

***Tesis por la Opción del Grado de Doctor en
Ciencias Pedagógicas***

La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos

***Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia:
la estructuración sistémica del contenido de estudio y el
desarrollo de las habilidades generales matemáticas***

Autor: Lic. Juan Raúl Delgado Rubí

**Tutor: *Dra. en Ciencias Pedagógicas
Herminia Hernández Fernández***

**Cotutor: *Dra. en Ciencias Pedagógicas
Teresa Rodríguez Hung***

Ciudad de la Habana, 1999

Introducción

El siglo XX, el más pródigo en transformaciones de toda la historia de la Humanidad, toca a su fin. Se revolucionó en él toda la vida económica, política, social, científica, técnica, cultural, idiomática y hasta la propia vida doméstica del hombre común cambió para una parte considerable del mundo.

La educación no permaneció indiferente a estos cambios y desde los primeros años del siglo ya se oyeron reclamos de transformación en el terreno pedagógico y didáctico. Esta centuria también fue testigo de un hecho inédito, la atención por la Psicología de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje, hecho cada vez más reconocido entre pedagogos y docentes. Quizás en la educación superior hubo más lentitud para aceptar la introducción de los resultados de las investigaciones psicológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero en diferentes latitudes y en particular en Cuba este proceso ha ido tomando auge en los últimos años.

La presente Tesis concede un peso importante a los resultados que las investigaciones psicológicas han alcanzado en torno a aspectos tales como: la estructuración del conocimiento, el decursar del proceso de asimilación de los conocimientos y habilidades y la enseñanza de la resolución de problemas. Estos aspectos son abordados por distintas escuelas, con diferentes interpretaciones, sin embargo se observa una convergencia entre algunas de ellas, en particular entre el enfoque histórico-cultural y la Psicología Cognitiva del Procesamiento de la Información (PCPI).

El acercamiento entre estas escuelas presentó sus primeros síntomas en el Seminario de la UNESCO sobre las bases psicológicas de la enseñanza programada (Tbilisi, 1976) con el abandono del conductismo por muchos de sus cultivadores y el reconocimiento del valor científico del enfoque histórico-cultural. Ambos coincidían al menos en que era necesario *"investigar los procesos que se encuentran entre el estímulo y la reacción"* (Talízina, 1988a). Comenzaba el fin de la teoría de la "caja negra".

Un momento culminante del mismo fue alcanzado en el I Taller sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas (Universidad de la Habana, 1992) con la presencia del psicólogo estadounidense Robert Glaser, representante destacado de una de las corrientes de la PCPI, quien en su

Conferencia Magistral planteaba que toda teoría moderna de enseñanza tenía que asumir tres presupuestos medulares: el estudiante como centro del proceso, la organización del conocimiento del mismo y la resolución de problemas.¹

Esta Tesis centrará la atención en los dos últimos aspectos, asumiendo que eso sólo es realmente importante si se logra, no sólo un aprendizaje de calidad en los estudiantes, sino más que ello, un desarrollo en los mismos, para lo cual el enfoque histórico-cultural nos brinda un adecuado referente teórico.

El enfoque histórico-cultural en la Psicología, iniciado por L.S.Vigotskiy a principios de siglo y que ha continuado cultivándose hasta la fecha en varios países, así como la Teoría de la Actividad (TA), aparecida en su propio desarrollo, tras los aportes de A.N.Leóntiev, P.Ya. Galperin, V.V.Davídov, N.F.Talízina y otros, han demostrado que sólo el aprendizaje deja una huella profunda en el individuo, cuando se efectúa en un ambiente de actividad. Se entiende por ello cuando el actuar va regido por los motivos del sujeto y éste es capaz de operar de forma independiente y consciente, con los conocimientos asimilados.

Asimismo, para el profesor, el proceso de asimilación de los conocimientos en el estudiante, no debe transcurrir bajo el principio de la "caja negra", sino que debe decursar por ciertas etapas, con fronteras mejor delimitadas unas que otras, pero imprescindibles para lograr características suficientemente relevantes en el conocimiento asimilado.

Las investigaciones de P.Ya Galperin y N.F.Talízina han revelado que para poder formar un conocimiento sistémicamente estructurado es necesaria una orientación del III tipo². Sin embargo, como han demostrado las investigaciones, esta se forma más eficientemente cuando la asignatura se ha estructurado también de forma sistémica, más compacta y conexa.

Precisamente en esta última dirección centraron muchas de sus investigaciones las psicólogas rusas Z.A.Réshetova y N.G.Sálmin. Sobre la base de los postulados de la Teoría General de Sistemas (TGS), Z.A.Réshetova lleva al plano experimental y fundamenta teóricamente el enfoque

¹ Cuando se emplee el término *problema* referido al proceso de enseñanza, se entenderá en el sentido de aquella situación verdaderamente problemática para el sujeto resolutor, para la cual, teniendo conciencia de ella, no conoce una vía de solución. Cuando se emplee con otra acepción se aclarará.

sistémico de tipo estructural-funcional en los programas de estudio. En este tipo son los enlaces de tipo estructural y funcional los que prevalecen y los contenidos se organizan en torno a determinados núcleos del conocimiento: *los invariantes*.

Por su parte N.G.Sálmina propone lo sistémico conformado a partir de una relación elemental esencial del todo, la que da en llamar *célula generadora* del sistema, por analogía con la denominación dada primero por Hegel y después por Marx en el caso de las ciencias. En esta modalidad del enfoque sistémico de los contenidos, los tipos de enlace que prevalecen son los genéticos y de desarrollo. A pesar de que pocos investigadores cubanos (Hernández, 1989; Fraga, 1991; Hernández, R. & M.C.Rodríguez, 1992) han desarrollado esta modalidad del enfoque sistémico en la enseñanza de la Matemática, debido a lo difícil de concebir y desarrollar una organización bajo esas exigencias, se reconoce tácitamente que el enfoque de tipo genético se aviene más a la manera de actuar del científico (si se coincide con Kuhn, 1962) y al cómo asumir nuevos conocimientos, incorporándolos a un sistema ya establecido, pero susceptible de ser ampliado.

Desde hace algunos años en la Educación Superior en Cuba también se ha venido desarrollando experiencias basadas en la TA y la estructuración sistémica de contenidos, entre las cuales ocupan un lugar importante, las realizadas en Matemática. Deben destacarse entre ellas los trabajos de los doctores Herminia Hernández, Teresa Rodríguez, Fernando Martínez, Regla Calderón y el Master Guillermo Pérez. Esas investigaciones, entre otras, han demostrado que un conocimiento estructurado posibilita un pensamiento reflexivo y generalizado y se encuentra en mejores condiciones para abordar nuevos conocimientos, hecho en el cual se apoya este trabajo.

En los últimos años el Grupo "ß" de Investigación en Matemática Educativa, bajo la dirección de la Dra. Herminia Hernández, ha estado trabajando en la organización de bloques de contenidos a partir de los llamados *nodos cognitivos*, concepto que ha surgido bajo el influjo de la PCPI y que grafica el conocimiento estructurado como una red n-dimensional de nodos, cada uno de los cuales

² O sea, generalizada, completa y elaborada de forma independiente por el sujeto (Galperin, 1959).

constituye *"un punto de acumulación de información en torno a un concepto o una habilidad"* (Hernández, 1993c), a la cual el sujeto puede acceder rápidamente cuando lo necesite.

La opción de estructurar el contenido como una red de nodos está más al alcance del profesor de fila. Por una parte, para su concepción, éste no necesita realizar investigaciones tan profundas como las necesarias para develar células e invariantes; por otra, en tanto recurso metodológico, facilita la organización del pensamiento del estudiante, posibilitando que pueda activar selectivamente la información ante la resolución de problemas.

La estructuración de asignaturas a través de los nodos cognitivos ha sido bien acogida entre docentes e investigadores de instituciones cubanas y extranjeras. El desarrollo ulterior de las investigaciones y su enraizamiento en nuestras universidades sentenciarán la factibilidad de su aplicación e incluso de si han servido como pivotes para organizaciones superiores (enfoques genético, estructural-funcional u otros) como se espera.

Por otra parte, la propia RCT y el desarrollo vertiginoso de la Informática en el mundo, han ocasionado transformaciones también en el ámbito educativo. Aunque las condiciones actuales de Cuba, país del Tercer Mundo y con una difícil situación económica, no propicien el fenómeno de la invasión de calculadoras y ordenadores en el contexto escolar y universitario, la tendencia futura de la enseñanza en el mundo es la de la presencia cada vez mayor de esos medios y la obsolescencia de procedimientos y habilidades a los que hoy dedicamos grandes esfuerzos para su formación.

Esto recaba de un desplazamiento del centro de la atención de las habilidades de cálculo y graficación a mano (Ver Estándares Curriculares del NCTM de los EE.UU., 1989) hacia el razonamiento matemático, que conlleva entre otros: al aprendizaje significativo de los conceptos y relaciones, a la formación de habilidades más generales, propias del que utiliza "bien" las matemáticas, y a la resolución efectiva de problemas.

Como resultado de esta dirección y consecuentemente con la TA aparece el Sistema Básico de Habilidades Matemáticas (Hernández, 1989), al cual se han adicionado, como partes o

ampliaciones de él, otras habilidades³ (Valverde, 1990; Rodríguez, 1991; Delgado, 1995a). Su asimilación y dominio permite la formación de un pensamiento reflexivo, generalizado y sólido, provisto de estructuras de conocimientos y modos generales de actuación que posibilitan la adaptación a los nuevos ritmos y al cúmulo de técnicas y conocimientos, que en el futuro, imponga la RCT.

En los últimos tres lustros en el ámbito internacional, la enseñanza de la resolución de problemas ha devenido centro de atención entre los psicólogos cognitivos, por cuanto existe una relación directa entre la posibilidad que tenga un sujeto de resolver eficientemente problemas y la calidad de su aprendizaje anterior. Aún cuando la mayoría de esos estudios se han desarrollado en los niveles primario y medio de enseñanza, la PCPI no ha brindado, a diferencia de la TA, un modelo del proceso enseñanza-aprendizaje.

Pero por otra parte, tampoco sobre la base de la TA se han realizado investigaciones, al menos en Matemáticas Superiores, sobre la enseñanza de la resolución de problemas⁴. Las investigaciones realizadas en Cuba basadas en esta teoría y que precedieron a esta Tesis, no la tuvieron suficientemente en cuenta o no se atisba al menos una clara conexión entre la estructuración de los contenidos y el desarrollo de las HGM, con la enseñanza de la resolución de problemas, a pesar de que un *desempeño* satisfactorio en dicha actividad es un claro indicador del desarrollo (en el sentido vigotskiano) alcanzado por el sujeto.

La Enseñanza Problémica, brinda también otra óptica sobre la enseñanza de la resolución de problemas. En la enseñanza de la Matemática en Cuba se han reportado pocas investigaciones, aunque con buenos resultados, basadas en esta concepción, a saber las del Dr. Paul Torres (1993) en la Enseñanza Media y las de los licenciados Roberto Núñez e Isabel Alonso en la carrera de Licenciatura en Matemática. Sin desconocer los valores que tiene desde el punto de vista epistemológico, psicológico y didáctico, se prefirió enrumbar la investigación desarrollada en esta Tesis, en otra dirección: ahondar en los presupuestos de la TA y la PCPI en pos de mejorar la

³ En lo adelante a todas ellas se les llamará Habilidades Generales Matemáticas (HGM)

⁴ Ni en Cuba ni fuera de ella, a tenor con la bibliografía y reportes de investigación revisados.

enseñanza de la resolución de problemas a partir de una estructuración sistémica de los contenidos y al desarrollo de ciertas HGM.

Ninguna teoría ha resuelto aún la cuestión de cómo enfrentar de manera efectiva la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Las consideraciones anteriores constatan la necesidad y permiten considerar la posibilidad, de complementar los aportes de las dos teorías psicológicas citadas en la solución de esta problemática.

En el caso particular de la Matemática, la enseñanza de la resolución de problemas se convirtió en el objetivo principal de la enseñanza desde principios de los 80's (al menos en los EE.UU), cuando se arribó a la conclusión que ni la “matemática moderna” ni el “retorno al dominio de las técnicas básicas” que le sucedió, habían satisfechos las expectativas puestas en ellas; *“de bien poco sirve saber lo fundamental, si no se sabe cómo ni cuándo usarlo”*(Schoenfeld, 1985c, p.8-9). Sin embargo, en muchos países aún no está situada la enseñanza de la resolución de problemas entre los primeros focos de atención en los distintos niveles de enseñanza. La enseñanza de la Matemática en Ciencias Técnicas en Cuba no está exenta de dicha problemática y quizás sea donde más urja resolverla, porque el ingeniero es el resolutor de problemas por antonomasia.

El desarrollo de la economía de Cuba - país tercermundista, bloqueado y que tiene, más que subsistir, que desarrollarse en las condiciones de un mundo globalizado y controlado por las transnacionales - constituye una fuente inagotable de problemas a resolver de forma creadora y eficiente. Por ello este asunto debe ser atendido.

Así, aparece ante la comunidad pedagógica cubana como un problema general: el insuficiente desarrollo que, tanto desde el punto de vista teórico como didáctico, tiene la enseñanza de la resolución de problemas, en particular en la educación superior.

Por la complejidad que entraña abordar esta situación y la multitud de aristas susceptibles de ser investigadas, se decidió concentrar el estudio en una de ellas, en la influencia que pudiera tener la estructuración del contenido específico de la materia de estudio. Así, se asume como **PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN** el:

¿cómo la estructuración de los contenidos puede propender a una enseñanza más efectiva de la resolución de problemas matemáticos en carreras de ingeniería?

Para responder al problema, se tomó como **OBJETO DE LA INVESTIGACIÓN:**

el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos en el 1^{er} Año de Ciencias Técnicas ⁵.

Tomando en consideración los aportes del enfoque histórico-cultural y la PCPI, y con la intención de aportar a la solución del problema de investigación planteado, es que se propone como **OBJETIVO GENERAL:**

Proponer y fundamentar una concepción didáctica que contribuya a mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. ⁶

Asimismo, para lograr el objetivo general de la investigación, se propusieron los siguientes **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Integrar presupuestos teóricos de la TA y la PCPI en torno a la estructuración de los contenidos, ya que la primera ha demostrado efectividad en la enseñanza de las Matemáticas Superiores en Cuba y la segunda focaliza explícitamente el aprendizaje a través y para la resolución de problemas.
- Identificar el *desempeño* en la resolución de problemas como un indicador de desarrollo en el sentido vigotskiano, analizado en el tránsito novato-experto.
- Analizar el *desempeño* de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

Tomando en cuenta los presupuestos generales de las dos teorías e inspirado en la aseveración de R.Mayer (1983, p.399) de que “Entre los psicólogos cognitivos parecen haberse impuesto dos ideas fundamentales. Para llegar a resolver con maestría problemas en determinado terreno, hay que 1) aprender gran cantidad de conocimiento específico del campo y 2) adquirir algunos procedimientos generales para la resolución de problemas que puedan aplicarse al conocimiento básico” y como quizás un primer paso para dar respuesta al problema planteado, se adelanta la siguiente **HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN:**

⁵ Esto enlaza a los siguientes contenidos: funciones (de una y varias variables), elementos de Geometría Analítica del plano y del espacio, límite y continuidad, así como los del Cálculo Diferencial e Integral.

⁶ En el Capítulo II de la Tesis se definen tanto la concepción didáctica como el término desempeño en la resolución de problemas.

Si el contenido se estructura de forma sistémica mediante el enfrentamiento a una diversidad de clases de problemas que exija el desarrollo de determinadas habilidades generales, entonces el estudiante tendrá un mejor desempeño en la resolución de problemas en el área estudiada.

Para el logro de los objetivos trazados y la demostración de la hipótesis, se acometieron las siguientes **TAREAS**:

1. Caracterización del estado actual del problema de investigación mediante:
 - a) El estudio de bibliografía relevante de autores extranjeros y cubanos, en aras de caracterizar el “estado del arte”,
 - b) La aplicación de pruebas para diagnosticar la situación problemática.
2. Revisar y analizar literatura relevante, con vistas a establecer el marco teórico, sobre:
 - a) los fundamentos filosóficos y epistemológicos de la Matemática y su enseñanza,
 - b) los presupuestos teóricos de la TGS,
 - c) los presupuestos teóricos del enfoque histórico-cultural, la TA y la PCPI, fundamentalmente los atinentes a la estructuración del conocimiento, el desarrollo de habilidades y la resolución de problemas,
 - d) la historia y características del pensamiento matemático y
 - e) las tendencias de la enseñanza en general y de la Matemática en particular, en el nivel superior en Cuba y en el mundo.
3. Determinar si existen otras HGM presentes en la resolución de problemas (en el objeto de investigación) y que no estuvieran reportadas en investigaciones anteriores, así como el papel de las mismas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esos contenidos.
4. Proponer una concepción didáctica que satisfaga lo supuesto en la hipótesis.
5. Diseñar, elaborar y aplicar todos los elementos constituyentes de los subsistemas didácticos que se implementen para verificar la hipótesis de investigación.
6. Fundamentar teóricamente la validez de la hipótesis de investigación y constatarla mediante la aplicación de distintos instrumentos de investigación pedagógica.
7. Presentar en sesiones científicas de instituciones reconocidas en Cuba, así como en eventos y en publicaciones especializadas arbitradas, los resultados de la investigación.

Con el fin de dar solución a las tareas planteadas y de verificar en la práctica la hipótesis, se emplearon como **MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN** los siguientes:

- El **método histórico** al estudiar y analizar la evolución del pensamiento psicológico en torno a la estructuración del conocimiento y la resolución de problemas, así como las investigaciones pedagógicas anteriores realizadas en Cuba relacionadas con estos tópicos. Además, se tuvieron en cuenta las tendencias principales de la Matemática Educativa en el mundo y el desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas Superiores en Ciencias Técnicas en Cuba en los últimos años.
- Los **métodos lógico, estructural-funcional, dialéctico e hipotético-deductivo**, tanto en la búsqueda de regularidades entre los presupuestos de la TA y la PCPI referentes a la estructuración del conocimiento, el comportamiento del experto en Matemática y la resolución de problemas, como en la búsqueda de regularidades en el contenido matemático objeto de investigación, que permitieran concebir una asignatura a partir de la utilización sistémica y sistemática de problemas.

Asimismo, se emplearon como **MÉTODOS EMPÍRICOS** de investigación:

- La **observación** en clases, tanto de la actividad del docente como de los estudiantes.
- La **medición**, mediante la aplicación de **pruebas diagnósticas**, primero del estado actual del problema de investigación y posteriormente de la solidez del conocimiento y el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

La **NOVEDAD CIENTÍFICA** se expresa en dos niveles de importancia:

El **aporte teórico principal** lo constituye el ser la primera investigación (al menos en Cuba) donde, en el contexto de la enseñanza de una ciencia particular, se conjugan presupuestos teóricos del enfoque histórico-cultural y la PCPI, enriqueciendo así la teoría en Matemática Educativa, al describirse un tipo particular de enfoque sistémico no recogido en la literatura: ***la resolución de clases de problemas mediante la variación de los instrumentos de solución.***

En otro nivel de importancia, también hay **aporte teórico**, al:

- Revelarse el ***desempeño en la resolución de problemas*** como un indicador del desarrollo (en el sentido vigotskiano) alcanzado por el sujeto.
- Ampliarse el Sistema Básico de habilidades con las HGM: ***comparar, aproximar, optimizar y resolver***, fundamentándose la importancia de su formación en el contexto de la Enseñanza de la Matemática.
- Presentarse una organización sistémica de la GA (del plano y del espacio), no recogida en la literatura, la cual se basa en las transformaciones geométricas.
- Revelarse nuevas características de los enfoques estructural-funcional y genético no recogidas en la literatura especializada, las cuales brindan más información teórica tanto para el diseño como para la organización del proceso de asimilación.

La **significación práctica** de la investigación se concreta en:

- La presentación de múltiples descripciones sistémicas de los contenidos de las asignaturas matemáticas de 1^{er} Año en Ciencias Técnicas, las cuales proporcionan a los profesores de los niveles Medio y Superior un conjunto de pautas metodológicas que le permiten a los mismos escoger con flexibilidad el tipo de estructuración del contenido que mejor se avenga a los objetivos y contenido del programa que enseña.
- Que se presenta, el estudio de los elementos de GA del plano y del espacio, necesarios para Ciencias Técnicas, no como tema aparte, como es tradicional, sino integrado sistémicamente al estudio de las funciones.

- Que se fundamenta la necesidad de mantener y darle mayor seguimiento en los programas de la Enseñanza General al estudio de las transformaciones geométricas.

Capítulo I

Estado actual de la enseñanza y las investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos

La enseñanza de la Matemática en Ciencias Técnicas en Cuba

A partir del 1^{er} Congreso del Partido (1975) se hizo una revisión profunda, entre otros rubros, del desarrollo educacional en nuestro país, valorándose el nivel alcanzado y trazándose nuevas metas, reflejadas en las Tesis y Resoluciones del mismo.

Como un resultado directo de este proceso se confeccionaron los Planes de Estudio “A” que entraron en vigor en el curso 1977-78. Se elaboraron libros de textos, con una estructura didáctica que respondieran a las necesidades del momento, tanto por su enfoque dirigido hacia las Ciencias Técnicas, como para responder a una cada vez mayor matrícula en la modalidad de Cursos para Trabajadores, entre otros requerimientos. Se puso énfasis en la preparación pedagógica de los docentes de Matemática, muchos de los cuales habían sido o eran Alumnos Ayudantes, ingenieros o matemáticos sin ninguna formación en este sentido.

Un segundo hito en este proceso de perfeccionamiento, lo constituyó la elaboración de los Planes de Estudio “B”, los que comienzan a implantarse en el curso 1982-83. En ellos se le prestó más atención al documento modelo del especialista y a su proceso de elaboración. Se promueve la elaboración y precisión de los objetivos de enseñanza hasta el nivel de asignatura y temas, a partir del principio de derivación de los objetivos, lo que conllevó a una mayor sistematización de los contenidos. La evaluación se hizo más sistemática y se concretó en evaluaciones frecuentes, parciales y final. Al menos en el ISPJAE, centro rector de las Ciencias Técnicas en los CES, la capacitación de los docentes fue dirigida hacia la elevación del nivel pedagógico de los docentes e incluso a que la gran masa de profesores egresados de los institutos superiores pedagógicos que ingresaron, continuaran estudios en la ~~Licenciatura~~ en Matemática como complemento de sus estudios de pregrado.

Los Planes “B” trajeron consigo también una uniformidad, que si bien coyunturalmente podría ser ventajosa, pues los docentes podrían impartir clases de Matemática en cualquier especialidad, fuera cual fuese su formación, se podrían elevar los niveles de trabajo metodológico simultáneamente en todas las disciplinas y finalmente elevar el nivel en la preparación de los futuros ingenieros, al tener un mismo rasero todas las especialidades (libros de textos comunes e igual nivel matemático a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, incluida las evaluaciones), no se lograba resolver deficiencias en los estudiantes

relacionadas con la formación de sus capacidades intelectuales y, entre otros, los métodos de enseñanza no estaban a la altura de los objetivos planteados en los modelos de especialistas. En el plano del diseño hubo sin dudas un avance respecto al período anterior. Su trascendencia en el plano del proceso no fue tan significativa, continuó por los cánones tradicionales.

Una de las características de los años finales del Plan “B” fue el “proceso de matematización o rigorismo” de la enseñanza de la Matemática (al menos en el ISPJAE). Este proceso se caracterizó por no tomar en cuenta, consecuentemente, los objetivos de la enseñanza y propender a una “elevación del nivel matemático” de los futuros ingenieros, lo cual produjo una introducción cada vez mayor de contenidos (definiciones, teoremas, ejemplos “patológicos”) propios de la Licenciatura en Matemática. Como una consecuencia de este proceso salieron a la luz los libros de Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable y Cálculo Diferencial de funciones de varias variables. Debe reconocerse que este proceso contribuyó a elevar el nivel de docentes y de rigor de algunos contenidos que estaban necesitados de ello; sin embargo, atiborró los programas de contenidos (conocimientos + habilidades) en detrimento de las necesidades reales de la formación de ingenieros y del tiempo necesario de asimilación de los mismos.

En el curso 1990-91, se implantan los Planes de Estudio “C” en los cuales se pretendía resolver una serie de limitaciones de los planes anteriores. Si bien el propósito principal era la formación de un profesional de perfil amplio y la vuelta de página de la especialización, característica de las etapas anteriores, a nivel de las disciplinas básicas la orientación fue la de la atención a las características particulares de cada carrera, la vinculación con el perfil, el tener en cuenta el modelo del profesional y la desagregación de objetivos por Años a la hora de elaborar los objetivos y determinar los contenidos de disciplinas y asignaturas. Se rompió la uniformidad y se estimuló la articulación. Hubo libertad para el diseño e incluso la selección de la literatura básica. Se impulsó la capacitación pedagógica de funcionarios y docentes. Se llamó a la utilización de los métodos activos de enseñanza y a la elevación del trabajo independiente de los estudiantes, tanto por la reducción del número de horas de clases teóricas como de la autopreparación y tareas extraclases. Se planteó como una necesidad inmanente el uso de la computación en la enseñanza.

Sin dudas, el movimiento de perfeccionamiento e investigaciones pedagógicas producido al calor de la asesoría de la psicóloga soviética N.F. Talízina y sus colaboradores y el papel que comenzó a jugar el CEPES dentro del MES como uno de los abanderados de este proceso, influyó tanto en la concepción como en la implantación de los nuevos planes.

Al coincidir el inicio Plan “C” con el “período especial” impidió que se concretaran muchas de las pretensiones que aparecían en su concepción. Asimismo, las investigaciones pedagógicas se vieron igualmente afectadas por la falta de recursos y tiempo de permanencia de los estudiantes en el CES.

Caracterización del problema de investigación

Desde siempre se ha reconocido la dificultad que presentan la mayoría de las personas ante la resolución de problemas matemáticos, de ahí la creencia de que la Matemática es una disciplina difícil y que sólo pocos logran tener éxito en ella. Este es un fenómeno universal, como puede encontrarse en abundante literatura. Sin embargo, la enseñanza de la resolución de problemas no había estado anteriormente como ahora, en el centro de la atención de investigadores y docentes.

El propio desarrollo de las Ciencias de la Educación, en particular de la Psicología de la Enseñanza; la desilusión causada por las últimas corrientes en la enseñanza de la Matemática, o sea, la llamada “matemática moderna” en los 60’s y el “retorno al dominio de las técnicas básicas” que le sucedió (Ver Guzmán, 1985; Schoenfeld, 1985c); la presencia cada vez mayor de los recursos informáticos en toda la sociedad y la “posibilidad real” de introducirlos en los ámbitos educativos; la aparición de nuevas ramas de la Matemática y nuevos métodos y modelos para resolver viejos y nuevos problemas (Ver Delgado, 1996d), así como el hecho de que la vida laboral de un profesional demandante de la Matemática se desarrollará en un ambiente científico y tecnológico cada vez más cambiante y competitivo, conducen a la conclusión de **que la enseñanza de la resolución de problemas es una necesidad de primer orden** y más aún, es la característica principal de la Enseñanza de la Matemática en este final de siglo y previsiblemente del futuro inmediato.

Los resultados alcanzados por diferentes corrientes psicológicas, en particular la TA en el marco del enfoque histórico-cultural y la PCPI en las últimas dos décadas hacen posible que se proponga como objetivo alcanzable, la enseñanza de la resolución de problemas.

Debe destacarse que la Educación Matemática ⁷ en el mundo, al menos hasta mediados de los 80’s, carecía de líneas de investigación y soporte teórico en torno a la enseñanza de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1983 citado por Santos, 1994, pág. 31)

Durante muchos años las metodologías y los diseños han estado inspirados por la experiencia y por las concepciones que, sobre las matemáticas, poseían los educadores. Han existido intentos de implementar en

el aula la enseñanza de la resolución de problemas. Santos Trigo describe que en muchos países “*En la enseñanza de la Matemática, las ideas de Polya empezaron a implantarse significativamente alrededor de los ochentas. Las estrategias heurísticas como dibujar diagramas, buscar submetas, considerar casos particulares, y resolver problemas más simples, se consideraban como parte esencial en la instrucción matemática*” (1994, pág. 18).

Sin embargo, los resultados de este tipo de instrucción no mostraron una diferencia notable en el aprovechamiento matemático de los estudiantes, pues a decir de Begle (1979) “*Esfuerzos simplistas para mejorar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas no serán suficientes*”⁸

Por su parte, en Cuba, un movimiento análogo se abrió paso, primero bajo la influencia de la escuela alemana (RDA) de Didáctica de la Matemática y en particular de la labor de los asesores del Ministerio de Educación (Horst Müller y otros), y posteriormente, a partir de los departamentos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática de los institutos superiores pedagógicos.

En la Educación Superior, tanto en Cuba como en otros países, no se produjo ningún movimiento en esta dirección, salvo experiencias aisladas.

Pero el valor no lo tiene la enseñanza de la resolución de problemas por sí misma, sino que ella presupone, en el sujeto que es capaz de tener un desempeño satisfactorio en dicha actividad, el poseer un conocimiento “bien estructurado”⁹, el dominio de ciertas habilidades matemáticas¹⁰, el poseer un pensamiento productivo, si no creativo, y el poseer una independencia cognoscitiva, entre otras características deseables en la formación de un futuro profesional demandante de la Matemática.

Los esfuerzos en Psicología y en Educación Matemática se han ido complementando en los últimos años en el mundo, basta citar la celebración anual de los PME (Psychology of Mathematical Education) a nivel regional y del seminario organizado por el IMIPAE (Área de Educación del Ayuntamiento de Barcelona) y el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Barcelona sobre el tema **Psicología y Didácticas** en mayo de 1992.¹¹

Por otra parte, la presencia cada vez mayor de calculadoras y computadoras personales (PC) en toda la vida moderna, motiva que el quehacer pedagógico no pueda sustraerse de ellas y que se hagan obsoletos

⁷ También suele emplearse el término Didáctica de la Matemática (Francia, Alemania, España, Cuba y otros) y ahora más recientemente Matemática Educativa en el contexto latinoamericano.

⁸ Citado por Santos, 1994, pág.18

⁹ En el sentido de Greeno, 1978b

¹⁰ Las del Sistema Básico (Hernández, 1989) y otras.

determinados conocimientos y habilidades a los que hoy se les dedican considerables esfuerzos para su formación. En su lugar se podría dedicar más tiempo al tratamiento de los conceptos y sus significados y a la formación y/o desarrollo de habilidades de mayor de generalidad (Delgado, 1995a).

Concuerdo con los doctores L.Campistrous y C. Rizo (1992) en que *“es posible disminuir el tiempo que se dedica a esas destrezas; no prescindir de ellas, pero no hacerlas objeto de largas horas de práctica. Reducir su enseñanza a la comprensión de las ideas básicas y la realización de ejemplos simples. De esa forma se puede liberar un tiempo considerable y destinarlo a la profundización de otros aspectos”*. Uno de esos aspectos debe ser la enseñanza de la resolución de problemas.

La aparición en el mercado de productos con cada vez mayores posibilidades (DERIVE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, etc.) y la “posibilidad real” de adquirirlos, obliga ya al cambio, a pesar de que estos no respondan plenamente a las necesidades de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, *“la esfera de la enseñanza carece de preparación para asimilarlas”* (Talízina, 1994, pág.118)

A todas luces, la introducción del recurso informático en la enseñanza trae consigo múltiples ventajas, a saber: como *medio de enseñanza*, como *medio de aprendizaje* y como *medio de investigación y resolución de problemas reales* por el estudiante.

Debido a sus ventajas, habrá que resolver desde el punto de vista psicológico y didáctico cómo emplear el mismo en la enseñanza de la Matemática, tomando en cuenta las regularidades psicológicas del proceso de aprendizaje y el control por el profesor de la marcha de este proceso; hay que determinar hasta qué punto su uso contribuye a un aprendizaje significativo, en qué proporciones deberán combinarse el uso del lápiz y el papel y el trabajo con calculadoras y PC, qué contenidos habrá que renovar, entre otros problemas. El sólo empleo de este recurso no asegura ahorro de tiempo académico y un desarrollo, en el sentido vigotskiano, en los estudiantes.

Este problema debe ser atendido por los investigadores cubanos, aún cuando no parezca inmediato el momento en que se pueda contar con los medios de cómputo deseables para la clase de Matemática.

En resumen, la utilización del recurso informático en la enseñanza de la Matemática es un hecho y consecuentemente hay que cambiar lo que se enseña y cómo se enseña, ha llegado el momento de ir desplazando el centro de atención del cálculo y la graficación a mano al razonamiento matemático (lógico, heurístico, metacognitivo); del estudiante como eficiente calculador al estudiante como ***inteligente resolutor de problemas***. En tal dirección se dirigieron los esfuerzos recogidos en la presente Tesis.

¹¹ Ver Coll, 1993

No obstante lo anterior, no existe holgura en el tiempo académico para dedicárselo a los propósitos más elevados citados anteriormente, pues surge la necesidad, cada vez más apremiante de introducir nuevos contenidos en los currículos (NCTM, 1989; Wehzelburger, 1993 entre otros), como resultado del surgimiento de nuevas teorías y métodos matemáticos, los cuales hacen obsoletos algunos de los que año tras año se enseñan en las aulas. Esto marca una agudización, en el momento actual, de la distancia ciencia-escuela.

Desde el punto de vista epistemológico, el enfoque de ver la Matemática sólo como una ciencia deductiva y exacta (como la ve el positivismo lógico) ha ido cediendo lugar a otro que también considera su arista experimental (Wehzelburger, 1993) y que reconoce que los nuevos avances pueden cambiar las concepciones e ideas que se tenían por las comunidades científicas anteriores.

A la vez surge una contradicción entre los principios de optimización y problemicidad de la enseñanza: optimizar el tiempo académico versus enseñar a pensar, a resolver problemas. Esta contradicción sólo es soluble si entre otras cosas, se concibieran *formas nuevas de organización de los contenidos*, cuestión en la cual esta Tesis también centra su atención.

Existen por demás, disímiles contradicciones no abordadas, pero un análisis detallado de ello desborda los propósitos de esta Tesis. Por otra parte, se le dedica epígrafe aparte a los presupuestos psicológicos debido al importante peso específico que tienen en ella.

La enseñanza de la resolución de problemas

La resolución de problemas es consustancial a la propia existencia del hombre como ser racional. Una vez que el *homo sapiens* se erige sobre el resto del reino animal, la propia vida le impone encontrar soluciones a los disímiles problemas que le planteaba la supervivencia misma.

Sin embargo, no fue hasta bastante tiempo después que el hombre se plantea la resolución de problemas como objeto de estudio en sí mismo, tanto en los planos epistemológico, como psicológico y pedagógico. Es precisamente en estos dos últimos planos y concretado al caso de la resolución de problemas matemáticos que se expondrán los principales hitos de esta historia, aunque difícilmente pudieran ser separado esos tres planos.

En mi consideración la historia de la enseñanza de la resolución de problemas en Matemática puede dividirse en tres grandes momentos divididos por dos años que han marcado hitos: **1945** con la salida del conocido libro **How to solve it** (1945) de profesor y matemático húngaro George Polya y **1980** al dejar de

ser la resolución de problemas un asunto de psicólogos y educadores individuales y declararse como objetivo de enseñanza.

Desde la antigüedad hasta 1945

A falta de referencias anteriores, pudiera considerarse a Sócrates como el precursor de la enseñanza a través de la resolución de problemas. Las referencias que han llegado de él a través de Demócrito y Platón, evidencian que Sócrates era un convencido de que la discusión problémica con su interlocutor, el planteamiento de situaciones que provocaran un esfuerzo intenso en la búsqueda de argumentaciones, promovería un aprendizaje significativo (en el sentido de Ausubel, 1983) en sus alumnos.

Aunque entre los más destacados matemáticos y pensadores griegos posteriores a Sócrates (Platón, Euclides, Pappus, entre otros) estuvieron presentes las ideas de la Heurística, no se avanzó mucho en este terreno durante los siguientes 2000 años.

El próximo hito lo marca el matemático y filósofo francés R.Descartes (1596-1650), en sus aportaciones a la Heurística a través de su "*Regulae ad Directionem Ingenii*", obra inconclusa que pretendió escribir en tres tomos, incluso de mayor importancia que su publicado *Discours de la Méthode*.¹² Asimismo, el alemán G.W.Leibnitz (1646-1716) también se propuso la "matematización" del mundo, proyectó escribir un "Arte de la invención", pero no lo llevó a vías de hecho.

Debe destacarse la labor pedagógica del matemático suizo L.Euler (1707-1783), quien "*prefería instruir a sus alumnos con la pequeña satisfacción de sorprenderlos*" (Condorcet según Polya, 1965)

Ya a principios del siglo XIX, el matemático y lógico de origen checo Bernardo Bolzano (1781-1848), en su libro *Wissenschaftslehre* dirigido a la Lógica, dedicó una extensa parte a la Heurística, haciendo una recopilación de la obra de los pensadores que le antecedieron.

En 1908 sale a la luz la obra del matemático francés Henry Poincaré (1854-1912) "Mathematical Creation" (versión en inglés, 1913) y posteriormente la del psicólogo G. Wallas "The Art of Thought" (1926), en el cual se describen cuatro fases en la resolución de problemas, a saber de: saturación, incubación, inspiración y verificación, coincidiendo en muchos aspectos con Poincaré¹³; también vio la luz el libro de Polya & Szegö *Aufgaben und Lehrsätze auf der Analysis I* (1925) donde se exponen algunas ideas sobre Heurística.

¹² Para más detalle, ver Schoenfeld, 1987.

¹³ Ver Schoenfeld, 1987

Sin embargo, en general en el terreno educacional no se desarrollaron programas de enseñanza de Matemática que incluyeran la instrucción heurística de los educandos.

De 1945 hasta 1980

Es en 1945 cuando aparecen los libros de dos matemáticos destacados de la época: el "An essay on the psychology of invention in the mathematical field" de Jacques Hadamard (1865-1963) y el "How to solve it" de G. Polya, siendo éste último de mayor trascendencia y divulgación, sobre todo en décadas posteriores.

En esta obra Polya plasmó su experiencia como matemático y profesor, en la resolución de problemas. Es en este libro donde expone las conocidas cuatro fases que aparecen en el proceso de resolución, a saber: *comprensión del problema, concepción de un plan de solución, ejecución de dicho plan y examen de la solución obtenida* (tanto desde el punto retrospectivo como prospectivo).

Pero también 1945 es un año donde cobran un protagonismo significativo las ideas de los psicólogos de la Gestalt y aparecen los trabajos "Productive Thinking" de Max Wertheimer y "On Problem Solving" de Karl Duncker. La Psicología de la Gestalt enfrenta el asociacionismo imperante a principios de siglo y aborda la temática de la estructuración del conocimiento y, por tanto, asume la resolución de problemas, destacando el papel significativo de la representación que posee el sujeto que resuelve, a partir de las condiciones e información que brinda el problema, lo cual le facilitaría o dificultaría la resolución del mismo. Pensaban que se podían estudiar las *formas* (gestalts), las representaciones que el hombre establecía sobre las cosas y con ello la tesis de que la posibilidad de resolver un problema pasaba por la forma en que estuvieran aprehendidas en el sujeto las partes componentes del mismo. El fracaso en la resolución de problemas era justificado por la existencia de un *set* rígido e inapropiado que puede estar causado por la experiencia previa o la forma en que se expresan las instrucciones del problema.¹⁴

Posteriormente Polya escribe el "Mathematical and Plausible Reasoning" (1954) y el "Mathematical Discovery" (1962 y 1965) donde se concretan toda una serie de ideas sobre la importancia y la posibilidad real de poner en práctica una verdadera instrucción heurística.

En la psicología cognitiva moderna surge la llamada "*inteligencia artificial*" que estudia los procesos cognitivos mediante la simulación por computadoras. La fabricación de los primeros ordenadores y la

¹⁴ Para una visión panorámica de los trabajos de los psicólogos de la Gestalt, en torno a la estructuración del conocimiento matemático pueden consultarse L.Resnick & W.Ford, 1990 y Mayer, R, 1983.

elaboración de programas generales de resolución de problemas (p.e. Ernest y Newell, 1969)¹⁵ incentivan estas investigaciones, pero esas experiencias no están en la dirección de esta Tesis.

Los psicólogos cognitivos del procesamiento de la información describieron la resolución de problemas como una interacción entre el “sistema de procesamiento de la información” del sujeto y un “ambiente de la tarea” tal como lo describe el experimentador. La resolución del problema transcurre como una búsqueda, dirigida por el objetivo, a través del “espacio del problema” que es el universo de posibles estados en la solución de la tarea: estado inicial, estados intermedios y estado final.

Debe destacarse que *“El primer gran esfuerzo para mejorar el rendimiento en resolución de problemas de estudiantes universitarios fue realizado por Bloom y Broder (1950) en la Universidad de Chicago”* (Mayer, 1983, p.382) los cuales hicieron contribuciones fundamentales en este terreno *“al poner el énfasis sobre el proceso más que sobre el producto, el refinamiento de las técnicas de «pensar en voz alta» y el descubrimiento de que para resolver con éxito un problema en un campo dado son necesarios tanto los procedimientos generales como un conocimiento específico”* (Mayer, 1983, p. 387). También se describen los cursos de M.F.Rubinstein (1975, 1980) *“Patterns of Problem Solving”* en la asignatura Engineering II de la Universidad de California en Los Ángeles¹⁶.

En la arena internacional, aún en 1978 se debatía sobre el fracaso de las *“matemáticas modernas”* lo que aparece registrado en el informe *“Change in Mathematics Education Since the Late 1950’s—Ideas and realizations”* de la ICMI (Comisión Internacional de Educación Matemática) y según refiere Schoenfeld (1985c) no aparece el término “resolución de problemas”, al menos en el sentido aquí asumido. Dicho informe contiene artículos sobre las tendencias en la enseñanza de las matemáticas en diferentes países de los cinco continentes. En su conjunto, constituyen una muestra notable aunque no representativa, pues no recoge la situación en otros importantes escenarios escolares como la URSS, RFA, RDA, Hungría, China y Japón.

En el ICME-4 (4^{to} Congreso Internacional de Educación Matemática, Berkeley, 1980) sólo se desarrolló una sesión dedicada a esta temática y bajo la categoría *“Aspectos poco comunes de los planes de estudio”*, lo cual evidencia que aún para esa fecha no estaba situada en el centro de la atención, para la inmensa mayoría de los países del mundo, la enseñanza de la resolución de problemas.

Parece ser que es en los EE.UU. donde primero se dedica atención, entre los investigadores en Educación Matemática, a la necesidad de dar un vuelco en la enseñanza de la Matemática hacia la resolución de

¹⁵ Para más información, consultar Mayer, 1983.

problemas, pues el primer reporte aparece con una declaración del National Council of Supervisors of Mathematics de los EE.UU. (1977) de que aprender a resolver problemas es la razón principal del estudio de las matemáticas. Sin embargo, a partir de la recomendación hecha por el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) de los EE.UU. en su *Agenda for Action* (1980) de que en los 80's la resolución de problemas debía ser el centro de la atención de las matemáticas escolares, es que realmente comienza a tomarse en cuenta por investigadores y docentes la necesidad de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, se estudia la obra de Polya y comienzan investigaciones desde diferentes ópticas de las ciencias psicopedagógicas ¹⁷.

Posterior a 1980 hasta la fecha

Cuando el ICME-5 se reunió en Australia en agosto de 1984, la resolución de problemas apareció por primera vez como uno de los principales temas de estos congresos. A partir de ese momento en todos los foros importantes sobre enseñanza de la Matemática (ICME, PME, Reuniones Interamericanas de Educación Matemática, Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa, etc.) la temática de la enseñanza de la resolución de problemas ocupa un lugar cimero, existiendo muchos investigadores dedicados a encontrar vías y métodos para mejorar el desempeño de los estudiantes en esta actividad a los diferentes niveles.

En la literatura se refieren diferentes investigaciones y experiencias dedicadas a la resolución de problemas y en general a la necesidad de *enseñar a pensar*, que abordan esta problemática desde los enfoques de las operaciones cognitivas (R.Feuerstein, H.J.Klausmeier, etc.); de orientación heurística (M.F.Rubinstein, A.Schoenfeld, E. De Bono, etc.); del pensamiento por medio del lenguaje y la manipulación de símbolos, del pensamiento formal y del llamado pensar sobre el pensamiento.¹⁸

El NCTM de EE.UU. dedicó en sus Estándares Curriculares (1989) un capítulo a la resolución de problemas. Entre las muchas las investigaciones reportadas en este país sobre esta temática, se destacan las de A.Schoenfeld (Universidad de California en Berkeley) y el *Function Group* que él encabeza.

En 1985 aparece el libro de A.Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, en el cual, al igual que en otros muchos trabajos del autor, se recogen sus ideas y experiencias, así como sus consideraciones sobre las ideas de Polya y la posibilidad real de enseñar a los estudiantes a resolver problemas matemáticos. Deben destacarse entre sus aportes, el considerar, no sólo el uso de heurísticas, sino de un análisis de cuatro

¹⁶ Ver (Mayer, 1983, p. 395)

¹⁷ Para más información, consultar Schoenfeld, 1985c.

categorías que están presentes en la resolución de problemas, a saber: los recursos cognitivos (resources), los recursos heurísticos (heuristics), los recursos metacognitivos (control) y el sistema de creencias (belief system) del sujeto que resuelve el problema (Ver Schoenfeld, 1985a y 1985b). El sistema de creencias del sujeto (respecto a sí mismo, al contenido del problema y al entorno de la tarea) juega un papel fundamental en el momento en que la persona asume el problema y realiza una *valoración inicial* del mismo como acuña Labarrere (1994).

En México se reportan también muchos trabajos, fundamentalmente del Dpto. de Matemática Educativa del CINVESTAV, entre los que se destacan los de Luz M. Santos Trigo. Además, deben destacarse los trabajos del Club de Matemáticas “Wilfredo Massieu” del IPN.

De la ex-Unión Soviética se refieren los trabajos de L.M.Fridman, P.Ya.Galperin, L.L.Gurova, N.A.Menchinskaya, Ya.Panomariov, I.N.Savonko, V.K.Zarotski y otros ¹⁹.

De Cuba se refieren los trabajos de P.Rico, G.Martínez y O.Valera y se destacan particularmente las investigaciones realizadas desde 1980 por el psicólogo A.F.Labarrere en el nivel primario de enseñanza en cuanto al estudio de las dificultades de los niños en la resolución de problemas, basadas principalmente en el enfoque histórico-cultural.

Por otra parte, se asumieron y enriquecieron en Cuba los trabajos de la escuela alemana (RDA) de Metodología de la Enseñanza de la Matemática en el contexto de las matemáticas escolares. Profesores como Hörst Müller (asesor) y S.Hernández, H.Santana, S.Ballester, B.Almeida, entre otros de los institutos superiores pedagógicos, conciben y defienden un sistema de recursos heurísticos que deben abordarse durante la propia enseñanza de la Matemática. Para la resolución de problemas establecen un programa heurístico general.

También se cultivó la Enseñanza Problémica en la Enseñanza de la Matemática, pero sólo se han reportado con trascendencia los trabajos del P.Torres (1993) en las matemáticas de nivel medio. En la enseñanza primaria no se han reportado trabajos de significación.

Situación actual en la Educación Superior cubana

Actualmente en los institutos pedagógicos de Cuba se continúa trabajando en la dirección marcada por la escuela alemana antes referida y se aboga por la instrucción heurística (Arango. C y otros, 1989) de los estudiantes. Los profesores de la asignatura Metodología de la Enseñanza de la Matemática son abanderados

¹⁸ Para más información, consultar Nickerson y otros, 1990 de la bibliografía.

en este empeño, sin embargo, en nuestra opinión, su implementación en la práctica áulica de la escuela cubana dista de las intenciones y esfuerzos de sus promotores.

En las carreras de la Licenciatura en Matemática, por su parte, se tiene implementada en la disciplina integradora, los Seminarios de Problemas que se desarrollan a lo largo de los cinco años de la carrera y que se proponen integrar los conocimientos y habilidades que en cada curso van adquiriendo los estudiantes en las restantes asignaturas del currículo. También se reportan las investigaciones de los licenciados Roberto Núñez (Universidad de la Habana) e Isabel Alonso (Universidad de Oriente), basadas en la Enseñanza Problemática.

En Ciencias Técnicas un paso de avance lo constituyó el reconocimiento de que una de las habilidades a formar en los estudiantes debía ser la *modelación*, hecho que aparece recogido en casi todos los planes de estudio y programas. Este propósito, registrado como objetivo de enseñanza, ha encauzado los esfuerzos hacia incrementar la cantidad de problemas de aplicación en todas las asignaturas²⁰ y en la selección de problemas, también de aplicación, para lograr o perfeccionar la articulación interdisciplinaria en la carrera.²¹

Estos esfuerzos (empíricos) se han concentrado en la elevación del rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas típicos y de “keyword”. Para ello se han utilizado mejor los libros de texto y se han elaborado colecciones de ejercicios extraídos de las materias específicas de la carrera. Esto constituye un paso de avance, pues anteriormente se daba más peso al desarrollo de habilidades de cálculo.

No obstante, en la dirección de enfrentar a los estudiantes a problemas, aquellos para los que de antemano no se conoce la vía de solución, no ha habido avances significativos. La mayor dificultad de los problemas presentados a los estudiantes radica en la modelación de los mismos, buscando “nuevos” campos de aplicación respecto a los clásicos problemas de los libros de texto. Como regla, toda asignatura termina al finalizar su último tema; no existe un tiempo posterior para la sistematización de los contenidos de la misma²² y presentar a los estudiantes diversos problemas, tanto de keyword como aquellos en que no aparezca a primeras luces la tipicidad del problema o la vía de solución. Pero aún cuando este tiempo existiera, sólo sería un paliativo, pues en pocas actividades no se puede lograr el desarrollo de habilidades, si no se ha trabajado sistemáticamente en este propósito.

¹⁹ Citados por Labarrere, 1994.

²⁰ Por ejemplo, en el Departamento de Matemática General de la Facultad de Ingeniería Industrial del ISPJAE, se ha manifestado esta tendencia en casi todas las asignaturas en los últimos 8 años.

²¹ Ver Fernández de Alaíza, B. (1997).

²² En el mejor de los casos se planifican dos o tres seminarios integradores, donde los estudiantes trabajan por equipos o individualmente y los debaten con la presencia y guía del profesor.

Puede considerarse como el avance más significativo en este terreno, para carreras de ingeniería, aunque explícitamente no fuera declarado así, los resultados alcanzados por la Dra. T.Rodríguez (1991), al proponerse la formación de la habilidad *modelar* y vincularla con el diseño de temas, asignaturas y disciplinas. El carácter abarcador que le otorga a la misma, la hace asumir dentro de su sistema operatorio, las conocidas fases de Polya, desbordando así el alcance que de común se da a esta habilidad y acometer un proceso más general, la resolución de problemas. También en otras tesis doctorales (p.e. Martínez, F. (1995) y Calderón, R. (1997)) y de Maestrías se asume la importancia de la asimilación de la habilidad modelar en la formación de ingenieros.

Por su parte el Grupo β de Investigación en Educación Matemática, adscrito al MES, investiga en diferentes líneas relacionadas con la resolución de problemas, tanto en concebir programas de asignaturas a partir de la resolución sistemática, y propiciar en torno a ellas el aprendizaje de conocimientos y habilidades, como en la búsqueda de un acercamiento y enriquecimiento entre las posiciones de la Enseñanza Problemática, los presupuestos teóricos que la PCPI, los trabajos de A. Schoenfeld en el *Problem Solving* y el enfoque histórico-cultural, que se mantiene como referente teórico básico.

La Psicología y la Enseñanza de la Matemática

Este siglo fue testigo de un hecho inédito, la atención por la Psicología de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje, hecho que lejos de ser casual, ha mostrado el importante papel que desempeña ésta en las investigaciones sobre el proceso educativo, con su propio objeto de estudio y sin suplantarse los roles que en ello tienen asignado - por sólo citar ejemplos - la Pedagogía, la Didáctica General y las didácticas particulares.

La enseñanza de la Matemática no quedó fuera del círculo de interés de los psicólogos, por el contrario, constituyó un importante centro de atención. Muchos prestigiosos psicólogos (Thorndike, Duncker, Katona, Wertheimer, Piaget, Bruner, Skemp, Glaser, Talízina y otros) han incursionado en el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y en consecuencia muchas corrientes psicológicas han dedicado tiempo y esfuerzos a esclarecer los mecanismos del aprendizaje y la forma en que las personas organizan y movilizan sus conocimientos.

Por una parte, la Matemática es una ciencia altamente estructurada lo cual permite develar su organización interna y los modos de actuación de los que la desarrollan; quizás por eso ha tenido tanta atención por los psicólogos, en la creencia de que una vez desentrañados los mecanismos del pensamiento matemático podrían encontrarse aplicaciones pertinentes para otros campos del saber humano.

Por otra parte, generación tras generación se reconocen las dificultades que presentan muchas personas en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual parece a primera vista contradictorio debido a su carácter lógico y estructurado. Quiere decir entonces, que es en la transmisión donde está el principal problema.

Es quizá el conductismo la corriente que más honda huella ha dejado en la forma tradicional de enseñar, pues aún hoy, aunque ya no aséptica a incorporar los aportes de otras escuelas psicológicas, la enseñanza en la mayoría de las aulas tiene un referente conductista. Sin embargo, cada vez con mayor fuerza se dirigen investigaciones con el objetivo de lograr una enseñanza diferente, acorde con las exigencias de los tiempos modernos y aunque aún existen diferencias esenciales entre las distintas escuelas, se observa un acercamiento en sus presupuestos.

La enseñanza dirigida a las estructuras

En el conocido libro *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* (Resnick, L. & W. Ford, 1990), se dedica toda la segunda parte a la Matemática como comprensión conceptual y como resolución de problemas, haciéndose una discusión exhaustiva de los intentos de diferentes teorías psicológicas en torno a la enseñanza de las estructuras.

En tanto, la estructuración del contenido ocupa un lugar fundamental en la Tesis, es necesario hacer unas breves reflexiones sobre qué sentido se le ha otorgado por las distintas escuelas psicológicas a la estructuración del conocimiento.

En primer lugar es necesario distinguir entre estructura matemática y estructura psicológica. La primera depende del contenido matemático en cuestión, es decir, la forma en que el conjunto de conocimientos matemáticos se organiza y se interrelaciona internamente.

Sobre ellas dice L. Resnick *"Todo intento de enseñar las estructuras matemáticas debe tener en cuenta la capacidad intelectual de los alumnos. Esto nos lleva a considerar las características de los procesos de pensamiento de las personas, procesos que le permiten aprehender las estructuras matemáticas y pensar en forma matemática"*. (pág.126)

La estructura psicológica ha tenido disímiles interpretaciones, destacándose las dadas por los psicólogos de la Gestalt, por la epistemología genética de Piaget y por la PCPI.

Los psicólogos de la Gestalt consideran la estructura como la tendencia de la percepción y el pensamiento a organizarse en agregados funcionales que dominan los elementos objetivos de la experiencia y que determinan sus interrelaciones. Esto puede ser un elemento inhibitorio o facilitador en la resolución de problemas.

En tanto, Piaget se centra en las estructuras lógicas de la mente humana que determinan la comprensión por parte de las personas de los sucesos y manipulaciones matemáticas. Se cree que el desarrollo gradual de dichas estructuras depende de las interacciones activas del alumno con el entorno. *“En las obras de Piaget, se utiliza el término estructura para describir la organización de la experiencia por parte de un estudiante activo”* (Resnick, 1990, pág. 228).

La definición de estructura psicológica adoptada por la PCPI proviene de los teóricos de la memoria semántica que “describen el conocimiento humano como estructurado y organizado. Se parecen en ese sentido al modelo giestáltico de la mente humana. Pero en otros aspectos, los modelos actuales de procesamiento de la información parecen más similares a las concepciones asociacionistas.” (...) “Cuando los teóricos de la memoria semántica hablan de cómo se organiza la información, tienden a hacerlo en términos de “estructuras del conocimiento” específicas” (Resnick, 1990, pág.235-236). *Así, se puede decir que para la PCPI una estructura cognitiva es un conjunto organizado de conocimientos, asociaciones, proposiciones o relaciones que el sujeto puede aplicar en la resolución de problemas o modificar ante las nuevas informaciones que procesa.*

Si se asume una de las líneas de investigación llevadas a cabo por la PCPI en el cuestionamiento de las estrategias generales en la resolución de problemas, o sea, la del estudio de expertos y novatos, se verá, tras la identificación de los mecanismos de recuperación de información, tras la utilización y conformación de estructuras de conocimientos, tras el acceso a procedimientos, etc., la ejecución competente del experto. Este, a diferencia del novato:

- a)** posee una disposición amplia de **engramas** (Rumelhart, 1981)²³ en el área donde es experto,
- b)** posee un acceso rápido a los mismos,
- c)** conforma de forma rápida y abreviada la o las vías de solución de determinado problema,
- d)** emplea menos tiempo total para la resolución correcta de problemas, aunque demore más al principio, o sea, en el momento de orientación.

En esas condiciones, según Glaser (1988), la dificultad de los novatos para resolver problemas se puede atribuir en gran medida, a la insuficiencia de su base de conocimientos y no a limitaciones de sus capacidades de

²³ Citado por R.Glaser en “Cognitive Science and Education” in International Social Science. Journal, 40(1); pp.21-44. 1988.

procesamiento. Para el experto, las inferencias tienen su origen en el contexto de la estructura del conocimiento previamente adquirida.

El estudio de los componentes del conocimiento necesarios para una actuación competente, abre nuevas perspectivas a la enseñanza y complementa el énfasis puesto en el intento de comprender la naturaleza del aprendizaje. (Hernández, 1995)

H.Hernández (1995) refiere que “para comprender los procesos que intervienen en la resolución de problemas, resulta importante investigar las características de las estructuras del conocimiento y su organización, como resultado de la experiencia y del aprendizaje”- así - “... la idea del engrama nos sugiere estimular el establecimiento de estructuras modificables de información en los estudiantes y, además entrenarlos en la dinámica de enriquecer y recuperar el contenido de estas estructuras”.

Más adelante aclara que “cuando nos referimos a la organización del conocimiento, no nos referimos sólo a la posibilidad que se desarrolla en el estudiante de representarse el sistema conceptual determinado, sino de recuperar esa información para aplicarla en problemas o tareas concretas que requieran no sólo una operatoria, sino conexiones inteligentes con otra información acumulada dentro de ese sistema conceptual o fuera de él”.

Así, H.Hernández (1995) introduce la idea de los **nodos cognitivos** como un recurso didáctico que contribuye a organizar el conocimiento de los estudiantes. Su definición más acabada (1997) es: “El *Nodo Cognitivo* es un punto de acumulación de información en torno a un concepto o a una habilidad determinada. Es información que se establece de manera consciente por el profesor en el estudiante y se hace perdurable, toda vez que es activable: para ser aplicado, para ser modificado (enriquecido o transformado), para ser recuperado, para conectarse con otro nodo”.

A la información que se agrupa en torno a un nodo conceptual o concepto organizador es a lo que Larkin (1977) llama **chunk** (bloque); ahora, tras la definición de H.Hernández se puede apreciar además, que una habilidad también agrupa información en torno a ella. La forma en que esté organizada dicha información: su coherencia interna, su grado de conexión con otras cosas que sepa la persona y la correspondencia de la representación con el material que se debe comprender, constituyen indicadores de un conocimiento “bien estructurado”, según los términos de J.G.Greeno (1978b)

Continúa diciendo H.Hernández que “No se trata sólo de que el profesor haga las conexiones matemáticas o induzca a una organización del conocimiento, se trata de dinamizar esas estructuras (...) Se trata de mantener un diálogo permanente del profesor con los estudiantes y entre los estudiantes”.

A partir de los trabajos iniciales de H.Hernández (1993) se hicieron investigaciones en asignaturas tan disímiles como Álgebra Abstracta (Llivina, 1997), Geometría (González, M. 1998), Funciones de variable compleja (De la Cruz & Delgado, 1994) y Cálculo Diferencial (Delgado, 1996); los dos primeros en carreras pedagógicas y los segundos en carreras de ingeniería, todos con resultados satisfactorios, lo que demuestra la factibilidad y fiabilidad de este recurso en diferentes contextos.

En el marco de la TA, los trabajos de P.Ya.Galperin, N.F.Talízina y seguidores siguieron otra dirección: lograr en el estudiante conocimientos de mayor calidad a partir de que las características de las acciones, asociadas a dichos conocimientos, alcanzaran los niveles deseados. Entre las características que constituyen indicadores de la calidad de la asimilación se encuentran: la forma, el dominio, la conciencia, la generalización, la solidez, etc.²⁴

Para ello, partiendo de un momento inicial de motivación, el cual facilita el aprendizaje, el estudiante debería elaborar de forma independiente bases de orientación completas y generalizadas para las acciones a asimilar. Estas deberían transitar por determinadas etapas en las cuales irían evolucionando las características citadas hasta los niveles deseados.

Así, una acción transcurre, según su forma, por los planos material, verbal y mental y se convierte en acción mental cuando el sujeto no necesita de apoyo externo para la orientación, ejecución y control (lo que no equivale a que no se auxilie de determinados recursos heurísticos e instrumentos de cálculo), pues ya la ha asimilado y almacenado como información en su mente de determinado modo.

La acción asimilada, indica un determinado nivel de dominio de la misma y por ende de una determinada automatización a la hora de actuar. Asociada a ese proceso de automatización se lleva a cabo un proceso de reducción consciente de su aparato operatorio, lo que posibilita que se aprehenda, de modo eficiente en la mente, como acción dominada por el sujeto, o sea, como habilidad.

La generalización es un indicador de la posibilidad que tiene la persona de ejecutar tareas o resolver problemas en una esfera determinada respecto a las teóricamente posibles, o sea, indica una relación entre las posibilidades subjetivas y objetivas de actuación y la misma depende de diferentes factores, entre los que

están la forma en que se asimilen los nuevos contenidos - y por tanto, en que se elabore la base de orientación correspondiente - y las tareas que resuelva durante todo el proceso de asimilación de los conocimientos.

La conciencia está relacionada con la posibilidad de la persona de justificar cada una de las operaciones que realiza en el momento de la actividad.

Finalmente la solidez, es un indicador del recuerdo, de la permanencia en la memoria, al paso del tiempo de los conocimientos asimilados. Esta característica depende en mucho, de los niveles alcanzados en muchas de las otras características, por lo cual constituye un indicador “fuerte” de la calidad del aprendizaje.

La TA considera que las bases de orientación del III Tipo, necesariamente son sistémicas y por ello, investigadoras como Z.A.Réshetova, N.G.Sálmína, la propia N.F.Talízina y otros investigadores soviéticos y cubanos dedicaron muchas investigaciones a encontrar modos de estructuración de los contenidos de estudio que propendieran a la elaboración de bases de orientación con esas características. De ahí surgió la concepción de estructurar los programas de las asignaturas con enfoques sistémicos que respondieran a los presupuestos emanados de la Teoría y a las propias características del contenido particular a asimilar.

En tanto la estructuración de los contenidos es elemento medular de esta Tesis y en aras de hacer más fluida la discusión en torno a los antecedentes, las consideraciones y propuestas del autor, se prefirió abordarlo en más detalle en el Capítulo II.

Acercamiento entre los presupuestos de la PCPI y la TA.

Ya desde 1976, en el Symposium on the Psychological Bases of Programmed Learning de la UNESCO (Tbilisi, URSS, 1976), se atisbó el fin de la teoría de la "caja negra" y empezó a plantearse el problema de "investigar los procesos que se encuentran entre el estímulo y la reacción, a desarrollar en el proceso de enseñanza las capacidades cognoscitivas, el saber estudiar" (Talízina, 1988, pág. 320); o sea, que se produjo un acercamiento entre los objetivos y el objeto de investigación de la llamada psicología cognitiva, predominante en Norteamérica y el enfoque histórico-cultural desarrollado de forma más extensiva en la URSS y los países socialistas de Europa del Este y que sigue cultivándose con éxito en Cuba. Un reconocimiento del valor científico de este último, constituyó un marco propiciatorio de acercamiento.

También debe decirse que el enfoque histórico-cultural, casi desconocido en el llamado “mundo occidental”, durante todo el período del “socialismo real”, está siendo “redescubierto” y asumido, quizás bajo nombres más “suaves” (p.e. sociocultural) por investigadores occidentales y se manifiesta un cierto

²⁴ Para más información sobre las características de las acciones, puede consultarse Talízina, 1988.

eclecticismo en algunas concepciones psicopedagógicas (p.e. los trabajos de César Coll, las investigaciones del Grupo de Valencia, etc.). Otra arista del problema es considerar al enfoque histórico-cultural como una metapsicología cognitiva (Morenza, 1997) y que puedan interpretarse a partir de ella otros enfoques psicológicos.

La PCPI coincide así con otras corrientes psicológicas que le antecedieron y que en alguna medida le sirven de fuentes (asociacionismo, psicología de la Gestalt, trabajos de Bruner y Dienes, métodos de la epistemología genética de Piaget) en varios aspectos, entre los cuales debe destacarse el que se debía enseñar matemáticas a los estudiantes a través de *“métodos que se centrasen en una comprensión de los métodos matemáticos, clarificando ya la estructura del contenido, ya las interrelaciones entre los elementos de un problema dado”*. (Resnick, 1985, pág.233)

A continuación la propia autora destaca que: *“Bruner, Wertheimer y Piaget estarían de acuerdo sin dudas en que las representaciones con base conceptual de los principios y problemas matemáticos facilitan la ejecución matemática”*- sin embargo - *“ninguna investigación... [anterior] ... ha explorado con detalle la naturaleza de las representaciones conceptuales. Tampoco ha explorado el desarrollo de la comprensión necesaria para construirlas y utilizarlas”*.

Así, aunque la PCPI ha seguido muchas direcciones, existe coincidencia, con la TA, al conceder importancia a la necesidad de determinar cómo las personas aprenden, cómo organizan su conocimiento, al tratar de salvar la frontera entre los enfoques de cálculo y conceptuales de las matemáticas.

Un momento culminante del acercamiento entre la TA y la PCPI fue alcanzado en el I Taller sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas (Universidad de la Habana, 1992) con la presencia del psicólogo estadounidense Robert Glaser, representante destacado de una de las corrientes de la PCPI.

En su Conferencia Magistral, Glaser planteaba que toda teoría moderna de enseñanza debe asumir tres presupuestos medulares: el estudiante como centro del proceso, la organización del conocimiento del mismo y la resolución de problemas.

Según H.Hernández *“el primero, es un elemento de coincidencia con el enfoque vigotskiano. Tanto Glaser (?) como Schoenfeld (1987) reconocen que las ideas de Vigotsky ofrecen un sustento teórico apropiado tanto para el aprendizaje grupal, como para los mecanismos de auto-rregulación, de ahí que coincidamos en un proceso centrado en el estudiante ...”*

Mas adelante apuntaba que la resolución de problemas *“es objetivo central de nuestro trabajo, por cuanto no se trata de aprender definiciones, enunciados y demostraciones de teoremas y procedimientos para resolver*

ejercicios a la medida, sino se trata de desarrollar estrategias generales que permitan al estudiante buscar bases de orientación certeras para el abordaje efectivo de problemas” (Hernández, 1997).

La presente Tesis centrará la atención en la relación entre los dos últimos aspectos: entre la estructuración del conocimiento, a partir de una adecuada organización de los contenidos, y la resolución de problemas, asumiendo que eso sólo es realmente importante si se logra, no sólo un aprendizaje de calidad en los estudiantes, sino más que ello, un desarrollo en los mismos., para lo cual el enfoque histórico-cultural nos brinda un adecuado referente teórico.

El enfoque histórico-cultural en la Psicología, iniciado L.S.Vigotsky y enriquecido por sus seguidores, así como la TA, aparecida en su propio desarrollo, tras los aportes de A.N.Leóntiev, P.Ya.Galperin, V.V.Davídov, N.F.Talízina y otros, han demostrado que sólo el aprendizaje deja una huella profunda en el individuo, cuando se efectúa en un ambiente de actividad. Se entiende por ello, cuando en el proceso de aprendizaje, el actuar va regido por los motivos del sujeto y éste es capaz de operar de forma independiente y consciente, con los conocimientos asimilados.

Asimismo, para el profesor, el proceso de asimilación de la nueva acción por el estudiante, no debe transcurrir bajo el principio de la "caja negra", sino que debe decursar por varias etapas (motivacional, de elaboración de la base de orientación, material o materializada, verbal y mental), con fronteras mejor delimitadas unas que otras, pero necesarias para lograr cualidades superiores en el conocimiento asimilado.

La PCPI, en cualquiera de sus tendencias actuales, focaliza la resolución de problemas (problem solving) como una de sus metas fundamentales, por cuanto existe una relación directa entre la posibilidad que tenga un sujeto de resolver eficientemente problemas y la calidad de su aprendizaje anterior. Por ello H.Hernández (1997) dice que *“siempre que un estudiante pueda resolver efectivamente un problema es porque tiene una cierta organización del conocimiento, pero el recíproco no se cumple, de ahí que se trate de inducir a una estructuración del conocimiento eficiente”*. Sin embargo, la PCPI no ha brindado aún, a diferencia de la TA, un modelo del proceso enseñanza-aprendizaje.

Entre los objetivos de esta Tesis está hacer una integración de los presupuestos teóricos de la TA y la PCPI en torno a la estructuración del conocimiento, con el propósito de utilizar los puntos de contacto entre ambas, ya que la primera ha demostrado su efectividad en la enseñanza de las Matemáticas Superiores en Cuba y que la segunda focaliza explícitamente el aprendizaje de y a través de la resolución de problemas.

Algunos puntos de contacto entre la PCPI y la TA

En aras de contribuir a la solución del problema de investigación surgió la hipótesis de que era posible, y por demás necesario, combinar de forma armónica los resultados alcanzados en la estructuración sistémica de los contenidos y el desarrollo de las habilidades matemáticas con el enfrentamiento de los estudiantes a problemas.

En el propósito de conciliar resultados de la TA y la PCPI, se determinó que existen varios puntos de contacto que se avenían con las ideas iniciales de la investigación. Entre ellos se encuentran los siguientes:

Ambas teorías abogan por un desplazamiento del centro de gravedad del proceso docente de la enseñanza hacia el aprendizaje, o sea, que el proceso de asimilación de los conocimientos debe recibir más atención que la que se brinda en la enseñanza tradicional.

Ambas teorías abogan porque el proceso de asimilación de los conocimientos puede y debe ser transparente, a diferencia del conductismo. Así, si el aprendizaje es el deseado, ese proceso debe revelar el tránsito de un estadio en que el estudiante no posee los conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para resolver problemas de determinado tipo, a otro en que los posee y, por tanto, se acerca al comportamiento típico de aquellas personas que son capaces de resolverlos eficiente y eficazmente. En términos de la PCPI ese proceso es el llamado tránsito de novato – experto. El enfoque histórico-cultural considera ese proceso como el movimiento hacia el desarrollo, el cual se manifiesta como un desplazamiento continuo de la llamada “zona de desarrollo próximo”, es decir, mediante la reducción de la cantidad de problemas, en determinada área, que el sujeto realiza con ayuda de otros porque ya puede resolverlos de forma independiente.

En la importancia de los objetivos de enseñanza y su formulación también hay coincidencia, pues ambas critican los objetivos conductuales, asignándoles a los mismos un carácter más integrador, que involucren lo instructivo y lo educativo. En sus proyecciones pedagógicas, los exponentes que más han destacado el papel rector que les corresponde en el proceso docente son: por la PCPI, el estadounidense J.G.Greeno y por la TA, la rusa N.F.Talízina (1984) y el cubano R.Corrál (1991).

Ambas teorías abogan por que es posible y necesaria la formación de un conocimiento estructurado en el estudiante. La PCPI en voz de J.G.Greeno (citado por Resnick, 1990) defiende

que el conocimiento a formar en el novato debe ser “bien estructurado”, precisando que sus principales indicadores son los grados de integración, conexión y correspondencia. La TA plantea que la formación por el estudiante de bases de orientación del III tipo apunta al carácter sistémico, sólido, reflexivo y generalizado del conocimiento.

La TA defiende la estructuración sistémica de los contenidos de estudio en torno a determinados conceptos formadores de sistemas (invariantes y células), los cuales constituyen núcleos de información relevante para recuperar información y utilizarla en la resolución de tareas y problemas. A partir de la concepción de los nodos cognitivos como recurso didáctico, bajo la óptica de la PCPI, se defiende también el carácter sistémico de toda organización de contenidos concebida como una red semántica.

Así, H.Hernández refiere que “como quiera que no siempre es factible para el profesor el revelar, identificar o apropiarse a corto plazo de una célula generadora o de un invariante o de reglas y unidades básicas que le permitan conformar un sistema de conocimientos y conexiones a trabajar con el estudiante” (Hernández, 1997), surge la idea de encontrar vías alternativas a los conocidos enfoques sistémicos en la literatura de la TA, que propendieran también a un conocimiento estructurado de los estudiantes para que estos tuvieran mayores posibilidades en el proceso de resolución de problemas.

Por tanto, el nodo cognitivo está presente en cada una de las formas de estructuración de los contenidos que defiende la TA; o sea, que todo sistema cognoscitivo (estructural funcional, genético, de reglas y unidades ²⁵ u otros teóricamente posibles) puede ser considerado como una red de asociaciones, en el sentido de los teóricos de la memoria semántica, que no están organizadas necesariamente en jerarquías estrictas, a partir de las cuales se va conformando un sistema de conocimientos, habilidades, procedimientos, valores, etc.

El reconocimiento de patrones, en tanto característica de los expertos, es reconocido como primordial por ambas teorías. La PCPI lo contextualiza en el marco de la resolución de problemas. La TA lo identifica en el contexto de la asimilación de los conocimientos como sistemas.

²⁵ Ver epígrafe del mismo nombre en el Capítulo II

En consecuencia, ambas teorías, aunque privilegian el aprendizaje, no desconocen el importante papel que tiene el profesor en su calidad de experto. La PCPI presenta al profesor como experto en la resolución de problemas ante sus alumnos ²⁶. La TA considera al profesor, experto en dos sentidos: como buen conocedor de la materia que imparte y como organizador y director del proceso de asimilación de los conocimientos de sus estudiantes, para lo cual el primero es condición necesaria.

Ante el reconocimiento de la importancia del carácter social del hombre en el proceso de aprendizaje, ambas teorías reconocen las ventajas que tiene el aprendizaje en pequeños grupos. Manifestaciones de ello son las investigaciones hechas en el llamado Cooperative learning y las que se han realizado, dirigidas por el CEPES, con la aplicación de métodos grupales sobre la base del enfoque histórico-cultural.

Si bien la PCPI concede mucha importancia a la enseñanza de la resolución de problemas, la TA reconoce el papel que tiene el uso de métodos problémicos durante el proceso de asimilación de los conocimientos, fundamentalmente en las primeras etapas del mismo.

Ambas teorías destacan la importancia que tiene que el sujeto aprenda a controlar su actividad. La PCPI identifica el autocontrol como recurso metacognitivo imprescindible en el proceso de resolución de problemas, mientras que la TA lo reconoce como componente fundamental de toda acción humana.

En el propio desarrollo de las investigaciones se llegó a la conclusión de que además de medir como indicadores de la calidad del aprendizaje, los grados de generalización, reflexión y solidez de las habilidades y conocimientos alcanzados por el estudiante, era necesario medir el *desempeño* del mismo en la resolución de problemas, como un indicador del desarrollo (completado como diría Vigotsky) por el estudiante.

²⁶ Schoenfeld (1985 d)

Conclusiones del Capítulo

En el Capítulo se caracterizó el estado actual de la enseñanza de la Matemática en Ciencias Técnicas en Cuba, la cual es el resultado de la evolución de las ideas y experiencias contrastadas en la práctica pedagógica de las diferentes CES del país a lo largo de los Planes de Estudio A, B y C.

Se caracterizó el Problema de Investigación desde diferentes ángulos. Se fundamentó cómo la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos emerge como una necesidad histórica, después de un milenario camino seguido por pensadores, matemáticos, psicólogos, y profesores que intentaron escudriñar sus particularidades e implementarla en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; y cómo constituye la característica principal de la Enseñanza de la Matemática en el presente y el futuro inmediato.

Se fundamentó cómo, con el uso creciente e irrenunciable de la computación en la enseñanza, se hace necesaria una redefinición de los objetivos de planes y programas y se deberá cambiar la concepción del estudiante como eficiente calculador al estudiante como inteligente resolutor de problemas.

Las investigaciones en Psicología y en Didáctica de la Matemática han ido tomando esta dirección en las últimas décadas, lo cual posibilita, en el momento actual, implementar los resultados del plano investigativo en el contexto áulico.

Además, se refiere cómo en la Educación Superior cubana se han tomado cada vez más en cuenta los resultados de las investigaciones en Psicología de la Enseñanza. Sin embargo, la enseñanza de la resolución de problemas, fundamentalmente en Ciencias Técnicas, no es aún un tema prioritario en las investigaciones. Asimismo, deberán enriquecerse los resultados obtenidos con los aportes de otras investigaciones en el resto del mundo.

La carencia de un referente teórico único que permitiera afrontar el Problema de Investigación conllevó a la búsqueda de puntos de contacto entre la TA (enfoque histórico-cultural) y la PCPI en tanto que a la relación *estructuración de los contenidos – resolución de problemas* convergen ambas teorías. El Cuadro # 2 resume las fuentes teóricas de la presente Tesis.

Se describe cómo las investigaciones anteriores basadas en la TA no atendieron suficientemente la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, aunque crearon las bases y se enfatiza que el enfoque histórico-cultural, en virtud de su concepción sobre el *desarrollo*, constituye un marco teórico propicio para encarar las investigaciones sobre la enseñanza de la resolución de problemas. Por su parte la PCPI ha abordado más exhaustivamente la resolución de problemas, vista en el tránsito novato-experto y aboga también por la estructuración del conocimiento del sujeto resolutor.

Una adecuada estructuración de los contenidos parece ser condición necesaria para que los estudiantes aprendan a resolver problemas, en tanto ésta debe propender a una estructuración de su conocimiento, que posibilite un acceso rápido a la información pertinente, el reconocimiento de patrones y el empleo de determinadas estrategias y habilidades heurísticas y metacognitivas.

Capítulo II

Fundamentación teórica de la investigación

La estructuración de los contenidos de estudio

Aunque mucho se ha hablado del enfoque sistémico en la estructuración de los contenidos de las asignaturas, fundamentalmente a partir de conocerse en Cuba los trabajos de las psicólogas rusas Z.A.Réshetova, N.F.Talízina y N.G.Sálmína, es necesario hacer algunas consideraciones sobre la vigencia para el presente y el futuro del mismo e incluso apuntar algunos postulados de la Teoría General de Sistemas (TGS), teoría sobre la cual se basan este tipo de investigaciones en el terreno psicopedagógico, los cuales permitirán profundizar en sus presupuestos y en la búsqueda y sustentación de nuevas formas de organización de los contenidos.

La estructuración sistémica: un imperativo de la época.

Pudiera considerarse que el siglo XIX es el primero donde en determinadas teorías científicas se aborda el objeto de estudio como un sistema. Así, pudieran citarse como precursores los trabajos del inglés Charles Darwin en su Teoría sobre la Evolución de las Especies, los del ruso D.I.Mendeleiev en la elaboración de su Tabla Periódica de los Elementos Químicos y los del alemán K.Marx en su Teoría económico-política del Capitalismo.

Sin embargo, no fue hasta principios de este siglo, con las propuestas del biólogo Ludwing von Bertalanffy y los posteriores trabajos de M.Mesarovic, L.Zadeh, S. Beer, etc., en los años 40-50, que en las distintas ciencias se vio con más claridad, la necesidad de enfocar sus objetos de estudio como sistema. A decir de Z.A.Réshetova “*Las ideas de la sistematicidad se convierten en el aspecto más importante de las teorías científicas fundamentales y de toda la concepción contemporánea del mundo*” (Réshetova, 1988)

Por otra parte, ya en los Estándares Curriculares del NCTM de los Estados Unidos, (1989) se recoge como uno de los objetivos de enseñanza más importantes para los 90's, la necesidad de propender a que el estudiante identifique y establezca “*conexiones matemáticas*” en el contenido objeto de estudio (Capítulo XIV), lo cual da una medida de la importancia que concede a las ideas de la sistematicidad.

Claro está, no deben ser identificados la existencia de conexiones con la existencia de un sistema, pues lo primero no implica necesariamente lo segundo. Pues por ejemplo Stanford Beer, uno de los principales exponentes de la TGS, ofrece una sencilla definición de sistema, al considerar a este como “*cualquier conjunto de ítems que estén dinámicamente relacionados*” (Beer, 1969), sin embargo, la

característica de estar “dinámicamente relacionados” destaca la idea no sólo de existencia de conexiones sino también de movimiento.

Una definición más elaborada ofrece el brasileño Idalberto Chiavenato, el cual considera, al igual que Beer que un sistema es “*un conjunto de elementos dinámicamente relacionados*”, pero “*formando una actividad para alcanzar un objetivo, operando sobre datos (...), en una referencia dada de tiempo y suministrando información ...*” (Chiavenato, 1981). Otra definición análoga brinda el cubano Orlando Carnota (1983).

Por otra parte, autores soviéticos, como por ejemplo V.Kuzmin y V.Sadovski, los cuales abordan los enfoques sistémicos desde una óptica filosófica, plantean que toda organización sistémica debe cumplir los principios de integridad, jerarquía y multiplicidad de descripciones.²⁷

Si se toma en cuenta lo dicho por Z.A.Réshetova de que “*La solución exitosa y creadora, fundamentada y responsable de muchos problemas de la actividad profesional en cualquier esfera de trabajo, depende ahora de la capacidad de pensar de forma sistémica*” (Réshetova, 1988), se infiere que en el proceso de enseñanza-aprendizaje no se puede pasar por alto la característica distintiva del pensamiento científico de la época actual, si es que se pretende formar hombres a la altura de su tiempo.

La Revolución Científico-Técnica (RCT) que presenciamos y que no tuvo precedentes comparables en la historia, por su carácter continuo y por el volumen y trascendencia de los descubrimientos científicos y tecnológicos, trae consigo no sólo el crecimiento exponencial de la información y la necesidad de comunicación fluida entre profesionales y científicos para lograr la necesaria actualización, ni el distanciamiento acelerado ciencia-escuela, ni el envejecimiento rápido de los recursos tecnológicos y humanos, sino que, además, se añade éste descrito por Réshetova: la ciencia, la técnica, la economía necesitan un profesional con un claro pensamiento sistémico. Este profesional, como se ha dicho, tendrá una vida laboral activa de aproximadamente 30 años y, por tanto, va a vivir y trabajar en las condiciones de la RCT que caracterizó al siglo XX y previsiblemente a la próxima centuria.

Sin embargo, en sus propias palabras: “*la práctica existente en la enseñanza todavía no forma esta capacidad en los futuros especialistas. Y en esto consiste la contradicción fundamental entre el nivel contemporáneo del proceso científico-técnico y el nivel de pensamiento que se forma en el proceso de enseñanza*” (Réshetova, 1988).

Esta contradicción es otra faz del problema de la distancia ciencia-escuela, o sea, que el problema es de contenido y de forma: de contenido, porque el volumen de conocimientos que ha acumulado la ciencia hasta

la fecha es considerablemente superior al que se estudia en las instituciones educativas y de forma, porque el modo en que se enseña, y de hecho se aprende en las mismas, responde al esquema tradicional que *“conserva la lógica de la ciencia “clásica”, donde el procedimiento metodológico inicial es la reducción del objeto complejo a sus componentes elementales, y los tipos de nexos fundamentales son los de causa y efecto, de especie y género e histórico-cronológicos”* (Sálmina, 1984).

Aún, una característica de los programas de enseñanza de la Matemática en los cursos tradicionales es su linealidad, la exposición en serie de temas y unidades, que aún guardando relaciones entre sí, no les son debidamente destacadas al estudiante o éste no lo incorpora como un todo integrado, como un sistema. Estos programas se basan en un ordenamiento formal de los conceptos, relaciones y procedimientos agrupados en cuerpos de contenidos, concebidos como resultado de un proceso de formalización y estructuración, *“se inspiran en la lógica interna de la Matemática y en la incorporación de las nuevas ideas que se derivan de la propia evolución (piénsese en las «matemáticas modernas»)”* (Gómez, 1991).

La concepción tradicional, a veces enciclopédica, simula la organización en un archivo de innumerables compartimientos. Esta disposición es válida si se trata de conservar los resultados que en Matemática ha acopiado la Humanidad, pero no toma en cuenta las características psicológicas del aprendizaje, pues el modo de acceder una persona a la información almacenada en su cerebro, está asociado a otras regulaciones.

También surge el problema del tiempo necesario para la asimilación de los viejos y nuevos contenidos que se van incorporando a los programas, como ya se discutió anteriormente. Pero si bien se podría demostrar, por quienes diseñan los programas, que todos los contenidos son imprescindibles, en palabras de N.F.Talízina, *“de cualquier manera surge el problema de la optimización del contenido”* pues tanto la enseñanza como la sociedad *“están interesados en un sistema efectivo de enseñanza”*, cuyos indicadores de efectividad son: *“la profundidad de la asimilación, y cómo lograr que, sin una mayor inversión de tiempo, la enseñanza resulte sólida y fundamentada”* (Talízina, 1994, pág.53).

La concepción sistémica en la estructuración de los contenidos.

En tanto el conocimiento científico de nuestra época se caracteriza por abordar los objetos de su investigación como sistema (Réshetova, 1978), deberá concebirse, tanto el diseño de los contenidos (plano curricular) como la formación del propio conocimiento en la mente del estudiante (plano del aprendizaje) en forma sistémica, lo cual asegura, además, elevados índices de reflexión, generalización y solidez como se ha demostrado en investigaciones anteriores basadas en la TA.

²⁷ Ver Sadovski (1979) y Kuzmin (1979) en la bibliografía.

Precisamente, éste es uno de los aspectos en que coinciden ésta teoría y la PCPI, como se demostró en el Capítulo I, lo cual dicho en las palabras de H.Hernández (1993) puede concretarse en que se debe aspirar a que el conocimiento del individuo sea sistémico y no fraccionado, que guarde alguna lógica interna que le permita al sujeto recuperar, tener acceso rápido a la información que posee.

Una abundante literatura de autores soviéticos y cubanos abogan por la ventaja del enfoque sistémico a la hora de estructurar los contenidos de las asignaturas, creando con ello las bases para la ulterior estructuración, también sistémica, del conocimiento de los estudiantes. Los actuales retos que tiene la Enseñanza de la Matemática en todos los niveles, demandan soluciones como ésta.

Una vez esclarecidos los objetivos de la enseñanza para cada modelo de profesional, será necesario hacer una revisión de los contenidos de los programas, tanto en el sentido de **qué enseñar**, como de **cómo organizarlos** para que en un mismo tiempo lectivo puedan ser asimilados y se logre un aprendizaje significativo (en el sentido de D.Ausubel, 1983) y cualitativamente superior.

En esta Tesis se centrará la atención sobre todo, en un aspecto del **cómo organizarlos**, el que presenta la alternativa de la estructuración sistémica de los contenidos sobre la base de distintas variantes. Se tuvieron en cuenta experiencias anteriores y simultáneas a las del autor, basadas en la TA; se asimilaron aquellos presupuestos de la PCPI que son afines con ella y se buscaron similitudes y diferencias en los principios de construcción de distintos tipos de enfoques sistémicos de los contenidos.

La concepción sistémica y basada (hasta ahora) en la teoría del III tipo de orientación, se propone resolver los problemas citados de la enseñanza tradicional, pues se guía por las regularidades, por alcanzar un elevado grado de generalización en poco tiempo, por la no discretización de los conocimientos, por el estudio de sus conexiones y su integridad, por considerar los conceptos, relaciones y procedimientos particulares como manifestaciones de otros, los cuales una vez asimilados, se reflejarán fenoménicamente como resultado de la aplicación del principio general con ligeras variaciones.

Lo sistémico apunta a lo esencial en un amplio campo de conocimientos. Esta concepción espera que la huella que quede en el estudiante sea indeleble al paso del tiempo, así como que permita una adecuada transferencia dentro de determinados límites y produzca, como regla, una disminución del volumen del material y de los plazos de su enseñanza, la cual “*cuando estamos haciendo una aplicación ya masiva es, como promedio, del 30%.*” (Talízina, 1994, pág.68).

El enfoque sistémico puede, en el plano del diseño, concebirse desde el nivel de un tema hasta el de una disciplina. Las primeras investigaciones realizadas en la ex-Unión Soviética estuvieron básicamente dirigidas a revelar las regularidades dentro de un sistema de contenidos, basadas en la estructuración del III tipo de

orientación, tanto por la vía empírica como a través del método de análisis sistémico del objeto de estudio (Talízina, 1988, pág.104). Cuando se empleó la vía teórica de análisis y concepción sistémica del contenido se le dio en llamar enfoque **estructural-funcional**, sobre el cual se reportan en la literatura especializada numerosos trabajos de Z.A.Réshetova y otros.

Posteriormente se reportaron los trabajos de N.G.Sálmina y sus colaboradores (Sálmina, 1984), donde considera el enfoque estructural-funcional un tipo particular de enfoque sistémico y declara otra nueva concepción, la de tipo **genética**, planteando que la diferencia esencial está en el “*concepto formador*” del sistema y en el “*principio de construcción*” del mismo. En la citada publicación refiere otras investigaciones de N.F.Talízina, I.A.Volodárskaia y otros en la enseñanza de la lengua rusa y la Matemática Inicial en la URSS, los cuales los suscribe como bajo “*el tercer tipo de orientación y teoría*” sin clasificarlos en los tipos de enfoques sistémicos citados anteriormente.

En Cuba, las investigaciones hasta hoy reportadas estuvieron dirigidas a los tipos **estructural-funcional** y **genético**, incluso citados inicialmente no como dos tipos diferentes, sino como dos aspectos del enfoque sistémico (González, 1989)

La característica principal de cualesquiera de los enfoques citados es, que respecto a la forma tradicional de enseñanza, representan un salto cualitativamente superior de tratamiento metodológico y de posibilidad de una asimilación eficiente y sólida de los contenidos, pues a decir de Talízina (1988, pág.106), este tipo de orientación “*libera al hombre de la necesidad de estudiar cada fenómeno particular de la rama dada*”; así, el III tipo de orientación constituye “*el paso al nuevo modo de almacenamiento de la información*”, o sea, en vez de abordar una multitud de hechos particulares analizados a través de métodos también particulares, se da un método único de análisis con el cual se abordan algunos casos representativos del conjunto, en “*número preciso, necesario para la asimilación de este método*” para que posteriormente el estudiante construya de forma independiente, a partir de él, cualquier fenómeno del sistema dado. “*Este es un constructivismo de nuevo tipo. Cuando damos todo lo imprescindible y no hacemos una búsqueda empírica.*” (Talízina, 1994, pág.67)

A pesar de que la prestigiosa psicóloga N.F.Talízina no hace distinciones sobre los tipos de enfoques sistémicos y sólo distingue entre la búsqueda de regularidades (invariantes del sistema) hecha por la vía empírica o por el método de análisis sistémico (estructural) del objeto de estudio, el autor de esta Tesis se afilia a la distinción hecha por Sálmina y que otros investigadores cubanos han asumido (Hernández, 1989; Fraga, 1991, Hernández, R. & C. Rodríguez, 1992; Beltrán, 1992).

Hacer disquisiciones sobre si debe distinguirse o no entre los diferentes enfoques y profundizar en sus particularidades, ¿será realmente importante desde el punto de vista teórico y metodológico para el proceso

de enseñanza-aprendizaje?, o ¿no será un mero ejercicio intelectual sin mayor trascendencia para la práctica áulica?.

A continuación se hará un análisis de cada tipo particular de estructuración de los contenidos y responder a esas preguntas, fundamentando el punto de vista del autor al respecto.

1) Tipo estructural-funcional

En este tipo se describe el objeto en su totalidad, acabado, como en "sincronía" y se destaca en él la composición y la estructura que garantizan su funcionamiento en un sistema mayor, o la existencia estable en el medio circundante. En esta descripción el tipo de enlace principal es el estructural-funcional. La estructura funcional estable de cada nivel del sistema recibe el nombre de *invariante* del sistema.

En tanto el *invariante* es esencia, los objetos que aparecen como casos particulares de él son las manifestaciones fenoménicas de esa esencia. A decir de V.V.Davídov “*Conocer la esencia significa encontrar lo esencial como base, como fuente única de cierta variedad de fenómenos, y luego mostrar cómo esto general determina el surgimiento y la relación mutua de los fenómenos, o sea, la existencia de lo concreto*” (Davídov, 1972, pág. 311).

Z.A.Réshetova propone abordar el objeto complejo en su estado desarrollado desde el principio y explicar las leyes de funcionamiento del sistema y su estructura. Se citan en la literatura, las investigaciones de esta autora en un curso de Química General (Sálmira, 1984) donde se asume la *sustancia* como *invariante* del sistema; y en la formación de operadores de máquinas herramientas (Talízina, 1988, pág.102-105) donde se expone como *invariante* la estructura funcional formada por *la línea generatriz, la línea orientadora y la disposición de una respecto a la otra*. Como se observa, para Réshetova, tanto un concepto como una relación de varios elementos pueden constituir el *invariante* de un sistema, siempre que satisfagan las condiciones expuestas anteriormente.

Es importante destacar, que si bien el tipo estructural-funcional presupone la aplicación de un método de síntesis y del paso de lo abstracto a lo concreto, lo que se manifiesta en la deducción de los casos particulares o variantes (concreto) a partir de la esencia que representa el *invariante* (abstracto), en aras de optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, esto no significa que deba partirse a pies juntillas del objeto general y abstracto, toda vez que este enfoque sistémico se sustenta en la teoría de la orientación del III tipo, la cual exige la elaboración independiente de la base de orientación por los estudiantes.

Al respecto Talízina (1988, pág.106) refiere que “*no obstante, el alumno no encuentra por su cuenta lo universal (la esencia), sino que lo recibe del profesor como la base orientadora de su actividad. Analizando*

la variedad de fenómenos engendrada por lo universal (esencia), concibe lo universal” o en otras palabras *“el alumno asimila la esencia a través de los fenómenos”* los cuales aparecen ahora, no como objetos independientes de asimilación, sino como medios de asimilación de la esencia que los engendra, pero el número de estos objetos seleccionados por el profesor, representativos del conjunto, deben ser los estrictamente necesarios para la asimilación de la esencia y permitir que los restantes fenómenos del sistema considerado puedan ser obtenidos posteriormente por el estudiante de forma independiente.

Se puede inferir a partir de lo expresado por Z.A.Réshetova, N.F.Talízina y otros investigadores ex-soviéticos, que los mismos asumen, bajo la denominación de *invariante*, cualquier estructura de varias componentes que permanece presente y de forma estable en una multitud de casos particulares (considerados sus variantes). Consecuentemente con ello la propia N.F.Talízina (1994, pág.73) considera a la *célula generadora* como un caso particular de *invariante*.

Quizá por ello, el término *invariante* ha sido extensamente usado en la comunidad pedagógica cubana con diferentes acepciones por algunos investigadores, hablándose en unos casos de *invariante de conocimiento e invariante de habilidad* o por otros que tras cualquier regularidad han recurrido al empleo del término. En mi opinión deben establecerse límites en su definición y como reclama la propia Talízina fundamentarse en cada caso su empleo. Al respecto ella dice que *“el concepto de las invariantes tiene criterios objetivos y no es como a cada cual le parezca y no puede tener, cada persona, su propia invariante, porque hay que demostrar que en efecto, en realidad, esto es una invariante, que evidentemente puede generar todo el sistema de variantes. Si eso no lo puede satisfacer, entonces, realmente no es una invariante.”* (Talízina, 1994, pág.81)

En mi opinión la acepción anterior, que fue la primera y que aún defiende N.F.Talízina (1994), debiera considerarse una acepción en sentido amplio y no la que se emplea en el enfoque estructural-funcional, pues conduciría a que cualquier regularidad dentro de un cuerpo de contenidos, incluso de tipo procedimental, pudiera ser considerado como el *invariante* de dicho sistema, quedando de facto establecido el enfoque estructural-funcional como el enfoque sistémico por antonomasia, sin hacer distinción que también el principio de construcción de un sistema es otro rasgo que lo caracteriza y distingue. Por ello me adscribo a la concepción dada por Sálmina (1984) y que otros investigadores cubanos (Hernández, 1989 entre otros) también han asumido.

En el caso de las investigaciones desarrolladas en Cuba en la enseñanza de la Matemática, sobre la base del enfoque estructural-funcional pueden citarse las siguientes:

- H.Hernández (1989) propone la *integral definida* como *invariante* del Cálculo Integral y posteriormente R.Calderón (1995) lo experimenta durante años con resultados satisfactorios.
- T. Rodríguez (1991), por su parte declara, en la reestructuración de la disciplina Matemáticas Superiores para ingenieros militares, las *ecuaciones diferenciales* como *invariante* de la disciplina, concebida ésta como un sistema estructural-funcional y en cada asignatura integrante, los conceptos de límite, derivada, integral y serie.
- F.Martínez (1995), aunque no declara ningún concepto o estructura como *invariante* del sistema didáctico propuesto, adopta también el enfoque de tipo estructural-funcional en torno a la variación de las relaciones entre dos magnitudes en torno a un punto, abarcando así los conceptos de función, límite y derivada.

De cualquier forma, al menos en las investigaciones realizadas sobre la base de este tipo de enfoque en la enseñanza de la Matemática en Cuba, en todos los casos, se ha organizado un sistema de conocimientos y habilidades en torno a un concepto, el cual, por ser suficientemente general, encierra en sí la esencia de una multitud de conceptos de orden inferior y de fenómenos particulares.

Nota: Sobre el enfoque de tipo estructural-funcional puede encontrarse más información en Réshetova, 1978; Talízina, 1988, 1994; Sálmina, 1984; González, 1989; Hernández, 1989 y 1997; Rodríguez, 1991; Martínez, 1991 y Delgado, 1992.

Ante la necesidad de precisar el “concepto formador del sistema” (Sálmina, 1984) se definirá el término invariante en el sentido en que empleará en lo adelante.

Se llamará INVARIANTE a un concepto de orden superior respecto a una relativa amplia gama de conceptos subordinados que pudieran considerarse como casos particulares suyos, en el marco de un sistema estructural-funcional de contenidos, en tanto él representa una estructura estable (dentro de los límites del sistema), cuyas componentes al variar, permiten la deducción de dichos conceptos subordinados.

En nuestra consideración, todo investigador que escoja el tipo estructural-funcional para estructurar el contenido de un programa de estudio, debe ceñirse a las siguientes exigencias:

- Revelar **el invariante** (concepto formador del sistema).
- Destacar **lo invariante**, su estructura, la cual permanecerá inamovible ante cualquier transformación dentro del sistema.
- Destacar **lo variable**, aquellas características o elementos componentes susceptibles de ser variados, lo que permite su funcionamiento en el sistema, o sea, los que en virtud de sus combinaciones posibles se pueden deducir las *variantes*.

- Destacar **las variantes**, o sea, los casos o manifestaciones particulares del concepto *invariante*.

Obsérvese que el término *invariante* no aparece aquí en el sentido más amplio que le dan otros autores. Esto no es ocioso y considero que permitirá establecer diferencias con otras organizaciones sistémicas.

Es importante destacar que la formación del sistema sólo es posible, y esto no queda explícitamente dicho en la literatura, en virtud de que el *invariante*, en tanto estructura funcional, posee componentes susceptibles de variación (lo variable), los que al asumir “valores” dentro de determinado rango, determinan la extensión del sistema.

Dicha extensión quedará determinada en primer lugar por las propias características del *invariante* como concepto y en segundo lugar, por el alcance de los objetivos del programa. Por ello, programas de estudio análogos pudieran tener alcances diferentes y sustentarse como sistemas diferentes a partir del mismo concepto *invariante*.

En la construcción de un sistema de tipo estructural-funcional prima el principio heurístico de reducción, pues el método de estudio fundamental es el deductivo: a partir del invariante se deducen los demás objetos como variantes.

En el trabajo presentado en Sesión Científica del CEPES (octubre/1990) y posteriormente al Taller Científico-Metodológico convocado por el mismo centro (1991) titulado “Una variante de organización sistémica del Cálculo Diferencial” se argumentaban los conceptos de *límite por un conjunto*, *derivada direccional* y *error de interpolación local* como invariantes de determinados temas de la asignatura Matemática I (funciones, límite, continuidad, derivadas y aplicaciones de las derivadas; todo para funciones de una y varias variables).

Posteriormente, en el trabajo presentado al I Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas (CEPES-UH, 1992) se adicionaron como invariantes los conceptos de *función* y *extremo global*. Así, se concibió y llevó a experimento (curso 1991-92), basado en la TA, una concepción de dicha asignatura en torno a cinco invariantes, los cuales aparecen en el Anexo 10.

Algunos investigadores han sugerido que el concepto de límite pudiera considerarse un *invariante* del Análisis Matemático; otros lo han visto como *célula generadora*. En mi opinión, desde el punto de vista didáctico, no es conveniente considerarlo ni como lo uno ni como lo otro, en tanto, si bien es cierto que el límite es un concepto presente en los distintos contenidos del Análisis e incluso que él marca, al decir de algunos, la diferencia entre las Matemáticas Elementales y las Superiores; desde el punto de vista de la

enseñanza, él aparece solamente en los momentos de definición y análisis de ciertos conceptos y propiedades o como procedimiento para *comparar*, pero en la mayoría de los problemas se prescinde de su uso, utilizándose teoremas y procedimientos que hacen más viables los análisis y los cálculos. Es decir, una gran cantidad de conocimientos y habilidades del Análisis Matemático deben ser aprendidos y su nexo con el concepto de límite es solamente conceptual y no operativo (p.e. en el cálculo de integrales, en la resolución de ecuaciones diferenciales, etc.)

El *paso al límite* apareció en la asignatura Matemática I descrito como un procedimiento general que permite definir o analizar el cumplimiento de tal o cual propiedad. Considero que en esta función puede ser extendida al Cálculo Integral, al estudio de las Series, etc.

Con el uso del *paso al límite* y el *criterio de comparación* como instrumentos teóricos principales se desarrolló la asignatura, sistema didáctico que se rigió por un objetivo central: “*Analizar el comportamiento (propiedades locales y globales) de una función*”, pues este recogía en sí la esencia de para qué era necesario enseñar los contenidos a abordar en la misma, marcando claramente su alcance al no restringirse a funciones de determinado tipo ni a determinadas propiedades.

El considerar a la FUNCIÓN como el objeto de estudio fundamental de la asignatura y considerarla en sí misma como un sistema, donde sus propiedades locales y globales se relacionaban armónicamente, se correspondía, por una parte con la característica principal del método científico contemporáneo y por otra con las exigencias psicopedagógicas de lograr elevados niveles de generalización e integración en los contenidos asimilados.

Por falta de espacio no se puede explicar la metodología seguida para dicho estudio, en el cual se instruyó a los estudiantes de determinadas heurísticas y procedimientos generales como los de *comparación* y *paso al límite*.

En los Anexos 11-15 se exponen las fundamentaciones de cada uno de los *invariantes* antes citados. En el Capítulo III se discuten los resultados del experimento pedagógico realizado bajo esta concepción.

2) Tipo genético

En el enfoque sistémico de tipo genético se describe el objeto en su totalidad como resultado del desarrollo del elemento inicial del sistema, se describe éste como en "diacronía". Los tipos fundamentales de enlace son los genéticos y los de desarrollo, mientras que el concepto fundamental o formador del sistema es la *célula generadora*.

Este tipo, desarrollado inicialmente por N.G.Sálmina, fue desarrollado por primera vez en Matemática por la Dra. Herminia Hernández (1989) en el contexto de la asignatura Álgebra Lineal donde reveló el concepto de *combinación lineal*, en su calidad de forma existencial de los vectores de un espacio vectorial, como la *célula* de esta materia.

A partir de estos trabajos iniciales de H.Hernández, se reportaron en Cuba otros trabajos con esta concepción, a saber: la concepción de la Trigonometría en el nivel medio superior en el cual se declaró la *razón trigonométrica* como la *célula* generadora para esos contenidos (Fraga, 1991), la concepción del tema de Series, considerando el concepto de *sucesión* como *célula* por las profesoras Rosa M^a Hernández. y M^a Caridad Rodríguez (Hernández, R. & MC Rodríguez, 1992), así como la concepción por el autor, de las asignaturas Matemática I y II, considerando como *células*, la relación incremental, y la integral definida respectivamente (Delgado, 1994 y Delgado & Cepero, 1994a)

En la literatura especializada (Sálmina, 1984) se recogen cinco exigencias que debe cumplir un concepto como *célula* generadora de un sistema. La casi totalidad de los investigadores, al menos en Cuba, que han utilizado esta concepción en sus trabajos, no han fundamentado la validez de su propuesta a partir de estas exigencias. Quizá por las restricciones que imponen las mismas para la determinación de la *célula* o por la mención tardía de este enfoque por autores de prestigio como N.F.Talízina, quien por demás la considera como un caso particular de *invariante*, muchos investigadores hayan preferido la variante estructural-funcional en lugar de la genética.

Cierto es que la *célula generadora*, pudiera ser considerada como una cierta estructura que funciona, en tanto relación estable y con movimiento a lo largo de todo el sistema, sin embargo a diferencia del *invariante*, dicha estructura no siempre constituye un arquetipo para los restantes objetos integrantes; no se les puede considerar como casos particulares de un concepto de orden superior.

Para el diseñador, la identificación de la *célula* de un tema o asignatura, constituye un verdadero proceso de estudio e investigación teóricas, debido a lo complejo del proceso de revelación de una relación elemental que permita, mediante su “evolución”, el desarrollo del sistema, el cual debe funcionar de manera natural para profesores y estudiantes.

Para el estudiante, la identificación y trabajo con la *célula* constituye un momento de orientación, tanto en la construcción de nuevos objetos como en la búsqueda de la vía de solución de problemas a través de ella. La *célula* se encuentra, al menos en el caso de las experiencias en matemáticas, a la vez en su estado desarrollado, en la propia definición del objeto (modelación) y en su estado más simple, en el momento del cálculo. En ambos casos el conocimiento de la estructura de la *célula* y de las maneras de operar con ella,

permiten al estudiante utilizarla para construir bases de orientación del tercer tipo, tanto referidas a la definición de nuevos conceptos como de los procedimientos de cálculo más usuales e importantes.

La *célula* tiene la característica de que su evolución y desarrollo transcurren mediante la aplicación de los principios heurísticos de *analogía*, *generalización* y *reducción*. La formación de un sistema de tipo genético se rige por un principio de construcción diferente al del tipo estructural-funcional.

Esta variante de organización sistémica se acerca más a la forma de hacer matemática, o sea, de construcción de la ciencia por los matemáticos y es más cercana a los presupuestos de otras teorías psicopedagógicas modernas como la enseñanza problémica y la corrientes constructivistas, entre ellas la del cambio conceptual y metodológico (Gil, 1992; Pérez, R. & R. Gallego-Badillo, 1994).

Por estas razones los investigadores debieran ahondar más en esta variante haciendo nuevos aportes a su concepción e incluso "suavizando" algunas exigencias, en aras de concebir primero, una organización sistémica del contenido y posteriormente, de la estructura cognitiva del estudiante, basada en la construcción de nuevos conocimientos a partir de unos pocos elementos relacionados de forma simple, los cuales son susceptibles de ser variados.

Se puede analizar, por ejemplo, que H.Hernández (1989) utiliza no sólo la *célula* (combinación lineal) para construir la asignatura de Álgebra Lineal, sino que a ésta la provee de un *elemento operativo* (el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales) como apoyo a dicha *célula* para posibilitar su movimiento y desarrollo en el sistema, lo cual representa, en nuestra consideración, un elemento de novedad respecto a lo reportado por N.G.Sálmina. ¿Será esto una regularidad, al menos en la enseñanza de la Matemática, o será válido solamente en el Álgebra Lineal?. La respuesta a esta pregunta se abordará un poco más adelante, discutiéndose en el contexto de las experiencias desarrolladas en el Álgebra Lineal y el Análisis Matemático.

Nota: Sobre este tipo de enfoque sistémico puede encontrarse más información en Sálmina, 1984; Hernández, 1989; Fraga, 1991; Beltrán, 1992 y Delgado, 1996; citados en las referencias.

En nuestra consideración las exigencias que deben cumplirse para fundamentar la concepción genética de un programa de estudio son las siguientes:

- Revelar **la célula generadora** (concepto formador del sistema), concepto suficientemente elemental para el cual otros conceptos pueden ser considerados como resultados de su "evolución" o desarrollo.
- Fundamentar la validez de dicha revelación, tratando en lo posible de ajustarse a las cinco exigencias de Sálmina citadas anteriormente.

- Destacar **lo variable**, o sea aquellas características de los componentes de la *célula* susceptibles de ser variadas y que en virtud de sus combinaciones posibles se derivarán los objetos considerados como resultados de su “evolución”.
- Destacar **las formas** en que puede “evolucionar” la célula, dentro de los límites establecidos en el programa.
- Revelar **el elemento operativo** del sistema, o sea el método o conjunto de métodos de apoyo a la *célula* para posibilitar su movimiento y desarrollo en el mismo.

Está claro que sin la existencia de componentes *variables* en la *célula*, a pesar de su carácter de relación elemental, sería imposible su desarrollo para formar el sistema.

En el caso del diseño genético del Álgebra Lineal, donde se revela la *combinación lineal* como *célula*, se pueden considerar como elementos variables: el carácter fijo o arbitrario de los elementos del sistema de vectores considerado; el carácter conocido, incógnito o arbitrario de los escalares (coordenadas) que intervienen en la combinación lineal, y el carácter conocido o variable del vector del espacio vectorial resultante de la combinación lineal. Asimismo, aparecen dos *formas* básicas, contentivas de las disímiles situaciones en que se necesita del uso de una combinación lineal para definir un nuevo concepto o resolver un problema, a saber:

Si E, F son espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo $K \ni \lambda_i$; $A = \{x_i\}$ es un sistema de vectores contenido en E, ($i = 1, \dots, n$), x es un vector de E y f es una aplicación de E en F, entonces las dos *formas* básicas son:

$1) \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x$	Un vector del espacio E es combinación lineal de los vectores del sistema A
$2) f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$	La imagen por f de una combinación lineal de vectores de A es igual a la combinación lineal de las imágenes por f de esos vectores

Como *elemento operativo* del sistema se destaca el Método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, al cual le es intrínseco el trabajo con el concepto de combinación lineal. En el Anexo # 1 aparecen más detalladas estas consideraciones sobre el Álgebra Lineal.

Por otra parte, H.Hernández (1989) defiende el concepto de *integral definida* como *invariante* del Cálculo Integral; sin embargo éste pudiera ser también considerado como *célula generadora* del mismo, si se toma en cuenta el principio de construcción de tipo genético.

En el caso del diseño genético del Cálculo Integral, aparece la *integral definida* como *célula*, en tanto ella es la relación más simple (en el sentido de la integración) entre los elementos que forman su estructura, a saber: el *dominio* de integración, el *integrando* y el *elemento diferencial*, porque:

- el dominio de integración es el más simple posible: intervalo cerrado y acotado; geométricamente, un segmento de recta.
- el integrando es el más simple posible: una función real de una variable real,
- el elemento diferencial es el más simple posible: $dx = \Delta x$.
- el producto [integrando $\times$ elemento diferencial] constituye la forma diferencial más simple.

Se pueden considerar como elementos variables: la dimensión $R^n \supset D$ (D: dominio de integración), el número mínimo de coordenadas necesarias para localizar un punto $P \in D$, el tipo de medida definido sobre D (este elemento depende de los anteriores) y la existencia o no de singularidades en el dominio D (incluye la existencia del ∞ como punto impropio de D)

Asimismo, aparecen dos *formas* básicas, contentivas de las disímiles situaciones en que se necesita del uso de la *integral definida* para definir un nuevo concepto o resolver un problema, a saber:

1) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \mu_i$	Modelo Integral de Riemann
2) $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$	Integral impropia: límite de una familia de integrales definidas. (b es la única singularidad de f en [a , b])

Sea $D \subset R^n$ un conjunto sobre el que está definida la función f (el que se precisará en cada caso) y sobre el cual se realizan particiones que determinan subregiones de diámetro μ_i , al mayor de los cuales se le denomina λ (norma de la partición). En cada una de las subregiones determinadas por cada partición se hace una selección arbitraria de puntos P_i . Considérese para 2) una función f definida para todo $x \in R$, tal que $a \leq x < b$, en uno de los dos casos siguientes: $b = \infty$ ó f no es acotada en cualquier vecindad de $b \in R$.

A partir de la *forma 1*, se obtienen por construcción los conceptos de integral doble, triple, de línea y de superficie; la *forma 2* conduce a las integrales impropias para funciones de una variable (donde b puede ser un punto propio o impropio de R). Con ligeros cambios de notación, la *forma 2* también reflejaría la esencia de integrales impropias dobles y triples, pero generalmente estas no constituyen objeto de estudio (al menos en Ciencias Técnicas). Si se desearan incluir en el programa las integrales de Riemann-Stieltjes sería necesario acudir a una forma 3 de evolución de la *célula*. Obsérvese que estas coinciden con las vías para la extensión del concepto de *integral definida*. Además, otra *forma* lo constituyen las ecuaciones integrales, no abordadas en las asignaturas de 1^{er} Año.

El *elemento operativo* será el conjunto de métodos de cálculo de integrales definidas, o sea los métodos de determinación de primitivas (métodos para integrales indefinidas) y los métodos numéricos. Si en el programa se desearan incluir el estudio de las series de funciones y las probabilidades, pudieran entonces incorporarse al *elemento operativo*, los métodos que estos contenidos brindan.

En cualquiera de los objetos del sistema (las integrales doble, triple, de línea, de superficie e impropias), la vía de cálculo será la reducción al cálculo de integrales definidas.

En mi consideración, la concepción genética del Cálculo Integral supera algunas insuficiencias de la variante estructural-funcional, en tanto:

- Cada tipo de integral puede ser abordado, en virtud de la diacronía del sistema, en el momento en que estén dadas las condiciones para asimilarlo de manera total, sin tener que abordar primero, al inicio de la asignatura, el concepto, y bastante tiempo después, el resto de los conceptos, teoremas y procedimientos asociados.
- Las integrales impropias no quedan “desgajadas” al no poder ser consideradas como una variante del invariante.
- Permite incorporar los métodos numéricos y otros, de manera natural, pues el centro de atención estará en las integrales definidas y su cálculo, ya que de manera recurrente se irá a la *célula* y al *elemento operativo*.
- Permite ampliaciones del sistema, tales como el estudio de las integrales múltiples de orden mayor que tres y las impropias dobles y triples, dentro de las *formas* estudiadas, así como las integrales de Riemann-Stieltjes y las ecuaciones integrales como nuevas *formas* de evolución de la *célula*.

En el Anexo # 2 aparecen consideraciones más detalladas sobre el enfoque genético del Cálculo Integral.

También el Cálculo Diferencial puede estructurarse con enfoque genético, si se considera la *derivada ordinaria* como *célula* del mismo. La construcción bajo esta concepción sigue un sentido diametralmente opuesto al seguido en el enfoque estructural-funcional del mismo, donde se consideró a la derivada direccional como invariante.

La derivada ordinaria es la relación más simple, en el sentido de la derivación, pues:

- La función objeto de análisis es la más simple posible: una función real de una variable.
- El incremento de la variable independiente es el más simple posible: con una sola dirección y sentido, en tanto el dominio es un conjunto ordenado.
- El cociente incremental tiene la expresión más simple posible: $\frac{y - y_0}{x - x_0}$

Se pueden considerar como elementos variables: Si la función es de una o varias variables, si la función es real o vectorial y si el incremento es unidireccional o arbitrario. Variando estos elementos se establece

una nueva relación entre los incrementos y con ello se estudia y construye el nuevo objeto (concepto) y la propiedad local correspondiente.

Asimismo, aparecen tres *formas* básicas, contentivas de las disímiles situaciones en que se necesita del uso de la *derivada ordinaria*, en tanto célula generadora para definir un nuevo concepto o resolver un problema, a saber: el límite de un cociente incremental (su propia definición sirve de modelo), en los coeficientes de un polinomio (polinomio de Taylor) y en los elementos de una matriz (matriz jacobiana). Otra forma importante es cuando ella aparece como incógnita en una ecuación (ecuación diferencial), pero esta no se encuentra entre los contenidos de la asignatura Matemática I.

1) $Df(x_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta t}$	Límite de un cociente incremental
2) $P_n(x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$	Polinomio de Taylor de grado n
3) $\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]$ (i, j : 1, ..., n)	Matriz jacobiana

A partir de la *forma 1*, se pueden construir los conceptos de derivada parcial y derivada direccional tanto de funciones reales como vectoriales (diferencial débil de Gatau); la *forma 2* conduce al abordaje de los conceptos de continuidad, diferenciabilidad y polinomio de Taylor y sus interrelaciones con el concepto de derivada, tanto para funciones reales y vectoriales de una y varias variables. La *forma 3* conduce a los conceptos de matriz jacobiana y determinante jacobiano de un sistema de funciones, así como al concepto de gradiente de una función de varias variables.

El *elemento operativo* será el conjunto de reglas de derivación. Si se desea podría incluirse el cálculo numérico de derivadas. En cualesquiera de los objetos del sistema (derivadas parciales y direccionales, diferencial y polinomio de Taylor, gradiente, etc.) , la vía de cálculo por excelencia será la reducción al cálculo de derivadas ordinarias.

Pudieran hacerse consideraciones análogas sobre un enfoque genético del estudio de las propiedades locales de las funciones a partir del concepto *relación incremental* el cual fungiría como *célula* de esos contenidos (existencia de límite, continuidad, existencia de derivadas, diferenciabilidad y posibilidad de aproximar una función por su polinomio de Taylor de grado n) al cual se le provee como *elemento operativo* el procedimiento de paso al límite de una cierta función $H(f, x_0, \Delta x, n)$ cuando el incremento Δx es un infinitesimal. Dicha función se construye para investigar la *relación incremental* y depende de f (función-

objeto-de-estudio), del punto x_0 (centro del análisis), de la característica del incremento Δx (si es arbitrario o unidireccional) y del grado del polinomio de Taylor que interpola a f .

En el Anexo # 3 aparecen consideraciones más detalladas sobre el enfoque genético de los contenidos de Precálculo y Cálculo Diferencial (asignatura Matemática I)

Está claro que los razonamientos y precisiones anteriores a escala de la estructuración de los contenidos de las asignaturas tiene como objetivo principal la formación de una estructuración análoga del conocimiento del estudiante. En este sentido se puede apuntar lo siguiente:

En virtud de que la *célula* y el *elemento operativo*, revelados primero por el investigador y usados después por el profesor en la preparación de la asignatura, serán el elemento de pivote al cual se recurrirá sistémica y sistemáticamente para garantizar la formación de los restantes conceptos y el movimiento en el sistema, estos deberán ser objeto de análisis especial en los inicios de la materia de estudio. Su aprendizaje deberá poseer un alto grado de dominio (en el sentido de aprendizaje sin deficiencias e insuficiencias en la base de orientación), conciencia, generalización y solidez. Esto permitiría tener asegurado realmente el nivel de partida para abordar nuevos conocimientos y habilidades. La *célula generadora*, en tanto esencia, se encontrará presente en esos nuevos conocimientos y el elemento operativo formará parte del sistema operatorio de las nuevas habilidades.

La transferencia a nuevos contextos no será efectiva sólo por lo anterior. Es necesario formar en el estudiante estrategias generales para la construcción de los nuevos objetos del sistema (asignatura o tema). En este sentido, puede servir la elaboración de tarjetas de estudio, mapas conceptuales o cualquier apoyo materializado que le sirva de guía a los estudiantes.

La discusión con los estudiantes, una vez terminado el estudio de la *célula*, de los componentes susceptibles de ser variados (*lo variable*) y de las posibles *formas* de su evolución, permitirá elaborar de forma conjunta con ellos, una tarjeta de estudio de pronóstico teórico del movimiento en la asignatura. Pueden servir de ejemplo las Tarjetas de Estudio que aparecen en el Anexo # 4 utilizadas para el tratamiento metodológico de la *integral definida* como *célula* del Cálculo Integral, las cuales se conforman de manera general al principio y se van completando a lo largo de la asignatura. El conocimiento por los estudiantes de la necesidad de aplicar los principios heurísticos de analogía y generalización para “descubrir” los nuevos conceptos a partir de la *célula* establecida, contribuyen a que realmente la base orientadora de estos y las acciones asociadas, puedan ser del tipo III.

Asimismo, el conocimiento por parte de los estudiantes de que como regla deberá reducirse el cálculo de los nuevos objetos al cálculo con la *célula* y a través del uso del elemento operativo, conduce a la aplicación

consciente y relativamente independiente del principio de reducción, lo cual apunta a elevar el grado de independencia en el proceso de aprendizaje.

Debe destacarse que el proceso de construcción de los nuevos objetos (por analogía y generalización a partir de la *célula*) y de cálculo (por reducción al cálculo con la *célula*) debe transcurrir a través del planteamiento de problemas para lograr la adecuada motivación y un aprendizaje significativo en los estudiantes. El principio de construcción genético propicia este tipo de enseñanza, a diferencia quizás del estructural-funcional, donde es menor el grado de problemicidad, sobre todo una vez identificado y asimilado el invariante por los estudiantes, pues se pretende que a partir de ahí, “*conociendo las distintas variantes de las componentes que forman el invariante, y dominando los modos de separación [de las mismas], pueda no sólo analizar independientemente los nuevos fenómenos particulares, sino también construirlos*” (Talízina, 1988, pp.105).

Una última consideración sobre los tipos de enfoque estructural-funcional y genético es que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos (conocimientos + habilidades), donde se contraponen dialécticamente los principios de problemicidad y optimización, es necesario poder determinar en cada caso (tema o asignatura) cuál enfoque es más conveniente para alcanzar los objetivos en el tiempo académico disponible y teniendo en cuenta las características de los estudiantes y del propio docente.

3) Tipo de reglas y unidades.

Aunque los tipos de enfoques sistémicos vistos con anterioridad están basados en la teoría del III tipo de orientación, se puede discriminar como un tercer tipo enfoque, el que reflejan ciertos trabajos de investigadores en la enseñanza del idioma ruso y la Matemática Inicial en la URSS (N.F.Talízina, 1988, Capítulo IV , epígrafe 2. pág. 210-222) . En Cuba no se han reportado trabajos, excepto el que aparece en la esta Tesis.

Este tipo de enfoque sistémico se basa en el método de análisis de los casos particulares a través del **aislamiento de las unidades y reglas para su combinación** y la construcción independiente por el estudiante del esquema de la base de orientación de la actividad, para identificar o reproducir estos casos. Sálmina (1984) lo llama “*del III tipo de orientación y teoría*”, haciendo clara alusión a la teoría que lo engendra. Indistintamente al referirse a él también lo llaman de “*unidades*” o de “*unidades finales*”.

Se ha preferido en esta Tesis llamarlo simplemente “*de reglas y unidades*” para distinguirlo por sus principios de funcionamiento como sistema, en tanto los otros tipos de enfoque también recaban de la formación de bases de orientación del tipo III.

El enfoque *de reglas y unidades*, es de hecho, más sencillo que los anteriormente descritos y se caracteriza porque los procedimientos que les son inherentes son tales “*que permiten restablecer un sinnúmero de fenómenos particulares de la esfera dada*” (Talízina, 1988 pág. 210), a diferencia de los vistos con anterioridad que constituyen sistemas “acotados” en su extensión.

A diferencia del enfoque de tipo estructural-funcional no es necesario exigir - según nuestra consideración - una jerarquía estricta entre los elementos involucrados, como ocurre entre el invariante y sus variantes. Es decir, que el sistema que se constituye, si bien satisface los principios generales, a saber: de integridad, de jerarquía y de multiplicidad de descripciones (Sadovski, 1979 pág.112), permite una mayor flexibilidad en su concepción, al no tener que existir subordinación de conceptos.

Por otra parte, si bien, como en el genético, existen transformaciones de unidades iniciales simples, las cuales dan origen a otros objetos del sistema que pueden considerarse como resultados de esas transformaciones, no se puede afirmar que exista una “evolución” al pasarse de unos conceptos a otros de orden superior ni que estos a su vez puedan ser considerados como subsistemas del sistema mayor.

Pudiera considerarse, no obstante, que este tipo de enfoque es más general, menos exigente y contiene a los anteriores como casos particulares. (Ver Sálmina, 1984)

A continuación se expondrán de forma sucinta las ideas de la aplicación de este enfoque a los contenidos de la Geometría Plana y del Espacio para 1^{er} Año de Ciencias Técnicas. La evolución de las ideas que condujeron finalmente a la adopción de este tipo de enfoque en las Matemáticas Superiores fue como sigue.

Una experiencia en la enseñanza de la Geometría Analítica

Las primeras ideas fueron puestas en práctica en la asignatura Matemática I de la carrera de Ing. Industrial en el ISPJAE durante el 1^{er} Semestre del curso 1993-94, con la inclusión del estudio de las superficies cilíndricas y de revolución, utilizándose varios libros como bibliografía básica y de consulta, aunque ninguno satisfacía los requerimientos deseados.

Partiendo de definiciones genéticas de estos tipos de superficies, se formalizaron los procedimientos de construcción correspondientes y se creó un sistema de ejercicios que permitieran la asimilación del nuevo conocimiento.

Por otra parte y ante la necesidad de encontrar enfoques coordinados y sistémicos en la enseñanza de las funciones, debido por una parte a las dificultades que presentaban los alumnos que ingresaban al 1^{er} año (Ver Pinto y otros, 1994) y ante los reclamos de las teorías modernas de enseñanza, surgió la idea de incorporar, en una primera aproximación y desde la óptica de la GA, el estudio de las curvas, superficies y

sólidos en el contexto del tema de funciones, que pasó a ser uno de los más importantes en la asignatura Matemática I para la carrera de Ingeniería Industrial (en el ISPJAE y la Universidad de Matanzas), pero de una manera diferente a la tradicional.

Bajo una óptica sistémica se decidió integrar los elementos de GA Plana - que eran necesario que los estudiantes recuperaran - y los de GA del Espacio, exigidos por el programa vigente, en un subtema del tema de Funciones, a partir de la necesidad de estudiar las representaciones gráficas de las funciones y sus dominios (donde esto era posible). Se abordaron tanto funciones de una como de varias variables.

El abordaje integrado y sistémico de los contenidos de ambas geometrías era novedoso y no aparecía reportado en ninguno de los programas y libros revisados. Se decidió que el elemento que podía permitir tal conexión era *el conjunto de las transformaciones geométricas* necesarias tanto para abordar las propiedades de las funciones como para el estudio de los gráficos de funciones elementales consideradas como transformadas de otras y para el estudio de las superficies. Evidentemente esto conducía, entre otros, a un cambio en la concepción del estudio de éstas, las cuales se enfocarían ahora a partir de transformaciones aplicadas a curvas.

Por otra parte, quedaba claro en los objetivos que el mayor tributo del aprendizaje de estos contenidos geométricos debería estar en su empleo heurístico más que en el desarrollo de habilidades de dibujo, pues éstas últimas son responsabilidad en lo fundamental de asignaturas como Geometría Descriptiva, Dibujo Técnico, Dibujo Básico, etc. Es por ello que se decidió poner el énfasis en el desarrollo de la capacidad de intuición espacial estereométrica y la representación de esbozos de curvas, superficies y sólidos y su ubicación conveniente en sistemas coordenados que facilite la modelación matemática del problema que los ocupe.

Así, se decidió asumir el tipo de enfoque de **“reglas y unidades”**, el cual por su sencillez, se avenía perfectamente a los objetivos propuestos, estableciéndose los objetivos del subtema y con ellos los sistemas de conocimientos y habilidades.

Se consideraron como *unidades*, las gráficas de las funciones elementales básicas y como *reglas*, las transformaciones geométricas fundamentales, a saber: traslación, rotación (en torno a un punto y a un eje), reflexión y homotecia, todas ellas conocidas en su mayoría por los estudiantes desde niveles de enseñanza anteriores. Además, se consideraron los casos en que la magnitud de la transformación fuera constante (caso tradicional) o variable.

Bajo esta concepción aparecen muchas curvas como el resultado de la transformación de otras; y las superficies cilíndricas, de revolución y cónicas, como resultado de aplicar a una curva determinada

transformación: traslación, rotación en torno a un eje y homotecia respectivamente, con una magnitud variable dentro de un intervalo. (Ver Anexos 5, 6 y 7)

Se pretendía que los estudiantes obtuvieran por sí mismos las gráficas de curvas trasladadas, reflejadas y deformadas, así como la representación de superficies cilíndricas, de revolución y cuádricas (no se incluyeron las superficies cónicas por falta de tiempo), considerándose tanto el problema directo como el inverso, o sea:

- dada la ecuación, representar el objeto geométrico correspondiente y
- dada la representación (y determinada información adicional) obtener la ecuación.

Se estudiaron tanto el método general de discusión (para curvas y superficies) como el método **genético**, llamado así por el uso de las definiciones genéticas. Este último se estudió como alternativo del método general, como una vía ventajosa cuando se trata de dibujar curvas trasladadas, reflejadas y deformadas, así como representar superficies cónicas, cilíndricas y de revolución (conocida la curva que la engendra).

Como ya se dijo, la concepción que se propone en este trabajo, concibe el estudio de los elementos de GA (plana y espacial) de forma sistémica, contextualizada en el tema de “Funciones”.

Graficar el espacio en el plano requiere imaginación espacial, capacidad que se va desarrollando con mayor celeridad si lo representado se fundamenta a partir del movimiento u otras transformaciones geométricas afines con el conocimiento precedente del estudiante y la experiencia intuitiva del mismo, más que si lo representado fuera el resultado de deducciones analíticas intrascendentes para él.

Graficar más que un sinónimo de dibujar con exactitud, significa para el ingeniero un recurso heurístico que le permite **modelar geoméricamente** la realidad objetiva, o sea, que le sirve "*para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física*" (Guzmán, 1985) y representar después, en un espacio geométrico, dicho modelo. Asimismo, esta habilidad posibilita al profesional visualizar gráficamente relaciones entre objetos materiales, simbólicos y conceptuales.

En virtud de ello, se planteó como objetivo central del subtema de GA,

Utilizar los conocimientos sobre la representación de curvas, superficies y sólidos, así como las habilidades adquiridas en la aplicación de transformaciones geométricas, como recursos heurísticos para:

- *la creación de modelos matemáticos a partir de modelos físicos,*
- *el análisis del comportamiento grosso modo de las funciones de 1 y 2 variables cuyas representaciones no exijan especiales habilidades de dibujo y cálculo laborioso.*

Partiendo del supuesto que se aborde el concepto “función” en su definición general e incluso considerando la clasificación en unívocas y multívocas, pueden presentarse las transformaciones geométricas como el resultado de aplicar una función que relaciona subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. De tal suerte, es posible considerar a determinado

objeto geométrico (curva, superficie o sólido) como el conjunto imagen por cierta función (unívoca o multívoca) de otro objeto geométrico conocido (curva, superficie o sólido), el cual será considerado como el dominio de dicha función.

Formalmente: **Sea $f : D \longrightarrow I$ una aplicación de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sobre $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n=1, 2 \text{ y } 3$) donde tanto D como I representan curvas, superficies o sólidos.**

Así, se comienzan abordando las curvas (en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$) como las imágenes de “ciertas” funciones vectoriales de una variable que transforman segmentos de recta en arcos de curva (regiones unidimensionales del plano o del espacio) y se introduce el concepto de parametrización, ejemplificándose, graficándose y discutiéndose los tipos de ecuaciones y cómo pasar de un tipo de ecuación a otra.

Análogamente se abordan las superficies como imágenes de “ciertas” funciones vectoriales de 2 variables que transforman regiones planas en regiones bidimensionales del espacio. Los sólidos aparecen entonces como imágenes de “ladrillos” rectangulares de $\mathbb{R}^3$ por ciertas funciones vectoriales de 3 variables. Salvo la inconsecuencia de no dar una definición rigurosa, imposible en este momento, el presente tratamiento presenta como principales bondades las siguientes:

- **revela la importancia de las funciones** a los estudiantes, desde el inicio de la disciplina, como el objeto matemático que permite *modelar* disímiles comportamientos, relaciones y transformaciones,
- **sistematiza los conocimientos** que tiene y adquiere el estudiante sobre Geometría, Álgebra Lineal y Funciones,
- **asegura el nivel de partida** de los estudiantes para una mejor comprensión de los conceptos función gradiente, jacobiano de una transformación y en general para el trabajo con las integrales dobles, triples, de línea y de superficie.

Una vez definidas curvas, superficies y sólidos como resultados de transformaciones de otros objetos geométricos, se procede a recordar aquellas transformaciones geométricas estudiadas desde la Enseñanza General insertándolas ahora en el contexto de la GA.

La búsqueda de regularidades (por los estudiantes) a partir de un conjunto de tareas sistémicas, les permite ir conformando la idea de sistema. Tradicionalmente el estudiante estudia las transformaciones geométricas de forma inconexa y no recurre a ellas, como regla, durante sus estudios preuniversitarios.

El empleo del enfoque vectorial para el tratamiento inicial de los objetos geométricos no es obligatorio; en la práctica se han trabajado las dos versiones: vectorial y no vectorial de la GA.

La enseñanza del método genético estuvo motivada entre otras por el estudio de funciones que pueden ser consideradas transformadas de otras. Si bien este método no desarrolla habilidades de dibujo (en el sentido técnico de la palabra), al centrar su atención en el valor de la transformación, brinda la posibilidad de obtener información sobre la función "nueva" a partir de la función conocida, así como representar, a grosso modo, un esbozo de su gráfico.

A las transformaciones geométricas: *traslación*, *rotación* y *reflexión*, las cuales el estudiante conoce de la Enseñanza General, se le adiciona la *deformación uniforme*, que el estudiante conoce bajo el referente de dilatación y contracción.

En particular la *deformación uniforme* es conocida por el estudiante desde que estudió la función cuadrática y posteriormente las funciones trigonométricas, sin embargo, el grado de generalización que posee en cuanto a identificar esta transformación dada la gráfica o la ecuación de una función real de una variable es casi nulo. Pocos estudiantes la relacionan con la *homotecia*, que también estudiaron. Esta relación se explica en el Anexo # 9.

Análogamente al experimento de Talízina-Volodárskaia (1972) se establecieron las siguientes componentes comunes a todas las transformaciones:

Como *Objeto Inicial de la Transformación* se consideró cualquier figura geométrica: curva, superficie o sólidos conocidos; como *Tipo de Transformación* se consideró las transformaciones citadas arriba, señalándose la magnitud y sentido si es necesario; como *Objeto de Referencia en la Transformación* se consideró el origen o un eje coordenado y como *Objeto Final de la Transformación* se consideró cualquier figura geométrica: curva, superficie o sólido considerada como imagen del *Objeto Inicial* por la transformación efectuada. Cada combinación de las 4 componentes anteriores dará como resultado un caso particular del sistema propuesto.

Como puede observarse, aunque las componentes comunes a todas las transformaciones son las declaradas por Talízina (1988), el sistema propuesto tiene diferencias con este, a saber: aborda objetos geométricos de más compleja estructura (curvas en lugar de segmentos de recta); no se restringe al plano, lo cual introduce una complejidad adicional debido a las deficiencias de los estudiantes en la visión espacial estereométrica; no se restringe al carácter unívoco de las transformaciones e incorpora la *deformación uniforme*.

Se elaboró de manera conjunta con los estudiantes el *procedimiento general para las transformaciones rectilíneas* (Anexo # 8), el cual se inspira en el propuesto por Talízina-Volodárskaia.

Bajo el método genético, la acción “*Transformar geométricamente una figura (curva, superficie o sólido) a partir de la figura dada*” posee el mismo sistema operatorio descrito por Talízina.

Sin embargo, este tiene su autenticidad en cuanto a las transformaciones que relaciona, pues:

- considera a la *reflexión* como una transformación rectilínea. (Talízina la considera curvilínea)
- incorpora la *deformación uniforme*.
- revela características en cuanto a la magnitud y sentido de las transformaciones, las cuales formula con un enfoque funcional, acorde con el objetivo para el cual son estudiadas.

Una regla común a todas las transformaciones es que cuanto mayor sea la cantidad de puntos que se seleccionen en el Objeto inicial tanto mejor será la fidelidad, como imagen, del Objeto final.

La obtención del Objeto final depende de cada transformación, por lo que se hace necesario el establecimiento y el estudio de las características particulares de cada una. En el Anexo # 9 aparecen detalladas estas consideraciones.

Para efectuar cualesquiera de las transformaciones es necesario ejecutar la siguiente acción general: *Transportar cada punto del Objeto inicial sobre la línea de correspondencia en la magnitud y sentido indicados y dependientes de la Transformación*, aclarándose que en el caso de la *rotación* la transportación se realiza sobre circunferencias concéntricas, mientras que en el resto de las transformaciones se transporta sobre rectas paralelas.

La acción: *Transformar un objeto geométrico situado en un sistema de coordenadas cartesianas*, una vez asimilada, se convierte en operación en otras acciones más complejas (Ver Anexo 9-A)

El planteamiento de estas acciones (muchas de ellas no declaradas en los programas y asumidas como que el estudiante las formará con el devenir del tiempo) y la organización del proceso de asimilación, a tenor con la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales, debe propender a niveles de desarrollo significativamente superiores a los obtenidos en la enseñanza tradicional.

En cualquier caso, la enseñanza de este conjunto de contenidos de GA del Plano y del Espacio tiene el objetivo de lograr en los estudiantes el desarrollo de la habilidad *graficar* en su sentido de recurso heurístico, de apoyo a la resolución de problemas del Análisis Matemático.

Estos contenidos, organizados como sistema y tratados metodológicamente con una orientación del III tipo, permitirán que los conocimientos y habilidades que se formen en el estudiante estén de igual forma sistémicamente estructurados y posibiliten un rápido acceso a ellos en virtud de que:

- 1- Las transformaciones geométricas fueron estudiadas por los estudiantes en la enseñanza primaria y media (aunque posteriormente se hizo poco uso de ellas), por lo cual les son familiares.

- 2- Las generalizaciones que se harán deben ser fácilmente asimilables por los estudiantes, pues están muy cerca de la comprensión intuitiva que se tiene de las mismas. En ese sentido se refuerza precisamente el destino para el cual se enseñan: para que constituyan recurso heurístico, no recursos para la demostración.
- 3- El conjunto de contenidos que debe asimilarse es pequeño y a partir de él se obtiene un sinnúmero de casos particulares que no necesitan ser estudiados individualmente, pues es posible acceder a ellos por las propias leyes de funcionamiento del sistema.
- 4- Permite conectar conocimientos dispersos en la bibliografía, aprendidos por separado en diversos momentos y que serán usados en diferentes contextos en la disciplina.

Los resultados expuestos en el Capítulo III muestran cómo, de una manera sencilla y sin incrementar el volumen de información, los estudiantes eran capaces de abordar esbozos de gráficos de curvas y superficies; (incluso casos que por su complejidad no son tratados en un curso tradicional) a partir de dominar los principios de funcionamiento del sistema y los métodos de trabajo.

A pesar de que el trabajo que aquí se reporta tiene puntos de contacto con el de N.F.Talízina e I.Volodárskaia, establece aportes respecto al tratamiento tradicional de la GA, a saber:

- 1) Introduce un tratamiento sistémico de los contenidos de la GA en el estudio de las funciones.
- 2) En consecuencia, asume un enfoque de la GA para y a partir de las funciones.
- 3) Utiliza resultados de la Geometría Sintética en la enseñanza de la GA.
- 4) Vincula los resultados de las transformaciones geométricas sobre los gráficos de las curvas, superficies y sólidos con las transformaciones algebraicas de sus respectivas ecuaciones.
- 5) Aborda como un todo (sistema) elementos de GA del Plano y del Espacio.
- 6) Privilegia, para la descripción de los lugares geométricos, las definiciones genéticas de los mismos.
- 7) Se plantea como objetivos a alcanzar un conjunto de acciones, explícitamente declaradas y trabajadas que no se abordan de esa forma en la enseñanza tradicional y que son necesarias para el rescate de la intuición espacial, la modelación (geométrica y analítica), así como que brindan una vía para, de forma heurística, obtener información sobre las propiedades de las funciones.
- 8) Este sistema de acciones genera un sistema de tareas (ejercicios) que generalmente no aparecen en los textos tradicionales y que sin aumentar significativamente el volumen de información, pueden ser resueltos con relativa facilidad por los estudiantes.
- 9) Se cambia sustancialmente la presentación del estudio de las superficies, pues:
 - las **superficies cilíndricas** aparecen como resultado de una traslación por un vector de magnitud variable en la dirección de un eje perpendicular al plano de la directriz. En virtud del paralelismo de las generatrices, la directriz es la que engendra, con su traslación, la superficie. Pueden ser

construidas por los estudiantes una amplia gama de superficies cilíndricas; no solamente las cuádricas como sucede en la enseñanza tradicional.

- los **planos** son tratados como casos particulares de superficies cilíndricas.
- las **superficies de revolución** son engendradas por la revolución de la generatriz. Los estudiantes pueden construir una amplia gama de estas superficies, no solamente las cuádricas de revolución.
- se resalta la característica particular del paraboloide hiperbólico de ser la única **superficie cuádrica** (excluyendo los casos límites) que no puede ser obtenida a partir del gráfico de una curva plana por ninguna de las transformaciones estudiadas.

- 10) Dentro del sistema de tareas se incluyen además ejercicios de corte sistémico. Por ejemplo: *“Representar mediante diagramas de Venn los conjuntos de superficies estudiadas, destacando las intersecciones y citando un ejemplo de superficie que represente cada una de las partes del diagrama”*
- 11) *El sistema es susceptible de ser ampliado, si se incorporan las transformaciones: proyección ortogonal e inversión multiplicativa, así como si la homotecia se concibe para engendrar superficies cónicas. Esto último permitiría el estudio de las funciones homogéneas y su relación con las superficies cónicas. Estas funciones tienen alguna presencia en el tema de Ecuaciones Diferenciales.*

Las ideas de este trabajo, aunque dirigido fundamentalmente a la enseñanza del Cálculo en Ciencias Técnicas, pudieran sugerir una vía que permita dar continuidad a la Enseñanza de la Geometría con el uso de las transformaciones geométricas, a través de toda la Enseñanza Media, propiciando un estudio gradual, pero sistémico de las funciones.

Las Habilidades Generales Matemáticas

Basada en la TA, una de cuyas tesis defiende que *“no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer”* (N.F.Talízina, 1984), la Dra. Herminia Hernández presenta su Sistema Básico de Habilidades Matemáticas (Hernández, 1989) el que a todas luces parece evidente una vez declarado, y reconocido tácitamente por la comunidad de educadores y profesores de matemática, pero que es novedoso, en tanto lo discute en su integridad sistémica, destacando la jerarquización y precedencias de sus elementos y lo más importante quizás, la importancia que tiene la formación consciente de esas habilidades mentales en los estudiantes.

Como integrantes de dicho Sistema Básico se encuentran las habilidades *definir y demostrar*, "*que son las que por su propia naturaleza establecen el vínculo primario con el sistema de conocimientos*" (H.Hernández, 1989), así como identificar, interpretar, recodificar, graficar, algoritmizar y calcular mediante las cuales se hace matemática, es decir se resuelven problemas matemáticos en su acepción amplia.

A las habilidades del Sistema Básico y otras habilidades matemáticas que fueron reveladas posteriormente las he llamado Habilidades Generales Matemáticas (HGM). En términos de la TA, bastaría llamarlas *habilidades matemáticas*, sin el calificativo "generales", pero en aras de que el mensaje a los docentes de fila, principales destinatarios, llegue lo suficientemente claro y que de estas se haga un uso efectivo en la enseñanza, se decidió denominarlas de ese modo.

Los trabajos de H.Hernández fueron seguidos por la Dra. Teresa Rodríguez (1991), quien por primera vez estableció un nexo, en el plano del diseño curricular de las asignaturas, entre las HGM y la estructuración de los contenidos. En su caso declara y utiliza la formación de la habilidad *modelar* como rectora en el proceso de organización de los contenidos y de conducción del proceso de asimilación de los conocimientos.

Aunque en eso momento no se dio una definición formal de dicha habilidad, se mostraron los diferentes niveles de su manifestación y la presencia e interacción de otras habilidades del Sistema Básico en su despliegue operacional. Se reconoció, que aunque presente en todo el quehacer matemático, no debía pertenecer al Sistema Básico debido a que otras HGM aparecían en carácter de operaciones suyas.

En las investigaciones de la Dra. Lourdes Valverde sobre la enseñanza del Álgebra (L.Valverde, 1990) se revela que la habilidad demostrar también está presente al fundamentar la validez de una proposición o un procedimiento y no sólo en el sentido de una rigurosa demostración matemática, que es su manifestación más compleja. Esto fue importante, en tanto vinculó la formación de esta habilidad - que parecería prácticamente patrimonio de los que se dedican a hacer matemáticas - con la necesidad de lograr las características de conciencia y reflexión de toda acción y conocimiento a formar en el estudiante, el cual ya desde la etapa verbal del proceso de asimilación, debería justificar y argumentar su actividad con los objetos y procedimientos matemáticos.

El haber revelado la existencia de estas habilidades fue beneficioso en tanto:

- Constituirían una suerte de "*instrucciones de código de máquina*" que serían, parafraseando a Tim O'Shea, "*lo suficientemente generales como para ser utilizables en la solución de muchos problemas distintos*" (1989) y por ello, de propiciar el enfrentamiento de situaciones problemáticas para el aprendizaje de nuevos contenidos.

- Deben estar en el centro de la atención de la formación matemática de los profesionales que la requieran, pues ellas mismas podrían estar en la estructura de las habilidades profesionales.
- Constituyen una guía de inapreciable valor didáctico y metodológico para los docentes (muchos de los cuales no tienen conciencia de su existencia y la importancia de su formación en sus alumnos) toda vez que les permitirían organizar el proceso de asimilación de los conocimientos y crear en ellos estructuras mentales perdurables, flexibles y generalizadas.
- Deben ser tomadas en cuenta en la formación de docentes de Matemática, puesto que ellas son consustanciales al pensamiento que deben ellos poseer primero y ser capaces de formar después en sus educandos.
- Constituyen un stock de verbos bien definidos, que sirven para unificar el lenguaje en la formulación de los objetivos en los programas de asignaturas matemáticas.

Muchas de las que hoy se rubrican como HGM pueden tener y de hecho tienen sentido fuera del contexto matemático, pues otras ciencias les asignan también significados y les dan uso. Algunas son habilidades lógicas; por ello, las investigaciones que han realizado algunos psicólogos cubanos y extranjeros (N.F.Talízina, 1988; T.Sanz, 1990; A.Hernández, 1994) en torno a las habilidades lógicas identificar, clasificar y deducir, han contribuido también a profundizar en su estudio.

Sin embargo, el sentido de considerarlas como habilidades inherentes a la Matemática no le da la exclusividad de su pertenencia, sino su presencia insustituible en el quehacer matemático. Cada una de ellas se convierte en una regularidad por la sistematicidad de su aplicación y por su carácter universal y movable (H.Hernández, 1990).

La importancia del trabajo con estas habilidades y el interés creciente que, entre los docentes de fila, fue tomando en Cuba en el último lustro, originó que se erigiera esta temática en una línea de investigación que aborda el Grupo BETA de Investigación en Matemática Educativa y otros investigadores en varias universidades del país.

Para determinar tales habilidades se tuvieron en cuenta los siguientes requerimientos:

- deben tener existencia propia, o sea no deben aparecer subsumidas en otras habilidades del sistema,
- pueden ser consideradas propias del quehacer matemático, aunque no necesariamente exclusivas de él.
- deben ser suficientemente generales como para que mantengan su presencia a lo largo de la formación matemática de niños, adolescentes y jóvenes,
- deben ser imprescindibles para la formación matemática de pregrado en todos aquellos profesionales que hacen un uso destacable de la Matemática.

Hoy puede afirmarse que la investigación sobre ellas está en la dirección de la confluencia entre los paradigmas psicológicos cognitivos del procesamiento de la información y del enfoque histórico-cultural, aunque los trabajos iniciales estuvieran influidos sólo por este último. El proceso de acercamiento entre estas dos escuelas, encuentra ecos en dichos estudios, en tanto la TA reclama la formación de modos de actividad generalizados en el sujeto y la PCPI, al distinguir las diferencias entre expertos y novatos, reclama el estudio de las estructuras mentales y procedimientos de los primeros; las HGM son características del actuar experto.

En la labor de enseñar Matemáticas aparece como un imperativo el trabajo con las HGM, pues éstas permiten acometer una multitud de problemas de diferente índole. No asumirlas y concebir sólo la formación de acciones particulares, conlleva a un conocimiento fraccionado, no generalizado y poco perdurable en el pensamiento del estudiante.

El incorporarlas en el quehacer didáctico, en aras de que los profesores desarrollen acciones para formarlas en sus estudiantes, no es un mero ejercicio intelectual para poblar el ya cargado universo de términos pedagógicos, sino el resultado de la necesidad de hacer conscientes, primero a los profesores y después a los estudiantes, de la dirección que deben seguir sus esfuerzos.

Tras los trabajos citados anteriormente, en el seno del Grupo BETA de Investigación en Matemática Educativa se siguió profundizando y surgió la inquietud por determinar si realmente podía establecerse una línea de investigación en torno a las HGM, a saber:

- determinar si el Sistema Básico estaba integrado sólo por las habilidades citadas o si era susceptible de ser ampliado,
- determinar si existían, al igual que *modelar*, otras HGM que no pertenecieran al Sistema Básico, pero que también fueran características del quehacer matemático y que por su importancia debieran ser formadas en los estudiantes,
- determinar si todas las habilidades lógicas, algunas de ellas trabajadas extensamente por los psicólogos, podían considerarse también HGM,
- determinar si era posible, mediante la aplicación del método teórico de análisis de la actividad del profesional (en este caso del matemático), develar todas las HGM.
- determinar las acciones didácticas necesarias para lograr la formación de éstas en los estudiantes de distintos niveles de enseñanza y carreras universitarias.

Asimismo, se constató que el conjunto de HGM declarado hasta la fecha era insuficiente, pues existían comportamientos en el quehacer matemático que no aparecían recogidos en las habilidades develadas.

Por todo lo anterior, se reconoció la factibilidad y conveniencia de abrir una línea de investigación en torno a las HGM. Esto trajo como consecuencia determinados resultados, los cuales se exponen a continuación.

Ampliación del Sistema Básico

La Habilidad Básica: COMPARAR

Comparar, es establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase.

En la actividad humana en general, *comparar* es establecer una relación entre dos elementos, asociándolos según determinadas características comunes a ambos. Sin embargo, en la actividad matemática adquiere tintes especiales, diferenciándose sistemas operatorios particulares en dependencia del objetivo de la comparación.

En el Análisis Matemático, por ejemplo, la habilidad *comparar* presupone dos comportamientos típicos del pensamiento matemático, a saber: la comparación término a término y la comparación mediante paso al límite. En la enseñanza tradicional, estos procedimientos generales de comparación, se encuentran indisolublemente ligados al contenido específico donde se aplican y como regla no se concientiza su existencia generalizada ni la regularidad de su aplicación; no existe un momento de descon-textualización, y por ende de abstracción y generalización, para llamar la atención sobre él, en virtud de los que son: modos generales de actividad que caracterizan a quienes hacen bien las matemáticas. Desprovistos del ropaje de cualquier contenido particular, estos procedimientos poseen sus respectivos sistemas operatorios:

- **La comparación término a término**, presupone, por orden, los siguientes pasos:
 - 1. Comparar algunos objetos particulares** (imágenes de los mismos elementos del dominio de las dos funciones que se comparan, términos del mismo orden de las dos series que se comparan, etc.). Este constituye un momento heurístico en la orientación.
 - 2. Comparar las partes correspondientes de las expresiones generales de los dos objetos.** Aquí se comparan las estructuras de ambos objetos, pudiendo ser necesaria la intervención de otros objetos “intermedios” cuya estructura sugiera la “transformación” de uno en el otro. Este es un momento de análisis.
 - 3. Inferir de las relaciones entre las partes, la relación entre los dos objetos.** Este es un momento de síntesis.

- La **comparación mediante paso al límite**, presupone por su parte:

1. **Formar un cociente con los términos generales de los dos objetos a *comparar*.**
Generalmente suelen conocerse características de uno de los objetos, lo cual facilita la comparación.
2. **Pasar al límite de dicho cociente en el punto-objeto de análisis** (incluye al ∞ como punto impropio)
3. **Interpretar el resultado obtenido.** Esto significa otorgar significado, en virtud del contexto, a la existencia o no del límite y a su valor en caso de existir (finito o infinito).

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = r}$$

f, g : términos generales de los objetos que se comparan.

x_0 : punto-objeto de análisis

r : valor límite

Esta forma de comparación es típica cuando se desea contrastar la “velocidad de convergencia” de dos objetos hacia un punto (funciones, integrales impropias, series, etc.) y está presente en muchos más momentos que en los que regularmente el propio docente tiene conciencia o destaca, por ejemplo en la investigación de la existencia o no de la derivada de una función por la definición.

En el caso de la determinación de la existencia de la derivada por la definición, **f** es la función Δy , incremento de la variable dependiente y **g** es la función Δx , incremento de la variable independiente. Así, el cálculo del límite del cociente incremental no es más que la aplicación del procedimiento de comparación mediante paso al límite, pues después será indispensable interpretar el resultado obtenido, a saber:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} r \in \mathbb{R} & , \text{ la función es derivable y } r \text{ es su derivada} \\ 0 & , \text{ en particular } x_0 \text{ es un punto estacionario} \\ \infty & , \text{ la función no es derivable, pero posee derivada infinita} \\ \text{no existe} & , \text{ la gráfica de la función no posee recta tangente en el punto } x_0 \end{cases}$$

En Geometría la comparación tiene otra faz, se compara **identificando la presencia de los rasgos esenciales que exige la relación que se analiza en los dos objetos simultánea y correspondientemente**. Determinar la congruencia o semejanza entre dos figuras es una forma de *comparar* que esencialmente no es diferente a cuando

se compara al establecer la posición relativa entre dos objetos geométricos (paralelismo, coincidencia, ortogonalidad, intersección, cruzamiento, coplanaridad, etc.) entre otras formas de *comparar*.

La habilidad *comparar* está presente en todo el quehacer matemático y debe ser formada, así como los modos generales de actuación que les son inherentes, en todos los niveles de enseñanza, acorde con los contenidos que se vayan abordando. En particular en la resolución de problemas está presente porque no es posible tener la certeza de la validez de lo calculado si no se tiene un patrón de referencia, si no se posee la posibilidad de *comparar* el resultado alcanzado con el esperado. Esa exigencia, tan propia de las ciencias y en particular de la Matemática, hacen de la habilidad *comparar* una habilidad básica, que se encuentra subyacente en otras muchas habilidades matemáticas más complejas.

La Habilidad Básica: CONTROLAR

La actividad de un experto se caracteriza, entre otras, porque hace un análisis preliminar concienzudo al momento de atacar un problema, porque desarrolla estrategias inteligentes para hallar la vía de solución del mismo y porque durante toda la actividad de resolución está haciendo un constante control de la misma; lo cual le permite corregir el camino emprendido y constatar, antes de seguir adelante, si “está pisando terreno firme”. El novato, por su parte, adolece de estas actitudes. Por lo tanto, entre las múltiples habilidades que deben formarse en los que aprenden matemáticas, está la de que sean capaces de autocontrolar su actividad y pueden por sí mismos determinar la validez o conveniencia de cierto procedimiento desarrollado o de cierta vía seleccionada, así como, si los resultados alcanzados se corresponden con la realidad o con los valores reconocidos como aceptables.

La proposición de incorporar el *controlar* entre las HGM se sustenta, al igual que en el caso de otras habilidades, tanto en la PCPI (Glaser, 1992) como en la TA (Talízina, 1988). También se tomaron en cuenta las ideas del matemático A. Schoenfeld (1985) y el psicólogo A.F. Labarrere (1994) sobre la importancia e intervención de este recurso metacognitivo en la resolución de problemas.

Se reconoce que una insuficiencia del Sistema Básico de habilidades había sido la ausencia de la habilidad de *controlar* como habilidad a desarrollar explícitamente. Como quiera que el control se ejerce tanto al prójimo como a sí mismo, son importantes ambos planos de ejecución, aunque desde el punto de vista de la enseñanza deba hacerse especial énfasis en lo segundo, en el *autocontrol* como recurso metacognitivo, en tanto potencia la actuación del sujeto ante la resolución de problemas (Hernández, 1997).

En el trabajo “Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: El Autocontrol” (H. Hernández y otros, 1997) se explican exhaustivamente las consideraciones sobre esta habilidad, describiéndose la estructura de acciones que conforman la misma, tanto en lo interpsicológico como

en lo intrapsicológico donde deviene estrategia metacognitiva que el estudiante emplea como mecanismo de Autocontrol.

La dinámica del proceso de control se ilustra en el Cuadro # 3. En el artículo citado, aunque se plantea, no se abunda suficientemente sobre la importancia de la acción **estimar**, íntimamente relacionada con el control, por lo que a continuación se abordará.

Para H.Hernández (1997),

***Controlar** es monitorear y regular, es evaluar un conjunto de informaciones con relación a objetivos prefijados, a los efectos de tomar decisiones en el abordaje y resolución de un problema o tarea.*

Esta definición, la cual suscribo, hace mención a *un conjunto de informaciones con relación a **objetivos prefijados*** y esto presupone tener en cuenta el registro y revisión de los planes, pasos y soluciones que se van obteniendo, en función de las fases a ejecutar u objetivos a lograr, a fin de **tomar decisiones** en cuanto a continuar o interrumpir el trabajo. Téngase en cuenta que esta es la esencia del control, como uno de los momentos funcionales de toda actividad. Cuando una acción se ejecuta con determinado grado de experticidad, presupone ante todo una **estimación** o pronóstico o predicción de la calidad, fiabilidad o correspondencia del producto con el objetivo.

Esta posibilidad marca una diferencia entre expertos y novatos en distintos grados de manifestación: el más novato generalmente no controla y asume como válido el resultado obtenido y deja cierta cuota de éxito al azar. Luego, del no controlar se infiere que no hace predicción alguna del resultado a obtener; el menos novato recurre al control sobre el producto final generalmente y éste se limita a la satisfacción de las condiciones del problema, no preocupándose mucho por la coherencia sistémica que ofrece la solución hallada, ni el análisis retrospectivo, en el sentido de Polya; el experto no sólo controla el resultado final, sino que hace una **estimación** previa a cada paso y del resultado de la tarea en su conjunto, lo cual le permite abandonar el camino elegido en el momento que sea necesario.

Por ello se ha incluido la acción de **estimar** en el gráfico citado (Cuadro # 3) toda vez que es un recurso metacognitivo que puede asociarse a la actividad de *controlar*. **Estimar** es conjeturar sobre las posibles soluciones a obtener o pronosticar características de las mismas. No siempre el control presupone hacer estimaciones, por eso es que se indica fuera de sus acciones.

No obstante lo anterior y desde el punto de vista de la TA, la acción de **estimar** establece un nexo entre las partes orientadora y controladora de toda acción humana, en tanto adelanta en el tiempo el producto final, aunque sea una imagen suya grosso modo.

El NCTM de los EE.UU. en sus Estándares Curriculares y de Evaluación (1989) enfatiza en la importancia de la **estimación** para la resolución de problemas. El esquema (tomado del artículo de Cecilia Parra, 1994) que aparece en el Cuadro # 3 puede ilustrarlo gráficamente.

A decir de Parra (1994) *“este esquema sugiere que la **estimación** puede y debe ser usada junto con los procedimientos con los que se produce la respuesta, de modo de anticipar, controlar y juzgar la razonabilidad de los resultados”*.

Se puede observar en él, la importancia que el NCTM concede al cálculo aproximado, (asunto a tratar en el próximo epígrafe) y el uso de calculadoras y computadoras, sobre lo cual anteriormente se discutió.

Con la introducción en Cuba del “plan alemán” (RDA) en la Enseñanza General, se comenzó a dedicar atención, ya desde los primeros grados, al cálculo aproximado y las *estimaciones*, lo cual se ha mantenido sistemáticamente en la enseñanza de las operaciones básicas, el cálculo porcentual, el cálculo de raíces cuadradas, etc. Sin embargo, esta práctica no se mantiene en el estudio de otros contenidos matemáticos (trigonometría, estudio de las funciones, etc.), lo que trae como resultado que el estudiante medio no incorpore a sus modos de actuación, la **estimación** como recurso necesario en múltiples ocasiones para el posterior control.

Hoy más que nunca el estudiante debe poseer habilidades en pronosticar, en adelantarse grosso modo al resultado a obtener, pues cada vez más el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas deja de estar en las habilidades de cálculo y en la ejercitación extensamente reiterada de algoritmos. Las potencialidades de las calculadoras y las PC han vuelto obsoletas esas prácticas.

Esto no significa, sin embargo, que deba descuidarse el desarrollo del cálculo mental y del aprendizaje automatizado de determinadas acciones y conocimientos pues:

por una parte y en cuanto a la resolución de problemas, diversos estudios plantean que, debido a que la memoria de trabajo es limitada, el hecho de que los alumnos puedan apelar al cálculo automático libera espacio mental para la concentración en los aspectos más complejos (y probablemente más importantes) del problema a tratar. (Parra, 1994)

por otra, extendiendo lo planteado por Fisher (1987), sólo una automatización al evocar hechos numéricos o resultados esenciales conducirá a los alumnos a **estimar** órdenes de magnitudes y remarcar ciertos errores obtenidos con calculadoras o computadoras, es decir, a ejercer un **control** mínimo.

“La capacidad para resolver problemas, tomar decisiones, trabajar con otros, usar recursos de modo pertinente, forman parte del perfil reclamado por la sociedad de hoy” (Parra, 1994). Más adelante esta misma autora apuntaba, que incluso si sólo se tuvieran en cuenta los reclamos sociales, deberían tomarse en cuenta en los objetivos a lograr “la discusión sobre la pertinencia de un recurso ante una situación, **la práctica de la estimación, la asunción, por parte de los alumnos, del control de los procesos y resultados, etcétera**”.

Como se puede observar, la acción **estimar** está relacionada con la habilidad *controlar*, y esto ocurre básicamente en el proceso de resolución de problemas.

Otras habilidades generales matemáticas

Desde distintas perspectivas se afirma que el centro de la enseñanza de la matemática debe ser la resolución de problemas y desde que a inicios de los 80's en la *Agenda for Action* del NCTM de los EE.UU. se declarara ello como el objetivo central, muchos investigadores han centrado sus esfuerzos en determinar qué aspectos formar en los estudiantes para lograr que sean competentes en la resolución de problemas. Cada vez más los currículos en distintos países e instituciones recogen este objetivo y se consolida el consenso de que debe enseñarse a los estudiantes a **resolver** problemas. De ahí que se haya considerado necesario catalogar la acción de *resolver* como una de las HGM.

La Habilidad: RESOLVER

Esta habilidad no se había registrado hasta ahora entre las HGM, a pesar de su importancia, porque se estimaba que podía considerarse como el resultado de la interacción de las demás, en particular y con mucho peso, de la habilidad *modelar*.

Incluso, existen ciertas tareas, asociadas directamente a otras HGM, cuya ejecución podría considerarse en sí misma la resolución de un problema. Por ejemplo, en ocasiones encontrar un modelo para un problema (*modelar*) o encontrar un algoritmo para un grupo de problemas (*algoritmizar*), es en sí mismo un problema a resolver.

Por otra parte, el término *resolver* se utiliza con diversas acepciones como: encontrar la solución de una ecuación, inecuación o sistema de ellas, expresar una variable en función de las demás, así como cuando se trata de encontrar la solución de un ejercicio con texto, sea desconocida o no la vía de solución para el sujeto; sin embargo,

una vez que el sujeto la ha encontrado, en lo fundamental el problema está resuelto, pues lo que resta es aplicar un algoritmo, es calcular y evaluar la solución.

Por ello y aunque bajo la expresión "resolución de problemas" pueden asumirse diferentes descripciones, lo que más urge en las investigaciones en Educación Matemática, en virtud de la trascendencia que tiene para la formación de las capacidades intelectuales de los estudiantes, son los mecanismos y las vías para el entrenamiento de éstos en la resolución de tareas para los cuales no tienen a su disposición un procedimiento de rutina, o sea en la resolución de problemas.

Si bien en dicho proceso intervienen factores de índole afectiva y volitiva, por lo que identificar este proceso con una habilidad sería un reduccionismo incorrecto e inapropiado, en la esencia del mismo, tiene un peso fundamental el aspecto cognitivo, el cual se manifiesta en la interacción de los conocimientos: lingüístico, semántico, esquemático, operativo y estratégico (Ver Mayer, 1983. Págs. 408-409) que posea el sujeto resolutor, así como en el empleo de recursos heurísticos y metacognitivos. La conjunción de todos estos elementos va encaminada hacia un objetivo principal: encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema.

Así, en aras de caracterizar la esencia cognitiva de este proceso y sin pretender identificarlo con él, se considera la siguiente habilidad:

***Resolver**, es encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema.*

La habilidad de *resolver* un problema presenta un carácter relativo y subjetivo, porque aunque el problema esté resuelto para la ciencia y para el profesor, puede ser considerado sin resolver para el estudiante, quien no conoce la vía de solución. Un mismo problema no puede ser resuelto dos veces por el mismo sujeto y en un mismo grupo de estudiantes, puede un mismo ejercicio constituir problema para uno y no para el otro, en el momento de resolverlo.

En el contexto de la resolución de problemas, es necesario hacer algunas consideraciones sobre la habilidad *modelar*, ya integrada por la Dra. Teresa Rodríguez (1991) al conjunto de las HGM, en tanto hallar el **modelo** para resolver un problema puede ser en sí mismo otro problema. Fundamentalmente esto ocurre cuando se trata de la adaptación o creación del modelo.

La Habilidad: MODELAR

En virtud de las disímiles acepciones que tiene el término **modelo** entre profesionales de diferentes ramas, se hace necesario puntualizar una definición que unifique, al menos para los que enseñan y utilizan las matemáticas, la acepción más comúnmente aceptada.

En su artículo “Acerca de las distintas acepciones de la palabra ‘modelo’”, G. Klimovsky, destaca que un concepto de modelo surge cuando se establece una peculiar relación entre dos estructuras; esta relación posee dos componentes: uno lógico y uno pragmático. El primero establece que una estructura es **modelo** de otra si ella es isomórfica a la otra (este isomorfismo en la mayoría de los casos aparece como una hipótesis de isomorfismo). El componente pragmático consiste en que además, la primera estructura se utiliza para investigar la otra.

El acto de encontrar el **modelo**, es a lo que pudiera llamarse *modelar* (o modelizar como la prefieren algunos autores). En el caso de las modelaciones que se hacen en matemáticas (tanto puras como aplicadas) deben ser consideradas dentro del grupo de las llamadas “modelaciones por isomorfismos”. Naturalmente, como apunta Klimovsky, el éxito de la modelación dependerá, entre otros, de la verdad de la hipótesis de isomorfismo.

También apunta que para lógicos y matemáticos, un **modelo** de un sistema axiomático es una interpretación verdadera, en el sentido de que los axiomas y teoremas deducidos a partir de ellos no son contradictorios.

Es en el primer sentido, al menos para los intereses de la enseñanza general y las carreras de profesionales no matemáticos, que es conveniente asumir una definición de la habilidad *modelar*. Así, si se tienen en cuenta las características generales de cualquier **analogía** en ciencia, a saber: que constituye un sistema de representación que se da como una relación entre dos dominios y sobre la cual opera una simplificación (Gianella, ?), se puede aducir la siguiente definición:

***Modelar**, es asociar a un objeto (matemático o no) un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos con el objetivo de ser investigado a través de él.*

El saber *modelar*, dentro los límites del conocimiento de la persona, posibilita el estudio del mundo objetivo que rodea al hombre a través de la simulación y el procesamiento matemático de los comportamientos y características de los objetos. A decir de Alicia Gianella (?) cumplen una **función didáctica**, pues facilitan el acceso a nociones que de otro modo resultan abstractas, incomprensibles, alejadas de la experiencia; y cumplen una **función heurística**, porque su utilización ha conducido al descubrimiento de propiedades y relaciones que se desconocían y a predicciones exitosas. Por eso los modelos permiten sistematizar la realidad y organizar nuestra experiencia.

En el mundo actual, la formación de esta habilidad es fundamental tanto en los matemáticos como en los profesionales que usan la Matemática, más aún cuando al influjo de la computación se han podido “atacar” fenómenos hasta ahora imposibles de estudiar, se han vuelto obsoletos muchos modelos continuos, siendo sustituidos por modelos discretos, etc. Esta habilidad debe trabajarse en pregrado en los tres tipos fundamentales de modelos: analíticos, numéricos y probabilísticos, en tanto cada uno aporta una forma diferente de interpretar la realidad para su estudio.

Sobre todo en la enseñanza de las matemáticas elementales o aplicadas, al menos siempre que se pueda, es necesario vincular esta habilidad con la de *graficar*, porque la analogía que se produce entre la representación gráfica y el objeto empírico, contribuye, en tanto recurso heurístico, al hallazgo del modelo analítico.

Esto, que por demás pudiera parecer una verdad de Perogrullo para unos, no lo es siempre para todos. Si tomamos en cuenta el abandono de la Geometría que caracterizó al período de la llamada “matemática moderna”, donde el énfasis se ponía en las estructuras y los conjuntos (Guzmán, 1985), lo cual dejó honda huella en la formación de muchos de los actuales docentes de matemática, es explicable que aún en momentos y contenidos donde es factible y conveniente efectuar una representación gráfica del hecho u objeto a analizar, se prescindiera de ello, con explicaciones que van desde que “*lo geométrico no es riguroso y puede obstaculizar más que ayudar en la asimilación de un conocimiento o la resolución de un problema*” hasta que “*no poseo habilidades de dibujo y es preferible no consumir tiempo de la clase en eso*”.

En este trabajo se defiende el punto de vista de que la **modelación geométrica**, en tanto modalidad de la habilidad *graficar*, es necesaria enseñarla en las aulas. El cómo, cuándo y hasta dónde, son temas de seria investigación, como demuestran las investigaciones realizadas en la enseñanza de la Geometría en la escuela cubana (Flores, 1991) e incluso los estudios hechos sobre esta problemática a escala internacional (Gaulim, 1995).

En los experimentos pedagógicos realizados en el 1^{er} Año de la carrera de Ingeniería Industrial en el ISPJAE y la Universidad de Matanzas, así como con estudiantes de Radioelectrónica del ITM “José Martí” se constató que un tratamiento sistémico de la geometría (del plano y del espacio) y del estudio de las funciones, redundaba en una mejor comprensión por los estudiantes de estos contenidos y en una mayor efectividad en la **modelación** de problemas y por ende en su resolución.

En la resolución de problemas se pone de manifiesto, como ya se vio, la estimación y la modelación y ambas acciones transcurren en ocasiones a través de aproximaciones. Al *estimar* se pretende conocer el

resultado grosso modo. Por otra parte, *modelar*, es tomar algo en lugar de otro y eso, en ciertas circunstancias, ocurre como un proceso de aproximación.

La modelación matemática es en sí una aproximación desde el punto de vista epistemológico, pues resulta de un proceso de abstracción de determinadas cualidades de la realidad objetiva. Un modelo es una aproximación del objeto o fenómeno a estudiar. Pero no es éste el sentido que se quiere destacar en el epígrafe siguiente, sino el de la aproximación de un objeto matemático por otro.

La Habilidad: APROXIMAR

El hombre moderno no puede prescindir del trabajo con las aproximaciones, pues entre otras razones, la conquista del mundo en que vive sólo le será posible en la medida en que profundice en las regularidades y fenómenos, inaccesibles en tiempos pasados, pero al alcance de la mano con el arribo de las calculadoras y los ordenadores. La habilidad del hombre en pronosticar grosso modo un resultado, en estimar o calcular un valor cercano al ideal o exacto, en saber elegir un modelo inexacto, pero adecuado para sus propósitos, es característica del quehacer matemático y debe incorporarse al quehacer del estudiante. Esa habilidad es general y tiene muchos contextos de aplicación, por ello debe formar parte de un sistema necesario para el trabajo con las matemáticas.

En un sentido matemático general, pudiera considerarse que

Aproximar, es sustituir un objeto matemático por otro el cual se considera un modelo suyo.

O sea, la aproximación aparece así como un segundo nivel de modelación, pero se considera conveniente distinguirla por sus características particulares.

Obsérvese que bajo la acepción de objeto, al igual que con anterioridad, puede considerarse un número, una función u otro ente matemático que debe ser analizado y que por razones de conveniencia se prefiere transferir el análisis al de otro con ciertos comportamientos similares local o globalmente. En muchas ocasiones, sobre todo en las llamadas matemáticas aplicadas, es suficiente conocer una solución aproximada de un problema por lo trabajoso y finalmente innecesario que sería obtener el valor exacto, aún cuando teóricamente pueda obtenerse.

Aunque los programas de estudio lo declaran y en las aulas se enseñan las reglas de redondeo, se hacen estimaciones y se trabaja con valores aproximados, la experiencia docente nos indica que aún no existe una mentalidad ni una conciencia clara, incluso en el estudiante que llega a las aulas universitarias, de la importancia de ***las aproximaciones como mecanismo de pronóstico, de cálculo y de control.***

En la resolución de problemas ocurren momentos de **aproximación** cuando se desestima un valor exacto y se utiliza, en su lugar, otro valor que lo aproxima. En el Análisis Matemático esta habilidad guarda una estrecha relación con el concepto de límite y encuentra en él, el fundamento teórico para su aplicación. En el quehacer matemático ocurre con frecuencia la aproximación por “truncamiento”; pudieran citarse la aproximación de números irracionales por racionales y la aproximación de funciones analíticas por polinomios de Taylor, entre otros.

Debe también destacarse el papel que juega la formación de la habilidad *aproximar* en el trabajo con los errores, tanto en el sentido de cuantificar como de cualificar la aproximación, o sea la magnitud del error cometido. Esto está presente desde las estimaciones de distancias, volúmenes y otras magnitudes por apreciación, hasta el análisis de la velocidad de convergencia de un método numérico, pasando por las acotaciones del error de interpolación cometido.

El desplazamiento de los modelos continuos por los discretos en la matemática aplicada, a partir del uso cada vez mayor de las computadoras, trae aparejado el uso de las aproximaciones y de la necesidad de saber evaluar cuán “bueno” es un modelo y el cálculo efectuado a partir de él.

La Habilidad: OPTIMIZAR

En el mundo actual, caracterizado de un lado por la alta competitividad y por otro lado por la necesidad imperiosa de una explotación eficiente de los recursos naturales en pos de un desarrollo sostenible de las economías, la **optimización** es, de manera creciente, una conducta obligada de todos los profesionales, empresarios y en general de todas las personas que deben tomar decisiones en el acto de producir o comercializar. Con el desarrollo computacional, los métodos clásicos de optimización van quedando obsoletos y nuevos métodos permiten resolver problemas de optimización hasta ahora inabordables. Luego, es necesario el desarrollo en los estudiantes de la habilidad de *optimizar*, la cual se define como sigue:

***Optimizar**, es encontrar el objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.) que maximiza o minimiza (en algún sentido) la clase de objetos a la que pertenece, o el método óptimo de resolución de determinado problema.*

Se deberá entender por *optimizar* la habilidad del sujeto en encontrar el objeto, el método o el valor óptimo que resuelva un problema, donde existe más de un caso posible.

En la enseñanza de la Matemática debiera educarse al estudiante en la discusión de las diversas vías de solución de un problema, resaltándose la más eficiente; esto contribuirá al desarrollo de esta habilidad. El

uso de las propiedades de las operaciones contribuye a seleccionar las vías ventajosas de cálculo. Obsérvese que la selección del método óptimo es relativa, pues entre otras razones, depende de las posibilidades del sujeto.

En el trabajo con las funciones, la habilidad *optimizar* está estrechamente asociada a acciones como *acotar*, toda vez que el acotamiento es condición necesaria para la existencia de valores extremos. En general, en la resolución de problemas de diversa índole, esta habilidad se relaciona con *modelar*, *resolver* y *aproximar* entre otras.

Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento

Las distintas escuelas de la psicología cognitiva contemporánea (el enfoque histórico-cultural de Vigotsky, la epistemología genética de Jean Piaget y la PCPI) han realizado profundos estudios dedicados a la estructuración del conocimiento y no es casual que una parte considerable de ellos se hayan desarrollado en torno a la estructuración del conocimiento matemático; todas ellas de alguna manera establecen la necesidad de la formación de las estructuras del conocimiento y el desarrollo de habilidades en el sujeto.

Particularmente en Cuba se han desarrollado diversas investigaciones (entre 1989 y 1997), muchas de las cuales han culminado con defensas de tesis de doctorados y maestrías, relacionadas con la estructuración del conocimiento matemático y el desarrollo de habilidades. Es justo destacar que los trabajos de la Dra. Teresa Rodríguez (1991) pueden considerarse los primeros que establecieron un nexo a escala del diseño curricular y de la organización del proceso de asimilación entre estos dos objetivos psicopedagógicos en el campo de la enseñanza de las Matemáticas Superiores.

En la actualidad no se pueden desligar la estructuración del conocimiento y la resolución de problemas y ésta requiere necesariamente del desarrollo de habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas entre otras.

Las HGM están indisolublemente ligadas a un conocimiento “bien estructurado” (Greeno, 1978b) porque ambos son característicos del actuar experto; podría decirse que lo uno soporta lo otro. Es imposible tener un conocimiento fragmentado y poseer habilidades mentales suficientemente generalizadas que operen con él, pues de hecho ellas producirían los reacomodos y conexiones necesarios que redundarían en una estructuración determinada del mismo.

Volviendo sobre lo enunciado por Talízina “*el saber es saber hacer*” (1984) y “*... al ocupar el lugar estructural del objeto de la acción o al formar parte del contenido de la base orientadora, o constituyendo el objetivo de la acción, los conocimientos pasan por las mismas etapas de las acciones (la actividad) en su*

conjunto. La calidad de los conocimientos se determina por el carácter de la actividad que se utiliza para su asimilación.” (...) “...la asimilación de los conocimientos y la formación del sistema, adecuado a ellos, de acciones mentales transcurren como un proceso único” (1988) y como este “saber hacer”, o sea, el de las HGM es generalizado, el conocimiento sobre el que se han formado y operan esas habilidades debe poseer iguales características.

En otro sentido las propias HGM, en particular las que cumplen funciones heurísticas y metacognitivas, realizan un efecto de feedback en el momento en que el propio sujeto *controla* las limitaciones o posibilidades que tiene de acceder a determinada información o de trabajar con determinado cuerpo de conocimientos; o sea, ellas sirven como un indicador de la estructuración del conocimiento.

A continuación se citará someramente la relación particular que tienen las distintas HGM con la estructuración del conocimiento matemático del sujeto:

La habilidad *controlar* permite la estimación, el monitoreo, la toma de decisiones, la verificación y la regulación de la acción del sujeto en el proceso de resolución de un problema. En su carácter de habilidad metacognitiva, ella permite informar al sujeto sobre la posible existencia de fallos en su estructura de conocimientos.

La habilidad *modelar* permite la conexión entre el lenguaje común, la visualización y el dominio de los objetos matemáticos (considerados modelos y asociados a determinados símbolos) en virtud de una cierta estructuración del conocimiento. En ella se pone de manifiesto un profundo proceso de abstracción.

La habilidad *recodificar* permite relacionar estructuras del conocimiento no disjuntas para un experto, pero regularmente inconexas para quien no tiene el conocimiento “bien estructurado”. Quien es capaz de transferir con conciencia, de un dominio matemático a otro, para resolver un problema, posee conocimientos generalizados e interconectados, al menos en esa área.

La habilidad *graficar*, si se asume en el sentido de representar de forma gráfica y sucinta las múltiples relaciones que existen entre diversos objetos matemáticos (p.e. a través de un mapa conceptual o una red semántica), muestra de alguna forma cuán bien estructurado está el conocimiento del sujeto.

La habilidad *identificar*, considerada como la acción de determinar si un objeto pertenece a un concepto, atendiendo a sus características esenciales, permite registrar el volumen de condiciones necesarias y suficientes que el sujeto domina y las conexiones que debe hacer para determinarlo. Esta permite registrar la completitud y grado de conexión de la información almacenada en los nodos cognitivos relacionados.

La habilidad *optimizar*, en el sentido de seleccionar la vía o método óptimo de solución (dentro de los disponibles por el sujeto) para resolver un problema, es un indicador que caracteriza la forma de actuar del experto porque entre otras, ello sobrentiende la existencia de un stock de vías entre las cuales escoger y exige una valoración previa de las características particulares del problema dentro de una generalidad.

En tanto las HGM contribuyen a que la persona posea recursos para acceder a la información que necesite en el proceso de resolución de problemas, es necesario que su formación no se deje a la espontaneidad. El camino del novato hacia la experticia en la resolución de problemas irá transcurriendo mediante la formación de HGM y de una estructura de conocimientos cada vez más compleja, más generalizada y más sólida.

Este epígrafe sólo ha dado pinceladas de esta rica y por demás poco investigada temática, sin embargo se evidencia la relación indisoluble entre un conocimiento estructurado, el desarrollo alcanzado en las HGM y la resolución de problemas. Me limito sólo a esbozar la creencia de que el proceso de estructuración del conocimiento matemático ocurre, consecuentemente con Talízina, a través del propio proceso de formación de las HGM, pero, como regla, a través de la resolución de problemas. Investigaciones futuras podrán corroborar o no tal hipótesis.

Quedan planteados así, numerosos problemas abiertos en torno a la finitud de las HGM y lo más importante, al análisis teórico (psicológico y didáctico) de cada una de ellas, en aras de contribuir a que los docentes puedan instrumentar y lograr su formación adecuada en los estudiantes.

La Enseñanza de la Resolución de Problemas

Debe acotarse que los términos *problema* y *resolución de problemas* han tenido y tienen múltiples acepciones entre investigadores y docentes. Para unos, *problema* es cualquier ejercicio con texto, para otros este término se utiliza cuando se refieren a aplicaciones extramatemáticas. Polya clasificó los problemas en: *problemas a resolver* y *problemas a demostrar*; en ellas, se destaca el componente objetivo. Otros destacan el componente subjetivo, psicológico cuando hablan de *problemas rutinarios* y *no rutinarios*, haciendo clara alusión al conocimiento o no, por parte del sujeto resolutor, de procedimientos o rutinas que le permitan resolverlos.

Alan Schoenfeld (1985a) privilegia esta acepción sobre otras, llamando a los problemas no rutinarios sencillamente *problemas*; a los restantes los considera ejercicios, aunque no por ello los demerita. Para Schoenfeld un problema es una situación verdaderamente problemática para el sujeto resolutor, o sea aquella para la cual no posee procedimientos de rutina que lo conduzcan a la solución.

El psicólogo cubano Dr. A.F.Labarrere asume una definición de *problema* que apoya los razonamientos anteriores. Para Labarrere (1994, pág.19) “*un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa o inmediatamente a la persona*”; o sea, y utilizando sus propias palabras “*una situación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar*”.

Coincidiendo con Schoenfeld y Labarrere en asumir esa acepción, la cual es cada vez más acogida por investigadores y educadores matemáticos, en tanto ayuda a enfocar la atención hacia el problema psicopedagógico que representa la enseñanza y el aprendizaje de recursos para enfrentar situaciones problemáticas.

Por otra parte y consecuentemente con la PCPI, Schoenfeld conduce el proceso de enseñanza de la resolución de problemas, bajo el principio de hacer transparente al novato (estudiante) los recursos con que cuenta el experto (él, matemático) en el proceso de resolución de problemas, aboga por convertir el aula en un “microcosmo matemático”. Este proceso, en que el profesor aparece como modelo de comportamiento, puede manifestarse de tres maneras:

- El profesor, frente a sus alumnos, explica paso a paso el proceso de resolución del problema (conocido para él) tal como si se enfrentara a él por primera vez. Al finalizar destaca y reflexiona sobre las estrategias y heurísticas empleadas.
- El profesor resuelve el problema (conocido para él) con los alumnos, utilizando las ideas de ellos.
- El profesor enfrenta problemas (no vistos por él con anterioridad) presentados por sus alumnos, con el objetivo de mostrar de manera fidedigna cómo un experto actúa ante un problema.

Soy del criterio de que, al menos en la Educación Superior, más que enseñarse debiera educarse a los estudiantes en el empleo de las heurísticas, por lo que prefiero el término “educación heurística” más que “instrucción heurística”, utilizado por otros investigadores (Arango y otros, 1989; Méndez, C.L., 1996), pues es necesario que el estudiante domine esos recursos como plantea Schoenfeld (1985a) en aras de lograr un mejor desempeño en la resolución de problemas. No basta con que el estudiante “vea” al profesor usar los recursos heurísticos que posee al resolver problemas en el aula; quizás esto es válido para el nivel medio de enseñanza, según recomienda Müller (1987), pero en el nivel superior es necesario además enseñarlos y adiestrarlos en su manejo.

Por demás este adiestramiento no puede ser mecánico, pues se conoce de los malos resultados obtenidos en otros países, durante casi una década en que se trató de aplicar como recetas las enseñanzas de Polya y

sin embargo “los resultados de este tipo de instrucción no mostraban una diferencia notable en el aprovechamiento matemático de los estudiantes” (Santos, 1994, pág.18)

El razonamiento plausible o heurístico hay que formarlo a través del empleo consciente de los recursos que lo caracterizan hasta que sean dominados por el sujeto, o sea, hasta que se hallan convertido en habilidades, pero esto plantea el dilema de su formación a través de un material específico o en un contexto general.

De manera inconsciente existe la creencia entre los docentes que la automatización en la resolución de problemas de keyword es condición suficiente o quizás necesaria para la resolución de problemas dentro de un tema determinado. En general, no es ni lo uno ni lo otro, pues estos “problemas” pueden llegar a convertirse en meras habilidades de cálculo, de un tipo diferente porque poseen un texto, generalmente de un contenido no matemático, que hay que interpretar, pero donde todo lo que hay que hacer es conocido desde el primer momento.

No obstante, si el conocimiento de las características esenciales de estos tipos de problemas es incorporado a la base de orientación, esto puede tributar a una orientación más sistematizada y por tanto que fluya con mayor rapidez y certeza en el momento de identificación de la vía de solución de un problema. O sea, que es necesario el aprendizaje de información relevante sobre los problemas típicos (de keyword u otros) en una esfera determinada, del reconocimiento de patrones.

Reconocimiento de patrones

Según investigaciones de los psicólogos cognitivos, parece ser que un experto guarda en su estructura de conocimientos, información relativa a problemas tipificados, la que usa como recurso para resolver problemas de manera eficiente en muchas ocasiones. Los expertos, a diferencia de los novatos, reconocen una gran cantidad de patrones, lo cual les facilita la orientación rápida hacia la solución de determinados problemas. Se habla de que un Gran Maestro de ajedrez “posee un repertorio de aproximadamente 50 mil configuraciones o esquemas” (Santos, 1994, pág.19) el cual le facilita el análisis de la situación. De forma análoga sucede con expertos en otras materias, si la representación que el mismo se hace del problema, coincide con uno de los patrones asimilados de su experiencia e incorporado a su estructura cognitiva.

Pero no sólo el poseer una base amplia de patrones del campo específico diferencia al experto del novato, sino también el carácter sistematizado de esa base. Para el novato los patrones aparecen discretizados en su base de conocimientos y “*tienden a no ver los patrones relevantes, porque no los saben o porque carecen de un camino para accederlos rápidamente*” (Santos, 1994); en el experto están agrupados de acuerdo a sus características esenciales, esto le permite un reconocimiento rápido de situaciones donde estos patrones se

aplican y el razonamiento va “*del reconocimiento directo hacia la solución a través del trabajo con los patrones*” (Santos, 1994).

La división en problemas rutinarios y no rutinarios, o en problemas y ejercicios (como Schoenfeld), abundantemente referida en la literatura, en tanto destaca el conflicto psicológico que provoca en el sujeto el problema planteado, vela divisiones más finas que también privilegian el punto de vista psicológico y que deben ser destacadas.

Si una vez comprendida la situación planteada, la dificultad surge en la modelación de la misma, entonces puede clasificarse en problema rutinario, si sólo hay que identificar el modelo (reconocimiento de un patrón), o en problema no rutinario, si hay que adaptar un modelo conocido a la nueva situación o crear un modelo para el problema.

Los llamados problemas de keyword tienen la característica de que, en el sujeto, el tránsito problema-ejercicio ocurre rápidamente, pues el patrón a reconocer es, en lo fundamental, una palabra clave. Aún cuando en la literatura los ejemplos que se citan se refieren en su mayoría a problemas presentados a los niños para la aplicación de las operaciones aritméticas básicas, muchos otros ejemplos se pueden citar, incluso en las Matemáticas Superiores. Sirvan como ejemplo los problemas de optimización que se presentan en un curso de Cálculo Diferencial, pues como lo que se pretende es que el estudiante aplique el concepto de derivada para la determinación de los extremos de la función objetivo, el reconocimiento a priori de las palabras *máximo* o *mínimo* en el texto del problema, ubica rápidamente al estudiante en el tipo de problema y el método (sólo se estudian dos) que debe emplear para resolverlo. La complejidad puede surgir en la determinación de los elementos del modelo, pero la estructura de éste es siempre la misma.

Un conjunto de problemas a resolver mediante el reconocimiento de patrones que debe diferenciarse por su importancia, es el que se forma a partir de la asimilación sistémica de determinados contenidos.

En tanto los conocimientos estructurados de forma sistémica, permiten abordar objetos no estudiados con anterioridad, siempre que se ajusten a las leyes de funcionamiento del sistema, esto permite la resolución de una gran cantidad de ejercicios que en ese momento no pueden ser considerados como problemas para el sujeto, o en otras palabras, dichos ejercicios pueden ser considerados problemas rutinarios, aunque de un carácter distinto a la mayoría de ellos (incluidos los problemas de keyword). La resolución de un problema de tipo sistémico pasa por el reconocimiento de un patrón de elevado grado de generalización, el sistema de conceptos y habilidades asimilado y las leyes de funcionamiento del mismo.

En el Cuadro # 4 se resume lo expresado anteriormente. Asimismo, en el Cuadro # 5 se muestra el comportamiento que debiera tener un sujeto, que haya asimilado determinado conjunto de contenidos específicos

como sistema, en el momento de resolver un problema de tipo sistémico. En él se hace énfasis en la característica particular del reconocimiento de patrones en cada uno de los cuatro tipos de enfoques sistémicos abordados en los epígrafes anteriores de la Tesis y en el que se abordará más abajo.

El poseer un amplio espectro de patrones reconocibles por el sujeto contribuye a una resolución efectiva de problemas, sin embargo no es suficiente. La resolución exitosa de ejercicios con patrón conocido es importante, pero no basta con ello, eso sólo constituye el nivel de partida para propósitos superiores, los cuales la enseñanza tradicional no llega a formar en los alumnos promedio.

El desempeño en la resolución de problemas

Desde el momento en que el sujeto asume un problema e intenta resolverlo se ponen en función múltiples componentes de su pensamiento: su sistema de creencias y valores, que influirá tanto en la motivación, como en los posibles bloqueos de tipo afectivo y volitivo; sus estructuras cognitivas y bases de orientación, que facilitarán o impedirán el acceso a la información relevante de que disponga para resolver el problema; sus recursos meta-cognitivos, que le permitirán establecer una planificación y control adecuados o no de su actividad; y sus recursos heurísticos, que le ayudarán a “despejar el camino” y lograr el *insigth*, como dirían los psicólogos de la Gestalt, más temprano, más tarde o nunca.

De lo anterior se infiere que resolver un problema es un proceso extremadamente complejo. Si bien no resulta fácil, desde el punto de vista investigativo, poder develar los mismos y hacerlos transparentes, en oposición al conductismo no podemos conformarnos con el producto final de la actividad, debe medirse el proceso, el comportamiento integral del sujeto en la resolución de problemas, su desempeño.

Investigadores cubanos (A.F.Labarrere, O.Valera, P.Rico) han utilizado el término *desempeño intelectual*, como un componente de la personalidad que aparece como una manifestación del desarrollo del sujeto en el ámbito escolar. Así, se refiere que para medirlo es necesario “*abordar el enfrentamiento a tareas que caracterizan la estructura de la actividad intelectual: su carácter de actividad propositiva, la solución de problemas y el control y la valoración de su actividad por el individuo*” (A.Amador, 1995)

En tanto la resolución de problemas está en el centro de nuestra investigación y la componente cognoscitiva tiene un peso específico considerable en dicho proceso, se decidió acotar el estudio a aquellos aspectos relacionados con la estructura del conocimiento de los estudiantes y las formas en que los movilizan, consciente de que este es un enfoque parcial y que en dicha actividad influyen un sinnúmero de otros factores como ya se ha dicho.

Así se define el término *desempeño en la resolución de problemas* como el comportamiento cognoscitivo integral del sujeto en dicha actividad, partiendo de que el resolutor posea los conocimientos necesarios para darle alguna solución satisfactoria. O sea, que dicho término pudiera considerarse como un aspecto del término *desempeño intelectual* desarrollado por los psicólogos anteriormente citados.

En general, la enseñanza tradicional se preocupa sólo por medir el aprendizaje de los contenidos que fueron objeto de estudio y extrae sus conclusiones a partir de los resultados alcanzados por los estudiantes en las evaluaciones, donde como regla se constata el *saber* y el *saber hacer* en tipos de ejercicios con los cuales el estudiante está familiarizado y en los cuales se ha entrenado suficientemente. La ejecución satisfactoria de esos ejercicios es el indicador de la calidad del aprendizaje.

Investigaciones pedagógicas desarrolladas anteriormente en Cuba han centrado la atención en la calidad de dicho aprendizaje y cómo elevarla. A diferencia de la enseñanza tradicional, en ellas se emplean otros indicadores (p.e. las características de las habilidades y conocimientos asimilados: generalización, reflexión, solidez, etc.)

Sin embargo, si bien el aprendizaje es condición necesaria para el desarrollo, lo que justifica que se investigue y se insista en lograr niveles cualitativamente superiores en él, es también muy importante constatar, al finalizar un determinado período de instrucción, el desarrollo alcanzado por los estudiantes, pues éste a fin de cuentas debe ser el objetivo principal de toda la enseñanza.

Medir el desarrollo de cada estudiante en un momento determinado es un proceso investigativo sumamente complejo, pues depende del desarrollo inicial alcanzado (antes de la instrucción), el cual difiere de un alumno a otro, de la zona de desarrollo próximo para cada nuevo contenido a asimilar y del ritmo en que ese desarrollo se produce; esos también son particulares para cada individuo. Además, no existen aún los instrumentos y los indicadores suficientes en la teoría para dicha medición.

Tomando como base la necesidad de lograr un pensamiento productivo en los estudiantes y los resultados alcanzados en las investigaciones psicopedagógicas que preceden a esta Tesis, en particular las realizadas por A.F.Labarrere, H.Hernández, T.Rodríguez, P.Torres, F.Martínez y R.Calderón estimo que es necesario considerar *el desempeño en la resolución de problemas* como un indicador del desarrollo del estudiante, o sea del desarrollo completado como diría Vigotsky (1982). La diferencia esencial con las mediciones tradicionales es que analizando el *desempeño* se puede entrever el lugar en que se encuentra el estudiante, en tanto novato, en su tránsito hacia experto, se puede apreciar el grado de formación de determinados recursos del pensamiento, así como las posibles deficiencias en sus bases de orientación respecto al problema planteado.

El *desempeño en la resolución de problemas* es analizado a tenor con el enfoque histórico-cultural (TA) y la PCPI, lo cual no ha sido registrado de esa forma, al menos en Cuba, con anterioridad.

A tenor con la TA, la resolución de un problema constituye una actividad, que como otras, posee momentos de motivación, orientación, ejecución y control. A tenor con la PCPI el sujeto resolutor trata de descubrir e identificar la presencia de un patrón conocido en el problema que tiene ante sí, selecciona estrategias y emplea recursos heurísticos que le facilitan el momento de *insigth*. Esos elementos se tuvieron en cuenta como parámetros para analizar el *desempeño en la resolución de problemas*.

En el momento de motivación tanto al principio como a lo largo de la resolución del problema se pone de manifiesto la coincidencia o no del objetivo de la actividad con los motivos del sujeto y su sistema de creencias como plantea Schoenfeld.

En el momento de orientación (inicial), se ponen de manifiesto el reconocimiento de patrones y la selección de estrategias de solución, dos características distintivas del actuar experto. En este momento el sujeto resolutor utiliza recursos heurísticos y la planeación de su actividad como recurso metacognitivo.

En el momento de ejecución es donde se ponen de manifiesto la calidad de las operaciones y conocimientos formados que intervienen en el proceso de resolución, así como del nivel de desarrollo de las HGM que intervienen en el mismo.

En el momento de control (autocontrol), que aparece a lo largo de toda la resolución del problema, el sujeto muestra su independencia, su capacidad de tomar decisiones en el momento indicado; “cambiar el rumbo” si es necesario, o sea, abandonar la vía de solución elegida y tomar otra, etc., así como valorar los resultados alcanzados en cuanto a su alcance y pertinencia.

La imagen integrada de todos esos elementos, o sea su *desempeño en la resolución de problemas*, constituye sin dudas un indicador del desarrollo alcanzado por el sujeto en esta actividad. En el mismo se identifican tres niveles fundamentales, a saber: un desempeño satisfactorio, un pobre desempeño y un desempeño no apreciable.

El primer nivel identifica un determinado desarrollo completado por el sujeto; el segundo nivel sugiere, en nuestra consideración, que el sujeto se encuentra en la zona de desarrollo próximo, aunque esto no puede asegurarse pues no se le brindó ayuda externa al estudiante para la resolución de los problemas, lo cual develaría si era capaz o no de resolverlos. En este nivel se discriminan dos subniveles: cuando existe un progreso sustancial hacia una solución correcta del problema y cuando no existe, aunque se evidencian determinadas señales positivas de desarrollo.

El tercer nivel queda reservado para aquellos casos en que con el instrumento utilizado no pudo medirse el *desempeño*, o sea que el estudiante puede o no estar en la zona de desarrollo próximo, pues pudieran influir entre otros, factores de índole afectivo o volitivo, o la carencia de un conocimiento estructurado y una base de orientación incompleta que impide que el estudiante pueda acceder a la información pertinente, no quedando registro de sus búsquedas y razonamientos.

En el Capítulo III se hace un análisis más detallado de los parámetros y niveles.

Concepción didáctica

Entre los psicólogos cognitivos existe la convicción de que tanto al conocimiento específico como a las habilidades generales son necesarios para la resolución efectiva de problemas. A decir de Simon (1980, pág.86) *“el conocimiento específico y las destrezas generales para resolver problemas son como tijeras: «Las tijeras tienen en verdad dos cuchillas y (...) la educación profesional eficaz llama la atención tanto sobre el conocimiento específico en la materia como sobre las destrezas generales”*. Sin embargo, R.Mayer (1983, pág. 401) aclara que *“todavía no existe un consenso acerca de cuánta información específica y cuánta información general debería contener un curso de resolución de problemas”*.

Partiendo de ello surge la hipótesis que rige esta Tesis, con la particularidad de que la estructuración del conocimiento específico (en el plano del diseño) debe ser sistémica para propender a una estructuración análoga en el plano mental del estudiante, y de que las *“destrezas generales”* no debían ser otras que las HGM, las cuales al ser usadas por el sujeto resolutor “arrastran” al conocimiento relacionado y permiten un mejor desempeño en la resolución de problemas.

Esta Tesis defiende, como concepción didáctica, el desarrollo de una enseñanza sistémica y a través de la resolución de problemas, la cual se desarrolla en torno a la formación de determinadas HGM asociadas al contenido específico.

Dicha concepción conllevó a la creación y desarrollo de un tipo particular de enfoque sistémico, el cual se discutirá en el próximo epígrafe. También en esta Tesis se discuten las experiencias pedagógicas desarrolladas por el autor, con la colaboración de otros investigadores, que sustentan esta concepción.

La resolución de clases de problemas mediante la variación de los instrumentos

Fundamentación teórica

Como resultado de la experiencia acumulada durante casi seis años en investigaciones relacionadas con la formación de HGM y la estructuración sistémica de los contenidos de estudio y ante la necesidad de dar respuesta al problema de investigación planteado en la Introducción, surgió el cuestionamiento sobre si los

únicos tipos de estructuraciones sistémicas eran los recogidos en la literatura (estructural-funcional, genético y de reglas y unidades) y si era posible dar mayor peso específico a la enseñanza de la resolución de problemas en el contexto de una organización sistémica, en tanto esta línea no había sido prácticamente trabajada en las investigaciones precedentes en matemáticas superiores.

Por una parte, la PCPI concibe que el aprendizaje ocurre tras **la modificación sucesiva de las estructuras cognitivas** y que ésta ocurre cuando el individuo se pone sistemáticamente ante una serie graduada de situaciones problémicas para él. Por otra parte, del materialismo dialéctico se sabe que la contradicción entre lo conocido y lo desconocido es la fuente del movimiento del pensamiento. Así, surge la idea de concebir una organización sistémica que privilegiara la resolución de problemas.

Por su parte, el enfoque histórico-cultural resalta el papel que tienen los instrumentos como mediadores en el proceso de asimilación de la cultura humana; y consecuentemente con el materialismo histórico, si a nivel de la sociedad estos identifican el nivel de desarrollo alcanzado por determinado grupo humano en el proceso de producción, análogamente los instrumentos teóricos que emplee conscientemente un estudiante, identificarán el nivel de desarrollo cognitivo alcanzado por él.

El planteamiento al estudiante de los problemas reales que se les presentaron al matemático en un momento determinado del desarrollo de la ciencia, cuando aún no existían los modelos o los instrumentos teóricos para resolverlos, es consecuente con las exigencias de esas teorías.

Sin pretender crear en el aula a escala de 1:1 las condiciones del trabajo del científico ni caer en los errores del llamado "aprendizaje por descubrimiento" (Ausubel, 1983), el estudiante debe enfrentar, con sus preconcepciones formales e intuitivas, los mismos problemas e ir "viajando" en la asignatura a través de los momentos principales del desarrollo de la ciencia, o al menos a través de una organización lógica (aunque quizás no rigurosamente histórica) en que se eleva el grado de dificultad de los problemas presentados o se plantean metas cualitativamente más elevadas en su solución.

Así, la concepción que se elaboró tuvo en cuenta presupuestos y resultados de diferentes corrientes psicopedagógicas, tratando de armonizarlos y concretarlos en una variante pedagógica: la concepción de una asignatura a través de la **resolución de clases de problemas variando los instrumentos de solución**.

La variante que se elaboró es un nuevo tipo de enfoque sistémico, en tanto:
Difiere de los existentes, pues en él no aparecen estructuras funcionales (invariante, célula) a partir de las cuales se desarrolle el sistema, ni el mismo se conforma por la aplicación de determinadas reglas sobre un conjunto de unidades preestablecidas.

El contenido específico de la asignatura se organiza como un sistema de conocimientos y procedimientos dinámicamente relacionados (en el sentido de Chiavenato) con el objetivo de desarrollar determinadas HGM.

La ley de movimiento del sistema es la resolución de un número cada vez mayor de problemas de complejidad creciente, contenidos en determinadas clases, para lo cual será necesario la búsqueda de nuevos y más potentes instrumentos de solución de los mismos.

El sistema admite múltiples descripciones en tanto: el abordaje de los contenidos objetos de estudio responde a la lógica de la Matemática como ciencia (carácter de precedencia de unos respecto a otros); cada clase de problemas se corresponde con una HGM específica; cada tema de la asignatura brinda nuevos instrumentos de solución para cada una de las clases de problemas, entre otras descripciones posibles.

Los pasos que se siguieron en la conformación de esta concepción fueron los siguientes:

1. Determinar los **instrumentos** que provee el contenido de la asignatura para la resolución de problemas relativos a él.
2. Determinar **todos los problemas** que pueden ser considerados como aplicaciones inmediatas del contenido objeto de estudio, siempre que éstos no rebasen los límites establecidos en los objetivos del programa.
3. Agrupar dichos problemas en el menor número de **clases** posibles, agrupándolos por el objeto de estudio del problema y no por el instrumento con que se resuelve,
4. Organizar el bloque de contenidos de forma tal que se lleve de frente la resolución de las distintas clases de problemas y en cada tema permanezca invariable el tipo de instrumento a utilizar.

Considero que esta variante, en el mejor espíritu de Skemp (1994), posibilita al estudiante trabajar con sus estructuras de conocimiento, ponerse en el punto de vista del prójimo y relativizar su propio punto de vista, revisar sus propios esquemas. Además, como diría H.Hernández (1997), le permite superar la unidireccionalidad del conocimiento.

Aplicación en la enseñanza de una asignatura específica

A continuación se expondrá la aplicación de dicha concepción didáctica a la enseñanza de una asignatura específica, la Matemática I para la carrera de Ingeniería Industrial.

Tomando en consideración lo expuesto en el epígrafe anterior, y el hecho de que el curso se diseñaría para futuros profesionales no matemáticos, se procedió a centrar la atención en los problemas de aplicación del Cálculo Diferencial (CD) (que es la parte más importante de la asignatura Matemática I para Ingeniería

Industrial) y concebir una organización en torno a ellos, o sea que a través de su aprendizaje se establecieran las estructuras de conocimientos necesarias que exige la disciplina a esta asignatura y el desarrollo de HGM que garantizaran el trabajo con esos y con nuevos conocimientos a lo largo de la carrera.

En investigaciones previas desarrolladas para el perfeccionamiento de la disciplina Matemática General en la carrera de Ingeniería Industrial apareció la *optimización* como una de las temáticas ineludibles y sobre la cual se incidía varias veces a lo largo de la carrera. También se refiere esta necesidad por otros autores y no sólo en esta carrera, sino también en la de Ingeniería Mecánica (Mariño, 1994).

La teoría clásica de máximos y mínimos ha cedido su lugar a la programación lineal y no lineal, a la teoría de toma de decisiones y otras que enfrentan con acierto los cada vez más complejos y disímiles problemas de optimización. Sin embargo los expertos (por ejemplo el norteamericano Ralph Pike, 1989) consideran necesario seguir enseñando estos conocimientos, que pudieran ser asumidos como fundamentos para la teoría general.

Asimismo, el creciente uso de los ordenadores y con él, el auge en el uso de las matemáticas discretas trae aparejada la *aproximación* como proceso de simplificación y renuncia a lo exacto por inaccesible o dificultoso, pero a su vez plantea nuevos retos teóricos relacionados con la validez del modelo y la velocidad de convergencia de determinado método a la solución exacta. La aproximación de funciones abordadas con las técnicas del CD son el cimiento para comprender e introducirse en la moderna teoría de la Aproximación Matemática.

Así, los problemas de *aproximación* y de *optimización* aparecen como de gran actualidad y presencia en el quehacer ingenieril e incluso de otros profesionales no matemáticos. Estos problemas han permanecido como las principales aplicaciones tratadas en cualquier curso de CD y aún hoy en día, aunque no bajo la forma del Análisis Matemático clásico, constituyen áreas de intensa investigación matemática, vinculadas directamente a la ciencia y la tecnología de avanzada.

También se discriminaron los llamados problemas de razón de cambio entre dos o más magnitudes (que incluye el cálculo de la derivada por la definición), problemas de determinación de asíntotas y problemas de acotamiento de funciones, así como los problemas de comparación de infinitos e infinitésimos (entre los cuales están los que conducen a la aplicación de la Regla de L'Hôpital). O sea, todos ellos podrían ser considerados problemas de *comparación*.

Debe destacarse que el agrupar bajo la denominación de 'problemas de *comparación*' tan amplia gama de situaciones diferentes, la cual revela un rasgo esencial, común a todos esos problemas, no fue encontrado en la bibliografía (matemática o psicopedagógica) revisada.

La *graficación* de funciones, como recurso que permite ilustrar lo deducido analíticamente y que posibilita una mejor asimilación, porque puede integrar el conocimiento y colegir las relaciones existentes entre diferentes objetos matemáticos, cobra especial importancia en el CD, por encima de otros dominios matemáticos. Los problemas de *graficación* posibilitan la utilización eficiente de los principios de *la unidad de lo concreto y lo abstracto* y de *visualización* en la enseñanza.

Así, se agruparon los problemas del CD en esas cuatro clases, cada una de las cuales tiene asociada de manera natural una HGM que predomina.

La habilidad *modelar* está presente en la resolución de cualquier problema, pues es la que permite la formalización integrada del razonamiento en el lenguaje matemático, posibilitando el trabajo con los conceptos (**función**, **límite** y **derivada**) y en consecuencia su asimilación en calidad de modelos matemáticos muy importantes, que pueden fungir: como *objeto*, si es el objeto de estudio, o *instrumento*, si se emplea para obtener información sobre el *objeto*, en el proceso de resolución de problemas.

Por ejemplo, en un problema de optimización clásico, aparece el concepto función como el *objeto* sobre el que recaerá el proceso de resolución del problema, al usarse para modelar la función objetivo; y podría utilizarse el concepto derivada como *instrumento*, para hallar los posibles puntos de extremo de dicha función.

La asignatura se concibió como un sistema de contenidos matemáticos (conocimientos + habilidades en su indisoluble relación) que poseía niveles que guardaban internamente una unidad, una lógica cognoscitiva y procedimental. Estos niveles, que desde el punto de vista didáctico se convierten en temas, vienen determinados por los hitos que representan en la resolución de las clases de problemas antes mencionados, bajo la concepción de llevarlos todos de frente a lo largo de la asignatura, toda vez que están relacionados con el desarrollo de habilidades generales.

El salto de un nivel (tema) a otro no viene dado, como sucede tradicionalmente, por que responda a la precedencia de ciertos contenidos para garantizar el aprendizaje de otros, aunque esto por supuesto se cumple, sino por expirar las potencialidades de los instrumentos que el nivel presente le brindó, hecho que el alumno percibe como una necesidad cognitiva cuando se enfrenta a un problema cualitativamente más difícil.

La presentación de problemas (debidamente seleccionados por el profesor) al finalizar cada tema crea en los estudiantes situaciones problémicas del tipo de las “que surgen cuando se descubre la falta de correspondencia entre los sistemas de conocimientos (...) y los requisitos que se les plantean a la hora de resolver nuevas tareas docentes”, según la clasificación de T.V.Kudriávsev (Matjmútov, 1983)

No se explota sólo la motivación intrínseca que provoca el no poseer los recursos necesarios para resolver un problema, sino también el que la resolución del mismo puede ser muy trabajosa si se utilizan los instrumentos de que se disponen hasta el momento.

Dialécticamente hablando, la contradicción generada por la necesidad de resolver un problema y la incompetencia para resolverlo, motiva la necesidad del cambio, del salto, que ocurre en los dos planos: en el de diseño primero y en el cognoscitivo después, aunque en el aula pareciera que transcurre a la inversa. Esto trae como consecuencia que el estudiante sea un sujeto activo que es consciente de sus competencias e insuficiencias y está guiado por un objetivo, el cual al ser activado sistemáticamente a través de la problematización propende a convertirse en motivo para él.

En el Cuadro # 6 se ilustra la concepción grosso modo de la asignatura.

Aunque por los nombres dados a los temas, pudiera aparentar una estructuración tradicional de la asignatura, el contenido y la organización interna de cada uno, la hacen esencialmente diferente.

Esta concepción se desarrolló experimentalmente en la carrera de Ingeniería Industrial en el ISPJAE y la Universidad de Matanzas y la misma conllevó un arduo trabajo metodológico sobre todas las componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje; o sea, se reformularon los objetivos, se reestructuraron los contenidos, se utilizaron métodos activos (fundamentalmente problémicos), se elaboraron tarjetas de estudios y otros medios para apoyar el proceso, se elaboraron las evaluaciones a tono con la nueva forma en que se estaba enseñando. Por el trabajo realizado por los profesores Benito Gómez y Milagros Horta de la Universidad de Matanzas, a esta asignatura se le dio la categoría de “asignatura mejor preparada” en dicha universidad.

Consideraciones metodológicas

En el Tema # 1 “Funciones” se plantea el problema de la **aproximación** asociado a la resolución gráfica de ecuaciones (con y sin el uso de softwares graficadores) y la **optimización** a problemas de determinación de máximos y mínimos en problemas que se modelan por funciones conocidas por el estudiante de la Enseñanza Media (cuadráticas, trigonométricas, etc.) o funciones monótonas en el dominio del problema, para lo cual el estudiante puede trabajar de forma sencilla usando tan sólo las definiciones. La **comparación** se presenta a través del acotamiento de unas funciones por otras, resultando como caso particular el concepto de función acotada. La **graficación** está presente desde la introducción de los diagramas de Venn en los elementos de Teoría de Conjuntos, los diagramas de inferencias en los elementos de Lógica y el repaso y uso de las gráficas de las funciones elementales principales para resolver problemas donde intervienen otras funciones.

En este tema se dedica tiempo al trabajo con las definiciones, fundamentalmente a las de las propiedades de las funciones y se estructura en torno a ellas una red de nodos cognitivos. Se le hace corresponder a cada propiedad estudiada una imagen o interpretación geométrica.

Se emplea con asiduidad la regla heurística "sustituir los conceptos por sus definiciones", tan necesaria en ocasiones en la resolución de problemas o la demostración de teoremas.

En el Tema # 2 "Límite y Continuidad" aparece el concepto de límite, el cual está claramente asociado a un proceso de **aproximación**; sin embargo, esta relación no es suficientemente explotada en los cursos tradicionales de Cálculo. Si bien la imagen de cualquier punto muy próximo al punto-objeto del cálculo pudiera ser considerada como un valor aproximado del límite de la función en dicho punto, la consideración inversa es también válida por su carácter recíproco, y es precisamente éste uno de los elementos que se utiliza para vincular, desde el punto de vista práctico, la existencia del límite y el cálculo aproximado. Análogamente ocurre con la continuidad.

Asimismo, la existencia de límite o la continuidad de una función en un punto son condiciones suficientes para el acotamiento de la misma, en al menos una vecindad del punto-objeto del análisis, apareciendo así la posibilidad del planteamiento de problemas sobre el acotamiento de funciones (problema de **comparación**), los cuales están íntimamente relacionados con los problemas de **optimización**.

En este tema se estudian, ya desde la primera clase, las asíntotas, vinculándose a la velocidad de convergencia de funciones y en torno a ello se presentan problemas que el estudiante puede resolver sin tener que esperar al estudio del trazado de curvas, aunque cada nuevo conocimiento es aprovechado para ir modificando las estructuras cognitivas que el estudiante posee en cuanto a una representación más cabal de las funciones, tanto gráfica como analíticamente.

Este tratamiento es aprovechado para formar cadenas de inferencias lógicas en la resolución de problemas, así como para reforzar los conceptos de límite por un conjunto, límites laterales, continuidad y los tipos de discontinuidad y explotar la dinámica entre las propiedades locales, así como introducir la notación "o-pequeña" de Landau para la relación entre el error de aproximación (incremento de la función) y el incremento de las variables y la comparación entre infinitos e infinitésimos.

También en este tema se tratan los conocidos teoremas de Bolzano y de Weierstrass, los primeros asociados a la **aproximación** y como fundamentación del Método de Bisección del intervalo y del Método de la Secante para la resolución aproximada de ecuaciones. Los teoremas de Weierstrass permiten asociar la continuidad al acotamiento y la **optimización**.

El Tema # 3 se presenta a partir de los problemas que en la propia historia de la Matemática condujeron a los conceptos de derivada y diferenciabilidad.

El Teorema de Fermat brinda el nexo entre los conceptos de derivada y diferencial con la **optimización**; a partir de ahí se definen los conceptos asociados y se buscan condiciones necesarias y suficientes para cerrar definitivamente "el círculo de sospechosos" de los puntos de extremo de una función. Desde el primer tema se habían incorporado los puntos frontera, en el tema anterior se incorporaron los puntos de discontinuidad y ahora los puntos críticos estacionarios y no estacionarios. La primera condición suficiente que se encuentra es la resultante del corolario del conocido Teorema del Valor Medio de Lagrange, que relaciona la monotonía y la existencia de extremos locales.

Los métodos de sustitución y de los multiplicadores de Lagrange son discutidos, utilizándose sólo las propias características del problema como condición suficiente para la determinación de los extremos condicionados.

En la mayoría de los problemas de aplicación que se presentan en la práctica no se requiere de la investigación analítica de los extremos a partir de las condiciones suficientes de "segundo orden", pudiendo decidirse a partir del análisis de las condiciones del mismo. Un estudio más profundo de los extremos locales de funciones de varias variables se deja para el próximo tema, cuando se estudien las derivadas de orden superior.

El plantear problemas donde se requiera una **aproximación local** mejor que la obtenida en virtud de la continuidad, permite la motivación por tratar de encontrar nuevas fórmulas de cálculo aproximado y para ello investigar cuáles características de las funciones permitirían sustentarlas. Así surge la diferenciabilidad como esa característica y la recta y plano tangentes como objetos geométricos asociados a ella para funciones de una y de dos variables respectivamente. El proponerse "linealizar" funciones de expresión analítica complicada e inferir algunas características locales suyas, es una de las tareas más importantes que se debe trabajar.

Realmente desde el punto de vista práctico, los cálculos aproximados usando el diferencial, han perdido actualidad como resultado de la invasión de los medios electrónicos de cálculo en la economía, la industria y la vida diaria. Los problemas que en este sentido se proponen, están asociados a estimaciones de errores o de valores a partir de otros tabulados.

Los problemas de **comparación** aparecen desde el planteamiento mismo del concepto de derivada, así como en la utilización de la Regla de L'Hôpital. La determinación de infinitésimos equivalentes mediante el uso del

diferencial, establecen una conexión entre los problemas de **comparación** y los de **aproximación**. En este último caso el problema de comparación conlleva a un problema de aproximación.

Los problemas de **graficación** aparecen relacionados a la interpretación geométrica de la derivada y el diferencial y en consecuencia, al trabajo con rectas tangentes y normales y los planos tangentes. La derivada ordinaria de 1^{er} orden suministra útiles informaciones para el trazado de curvas, las cuales pueden ser ahora de mayor complejidad que las abordadas anteriormente.

Hasta aquí se demostraron y agotaron las potencialidades de las derivadas de 1^{er} orden; están dadas las condiciones introducir el Tema # 4 y con él el estudio de las derivadas de orden superior.

En el Tema # 4 se precisa buscar una mejor **aproximación** local de las funciones y por ello se “descubren” los polinomios de Taylor de 2^{do} grado (o mayor que 2). Se continúa profundizando en la **comparación** de infinitos e infinitésimos, empleándose ahora en el cálculo de límites, los polinomios de Taylor en calidad de infinitésimos equivalentes a los dados (se repite la vinculación entre los problemas de **comparación** y de **aproximación**). Además se aborda el Método de Newton para la resolución aproximada de ecuaciones.

Se presentan problemas de **optimización** donde son necesarias las condiciones de 2^{do} orden para la determinación de los extremos locales, introduciéndose el determinante hessiano y a partir de él, el Teorema de Schwartz de la igualdad de las derivadas cruzadas, lo cual ocurre de manera natural.

El trazado de curvas (problema de **graficación**) llega a su punto más alto, pues se determinan además de las informaciones obtenidas por los conocimientos asimilados en los temas anteriores, los intervalos de concavidad y/o convexidad y los puntos de inflexión.

La asignatura termina con clases de ejercitación y sistematización, donde se presenta una diversidad de ejercicios y se discute la vía más eficiente de resolverlos. Entre ellos no falta el trazado de curvas por su carácter integrador.

La variante de organización sistémica presentada en este trabajo presenta los siguientes presupuestos metodológicos:

Se clasifican los problemas típicos de la asignatura en cuatro clases, con el propósito de formar en el estudiante una base de orientación generalizada y completa sobre los problemas más relevantes a resolver con los modelos y técnicas del CD.

El orden jerárquico de esas cuatro clases de problemas dependerá de las exigencias del modelo del profesional para el cual se diseñe.

La ejercitación sistemática de la resolución de problemas permite el desarrollo de la habilidad modelar, declarada por muchos expertos como una habilidad de primer orden en ingeniería.

Son consustanciales a estas clases de problemas, las HGM optimizar, comparar, graficar y aproximar, las cuales son fundamentales además en otras asignaturas de la disciplina y del currículo.

Las habilidades graficar y aproximar también se forman en otra dirección: como recurso de pronóstico o heurístico y como recurso de control en la resolución de problemas.

Esta concepción utiliza como recurso didáctico el agotar en cada tema las potencialidades del instrumento conocido por el estudiante y el planteamiento de problemas donde éste sea insuficiente, somete al estudiante a un sistema de situaciones problémicas a lo largo de la asignatura, cuyas soluciones se encuentran con la investigación, el aprendizaje activo y el “descubrimiento” de los distintos componentes del aparato conceptual y metodológico del CD.

El presente trabajo refleja ante todo un esfuerzo, una intención de explorar nuevas formas de enseñar las Matemáticas Superiores, más a tono con los nuevos tiempos y con los retos que estos nos plantean. En ella se tienen en cuenta de manera armónica presupuestos teóricos de la PCPI y la TA.

H.Hernández valora que “lo más importante, es que independiente del tratamiento de cada clase de problemas, se pone sistemáticamente al estudiante ante un mosaico de problemas donde se entrena en la identificación de la **clase de problemas** a la que corresponde en cada caso y en esto radica su riqueza” (Hernández, 1997).

Conclusiones del Capítulo

En la primera parte del Capítulo, se fundamenta el porqué se privilegia en la investigación, la estructuración sistémica de los contenidos de estudio con el propósito de mejorar el *desempeño* de los estudiantes en la resolución de problemas; o sea, el cómo esa decisión corresponde a una exigencia de la época actual.

Se destacan las características de cada uno de los tipos de enfoques sistémicos recogidos en la literatura, haciéndose sobre cada uno de ellos las siguientes consideraciones:

- a)** Se hace un análisis de las principales características referidas en la literatura,
- b)** Se refieren las principales investigaciones realizadas en Cuba y en el extranjero, con énfasis en las desarrolladas en la enseñanza de la Matemática,
- c)** Se discute sobre denominaciones y exigencias planteadas por distintos investigadores,

- d) Se revelan nuevas características de dichos enfoques no recogidas en la literatura especializada, las cuales brindan más información teórica tanto para el diseño como para la organización del proceso de asimilación, lo cual constituye un elemento de novedad,
- e) Se presentan y **fundamentan** en cada uno de los tipos de enfoques, organizaciones sistémicas de distintos contenidos matemáticos correspondientes al 1^{er} Año de Ciencias Técnicas.

Además, basado en el tipo “de reglas y unidades” se presenta una organización sistémica de los contenidos de GA del Plano y del Espacio, integrada al Tema “Funciones”. Dicha concepción no tiene antecedentes recogidos en la literatura, al menos en la revisada, pues sus tres características principales difieren de los cánones tradicionales, saber:

- a) Se estudian de conjunto, **de forma integrada**, los elementos necesarios para asegurar el nivel de partida de los contenidos de los Cálculo Diferencial e Integral.
- b) No aparece la GA como tema aparte, sino **en el contexto del estudio de las funciones**.
- c) El elemento que permite el desarrollo del tema, es **el uso de las transformaciones geométricas**, a partir de las cuales se pueden representar curvas trasladadas, reflejadas y deformadas, así como planos, superficies cilíndricas, cónicas y de revolución engendradas por las gráficas de las funciones elementales básicas y se pueden estudiar las propiedades de simetría, periodicidad e inyectividad de las funciones reales de una variable.

Esta concepción de la enseñanza de la GA también constituye un elemento de novedad de la Tesis.

En la segunda parte, se hace una breve actualización sobre las HGM y se fundamenta la importancia de estas habilidades para la formación de cualquier profesional demandante de la Matemática.

Se presenta la habilidad **comparar**, la cual se incorpora al Sistema Básico existente, definiéndose y fundamentándose su inclusión. En el caso de la habilidad **controlar**, revelada como habilidad matemática recientemente (Hernández y otros, 1997), se prefirió abundar más sobre una de las acciones de su sistema operatorio: **estimar**, no destacada suficientemente en trabajos anteriores.

Se presentan también las habilidades **aproximar**, **optimizar** y **resolver**, las que constituyen ampliaciones del Sistema Básico. Se fundamenta la presencia de las mismas en el quehacer matemático, no sólo en las materias del nivel superior, sino de una parte importante de la enseñanza de las matemáticas. Además, se hacen consideraciones sobre la habilidad **modelar**, de tanta importancia para la formación de los futuros ingenieros.

El Cuadro # 1 resume el Sistema de Habilidades Generales Matemáticas.

En la tercera parte se define y analiza el término *desempeño* en la resolución de problemas como un resultado de la conjunción de la TA (enfoque histórico-cultural) y la PCPI, revelándose que este constituye un indicador del desarrollo “completado” (usando los términos de Vigotsky).

Se define la concepción didáctica propuesta y que relaciona la estructuración sistémica de los contenidos de estudio, el desarrollo de determinadas HGM y la enseñanza de la resolución de problemas. Esta se concreta con la aplicación de un nuevo tipo de enfoque sistémico: ***la resolución de clases de problemas mediante la variación de los instrumentos de solución.***

Se discute sobre el diseño y desarrollo de la asignatura Matemática I de la carrera de Ingeniería Industrial (Precálculo y Cálculo Diferencial), organizándose los contenidos en los temas: Funciones, Límite y Continuidad, Derivadas de 1^{er} Orden y Derivadas de Orden superior, mediante el planteamiento sistémico y sistemático en cada tema, de cuatro clases de problemas, a saber: problemas: de **graficación**, de **comparación**, de **aproximación** y de **optimización**. Cada clase de problemas está asociada a la formación y/o desarrollo de determinada HGM; estas son las habilidades graficar, comparar, aproximar y optimizar respectivamente en su relación dialéctica.

Capítulo III

La experimentación pedagógica

Síntesis del trabajo investigativo

Curso 1988-89

Se desarrolló un diagnóstico sobre el aprendizaje de las funciones en los alumnos que ingresaban a las carreras de Ingeniería Química y Eléctrica, el cual fue aceptado para publicar en el Boletín Orbita Científica del ISP “Enrique José Varona” (Delgado, 1988).

Curso 1989-90

Se desarrolló una experiencia pedagógica cuyo objetivo fundamental era validar una organización alternativa a la tradicional de los tipos de clases, las proporciones de tiempos dedicados a la teoría y la práctica y a la autopreparación de los estudiantes, con vistas a aplicarla en la próxima implementación de los Planes de Estudio “C”.

Esta investigación se desarrolló con la colaboración de los demás integrantes del Grupo de Investigaciones Pedagógicas del Departamento de Matemática General de la Facultad de Ingeniería Industrial del ISJAE en el primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas Automatizados de Dirección (SAD). La misma se basó en la Teoría de la Actividad y se trabajó en los tres modelos (de los objetivos, del contenido y del proceso), no obstante ponerse el énfasis fundamental en la etapa de elaboración de la base de orientación de las acciones y conocimientos nuevos a asimilar por los estudiantes.

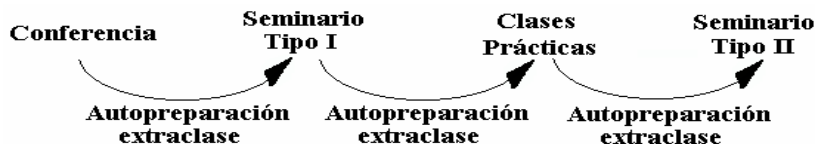
Se consideró que, si bien es válido para cualquier tipo de enseñanza, en la Educación Superior la etapa de elaboración de la BOA reviste tintes especiales, por la cantidad de conocimientos y habilidades previos (nivel de partida) que hay que integrar, por los niveles de abstracción y generalización que necesita el trabajo con el nuevo contenido y el manejo del lenguaje simbólico, así como la complejidad que ofrecen determinados procedimientos.

Así, se entendió trabajar la etapa de elaboración del esquema de la BOA en tres niveles diferentes según las acciones; o sea, si la acción:

- Presentaba una base de orientación compleja y su elaboración requiere de una participación importante del profesor,
- Presentaba una base de orientación sencilla para su tratamiento y aprendizaje,
- Estaba formada completamente, pero debían perfeccionarse algunos de sus indicadores (generalización, etc.)

Para más información ver el Anexo # 16.

El esquema de organización de una secuencia típica de clases en un tema fue la siguiente:



El objetivo fundamental de la Conferencia era el trabajo en la etapa motivacional del conjunto de acciones y conocimientos a asimilar en el tema y comenzar la elaboración de las bases de orientación, mediante el uso de métodos problémicos, de aquellos contenidos de mayor complejidad o completamente nuevos para los estudiantes. Se hacía una orientación pormenorizada de la Autopreparación inmediata para que los estudiantes continuaran elaborando los esquemas de sus bases de orientación.

El Seminario tipo I se dedicaba a la culminación de la elaboración de estos esquemas mediante el trabajo grupal. Era un momento de contraste de los puntos de vista individuales, de elaboración de procedimientos y aclaración de dudas. Se orientaba la Autopreparación siguiente, en la cual comenzaba la etapa materializada de esas acciones. Esta etapa debía terminar en la clase práctica inmediata.

El conjunto de Clases Prácticas terminaba con un Seminario tipo II que tenía como objetivo fundamental la integración de los conocimientos asimilados. La mayoría de los estudiantes debería estar en las etapas verbal o mental de las acciones asimiladas.

Los resultados fueron satisfactorios y están recogidos en el Informe Técnico titulado “Variante de organización de la asignatura Matemática II del Plan B en SAD” que se elaboró con vistas a su defensa en la Sesión Científica de la Facultad de Ing. Industrial. En ella fungió como oponente el Lic. G. Pérez Pantaleón. Dicho trabajo alcanzó la categoría de “Resultado” a nivel de Facultad. Por ello fue presentado al VII Fórum de Piezas de Repuesto, Técnicas y Tecnologías de Avanzada llegando hasta el nivel provincial, donde alcanzó la categoría de Destacado en la Comisión de Enseñanza.

Curso 1990-91

Se profundizó en el estudio de la TA y se elaboró una concepción sistémica del tipo estructural-funcional para la asignatura Matemática I (Cálculo Diferencial en lo fundamental) de la carrera de Ing. Industrial, trabajándose en los tres modelos (de los objetivos, del contenido y del proceso). Esta concepción fue presentada en Sesión Científica del CEPES (Oponente: Lic.Regla Calderón), como resultado del entrenamiento de postgrado realizado en este centro, alcanzando la categoría de Excelente.

El trabajo correspondiente fue presentado al Taller Científico convocado por el CEPES (1991) bajo el título "Una variante de organización sistémica del Cálculo Diferencial". En el mismo se fundamentaba el uso de los conceptos de límite, derivada direccional y error de interpolación como invariantes de determinados temas de la asignatura.

También se trabajó en el perfeccionamiento de la asignatura Matemática II (Cálculo Integral) mediante la aplicación de la Teoría de la Actividad a la enseñanza de las integrales definida, doble y triple. La fundamentación teórica del tratamiento de estos contenidos, así como las Tarjetas de Estudio y el Sistema de Tareas que resultaron de ello se presentó como trabajo final en un curso que sobre teorías psicológicas de enseñanza cursé en la Facultad de Psicología de la Universidad de la Habana.

Curso 1991-92

Se aplicó una experiencia pedagógica en la asignatura Matemática I en la carrera de Ingeniería Industrial sobre la base de la concepción elaborada el curso anterior y perfeccionada durante la propia ejecución del experimento.

Se reformularon los objetivos de la asignatura, se trabajó en el contenido específico y la organización del proceso de asimilación de los conocimientos.

Si bien, a partir de la implantación de los nuevos Planes de Estudio, esta asignatura se concibió de manera diferente a lo tradicional, en tanto en ella se abordaría tanto el Cálculo Diferencial para funciones de una como de varias variables, no cambió esencialmente su concepción, porque constituía en la práctica una suma de ambos contenidos, uno a continuación del otro, no integrados.

En la variante experimental, desarrollada en dos grupos de estudiantes, se cambió la forma en que estaba estructurado el contenido, abordándose de forma integrada los conocimientos y habilidades asociados al CD tanto de una como de varias variables.

Se realizó un diagnóstico inicial que evidenció que tanto los estudiantes del grupo experimental como de control tenían serias deficiencias en su aprendizaje anterior. Los índices de entrada de estos estudiantes eran realmente

bajos, comparados con los de otras carreras en el propio instituto (ISPJAE). No obstante, se decidió aplicar la nueva concepción a toda la asignatura y controlar el experimento en el tema Derivadas.

Se realizaron controles frecuentes que evidenciaron que a pesar de los problemas de base presentados por aquellos estudiantes, pudieron asimilar los contenidos bajo el enfoque estructural-funcional. En el referido tema se controlaron las acciones relacionadas con el cálculo de derivadas (direccionales, parciales y ordinarias), tanto utilizando la definición como las reglas, así como la identificación de la derivada como modelo en los problemas clásicos del Cálculo Diferencial. Dichas acciones alcanzaron adecuados niveles de dominio, conciencia y generalización en la mayoría de los estudiantes.

Los resultados alcanzados por los estudiantes de los grupos de control y experimentales no mostraron diferencias significativas en los resultados en el Examen Final, lo cual, aunque no muy halagüeño, permitió demostrar que era perfectamente posible aplicar la concepción integrada del Cálculo Diferencial con el tratamiento simultáneo de los contenidos para funciones de una y de varias variables, lo que implicaba de hecho mayores niveles de generalización y abstracción que en el curso tradicional.

El resultado más importante de esta experiencia fue la constatación de la solidez de la acción de identificación de la derivada como modelo, con los estudiantes del grupo experimental. Los resultados serán discutidos en epígrafe aparte.

Curso 1992-93

En este curso no se investigó, pues estuve movilizado en la Agricultura durante seis meses y esto conllevó un atraso en la aplicación de nuevas ediciones de la investigación comenzada el curso anterior.

Curso 1993-94

En este curso se aplicó nuevamente la concepción del enfoque estructural-funcional en la asignatura Matemática I en la carrera de Ingeniería Industrial.

Se seleccionó un grupo experimental y uno de control que eran algo comparables en cuanto a un grupo de indicadores de entrada. El Grupo Control cumplió el programa vigente según lo establecido, así como los horarios de consulta. Por razones de carácter tanto subjetivo como objetivo no se aplicaron todos los controles que estaban previstos para poder establecer la comparación completamente. En el Grupo Experimental se desarrolló el experimento pedagógico en toda la asignatura y sólo se pudo controlar el proceso de asimilación de determinadas acciones.

Se controlaron como variables del experimento, las características *dominio* (ejecución sin errores fundamentales), conciencia y generalización de las acciones antes citadas.

En esta experiencia fueron visitadas cuatro clases: una sobre el procedimiento generalizado de identificación para analizar la existencia del límite de una función, con la presencia del Jefe de Departamento y la Profesora Principal de la Disciplina; la apreciación de esta clase fue positiva y se destacó el grado de generalización y de participación que alcanzaron los estudiantes en la clase. Las restantes clases fueron visitadas por integrantes del Grupo de Investigaciones Pedagógicas del Departamento de Matemática General al que pertenezco, quienes con una guía de observación analizaron los aspectos novedosos de la propuesta y el desarrollo del proceso de asimilación de los conocimientos por parte de los estudiantes. Los resultados en general fueron satisfactorios. En epígrafe aparte se destacan los resultados principales de esta experiencia.

Curso 1994-95

Tras una revisión crítica de los resultados obtenidos anteriormente y revelarse como principales insuficiencias de las concepciones anteriores: la poca atención a la resolución de problemas y la no integración de los contenidos de Geometría Analítica del Espacio al resto de los contenidos de la asignatura, así como al convencimiento de que el pobre dominio de los contenidos relacionados con las funciones no permitían resultados superiores a los alcanzados, se procedió a rediseñar la asignatura Matemática I, manteniendo la integración en el estudio de las funciones de una y de varias variables.

La nueva concepción privilegió el tema “Funciones” asignándole un número mayor de horas y abordando en él los elementos de lógica matemática, teoría de conjuntos, topología en R^n y repaso de contenidos de Álgebra Elemental y Trigonometría que fueran necesarios como nivel de partida de la asignatura. Asimismo, se incluyeron elementos de Heurística y se trató la Geometría Analítica Plana y del Espacio de forma integrada, como ya se explicó en el epígrafe “Tipo reglas y unidades del Capítulo II. La idea básica fue que esos contenidos no aparecieran disjuntos ante el estudiante, sino integrados en torno al concepto general de función (aplicación) que se daba desde las primeras clases y que quedara claro para ellos que ese debía ser el centro de atención, que los distintos contenidos que se abordarían estaban relacionados con el estudio de las funciones.

Como respuesta a la insuficiencia de las investigaciones anteriores en torno a la resolución de problemas se concibió llevar de frente, desde el primer tema, la resolución de problemas de aproximación, comparación, graficación y optimización, como fue explicado en el epígrafe “La resolución de clases de problemas variando los instrumentos” en el Capítulo II. Algunos de los resultados e instrumentos utilizados en ambos casos se discutirán en epígrafe aparte.

Cursos 1995-96, 1996-97 y 1997-98

En estos cursos se procedió a la introducción de los resultados alcanzados en el curso 1994-95 y se procedió al perfeccionamiento de las asignaturas. Se introdujeron clases de laboratorio con el uso del DERIVE y se mejoró la articulación con otras asignaturas y en particular con el Álgebra Lineal. También se trabajó en el perfeccionamiento de la asignatura Matemática II (Cálculo Integral).

Después de las Recomendaciones aparecen relacionados las sesiones científicas, eventos y publicaciones donde han sido expuestos la mayoría de las ideas y resultados expuestos en esta Tesis.

Análisis de la solidez. Experiencia piloto del curso 1991-92.

Como se explicó arriba en el curso 1991-92 se desarrolló una experiencia pedagógica con un grupo de estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial en el ISPJAE, el cual tenía entre sus propósitos aplicar los conocimientos que teníamos sobre la Teoría de la Actividad, la estructuración sistémica de los contenidos y la concepción que se había desarrollado del Cálculo Diferencial. Este experimento fue considerado un pilotaje, con miras a extenderlo incluso a otras carreras.

A pesar de que el experimento no llenó las expectativas que sobre él se pusieron debido a diversas razones, fue de interés conocer qué opinión tenían los estudiantes sobre ella y qué huella había quedado al paso del tiempo en una de las acciones formadas durante el mismo.

Se decidió elaborar la encuesta (Ver Anexo # 17) y aplicársela a una muestra de 16 estudiantes que representa casi el 100% de los alumnos que recibieron de forma experimental la asignatura Matemática I y llegaron hasta 5^{to} Año.

Una parte no despreciable de sus compañeros de 1^{er} Año causaron baja de la carrera por diversos motivos a lo largo de los cuatro primeros años. La mayoría causó baja por problemas de bajo rendimiento académicos, lo que reafirma el diagnóstico de entrada hecho sobre la calidad de la composición de matrícula en 1^{er} Año. Lo anterior se corrobora porque incluso el rendimiento académico de los estudiantes a los que se aplicó la encuesta, fue bajo durante su paso por la disciplina Matemática General (cuatro asignaturas). Un análisis de las calificaciones obtenidas lo refleja la situación, como se observa en la siguiente tabla:

Promedio	Frecuencia
2 - 2,9	11
3 - 3,9	4
4 - 4,9	0
5 - 5,9	1

Se tuvieron en cuenta todas las calificaciones obtenidas en las cuatro asignaturas matemáticas de 1^{er} y 2^{do} años, incluyendo las notas en exámenes de revalorización, “mundiales” y exámenes de premio. Como se observa, la mayoría de los estudiantes comparecieron a una o dos de las convocatorias extraordinarias en más de una ocasión.

De los 16 estudiantes encuestados, 10 consideraron adecuado su nivel en Matemática al ingresar a la Educación Superior y sólo 5 lo consideraron bueno. La mayoría (13) tuvo dicha apreciación ya desde la asignatura Matemática I. Este último resultado evidencia que el desarrollo de la misma se realizó sin saltos bruscos en cuanto al nivel del contenido nuevo respecto al nivel de partida de los estudiantes, o sea, asumiéndolo, asegurándolo e introduciendo el contenido nuevo y los modos de actuación a partir de ello. Debe recordarse el cambio que significaba, respecto al sistema tradicional, la integración simultánea del Cálculo Diferencial de funciones de una y varias variables.

Los 16 estudiantes encuestados coincidieron en que la forma como se impartió y los contenidos que se impartieron durante la asignatura contribuyeron tanto a elevar su nivel matemático como el grado de razonamiento que poseían de la enseñanza precedente, lo cual habla bien de la concepción de la asignatura, desarrollada de forma no tradicional.

La mayoría de los estudiantes (14) coincidieron en afirmar que la asignatura (contenido y forma en que se desarrolló) les fue útil para su posterior desenvolvimiento en otras asignaturas de la carrera.

Sobre la comunicación profesor-alumno, la totalidad de los estudiantes la consideran bueno o adecuada (13 + 3 respectivamente), destacándose que aunque con toda intención no se utilizaron los términos superlativos en la encuesta, 2 estudiantes por iniciativa personal, decidieron patentizar su consideración de que fue “excelente” o “muy buena”.

La quinta pregunta de la encuesta era sobre la que había mayor expectativa, al considerar que eran estudiantes alejados largo tiempo de los contenidos del Cálculo Diferencial (quizás no sería igual en las carreras de perfil eléctrico, pero sí en Industrial); sin embargo, fueron sorprendentes y estimulantes los resultados al constatar que:

- Ningún estudiante identificó falsamente el problema del área bajo la curva con la derivada. Algunos estudiantes (5), aunque no se pidió indicaron que el modelo era la integral definida.
- Solamente 2 estudiantes no reconocieron la razón de cambio en el segundo problema.²⁸
- Hubo 7 estudiantes (43,75%) que no reconocieron el uso de la derivada como instrumento para resolver el problema # 3 (de optimización)

Sobre esto último pueden analizarse dos aspectos:

- ♦ La derivada no aparece como *modelo* directo del problema, sino que a su uso se recurre en el proceso de solución, posterior al de modelación, proceso que no desarrollan los encuestados en tanto sólo se les pide *identificar* en cuáles es necesario utilizar el concepto de derivada.
- ♦ Posteriormente a la Matemática I, el estudiante enfrenta otros problemas de optimización (problemas de programación lineal y no lineal) en los cuales no se emplea el concepto de derivada. Realmente entre los problemas típicos que enfrenta un ingeniero industrial en su desempeño profesional, no aparecen los problemas de optimización cuya vía de solución conlleve al empleo del concepto de derivada, o sea, el uso de los métodos clásicos del Análisis Matemático.

Como conclusiones se puede argumentar que:

²⁸ Debe destacarse que el uso de un problema relacionado con la especialidad y no abordado durante la asignatura Matemática I, velaba el modelo del mismo.

- Es significativo el grado de solidez en la interpretación primero e identificación después, del concepto de derivada, aprendido en el 1er Semestre del 1^{er} Año de la carrera, en la mayoría de los estudiantes, más aún si se toma en cuenta que en las restantes asignaturas del curriculum no es muy utilizado el mismo. En los problemas planteados había que identificar a la derivada en su doble papel: como *modelo* y como *instrumento* de cálculo.
- Es destacable la opinión (la cual no puede separarse de cierta cuota de subjetividad) sobre el papel que jugó la asignatura Matemática I, tanto en lo cognoscitivo como en lo afectivo, en los estudiantes que estuvieron involucrados en el experimento.
- Una parte significativa de los estudiantes encuestados confrontaron dificultades a lo largo de la carrera en varias asignaturas, lo que muestra que los mismos no eran siquiera estudiantes medios.

Análisis del dominio, la conciencia y la generalización. Experiencia desarrollada en el curso 1993-94

La calidad de la composición de matrícula de los cinco grupos de este año académico era igualmente baja, similar a la del curso 1991-92. Este hecho se reflejó sucesivamente durante los años posteriores de la carrera en muchas asignaturas, las cuales obtuvieron bajos resultados en cantidad y calidad de la promoción.

Se seleccionó un Grupo Experimental (I-14) y un Grupo de Control (I-15). Se determinó controlar el proceso de asimilación de los conocimientos mediante el método de formación de parejas. Los indicadores que discriminaron las parejas fueron: Calificación obtenida en el Examen de Ingreso de Matemática, Procedencia (IPVCE, IPUEC, Diferido, Otras), Sexo y Tiempo extraescolar realmente disponible para estudiar.

Se lograron formar 10 parejas de estudiantes sin diferencias significativas en cada par. Se analizó que quedarían fuera de control otros indicadores tales como la inclinación hacia la Matemática, el nivel de desarrollo intelectual de los estudiantes, la diferencia entre la docencia impartida por la profesora del Grupo de Control y la impartida por el profesor-investigador en el Grupo Experimental, etc., los cuales podían tener determinado peso específico en los resultados.

Como consecuencia de determinadas dificultades, de índole tanto objetivo como subjetivo, sólo se pudo controlar la asimilación de cuatro acciones en los indicadores de *dominio*, *conciencia* y *generalización*.

El grado de *dominio* se determinó por la ejecución sin dificultades, en el tiempo previsto para el control, de la tarea presentada. La *conciencia* se determinó a partir de observar en el papel, la forma en que organizaba los cálculos, el orden de los pasos, etc., de forma tal que se evidenciara que el estudiante podía

justificar lo que estaba haciendo. La *generalización* se determinó en virtud de si el estudiante podía resolver el ejercicio tanto para funciones de una como de dos variables, aún cuando cometiera errores en la ejecución o si sólo podía resolver el ejercicio para funciones de una variable. Tanto la conciencia como la generalización se observaron en todos los ejercicios que el estudiante intentó resolver, haya llegado al final de los mismos o no.

Las tareas utilizadas para el Control del experimento, así como las tablas con los resultados alcanzados en cada uno de los grupos, aparecen en el Anexo # 18. Estos resultados aparecen dados en % de estudiantes (sobre 10) que alcanzaron el valor satisfactorio en cada variable.

Acción # 1: Determinación del conjunto natural de definición de funciones de una y varias variables.

El dominio se discriminó entre los incisos a y b del ejercicio presentado, la conciencia y la generalización se analizaron a partir del trabajo integral del estudiante.

Como se observa el Grupo Experimental obtuvo mejores resultados en la resolución de la tarea para el caso de las funciones de varias variables. Los estudiantes del Grupo Control mostraron un bajo nivel de generalización.

Acción # 2: Cálculo de límites a través de un conjunto, para funciones de una y de varias variables.

Análogamente, el dominio se discriminó entre los incisos a y b del ejercicio presentado, la conciencia y la generalización se analizaron entre los dos incisos.

Como se observa el Grupo Experimental obtuvo mejores resultados en la resolución de la tarea para el caso de las funciones de varias variables, aunque los resultados fueron menores en todas las variables que en la acción anterior. Sólo dos estudiantes del Grupo Control pudieron calcular el límite doble y otro más intentó calcularlo, pero con dificultades.

Acción # 3: Cálculo de derivadas (direccionales, parciales y ordinarias) por la definición y por la regla (cuando esta se puede aplicar).

Tanto en el Grupo Experimental como en el de Control se observa un insatisfactorio *desempeño* en el cálculo de la derivada parcial por la definición, aunque en el Grupo Experimental, 9 de los 10 estudiantes identificaron que era incorrecto aplicar las reglas en el cálculo de la $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

En el Grupo Control los niveles de *conciencia* y *generalización* fueron muy bajos.

Acción # 4: Trazado de curvas.

En esta acción no se apreciaron diferencias entre los resultados del Grupo Experimental y de Control.

Aunque no debieran extrapolarse resultados cuando existen variables no controladas en el experimento, en este caso apreciamos que los niveles de conciencia y *generalización* alcanzados en las acciones analizadas, afianzaban la convicción de que el tratamiento sistémico de los contenidos del Cálculo Diferencial para funciones de una y varias variables es superior al tradicional. A estas conclusiones también arribó en sus investigaciones el Dr. Fernando Martínez.

Análisis de la experiencia en la enseñanza de la Geometría Analítica.

Al inicio del curso 1994-95 se efectuó un diagnóstico inicial para controlar la solidez de los conocimientos y habilidades de los estudiantes del grupo I-12 de la carrera de Ingeniería Industrial del ISPJAE, el cual se seleccionó como muestra, en torno a las transformaciones geométricas (traslación, rotación y reflexión) estudiadas durante la enseñanza primaria.

Se consideró como población los grupos I-11 e I-12, los cuales constituían las dos terceras partes del 1^{er} Año de la carrera y en ambos había una distribución equilibrada de las procedencias de los estudiantes, con cierta ventaja, de los índices de entrada, a favor del I-11. La muestra constituía aproximadamente el 50% de la población, por lo que se consideró representativa y conveniente para el diagnóstico.

En los resultados del diagnóstico se constató, que a pesar de haber transcurridos más de seis años de asimilados esos contenidos, la mayoría de los estudiantes poseía los conocimientos y habilidades principales en torno a esos contenidos.

Como se observa en la tabla del Anexo # 19, sobre una base de 19 estudiantes, 12 realizaron bien la traslación para un 63,16%, a pesar de que en la enseñanza primaria sólo se estudia esta transformación para figuras rectilíneas (segmentos de recta, polígonos).

La rotación en torno a un eje, tenía un grado de dificultad mucho mayor, porque precisaba de varias transferencias:

- *Pasar del trabajo con figuras rectilíneas a curvilíneas,*
- *Pasar del plano al espacio ,*
- *Pasar de una rotación con un ángulo prefijado a un movimiento continuo de la figura (revolución), no visto en la enseñanza precedente.*

Esto evidentemente arrojaría resultados más bajos, sin embargo, 18 estudiantes (el 94,73%) fueron capaces de transferir las características del movimiento con figuras rectilíneas a curvilíneas y 17 de ellos fueron capaces de transferir del plano al espacio. Sólo 5 estudiantes representaron la superficie de revolución resultante de la transformación, lo cual indica un alto grado de imaginación espacial.

Llamó la atención que el movimiento de reflexión, el cual fue el único que respondió a los parámetros establecidos en la enseñanza anterior, tuvo un bajo porcentaje de ejecución correcta, el 47,36%, aunque si se toman en cuenta aquellos estudiantes que resolvieron la tarea con errores pero mostrando conocimientos de la misma, se alcanza un 63,16%.

Un solo estudiante presentó problemas con la congruencia entre las figuras original e imagen en las transformaciones.

Los resultados alcanzados en el diagnóstico mostraron que:

- *La mayoría de los estudiantes asimilaron con un elevado índice de solidez los conocimientos y habilidades relacionados con los movimientos en el plano.*
- *Las correcciones en aquellos que ejecutaron las tareas con errores o no pudieron recuperar la información atinente no emplearían mucho tiempo.*
- *Una parte importante de los estudiantes fueron capaces de transferir los conocimientos asimilados a nuevas condiciones sin mediar entrenamiento o acciones que conllevaran a ello.*

Todo lo anterior permitía adelantar la hipótesis de que era posible enfocar el estudio de las superficies a través de las transformaciones geométricas, con lo cual se podrían estudiar los contenidos de GA plana y del espacio de forma integrada, sistémicamente y en el contexto del estudio de las funciones.

La no disponibilidad de un texto que propiciara tal abordaje, así como las limitaciones impuestas por el Período Especial (horarios de clases reducidos, reducción del número de horas de la asignatura, carencia extrema de papel para elaborar materiales complementarios y tarjetas de estudio, etc.) impidieron que la investigación se desarrollara en condiciones favorables. Sin embargo, esta se llevó a cabo y los resultados fueron positivos.

De una matrícula de 19 estudiantes sometidos a la experiencia, 16 mostraron *dominio* en la representación de planos, superficies cilíndricas y de revolución, para un 84,21% del total, al finalizar el tema de funciones. La *generalización* se midió en el procedimiento de identificación de los tipos de superficies a partir de la ecuación y de la curva que engendraría cada superficie.

Debe destacarse que el nivel de *generalización* que se logró en la enseñanza experimental fue elevado si se compara con el nivel que alcanzan los estudiantes en la enseñanza tradicional, donde sólo se estudian los planos y las superficies cuádricas. Los estudiantes sometidos a la experiencia fueron capaces de identificar, a partir de su ecuación, planos y cuádricas (aunque no el tipo particular de cuádrica, en tanto no fue planteado como objetivo). Además fueron capaces de identificar (a partir de su ecuación) y representar: planos, superficies cilíndricas con generatrices paralelas a uno de los ejes coordenados y superficies de revolución simétricas respecto a uno de los ejes coordenados. En los anexos se describen los procedimientos enseñados y se muestran los resultados en el Anexo # 20.

Como se observa en la tabla de este anexo, los resultados en la representación de la superficie de revolución cuya ecuación fue dada, no fueron todo lo bueno que se deseaba, en tanto sólo en 11 estudiantes (el 57,9 %) se considera que hayan dominado la acción para el momento en que se efectuó el control y hayan alcanzado un adecuado grado de generalización. En el trabajo remedial se constató que 7 de los 8 estudiantes podían efectuar la tarea con ayuda, mientras que un estudiante tenía serios problemas en su base de orientación, pues entre otras dificultades no poseía los conocimientos previos necesarios, tales como la representación de los gráficos de funciones elementales básicas. No obstante el análisis anterior, se consideró que la representación de la superficie de revolución constituía un problema (en el sentido de Schoenfeld), pues en clase sólo se habían abordado la representación de superficies de revolución engendradas por arcos de curvas acotados, y el ejercicio planteado exigía una transferencia al caso de un arco no acotado. Luego, los resultados fueron considerados satisfactorios.

Otro de los resultados importantes de esta experiencia está asociado a la asimilación de las propiedades de las funciones, en tanto se discutió e incorporó a la base de orientación de la identificación de cada una de ellas, la representación geométrica de cada propiedad, la cual estaba íntimamente relacionada con una de las transformaciones geométricas estudiadas. Así, por ejemplo, la propiedad de periodicidad de funciones reales de una variable está asociada a la traslación.

Los resultados alcanzados en el control (pregunta 3, Anexo # 20) se consideran satisfactorios 16 estudiantes (el 84,21%) resolvieron el ejercicio de forma satisfactoria o mostraron un conocimiento de la propiedad de periodicidad revelado en su gráfico, a pesar de que la función periódica indicada era

completamente desconocida para ellos debían reconstruirla, de una forma integrada, a partir de todas las informaciones que se daban. Este tipo de ejercicio no se había visto en clases; era un problema para los estudiantes.

Además se aplicó como control de la asimilación de la acción de identificación de la periodicidad de funciones, el ejercicio que aparece en el Anexo # 21.

Este ejercicio, de tipo psicológico, permitió comprobar el efecto, que en el establecimiento del **nodo** secundario “*propiedades de las funciones*”, producía el uso de las transformaciones geométricas (en este caso la traslación en la dirección del eje OX) como recurso para investigar el cumplimiento de la propiedad (periodicidad). De tal suerte, la interpretación geométrica de las propiedades estudiadas, contribuyó significativamente a la asimilación de los conceptos correspondientes y al desarrollo de la habilidad *recodificar*, en tanto el estudiante pasa de la definición del concepto a la imagen del concepto, retornando posteriormente a ella para dar solución al problema.

Por supuesto, que aquí el empleo de la representación gráfica y de la transformación geométrica, cumple una función heurística, porque con facilidad sugiere el contraejemplo para responder negativamente en los casos correspondientes y sólo verificar analíticamente aquellos casos plausibles.

El valor metodológico del ejercicio radica en que se confeccionó tomando en cuenta los errores más comunes de los estudiantes en cuanto al conocimiento de la propiedad de periodicidad, o sea a partir de aquellos elementos que con regularidad los estudiantes incorporan indebidamente a su base de orientación, a saber:

- **Sólo las funciones trigonométricas son periódicas.** La causa de la presencia de esta creencia es quizás que las únicas funciones periódicas que han visto los estudiantes en sus estudios anteriores son las trigonométricas. La falta de un material variado en el momento de conformación de la base de orientación impide la generalización.
- **Las funciones periódicas tienen “ondas” como el seno y el coseno.** A pesar de haber conocido otras funciones trigonométricas (p.e. la tangente), es tan poco lo que se trabaja con ellas en la enseñanza anterior, que el estudiante elabora sus propias conclusiones a partir de la información que les brindan las funciones seno y coseno, que son con las que más trabajan, no distinguiendo qué en ellas es general y qué particular. Así, incorporan a su base de orientación rasgos no esenciales para la periodicidad de las funciones, la existencia de ondas en su gráfico e incluso el cambio reiterado de monotonía.

A partir de las creencias anteriores se elaboraron las cuatro variantes resultantes de la combinación de “lo que parece o no” y “lo que es o no”.

En 1), el gráfico **parece ser** el de una función periódica, porque existen ondas y en la ecuación aparece como término la función seno. Sin embargo **no es** periódica.

En 2), la función **no parece ser** periódica a todas luces, porque no es trigonométrica ni aparece ningún comportamiento “de altas y bajas”. Sin embargo **es** periódica.

En 3), la función **parece** periódica (debido a la reiteración de una parte del gráfico), pero tiene el “inconveniente” de que no es trigonométrica. Generalmente los estudiantes no conocen la función “parte entera”, la cual aparece como uno de los términos de la ecuación. Por eso, aunque la función presentada **es** periódica, su identificación por los estudiantes puede presentar dificultad.

En 4), la función **no parece ni es** periódica.

Los resultados fueron los esperados; de los 19 estudiantes, 18 respondieron acertadamente los cuatro incisos de la pregunta a) para un 94,74% y el 100% declaró correctamente un período en cada una de las funciones de los incisos 2) y 3), a pesar que un ejercicio como éste no había sido presentado anteriormente en clases ni en las tareas extraclases.

Además se controló indirectamente esta propiedad a través de la pregunta 3 de la Prueba Parcial # 1 (Ver Anexo # 20). Algunos de los ejercicios utilizados en las tareas extraclases y evaluaciones pueden encontrarse en el Anexo # 22.

Análisis de la aplicación del enfoque de resolución de clases de problemas en el Cálculo Diferencial.

Esta experiencia se llevó de manera simultánea, aunque con diferencias, en las carreras de Ingeniería Industrial del ISPJAE y la Universidad de Matanzas (UM), fungiendo como docentes: Lic. Carmen Luisa Méndez (ISPJAE), Benito Gómez y Milagros Horta (UM)

La experiencia en el ISPJAE

El 1^{er} Año de la carrera en el ISPJAE sólo contaba con tres grupos de poca matrícula. No fue posible formar un número suficiente de parejas para el control del experimento por esta vía, debido a las diferencias que existían entre alumnos de distintos grupos. Se decidió medir la propia evolución de los alumnos del Grupo I-12, en el cual se desarrolló la experiencia. La composición de matrícula de este grupo se expone a continuación

El experimento se realizó en condiciones naturales, los estudiantes conocieron desde el principio que se desarrollaría una experiencia con ellos y el investigador asistió frecuentemente a las actividades formando parte del colectivo y logrando establecerse un adecuado nivel de comunicación, lo que permitió que no hubieran barreras (al menos las fundamentales) entre el investigador y los sujetos de la investigación.

Los controles fundamentales del experimento estuvieron asociados a las observaciones de clases y de la actividad de los alumnos, así como a los resultados de la asimilación de determinados conocimientos en las Pruebas Parciales, las cuales fueron planificadas según la evolución del proceso de asimilación de los conocimientos (estas no coincidieron en tiempo ni contenido con los restantes grupos). También se tuvieron en cuenta los resultados del Examen Final (el mismo para todos los grupos). Además se aplicó un Examen Especial, una vez culminado el período lectivo, donde se midió el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

Sobre la composición del grupo se puede decir que el 75,68% proviene de la enseñanza preuniversitaria, aunque la mayoría son varones, por lo que estuvieron uno o más años sin estudiar.

Aproximadamente la mitad del Grupo son hijos de profesionales (57,9%) y cursaron la enseñanza media en IPVCE (63, 15%) lo que da un indicador del presumible desarrollo intelectual de estos estudiantes.

Sobre la motivación por el estudio de la asignatura, se puede decir que 13 estudiantes plantearon que les gustaban las matemáticas y los 19, que se sentían motivados por la carrera (la mayoría la pidió en primera o segunda opciones).

Si bien 7 estudiantes consideran que su formación matemática anterior es buena y el resto la considera regular, las estadísticas muestran que 7 estudiantes obtuvieron entre 80 y 90 puntos en Matemática en todos sus estudios anteriores y 12 obtuvieron calificaciones entre 90 y 100 puntos, lo que muestra que los estudiantes se autovaloran críticamente a pesar de las calificaciones obtenidas en sus estudios anteriores. Quizás dicha valoración esté influida por los resultados en el Examen de Ingreso de Matemática, donde 16 estudiantes estuvieron por debajo de los 90 puntos y sólo 3 alcanzaron calificaciones entre 90 y 100.

Durante la asignatura Matemática I y posteriormente en las demás asignaturas de la disciplina, se comprobó que el I-12 era un grupo medio, donde se compensaban el peso de los estudiantes sobresalientes y el de los de bajo rendimiento, encontrándose la mayor masa alrededor de los 4 puntos.

De las tres Pruebas Parciales que se aplicaron en esta experiencia (Ver Anexo # 25) fueron significativos los resultados alcanzados en torno a la asimilación de los contenidos de Funciones y Geometría Analítica (en la Prueba Parcial # 1) vistos en el epígrafe anterior, y los obtenidos en la Prueba Parcial # 3 en torno a la Aproximación y Optimización (ejercicios 3 y 4)

El ejercicio 3 de la Prueba Parcial # 3 tenía la característica de que era necesario, para calcular el valor exacto del límite, desarrollar una cadena de inferencias. Desplegar esta cadena de razonamientos evidencia un elevado nivel de reflexión del estudiante en el aprendizaje de los conocimientos relacionados; de los 19 estudiantes, 15 (el 79%) fueron capaces de desarrollar la cadena de inferencias y justificarlo verbalmente.

El cálculo del valor aproximado implicaba un conocimiento cabal de la definición de límite y quizás por el poco tiempo que se dedicó a la misma, el resultado alcanzado fue bajo: sólo el 31,6% de los estudiantes respondieron correctamente. Claro está, el propio ejercicio no obligaba a que tuviera que hacerse un cálculo aproximado del límite, pues el valor exacto era fácilmente calculable si el estudiante poseía los conocimientos teóricos asociados a la relación diferenciabilidad-continuidad-existencia de límite y la relación límite doble-límite por un subconjunto.

El ejercicio 4 (con ligeras variaciones) ya había sido utilizado en un examen final en el curso 1990-91 con muy bajos resultados. La dificultad principal se presentaba en la modelación. En esta ocasión los resultados fueron satisfactorios: 15 estudiantes (79%) modelaron correctamente la función objetivo y el 100% la ecuación de enlace, así como determinaron que el método a emplear era el de los multiplicadores de Lagrange; 13 estudiantes resolvieron correctamente el problema (el 68,42%) y el resto resolvió el problema con errores no fundamentales.

En este ejercicio, además del dominio de la acción *resolver problemas de optimización mediante el uso del método de los multiplicadores de Lagrange*, se controló la generalización en tanto el resultado quedaría expresado en función del parámetro V del volumen del paralelepípedo rectangular.

Al inicio de la asignatura sólo el 52,63% de los estudiantes (todos procedentes del IPVCE “V.I.Lenin”) podían prescindir del uso de valores numéricos concretos en la resolución de problemas. A la altura de la Prueba Parcial # 3, el 100% de los estudiantes había alcanzado ese escalón en el desarrollo de su pensamiento formal.

La experiencia en la Universidad de Matanzas

El 1^{er} Año de la carrera en la Universidad de Matanzas tenía también tres grupos mucho menos comparables y se decidió aplicar el experimento in extenso. El hecho de tener los contenidos correspondiente al Álgebra Lineal incluidos dentro de la asignatura, trajo diferencias con la versión desarrollada en el ISPJAE.

Si se analiza que si los índices de ingreso a la carrera no eran altos en ninguno de los tres grupos y se toma como muestra al grupo I-11 de dicha universidad (el más representativo por su composición de matrícula para la experiencia) y que las exigencias a que fueron sometidos eran realmente altas respecto a la práctica tradicional, se puede apreciar que los resultados alcanzados durante el semestre en las cuatro pruebas parciales y el Examen Final fueron estimulantes.

Son representativos los siguientes resultados: En la Prueba Parcial # 1, dedicada a los contenidos de Teoría de Conjuntos y Elementos de Lógica y Heurística, se alcanzó un 68,42% de aprobados. En la Prueba Parcial # 3, de contenidos relativos a Funciones, donde se incorporó el nuevo tratamiento de los contenidos de Geometría Analítica, se alcanzó un 77,78% y en la Prueba Parcial # 4, de contenidos de Análisis Matemático, se alcanzó el 76,2% de aprovechamiento. O sea, que durante el semestre el grupo se comportó por encima del 70% de promoción.

A primera vista los resultados pudieran parecer bajos, sin embargo, si se consultan las Pruebas Parciales aplicadas se puede observar que eran de mucho más nivel de dificultad y generalización que las que tradicionalmente se aplicaban en esta asignatura años anteriores. Los resultados de las Pruebas Parciales aparecen en el Anexo # 23

La preparación de la asignatura, dirigida por el Prof. Benito Gómez fue excelente por lo que recibió un reconocimiento de parte de la dirección de la Universidad.

El Examen Final mantuvo el nivel de rigor y generalización que se siguió durante el Semestre (puede consultarse en el Anexo # 24) y los resultados superaron el comportamiento de las Pruebas Parciales; se alcanzó un 83,33% de aprobados. Aunque la mayoría de los aprobados terminaron con 3 puntos de calificación, se consideran satisfactorios los resultados por lo antes expuesto.

Análisis del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas

Como ya se explicó en el Capítulo II el término *desempeño en la resolución de problemas* fue definido y utilizado como un indicador del desarrollo de los estudiantes. Los diferentes niveles establecidos son analizados a través del tránsito novato-experto y sobre la base de los indicadores de calidad de los conocimientos asimilados que brinda la TA. Se establecieron los siguientes niveles:

Pobre desempeño: *El estudiante hace intentos por resolver el problema planteado, pero su ejecución acusa incompletitud de su base de orientación. Los signos o señales recogidos no apuntan a una estrategia de solución sistemática. Puede estar influido por factores de índole no cognitiva que produzca bloqueos en el momento de la ejecución.*

Desempeño insuficiente: *El estudiante muestra un progreso hacia la solución correcta en tanto introduce un plan apropiado. Sin embargo, se aprecia incompletitud de su base de orientación y el no poder acceder fácilmente a la información pertinente. Se supone que se encuentra en la zona de desarrollo próximo: aún no puede resolver el problema por sí mismo, pero parece que con la ayuda necesaria podría hacerlo.*

Desempeño aceptable: *El estudiante muestra dominio e independencia. Su orientación y ejecución son correctas en lo fundamental. Se aprecian deficiencias en el autocontrol y en los grados de reflexión y generalización de los conocimientos y las acciones asociadas.*

Desempeño satisfactorio: *El estudiante muestra un alto grado de dominio e independencia. Su orientación, ejecución y control de la actividad son correctas. Muestra adecuados niveles de reflexión y generalización en sus análisis y soluciones. Este nivel identifica un determinado desarrollo completado (como diría Vigotsky) por el sujeto.*

A continuación se discute el diagnóstico realizado sobre las deficiencias que subsisten en los estudiantes una vez que han culminado un curso tradicional de Cálculo.

Sobre el diagnóstico

Se tomó una muestra representativa de estudiantes de la carrera de Ingeniería Química (casi el 100% de la matrícula) y de la carrera de Ingeniería Informática del ISPJAE con el objetivo de corroborar los coincidentes

resultados reportados en una abundante literatura (Schoenfeld, 1985-1992; Labarrere y otros, 1994,1995, J.I.Pozo, 1995, Selden y otros, 1994, etc.) donde se explicitan las principales dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas en distintos niveles de enseñanza.

Como instrumento se utilizó el mismo examen aplicado en una investigación realizada por tres investigadores en la Tennessee Technological University (TTU) en los EE.UU. en la primavera del '88 (Ver Selden, 1994), dirigida a determinar si los alumnos promedio de cálculo eran capaces de resolver problemas de CD una vez culminado el período lectivo.

En el mismo se reportan resultados sorprendentes, pues ante la aplicación de un examen de 5 preguntas, ninguno de los estudiantes presentados (17) pudo resolver satisfactoriamente ni uno solo de los problemas propuestos, a pesar de que los profesores, consultados previamente por los investigadores, estuvieron de acuerdo en que el examen era adecuado y se correspondía con el nivel enseñado.

Más aún, de un total de 85 posibles intentos, en sólo 6 se consideró que hubo un progreso sustancial hacia una solución correcta. En las cuatro primeras preguntas debía hacerse uso de la derivada y sólo en 13 intentos, de 68 posibles se hizo un uso adecuado de ella, a pesar de que se había declarado que el examen se correspondía con lo aprendido en el curso recién finalizado de Cálculo Diferencial.

Los resultados obtenidos en la muestra escogida en las carreras de Ingeniería Química e Informática del ISPJAE fueron los siguientes:

Previo a la aplicación del Examen se constató que el mismo era adecuado, se correspondía con el curso desarrollado y las preguntas no habían sido utilizadas ni en clases ni en tareas extraclases.

De un total de 87 estudiantes, 57 respondieron al menos una pregunta correctamente. De un máximo posible de 435 intentos de solución en las cinco preguntas, se pudieron considerar como tales 285, lo que representa un 65,5%. De ellos sólo 119 condujeron a la resolución correcta de los problemas y 79 constituyeron problemas resueltos con dificultad.

Las preguntas 1 y 5 fueron las que mejores resultados mostraron. Se estimó que las mismas podían ser respondidas con un conocimiento adecuado de los contenidos de límite, continuidad y derivada. O sea, la forma en que tradicionalmente se enseñan estos contenidos en estas carreras originó resultados superiores a los obtenidos en la investigación de la TTU. Los resultados en las restantes preguntas son muy bajos.

En la Tabla 1 del Anexo # 26 pueden apreciarse los resultados del diagnóstico por preguntas.

En la Tabla 2 se analizan los resultados en el uso de estrategias para la solución de los problemas. En ella se utilizó uno de los modelos propuestos por Santos Trigo (1994) en la evaluación de la resolución de problemas. En ella se destaca que:

- La búsqueda de patrones es una característica manifestada fundamentalmente en las preguntas 1, 2 y 5.
- En las preguntas 3 y 4 priman las listas no sistemáticas, el ensayo – error o sencillamente no hay una estrategia determinada,
- Sólo 3 estudiantes reflejaron en el papel una lista sistemática de conceptos o relaciones o un diagrama como recurso heurístico.
- Ningún estudiante utilizó como estrategia la reducción a casos simples; por ejemplo en la pregunta 4, a través de una partición del dominio de la función $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ para $x < 0$, $0 \leq x \leq 1$, $x > 0$.

En la Tabla 2-A se aprecia que son muy bajos los resultados en el uso de recursos heurísticos y el uso de estrategias sistemáticas.

En la Tabla 2-B se muestra una inferencia a partir de los resultados de las características de las bases de orientación, desglosándose en las siguientes categorías: completa y sistematizada, completa y no sistematizada, incompleta y no se pudo caracterizar.

En la Tabla 3, se analiza el desempeño de estos estudiantes según los niveles descritos.

En el 39,1% de los casos posibles no se pudo apreciar desempeño, un 1,6% presentó un pobre desempeño, un 2,5% un desempeño insuficiente, un 18,2% un desempeño aceptable y un 27,4% un desempeño satisfactorio.

Se concluye que si bien no son comparables los resultados de los diagnósticos hechos en la TTU y en el ISPJAE, pues el primero se efectuó sobre estudiantes promedios y el segundo sobre la composición general de la matrícula, además de otras características que hacen incomparables ambas investigaciones, puede apreciarse que la resolución de problemas reporta niveles muy bajos en general, aún más si se tiene en cuenta que estos estudiantes habían vencido el programa de la asignatura Matemática I y que los resultados en la misma estuvieron por encima del 80% de aprobados.

Entre los principales problemas detectados están:

- Incompletitud de la base de orientación necesaria para la resolución de problemas en los cuales es inmediata la aplicación del concepto de derivada,
- Pobre utilización de recursos heurísticos como apoyo para la resolución efectiva de los problemas,
- Ausencia de un autocontrol efectivo del proceso de resolución del problema,
- Pobre uso de estrategias alternativas conducentes a la resolución del problema.

Análisis del desempeño de los estudiantes sometidos a la experiencia pedagógica

En forma sumaria se exponen a continuación las condiciones del experimento:

- El examen especial se aplicó a los 21 estudiantes del grupo I-12 de la carrera de Ingeniería Industrial del ISPJAE, aunque sólo se consideraron 19.
- El promedio de los estudiantes de nuevo ingreso en septiembre de 1994 era de un 87,8 en base a 100 puntos. Están excluidos de esa cifra los estudiantes que ingresaron por vías excepcionales.
- El examen se convocó a modo de Examen Especial que se consideraría como Examen de Premio para aquellos estudiantes que obtuvieran más de 80 puntos, se les consideraría abonada la asignatura a aquellos que obtuvieran como mínimo 80 puntos. A aquellos estudiantes que obtuvieran menos de 80 puntos se les convalidaría la pregunta del examen final relacionada con los contenidos de la examen especial que hayan aprobado.
- La profesora que impartió la asignatura era Instructora (en ese momento) y tenía poca experiencia en la impartición de la misma.
- Se constató que ninguno de los problemas presentados en el Examen Especial había sido abordado en clases y en tareas extraclases, por lo cual eran situaciones completamente nuevas para los estudiantes.
- Se consideró que los conocimientos y habilidades necesarias para resolver el Examen había sido asimilado por los estudiantes a lo largo de la asignatura y los mismos eran dominado conscientemente por los estudiantes.
- Cada pregunta fue impresa en una hoja por separado y se pidió a los estudiantes que ahí se hiciera todo el trabajo referido a dicha pregunta. Se les pidió que escribieran todas las ideas y cálculos que consideraran necesarios para orientarse o resolver los problemas, lo cual sería provechoso para ellos y para los investigadores.
- El Examen duraría una hora. A cada problema se le asignaron 20 puntos y fue calificado por un investigador primero y después revisado colectivamente por varios investigadores.

Sobre los resultados

Se consideraron aprobados (sobre 60 puntos) a 8 estudiantes, entre los cuales se encontraban 2 que obtuvieron premio (más de 80 puntos), no otorgándose a ninguno el primer lugar.

Hubo 19 preguntas en blanco o que no podían ser consideradas como intentos, o sea de 95 intentos posibles se realizaron 76 para un 80%, siendo de ellos 34 correctamente ejecutados y 24 pudieran considerarse que se apreciaba un progreso sustancial hacia la solución correcta. Los resultados aparecen en el Anexo # 27

En la pregunta 1, los 19 estudiantes identificaron correctamente la pendiente de la recta tangente como el valor de la derivada en el punto y 16 identifican la igualdad existente entre el valor de la “y” por la recta y

por la parábola en el punto de tangencia. Las dificultades mayores en esta pregunta se presentaron al desarrollar el algoritmo de trabajo. Por otra parte se constató que 10 estudiantes utilizaron la graficación como recurso heurístico para orientarse en la resolución del problema, mientras que 5 lo hacen al final como medio de control.

En la pregunta 2, hubo 15 estudiantes que interpretaron las raíces de la ecuación como ceros de la función del miembro izquierdo. Varios estudiantes intentaron aplicar una suerte de generalización del Teorema de Bolzano, utilizando el paso al límite, al no poder evaluar en el extremo derecho del intervalo, pero cometen un error de cálculo que los conduce a una consideración falsa. Otros estudiantes hicieron sus análisis a partir de considerar la función del miembro izquierdo como una suma de funciones y analizar las características de dichas funciones-sumandos.

La pregunta 3 relacionaba los conceptos de diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad y aunque entre nosotros es más usual hablar, en el caso de funciones de una variable, de funciones “derivables”, se decidió mantener en el Examen el término “diferenciable” para poder medir el conocimiento sobre la equivalencia entre los dos conceptos. Esta relación la identifican 17 alumnos y 18 la inferencia de que toda función diferenciable en un punto es continua en el mismo; 15 analizan correctamente la continuidad y 14 hallan las derivadas laterales y las igualan. Muchos fallan en el intento de calcular las derivadas laterales por la definición, pues en el curso no se enseñó el teorema que posibilita calcularlas usando las reglas de derivación. Se estima que de haberlo conocido, los estudiantes hubiesen tenido un mejor *desempeño* en esta pregunta.

En general fue muy pobre el trabajo realizado en la pregunta 4, debiendo destacarse que 4 estudiantes trataron de utilizar el Método de Ruffini, 6 intentaron aplicar el teorema de Bolzano, 4 descompusieron la función en dos funciones para aplicar el método gráfico de resolución de ecuaciones y 2 realizaron un análisis del comportamiento de la función, utilizando el principio heurístico de reducción por diferenciación de casos.

En la pregunta 5, 17 estudiantes identificaron que para que el límite exista es necesario obtener la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y 14 llegaron a obtener el valor de a y calcularon el límite para comprobar su existencia como recurso de control.

En el Anexo # 27 (Tabla # 1) se exponen los resultados por preguntas, destacándose aquellos intentos que resolvieron correctamente los problemas y aquellos que los resolvieron con dificultades.

En la Tabla # 2 se presentan las características de las soluciones y el uso de estrategias por parte de los estudiantes. En la tabla 2-A se destaca el comportamiento de tres características del actuar experto, a saber:

el reconocimiento de patrones, el uso de recursos heurísticos y el uso de estrategias sistemáticas, a tenor de la PCPI.

En la Tabla 2-B se presentan los resultados del análisis sobre las características de las bases de orientación de los estudiantes, inferido del desempeño en la resolución de los problemas, a tenor con la TA.

Aparecen además, en el Anexo # 27, dos gráficas de barras que comparan los resultados del diagnóstico efectuado sobre la muestra de estudiantes de las carreras de Ingeniería Química e Informática y los del Grupo Experimental, en cuanto a las soluciones de las preguntas y los distintos niveles del desempeño.

En ellas se destaca que, en la muestra del diagnóstico, la mayor masa de los estudiantes (39,1%) está concentrada en los que dejaron las preguntas en blanco, mientras que en el Grupo Experimental la mayor masa está concentrada en los estudiantes con respuestas correctas (35,8%).

Aún cuando se evidencian problemas con el autocontrol en los estudiantes de la experiencia (44,2%), la mayoría de los estudiantes se orienta en el problema, elabora un plan y lo lleva a término, como se aprecia en la Tabla # 3 del Anexo # 27.

En cuanto a la comparación en el desempeño, en el Grupo Experimental se aprecian mejores resultados en los niveles *aceptable* y *satisfactorio* y un menor porcentaje de los intentos donde no se pudo apreciar el desempeño, lo cual sugiere que, proporcionalmente, un número mayor de estudiantes tenía una mejor disposición para resolver los problemas.

Conclusiones

A lo largo del Capítulo se muestran los resultados de diversas investigaciones relacionadas durante casi 10 años como una síntesis del trabajo investigativo del autor desde el curso 1988-89 hasta el pasado 1997-98.

Se dedican varios epígrafes a analizar las experiencias con la aplicación de la nueva concepción de la Geometría Analítica y de la concepción didáctica defendida en esta Tesis, la cual se basa en la resolución de clase de problemas mediante la variación de los instrumentos de solución descrito con anterioridad. Esta experiencia fue desarrollada en el 1^{er} Año de la Carrera de Ingeniería Industrial del ISPJAE y la Universidad de Matanzas. El de Geometría Analítica se desarrolló además en el ITM “José Martí” de las FAR durante el curso 1994-95.

Además de los instrumentos diseñados por el investigador para el control frecuente de la experiencia y los resultados alcanzados en el Examen Final de la asignatura, los estudiantes fueron sometidos a un Examen Especial, diseñado por un grupo de investigadores de la University Technological of Tennessee (EE.UU), en el cual, reportado por los propios investigadores, los resultados alcanzados en el diagnóstico fueron alarmantes.

En el epígrafe correspondiente se hace una discusión de los resultados, a la luz de los mismos indicadores utilizados por los investigadores de Tennessee y de otros tenidos en cuenta para medir el *desempeño* en la resolución de problemas visto bajo la óptica de la TA y de la PCPI.

Así, el *desempeño* de los estudiantes en la resolución de problemas se midió a través de parámetros de calidad de la asimilación de la TA (dominio, conciencia y generalización) y de parámetros acerca específicamente de la actividad de resolución de problemas, recogidos en literatura relacionada con la PCPI, a saber: reconocimiento de patrones, uso de estrategias y recursos heurísticos y el autocontrol.

Se considera que los resultados teóricos y experimentales expuestos en este capítulo, sirven para fundamentar la validez de la Hipótesis de Investigación, proporcionando así una solución al Problema planteado.

La investigación realizada en torno al desempeño en la resolución de problemas matemáticos en la Educación Superior constituye un primer acercamiento del autor a dicha problemática, por lo cual quedan planteado muchos problemas abiertos y conclusiones susceptibles de ser reconsideradas y medidas en otras condiciones. No obstante, considero que más que establecer pautas a otros investigadores, sirva la misma para estimular el desarrollo de esta línea hasta ahora muy poco trabajada en Cuba, particularmente en la enseñanza de las matemáticas superiores.

Conclusiones

A lo largo de la Tesis se planteó y fundamentó el Problema de Investigación, el cual constituye sólo una arista de un problema mucho más general y complejo: ¿cómo enseñar Matemática para lograr que los estudiantes sean capaces de resolver eficaz y eficientemente problemas no rutinarios?, o utilizando los propios términos definidos en la Tesis, ¿cómo enseñar Matemática para lograr que los estudiantes sean capaces de tener un buen **desempeño** en la resolución de **problemas**?

Se asumió las definiciones que tanto A. Schoenfeld (Universidad de California en Berkeley) como A.F. Labarrere (Universidad de la Habana) dan del término **problema**. El término **desempeño en la resolución de problemas** se definió (ver pág. 81) y se concibió una graduación de valores que caracterizan los distintos posibles comportamientos de las personas al desarrollar esta actividad. Asimismo, se analizó mediante parámetros el progreso del estudiante en este sentido (Ver Anexos 26 y 27).

Se identificó el **desempeño** como un indicador del desarrollo, en el sentido vigotskiano, a la luz de la TA y de la PCPI, aspecto éste no registrado en la literatura y que de hecho constituye un aporte teórico.

Así, y dando cumplimiento a los objetivos planteados, se conjugaron presupuestos teóricos de los enfoques Histórico-cultural y del Procesamiento de la Información en una concepción didáctica (definida en la pág. 83) donde se armonizan la estructuración sistémica de los contenidos y el desarrollo de las HGM, dimanantes de la TA, con la atención central a la resolución de problemas, abordada más profundamente por la PCPI. La conjunción en la enseñanza de una ciencia particular de presupuestos de estas teorías es inédita, al menos en Cuba, y constituye de hecho un aporte teórico de la Tesis.

Un nuevo tipo de enfoque sistémico surgió de la concreción en el plano didáctico de tal conjunción: **la resolución de clases de problemas mediante la variación de los instrumentos**, el cual se aplicó a los contenidos de Precálculo y Cálculo Diferencial en el 1^{er} Año de la carrera de Ingeniería Industrial del ISPJAE y la Universidad de Matanzas, con resultados positivos en su experimentación y extensión. Este tipo de organización sistémica es inédita tanto en Cuba como en

el extranjero y no aparece recogida en la literatura especializada, lo cual constituye también un aporte teórico.

Bajo la concepción didáctica propuesta, los estudiantes del ISPJAE y la Universidad de Matanzas han demostrado ser capaces, ante una diversidad de problemas matemáticos, de: identificar modelos, recuperar información pertinente y utilizar recursos heurísticos y metacognitivos, lo cual se muestra en los Anexos 20, 23, 26 y 27.

La concepción didáctica no fue aséptica al empleo simultáneo de otros enfoques, pues los conceptos y relaciones fundamentales fueron asumidos como **nodos cognitivos** y en particular al abordar la clase de problemas de graficación en el tema “Funciones”, se aplicó el enfoque llamado **de reglas y unidades**, para el tratamiento de los contenidos de Geometría Analítica Plana y del Espacio necesarios para el Análisis Matemático. No existen referencias anteriores del uso integrado de distintos enfoques en una misma asignatura; a lo más se han aplicado enfoques diferentes en temas distintos (Beltrán, 1992: G. Pérez, 1997)

La aplicación del enfoque del **tipo de reglas y unidades** arrojó resultados satisfactorios en los estudiantes del ISPJAE, la Universidad de Matanzas y el ITM donde se experimentó (Ver Anexos 19-22). Este enfoque no tiene referencias anteriores de aplicación en Cuba y si bien no constituye novedad en el marco de la teoría de los enfoques sistémicos en la enseñanza, si lo es en el contexto de la Matemática Educativa, en tanto el tratamiento didáctico integrado que se da los contenidos de GA es inédito, según la revisión de textos cubanos y extranjeros realizada y la opinión de los expertos consultados.

Además, en la Tesis se hacen consideraciones teóricas sobre los enfoques de tipo estructural-funcional y genético; se proponen y fundamentan diversas organizaciones de los contenidos matemáticos basados en los mismos que enriquecen desde el punto de vista teórico y de aplicación práctica la teoría psicopedagógica de los enfoques sistémicos en la enseñanza y de Matemática Educativa.

A partir de definir y fundamentar las HGM: **comparar, aproximar, optimizar y resolver**, se amplía el Sistema de HGM existente, lo cual también constituye aporte teórico para la teoría en Matemática Educativa. La formación y/o desarrollo de las mismas aparece como parte indisoluble

de la concepción didáctica defendida, aplicada a la enseñanza de la asignatura **objeto** de investigación; sin embargo no es exclusiva de ella, pues su presencia es esencial en otros contextos matemáticos. Su importancia ha sido destacada por otros investigadores.

Por todo lo anterior, se considera que los **objetivos** fueron alcanzados y que la **hipótesis** fue fundamentada teóricamente y apoyada por resultados experimentales, así como que la concepción didáctica defendida brinda una solución al **problema** de investigación.

Recomendaciones

1. Divulgar los aportes de esta Tesis, fundamentalmente entre los psicólogos, pedagogos e investigadores que estén interesados en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, para que las ideas y resultados plasmados en esta Tesis., se cuestionen y enriquezcan en su desarrollo.
2. Divulgar entre los profesores de Matemática del nivel Medio y Superior las diferentes organizaciones sistémicas de los contenidos del Cálculo Diferencial e Integral y la concepción de la Geometría Analítica, en aras de que se extiendan los resultados alcanzados a otros contextos y situaciones didácticas, lo cual contribuirá en alguna medida al perfeccionamiento del proceso docente-educativo. También ello propiciaría el estímulo para la búsqueda de otras estructuraciones sistémicas, lo que enriquecería la teoría en Matemática Educativa.
3. Proponer la Tesis como material de consulta en Diplomados y Maestrías de Didáctica de la Matemática, Ciencias de la Educación u otros que incluyan contenidos de Enseñanza de la Matemática, pues este material puede ser útil en virtud del análisis bibliográfico actualizado (dentro de las limitaciones conocidas) sobre la temática de la enseñanza de la resolución de problemas, la estructuración de los contenidos y los presupuestos teóricos de la TA (enfoque histórico-cultural y la PCPI).
4. Recomendar a las instancias correspondientes del Ministerio de Educación que se continúen atendiendo los contenidos relacionados con las transformaciones geométricas del plano en la enseñanza primaria y secundaria y que se continúen sistematizando los mismos durante el estudio de las funciones.
5. Continuar, como líneas de investigación, los problemas que quedan abiertos en este trabajo.

Publicaciones del Aspirante sobre el tema de la Tesis

En el libro:

Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. ISBN 950-808-173-2. Rosario, Argentina.

Los artículos:

1. *Los procedimientos generales matemáticos.*
2. *Apuntes sobre la enseñanza problémica y la resolución de problemas.*
3. *Algo de historia sobre la resolución de problemas.*
4. *La enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI*

Y en coautoría con las doctoras Herminia Hernández, Lourdes Valverde y Teresa Rodríguez:

5. *Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en Matemática: el Autocontrol.*

En Memorias de eventos internacionales arbitrados:

6. *“Un sistema de habilidades para la enseñanza de la Matemática”*. Memorias de la 9^{na} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Tomo II. Cuba. 1995 (Autor)
7. *“Algunas consideraciones sobre la estructuración del conocimiento matemático en la Enseñanza Superior”*. Memorias de la 10^{ma} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico. 1996 (Autor)
8. *“Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento matemático”*. Actas de la RELME-11. México. 1997. (Autor)
9. *“La instrucción heurística como vía para estimular el razonamiento”*. Memorias de la 9^{na} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Cuba . 1995. (Coautor)
10. *“Reflexiones sobre la inclusión de la instrucción heurística en el currículo”*. Memorias de la 10^{ma} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico. 1996. (Coautor)
11. *“Una alternativa para el aprendizaje de conceptos matemáticos: la instrucción heurística”*. Actas de la RELME-11. México. 1997 (Coautor)
12. *“Organización del tema de funciones con enfoque sistémico”*. Actas de la RELME-11. México. 1997. (Coutor)

En Revistas especializadas:

- **“Algunas consideraciones sobre el tratamiento metodológico del concepto de función”**. Boletín Órbita Científica. ISPEJV. Cuba. 1988. (Aceptado para publicar) (Coautor)
- **“¿Pueden los estudiantes de Cálculo resolver problemas no rutinarios?. Dos experiencias en universidades tecnológicas: Tennessee y la Habana”**. Revista “Varona”. 1995 (Aceptado para publicar) (Autor)

Otras publicaciones relacionadas:

1. **“Complementos de Geometría Analítica del Espacio”**. Folleto publicado por el ISPJAE como apoyo a la docencia. 1990. (Autor)
2. **“Retos de la enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI”** en Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura”. ISPJAE. Cuba. 1996. (Autor)
3. **“Algo sobre la historia de la Resolución de Problemas”** en el Folleto “Resolución de Problemas” editado por la Facultad de Ingeniería de la UNER. Paraná - Argentina. 1996. (Autor)
4. **“La estructuración del conocimiento matemático”**. Folleto de 100 páginas contentivo de varios artículos del autor sobre las diferentes formas de estructuración de los contenidos de las asignaturas y del conocimiento humano explicitado en el área de las Matemáticas Superiores, editado por la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina. Santa Fe - Argentina. 1996. (Autor)
5. **“Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: el Autocontrol”**. Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Cuba. 1996. (Coautor)

Bibliografía referida o consultada:

Alarcón, J. (1986). Graficación de funciones sin Cálculo. (Curso propedéutico). CINVESTAV-IPN. México.

Álvarez de Zayas, C.M. (1994). Entrevista concedida M.Gárate en el MES sobre diferentes temáticas de la Educación Superior en Cuba. Ciudad de la Habana. Cuba. (grabada en cassette)

Álvarez de Zayas, C.M. (1996). Hacia una escuela de excelencia. Editorial Academia. Ciudad de la Habana, Cuba.

Amador, A. (1995). “La personalidad y su estudio” en El adolescente cubano: una aproximación al estudio de su personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba.

- Antibi, A. (?)**. Didáctica de la Matemática. Métodos de Resolución de Problemas: Límites. Editado por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. (El contenido corresponde a la Tesis de Estado del autor sustentada el 27 de junio de 1988 en la Universidad Paul Sabatier de Toulouse, Francia)
- Apóstol, T.** (1969). Análisis Matemático. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.
- Apóstol, T.** (1970). Calculus. Editorial Ciencia y Técnica. La Habana. (2 volúmenes)
- Arango, C. & S. Hernández & H. Santana.** (1989). "Los métodos productivos de la enseñanza de la Matemática". Material mimeografiado. Facultad de Matemática. ISPEJV. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Arcavi, A.** (1994). "Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics". Weizmann Institute of Science. Israel.
- Armendáriz, Ma V. & C. Azcárate & J. Deulofeu.** (1993). "Didáctica de las matemáticas y Psicología" en Revista Infancia y Aprendizaje (Journal for the Study of Education and Development) . N° 62-63. Madrid. España. Págs. 77-100
- Ausubel, D.** (1983). Psicología Educativa. Editorial Trillas. México.
- Balacheff, N.** (1990). Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics, in Nesher; Kilpatrick "Mathematics and Cognition: A research synthesis". Cambridge U.P. pp. 135-148
- Balacheff, N. & A.G.Howson & A.Sfard & H.Steinbring & J.Kilpatrick & A.Sierpiska.** (1993). "What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?". Documento de discusión para un Estudio del ICMI. Síntesis tomada de la Revista Educación Matemática del Grupo Editorial Iberoamérica. Vol. 5 # 2.
- Barbut, M. (?)**. "Acerca del sentido de la palabra estructura en matemáticas". (fotocopia)
- Beer, S.** (1969). Cibernética e Administração Industrial. Zahar Edit. Rio de Janeiro. pp.23
- Beltrán, I.** (1992). "Sistema didáctico para la enseñanza de la Química General". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Berman, G.** (1983). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR. 2^{da} Edición. Moscú.
- Black, M. (?)**. Modelos y Metáforas. Editorial Tecnos - Estructura y Función. Madrid, España.
- Budnick, F.S.** (1992). Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Tercera Edición. McGraw-Hill. México.
- Bugrov, Ya.S. & S.M.Nikolski.** (1984-87). Matemáticas Superiores. (4 tomos). Editorial MIR. Moscú.

- Calderón, J. & J. Díaz & M^a V. Varela & J. Oubiña.** (1973). Complementos de Geometría Analítica. I y II parte. CUJAE, Ciudad de la Habana, Cuba.
- Calderón, R..** (1992). "Perfeccionamiento de la enseñanza de la asignatura Matemática II (Cálculo Integral). Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Educación Superior y sus Perspectivas. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Calderón, R.** (1996). "La enseñanza del Cálculo Integral. Una alternativa basada en el enfoque histórico-cultural y de la actividad". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Cambray, R. & E.A.Sánchez & G.Zubieta (comps.).** (1994). Antología en Educación Matemática. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.
- Cambray, R. & L.M. Santos. (Comps).** (1994). Perspectivas en Educación Matemática. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.
- Campistrous, L & C. Rizo.** (1992). "Enseñanza de la Matemática: reflexiones polémicas". Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Cantoral, R.** y otros. (1985). Cálculo Diferencial. Programa de formación y actualización de profesores de Matemática. CINVESTAV. México.
- Cantoral, R.** (1997). "Matemática Educativa en Latinoamérica: ¿Será posible el sur?". Conferencia Magistral en RELME-11. Morelia. México.
- Carnota, O.** (1983). Sistemas automatizados de dirección. Editorial Ciencia y Técnica. La Habana, Cuba.
- Carpenter, T.P.** (1988). "Teaching as problem solving" in R. Charles and E. Silver (Ed.). The teaching and assessing of mathematical problem solving. (pp. 188-202). Reston V.A. NCTM.
- Castañeda, E. & A. Scull.** (1994). "Complementación de la Matemática y las ciencias de Ingeniería en la formación del Ingeniero Civil". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Ciudad de la Habana. Cuba (inédito)
- Cepero, C.M. & T. Sanz.** "Diagnóstico del procedimiento lógico identificación a través de los conceptos: "función" y "necesidad y suficiencia" en estudiantes de 1er.Año de Ing. Civil. (Aceptado para publicación en la Revista Cubana de Educación Superior).
- Charnay, R.** (1994). "Aprender por medio de la Resolución de Problemas" en Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones. Paidós. 1^{ra} Edición. (Comp.: Cecilia Parra e Irma Saíz)

- Chiavenato, I.** (1981). Introducción a la Teoría General de la Administración. McGraw Hill, México.
- Chiffi, A.** (1977 y 1982). Análisis matemático. (dos tomos). Editorial Alceo. Universidad de Padua. Italia.
- Colectivo de Autores.** (1994). "Algunos elementos entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral". Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. México.
- Colectivo de Autores del CEPES.** (1990). La planificación pedagógica de la enseñanza. CEPES. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Colectivo de Autores del CEPES.** (1996). Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. CEPES-Universidad de la Habana. Fondo Editorial: Corporación Universitaria de Ibagué. Ibagué, Colombia.
- Colectivo de Autores de la Fac. Matemática de la UH.** (1984). Análisis Matemático. En cinco tomos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.
- Coll, C.** (1993). "Psicología y Didácticas: una relación a debate" en Revista Infancia y Aprendizaje (Journal for the Study of Education and Development) . N° 62-63. Madrid. España. Págs. 59-76
- Corral, R. & M. Núñez.** (1990). "Aplicación de un método teórico a la elaboración del perfil profesional en la Educación Superior. Revista Cubana de Educación Superior. Vol. X (2). Ciudad de la Habana, Cuba.
- Darien, A. & K. Graham & J. Ferrini-Mundi.** (1994). "Student Understanding of Basic Calculus Concepts: Interaction with the Graphics Calculator". Journal of Mathematical Behavior 13, 225-237. USA
- Davidov, V.V. (?)**. Los tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. (Traducido de la edición rusa publicada en 1972, Editorial Pedagogika, Moscú)
- Davis, R.B.** (1986). Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. NY. Ablex.
- De la Cruz, R.** (1997). Tesis por la opción del Master en Matemática Avanzada para ingenieros. ISPJAE. Ciudad de la Habana. Cuba.
- De la Cruz, R. & J.R. Delgado.** (1994). "Una propuesta de estructuración de las asignaturas de Matemática de 2^{do} Año de las carreras de Ingeniería de perfil eléctrico". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Ciudad de la Habana. Cuba (inédito)
- Delgado, J. R. & A. Fernández.** (1988). "Algunas consideraciones acerca del tratamiento metodológico del concepto de función". Boletín Orbita Científica. ISPEJV. (aceptado para publicar)

- Delgado, J. R.** (1990). Folleto Complementario de Geometría Analítica del Espacio. ISPJAE. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R.**(1991). "Una variante de organización sistémica del Cálculo Diferencial". Trabajo presentado en el Taller Científico convocado por el CEPES, Universidad de la Habana, Cuba. (inédito)
- Delgado, J. R.**(1992a). Folleto complementario de Matemática I (Cálculo Diferencial) para estudiantes de Curso por Encuentros en las Carreras de Ingeniería Industrial, Informática, Química, Eléctrica, Telecomunicaciones y Automática del ISPJAE. CUJAE. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R.**(1992b). "Una variante del Cálculo Diferencial con enfoque sistémico". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. UNiversidad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R. & S.Hernández & M^aC. Pinto.**(1992c). "El extremo global como invariante en la teoría de extremos de funciones reales". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. Universidad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R. & B. Fernández de Alaíza & R. De la Cruz.** (1992d). "El error de interpolación de Taylor como invariante en la aproximación local de funciones". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. Universidad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R.** (1993). "Algunas consideraciones sobre el perfeccionamiento de la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Industrial". Trabajo presentado en el Primer Evento Científico Metodológico Internacional de Matemática y Computación COMAT'93. Universidad de Matanzas. (inédito)
- Delgado, J. R.** (1994a). "La relación incremental como célula generadora del Cálculo Diferencial". Trabajo presentado al Segundo Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. Ciudad de la Habana, Cuba. (Inédito).
- Delgado, J. R. & C.M. Cepero.** (1994b). "Una variante de estructuración del Cálculo Integral con enfoque sistémico". Trabajo presentado al Segundo Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. Ciudad de la Habana, Cuba. (Inédito).
- Delgado, J.R. & C.M. Cepero.** (1994c). "Importancia metodológica del concepto matemático función". Trabajo presentado al Congreso Nacional de Matemática y Computación COMPUMAT '94. UCLV. Santa Clara. Cuba. (inédito)

- Delgado, J. R. & C.M. Cepero.** (1994d). "Tratamiento Didáctico del problema fundamental de la Geometría Analítica". Trabajo presentado al Congreso Nacional de Matemática y Computación COMPUMAT'94. UCLV. Santa Clara. Cuba. (inédito)
- Delgado, J.R.** (1994e). "Un tratamiento didáctico de la Geometría Analítica en la Carrera de Ingeniería Industrial". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Ciudad de la Habana. Cuba (inédito, aunque el resumen aparece entre los documentos de la 8^{va} Conferencia Científica de Ingeniería y Arquitectura del ISPJAE)
- Delgado, J.R.** (1994f). "Una variante de organización del Cálculo Diferencial resolviendo problemas". Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Ciudad de la Habana. Cuba (inédito)
- Delgado, J. R.**(1995a). "Las habilidades generales matemáticas" en Cuestiones de Didáctica de la Matemática (folleto publicado por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos), Paraná. Argentina.
- Delgado, J. R.**(1995b). "Un sistema de habilidades para la enseñanza de la Matemática". Memorias de la 9^{ra} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Tomo II. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R. & C.L. Méndez & S. Hernández.** (1995c). "¿Pueden los estudiantes de Cálculo resolver problemas no rutinarios?. Dos experiencias en universidades tecnológicas: Tennessee y la Habana". Revista Varona del ISPEJV. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R.**(1996a). "Algo sobre la historia de la Resolución de Problemas" en el Folleto "Resolución de Problemas" editado por la Facultad de Ingeniería de la UNER. Paraná- Argentina.
- Delgado, J. R.**(1996b). "Algunas consideraciones sobre la estructuración del conocimiento matemático en la Enseñanza Superior". Memorias de la 10^{ma} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.
- Delgado, J. R.**(1996c). "La estructuración del conocimiento matemático". Folleto de 100 páginas contentivo de varios artículos del autor sobre las diferentes formas de estructuración de los contenidos de las asignaturas y del conocimiento humano explicitado en el área de las Matemáticas Superiores, editado por la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina. Santa Fe - Argentina.

- Delgado, J. R. & M.E. Torres & L. Valverde.** (1996e). “Retos de la enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI” en Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura”. ISPJAE. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Delgado, J. R.** (1997a). “Retos de la enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI”. Ponencia presentada para el Examen de Mínimo de Ciencias Sociales por la opción del Grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Departamento de Ciencias Sociales. ISPJAE. Ciudad de la Habana, Cuba. (30 páginas)
- Delgado, J. R.** (1997b). “Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento matemático”. Actas de la RELME-11. México.
- Delgado, S & Y. Antelo.** (1995). “Estudio de algunas clases de superficies a través de las transformaciones geométricas”. Trabajo presentado en la Jornada Científica Estudiantil de la Facultad de Ingeniería Industrial del ISPJAE tutorado por J.R. Delgado y C.L. Méndez. CUJAE, Ciudad de la Habana, Cuba (inédito)
- Demidóvich, B. Y otros.** (1977). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú
- Didriksson, A.** (1986). “Educación informática: adiós a la enseñanza tradicional”, en TDS (Agencia ALASEI). Ciudad México. 7 de abril.
- Dowling, E.T.** (1991). Cálculo. Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. McGraw-Hill. Colombia.
- Driver, R. & E. Guesne & A. Tiberghien.** (1992). Ideas científicas en la infancia y la adolescencia. Ediciones MORATA, S.A. y Centro de Publicaciones del MEC. España.
- Dubinsky, Ed.** (1996). “El constructivismo de Piaget y el aprendizaje de los conceptos abstractos de la matemática avanzada”. Conferencia Magistral en la 10^{ma} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.
- Dubinsky, Ed y otros.** (1995). Calculus. Concepts & Computers. Second Edition. McGraw-Hill. NY.
- Fedenko, A.S.** (1981). Problemas de Geometría Diferencial. Editorial MIR. Moscú.
- Fernández de Alaíza, B.** (1997). “Resultados del perfeccionamiento de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería en Automática”. Trabajo presentado al Evento Internacional Pedagogía ‘97. Ciudad de la Habana. Cuba.

- Ferrini-Mundi, J. & K.Geuther.** (1993). "La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza y desarrollo curricular. Una perspectiva". (Versión en español). Revista "Matemáticas: Enseñanza Universitaria". Vol. 3, N° 1.Colombia.
- Fikhtengol'ts, G. M.** (1965). The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volúmenes 1 y 2. Pergamon Press. Estados Unidos.
- Flores, A.** (1990). "Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del Espacio para el nivel medio superior en Cuba". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Fraga, R.** (1991). "La sistematización de la Trigonometría en el nivel medio superior en relación con las exigencias del nivel superior". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Freire, P & Ana P. De Quiroga.** (1995). Interrogantes y propuestas en Educación. Ideales, Mitos y Utopías a fines del siglo XXI. Ediciones Cinco. Buenos Aires, Argentina.
- Galperin, P. Ya.** (1959). "Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones y los conceptos". Folleto "Acerca de la atención". Editado por la EMS "Cdte. Arístides Estévez Sánchez". La Habana, Cuba.
- Galperin, P. Ya.** (1965). "La dirección del proceso de aprendizaje". Folleto "Acerca de la atención". Editado por la EMS "Cdte. Arístides Estévez Sánchez". La Habana, Cuba.
- Galperin, P. Ya.** (1983). "Los tipos fundamentales de aprendizaje", en Lecturas de psicología pedagógica (Segarte. A.) Ciudad de La Habana, Cuba.
- Garnir, H.G.**(1966). Teoría de funciones. Dos tomos. Lieja, Bélgica.
- Gaulim, C.** (1995). Conferencia " Cuestiones prioritarias en la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría". En la 9^{na} Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Gianella, A.E.** (?). "Las analogías en ciencia". Buenos Aires, Argentina. (fotocopia)
- Gil, D.** (1992). Conferencia "Contribución de la historia y filosofía de las Ciencias a la transformación de la Enseñanza de las Ciencias" dictada en la International Conference on History of the Physical-Mathematical Sciences and the teaching of Sciences". Madrid. España.
- Glaeser, G.** (1989). "La crisis de la Enseñanza en la Geometría". Revista Integración. Departamento de Matemática. Universidad Industrial de Santander. Vol.7, N°. 2. (diciembre). Colombia.

- Glaser, R.** (1992). Conferencia Magistral pronunciada en el Aula Magna de la Universidad de la Habana durante el Primer Taller Internacional sobre la Enseñanza Superior y sus Perspectivas. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Glaser, R. (?)** . *"The maturing of the relationship between the science of learning and cognition and education practice"*. To appear in: *Learning and instruction*, Erik De Corte (Ed.). *The Journal of the European Association for Research and Learning and Instruction*.
- Gómez, B.** (1991). "Las Matemáticas y el proceso educativo" en Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática. Editorial Síntesis.
- Gómez, C. & J. Fraile.** (1993). "Psicología y Didáctica de las matemáticas" en Revista Infancia y Aprendizaje (Journal for the Study of Education and Development). N° 62-63. Madrid. España. Págs. 101-114.
- González, C. & J.R. Delgado.** (1995). "Desarrollo de la disciplina Matemática en la carrera Ingeniería Industrial". Trabajo presentado en la Comisión de Docentes del IV CLEIM. CUJAE, Ciudad de la Habana, Cuba. (inédito)
- González, M.** (1998). Tesis por el Título Académico de Master en Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias del ISP "Enrique José Varona". Ciudad de la Habana. Cuba.
- González, O.** (1989). "Aplicación del enfoque de la actividad al perfeccionamiento de la Educación Superior". CEPES. Ciudad de la Habana, Cuba.
- González, O.** (1991). *"El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica" en Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. CEPES-UH. Ciudad de la Habana, Cuba.*
- González-Manet, E.** (1995). "La nueva era de las tecnologías informativas". Revista Educación. Cuba.
- Greeno, J.G.** (1976). Cognitive objectives of instruction: Theory of knowledge for solving problems and answering questions. En D.Klahr (comp.), *Cognition and instruction*. Hillsdale, N.J.; Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J.G.** (1978a). A study of problem solving. En R. Glaser (comp.), *Advances in instructional psychology*. (Vol. 1). Hillsdale, N.J.; Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J.G.** (1978b). Understanding and procedural knowledge in mathematics education. *Educational Psychologist*. 12(3), pp.262-283.
- Grossman, S.** (1993). Álgebra Lineal con aplicaciones. Cuarta Edición. McGraw-Hill. México.

- Gutiérrez, A.** (1991). Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática. Editorial Síntesis. España.
- Guzmán, M. de.** (1985). "Tendencias innovadoras en la enseñanza de la matemática". En "La enseñanza de la Matemática a debate" publicado por el Ministerio de Educación y Cultura. Madrid. España.
- Guzmán, M. de.** (1991). Para pensar mejor. Editorial Labor, S.A. España.
- Guzmán, M. de.** (1995). Conferencia: "El papel del matemático frente a los problemas de la educación matemática". Memorandum 21 de la UMA. Buenos Aires. Argentina.
- Henriques, Vico E.** (1982). "Education shorfall" in Special Advertising Section, Time, New York, 22 of november.
- Hernández, H.** (1989). "El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior cubana. Experiencia en el Algebra Lineal". Tesis Doctoral. La Habana, Cuba.
- Hernández, H.** (1990). "Saltar a la vista lo evidente". Revista Cubana de Educación Superior. Vol. X. No. 1. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Hernández, H.** (1993a). Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate. EPN. Quito - Ecuador.
- Hernández, H.** (1993b). "Principios didácticos" en Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate. EPN. Quito - Ecuador.
- Hernández, H.** (1993c). "Estructurando el conocimiento matemático" en "Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate". EPN. Quito - Ecuador.
- Hernández, H.** (1993d). "Sistema básico de habilidades matemáticas" en "Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate". EPN. Quito - Ecuador.
- Hernández, H.** (1995). *"Nodos Cognitivos. Un recurso eficiente para el aprendizaje matemático". IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Ciudad de la Habana, Cuba.*
- Hernández, H. & J.R. Delgado & L. Valverde & T. Rodríguez.** (1996). "Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: el Autocontrol". Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE.
- Hernández, H.** (1997). "Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana". Conferencia Magistral dictada en la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Morelia, México.

- Hernández, J. & M. M. Socas.** (1994). “Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas”. Revista SUMA. N°16, España.
- Hernández, R & M. C. Rodríguez.** (1992). “Perfeccionamiento de la asignatura Matemática III”. Trabajo presentado al Primer Taller Internacional sobre la Educación Superior y sus Perspectivas. Universidad de la Habana. Cuba. (inédito)
- Hernández, S & C. L. Méndez & J. R. Delgado.** (1997). “Organización del tema de funciones con enfoque sistémico”. Actas de la RELME-11. México.
- Hernández, S.** (1997). “El desarrollo de habilidades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática en Ingeniería”. Trabajo de curso de la asignatura “Metodología de la Investigación” correspondiente a la Maestría en Ciencias de la Educación del CEPES. Universidad de la Habana, Cuba.
- Hilgard, E.R.** (1972). Teorías del Aprendizaje. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.
- Ilín, V. & E. Pozniak.** (1991). Fundamentos del Análisis Matemático. (En tres tomos). Editorial MIR, Moscú.
- Jungk, W.** (1979a). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1. Editorial de libros para la Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Jungk, W.** (1979b). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2. Primera y Segunda partes. Editorial de libros para la Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Kaplan, W.** (1970). Calculus and Linear Algebra. Editorial McGraw-Gill. USA.
- Klamkin, M.** (1992). “Creatividad Matemática en la Propuesta y Resolución de Problemas”. Material de las IX Jornadas sobre Resolución de Problemas convocadas por la OMA (Argentina), extraído y traducido al castellano de Crux Mathematicorum, Vol. 12, N°. 10, Diciembre, 1986.
- Klein, M.** (1976). Calculus: An Intuitive and Physical Approach. Editorial John Wiley and Sons
- Kletenik, D.** (1979). Problemas de Geometría Analítica. Editorial MIR, Moscú.
- Klimberg, L.** (1980). Introducción a la Didáctica General. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.
- Klimovsky, G.** (?). “Acerca de las distintas acepciones de la palabra “modelo” . Fotocopia
- Kolmogórov & Fomín.** (1975). Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial MIR, Moscú.
- Konstantínov, N.A. & E. N. Medinsii & M. F. Shabaeva.** (1974). Historia de la Pedagogía. Traducido de la cuarta edición en ruso. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

- Krásnov, M. & A. Kiseliy & G. Makarenko & E. Shikin.** (1990). Curso de Matemáticas Superiores para Ingenieros. Tomo I. Editorial MIR, Moscú.
- Kudriávtssev, L.D. & B. Demidóvich.** (1983). Breve Curso de Matemática Superior. Editorial MIR. Moscú.
- Kudriávtssev, L.D.** (1983). Curso de Análisis Matemático. (En dos tomos). Editorial MIR, Moscú.
- Kudriávtssev, L.D. y otros.** (1989). Problemas de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú.
- Kuhn, T.** (1962). La estructura de las revoluciones científicas. Breviarios. Fondo de Cultura Económica. Undécima reimpresión, México. 1995.
- Kuzmin, V.** (1979). “Determinantes gnoseológicos del saber sistémico”. Revista de Ciencias Sociales. Nº 1. págs. 100-120. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Labarrere, A. (1994). “Pensamiento. Análisis y Autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos”. Ángeles Editores. México.*
- Labarrere, A.** (1995). “La generalización de procedimientos de solución de problemas y la autorregulación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes”. En El adolescente cubano: una aproximación al estudio de su personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba. Págs. 59-84.
- Lakatos, Y.** (1978). La metodología de los programas de investigación científica. Alianza. Madrid, España.
- Lampert, M.** (1990). “When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching”. In American Educational Research Journal, Spring, Vol. 27, Nº 1; pp. 29-63. USA
- Larkin, J.H.** (1977). Problem solving in physics. Citado por L. Resnick & W. Ford en La enseñanza de la Matemática y sus fundamentos psicológicos. Versión en castellano. Ediciones Paidós. España.
- Leóntiev, A.N.** (1967). “Acerca de algunos problemas perspectivas de la psicología soviética”, en Cuestiones de Psicología. Nº 6. Moscú.
- Lerner, I. Ya & M. N. Skatkin.** (1978). “ Métodos de enseñanza” en Didáctica de la Escuela Media de M.A. Danílov & M.N. Skatkin. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- Llivina, M.** (1997). Tesis por el Título Académico de Master en Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias del ISP “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana. Cuba.
- López, F.** (1996). “Nuevo enfoque sistémico de la Matemática Numérica y su aplicación en la confección de una biblioteca de métodos numéricos basada en objetos (NOE)”. Memorias de la X Reunión

Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.

Lorenzato, S. & M^a do Carmo Vita. (1993). "Século XXI: qual Matemática é recomendável?. Revista Zetetiké. Año 1, N° 1. Pp. 41-49. Universidad Estadual de Campinas, Brasil

Marcipar de Katz, S. (1996). "Habilidades Cognitivas y Hábitos de Estudio en Matemática". Proyecto de investigación en el marco del Programa CAI+D '96. Universidad Nacional del Litoral. Secretaría de Ciencia y Técnica. Santa Fe, Argentina.

Mariño, M. (1994). "Formación matemática de ingenieros en la década del 90". Trabajo presentado al Primer Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. (Inédito).

Mariño, M. (1997). "Programa para la optimización de la formación matemática básica de profesionales de Ciencias Técnicas". Tesis Doctoral. Universidad de Oriente. Cuba.

Martínez, F. (1991). "*Perfeccionamiento de la enseñanza de la asignatura Cálculo Diferencial*". Revista Cubana de Educación Superior. Vol. XI, N°1-2. Ciudad de la Habana, Cuba.

Martínez, F. (1993) "*Una variante de Sistema Didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial*". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.

Martínez, M. (1990). La creatividad en la escuela. Material utilizado en el curso homónimo pre-evento de Pedagogía '90. Palacio de las Convenciones. Ciudad de la Habana, Cuba.

Martínez, M. (1995). Calidad Educacional, Actividad Pedagógica y Creatividad. (Copia en diskette)

Matjmútov, M. I. (1983). La Enseñanza Problémica. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

Mayer, R. E. (1983). Thinking, Problem Solving, and Cognition. San Francisco. W.A. Freeman and Co. USA.

McLeod, D.B. (1990). "Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization". In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM. Douglas A. Grouws (Editor). Macmillan Publishing Company. New York. USA

Melzak, Z. A. (1983). "Bypass: A simple approach to complexity.", New York John Wiley & Sons. USA.

Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática "Elfriede Wenzelburger". (1995). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- Méndez, C.L. & J. R. Delgado & M. Fernández & B. Gómez & M. Horta.** (1995). "La instrucción heurística como vía para estimular el razonamiento". Memorias de la 9na. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana. Cuba
- Méndez, C.L. & J.R. Delgado.** (1996). "Reflexiones sobre la inclusión de la instrucción heurística en el currículo". Memorias de la 10ma. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.
- Méndez, C.L. & J.R. Delgado.** (1997). "Una alternativa para el aprendizaje de conceptos matemáticos: la instrucción heurística". Actas de la RELME-11. México.
- Miquel, P.** (1974). Curso de Cálculo Diferencial. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.
- Mongeau, P. & R. Pallascio & R. Allaire.** (1991). "El desarrollo geométrico de la representación espacial". Revista SUMA, N°. 7. España. (autores de la Universidad de Québec, Canadá)
- Moreno, L.** (1993). "Cálculo: Una perspectiva histórica y didáctica". Revista "Matemáticas: Enseñanza Universitaria". Vol.3, N°1 Colombia.
- Morenza, L.** (1997). "Psicología Cognitiva Contemporánea y representaciones mentales. Algunas aplicaciones al aprendizaje". Folleto del curso pre-congreso homónimo en el evento internacional Pedagogía '97). Ciudad de la Habana, Cuba.
- Müller, H.** (1986). "Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática" (I). Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Müller, H.** (1987). "Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática" (II). Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática. N° 7. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Müller, H.** (1987). "Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General, Politécnica y Laboral". ISP "Frank País García". Santiago de Cuba, Cuba.
- Müller, H.** (1988). "El Programa Heurístico General para la Resolución de Ejercicios" (III). Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática. N° 9. Ciudad de la Habana, Cuba.
- NCTM de Estados Unidos.** (1989). Estándares curriculares de 9-12. Versión al español realizada por la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática. Sevilla. España.
- Nemirovsky, R. & A. Rubin.** (1992). "Student's Tendency to Assume Resemblances Between a Function and its Derivative". Working Paper 2-92, January. Editorial TERC. Massachusetts, USA.

- Nemirovsky, R.** (1996). “El Cálculo a través de todos los niveles educativos”. Artículo tomado del “Proceedings of Working Group 3 on Students’ Difficulties in Calculus” en el ICME-7, Michele Artigue & Gontran Ervynck (eds.). College de Sherbrooke, Canadá. (Versión al castellano del CECyT Wilfrido Massieu del IPN, México)
- Nickerson, R. S & D. Perkins & E. E. Smith** (1990). Enseñar a pensar. Aspectos de la actitud intelectual. Ediciones Paidós Ibérica y Centro de Publicaciones del M.E.C. de España.
- NMS-IPN.** (1996). Programa del Curso de Matemática IV: Cálculo Diferencial. IPN, México.
- NMS-IPN.** (1996). Programa del Curso de Matemática V: Cálculo Integral. IPN, México.
- Novak, J. & D.B.Gowin.** (1988). Aprendiendo a aprender. Ediciones Martínez Roca, S.A. Barcelona, España.
- Orton, A.** (1990). Didáctica de las matemáticas. Ediciones Morata, S.A. y el Centro de Publicaciones del MEC de España. Madrid, España.
- O'Shea, T. & John Self.** (1989). Enseñanza y aprendizaje con ordenadores. Editorial Ciencia y Técnica. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Parra, C. & I. Saíz. (Compiladoras).** (1994). Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones. Paidós. 1^{ra} Edición. Buenos Aires, Argentina.
- Perera, G. & J. Perera & J.R. Delgado.** (1996). “Modelización estructural interpretativa de los procesos de organización del conocimiento matemático en relación con el teorema del límite central”. Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Noviembre, 1996.
- Pérez, G.** (1997). Tesis de Maestría en Ciencias de la Educación Superior. CEPES-UH. Cuba.
- Pérez, María del Puy.** (1993). “La solución de problemas matemáticos” en el libro homónimo de Juan Ignacio Pozo, la autora y otros. Editorial Aula XXI/ Santillana. Madrid – España.
- Pérez, R. & R. Gallego-Badillo.** (1994). “Corrientes constructivistas. De los Mapas conceptuales a la Teoría de la Transformación Intelectual”. Colección Mesa Redonda. Colombia.
- Piaget, J.** (1991). Introducción a la epistemología genética. (El pensamiento matemático). Tomo 1. Editorial Paidós Mexicana S.A. 2^{da} Reimpresión en México.
- Pike, R & L. Guerra.** (1989). Optimización en Ingeniería. Editorial Alfaomega. México.

- Pimm, D.** (1990). El lenguaje matemático en el aula. Ediciones Morata, S.A. y el Centro de Publicaciones del MEC. Madrid, España.
- Pinto, M. & L. Fernández & S. Hernández.** (1994). "Diagnóstico de deficiencias en el aprendizaje del Cálculo Diferencial". Trabajo presentado al I Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. Cuba
- Piskúnov, N.** (1977). Cálculo Diferencial e Integral. (En dos tomos). Editorial MIR, Moscú.
- Platón.** (1958). Diálogos. Ediciones Ibérica. España.
- Polya, G.** (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México.
- Polya, G.** (1966). Matemática y razonamiento plausible. Editorial Estructura y Función. Madrid, España.
- Quiroz, M.** (1989). "Lenguaje gráfico". Memorias del 1^{er} Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Cuaderno de Investigación N° 12, Año III. Octubre. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores. CINVESTAV-IPN. México.
- Réshetova, Z. A.** (1978). "Formación del pensamiento teórico de los estudiantes en el estudio del curso de Química General en la Educación Superior". Revista "La Educación Superior Contemporánea", N° 3/23/78. La Habana, Cuba.
- Réshetova, Z.A.** (1988). "Análisis sistémico aplicado a la Educación Superior". Selección de Lecturas. Universidad Central de las Villas, Cuba.
- Resnick, L. & W. Ford.** (1990). La enseñanza de la Matemática y sus fundamentos psicológicos. Versión en castellano. Ediciones Paidós. España.
- Rey Pastor, J. & L.A.Santaló & M.Balanzat** (1966). Geometría Analítica. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.
- Rey Pastor, J. & P.P.Calleja & C.A.Trejo.** (1967). Análisis Matemático. En tres tomos. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.
- Ríbnikov, K.** (1987). Historia de las Matemáticas. Editorial MIR, Moscú, URSS.
- Rodríguez, J.L. & L. Ruiz.** (1989). "El proceso de aprendizaje en Matemáticas y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau". Revista Epsilon. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". (Primer Cuatrimestre). Sevilla, España.

- Rodríguez, R.** (1985). Cálculo Diferencial de funciones de varias variables. (En dos tomos). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Rodríguez, R.** (1988). Cálculo Diferencial e Integral (en dos tomos). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Rodríguez, T.** (1991). "Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior". Tesis Ph. D. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Rubinstein, S.L.**(1959). El Pensamiento y los Caminos de su Investigación. Ediciones Pueblos Unidos. Montevideo. Uruguay.
- Rubinstein, S.L.**(1960). El Ser y la Conciencia. Ediciones Pueblos Unidos. Montevideo. Uruguay.
- Sadovski, V.** (1979). "La metodología de la ciencia y el enfoque sistémico". Revista de Ciencias Sociales. Nº 1. págs. 99-117. Ciudad de la Habana. Cuba.
- Sálmína, N.G.** (1984). "Análisis lógico-psicológico de los procedimientos para construir la asignatura docente". Revista "La Educación Superior Contemporánea". Nº 3-47. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Sálmína, N.G.** (1989). La actividad cognoscitiva de los alumnos y el modo de estructurar la asignatura. Folleto editado por UH-CEPES. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Sánchez, C.** (1989). "El recurso de la Historia y Metodología de la Matemática". Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Nº11. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Santaló, L.A.** (1985). "La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario". En La Enseñanza de la Matemática a Debate. M.E.C. Madrid, España.
- Santos, L. M.** (1990). "College student's methods for solving mathematical problems as a result of instruction based on problem solving". Thesis PhD. University of Columbia. Canada.
- Santos, L. M.** (1993). "La resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas". Revista Educación Matemática. Vol.2 (2), págs. 16-24.
- Santos, L. M.** (1994). "La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas". Cuadernos de Investigación Nº28. CINVESTAV-IPN. México.
- Sanz, T.** (1989). "Estudio de los procedimientos lógicos: identificación de conceptos y clasificación en estudiantes de Ciencias Técnicas". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.

- Schoenfeld, A. & M.Gamoran & C. Kessel & Michael Leonard & R. Or-Bach & A. Arcavi.** (1992). "Toward a Comprehensive Model os Human Tutoring in Complex Subject Matter Domains". Trabajo presentado a la Conferencia Anual de la American Educational Research Association.
- Schoenfeld, A.** (1985a). Understanding and Teaching the Nature of Mathematical Thinking. University of California at Berkeley, USA. (fotocopia)
- Schoenfeld, A.** (1985b). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. USA.
- Schoenfeld, A.** (1985c). "Ideas y tendencias en la resolución de problemas" en La enseñanza de la Matemática a debate. M.E.C. Madrid, España.
- Schoenfeld, A.** (1985d). "Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos" en la antología La enseñanza de la Matemática a debate. M.E.C. Madrid, España.
- Schoenfeld, A.** (1985e). "Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. In E.A.Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple Research perspectives. (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Erlbaum. USA.
- Schoenfeld, A.** (1986) "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well Taught" Mathematics Courses" (fotocopia).
- Schoenfeld, A.** (1987). "A Brief and Biased History of Problem Solving" en F. Curcio (Ed.). Teaching and Learning: A problem-solving focus. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics. USA.
- Schoenfeld, A.** (1987). *"What's all the fuss about metacognition?" in Cognitive Science and Mathematics Education*. LEA Publishers. USA.
- Schoenfeld, A.** (1989). "Ideas in the air: Speculations on small group learning environment and cultural influences on cognition and epistemology". International Journal of Educational Research. 13(1), pp. 71-78.
- Schoenfeld, A.** (1992). " Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics" in D. Grove (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. NCTM. New York: Macmillan.
- Selden, J. & A. Madison & A. Selden.** (1992). ¿Pueden los estudiantes promedio de Cálculo resolver problemas no rutinarios? En Antología en Educación Matemática N° 1. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

- Seminario “La Matemática en el Aula”.** (1993). Proyecto Extensión FCO293. Universidad del Bío-Bío. Chile.
- Sierra, V. & C. M. Álvarez de Zayas.** (1997). Metodología de la investigación científica. Folleto del Programa Internacional de Maestría en "Educación Superior" Gestión 1996-97. Sucre - Bolivia.
- Skemp, R.** (1993). El aprendizaje inteligente de las matemáticas. Editorial Morata. Madrid. España.
- Spivak, M.** (1978). Calculus. Edición Revolucionaria (en dos tomos). La Habana. Cuba.
- Talízina, N.F.** (1983). “La actividad cognoscitiva como objeto de dirección”, en Lecturas de psicología pedagógica (Segarte, A.) Ciudad de La Habana, Cuba.
- Talízina, N.F.** (1984). Conferencias sobre “Los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior”. MES. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Talízina, N.F.** (1987). Métodos para la creación de programas de enseñanza. DEPES-MES y Universidad de Camagüey. Cuba
- Talízina, N.F.** (1988a). Psicología de la Enseñanza. Editorial Progreso. Moscú, URSS.
- Talízina, N.F.** (1988b). Conferencias dictadas en la Universidad de la Habana en el mes de marzo. Boletín Metodológico No 8, Sección Instrucción. Academia Naval “Granma”. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Talízina, N.F.** (1994). “La teoría de la actividad de estudio, como base de la didáctica de la Educación Superior”. UNAM. México.
- Tall, D.** (1996). “Las Dificultades de los Estudiantes en el Cálculo”. Conferencia Plenaria tomada del “Proceedings of Working Group 3 on Students’ Difficulties in Calculus” en el ICME-7, Michele Artigue & Gontran Ervynck (eds.). College de Sherbrooke, Canadá. (Versión al castellano del CECyT Wilfrido Massieu del IPN, México)
- Taylor, A.** (1982). Advanced Calculus. Edición Revolucionaria. La Habana. Cuba.
- Thomas, G. B.** (1968). Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Edición Revolucionaria. La Habana. Cuba.
- Torres, J.M. & G.Castro** (1995). “Obstáculos presentes en los estudiantes para la adquisición de los conceptos de límite y continuidad”. Trabajo presentado al evento internacional COMAT’95. Universidad de Matanzas, Cuba. (autores mexicanos)
- Torres, P.** (1993). "La Enseñanza Problemática de la Matemática del nivel medio general". Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba.

- Valera, O.** (1995). "La actividad de planificación en los estudiantes". En *El adolescente cubano: una aproximación al estudio de su personalidad*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba. Págs. 46-58
- Valverde, L.** (1990). "Un método para contribuir a desarrollar la habilidad fundamentar-demostrar una proposición matemática tomando como base una asignatura de Álgebra de primer año de los institutos superiores pedagógicos". Tesis Ph. D. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Valverde, L.** (1993). "Una alternativa más para enseñar a demostrar" en *Didáctica de la Matemática. Artículos para el Debate*. EPN. Quito, Ecuador
- Vigotski, L. S.** (1982). *Pensamiento y Lenguaje*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Wallas, G.** (1926). "The Art of Thought." Selecciones en P.E. Vernon (Ed. 1970), *Creativity*, Middlesex, England: Penguin, págs. 91-97.
- Wartofsky, M.W.** (1978). *Introducción a la Filosofía de la Ciencia*. Alianza Editorial, S.A. Madrid, España.
- Wehzelburger, E.** (1993). "Nuevas tendencias en la Matemática y su enseñanza". *Revista "SUMA"*. N° 13. España.
- White, P. & M. Mitchelmore.** (1996). "Conceptual Knowledge in Introductory Calculus". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, 1, 79-95. USA.
- Wiener, D. P.** (1987). "Computer Warfare on Campus" in *US News and World Report*, New York, 14 of september, pp. 53-54.
- Wimbish, J.** (1996). "Las dificultades de los estudiantes de Cálculo en un ambiente tecnológicamente enriquecido". Artículo tomado del "Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus" en el ICME-7, Michele Artigue & Gontran Ervynck (eds.). College de Sherbrooke, Canadá. (Versión al castellano del CECyT Wilfrido Massieu del IPN, México)
- Zalduendo, L.A. & A.M. Juárez.** (1996). "Nodos Cognitivos. Una propuesta para la asignatura Teoría de Circuitos III". *Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. ISPJAE. Ciudad de la Habana, Cuba. (autores argentinos)
- Zeldovich & Yaglom.** (1987). *Matemáticas Superiores*. Editorial MIR. Moscú.

Anexo # 1

Lo variable en los componentes de la *célula* “combinación lineal” del Álgebra Lineal en la FORMA 1:

λ_i	x_i	x	Tarea que origina
D	D	D	Forma 1 : “característica orientadora”
C	C	C	Identificar el significado de cada componente.
C	C	D	Calcular el vector correspondiente a la combinación lineal.
C	D	C	Hallar el sistema de vectores para el cual los λ_i son coordenadas de x .
C	D	D	Hallar vectores que tienen iguales coordenadas en distintas bases.
D	C	C	Hallar las coordenadas de x en el sistema. de vectores $\{x_i\}$. ♦
D	C	D	Hallar el subespacio vectorial generado por $\{x_i\}$.
D	D	C	Identificar a x como intersección de distintos subespacios vectoriales.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x$$

Leyenda:

C: conocido

D: desconocido

- ♦ En particular, si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ permite determinar si $\{\mathbf{x}_i\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente, en dependencia de la unicidad o no de la solución de la ecuación homogénea $\sum \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$

Fundamentación de la *integral definida* como célula del Cálculo Integral

Siguiendo las exigencias de N.G.Sálmina se fundamenta que:

1) La integral definida es la relación más simple (en el sentido de la integración) entre los elementos que forman su estructura, a saber: el *dominio* de integración, el *integrando* y el *elemento diferencial*.

La afirmación anterior se basa en que:

- el dominio de integración es el más simple posible: intervalo cerrado y acotado; geométricamente, un segmento de recta.
- el integrando es el más simple posible: una función real de una variable real,
- el elemento diferencial es el más simple posible: $dx = \Delta x$.

Por otra parte el producto [integrando $\times$ elemento diferencial] constituye la forma diferencial más simple.

2) La relación estructural que ella representa es inherente a cualquier tipo de integral (doble, triple, de línea y de superficie), que aunque representan objetos matemáticos diferentes, en algún sentido pueden ser consideradas como extensiones del concepto de integral definida.

Esta relación refleja en sí la ley de existencia del sistema, porque de acuerdo al tipo particular de relación que existe entre los tres elementos estructurales, se estará en presencia de uno u otro objeto del sistema (tipo de integral).

3) La contradicción principal viene dada por la no correspondencia entre la dimensionalidad del dominio de integración y las "potencialidades" de cada tipo de integral múltiple (definida, doble o triple). Esta contradicción origina la necesidad de definir medidas diferentes para cada tipo de integral (unidimensional, bidimensional o tridimensional). Cada tipo de integral múltiple "rebas la medida" del tipo precedente, por lo cual entraña un objeto cualitativamente nuevo.

Las integrales de línea y de superficie pueden ser consideradas como resultado de la contradicción entre el número de variables del integrando y el tipo de medida que exige el elemento diferencial; esta contradicción se resuelve siempre mediante una parametrización que los adecua a ambos:

- REDUCIENDO el elemento diferencial (dl o ds) a nuevos elementos diferenciales acorde con la medida del dominio de parametrización, el cual corresponderá a una integral múltiple para la cual está definida la medida que se exige (longitud, área o volumen).
- REDUCIENDO a n variables el integrando en correspondencia con la medida n -dimensional que exige el elemento diferencial.

4) Esta relación posibilita desarrollar la asignatura en sistema porque:

- los distintos tipos de integrales (definida, doble, triple, línea y superficie) resuelven problemas de aplicación análogos (con sus excepciones).
- todos los tipos de integrales pueden ser considerados como extensiones de la integral definida y en el proceso de definir cada uno de los conceptos aparece el mismo procedimiento general, a saber:
 - el proceso de particiones en el dominio de integración.
 - el proceso de selección arbitraria de puntos en cada una de las subregiones obtenidas en cada partición.
 - la formación de la suma integral de productos $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \mu_i$, donde:
 - f : función integrando
 - P_i : punto de la subregión R_i del dominio de integración en la partición m , seleccionado arbitrariamente.
 - $\Delta \mu_i$: cantidad de medida (longitud, área o volumen) correspondiente a la subregión R_i .
 - el proceso de paso al límite, exigiendo no sólo que el número de subregiones R_i sea cada vez mayor, sino que los diámetros de las mismas tiendan a cero.
 - la exigencia de la necesidad de que el límite de las sumas integrales exista independientemente de las particiones efectuadas y de la selección de los puntos en las subregiones R_i en cada partición.
- Los distintos tipos de integrales poseen varias propiedades análogas.
- La vía de cálculo por excelencia para los distintos tipos de integrales es la *reducción* al cálculo de integrales definidas (*célula*) y una vez hecha la reducción, el empleo de los diferentes métodos de integración (*elemento operativo*).

En el concepto de integral definida, vista como *célula* son variables los siguientes elementos de su estructura:

- La dimensión del espacio $R^n \supset D$ (D dominio de integración)
- Los grados de libertad que posee un punto arbitrario P en D .
- El tipo de medida definido sobre D (este elemento depende de los anteriores).

5) La relación descrita tiene un carácter relativo porque varía de objeto a objeto, ya que cambian las características de los elementos relacionantes y depende del sistema porque sólo en este contexto tiene sentido destacar el carácter cambiante y lo típico de esta relación.

Esta relación posee un prototipo real, la integral definida, la que al tomarse como referencia permite organizar la investigación del objeto (integral doble, triple, de línea, de superficie), en cuanto al procedimiento de construcción del nuevo concepto, al análisis de las propiedades y a la vía de cálculo .

Con respecto a otros sistemas didácticos, el CI se distingue por el amplio uso de recursos heurísticos y en su construcción como sistema pueden ser abundantemente utilizados los principios heurísticos de analogía, generalización y reducción.

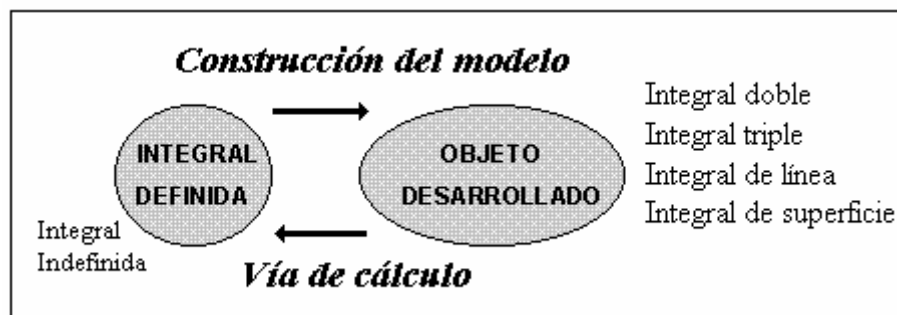
La construcción del nuevo concepto se realiza por *analogía* y/o *generalización* a partir del concepto de integral definida, estableciéndose así el enlace de tipo genético. EL *principio de generalización* también se emplea en el análisis de propiedades comunes a todos los tipos de integrales o a grupos de ellas.

EL *principio de reducción* es quizás el más usado, debido a las dificultades que generalmente se presentan en el cálculo de integrales. Él está presente en diferentes momentos del proceso de cálculo; a saber: cuando se hace un cambio de variables o coordenadas, cuando se utiliza una tabla de integrales, cuando se sustituye una integral doble o triple por las iteradas, cuando se parametriza en una integral de línea o superficie para reducir el cálculo a otras más simples o cuando se emplean algunos de los teoremas especiales (Green, Stokes o Gauss). En la inmensa mayoría de los casos, el cálculo se reduce, en última instancia, al cálculo de integrales definidas.

Por lo anterior, se tiene que la integral definida, en tanto *célula*, se encuentra a la vez :

- en su estado desarrollado, en la definición de cada tipo de integral (modelación)
- en su estado más simple, en el momento del cálculo

En el momento del cálculo interviene el *elemento operativo* (conjunto de métodos de integración), el cual posibilita hallar una primitiva del integrando de cada integral definida.



A diferencia del AL, donde el *elemento operativo* es básicamente un procedimiento algorítmico, en el CI, la aplicación de los métodos de integración es un proceso cuasi-algorítmico, con mucho peso en su componente heurística.

Dentro del sistema del CI existen muchas regularidades entre las integrales múltiples, las que aparecen como ciertos estados estables.

Regularidades presentes en las integrales múltiples (definida, doble, triple ...)

1) Coincidencia entre el número de variables del integrando y la cantidad de grados de libertad de un punto en el dominio de integración.

2) Cada tipo de integral múltiple posee una medida definida que lo caracteriza. Los dominios de integración son conjuntos de medida no nula con frontera de medida nula.

3) La construcción del concepto es por analogía y no por generalización, porque una no puede ser considerado siquiera un caso límite de la otra.

4) la vía de cálculo es una cierta "regla de la cadena" hacia los tipos más simples (Teorema de Fubini) con lo cual se aplica el principio de reducción. Geométricamente equivale a una "cadena" de proyecciones.

5) Poseen propiedades análogas, tales como:

- las condiciones de integrabilidad,
- las propiedades de linealidad, permanencia del signo y acotamiento,
- el teorema del valor medio,
- la generalización de la desigualdad triangular,
- la propiedad de que $\int_D d\mu = \mu(D)$ donde μ es la medida definida sobre $E \supset D$.

Regularidades presentes en las integrales de línea y superficie

- Las integrales de línea y superficie pueden ser consideradas como variaciones de las integrales múltiples.
- La construcción del concepto puede hacerse por generalización y/o reducción a la forma estable precedente.
- La integral definida puede considerarse como un caso límite de la integral de línea y la integral doble como un caso límite de la integral de superficie.

- La reducción a la integral múltiple correspondiente (integrales de línea a integral definida, integral de superficie a integral doble) se efectúa mediante la composición del integrando con una parametrización del dominio de integración.

Fundamentación de la *relación incremental* como célula de la asignatura Matemática I (Límite, Continuidad y Cálculo Diferencial)

Siguiendo las exigencias de N.G.Sálmina se fundamenta que:

1) *El análisis del comportamiento local de una función no es más que el análisis de la relación que existe entre los incrementos de la variable dependiente y el incremento en el punto donde se analiza la misma, y precisamente este aspecto es la esencia mismo del CD.*

Cuando un punto se incrementa, las imágenes se incrementa simultáneamente y la relación entre ambos incrementos es una relación elemental porque se desarrolla a escala de una vecindad suficientemente pequeña de un punto en donde el análisis se simplifica al no tener en cuenta el resto de las propiedades locales de la función ni el comportamiento global de la función.

2) La *relación incremental* es asimismo, general e inherente al objeto en todas las etapas de su desarrollo, porque se pone de manifiesto en el análisis de las principales propiedades locales que estudia el CD y constituye el elemento esencial en las definiciones de los conceptos asociados a las mismas. Estas propiedades se estudian en el proceso de paso al límite cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

Si la función $f(x)$ es una función real de una variable, el incremento de la variable independiente es el más simple posible: $\Delta x = x - x_0$, donde x_0 es un punto fijo (centro del análisis) y x es un punto arbitrario, perteneciente al dominio de f y a una vecindad $V(x_0)$ suficientemente pequeña de x_0 . El incremento de la variable dependiente, sea $\Delta y = y - y_0$, donde $y = f(x)$ es la imagen del punto arbitrario x , puede ser considerada o no incremento de la función (Δf) en virtud de que se exija tomar en cuenta la condición inicial $y_0 = f(x_0)$.

Si la función f es de varias variables, entonces el incremento de la variable independiente aparecerá como un vector de los incrementos de todas las variables del dominio de f , $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$. Si f es vectorial, entonces el incremento de la variable dependiente aparecerá como un vector de los incrementos de las variables del conjunto imagen de f , $\Delta Y = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n)$.

Relaciones incrementales Propiedades

1) $\Delta y = o(1)$	Existencia del límite de f en x_0 . ($\Delta y = f(x) - L$)
	Continuidad de f en x_0 . ($\Delta y = f(x) - f(x_0)$)
2) $\Delta y = A \Delta t + o(\Delta t)$	Derivabilidad de f en x_0 en la dirección del vector unitario u ($\Delta y = f(x_0 + \Delta t u) - f(x_0)$; $\Delta t \in \mathbb{R}$)
3) $\Delta y = P_n(x_0, \Delta x) + o(\Delta x ^n)$	Diferenciabilidad de f en x_0 ($n=1$) Aproximabilidad de f por su polinomio de Taylor de grado n en una vecindad de x_0.

Así, las *relaciones incrementales* que se estudian mediante la aplicación del proceso de paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, adoptan diferentes variantes:

El término $P_n(x_0, \Delta x)$ puede ser considerado el incremento de la función interpoladora (polinomio de Taylor). Así, $P_n(x_0, \Delta x) = T_n(x_0, \Delta x) - f(x_0)$, donde $T_n(x_0, \Delta x)$ es el polinomio de grado n de f en el punto x_0 .

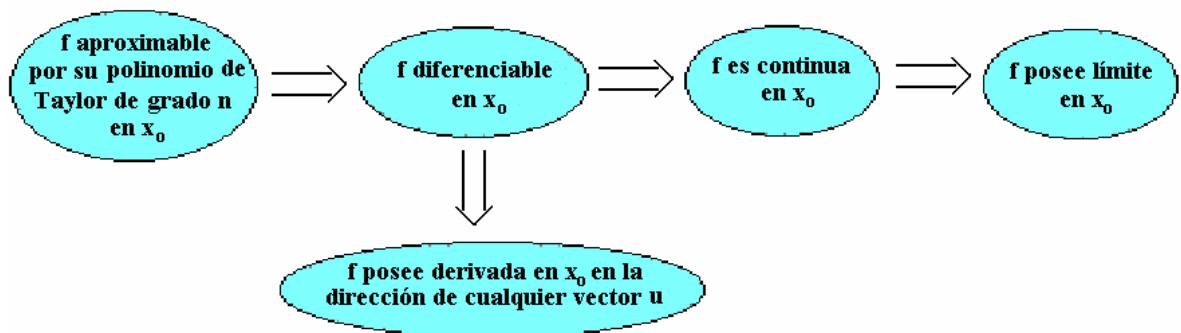
En general, estas *relaciones incrementales* pudieran representarse simbólicamente como:

$$\Delta y = P_n(x_0, \Delta x) + o(|\Delta x|^n) \quad (*)$$

donde para $n=0$, se obtiene $P_0(x_0, \Delta x) = 0$ y $|\Delta x|^0 = 1$, o sea la relación 1).

La relación 2) es un caso particular donde el incremento Δx no es arbitrario como en 1) y 3), pues $\Delta x = \Delta t u$ y correspondería al caso $n=1$, o sea $P_1(x_0, \Delta x) = A \Delta t$ y $|\Delta x|^1 = |\Delta x| = |\Delta t|$

Obsérvese que a partir de esta relación general (*) y de la propia construcción de los objetos del sistema, pueden inferirse fácilmente las relaciones de inclusión entre las clases de funciones, a saber:



Además, ella establece una relación entre el incremento de la función interpolada, el incremento de la función interpoladora y el incremento de la variable independiente.

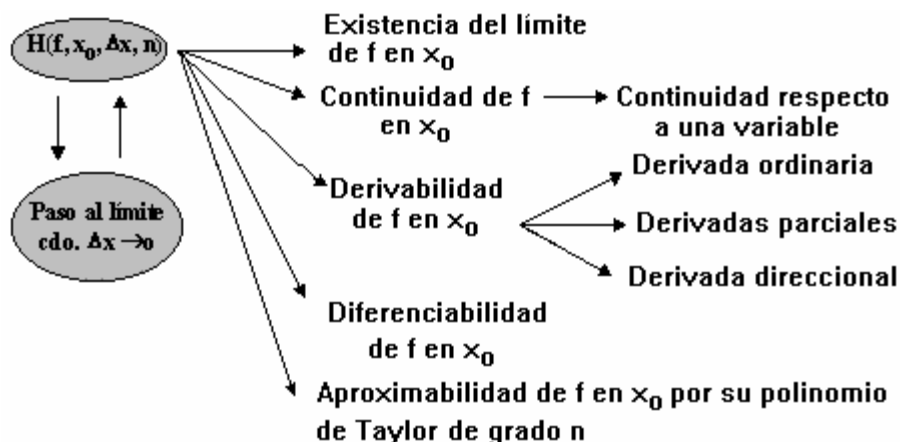
En dicha relación son variables los siguientes elementos de su estructura:

- Si se exige para el análisis la condición $y_0 = f(x_0)$
- Si f es de una o varias variables
- Si P es un polinomio de primer grado o de grado mayor que 1
- Si el incremento es unidireccional o arbitrario.

Variando estos elementos se produce un cambio en la relación entre los incrementos y con ello se estudia y construye el nuevo objeto (concepto) y la propiedad local correspondiente.

Si llamamos $H(f, x_0, \Delta x, n)$ a la función que se construye para investigar la *relación incremental* y que depende de la función-objeto-de-estudio (f), del punto x_0 (centro del análisis), de la característica del incremento Δx (si es arbitrario o unidireccional) y el grado del polinomio de Taylor que interpola a f , se puede apreciar en el cuadro que aparece más abajo cómo al aplicarle el procedimiento de paso al límite, obtendremos información sobre la existencia o no de cada una de las propiedades relacionadas.

Cualquiera de las propiedades relacionadas puede ser determinada por la relación que se establece entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente. Esta relación refleja en sí la ley de existencia del sistema, porque en virtud del tipo de relación que se establezca se tendrá la característica que ella define.



3) La *relación incremental* refleja la contradicción: se incrementa la variable independiente para acto seguido decrementarla y sólo a través de este proceso en que ambos incrementos tienden a anularse, puede investigarse la característica local que encierra dicha relación.

Sólo este método dialéctico de análisis posibilita el estudio de las propiedades locales que estudia el CD, las cuales están veladas para cualquier análisis donde no se manifieste este movimiento.

4) Esta relación posibilita desarrollar la asignatura con un enfoque sistémico, pues en la búsqueda del "mejoramiento" de las características de la función (localmente), irá "evolucionando" la relación incremental a formas más complejas, hasta barrer el espectro de propiedades objeto de estudio.

5) La relación incremental tiene carácter relativo pues varía de acuerdo a la propiedad local de la función y dependiente del sistema, pues estará en concordancia con el problema planteado, el tipo de propiedad que se espera que satisfaga la función.

Posee un prototipo que para el estudiante constituirá la base organizadora del movimiento y punto de partida de la investigación, a saber:

1. Característica a analizar (**propiedad local**)
2. **Función** objeto de estudio.
3. **Punto** x_0 centro del análisis.
4. **Vecindad** del punto x_0 .
5. **Incremento del punto** x_0 sujeto a que $x \in V(x_0) \cap \text{Dom } f$; $\Delta x = x - x_0$
6. **Incremento de la variable dependiente**: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$
7. Búsqueda de la **relación incremental** en dependencia de las características a analizar.

Observación:

Este trabajo fue presentado al II Taller Internacional sobre la Educación Superior y sus Perspectivas, convocado por el CEPES y que se celebró en la Universidad de la Habana en enero de 1994.

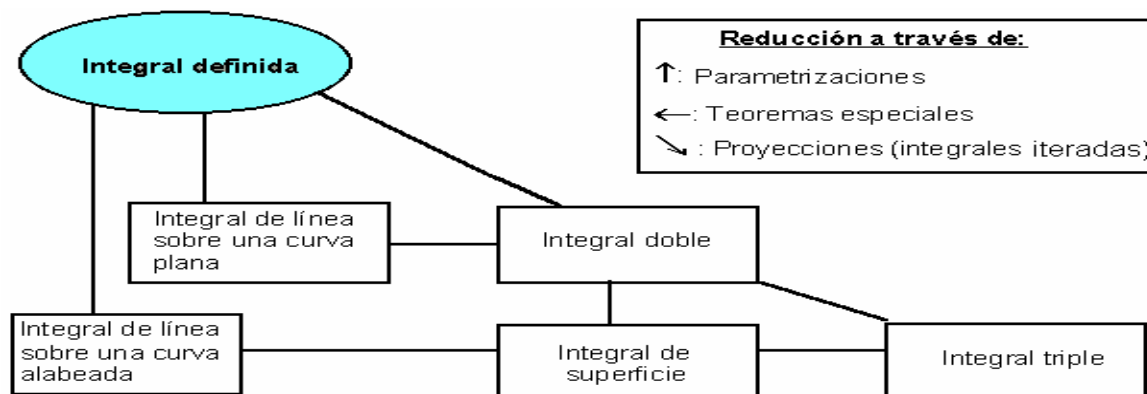
Como recurso de pronóstico teórico se construyó, de conjunto con los estudiantes, la siguiente tabla de doble entrada, donde varían los elementos integrantes del concepto de integral definida: la dimensión del espacio R^n que contiene al dominio D de integración y la propia dimensionalidad de D .

Espacio que contiene a D	Grados de libertad de P en D			
	1	2	3	...
R	Integral definida			
R^2	Integral de línea sobre una curva plana	Integral doble		
R^3	Integral de línea sobre una curva alabeada	Integral de superficie	Integral triple	

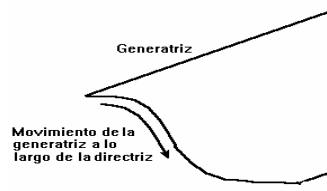
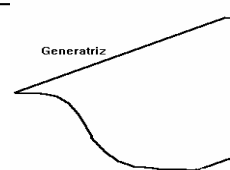
↓ Integrales de línea Integrales de superficie Integrales sobre regiones espaciales Integrales múltiples

A partir de una discusión pormenorizada de cada casilla (hasta donde es posible) se pronostican teóricamente (por analogía con la tabla periódica de Mendeleiev) los tipos de integrales que pueden existir y algunas características suyas. A esta tabla se recurre sistemáticamente.

A partir de ella se construye otro esquema (jerárquico) que conserva algunas informaciones de ésta, pero que está dirigido a las vías de cálculo:

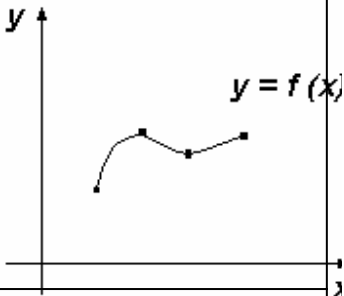
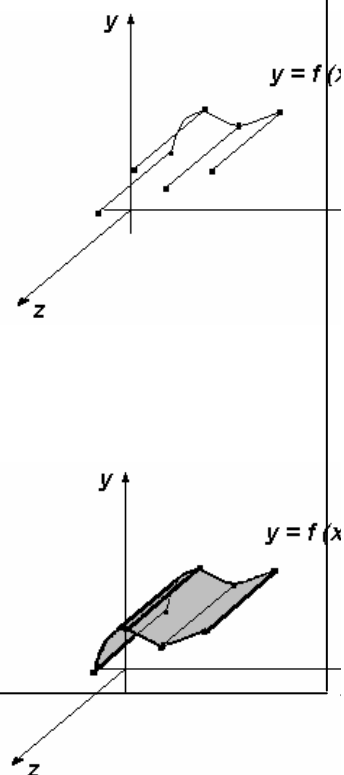


Este esquema orientador se va construyendo en la medida que se abordan en clases las diferentes vías. Los caminos desconocidos se señalan inicialmente con un ?, el cual se sustituye una vez tratado, por el nombre del Teorema o la vía estudiada.

Definiciones	Consecuencia	Representación
Definición clásica Se llama <i>superficie cilíndrica</i> a la formada por rectas paralelas a una dirección dada, llamadas <i>generatrices</i>, que apoyan en una curva también dada, llamada <i>directriz</i>.²⁹	Esta definición sugiere que la recta generatriz recorre la curva directriz conservando siempre la misma dirección. El tipo de movimiento varía en cada caso pues depende de la forma de la directriz.	
Definición a partir de una construcción Por cada punto de la curva dada γ tracemos una recta l paralela a la dirección dada l_0. El conjunto de puntos dados en las rectas trazadas de tal modo se denominará <i>superficie cilíndrica</i>; la curva γ se denomina <i>directriz</i> de la superficie cilíndrica, la recta l, su <i>generatriz</i>.³⁰		
Definición a partir de una transformación Se llama <i>superficie cilíndrica</i> al conjunto de puntos dados sobre las rectas de correspondencia (<i>generatrices</i>) que se establecen entre los puntos de una curva dada (<i>directriz</i>) y sus imágenes, al ser trasladada esta en una dirección dada.	Esta definición establece el movimiento de la curva directriz a lo largo de la recta generatriz. El tipo de movimiento es siempre el mismo: traslación en una dirección dada.	

²⁹ Tomado del Geometría Analítica de J. Rey Pastor, L.A.Santaló y M.Balanzat. Edic. Revolucionaria. La Habana, 1966 . pp.453

³⁰ Tomado del Curso de Matemáticas Superiores para Ingenieros de M. Krásnov, A. Kiseliov, G. Makarenko y E. Shikin. Tomo I. Editorial MIR. Moscú, 1990. pp.104

Momentos	Procedimiento:	Representación
De identificación	1. Identificar que la ecuación corresponde a una superficie cilíndrica y respecto a qué eje son paralelas sus generatrices. 2. Identificar la ecuación dada como la ecuación de la directriz referida al plano de las variables que aparecen en la ecuación.	
De representación geométrica en el plano	3. Representar la directriz en el plano de las variables e identificar los puntos notables en el gráfico.	
Paso del plano al espacio De representación geométrica en el espacio	4. Trazar el eje de la variable ausente en la ecuación, perpendicularmente al plano de la directriz. 5. Trazar por cada punto notable del gráfico una recta paralela (línea de correspondencia) al nuevo eje espacial. 6. Transportar sobre cada línea de correspondencia un segmento de longitud determinada (igual para todos) a partir de cada punto notable, obteniéndose así los puntos notables imágenes. 7. Unir los puntos notables imágenes mediante una curva, tratando de conservar la forma de la original. Así, se obtiene una sección plana de la superficie cilíndrica. 8. Reforzar los trazos que contribuyan a delimitar los bordes de la superficie cilíndrica engendrada.	

<i>Definición clásica</i> Se llama <i>superficie de revolución</i> a la engendrada por una curva que gira alrededor de un eje, llamado <i>eje de rotación</i> de la superficie. La curva que gira se llama <i>generatriz</i> de la superficie.	<i>Ecuación en un sistema cartesiano XYZ:</i> Al rotar una curva de ecuación $F(y, z) = 0$ alrededor del eje Z, se obtiene una superficie de ecuación: $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

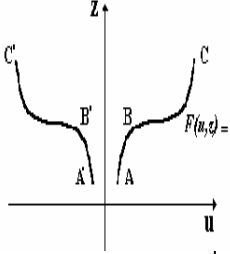
La circunferencia normal al eje que describe un punto de la generatriz al rotar se llama *paralelo*.

Las curvas de intersección de la superficie con cada uno de los planos que pasan por el eje se llaman *meridianos*.³¹

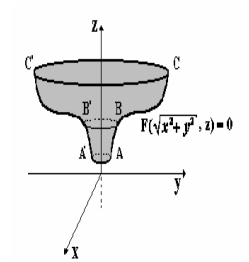
³¹ Tomado del Geometría Analítica de J. Rey Pastor, L.A.Santaló y M.Balanzat. Edic. Revolucionaria. La Habana, 1966 . pp.460

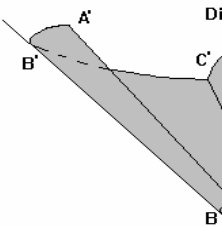
Tarea típica: Representar gráficamente la superficie de ecuación

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Momentos	Procedimiento:	Representación
De trabajo	1- Identificar que la ecuación corresponde a una superficie de revolución. a) Hacer, en la ecuación de la superficie, el cambio de variables:	
algebraico	$u = \sqrt{x^2 + y^2}$ b) Identificar que la superficie se engendra a partir de la rotación de la generatriz de ecuación $F(u, z) = 0$ en torno al eje Z.	
De representación	2- Representar la generatriz en el plano UZ e identificar sus puntos notables. 3- Hallar mediante reflexión en el plano UZ las imágenes de los puntos notables.	
geométrica en el plano	4- Construir la curva imagen de la dada a partir de unir, con trazos análogos y simétricamente dispuestos respecto al eje Z, las imágenes de los puntos notables.	
Paso del plano al espacio	5- Considerar el plano UZ como uno de los planos coordenados del sistema XYZ que contienen al eje Z. (Cambio de dimensión espacial en la representación).	

- De
represen-
tación
geométrica
en el
espacio
- 6- Unir los puntos notables (originales e imágenes) mediante circunferencias normales al eje Z y centradas en él, dibujadas en perspectiva en el sistema XYZ.
 - 7- Reforzar los trazos que contribuyan a delimitar los bordes de la superficie de revolución engendrada.



Definiciones	Consecuencia	Representación
Definición clásica	Esta definición sugiere que la recta generatriz recorre la curva directriz pasando siempre por un punto fijo (vértice del cono). El tipo de movimiento varía en cada caso, pues depende de la forma de la directriz.¹	
Definición a partir de una construcción	Sea γ una curva arbitraria y O un punto fuera de γ. Por cada punto de la curva γ y el punto O tracemos una recta l. El conjunto de puntos trazados en las rectas así trazadas se denomina <i>superficie cónica</i>; la curva γ es la <i>directriz</i> de la superficie cónica; l, su <i>generatriz</i> y el punto O, su <i>vértice</i>.²	
Definición a partir de una transformación	Esta definición establece la transformación de la curva directriz a lo largo de las rectas generatrices. El tipo de transformación es siempre la misma: homotecia de razón k ($k \in \mathbb{R}$) y centro en el vértice del cono.	

¹ Tomado del Geometría Analítica de J. Rey Pastor, L.A. Santaló y M. Balanzat. Edición Revolucionaria. La Habana, 1966 . pp.456

² Tomado del Curso de Matemáticas Superiores para Ingenieros de M. Krásnov, A. Kiseliyov, G. Makarenko y E. Shikin. Tomo I. Editorial MIR. Moscú, 1990. pp.106

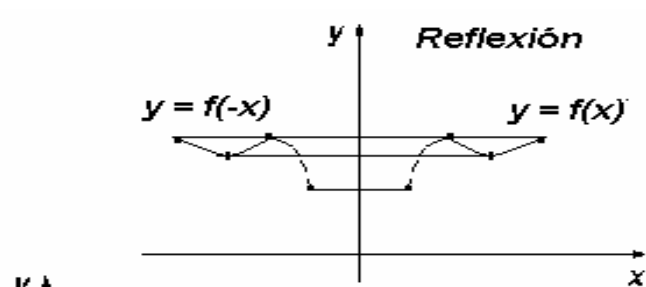
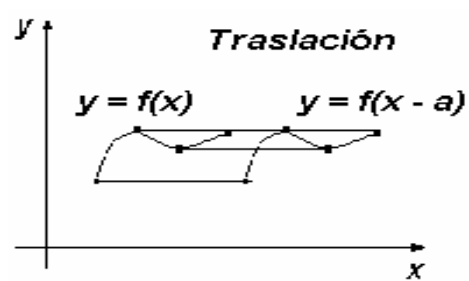
Procedimiento general para las transformaciones rectilíneas en un sistema bidimensional de coordenadas cartesianas (plano)

Considérese, sin perder generalidad, una curva de ecuación $y = f(x)$, a cuya gráfica se aplicará una transformación rectilínea (traslación, reflexión o deformación uniforme) en la dirección del eje X. El procedimiento a seguir es el siguiente:

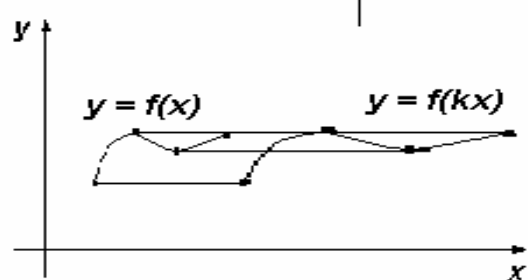
1. Identificar los puntos notables de la gráfica.
2. Trazar por estos puntos un haz de rectas (líneas de correspondencia) paralelas a la dirección del eje X.
3. Transportar sobre las líneas de correspondencia, a partir de cada punto notable, un segmento de recta en el sentido y longitud que corresponda, según la transformación indicada:

Transformación	Sentido de la transportación	Longitud de la transportación	Ecuación de la curva resultante
Traslación de vector $\vec{a}$	Según el signo del coeficiente a	$ a $	$Y = f(x - a)$
Reflexión respecto al eje Y	Hacia el eje Y	El doble de la distancia del punto al eje Y.	$Y = f(-x)$
Deformación uniforme de razón k ($k > 0$; $k \neq 1$)	En el sentido del eje X	k veces la distancia del punto al eje Y	$Y = f(kx)$

4. Unir los puntos notables imágenes mediante arcos de curva, tratando de reconstruir la forma de la curva original (en el caso de la traslación y la reflexión las figuras original e imagen deben ser congruentes; en la deformación uniforme, la curva imagen aparece deformada (contraída, si $k > 1$ o dilatada si $0 < k < 1$) respecto a la original.



**Deformación
Uniforme**



1) *traslación* en la dirección de un eje coordenado.

La *traslación* quedará determinada unívocamente cuando queden indicados: el eje de referencia, el sentido y la magnitud a de la *traslación*. Las líneas de correspondencia entre los puntos originales e imágenes son rectas paralelas al eje de referencia.

En el caso de que la transformación se efectúe sin cambiar la dimensionalidad del objeto final respecto al inicial (**$a = \text{const}$**), existe congruencia entre ambos objetos y los puntos-notables-imágenes se unirán con trazos análogos a los que unen los puntos-notables-originales.

*En el caso de que la transformación se efectúe cambiando la dimensionalidad (curva a superficie o superficie a sólido) (**$a = \text{variable}$**), entonces para una mejor visualización del objeto final se podrá trazar una sección plana situada sobre un plano perpendicular al eje de referencia de la *traslación* y ésta no será más que la proyección ortogonal del objeto final sobre dicho plano.*

2) *rotación* alrededor del origen de coordenadas o de un eje coordenado.

La rotación queda definida unívocamente cuando queden indicados: el sentido (positivo o negativo), la magnitud de la rotación (constante o variable) y el objeto de referencia (origen o eje)

Las líneas de correspondencia entre los puntos originales e imágenes son arcos de circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas o en el punto del eje situado en el mismo plano (perpendicular al eje) sobre el cual estarán un punto original y su imagen.

Los casos fundamentales son: la rotación de 180° de una curva en torno al origen de coordenadas (simetría central) y la revolución de una curva o superficie en torno a un eje coordenado, al cual originará una superficie o un sólido de revolución respectivamente.

3) *reflexión* respecto a un eje coordenado.

Esta queda definida unívocamente cuando queda indicado el eje de referencia.

4) *deformación uniforme*.

La *deformación uniforme*, explicada como el resultado de aplicar dos homotecias de razón k_x y k_y con centro en el origen al dominio y la imagen de la función respectivamente, queda determinada unívocamente cuando se indican los valores k_x y k_y .

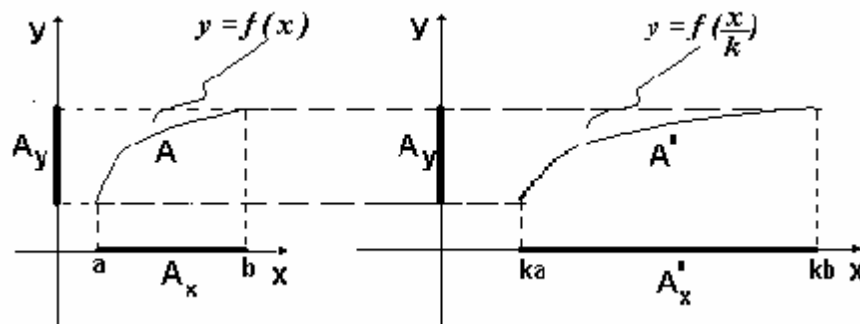
En esta concepción, a lo más una de las razones puede tener valor 1, con lo cual no habría deformación en la dirección de ese eje.

En el caso de las superficies y sólidos existen potencialmente tres razones de homotecia k_x , k_y y k_z , independientes unas de otras.

Anexo # 9 (Continuación...)

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una función elemental básica y A su gráfica; sea A_x la proyección ortogonal de A sobre el eje Ox , o sea, el dominio de f (no necesariamente su conjunto natural de definición) y A_y la proyección ortogonal de A sobre el eje Oy , o sea, la imagen de f ; sea además, D_k la transformación rectilínea deformación uniforme de razón k en la dirección del eje Ox , entonces si a la gráfica de f se le aplica D se obtiene una nueva función f_d que puede ser considerada la transformada de f y que tiene las siguientes características:

- La ecuación de f_d es $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$
- La gráfica de f_d es $A' = D_k(A)$, imagen “deformada” de A : “dilatada” si $k > 1$ ó “contraída” si $0 < k < 1$,
- El dominio de f_d es A'_x , proyección ortogonal de A' sobre el eje Ox , pero también imagen por una homotecia de centro en el origen de coordenadas y razón k de A_x , dominio de f
- La imagen de f_d es $A'_y = A_y$



Análogamente sucede en el caso de b .

En general, una función de ecuación $\frac{y}{a} = f\left(\frac{x}{b}\right)$, donde f es una función elemental

básica, f_d se puede considerar la imagen de f por la composición de deformaciones uniformes D_a y D_b (de razón a en la dirección del eje Oy y de razón b en la dirección del eje Ox), o sea como el resultado de aplicar por separado dos homotecias de centro en el origen de coordenadas a la imagen y al dominio de f de razones a y b respectivamente, siendo f_d el conjunto de los pares ordenados (bx, ay) , imágenes de los $(x, y) \in f$ por la composición de las deformaciones uniformes D_a y D_b aplicadas a f .

Anexo # 9-A

A partir que el estudiante domina la acción “*Transformar un objeto geométrico situado en un sistema de coordenadas cartesianas*” se plantean las siguientes **tareas típicas**:

I) **Identificar propiedades** de una función a partir de:

- 1- su representación gráfica.
- 2- considerarla la transformada de otra función conocida.

II) **Representar gráficamente** sobre un sistema de coordenadas cartesianas:

1. un objeto geométrico de representación conocida,
2. un objeto geométrico que pudiera considerarse el transformado de otro conocido.
3. un objeto del mundo físico a partir del conocimiento de determinadas propiedades y medidas suyas (modelación geométrica).
4. una función real de una variable conocida sus principales propiedades y elementos.

III) **Identificar la transformación aplicada y hallar la expresión analítica** del objeto original, conocida la expresión analítica de un objeto geométrico considerado como el transformado suyo.

IV) **Obtener la expresión analítica** de un objeto representado en un sistema de coordenadas cartesianas en los siguientes casos:

1. se conoce la transformación aplicada y la expresión analítica del objeto original,
2. no son dados ni la transformación ni la expresión analítica del objeto original, aunque ambos están entre los estudiados.

V) Modelar analíticamente la forma y dimensiones de un objeto del mundo físico una vez que haya sido modelado geométricamente según las especificaciones anteriores.

Anexo # 10

Variante estructural-funcional de la asignatura Matemática I

Temas	Invariantes
Funciones	Función
Límite y Continuidad	Límite por un conjunto
Derivadas	Derivada direccional
Aproximación local de funciones	Error relativo de interpolación local
Extremos de funciones	Extremo Global

Funciones: En torno al concepto general de función (aplicación) se abordaron las funciones de una y de varias variables, reales y vectoriales y se realizó un estudio sistemático de ellas: propiedades, representación gráfica (donde era posible), su utilización como modelo matemático en diferentes problemas, etc. Aquí el concepto invariante asumido fue el de FUNCIÓN.

Límite y continuidad: Se abordaron los distintos tipos de límite: de funciones (de una y varias variables, reales y vectoriales), de sucesiones, laterales, finitos, infinitos y en el infinito, etc. y el Paso al Límite como Procedimiento general para la resolución de determinados tipos de problemas. En este tema, el concepto invariante fue el de LIMITE POR UN CONJUNTO.

Derivadas: Se estudiaron los distintos tipos de derivadas: ordinaria, parciales y direccional, así como conceptos relacionados con ellas. Se abordaron los problemas de aplicación directa de estos conceptos. Aquí el concepto invariante fue el de DERIVADA DIRECCIONAL.

Aproximación local: En este tema se trató la aproximación local de funciones (reales de una y varias variables) y se relacionaron con ella los conceptos de límite y continuidad (ya estudiados), así como los de diferenciabilidad y polinomio de Taylor. El concepto invariante en este tema fue el ERROR RELATIVO DE INTERPOLACIÓN LOCAL.

Extremos: Se estudiaron los extremos: local, global y condicionado, así como el estudio de los métodos clásicos de sustitución y de multiplicadores de Lagrange. El concepto invariante fue el de EXTREMO GLOBAL.

El concepto de función o aplicación es uno de los conceptos más generales e importantes de la Matemática. El hacer consciente a los estudiantes de su significado es de la mayor importancia para el aprendizaje de otros muchos conceptos relacionados con él.

Se asume como invariante el concepto de función en su sentido más general (sin considerar las funciones generalizadas), o sea como la relación que establece una correspondencia unívoca de los elementos del dominio sobre el conjunto de llegada.

Lo invariante del concepto se manifiesta en su estructura, a saber:

- Poseer un conjunto que debe ser recorrido plenamente (dominio),
- Poseer un conjunto de llegada, al cual pertenecen las imágenes,
- Existir una ley de correspondencia que relacione a los elementos del dominio con determinados elementos del conjunto de llegada, sus imágenes,
- El carácter unívoco de esa ley de correspondencia.

Dentro de **lo variable** se puede destacar:

- El carácter numérico o vectorial del dominio S de la función.
- El carácter numérico o vectorial del conjunto de llegada de la función.

La variación de estos elementos variables, conlleva a **las variantes**; a saber las más importantes para el estudio de los conceptos del Cálculo Diferencial son:

- Las funciones reales de una variable,
- Las funciones reales de varias variables,
- Las funciones vectoriales de una variable y
- Las funciones vectoriales de varias variables.

Podrían distinguirse otros elementos variables como son: la estructura de la ley de correspondencia, lo que conllevaría a los distintos tipos de funciones (polinomiales, racionales, algebraicas, trascendentes, elementales, etc.); el espacio de partida (dominio) y el espacio de llegada son espacios vectoriales (aplicaciones lineales, etc.) y otras muchas consideraciones.

El tema de Límite y Continuidad se organizó a partir del concepto **Límite a través de un conjunto**, designación que no es usual, porque se sobreentiende la asunción de él por parte de la persona que calcula el límite. Sin embargo, para el estudiante esto no es importante y no logra asimilar, que el valor del límite depende del conjunto a través del cual se calcule.

Así, aparece como invariante el concepto de límite a través de un conjunto

$$\left(\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in S}} f(P) = L \right) \Leftrightarrow \forall V(L) \exists V^*(P_0) : P \in (V^*(P_0) \cap S) \Rightarrow f(P) \in V(L)$$

Lo invariante del concepto se manifiesta en cada uno de los aspectos de la definición, los que deben cumplirse con independencia de quienes sean f y S a los cuales no se les imponen restricciones.

En consecuencia, **lo variable** queda constituido por:

- El carácter de S ($S=\mathbb{N}$, ser un subconjunto de $\mathbb{R}$ o ser un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ($n>1$)).
- El carácter real o vectorial de f ,
- El carácter de punto propio o impropio del punto P_0 .
- El carácter finito o infinito del límite L

La variación de cada uno de estos elementos variables, trae consigo las diferentes **variantes** del concepto, a saber:

Para funciones reales de una variable:

- Límite de sucesiones ($S=\mathbb{N}$)
- Límite a través del conjunto natural de definición (CND) de la función,
- Límite a través de otro subconjunto cualquiera del CND de la función que tenga a P_0 como punto de acumulación (límites laterales, límites a través de un subconjunto de números racionales, límite a través de una sucesión, etc.)

Y entre ellos las variantes de:

- Límite finito en un punto propio,
- Límite finito en un punto impropio,
- Límite infinito en un punto propio y
- Límite infinito en el infinito.

Para las funciones reales de varias variables y las funciones vectoriales se puede hacer una lista de variantes posibles, análoga a la anterior.

Si se estudian en un tema los diferentes tipos de derivadas, podrá concebirse una organización estructural-funcional de los contenidos, tomándose la derivada direccional como el invariante del tema.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(P_o + \Delta t u) - f(P_o)}{\Delta t}$$

f la función-objeto,
 P_o el punto-objeto de análisis,
 Δt la magnitud del incremento y
 u el vector director unitario de los incrementos de las variables

En tanto la derivada direccional representa la razón de cambio de la variable dependiente por la función f respecto a las variables independientes en un punto P_o del dominio de f , **lo invariante** está presente en que:

- Hay que conformar, para la comparación, un cociente y pasar al límite de éste cuando la magnitud del incremento de las variables tiende a cero.
- En el numerador aparecerá el incremento de la función f provocado por un incremento unidireccional de las variables.
- En el denominador aparecerá la magnitud del incremento de las variables.

Lo variable del concepto viene dado por:

- El carácter del vector unitario u (vector coordenado o no)
- El carácter real o vectorial de la función.

Las variantes del concepto vienen dadas por las variaciones de cada uno de los elementos variables, a saber:

- Las variaciones del vector u originarán los diferentes tipos de derivadas, a saber:

$u = 1$ Derivada ordinaria

$u = e_i$ (i Derivada parcial respecto a la variable x_i
 >1)

u : arbitrario Derivada dirigida en la dirección y sentido de u

- Las variaciones del carácter real o vectorial de la función determinarán si el valor de la derivada es un número real o un vector.

Se destacan los niveles de jerarquización existentes entre los tipos de derivadas, tanto por la definición como para el cálculo. De tal modo el tema queda estructurado en 3 niveles, llevándose a los estudiantes a la convicción de que el de la derivada ordinaria es el más importante, porque para el cálculo, los restantes tipos se reducen generalmente al cálculo de derivadas ordinarias.

En la ejercitación se trabaja simultáneamente con la derivada ordinaria y las parciales, de manera que el estudiante fije una orientación generalizada. Desde el principio del tema se trabaja con la definición de derivada y se analiza el cumplimiento de la propiedad correspondiente en funciones definidas por tramos.

En esta tema también se abordan los Teoremas Fundamentales del CD y la Regla de L'Hôpital.

El error de interpolación local como invariante para la aproximación local de funciones.

Si en una asignatura aparece entre sus objetivos la aproximación local de funciones por polinomios, entonces la aproximación de Taylor puede servir de elemento que centre el aprendizaje de los contenidos relacionados con él, entre los que se encuentra la diferenciabilidad.

En virtud de lo anterior, es posible considerar dentro del CD el tema Aproximación local de funciones”, con dos objetivos centrales:

- 1) Aproximar una función por su polinomio de Taylor de grado n en una vecindad de un punto de su dominio,
- 2) Determinar si una función es diferenciable o no a partir de las condiciones necesarias y/o suficientes que se establecen entre éste y otros conceptos del CD.

A partir de estos objetivos y la necesidad y factibilidad de estructurar el tema como un sistema, se decidió escoger la variante estructural-funcional.

Después de un minucioso análisis de los aspectos a tratar, se concluyó que **el error de interpolación local** se erigía como un invariante del futuro sistema.

En tanto, en las disímiles situaciones que se dan, lo que más interesa es determinar si el error de interpolación cometido es “suficientemente bueno”, se aplica el procedimiento de comparación mediante el paso al límite para determinar si el error de interpolación a través de un polinomio de grado n es un infinitésimo de orden superior que la n -ésima potencia de la magnitud del incremento de las variables.

Así, la aplicación del procedimiento de comparación descrito, termina de conformar la estructura del invariante a saber el

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{f(P) - P_n(P)}{|\Delta P|^n} \quad \text{Donde } P = P_0 + \Delta P, \text{ } f \text{ es una función de variable real y } P_n \text{ es su polinomio de Taylor de grado } n \text{ en el punto } P_0.$$

Lo invariante está presente en:

- Hay que conformar, para la comparación, un cociente y pasar al límite de éste cuando la magnitud del incremento de las variables tiende a cero.

- En el numerador aparecerá el error de interpolación polinómica $f(P) - P_n(P)$, siendo P un punto del dominio de f , perteneciente a una vecindad de P_o .
- En el denominador aparecerá la potencia enésima del módulo del incremento de las variables.

Lo variable se manifiesta en:

- El tipo de función (si es de una o de varias variables)
- El grado del polinomio interpolador.

La variación de estos elementos trae consigo un conjunto de variantes, siendo las más importantes las que determina el grado del polinomio interpolador si diferenciamos los casos $n=0$, $n=1$ y $n>1$, cuando el límite es cero.

Estos casos conducen, respectivamente, a la existencia de continuidad, diferenciabilidad y la posibilidad de aproximar a f por un polinomio de grado mayor que 1 en una vecindad de P_o .

$n = 0$
Continuidad

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} (f(P) - P_n(P)) = 0$$

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{f(P) - P_n(P)}{|\Delta P|^n}$$

$n > 1$
Posibilidad de aproximar a f por un polinomio de Taylor grado $n > 1$.

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{f(P) - P_n(P)}{|\Delta P|^n} = 0$$

$n = 1$
Diferenciabilidad
$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{f(P) - P_n(P)}{|\Delta P|} = 0$$

Sin embargo, como este tema queda generalmente insertado en un curso de CD, donde le precede el tema de Límite, convendrá abordar la continuidad ya desde ese tema por la interrelación natural de esos conceptos.

Los dos objetivos declarados presuponen la existencia de determinadas acciones que contribuyan a alcanzarlos y consolidarlos. Entre ellas se pueden mencionar:

1. Hallar el polinomio de Taylor de grado n de una función real en un punto de su dominio.
2. Decidir el grado del polinomio de Taylor de una función real a construir en virtud del nivel de aproximación que se requiera en determinado problema de aplicación.
3. Estimar el error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor de grado n .
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto regular de la misma.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a una superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en un punto regular de la misma.
6. Hallar infinitésimos equivalentes a funciones dadas para emplearlos en el cálculo de límites de la forma $0/0$.
7. Obtener el polinomio de Taylor de funciones dadas, a partir de desarrollos de McLaurin conocidos.
8. Probar que una función no es diferenciable por no cumplirse alguna de las condiciones necesarias.
9. Probar que una función es diferenciable por cumplirse alguna de las condiciones suficientes .
10. Inferir a partir de la diferenciabilidad de una función el cumplimiento de otras propiedades locales.
11. Calcular la derivada direccional de una función en un punto, a partir del uso del vector gradiente.
12. Hallar diferenciales de orden superior de una función en un punto.
13. Expresar el polinomio de Taylor de grado n de una función de varias variables utilizando los diferenciales de orden superior.

Una vez tratadas todas las interrelaciones de los conceptos estudiados, podrá orientarse a los estudiantes la confección de un esquema de trabajo que recoja gráficamente la base orientadora de las acciones 8, 9 y 10.

El extremo global como invariante en la teoría de extremos de funciones reales

La estructuración de un tema independiente para los extremos de las funciones reales, permite abordarlo como un todo orgánico, destacar sus interrelaciones y prescindir de repeticiones .

En este tema se fundamenta el concepto de extremo global como invariante , con lo cual se asumen el extremo local y el extremo condicionado como casos particulares.

La anterior afirmación se justifica porque sea cual fuere el tipo de extremo, siempre están presentes en cada uno de ellos los rasgos esenciales que identifican al extremo global, a saber:

- Presencia de un conjunto que es dominio de la función y al cual, explícita o implícitamente, está referido el carácter extremal de determinado valor.
- Pertenencia del valor extremo al conjunto imagen de la función.
- Unicidad, en caso de existir, del valor extremo (máximo o mínimo) en el conjunto de referencia.

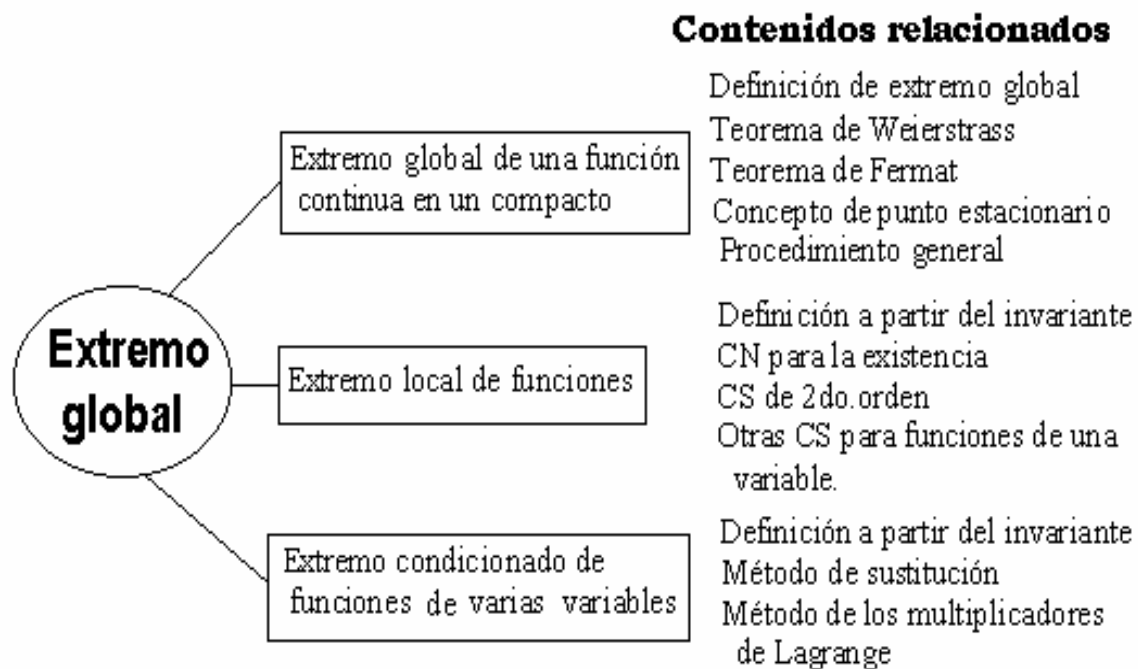
De un tipo de extremo a otro varían dos elementos fundamentales, lo que constituye *lo variable* del concepto invariante y posibilita formar el sistema. Estos elementos son:

- **El conjunto** al que está referido (dominio). Este puede ser abierto o no , cerrado o no, acotado o no, contenido en un espacio unidimensional o n-dimensional. Por otra parte, para la determinación del extremo , puede conocerse con precisión de antemano o puede suponerse su existencia.
- **La función**, pues puede ser de una o de varias variables, continua o no, monótona o no y acotada en el dominio o no, etc.

Como resultado de combinar los elementos variables, surgen las variantes del sistema. Las más importantes desde el punto de vista docente son las siguientes:

- *El extremo global de una función continua sobre un compacto.*
- *El extremo local de una función no diferenciable quizás en un número finito de puntos.* (El conjunto se desconoce de antemano y se asume el cumplimiento de la condición en al menos una vecindad suficientemente pequeña del punto considerado.
- *El extremo condicionado de funciones diferenciables reales de varias variables.*(El conjunto resulta de la intersección de una vecindad contenida en el dominio de la función y del conjunto solución del sistema de restricciones)

El siguiente esquema ilustra la dosificación de los contenidos y su agrupamiento según los distintos niveles :

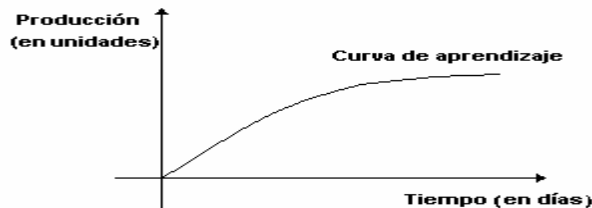


Características de la BOA	Características de los contenidos que integran la BOA	Grado de independencia del sujeto en la elaboración de la BOA	Papel del Profesor	Papel de las habilidades teóricas del sujeto
Compleja y nueva	Esencialmente nuevos	Limitado (pero con actividad)	Dirige la elaboración conjunta	Permiten que se desarrolle de forma viable la elaboración conjunta
Es incompleta y/o no generalizada	Conocidos pero con limitaciones	Elevado	Orienta	Permiten una elaboración completamente independiente de la BOA
Sencilla y nueva	Existe un dominio pleno de los conocimientos previos necesarios	Elevado	Orienta y sugiere	Permiten una elaboración completamente independiente de la BOA

Anexo # 17

Encuesta

1. ¿Cómo considera el nivel que Ud. poseía en Matemática en el momento de ingresar a la carrera?
 - ☐ Bueno
 - ☐ Adecuado
 - ☐ Insuficiente
2. Esa valoración la hizo por primera vez
 - ☐ Durante el desarrollo de la asignatura Matemática I.
 - ☐ Al terminar el ciclo básico.
 - ☐ Actualmente.
3. ¿Considera que la forma y el contenido que se impartió en la asignatura Matemática I
 - ☐ Contribuyeron a elevar su nivel matemático.
 - ☐ Contribuyeron a elevar su grado de razonamiento en Matemática.
 - ☐ Ambas cosas.
 - ☐ No contribuyeron significativamente.
4. ¿Considera que fue útil para su posterior desempeño en otras asignaturas de la carrera los contenidos o formas en que se desarrolló la asignatura Matemática I ?
 - ☐ Sí
 - ☐ No
 - ☐ No puedo determinarlo.
5. ¿Cómo evalúa la comunicación profesor-alumno durante la asignatura Matemática I ?
 - ☐ Buena
 - ☐ Adecuada
 - ☐ Insuficiente
6. Identifique entre los tres siguientes problemas, en cuál (es) es necesario utilizar el concepto de derivada para resolverlo:
 - 1) La siguiente gráfica muestra la “curva de aprendizaje” en el proceso de ensamblaje de bicicletas en una fábrica para un operario. Si se sabe que el área bajo la curva de aprendizaje en determinado intervalo de tiempo refleja la producción realizada por ese operario. Calcule la producción en los primeros 10 días.



- 2) Se sabe que el costo marginal es el costo de producir una unidad más por encima de un plan de x unidades, o sea, puede interpretarse como la razón con que varía el costo cuando hay una ligera variación de la producción. Calcule el costo marginal después de haber producido 5000 unidades si se sabe que la función de costo es

$$C(x) = -0,02 x^2 + 0,3 x + 1$$

- 3) Se desean hallar las dimensiones de un local de forma rectangular de área máxima, teniéndose como única restricción que el perímetro debe ser 80 m.

Anexo # 18

Resultados de la experiencia desarrollada en el curso 1993-94

Acción # 1	I-14		I-15	
Variables	a	b	a	b
Dominio	90	80	90	40
Conciencia	100		80	
Generalización	90		50	

Acción # 2	I-14		I-15	
Variables	a	b	a	b
Dominio	80	80	70	20
Conciencia	80		100	
Generalización	80		30	

Acción # 3	I-14			I-15		
Variables	f'	$\frac{\partial g}{\partial x}$	$\frac{\partial g}{\partial y}$	f'	$\frac{\partial g}{\partial x}$	$\frac{\partial g}{\partial y}$
Dominio	100	70	100	90	0	50
Conciencia	90			30		
Generalización	90			30		

Acción # 4	I-14		I-15	
Variables	I-14		I-15	
Dominio	90		90	
Conciencia	90		90	

Tarea de Control:

Hallar el conjunto natural de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2-y}$

Tarea de Control

Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \tan x}{x^3 + 3x}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + \sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$

Tarea de Control:

Dadas las funciones: $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

y $g(x,y) = \begin{cases} \frac{1+x}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 4 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

calcule, en caso de existir, las derivadas que se indican, usando la definición o las reglas según convenga.

a) $f'(0)$ b) $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

Tarea de Control:

Represente gráficamente la función

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Anexo # 19

Resultados del diagnóstico sobre conocimientos de las transformaciones geométricas y su posible transferencia a nuevos contextos.

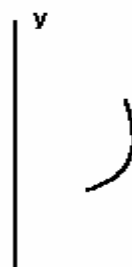
		Transformaciones geométricas		
Indicadores		Traslación	Rotación	Reflexión
D O M I N I O	Resolvió la tarea sin errores	12	5	9
	Resolvió la tarea con errores, pero muestra conocimientos de la misma	1	12	3
	No resolvió la tarea o cometió errores graves	6	2	7
No identifica la congruencia como una propiedad de las transformaciones		1	0	1
Transfirió las transformaciones a figuras curvilíneas		13	18	
Transfirió la rotación del plano al espacio			17	
Se representó mentalmente la superficie y la graficó			5	

Tareas utilizadas en el diagnóstico

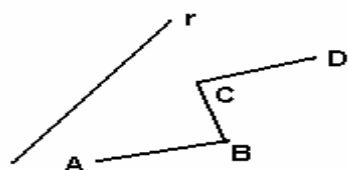
Traslade la curva AB en la dirección, sentido y magnitud del vector V .



Represente la figura que resulta de rotar continuamente la curva que aparece en el gráfico, alrededor del eje y



Refleje la poligonal ABCD respecto a la recta r



Anexo # 20

Resultados de la experiencia en la enseñanza de la Geometría Analítica

Además del control establecido a partir del ejercicio del Anexo # 21 se utilizaron los siguientes ejercicios, aplicados en la Prueba Parcial # 1.

2. Dada la función $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

e) Haga un esbozo de la gráfica de $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

3. Sea la función $y = f(x)$ par, periódica de período 4, cóncava y creciente en el intervalo $[0,2]$ y además se sabe que $f(2) = 3$ y $f(0) = 0$. De acuerdo con esa información,

b) Haga un esbozo del gráfico de $y = f(x)$

		Representación de	
Indicadores		Superf. de revolución	Función periódica
D O M I N I O	Resolvió la tarea sin errores	8	12
	Resolvió la tarea con errores, pero muestra conocimientos de la misma	3	4
	No resolvió la tarea o cometió errores graves	8	3
Transfirió la rotación del plano al espacio		11	
Se representó mentalmente la superficie y la graficó		10	

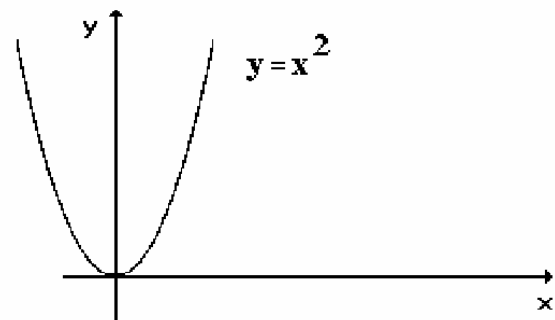
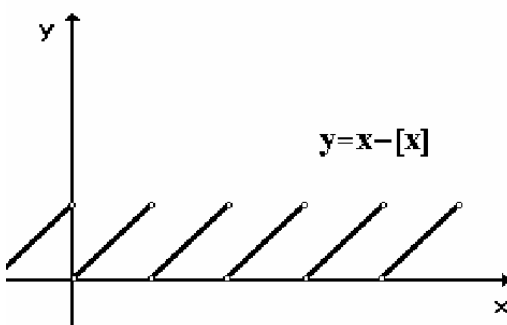
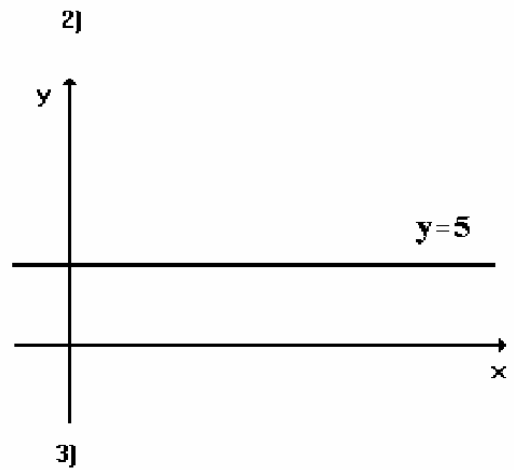
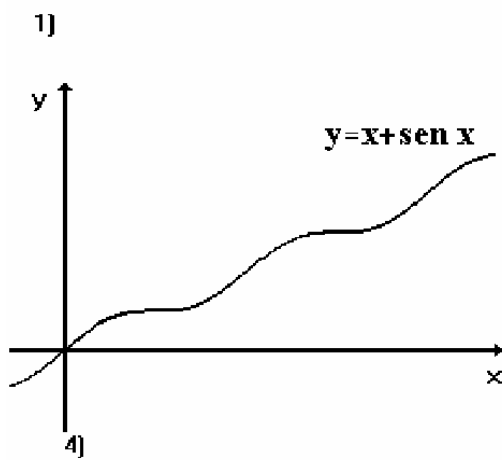
Anexo # 21

Ejercicio aplicado para el control de la habilidad de identificación de la periodicidad en funciones reales de una variable.

Analice los gráficos de las siguientes funciones y

a) Diga en cada caso si es periódica o no. Justifique su respuesta cualquiera sea.

b) En el caso de las que Ud. considere periódicas, diga un período de la función.



1. Identifica por su ecuación, las siguientes superficies:

a) $4x^2 + y^2 = 16$ b) $3x - 4y + z = 6$

c) $e^{-x} + z = 1$ d) $y = e^z$

e) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

2. Represente gráficamente la superficie de revolución engendrada por la gráfica de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya ecuación es $z = e^y$, al rotar alrededor del eje Z. Hallar la ecuación de la superficie.

3. Represente gráficamente la superficie de revolución engendrada por la gráfica de la función $y = \arcsen x$ definida sobre el intervalo $[0,1]$ al rotar alrededor de :

a) El eje X

b) El eje Y

Halle la ecuación de dicha superficie.

4. Represente gráficamente la función $y = \sqrt[3]{abs(x)}$

Sugerencia: Observe que dicha función es par y que $y = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de $y = x^3$

5. Represente gráficamente la superficie de ecuación $z = \arctan y$ para $y > 0$.

Observación:

Los ejercicios 1 y 2 fueron utilizados en la Prueba Parcial # 3 de la experiencia en la Universidad de Matanzas.

El ejercicio 5 fue utilizado en la Prueba Parcial # 1 de la experiencia realizada en el ISPJAE.

En la Universidad de Matanzas se obtuvieron los siguientes resultados :

Resultados en la Universidad de Matanzas	Pruebas Parciales				Examen Final
	1	2	3	4	
Presentados	19	19	18	21	24
Aprobados	13	16	14	16	20
% de aprob.	68,42	84,21	77,78	76,2	83,33
Con 5 ptos.	4	8	3	5	5
Con 4 ptos.	6	4	4	5	1
Con 3 ptos.	3	4	7	6	14

En el ISPJAE se obtuvieron los siguientes resultados :

Resultados en el ISPJAE	Pruebas Parciales			Examen Final
	1	2	3	
Presentados	19	19	19	19
Aprobados	16	16	18	16
% de aprob.	84,21	84,21	94,74	84,21
Con 5 ptos.	3	2	2	7
Con 4 ptos.	5	6	6	4
Con 3 ptos.	8	6	10	5

1. Dada la función $f(x) = \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2}$

- a) Halle el dominio y la imagen de f .
- b) Represente gráficamente dicha función
- c) Halle los extremos de f en el intervalo $(-2,0]$. Fundamente su respuesta.
- d) ¿Existe f^{-1} ? ¿Por qué?

2. Dada la función $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

- a) Represente gráficamente la superficie $z = f(x,y)$.
- b) Establezca una expresión lineal que aproxime la función z en el punto $(1,1)$.

3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln 3x}}$

4. Sea $f(x,y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} A & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

- a) ¿Existirá el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$? Justifique su respuesta.
- b) Halle el valor exacto de A .

5. Sea X la cantidad de unidades producidas de cierto producto A y Y la cantidad de unidades producidas de cierto producto B. Si en total, entre los dos productos deben producirse 45 unidades. ¿Cuántas unidades del producto A y cuántas del producto B habrá que producir para que la ganancia $G(x,y) = 240x - 5x^2 - 3y^2 + 180y$ sea máxima?

Prueba Parcial # 1: Funciones, Límite y Continuidad

1. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1 + 2\tan x)} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- a) Analice la continuidad de f en el punto $x = 0$.
- b) En caso de ser discontinua en $x = 0$, clasifique el tipo de discontinuidad.
2. Dada la función $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
- a) Halle su conjunto natural de definición.
- b) Cite un punto frontera del mismo.
- c) Clasifique dicho conjunto en abierto, cerrado y/o acotado.
- d) Representelo gráficamente .
- e) Haga un esbozo de la gráfica de $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$
3. Sea la función $y = f(x)$ par, periódica de período 4, cóncava y creciente en el intervalo $[0, 2]$ y además se sabe que $f(2) = 3$ y $f(0) = 0$. De acuerdo con esa información,
- a) Halle $f(-2)$ y $f(8)$
- b) Haga un esbozo del gráfico de $y = f(x)$
- c) Halle el valor mínimo de la función $y = f(x)$.

Prueba Parcial # 2: Derivadas

1. Sea $f(x) = \begin{cases} \tan(x^2 \sin \frac{2}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a) Analice la derivabilidad de f en $x_0 = 0$
- b) Halle $f'(\frac{2}{\pi})$
- c) Escriba la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = \frac{2}{\pi}$.

2. Demuestre que la función $z = xy f(x+y)$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = z\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$, donde f es una función derivable en su dominio.
3. El costo de producción de cierto producto agrícola es \$2.00. A partir del primer día de su cosecha, el precio de él es inversamente proporcional al tiempo que permanece sin ser vendido. Se sabe que al cabo de 48 horas de cosechado, el producto se vende a %5.00.
 - a) ¿Cuál es la ganancia obtenida si el producto se vende a las 48 horas de cosechado?
 - b) ¿Con qué razón varía la ganancia en ese momento?

Prueba Parcial # 3: Aproximación local y problemas de extremo

1. De la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ se conoce que $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$.
 Determine:
 - a) los puntos de extremo local.
 - b) los intervalos de monotonía
 - c) los intervalos de concavidad y convexidad
 - d) los puntos de inflexión
2. Obtenga una expresión lineal que aproxime a $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en una vecindad del punto (1,0).
3. Se sabe que la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ A & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ es diferenciable en el punto (0,0).
 - a) ¿Existirá el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$? Justifique su respuesta.
 - b) Si su respuesta es afirmativa:
 - Haga una estimación del valor de A. Justifique su respuesta.
 - Calcule el valor exacto de A.
3. Determine las dimensiones del contenedor rectangular más económico de volumen dado V, si se conoce que el m² de material para las paredes y el techo cuesta \$2.00 y para el piso el valor es de \$6.00 el m².

EXAMEN ESPECIAL UTILIZADO PARA EL DIAGNÓSTICO ³²

1. Encuentre valores de a y b de modo que la línea $2x + 3y = a$ sea tangente a la gráfica de $f(x) = bx^2$ en el punto donde $x = 3$.
2. ¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ algunas raíces entre -1 y 0 ? ¿Por qué sí o por qué no?
3. Sea $f(x) = ax$, si $x \leq 1$; y $f(x) = bx^2 + x + 1$, si $x > 1$. Encuentre a y b de modo que f sea diferenciable en 1 .
4. Encuentre al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ ó explique por qué no existe tal solución.
5. ¿Existe una a de modo que el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3ax + x - a - 1}{x^2 - 2x - 3}$ exista?.

Explique su respuesta.

³² Este examen fue extraído del reporte de investigación de Selden, J y otros (1992) en la bibliografía.

Tabla # 1

Preguntas	Intentos				Prob. res. correctamente				Prob. res. con dificultad				% de intentos aprobados		
	Química		Informática		Química		Informática		Química		Informática		Quím.	Inf.	Total
	Cant.	%	Cant.	%	Cant.	%	Cant.	%	Cant.	%	Cant.	%			
1	42	100	45	100	26	62	31	68.9	15	35.7	14	31.1	97.6	100	98.9
2	18	42.9	29	64.4	6	14.3	15	33.3	7	16.6	11	24.4	30.9	57.7	44.8
3	16	38	25	55.6	0	0	3	6.7	4	9.5	7	15.5	9.5	22.2	16.1
4	0	0	6	13.3	0	0	1	2.2	2	4.8	2	4.4	4.8	6.6	5.7
5	42	100	42	93.3	10	23.8	14	33.3	11	26.2	6	13.3	50	44.4	47.1
Examen	118	56.2	147	65.3	49	23.3	70	31.1	39	18.6	40	17.7	41.9	48.9	45.5

Tabla # 2

Soluciones	Resultados del diagnóstico				Estrategias usadas	Resultados del diagnóstico		
	Quím.	%	Inf.	%		Quím.	Inf.	%
Correctas	49	23.3	70	31.1	Operaciones numéricas	27	36	14.5
Incorrectas	59	28.1	69	30.7	Uso de álgebra	5	9	3.2
Indeterminadas	10	4.8	8	3.6	Lista no sistemática	–	–	–
En blanco	92	43.8	78	34.7	Lista sistemática, una tabla o un diagrama	1	2	0.7
					Ensayo y error	20	29	11.3
					Búsqueda de patrones	65	109	40
					Casos simples	–	–	–
					Indeterminada	10	8	4.1

Tabla 2-A

<i>Características</i>	<i>Química</i>	<i>Informática</i>	<i>Total</i>	<i>%</i>
Búsqueda de patrones	65	109	174	40
Uso de recursos heurísticos	1	2	3	0.37
Uso de estrategias sistemáticas	32	45	77	17.7

Tabla 2-B

<i>Características de la BOA</i>	<i>Química</i>	<i>Informática</i>	<i>Total</i>	<i>%</i>
Completa y sistematizada	59	89	148	34
Completa y no sistematizada	9	10	19	4.3
Incompleta	25	33	58	13.3
No se pudo caracterizar	107	93	200	46

Tabla # 3

Niveles de desempeño	Trabajo mostrado por los estudiantes	Cantidad intentos	%
<i>Desempeño no apreciable</i>	Nada de trabajo o ideas sin relación	170	39.1
<i>Pobre desempeño</i>	Identifica los datos pero sin ningún procedimiento	7	1.6
	Usa los datos pero la estrategia no es clara	11	2.5
<i>Desempeño insuficiente</i>	Introduce un plan apropiado pero este es incompleto o pobremente implementado.	49	11.3
<i>Desempeño aceptable</i>	Existe un plan claro y apropiado pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incompleta.	79	18.2
<i>Desempeño satisfactorio</i>	Solución completa y correcta.	119	27.4

Resultados del Examen por preguntas

Tabla # 1

Pregunta	Cantidad de intentos	Problemas resueltos correctamente	Problemas resueltos con dificultad	% de Aprobados contra Presentados
1	19	12	7	100
2	11	4	3	36,84
3	17	8	7	78,94
4	10	0	4	21,05
5	19	10	3	68,42
Examen	76	34	24	42,10

Tabla # 2

Solución		Estrategias usadas	Cant.	%
Correcta	34	Operaciones numéricas	15	15.8
Incorrecta	42	Uso de álgebra	4	4.2
Indeterminada	0	Lista no sistemática	20	21
En blanco	19	Lista sistemática, una tabla o un diagrama	23	24.2
		Ensayo y error	10	10.5
		Búsqueda de patrones	41	43.2
		Casos simples	5	5.2
		Indeterminada	16	16.8

Tabla 2-A

<i>Características</i>	<i>Total</i>	<i>%</i>
Búsqueda de patrones	41	43.2
Uso de recursos heurísticos	23	24.2
Uso de estrategias sistemáticas	19	20

Tabla 2-B

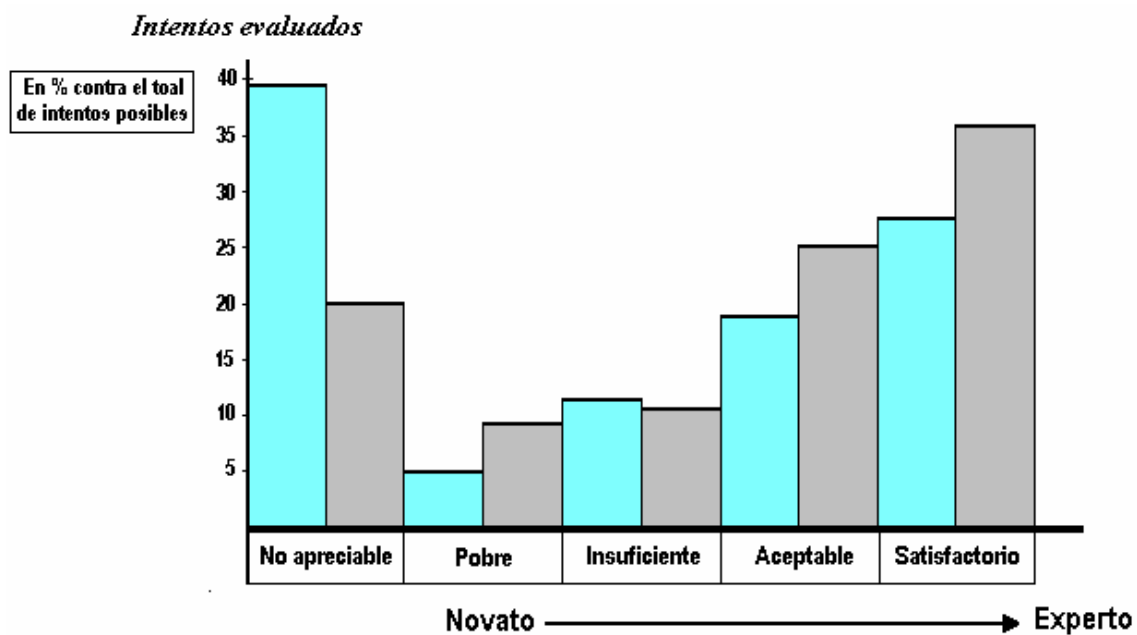
<i>Características de la BOA</i>	<i>Total</i>	<i>%</i>
Completa y sistematizada	46	48.4
Completa y no sistematizada	10	10.5
Incompleta	20	21
No se pudo caracterizar	19	20

Resultados del análisis del desempeño del Grupo I-12 en el Examen

Tabla # 3

Niveles de desempeño	Trabajo mostrado por los estudiantes	Cantidad intentos	%
<i>Desempeño no apreciable</i>	Nada de trabajo o ideas sin relación	19	20
<i>Pobre desempeño</i>	Identifica los datos pero sin ningún procedimiento	3	3.2
	Usa los datos pero la estrategia no es clara	5	5.2
<i>Desempeño insuficiente</i>	Introduce un plan apropiado pero este es incompleto o pobremente implementado.	10	10.5
<i>Desempeño aceptable</i>	Existe un plan claro y apropiado pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incompleta	24	25.3
<i>Desempeño satisfactorio</i>	Solución completa y correcta.	34	35.8

Análisis comparativo en el desempeño de los resultados del diagnóstico y del Grupo Experimental



Análisis comparativo del comportamiento en las soluciones entre la muestra del diagnóstico y el Grupo Experimental

