1 + \ln \frac{r}{r_f}\right) + C \quad (3.10)$$

A partir de las siguientes condiciones de contorno se determina la constante de integración C :

$$\begin{aligned} \text{Para } r = R_i & \quad \sigma_r = -p \\ r = R_e & \quad \sigma_r = 0 \\ r = r_f & \quad \sigma_{re} = \sigma_{rp} \end{aligned}$$

Donde σ_{re} y σ_{rp} – tensiones radiales en la zona elástica y plástica del tubo respectivamente.

De la primera condición se tiene que:

$$C = -p - 2k \ln \frac{r}{r_f}$$

De donde se obtiene que en la zona plástica las tensiones serán (Para $R_i \leq r \leq r_f$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2k \ln \frac{r}{R_i} - p \\ \sigma_\phi &= 2k \left(1 + \ln \frac{r}{R_i}\right) - p \\ \sigma_z &= 2k \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{R_i}\right) - p \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

De la sustitución de las condiciones de contorno se determinan las constantes A y B y se obtiene la ecuación que relaciona p con r_f .

$$p = k \left[\ln \left(\frac{r_f}{R_i} \right)^2 - \left(\frac{r_f}{R_e} \right)^2 + 1 \right] \quad (3.12)$$

Las tensiones en la zona elástica (para $r_f \leq r \leq R_e$) se determinan por las expresiones clásicas de los tubos de paredes gruesas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= k \left(\frac{r_f}{R_e} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_\phi &= k \left(\frac{r_f}{R_e} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_z &= k \left(\frac{r_f}{R_e} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

El estado límite del tubo corresponde al momento en que el radio r_f se hace igual a R_e . De la ecuación (3.12) se obtiene la expresión de la presión límite:

$$p_{lim} = 2k \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \quad (3.14)$$

Y de las ecuaciones (3.13) y (3.14) se obtienen entonces la distribución de tensiones en la pared del tubo.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2k \ln \frac{r}{R_e} \\ \sigma_\phi &= 2k \left(\ln \frac{r}{R_e} + 1 \right) \\ \sigma_z &= 2k \left(\ln \frac{r}{R_e} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

La tabla 3.3 muestra los valores de presión calculados por (3.12), requeridos para que la fluencia se alcance en los diferentes radios de transición en un tubo con $d_i = 40$ mm y $d_e = 50$ mm.

Tabla. 3.3. Presiones requeridas en el interior del tubo para que la tensión de fluencia se alcance hasta el radio r_f .

r_f (mm)	P (Mpa)
20,00	4,14
21,25	4,59
22,50	4,89
23,75	5,07
25,00	5,13

En la figura 3.4 se muestran los diagramas de distribución de σ_r y σ_ϕ construidos para un tubo con una relación de diámetros $\frac{D_e}{D_i} = \frac{r_e}{r_i} = 1.25$ donde se evalúan los radios de fluencia desde: $r_f = R_i = 20$ mm que es el estado elástico (punto inferior del diagrama), y así sucesivamente se representan en el mismo diagrama en sentido anti horario cuando $r_f = 21,25$ mm, $r_f = 22,5$ mm y $r_f = 23,75$ mm, (todos estos son estados elasto - plásticos) y finalmente cuando $r_f = R_e = 25$ mm (estado límite o plástico). A cada valor de r_f (puntos negros en la figura, transición del estado elástico al plástico) le corresponde el valor de la presión interior mostrado en la propia figura 3.4.

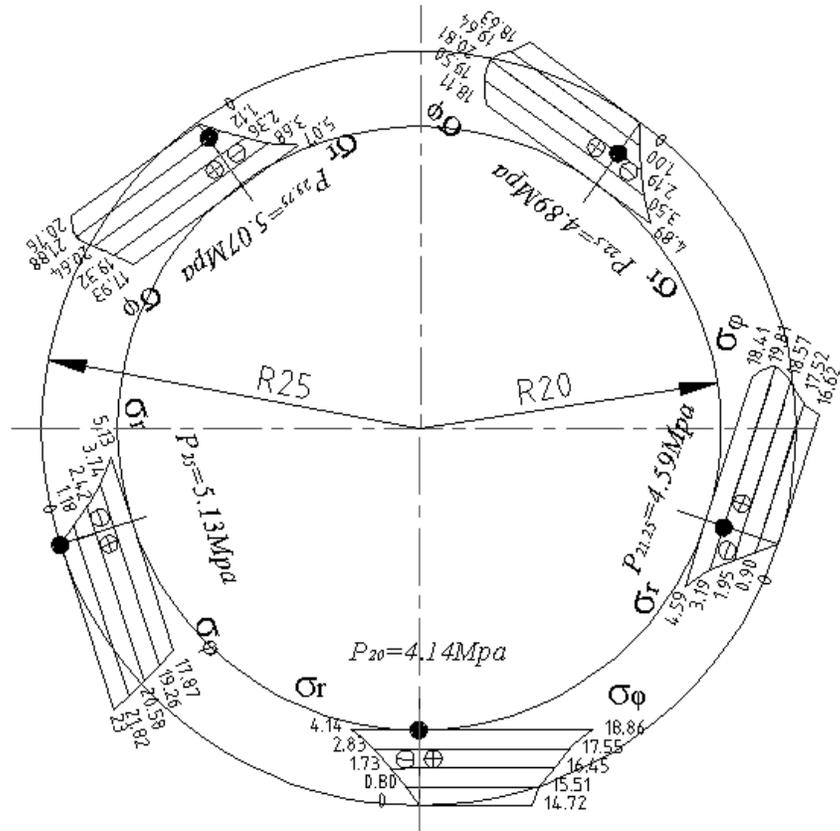


Figura 3.4. Distribución de tensiones bajo diferentes valores de presión interior.

Comparando la distribución de tensiones σ_ϕ en los estados elástico y plástico del tubo se pueden establecer las siguientes diferencias: En el estado elástico la mayor tensión σ_ϕ tiene lugar en el borde interior del tubo mientras que en el estado plástico la máxima tensión tiene lugar en el borde exterior.

Esto se corresponde con la práctica experimental realizada durante la deformación plástica de tubos de acero en los cuales se ha observado que la destrucción del tubo comienza por la superficie exterior (Taipa, 1986).

La relación entre la presión límite p_{lim} y la presión p_i , para la cual comienzan a aparecer deformaciones plásticas en el borde interior del tubo es:

$$\frac{p_{lim}}{p_i} = 2 \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.16)$$

3.5. Determinación del módulo de elasticidad del material en la zona plástica E_k para diferentes temperaturas.

Con la utilización de un modelo elasto-plástico del material surge la necesidad de definir o determinar las propiedades elasto-plásticas del mismo para cada temperatura a la que es sometido, con el objetivo de poder relacionar las tensiones con las deformaciones. Se parte del siguiente modelo elasto - plástico (Stiopin, 1979),(Miroliúbov, 1990) del material a una temperatura t (figura 3.7).

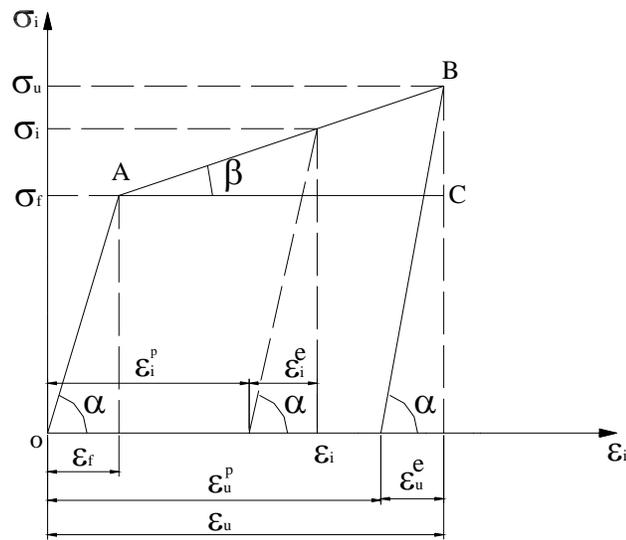


Figura 3.7. Modelo elasto – plástico del material a la temperatura t .

Del diagrama se tiene que:

$$\tan \alpha = E \quad (3.17)$$

De donde:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \quad (3.18)$$

$$\tan \beta = E_k = \frac{BC}{AC} = \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\varepsilon_u - \varepsilon_f} \quad (3.19)$$

Pero
$$\varepsilon_u = \varepsilon_u^p + \varepsilon_u^e \quad (3.20)$$

Si se conoce el % de elongación a la temperatura t se puede calcular ε_u^p ya que:

$$\delta = \varepsilon_u^p \cdot 100$$

Entonces:

$$\varepsilon_u^p = \frac{\delta}{100} \quad (3.21)$$

La deformación ε_u^e se puede calcular por la relación:

$$\tan \alpha = E = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u^e}$$

De donde:

$$\varepsilon_u^e = \frac{\sigma_u}{E} \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.21) y (3.22) en (3.20) y el resultado en (3.18) y (3.19) se tiene:

$$E_k = \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\frac{\delta}{100} + \frac{\sigma_u}{E} - \frac{\sigma_f}{E}}$$

$$\text{De donde: } E_k = \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\frac{\delta}{100} + \frac{\sigma_u - \sigma_f}{E}} \quad (3.23)$$

Esta ecuación no aparece descrita en la literatura consultada (Lubarda, 2002),(Aleksandrov, 1990),(Birger, 1975) por lo que constituye un aporte teórico del trabajo. En la tabla 3.4 y la figura 3.8 se muestran los valores del módulo de elasticidad de la zona plástica E_k para diferentes temperaturas del rango de forja recomendado para este acero en la literatura consultada (Guliáev, 1978),(Neumann, 1974).

Tabla 3.4. Valores de E_k para las diferentes temperaturas.

Temperatura, [°C]	E_k , [MPa]
800	150,2123
900	36,3532
1000	20,2496
1100	12,3442
1200	6,4678
1250	5,0248

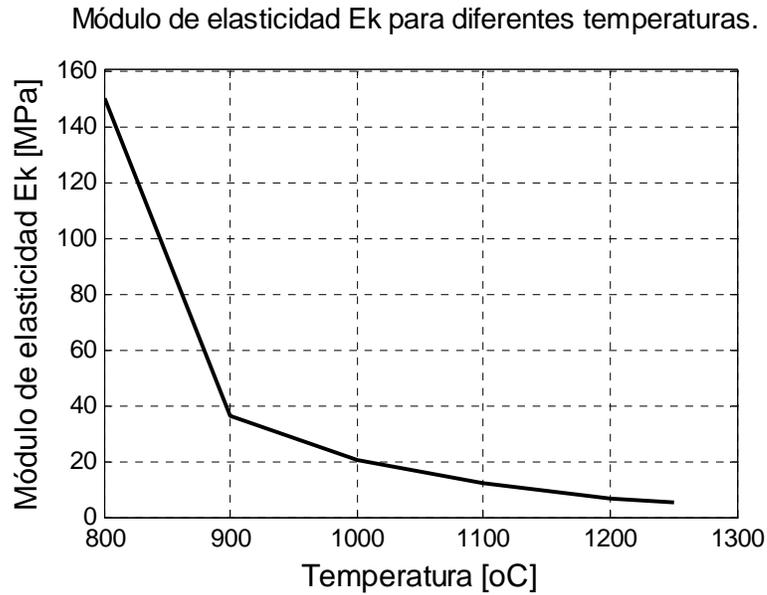


Figura 3.8. Módulo de elasticidad Ek para diferentes temperaturas.

3.6. Determinación de la presión requerida para lograr la deformación plástica del tubo una magnitud ΔD_e .

Para el caso en el que la sollicitud a la que esté sometido el tubo se corresponda con un estado tensional plano, como se ha dicho con anterioridad, $\sigma_z = 0$. Las tensiones σ_φ y σ_r son principales,

$$\text{De donde: } \left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_\varphi &= A + \frac{B}{r^2} = A + \frac{4B}{D^2} \\ \sigma_2 = \sigma_z &= 0 \\ \sigma_3 = \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} = A - \frac{4B}{D^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

De la teoría de los cilindros de paredes gruesas (Feodosiev, 1985) se tiene que:

$$A = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{p\left(\frac{D_i}{2}\right)^2}{\left(\frac{D_e}{2}\right)^2 - \left(\frac{D_i}{2}\right)^2} = \frac{pD_i^2}{D_e^2 - D_i^2} \quad (3.25)$$

$$B = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} R_e^2 = A.R_e^2 = \frac{p}{4} \frac{D_i^2 D_e^2}{D_e^2 - D_i^2} \quad (3.26)$$

En este caso, la intensidad de tensiones σ_i se expresa como:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \quad (3.27)$$

Sustituyendo las expresiones (3.24), (3.25) y (3.26) en (3.27) se tiene que:

$$\sigma_i = \sqrt{A^2 + \frac{48B^2}{D^4}} = \sqrt{1 + \frac{3D_e^4}{D^4}} \cdot p \frac{D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} \quad (3.28)$$

Para $D = D_e$, se tiene que:

$$\sigma_i = 2p \frac{D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} \quad (3.29)$$

De la figura 3.7 se evidencia que:

$$\tan \beta = E_k = \frac{\sigma_i - \sigma_f}{\varepsilon_i - \varepsilon_f}$$

Despejando ε_i se obtiene que:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_f + \frac{\sigma_i - \sigma_f}{E_k} = \varepsilon_f + \frac{2pD_i^2}{D_e^2 - D_i^2} - \frac{\sigma_f}{E_k} \quad (3.30)$$

En el caso de deformaciones plásticas puede inferirse que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (3.31)$$

Como el tubo es un cilindro de pared gruesa, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \frac{\Delta D}{D} = \varepsilon_1 \\ \sigma_1 = \sigma_\varphi = A + \frac{4B}{D^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_r = A - \frac{4B}{D^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.32) en (3.31) se obtiene que:

$$\Delta D = D \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\frac{A}{2} + \frac{6B}{D^2} \right] \quad (3.33)$$

y para $D = D_e$ y $\Delta D = \Delta D_e$, sustituyendo en esta última expresión las expresiones de σ_i (3.28) y ε_i (3.30) se obtiene finalmente que:

$$\Delta D_e = \frac{D_e}{E_k} \left[\varepsilon_f E_k + 2 \frac{p D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} - \sigma_f \right] \quad (3.34)$$

de donde se puede plantear la expresión para determinar la presión p requerida para deformar el diámetro exterior del tubo en una magnitud ΔD_e .

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{D_e^2 - D_i^2}{D_i^2} \right) \left[\left(\frac{\Delta D_e}{D_e} - \varepsilon_f \right) E_k + \sigma_f \right] \quad (3.35)$$

Este razonamiento y esta expresión no aparecen en la literatura técnica revisada y consultada por lo que se considera una novedad científica del trabajo (Lubarda, 2002), (Aleksandrov, 1990), (Birger, 1975).

Realmente esta expresión es exacta cuando ΔD_e sea relativamente pequeño con relación a D_e , en caso contrario el incremento de D_e influye en el valor requerido de la presión p . Sin embargo es fácil comprender que en la medida que aumenta el diámetro D_e de la presión requerida para deformar el tubo va decreciendo por lo que los cálculos realizados con la expresión (3.35) están del lado seguro.

A modo de ilustración se muestra en la tabla 3.5 los valores de la presión que se requieren para deformar un tubo con las siguientes características, seleccionado como materia prima para la fabricación de un rotor con las siguientes dimensiones:

$d_r = 60$ mm; $e = 5$ mm; $p_r = 200$ mm; $l = 600$ mm.

Con estos datos se selecciona el semiproducto, primeramente se calcula el diámetro interior y exterior del tubo auxiliándonos de la ley de invariabilidad del volumen en la conformación de metales, y posteriormente se comprueba el diámetro interior crítico para que el rotor trabaje sin falla mediante la expresión (2.37) del capítulo II, entonces las dimensiones del tubo inicial serán:

$D_e = 50$ mm; $D_i = 40$ mm.

Tabla. 3.5. Presiones requeridas para la deformación plástica del tubo.

Temperatura, [°C]	P requerida, [MPa]
800	56,21
900	39,16
1000	22,39
1100	12,51
1200	6,83
1250	5,34

En la figura 3.9 se muestra el comportamiento de la presión requerida para la conformación del tubo en dependencia de la temperatura, como se observa la presión cae bruscamente a medida que aumenta la temperatura, lo cual será aprovechado por la tecnología propuesta.

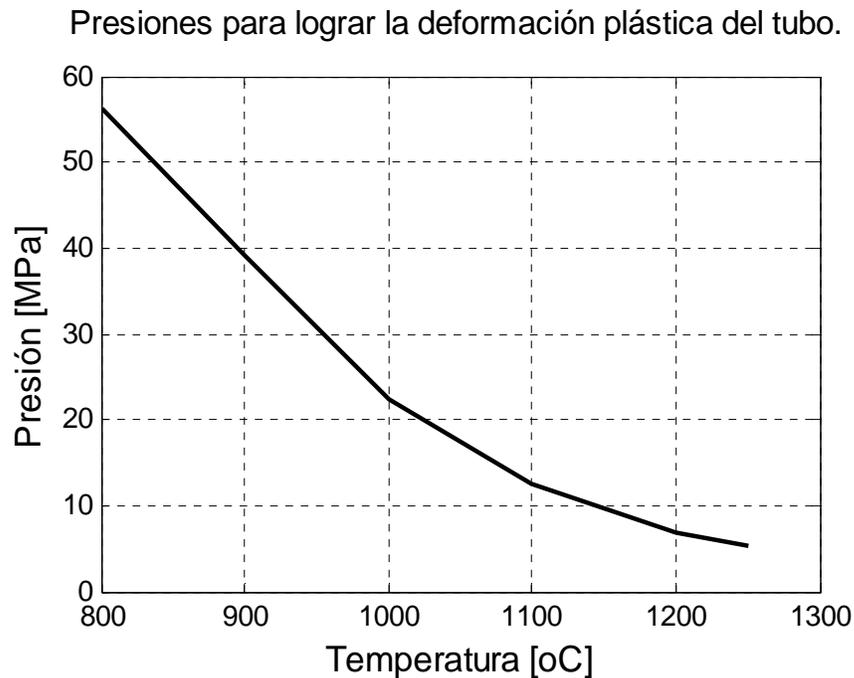


Figura 3.9. Presiones para lograr la deformación plástica del tubo.

3.7. Resultados de la deformación de tubos por el método de Aluminoforging.

El presente trabajo promueve, como un aporte práctico de orden tecnológico, el método de Aluminoforging, patentado en la OCPI (Llody García, 2009). Sin embargo, no existe en el país aún, una instalación productiva que permita la manufactura a grandes escalas de los rotores que necesita la industria nacional.



Figura 3.10. Vista panorámica del equipamiento para la deformación en caliente de un tubo de acero inoxidable.

Con el objetivo de realizar pruebas que demostraran la posibilidad de deformar en caliente tubos de paredes gruesas mediante presión ejercida sobre aluminio fundido depositado en su interior, se utilizó una pequeña instalación compuesta por un horno Mufla Modelo OH80/TA para elevar la temperatura del tubo hasta 1200 °C y fundir el aluminio, una prensa hidráulica y un dispositivo compuesto esencialmente por el molde de conformación (figura 3.10) y el pistón que comprimirá el aluminio fundido a una temperatura de 1200 °C.

Ahora bien, para que el aluminio líquido no se escurra debido al juego que se puede producir entre el pistón y el tubo producto de las tolerancias de fabricación y la temperatura se tomaron las siguientes precauciones: Primero hay que decir que el molde se diseñara de tal forma que en su parte superior el tubo funcionara como una camisa de inyección como en el caso de las máquinas para este fin, no estará

sometido a la presión radial del aluminio causante de la deformación radial del tubo, por lo que se mantendrá el valor del ajuste entre pistón y tubo. Se hace necesario tener en cuenta el juego máximo entre el par pistón – tubo y la dilatación térmica del tubo, que pudiera provocar una clarencia excesiva entre estos elementos lo que puede provocar escurrimiento del aluminio.

En la literatura sobre fundición a presión del aluminio se plantea que en el diseño de los moldes, en los lugares donde puede existir escurrimiento es suficiente emplear un ajuste: A_3 / X_3 (Norma GOST) equivalente al ajuste ISO: H_9 / f_9 .

En este caso, el juego máximo J_{max} recomendado por la literatura se determina como sigue: Para el tubo de diámetro interior ϕ 39 H9

$$\phi 39^{+0,062}_0 \text{ mm}$$

Para el pistón de diámetro ϕ 39 f9

$$\phi 39^{-0,023}_{-0,087} \text{ mm}$$

El juego máximo del ajuste es:

$$J_{max} = 0,062 - (-0,087) \cong 0,15 \text{ mm}$$

Según los cálculos realizados, la diferencia de dilatación térmica entre el diámetro interior del tubo y el exterior del vástago para estas tolerancias de fabricación se encuentra en el rango de: $\Delta l = 0,114 - 0,400$ mm. El diámetro del pistón por lo tanto se debe fabricar con una sobremedida que asuma la dilatación térmica del tubo. Suponiendo que el tubo dilate 0,4 mm y que el vástago se fabrique con una sobremedida para compensar la dilatación de solo 0,11 mm, aparecería una clarencia por dilatación de 0,29 mm lo que unido al juego máximo que aparece por la tolerancias asignadas (0,15 mm) elevaría el valor de la holgura hasta 0.44 mm. Si no se tiene en cuenta en la fabricación del pistón la sobremedida para compensar la dilatación térmica del tubo el valor de la holgura se elevaría a 0,55 mm. Pero como según (Titov, 1980) el espesor de la pared mínimo para garantizar el llenado durante la fundición de aleaciones de aluminio a presión es de 1,143 mm, de aquí que aunque se fabricaran el pistón y el tubo con las mencionadas dimensiones críticas del conjunto (juego máximo y ausencia de sobremedidas en el pistón para

compensar la dilatación del tubo) no se corre riesgo ninguno de que exista escurrimiento de aluminio.

En la figura 3.11 se muestra una imagen del dispositivo de conformado antes de la conformación del tubo, donde se señalan las principales partes que lo componen. En la figura 3.12 se muestra una vista de dicho dispositivo durante el proceso de conformación del tubo.

Como se aprecia en dichas figuras, la parte inferior del molde (1) se fija con tornillos en la mesa de la prensa hidráulica. La parte superior del molde (2), el pistón (3), los tornillos (6) y resortes (7), conforman el mecanismo superior del dispositivo que está sujetado por tornillos al vástago del cilindro hidráulico de la prensa lo que agiliza el trabajo. El tubo es previamente calentado a $1\ 200\ ^\circ\text{C}$ con el aluminio vertido en su interior. Durante este proceso todo el mecanismo superior se encontrará desplazado hacia arriba en la posición extrema lo que permite un fácil acceso al molde inferior.

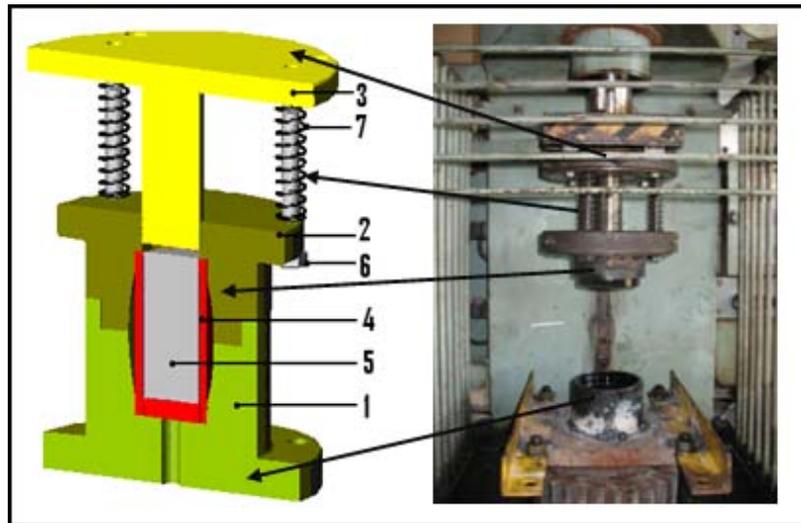


Figura 3.11. Vista del dispositivo antes de la conformación del tubo.

1 – Molde inferior, 2 – Molde superior, 3 – Pistón, 4 – Tubo a conformar, 5 – Fluido conformador (aluminio), 6 – Tornillos, 7 – Resortes de compresión.

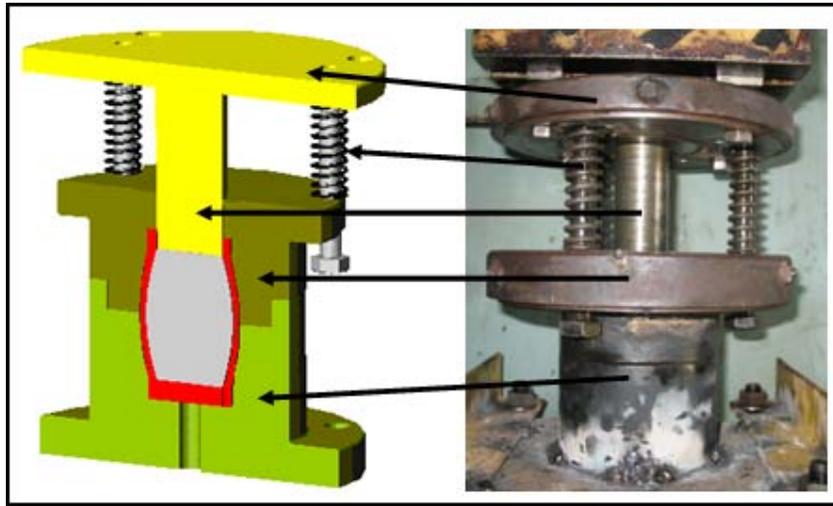


Figura 3.12. Vista del dispositivo durante la conformación del tubo.

Una vez que el tubo caliente se coloca en el molde inferior se acciona la prensa, logrando así el descenso del mecanismo superior del dispositivo hasta que, a medida que el vástago de la prensa se desplaza por el interior de la parte inferior del molde, se inicia la acción sobre el metal líquido en el interior del tubo y las presiones generadas por éste irán variando hasta vencer la resistencia a la conformación del tubo. Con este aumento de las presiones sobre la pared interna del tubo, irán aumentando las tensiones internas en el material a conformar hasta que se alcance el valor del límite de fluencia del material del tubo, condición esta necesaria para que se produzca su deformación plástica.

La deformación progresará hasta tanto las paredes externas del tubo no hagan contacto con las paredes internas del molde. Mientras el proceso está ocurriendo la presión ejercida por los muelles sobre los moldes no permite que estos últimos se separen. Las dimensiones del molde se determinan teniendo en cuenta la recuperación elástica del material del tubo.

Al lograrse la deformación completa del tubo dentro de la cavidad del molde, se invierte el sentido del desplazamiento del pistón y se separan ambas mitades del molde lo que facilita la extracción de la pieza conformada.

De la descripción anterior puede resumirse que el método de conformado en caliente de tubos de paredes gruesas a presión consta de los siguientes pasos:

1. Selección del semiproducto: El semiproducto es un tubo de acero inoxidable AISI –316 con un diámetro interior y exterior calculado en dependencia del rotor a fabricar. La fundamentación teórica del proceso de selección del tubo para el conformado de los rotores se trató en el capítulo anterior con la selección de los espesores mínimos del rotor a partir de los criterios de resistencia requeridos.
2. Sellaje del tubo: Se hace necesario sellar un extremo del tubo para evitar la fuga del fluido hidráulico que ejerce presión en su interior. El sellado se realiza introduciendo un tapón maquinado con las dimensiones interiores del tubo y fijándolo mediante soldadura.
3. Llenado del tubo con el fluido hidráulico: El tubo sellado por uno de sus extremos se le vierte el fluido conformador (aluminio fundido).



Figura 3.13. Llenado del tubo con aluminio líquido.

4. Calentamiento del tubo: El tubo se introduce dentro de un horno hasta alcanzar la temperatura requerida para el proceso de conformado.



Figura 3.14. Calentamiento del tubo en la mufla.

5. Introducción del tubo en el molde: El molde se divide en dos partes simétricas las cuales permiten que el tubo se aloje en su interior.



Figura 3.15. Colocación del tubo en el molde.

6. Aplicación de la fuerza necesaria para lograr la deformación plástica del tubo: Mediante una prensa hidráulica se le aplica la fuerza necesaria para la compresión del aluminio fundido y la deformación plástica del tubo.



Figura 3.16. Compresión del aluminio fundido para deformar el tubo.

7. Extracción del tubo ya deformado: Una vez lograda la deformación se procede a la extracción del tubo. Posterior a ello, se extrae el aluminio contenido en su interior mediante el calentamiento del conjunto a la temperatura de fusión del aluminio.



Figura 3.17. Apertura del molde.

En la figura 3.18 se muestra el resultado de la conformación de uno de los tubos el cual fue calentado a una temperatura de 1200 °C, aplicándosele una presión inferior a la calculada (presión necesaria = 6,83 MPa a 1200 °C), lo cual provocó la deformación del diámetro exterior del tubo un 30 %.



Figura 3.18. Resultado de la deformación del tubo para $p < 6,83$ MPa.

En la figura 3.19 se muestra el resultado de la conformación de un segundo tubo el cual fue calentado a una temperatura de 1200 °C, aplicándosele una presión ligeramente superior a la calculada (presión necesaria= 6,83 MPa a 1200 °C), lo cual provocó la deformación del diámetro exterior del tubo un 99,8 %.



Figura 3.19. Resultado de la deformación del tubo para $p = 6,83$ MPa.

Los resultados de las pruebas anteriormente descritas arrojaron que los valores de las presiones que se necesitan ejercer sobre la columna de aluminio fundido están en correspondencia con los valores obtenidos en la investigación, además de demostrar la posibilidad de fabricar rotores huecos mediante la tecnología Aluminoforging propuesta, la cual se presenta como otro aporte práctico en el orden tecnológico de esta investigación.

Uno de los principales retos que presenta el método propuesto Aluminoforging radica en las altas exigencias a las que se necesitan responder durante la fabricación de los moldes dentro de los cuales se deformará el tubo para conformar el perfil del rotor de la bomba de cavidad progresiva. La propia configuración de estos elementos hacen que se eleve la dificultad del maquinado de la cavidad de dichos moldes y se haya pensado en la posibilidad de la obtención de ellos por métodos no convencionales de manufactura, lo cual está siendo estudiado en la actualidad.

Una de las principales exigencias que se plantean a los rotores, desde el punto de vista tecnológico, lo constituye la calidad superficial del tubo ya deformado. Las diferentes imperfecciones sobre la superficie disminuyen la calidad superficial del tubo, sin embargo, un criterio que se necesita manejar en lo referente a la calidad

superficial lo constituye sin dudas el valor de la rugosidad superficial pues es lo que está relacionado directamente con las exigencias de los procedimientos de manufactura por donde debe transitar el rotor en lo sucesivo.

Por ejemplo, para la mayor parte de las aplicaciones de las bombas de cavidad progresiva sobre todo en la industria alimenticia, se exige que los rotores sean fabricados de acero inoxidable y que se traten químicamente con un cromado para elevar, entre otras, la resistencia al desgaste provocada por la acción abrasiva de los productos en suspensión que se trasiegan con la bomba.

Para el cromado, según reporta la literatura científica (Rodríguez, 1991)(Francisco, 1991)(G. González, 1991), se necesita preparar la superficie mediante los procesos de rectificado y de pulido mecánico. El primero, se realiza para garantizar una rugosidad aproximada de $R_a = 0.8 \mu\text{m}$ mientras que con el pulido mecánico se busca disminuir estos valores de la rugosidad a menos de la mitad de los obtenidos en el rectificado.

Como quiera que estas operaciones de acabado en los rotores de las bombas de cavidad progresiva no se pueden realizar en las máquinas convencionales que existen en la industria manufacturera nacional, se iniciaron investigaciones para garantizar la preparación superficial del tubo deformado y se fabricó un dispositivo especial que permite realizar dichas funciones.

3.8. Dispositivo especial para la preparación de las superficies de los rotores de las bombas de cavidad progresiva para el cromado.

En el epígrafe se describe una tecnología para la preparación de las superficies para el cromado en los rotores de las bombas de cavidad progresiva (Llody García, 2008). Teniendo como puntos de partida los movimientos principales de la fresadora universal y las posibilidades del cabezal divisor, se diseña un dispositivo especial de maquinado que, acoplado en el cabezal de la fresadora, confiere a la pieza colocada en el plato del cabezal divisor un movimiento de traslación y rotación que combinados con el movimiento de corte del dispositivo permite el maquinado de la superficie exterior de los rotores de las bombas de cavidad progresiva.

El dispositivo es compacto y robusto en su diseño de manera que pueda soportar las fuerzas de corte que se producen en el proceso de arranque de virutas. Cuenta con sistemas de lubricación y de refrigeración que permiten elevar su vida útil así como con un mecanismo que garantiza los diferentes valores de la profundidad de corte lo que posibilita una buena calidad superficial.

En la figura 3.20 se muestra el dispositivo especial de maquinado, concebido en su mayor parte de piezas de acero al carbono que garantizan los valores de resistencia requeridos, con dimensiones espaciales de 200 X 200 X 250 mm y un peso aproximado de 10 kg. Consta de varias piezas integradas en cuatro partes: base (1), cuerpo (2), transmisión (3, 4, 5) y el sistema de corte (6, 7, 8).

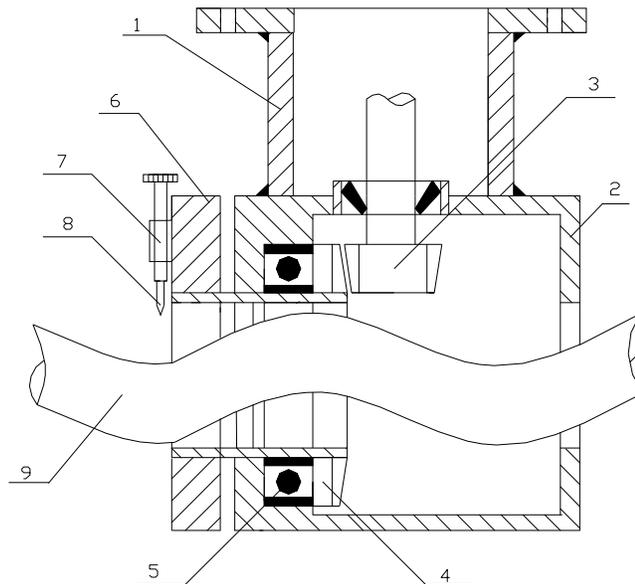


Figura 3.20. Dispositivo especial de maquinado.

La base (1) es un cuerpo cilíndrico rígido de acero que cuenta con una brida con 4 orificios que permiten su acople al cabezal superior de la fresadora. La función principal del cuerpo (2) es soportar los sistemas de transmisión y corte, además de servir de cárter de aceite para la lubricación de los engranajes (3 y 4) y el cojinete de bolas (5) y no permitir la entrada de virutas u otro elemento a los mismos. El sistema de transmisión consta de un piñón cónico helicoidal (3) y una corona (4) que son los encargados de llevar el movimiento principal desde el husillo de la fresadora hasta la

herramienta de corte (8). El sistema de corte está compuesto por el soporte portaherramientas (6), por la herramienta de corte (8), el mecanismo de selección de la profundidad de corte (7) y la cuchilla (8).

En la figura 3.21 se muestra el dispositivo instalado en la fresadora universal en pleno proceso de maquinado de un rotor. El semiproducto (barra calibrada de acero inoxidable) se instala entre el plato del cabezal divisor y el punto. El ajuste y afinado de la fresadora se inicia con la determinación de los parámetros de la guitarra en dependencia del paso del rotor. Posteriormente se descentra el semiproducto respecto al dispositivo una magnitud e (excentricidad del rotor) y se coloca la herramienta de corte en la posición de inicio de maquinado mediante el método de rozado.

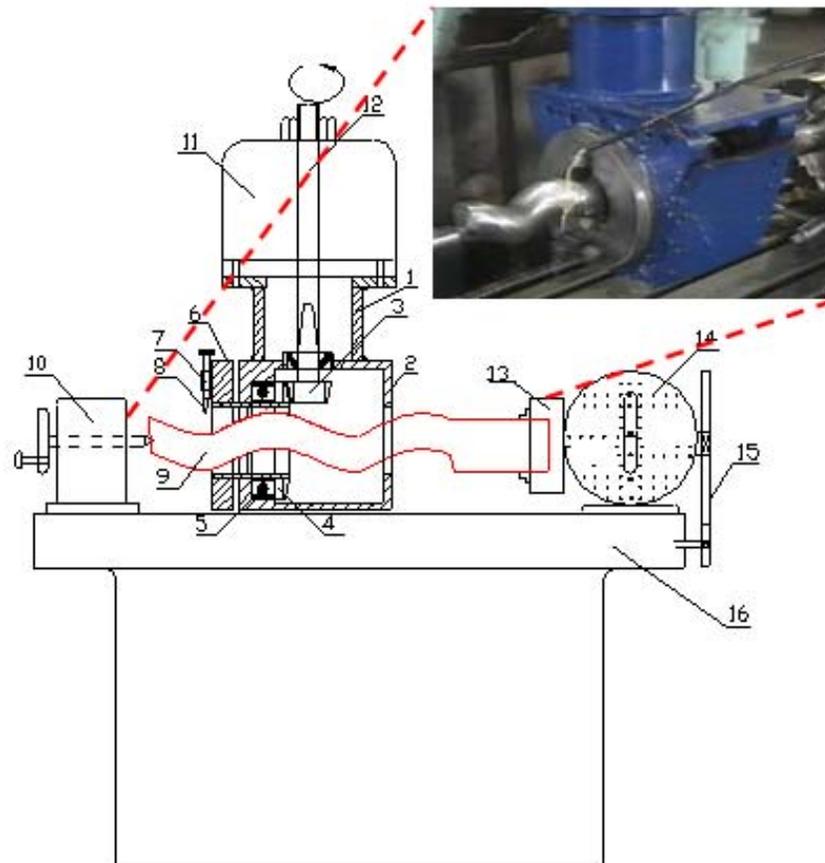


Figura 3.21. Dispositivo especial FRETOR instalado en una fresadora universal.

Una vez cumplimentado cada uno de los pasos descritos con anterioridad se procede a maquinar el rotor, para lo que se le comunica movimiento al sistema de corte del dispositivo mediante la guitarra conectada a la caja de velocidades de la fresadora y se establecen los parámetros del avance longitudinal en la caja de avances de la misma.

La excentricidad (e) es la responsable de que la herramienta de corte arranque virutas en el arco del semiproducto más próximo a ella y genere una ranura de forma helicoidal. Con el aumento de la cantidad de pasadas se va generando un arco cada vez mayor hasta llegar a obtener un arco completo de 360 grados con lo que termina el proceso de maquinado.

Como se describió con anterioridad, este dispositivo se diseña a partir de los requerimientos existentes sobre la preparación superficial de los rotores para el acabado superficial mediante cromado. Sin embargo, la práctica ha demostrado que el dispositivo en cuestión se puede utilizar también para la fabricación de rotores macizos a partir de laminados de acero inoxidable con la utilización de diferentes herramientas para el desbaste, el acabado y el rectificado de las superficies, lo que ha aumentado considerablemente la aplicabilidad del mismo.

Este dispositivo también se encuentra patentado por la OCPI (Llody García, 2008) y se presenta como otro aporte práctico en el orden tecnológico de esta investigación.

En las tablas que aparecen en el anexo VII se ofrecen recomendaciones a tener en cuenta para seleccionar los parámetros del régimen de corte para utilizar dicho dispositivo en operaciones de acabado en el caso de rotores huecos, así como en operaciones de desbaste y acabado en el caso del mecanizado de laminados calibrados para fabricar rotores macizos. Se muestran los detalles de la composición de la guitarra en dependencia del paso deseado en el rotor.

Con la utilización del dispositivo se ha logrado dar respuesta a la demanda de rotores en la industria nacional teniendo un alto impacto económico, social y medioambiental.

3.9. Exactitud y calidad superficial requeridas en los rotores de las bombas de cavidad progresiva para su explotación.

Primeramente se analizara lo referente a la exactitud la cual está relacionada con las desviaciones de forma y posición de la pieza y su precisión dimensional.

La precisión dimensional del rotor está determinada por las tolerancias acotadas en el diseño del mismo, las cuales dependen de la conjugación de sus superficies en el conjunto donde será ensamblado posteriormente para su puesta en explotación, en la figura 3.22 se muestra el rotor ensamblado dentro del estator donde se observa la interferencia que existe entre ambas piezas, parámetro fundamental para el funcionamiento de las bombas de cavidad progresiva (crea la línea helicoidal de cierre entre succión y descarga), la cual permite establecer por diseño un amplio rango de tolerancias dimensionales y de forma y posición, rango que absorbe el error sumario de maquinado (determinado mediante el uso de instrumentos de medida precisos) producido por todos los errores que se producen en el proceso de maquinado que provocan imprecisas dimensiones y alteración de la forma del rotor.

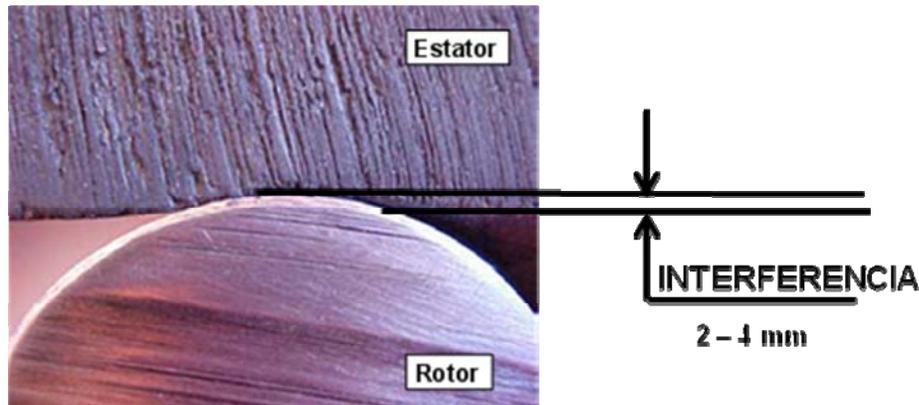


Figura 3.22. Interferencia Estator – Rotor (Hirschfeldt, 2008a).

Además para minimizar el error que introduce el dispositivo en el maquinado se diseña de forma robusta de manera que pueda soportar las fuerzas de corte que se producen en el proceso de arranque de virutas garantizando la rigidez del sistema MH-Dispositivo-Herramienta-Pieza, garantizándose además el principio de constancia de las bases y el principio de coincidencia de las bases.

La calidad superficial, parámetro fundamental en los rotores, está caracterizada por la rugosidad superficial la cual puede ser garantizada mediante:

- la correcta selección del régimen de corte (t , s , V_c),
- el correcto afilado de la herramienta de corte (r_e : radio de la punta).

Seleccionados correctamente los parámetros del régimen de corte y el afilado de la herramienta de corte el dispositivo permite mediante la pasada de acabado obtener una clase de rugosidad 7 ($R_a = 1,25 - 0,63 \mu\text{m}$), rango aceptable para comenzar con las operaciones de pulido mecánico donde se busca disminuir estos valores de la rugosidad a menos de la mitad para el cromado posterior.

En la figura 3.23 se muestra la medición de la rugosidad superficial realizada a uno de los rotores después de la pasada de acabado en el dispositivo especial, los resultados se muestran en el anexo VIII, obteniéndose $R_a = 0,65 \mu\text{m}$.



Figura 3.23. Medición de la rugosidad superficial realizada a uno de los rotores después de la pasada de acabado en el dispositivo especial.

Finalmente los rotores se someten al proceso de cromado obteniéndose un valor de rugosidad $R_a = 0,16 \mu\text{m}$ (ver anexo VIII), el cual corresponde con una clase de rugosidad 10 ($R_a = 0,16 - 0,08 \mu\text{m}$) la cual permite minimizar el desgaste producido por el rozamiento del par rotor – estator.

3.10. Conclusiones del Capítulo.

1. Utilizando los principios y ecuaciones de la Teoría de la Plasticidad fueron obtenidas las expresiones que permiten calcular:
 - la presión interior necesaria para provocar una deformación plástica en un tubo de pared gruesa de acero,
 - la magnitud de las tensiones circunferenciales y las tensiones radiales en la pared,
 - el módulo de elasticidad de la zona plástica en dependencia de la temperatura de calentamiento,
 - la expresión analítica para determinar la presión requerida para deformar plásticamente una magnitud ΔD de un tubo de un material cuyas propiedades mecánicas en función de la temperatura sean conocidas.
2. Se presenta, a partir de las consideraciones anteriores, un nuevo método de manufactura patentado con el denominativo de Aluminoforging que consiste en la deformación en caliente de un tubo de pared gruesa de acero mediante presión interior ejercida sobre una columna de aluminio fundido.
3. Las pruebas realizadas para lograr deformaciones en un tubo en caliente a determinada temperatura arrojaron que los valores de las presiones que se necesitan ejercer sobre la columna de aluminio fundido están en correspondencia con los valores obtenidos en la investigación.

4. Se presenta un dispositivo especial, patentado bajo el denominativo de FRETOR, para el maquinado de los rotores de las bombas de cavidad progresiva que posibilita:
 - La preparación de la superficie del rotor hueco obtenido por el método de Aluminoforging para los tratamientos posteriores de acabado superficial (cromado)
 - La fabricación de rotores macizos a partir de laminados de acero inoxidable por el método clásico de arranque de virutas.

5. La introducción del resultado de la investigación trajo consigo un importante efecto económico y social debido a la sustitución de importaciones a altos precios y la no paralización de importantes industrias sensibles en la alimentación diaria de la población, además de tener un gran impacto medio ambiental por concepto de ineficiencia por desgastes y vertimientos por roturas imprevistas.

CONCLUSIONES GENERALES.

1. En la búsqueda documental sobre la fabricación de los rotores fueron encontradas varias patentes. Sin embargo, sobre el método de conformado en caliente de un tubo para obtener rotores huecos y los dispositivos especiales para el maquinado posterior no aparece información alguna. Sobre el proceso de diseño y manufactura de los rotores de las bombas de cavidad progresiva tampoco se encontró información relevante.

2. Se elaboró un nuevo esquema de análisis consistente en considerar el rotor como una viga sobre fundación elástica, desarrollándose un procedimiento de cálculo para obtener el coeficiente de rigidez (α) de la goma (estator) en el caso del par de contacto rotor-estator no reportado con anterioridad en la literatura científica lo que constituye un aporte de este trabajo.

3. Sobre la base del esquema de análisis propuesto y la aplicación del Método de los Parámetros de Origen se obtuvo, para cualquier combinación de rotor - estator:
 - el comportamiento de la flecha del rotor en contacto con la goma del estator,
 - la reacción del estator sobre el rotor como una carga no uniformemente distribuida a lo largo de su longitud,
 - la pendiente que adquiere el rotor en contacto con el estator y,
 - la distribución del momento flector y de la fuerza de cortante interna a lo largo de la longitud del rotor,

Se valida el cálculo de la presión de contacto mediante la observación de la huella del desgaste producida en un estator real.

4. Mediante el nuevo esquema de análisis se evalúa la resistencia mecánica de los rotores huecos obteniéndose el diámetro interior crítico que garantiza el mínimo espesor requerido de la pared lo que permite la selección adecuada del semiproducto para el conformado.
5. Utilizando la teoría de la plasticidad fueron obtenidas las expresiones que permiten calcular:
 - la presión interior necesaria para provocar una deformación plástica en un tubo de pared gruesa de acero,
 - la magnitud de las tensiones circunferenciales y las tensiones radiales en la pared,
 - el Módulo de Elasticidad de la Zona Plástica en dependencia de la temperatura de calentamiento,
 - la presión requerida para deformar plásticamente el tubo en una magnitud ΔDe .
6. Se propone la tecnología de "Aluminoforging" (patente concedida) para la elaboración de rotores a partir de la deformación plástica en caliente de un tubo de paredes gruesas y se construye un dispositivo especial de maquinado "FRETOR" (patente concedida) para el maquinado de los rotores de las bombas de cavidad progresiva que posibilita la preparación de la superficie del rotor hueco para los tratamientos posteriores de acabado superficial y la fabricación de rotores macizos a partir de laminados de acero inoxidable por el método clásico de arranque de virutas con un considerable impacto, económico, social y medioambiental.

Recomendaciones.

Sobre la base de los resultados y el alcance del presente trabajo se pueden realizar las siguientes recomendaciones con el objetivo de darle continuidad al mismo:

1. Aplicar la tecnología "Aluminoforging" a la fabricación de un rotor hueco real para las bombas de cavidad progresiva que se fabrican en el Taller de Bombas de la Empresa Glucosa Cienfuegos determinando, mediante el uso del método científico, los parámetros óptimos de explotación de dicha tecnología.
2. Continuar las investigaciones teóricas y experimentales sobre la influencia de la interferencia (ancho de la banda de contacto) y de la rigidez de la goma (módulo de elasticidad y composición de la misma) en las interacciones entre rotor y estator, en particular la reacción del estator sobre el rotor y su correspondencia con el desgaste que se origina en el estator.
3. Elaborar un programa de cálculo que permita, en función de las exigencias de explotación de la bomba, obtener los parámetros requeridos para el diseño y la fabricación de los estatores y rotores incorporando un módulo de cálculo técnico-económico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Aleksandrov, A. (1990). *Fundamentos de la teoría de la elasticidad y plasticidad*. Moscú: Vischaya shkola.
- Alemán, G. (2008). Tecnología “aluminoforging” para la fabricación de los rotores huecos de las bombas de cavidad progresiva. Tesis de grado. Universidad de Cienfuegos.
- Alemaskin,, K. (2006). Progressive thinking for pumps, *Fluent News*, Alberta, Canada.
- Arrellano, J. A. (2007). Field study for predicting pc pump performance, *Society of Petroleum Engineers*, Tulsa, EUA.
- Arzola, N. & Goytisoló , R. (2002). Determinación experimental del coeficiente de rigidez del bagazo. Universidad de Cienfuegos, Facultad de Mecánica, Informe de Investigación.
- Arzola, N. & Goytisoló, R. (2005). New analysis scheme and procedure for prediction of the sugar mill shaft failure, *Orlando, Florida: Editorial ASME*.
- Beer, F. (1989). *Mécanica vectorial para ingenieros estática*, 1. La Habana: Revolucionaria.
- Benediet, W. (1984). *Tool and manufacturing engineers handbook forming*. United State: Michigan.
- Birger, I. (1975). *Termoresistencia de piezas de máquina*. Moscú: Mashinostroenie.
- Bourke,D. (2008). *Pumping abrasive slurries with progressing cavity pumps*. Estados Unidos: Moyno, Inc.
- Bratu, C. (2007). New progressing cavity pump (npcp) for multiphase and viscous liquid production., *International Thermal Operations and Heavy Oil*, Calgary, Canada.
- Bucher,W. (2007). Aspects of solar water pumping in remote regions ,*Energy for Sustainable Development*, Volume III (No. 4).
- Compair Holman. (2010). *Bombas MONO. Catálogo industrial*. España: Compair Holman S.A.
- Cherkasski, V. (1986). *Bombas, ventiladores, compresores*. Moscú: MIR.
- Cholet, H. (2007). *Progressing cavity pumps*. Francia: Technip.

- Dobrovolski, V. (1970). *Elementos de máquinas*. Moscú: MIR.
- Donahue, W. (2008). Factors affecting pump selection for slurry type fuels, *Pumps Magazine*. USA, 2.
- Donald, A. (2010). Apuntes del coeficiente de balastro. Recuperado Febrero 17, 2011, a partir de <http://74.125.95.132>.
- Doty, D. (2007). New progressing cavity pumps developments in sludge transfer, *World Pumps*, Volume 2007(Issue 482), 24-28.
- Doyle, L. (1988). *Materiales y procesos de manufactura para ingenieros*. Mexico: Prentice-Hall.
- Eagle. (2010). *Progressing cavity pumps. Catálogo industrial*. Canada: Eagle.
- Ernst, R. (1988). Process and apparatus for the production of hollow bodies by continuously casting in a magnetic field. Patente.
- Espinosa, A. (2006). Modelo matemático para describir el paso del bagazo por entre las mazas y las cargas que abran sobre los elementos de los molinos de caña de azúcar. Tesis de Doctorado. Universidad Central de las Villas. Santa Clara.
- Fang, H. (1991). *Foundation engineering*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Feodosiev, V. (1985). *Resistencia de materiales*. Moscú: MIR.
- Francisco, W. (1991). *Recubrimientos protectores*. Cienfuegos: ISTC.
- Franklin, D. (2010). Foro de ingeniería geológica.coeficiente de balastro. . Recuperado Febrero 17, 2011, a partir de <http://ingenieríageologica.mforos.com>.
- Frantisek, L. (1985). Roller mechanism for forming helical shapes. Patente.
- Fregly, B. (2007). Experimental evaluation of an elastic foundation model to predict contact pressures in knee replacements, *Journal of Biomechanics*, 36.
- Gallardo, M. (1983). *Conformación de metales*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Gardellin, D. (2007). Protecting progressing cavity slurry pumps, *Robbins & Myers Forum*, Industrial Hwy, Cinnaminson. EUA.

Referencias bibliográficas.

- González, G. (1991). Técnica de recuperación de piezas por métodos galvánicos. Tesis de grado. Universidad de Cienfuegos.
- González, M. (2010). *Procesos tecnológicos de la industria mecánica*. La Habana: Félix Varela.
- Goytisoló, R. (1973). *Fatiga volumétrica y superficial de los metales*. Universidad Central de Las Villas: MES.
- Goytisoló, R. (2007). *Folleto de resistencia de materiales avanzada*. Cienfuegos: Universidad de Cienfuegos.
- Guliáev, A. (1978). *Metalografía*, 1. Moscú: MIR.
- Gunther, F. (1981). Method and device for the manufacture of helical rotor blanks for helical gear machines. Patente.
- Gunther, F. (1994). Casting an eccentric rotor pump designed to preselected pressure. Patente.
- Hansted, H. (2003). *The civil engineering handbook*. New York: CRC Press.
- Hirschfeldt, M. (2008a). *Manual de bombeo de cavidades progresivas*. Argentina: Oil Production.
- Hirschfeldt., M. (2008b). *Bombas de cavidades progresivas multilobulares*. Argentina: Oil Production.
- Hirschfeldt., M. (2010). Pc pump. Diseño básico y selección. Recuperado a partir de www.oilproduction.net.
- Huber, H. (2007). Characteristics of different pump type operating with ice slurry, *International journal of refrigeration*, Volume 28(Issue 1), 33-38.
- Jorochoilov, V. (1988). *Teoría y tecnología del tratamiento térmico de los aceros*. La Habana: Enpes.
- Kucher, A. (1989). *Tecnología de metales*. Moscú: MIR.
- Lajtin, Y. (1973). *Metalografía y tratamiento térmico de los metales*. Moscú: MIR.
- Lea, J. (2008). Progressing cavity pumps, *World Pumps*, Volume 2008(Issue 494), 38-43.
- Lehman, M. (2006). Large progressing cavity pumps for oil field transfer application, *World Pumps*, Volume 2006(Issue 467), 28-30.

- Levy, G. (1992). *Resistencia de materiales*, 1. La Habana: Pueblo y Educación.
- LICAR. (2010). *Bombas de rotor helicoidal. Catálogo industrial*. España: Licar S.A.
- López, D. (2009). Nuevo esquema de análisis para el cálculo de las fuerzas internas y los desplazamientos en los rotores de las bombas de cavidad progresiva. Tesis de grado. Universidad de Cienfuegos.
- Lubarda, V. (2002). *Elastoplasticity theory*. New York: CRC Press.
- Llave de los Aceros. (1985). *Catálogo de aceros*. Moscú: MIR.
- Llody García, Y. (2004). Diseño y construcción de bomba cubana mono En . Habana. Cuba: XIV Fórum Nacional de Ciencia y Técnica.
- Llody García, Y. (2008a). Métodos novedosos en el diseño y manufactura de bombas de cavidad progresiva. Tesis de maestría. Universidad de Cienfuegos.
- Llody García, Y. (2008b). Dispositivo para el maquinado de tornillos helicoidales excéntricos utilizando una fresadora universal. Patente.
- Llody García, Y. (2009). Método de fabricación de rotores huecos de bombas mono o bombas de tornillo excéntrico helicoidal por deformación plástica. Patente.
- Llody Pérez, A. (1996). Desarrollo y generalización de estatores gsf40x2b, gsf50x2b para fábrica de yogurt y b-85d para empresa de semillas En . Habana. Cuba: XI Fórum Nacional de Ciencia y Técnica.
- Malishev, A. (1987). *Tecnología de los metales*. Moscú: MIR.
- Maslenkov, S. (1991). *Manual de aceros y aleaciones para altas temperaturas*. Moscú: Metallurgia.
- Miroliúbov, I. (1990). *Problemas de resistencia de materiales*. Moscú: MIR.
- Mirza, K. (2008). *Moyno® ultra-shield™ rotor coating technology*. Estados Unidos: Moyno, Inc.
- Mono Pumps. (2010a). *Pump applications beer and wine. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Mono Pumps. (2010b). *Pump applications chemical industry pharmaceutical . Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.

Referencias bibliográficas.

- Mono Pumps. (2010c). *Pump applications edible oils. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Mono Pumps. (2010d). *Pump applications food and drink. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Mono Pumps. (2010e). *Pump applications mining and quarryng. Catálogo industrial*, 4. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Mono Pumps. (2010f). *Pump applications paper and board. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Mono Pumps. (2010g). *Pump applications sewage and effluent treatment. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Mono Pumps, Ltd.
- Montilla, B. (2008). Calculo de elongación de la sarta de cabilla en el sistema de levantamiento artificial "bomba de cavidad progresiva", *Instituto Argentino del Petróleo y del Gas*, Comodoro Rivadavia, Argentina.
- Moyno. (2006a). How versatile are pc pumps., *World Pumps*, Volume 2006(Issue 470), 30-34.
- Moyno. (2006b). Moyno launches progressing cavity pumps, *World Pumps*, Volume 2006(Issue 474), 12-16.
- Moyno. (2009). *Moyno® progressing cavity pumps*. Estados Unidos: Moyno, Inc.
- NEMO®. (2010). *Nemo® progressing cavity pumps. Catálogo industrial*. Estados Unidos: NEMOPUMP.
- Nesbitt, B. (2006). *Handbook of pumps and pumping*. Houston, Texas. EUA: McGraw-Hill.
- Netsch. (2006). Improves progressing cavity pumps, *World Pumps*, Volume 2006(Issue 477), 14-18.
- Netsch. (2008). *Progressing cavity pump applications*. Estados Unidos: Netsch, Inc.
- Neumann, H. (1974). *Abc conformación de metales*. Leipzig: Veb Deutscher Verlag.
- Nicola, S. (2009). Experiencia con barras huecas pcpod en bombeo de cavidades progresivas, *Jornadas de Producción*, Argentina.
- Niemann, G. (1967). *Tratado teórico práctico de elementos de máquinas*. Madrid: Labor SA.

Referencias bibliográficas.

- Olivet, A. (2009). Estudio experimental del desempeño de una bcp de estator rígido con flujo bifásico. Master Thesis. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.
- Orchard, B. (2006). Performance factors for progressing cavity pumps, *World Pumps*, Volume 2006(Issue 467), 36-38.
- Pisarenko, G. (1989). *Manual de resistencia de materiales*. Moscú: MIR.
- Reshetov, D. (1985). *Elementos de máquina*. La Habana: ISPJAE.
- Rodriguez, E. (1991). Recubrimientos anticorrosivos aplicados en las industrias del sime. Tesis de grado, 112. Universidad de Cienfuegos.
- Roper Pump. (2009). *Progressing cavity pump. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Roper Pump, Company.
- Roper Pump. (2010). *Typical applications for roper progressing cavity pumps. Catálogo industrial*. Estados Unidos: Roper Pump, Company.
- Saveth, K. (2009). *General guide lines for failure analysis of down hole progressing cavity pumps*. EUA: Technical Support.
- Shannley, F. (1971). *Mecánica de materiales*. United State: McGraw-Hill.
- Stiopin, P. (1979). *Resistencia de materiales*. Moscú: MIR.
- Taipa, S. (1986). *Teoría de la resistencia de los materiales a altas temperaturas*. Moscú: Metallurgia.
- Valle, A. (2000). Diseño y fabricación de basculador de 20 t sobre terreno. Tesis de maestría. Universidad de Cienfuegos.
- Vetter, G. (2009). Understand progressing cavity pumps characteristics and avoid abrasive wear proceeding the pump users symposium. Houston, Texas. EUA.
- Wade, J. (1949). Helical hollow rotor pump. Patente.
- Wood, F. (1940). Methods and apparatus for turning helical pump rotors. Patente.
- Young, A. (2002). *Elastómeros: Comportamiento con la temperatura y agentes agresivos*. Estados Unidos: PCP Oil.
- Zúev, V. (1988). *Tratamiento térmico de metales*. Moscú: MIR.

Anexo I. Programación de las ecuaciones en Matlab.

```

Q0=-243 %(kgf)
M0=-1579.5 %(kgfcm)
%% Funciones de Krilov
chi=B*z;
J1=(1/2)*(exp(chi)+exp(-chi))*cos(chi);
J2=(1/4)*((exp(chi)+exp(-chi))*sin(chi)+(exp(chi)-exp(-chi))*cos(chi));
J3=(1/4)*(exp(chi)-exp(-chi))*sin(chi);
J4=(1/8)*((exp(chi)+exp(-chi))*sin(chi)-(exp(chi)-exp(-chi))*cos(chi));

%% Parametros de origen
%evaluando para encontrar parametros de origen% % z1=35 %(cm) % syms y0 si0
% Q0=-243 %(kgf)
% M0=-1579.5 %(kgfcm)

ec1=subs(M0*J1+Q0*(J2)/B+a*y0*J3/B^2+a*si0*J4/B^3,[z Ea Eg lx],[35 2000000
1000 10.4]);
ec2=subs(Q0*J1+a*y0*J2/B+a*si0*J3/B^2-4*B*M0*J4,[z Ea Eg lx],[35 2000000 1000
10.4]);
tic
[si0num y0num]=solve(ec1,ec2)
toc %para ver dependencia de y0num=f(b)decmos: ezplot(y0num,[0,1])
%para ver dependencia de si0num=f(b)decmos: ezplot(si0num,[0,1])

%% Expresiones de comportamiento de los parametros con ORIGENES incluidos
y=(y0num*J1)+(si0num*J2/B)-(M0*J3/(Ea*lx*B^2))-(Q0*J4/(Ea*lx*B^3));
si=si0num*J1-M0*J2/(Ea*lx*B)-Q0*J3/(Ea*lx*B^2)-4*B*y0num*J4;
M=M0*J1+Q0*J2/B+a*y0num*J3/B^2+a*si0num*J4/B^3;
Q=Q0*J1+a*y0num*J2/B+a*si0num*J3/B^2-4*B*M0*J4;

%% graficando
figure(1)%tridimensional Gráfico de la flecha y = f (b,z)
yfs=subs(y,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4])
ezmesh(yfs,[0.1,2,0,35])

figure(2)%Gráfico de la flecha para b = 0,5 y = (z)
yf=subs(y,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 0.5])
ezplot(yf,[0,35])

%Gráfico de la flecha para b= 0,5 ; 1 ; 2.
hold on
yf=subs(y,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 1])

```

```
ezplot(yf,[0,35])
```

```
yf=subs(y,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 2])
```

```
ezplot(yf,[0,35])
```

```
%%
```

```
figure(3)%angulo
```

```
sif=subs(si,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 0.5])
```

```
ezplot(sif,[0,35])
```

```
%Para graficar con distintos b
```

```
hold on
```

```
sif1=subs(si,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 1])
```

```
ezplot(sif1,[0,35])
```

```
sif2=subs(si,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 2])
```

```
ezplot(sif2,[0,35])
```

```
%Gráfica 3D para si
```

```
si3D=subs(si,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4])
```

```
ezmesh(si3D,[0.1,2,0,35])
```

```
% set(gca,'XLim',[0,35],'YLim', [-0.0030, 0.0001])
```

```
%%figure(4)%momento
```

```
Mf=subs(M,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 0.5])/100
```

```
ezplot(Mf,[0,35])
```

```
%Para graficar con distintos b
```

```
hold on
```

```
Mf1=subs(M,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 1])/100
```

```
ezplot(Mf1,[0,35])
```

```
Mf2=subs(M,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 2])/100
```

```
ezplot(Mf2,[0,35])
```

```
%Gráfica 3D para Mf
```

```
Mf3D=subs(M,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4])/100
```

```
ezmesh(Mf3D,[0.1,2,0,35])
```

```
%%
```

```
figure(5)%Cortante
```

```
Qf=subs(Q,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 0.5])/100
```

```
ezplot(Qf,[0,35])
```

```
%Para graficar con distintos b
```

```
hold on
```

```
Q1=subs(Q,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 1])/100
```

```
ezplot(Q1,[0,35])
```

```
Q2=subs(Q,[Ea Eg lx b],[2000000 1000 10.4 2])/100
```

```
ezplot(Q2,[0,35])
```

```
%Gráfica 3D para Q
```

```
Q3D=subs(Q,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4])/100
```

```
ezmesh(Q3D,[0.1,2,0,35])
```

```
%% Graficando el Momento flector MAXIMO
```

```
%cuando Q=0 M=Mmax
```

```
bnum=(0.1:0.01:2)';
```

```
mar=subs(subs(Q,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4]),[b],[bnum]);
```

```
mar1=vpa(mar);
```

```
for l=1:length(mar1)
```

```
    try
```

```
        R = char(solve(mar1(l)));
```

```
        Sol(l,1) = str2num(strrep(R, 'z = ', ''));
```

```
    catch
```

```
        continue
```

```
    end
```

```
end
```

```
Mmax=subs(subs(M,[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4]),{[z],[b]},{[Sol],[bnum]});
```

```
figure(6)%Momento
```

```
fig1=plot(bnum,Mmax)
```

```
figure(7)%posición del momento maximo
```

```
fig2=plot(bnum,Sol)
```

```
%% Reacción de la fundación
```

```
qr=-a*y
```

```
% graficar en tres b distintos
```

```
qri=subs([qr],[b Ea Eg lx],[0.5 2000000 1000 10.4])/100
```

```
qrm=subs([qr],[b Ea Eg lx],[1 2000000 1000 10.4])/100
```

```
qrf=subs([qr],[b Ea Eg lx],[2 2000000 1000 10.4])/100
```

```
ezplot(qri,[0,35])
```

```
hold on
```

```
ezplot(qrm,[0,35])
```

```
ezplot(qrf,[0,35])
```

```
%Graficar en 3D qr
```

```
figure(10)
```

```
qr3D=subs([qr],[Ea Eg lx],[2000000 1000 10.4])/100
```

```
ezmesh(qr3D,[0.1,2,0,35])
```

Anexo II. Ecuación de la flecha.

$$y = \frac{0.01428 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{0.01428 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.2985 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{1020.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.000003804}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000003804 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\sqrt{-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82}}}$$

$$\frac{71.42 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) + 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) + 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) + 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right)}{\dots}$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right) - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.1$$

$$\cos\left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\frac{0.00004775 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00002388 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.007437 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.00002388 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.007437 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \right)$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$0.00002388 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.007437 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} + 0.00002388 \ln(b) \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.007437 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{0.02975 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.5}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.5 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.0009068}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right) \right)$$

$$\frac{0.003627 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0009068 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000776 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} - 0.000776 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} +$$

$$\left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$0.000776 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} + \frac{0.001552 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{\mathit{math} 13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.000776 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.001552 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{0.000776 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.001552 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.000776 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 0.000776 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\frac{\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.001552 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.000776 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068 \right)$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

Anexo III. Ecuación de la pendiente.

$$\begin{aligned}
 & 1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.5}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b)-1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.5 e \right) \left(\frac{0.0002388 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.0001194 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.03718 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \\
 \text{si} = & \frac{\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{\frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0} \\
 & 0.0001194 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.03718 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} - 0.0001194 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} - 0.03718 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} + 0.0001194 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + \\
 & \frac{\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{\frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0} \\
 & 0.03718 \ln(b) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} - \frac{0.1487 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.0001194 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.03718 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \\
 & \frac{\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{\frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0} \\
 & \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} - \frac{0.0002388 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.0001194 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.03718 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.0002388 \ln(b) \sqrt{\frac{182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \\
 & \frac{\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{\frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0}
 \end{aligned}$$

$$\frac{0.0001194 \ln(b) \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.03718 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0002388 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.0001194 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0$$

$$\left. \frac{0.03718 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.1487 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} \right\}$$

$$\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0$$

$$1020.0 \sin\left(0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{0.0000005852}{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0000005852 e^{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right) \sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}}$$

$$\left. \frac{0.00007 \cos\left(0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{3.88}{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} - 3.88 e^{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right) - 0.00007 \sin\left(0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{3.88}{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} + 3.88 e^{0.07001 z \left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}\right)^{\frac{1}{4}}} \right\}$$

$$\frac{411.1 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} +$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left. \frac{411.1 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2 \right\}$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

Anexo IV. Ecuación del momento flector.

$$M = \frac{14.28 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.597}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.597 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - 14.28 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.597}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.597 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+ \frac{1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{7.761}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 7.761 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$+ \frac{0.1201 \left(\sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right)}{e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}{e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$+ \frac{\left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{113.6 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{56.8 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{17690.0 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 56.8 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \sqrt{-\frac{182.0}{\ln(b) - 1.0}} \right)}{e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}{e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$\frac{205.5 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{411.1 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 205.5 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b) - 1.82)}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\left(\frac{\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{411.1 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{205.5 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2 \right)$$

$$\left(\frac{\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b) - 1.82)}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

Anexo V. Ecuación de la fuerza cortante.

$$Q = 4.347 \left(\sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)$$

$$\left(\frac{0.125}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.125 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} - 1.0 \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{1.194}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + \right)$$

$$1.194 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.001057 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cos \left(0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{\left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)}$$

$$\left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{240.2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 240.2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \frac{960.9 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{240.2 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$\left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(-\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(-\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{56.8 \ln(b) \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 17690.0 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}} + 113.6 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 56.8 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 17690.0 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}} + 13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$\frac{70760.0 \ln(b) \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{3}{4}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt{\frac{-1.0}{1.82 \ln(b)-1.82}} (1.82 \ln(b) - 1.82) \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \frac{6.0 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \tan\left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0}\right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

Anexo VI. Ecuación de la fuerza de reacción distribuida q_r .

$$\begin{aligned}
 & \frac{19.61 \left(0.01428 \sin \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.2985 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + 0.01428 \cos \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{\left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}}} \\
 q_r = & \frac{19.61 \left(0.01428 \sin \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.2985 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + 0.01428 \cos \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{1.82 \ln(b) - 1.82} \\
 & \frac{\left(\frac{0.2985}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.2985 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}{20002.2 \sin \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.000003804}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.000003804 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)} \right)}{\left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82}}} \\
 & \frac{1400.5462 \left(1.0 \sin \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.25 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cos \left(0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{1.82 \ln(b) - 1.82} \\
 & \frac{\left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{11.0}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{1.82 \ln(b) - 1.82} \\
 & \frac{\left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00004775 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00002388 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.007437 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.00002388 \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{\left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{11.0}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)} \\
 & \frac{\left(\frac{0.25}{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.25 e^{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{0.07001 z \left(\frac{1.0}{1.82 \ln(b) - 1.82} \right)^{\frac{1}{4}}}{13.03 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00004775 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{0.00002388 \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b) - 1.0}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{0.007437 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{3}{4}}}{26.06 \left(\frac{0.01099}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.00002388 \tan \left(2.45 \left(\frac{0.5495}{\ln(b) - 1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \right)}{1.82 \ln(b) - 1.82}
 \end{aligned}$$

$$\frac{0.001552 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.000776 \ln(b) \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 0.000776 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$1.82 \ln(b) - 1.82$$

$$\frac{0.001552 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}} + 0.000776 \ln(b) \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{-182.0}{\ln(b)-1.0}}}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} + 26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - 0.0009068$$

$$\left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} - \frac{2.0}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \frac{6.0 \tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{13.03 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\tan \left(2.45 \left(\frac{-0.5495}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2}{26.06 \left(\frac{-0.01099}{\ln(b)-1.0} \right)^{\frac{1}{4}}} + 1.0 \right)$$

$$1.82 \ln(b) - 1.82$$

Anexo VII. Recomendaciones para el régimen de corte y la guitarra.

Tabla. Recomendaciones para el régimen de corte.

Parámetros	Operación de desbaste	Operación de acabado
Velocidad en rpm (n); r/min.	160	1000
Avance (S); mm/min.	100	25
Pasadas (i)	12	3
Profundidad de corte (t); mm.	1	0,25
Tiempo principal (tp); min.	360	30

Tabla. Recomendaciones para la selección de los elementos de la guitarra

Paso del Rotor, (mm)	A	B	C	D
60	72	64	48	24
70	72	64	48	28
80	72	64	48	32
100	72	64	48	40
110	72	64	48	44

Anexo VIII. Resultados de la rugosidad superficial de los rotores.

Mitutoyo **SurfTestSJ-400**
 DATE 01-01-2000
 TIME 00:25:15
 STAND JIS2001
 PROFILE R
 FILTER GAUSS
 EVA-L 4.0mm
 N 5
 λ_c 0.8mm
 λ_s 2.5 μ m
 TILT-COMP. ALL
 CURVE-CMP. OFF
 M-SPEED 0.5mm/s
 R-SPEED 1mm/s
 AUTO-RTN ON
 RANGE 800 μ m
 \pm ESC
 DRIVE ON
 STYLUS STAND
 PRE/POST ON

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 λ_c 0.8mmX5

Ra 0.16 μ m
 Rz 1.5 μ m
 Rq 0.21 μ m

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 $\lambda_c=0.8mmX5$

Ver. 2.0 μ m/cm
 Hor. 200.0 μ m/cm



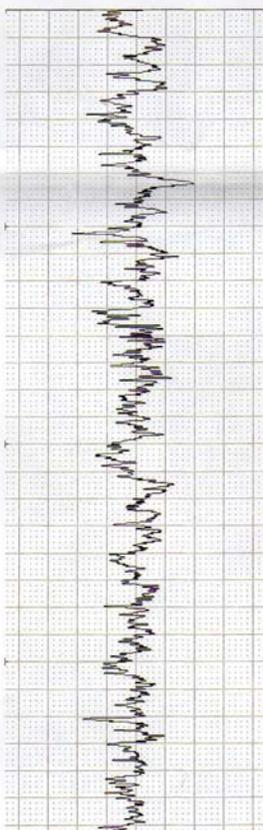
Mitutoyo **SurfTestSJ-400**
 DATE 01-01-2000
 TIME 00:22:53
 STAND JIS2001
 PROFILE R
 FILTER GAUSS
 EVA-L 4.0mm
 N 5
 λ_c 0.8mm
 λ_s 2.5 μ m
 TILT-COMP. ALL
 CURVE-CMP. OFF
 M-SPEED 0.5mm/s
 R-SPEED 1mm/s
 AUTO-RTN ON
 RANGE 800 μ m
 \pm ESC
 DRIVE ON
 STYLUS STAND
 PRE/POST ON

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 λ_c 0.8mmX5

Ra 0.20 μ m
 Rz 1.6 μ m
 Rq 0.26 μ m

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 $\lambda_c=0.8mmX5$

Ver. 1.0 μ m/cm
 Hor. 200.0 μ m/cm



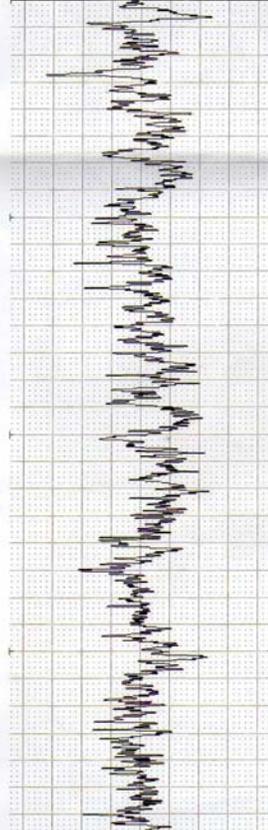
Mitutoyo **SurfTestSJ-400**
 DATE 01-01-2000
 TIME 00:21:21
 STAND JIS2001
 PROFILE R
 FILTER GAUSS
 EVA-L 4.0mm
 N 5
 λ_c 0.8mm
 λ_s 2.5 μ m
 TILT-COMP. ALL
 CURVE-CMP. OFF
 M-SPEED 0.5mm/s
 R-SPEED 1mm/s
 AUTO-RTN ON
 RANGE 800 μ m
 \pm ESC
 DRIVE ON
 STYLUS STAND
 PRE/POST ON

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 λ_c 0.8mmX5

Ra 0.15 μ m
 Rz 1.1 μ m
 Rq 0.19 μ m

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 $\lambda_c=0.8mmX5$

Ver. 0.5 μ m/cm
 Hor. 200.0 μ m/cm



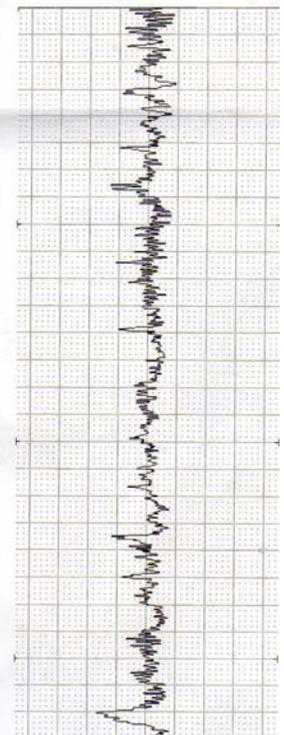
Mitutoyo **SurfTestSJ-400**
 DATE 01-01-2000
 TIME 00:04:22
 STAND JIS2001
 PROFILE R
 FILTER GAUSS
 EVA-L 4.0mm
 N 5
 λ_c 0.8mm
 λ_s 2.5 μ m
 TILT-COMP. ALL
 CURVE-CMP. OFF
 M-SPEED 0.5mm/s
 R-SPEED 1mm/s
 AUTO-RTN ON
 RANGE 800 μ m
 \pm ESC
 DRIVE ON
 STYLUS STAND
 PRE/POST ON

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 λ_c 0.8mmX5

Ra 0.65 μ m
 Rz 4.8 μ m
 Rq 0.83 μ m

R-PROFILE
 EVA-L 4.0mm
 $\lambda_c=0.8mmX5$

Ver. 5.0 μ m/cm
 Hor. 200.0 μ m/cm



Anexo IX: Producción científica del autor sobre el tema.

1. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. IV Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2006. Noviembre 2006. Santa Clara. Cuba. (ISBN : 959-250-295-1) — 9 p.
2. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. IV Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2006. Noviembre 2006. Santa Clara. Cuba. (ISBN : 959-250-295-1) — 10 p.
3. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. En III Conferencia Internacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica e Industrial CIMEI 2006. Octubre 2006. Santa Clara. Cuba. (ISBN: 959-247-032-4) — 10 p.
4. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. III Conferencia Internacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica e Industrial CIMEI 2006. Octubre 2006. Santa Clara. Cuba. (ISBN: 959-247-032-4) — 9 p.
5. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. VIII Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2006. Evento MANTENERG 2006. Palacio de las Convenciones. Julio 2006.
6. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. VIII Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2006. Evento MANTENERG 2006. Palacio de las Convenciones. Julio 2006. (ISSN : 1607-6281) —9 p.
7. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica CCIM 2006, Diciembre 2006. CUJAE. —10 p.
8. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica CCIM 2006. Diciembre 2006. CUJAE.
9. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. Congreso Internacional Metal-Mecánica 2006. Durango. México. —10 p. (Aceptado).

10. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. Congreso Internacional Metal-Mecánica 2006, Durango. México. — 9p.
11. Diseño y manufactura de estatores para bombas de cavidad progresiva. IX Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2007. Evento MANTENERG 2007. Palacio de las Convenciones. Noviembre 2007. — 8 p.
12. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. 8vo Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica CIBIM 8. 2007. —10 p.
13. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. 8vo Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. CIBIM 8 2007. — 9 p.
14. Bombas de cavidad progresiva para trasegar residuales. V Conferencia Internacional de Energía Renovable CIER 2007. Mayo 2007. Habana. — 10 p.
15. Fabricación de estatores para bombas de cavidad progresiva. V Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2008. Noviembre 2008. Santa Clara. Cuba. — 8 p.
16. Diseño y fabricación de bombas de cavidad progresiva. V Congreso Bolivariano de Ingeniería Mecánica COBIM V. Junio 2008. Cúcuta, Colombia. — 9 p.
17. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. V Congreso Bolivariano de Ingeniería Mecánica COBIM V. Junio 2008. Cúcuta, Colombia. —10 p. (Aceptado).
18. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. VIII Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica COCIM 2008. Diciembre 2008. Chile.
19. Desarrollo de un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia y la rigidez de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. XI Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2009. Evento MANTENERG. Palacio de las Convenciones. Julio 2009. —10 p.

20. Desarrollo de un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia y la rigidez de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. IV Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y II de Mecatrónica CIIM 2009. Octubre 2009. Bogotá, Colombia. —10 p.
21. Dispositivo especial (FRETOR) para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales utilizados como rotores en las bombas de cavidad progresiva. IV Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y II de Ingeniería Mecatrónica CIIM 2009. Octubre 2009. Bogotá, Colombia. —10 p.
22. Desarrollo de un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia y la rigidez de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. II Congreso Internacional de Materiales, Energía y Medio Ambiente CIMEM 2009. Noviembre 2009. Barranquilla, Colombia. —10 p.
23. Desarrollo de un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia y la rigidez de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. Anuario Científico de la Universidad de Cienfuegos, del Año 2009. (ISBN 959-257-055-8). —10 p.
24. Tecnología de manufactura de rotores para bombas de cavidad progresiva empleando un novedoso dispositivo especial de maquinado. XII Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2010. Evento MANTENERG. GESTA. Noviembre 2010. —10 p.
25. Tecnología Aluminoforging para el conformado en caliente de tubos de paredes gruesas empleada para la fabricación de piezas de perfil complejo. XII Convención Internacional de las Industrias Metalúrgicas, Mecánica y del Reciclaje. METÁNICA 2010. Evento MANTENERG. GESTA. Noviembre 2010.
26. Tecnología de manufactura de rotores para bombas de cavidad progresiva empleando un novedoso dispositivo especial de maquinado. VI Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2010. Noviembre 2010. Santa Clara. Cuba. — 10 p.
27. Tecnología Aluminoforging para el conformado en caliente de tubos de paredes gruesas empleada para la fabricación de piezas de perfil complejo. VI Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2010. Noviembre 2010. Santa Clara. Cuba. — 10 p.

28. Método de cálculo de los rotores de las bombas de cavidad progresiva considerando los mismos como una viga sobre fundación elástica. VI Conferencia Científica Internacional de Ingeniería Mecánica COMEC 2010. Noviembre 2010. Santa Clara. Cuba. — 8 p.
29. Influencia de la rigidez de la goma del estator en los parámetros de los rotores de las bombas de cavidad progresiva considerados como vigas sobre fundación elástica. Anuario Científico de la Universidad de Cienfuegos, del Año 2010. (ISBN 959-257-055-8). —13p.
30. Cálculo de los rotores de las bombas de cavidad progresiva como vigas sobre fundación elástica. Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica CCIM 2010. Palacio de las Convenciones. Noviembre 2010. — 8 p.
31. Tecnología Aluminoforging para el conformado en caliente de tubos de paredes gruesas empleada para la fabricación de piezas de perfil complejo. Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica CCIM 2010. Palacio de las Convenciones. Noviembre 2010. — 10 p.
32. Tecnología de manufactura de rotores para bombas de cavidad progresiva empleando un novedoso dispositivo especial de maquinado. Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica CCIM 2010, Palacio de las Convenciones. Noviembre 2010.

Patentes obtenidas con los resultados de la tesis:

1. Certificado de Autor de Invención No. 23279, concedido por Resolución No. 960/2008 con fecha 20 de Marzo de 2008 para la invención “Dispositivo para el maquinado de tornillos helicoidales excéntricos utilizando una fresadora universal”
2. Certificado de Autor de Invención No. 23416, concedido por Resolución No. 2111/2009 con fecha 24 de Julio de 2009 para la invención “Método de Fabricación de Rotores Huecos de Bombas MONO o Bombas de Tornillo Excéntrico Helicoidal por deformación Plástica”.
3. Certificado de Autor de Invención No. 23510, concedido por Resolución No. 429/2010 con fecha 15 de Mayo de 2010 para la invención “Formulación de matriz polimérica para la fabricación de sellos mecánicos”.

Premios Provinciales de la Academia de Ciencias de Cuba:

1. Diseño y fabricación de la bomba Cubana MONO o de tornillo excéntrico. Premio Provincial de Innovación Tecnológica 2006, Cienfuegos.
2. Dispositivo especial FRETOR para el maquinado de Tornillos Excéntricos Helicoidales. Premio Provincial de Innovación Tecnológica 2006, Cienfuegos.
3. Desarrollo y Generalización de estatores para bombas MONO. Premio Provincial de Innovación Tecnológica, 2006, Cienfuegos.
4. Desarrollo de un nuevo esquema de análisis para la evaluación de la resistencia y la rigidez de los rotores de las bombas de cavidad progresiva. Premio Provincial de Investigación Científica, 2009, Cienfuegos.

Premios Provinciales y Nacionales del FORUM de Ciencia y Técnica, ANIR y BTJ:

1. Llody Pérez, Antonio; Llody García, Yovany. et. al. 2004. Diseño y Construcción de Bomba Cubana Mono. Cienfuegos: XIV Fórum Provincial de Ciencia y Técnica. Premio Relevante. —15p.
2. Llody Pérez, Antonio; Llody García, Yovany. et. al. 2004. Diseño y Construcción de Bomba Cubana Mono. Ciudad de la Habana: XIV Fórum Nacional de Ciencia y Técnica. Premio Destacado —15p.
3. Llody García, Yovany; Llody Pérez, Antonio. et. al. 2004. Diseño y Fabricación de la Bomba Cubana MONO o de Tornillo Excéntrico. Ciudad de la Habana: EXPOANIR Nacional. — 15 p.
4. Llody García, Yovany; Llody Pérez, Antonio. et. al. 2005. Diseño y Fabricación de Bomba Mono para el trasiego de residuales. Cienfuegos: ECOJOVEN Provincial. — 12 p.
5. Llody García, Yovany; Llody Pérez, Antonio. et. al. 2006. Dispositivo Especial FRETOR para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales. Cienfuegos: XII Exposición Forjadores del Futuro. Evento Provincial. PREMIO. — 10 p.

6. Llody García, Yovany; Llody Pérez, Antonio. et. al. 2008. Dispositivo Especial FRETOR para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales. Cienfuegos: XVI Fórum Provincial de Ciencia y Técnica. Premio Relevante. — 10p.
7. Llody García, Yovany; Llody Pérez, Antonio. et. al. 2010. Dispositivo Especial FRETOR para el maquinado de tornillos excéntricos helicoidales. Ciudad de la Habana: XVI Fórum Nacional de Ciencia y Técnica (por celebrarse). Aceptado. —10p.

Tesis de Maestría y Trabajos de Diploma:

1. Llody García, Yovany. 2008. Métodos novedosos en el diseño y manufactura de bombas de cavidad progresiva. Tesis de Maestría. Dr. Rafael Goytisoló Espinosa, Dr. Hernán Hernández Herrera: tutores, Ing. Antonio Llody Pérez: consultante. —64 h.
2. Alemán González, Giory. 2008. Tecnología “Aluminoforging” para la fabricación de los rotores huecos de las bombas de cavidad progresiva. Trabajo de Diploma. M.Sc. Yovany Llody García, Dr. Rafael Goytisoló Espinosa, Dr. Hernán Hernández Herrera: tutores, Ing. Antonio Llody Pérez: consultante. —110 h.
2. López Raywattie, Diane. 2009. Nuevo esquema de análisis para el cálculo de las fuerzas internas y los desplazamientos en los rotores de las bombas de cavidad progresiva; M.Sc. Yovany Llody García, Dr. Ing. Rafael Goytisoló Espinosa, Ing. Mario Javier Cabello Ulloa: tutores. — Trabajo de Diploma, UCF. — 57 h.