

UNIVERSIDAD DE LA HABANA
FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ALGORITMO HÍBRIDO PARA EL CÁLCULO DE UNA SOLUCIÓN
 ε -APROXIMADA DEL PROBLEMA CUADRÁTICO NO CONVEXO
CON RESTRICCIONES DE CAJA

Tesis presentada en opción al grado científico de
Doctor en Ciencias Matemáticas.

Autor: MsC. RIDELIO MIRANDA PÉREZ
Tutores: Prof. Tit. Dra., SIRA ALLENDE ALONSO,

La Habana, Cuba
2017

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa, por su incondicional apoyo moral y espiritual.

A mis hijos, por su paciencia y amor.

A mis padres, por su preocupación constante.

A mis hermanas, por su fé en mí y su apoyo emocional.

A la doctora Sira Allenda, mi tutora, por haberme motivado en el tema y por su guía y apoyo durante toda la investigación.

Al profesor Jurgen Guddat, por ser el autor de la idea original para este trabajo y a Gemayqzel por su ayuda en el tema de la programación paramétrica.

A mi tío Pedrito, a mis amigos Emilio, Boris, Mario, Mariluz, Raúl y Terina, por apoyo y compañía en todos estos años.

A mis compañeros de trabajo, y a todos los que de una forma u otra colaboraron en este proyecto.

A todos ¡ Muchas Gracias !

La Habana, Cuba. Septiembre del 2017

Ridelio Miranda Pérez

ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMIENTOS	I
ÍNDICE	II
LISTA DE TABLAS	VI
LISTA DE FIGURAS	IX
INTRODUCCIÓN	1
1. Marco teórico del problema	7
1.1. Introducción	7
1.2. Conceptos básicos y notaciones	8
1.3. El problema cuadrático con restricciones de caja	11
1.4. Criterios de optimalidad para el problema BQP	13
1.5. Formulaciones equivalentes	16
1.6. Métodos empleados para resolver problemas cuadráticos no convexo con restricciones de caja	19
1.7. Conclusiones parciales del capítulo	23
2. Método de corte y continuación	24
2.1. El problema paramétrico	25
2.2. Teorema de genericidad y perturbación	29
2.2.1. Resultados preliminares	29
2.2.2. Teorema de genericidad y perturbación	37
2.3. Método de continuación	45
2.4. Conclusiones parciales del capítulo	50

3. Formulación del algoritmo híbrido	51
3.1. Métodos de ramificación y acotación	51
3.2. Formalización del método <i>B&B</i> a utilizar	54
3.2.1. Cálculo de las cotas inferiores	54
3.2.2. Elección del nodo a explorar	57
3.2.3. Cálculo de las cotas superiores y eliminación de nodos	57
3.2.4. Estrategias de ramificación	58
3.3. Formulación del algoritmo híbrido	61
3.4. Conclusiones parciales del capítulo	65
4. Experimentos computacionales y análisis de resultados	67
4.1. Sobre la implementación y la base de problemas pruebas	68
4.1.1. Sobre la implementación del algoritmo híbrido	68
4.1.2. Sobre los problemas pruebas utilizados	71
4.2. El método de Corte y Continuación. Resultados.	73
4.3. Análisis del Algoritmo híbrido	76
4.4. Comparación con otros algoritmos	82
4.4.1. Comparación con el método de Burer-Vandenbussche	82
4.4.2. Comparación con el método de Burer-Chen	85
4.5. Influencia de las características del problema en el desempeño del algoritmo híbrido	88
4.6. Solución de problemas con más de 100 variables	93
4.7. Conclusiones parciales del capítulo	94
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	97
RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	99
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100
ANEXOS	107
A. Programación paramétrica	108
A.1. Conceptos básicos	108
A.2. Definición de los cinco puntos críticos generalizados	110
B. Programación Semidefinida Positiva	116

C. Ejemplo Ilustrativo	119
D. Características de los problemas pruebas y resultados del método de corte y continuación	127
D.1. Características de los problemas pruebas	127
D.2. Resultados del método de corte y continuación	128
E. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el algoritmo híbrido con relajación [RSDP1] para los problemas Básicos y Extendidos	131
F. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el algoritmo híbrido con la relajación [RDNN] para los problemas Básicos y Extendidos	135
G. Resultados de la comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido.	139
H. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el método <i>B&B</i> de Burer-Vandenbussche para los problemas Básicos y Extendidos	143
I. Resultados de la comparación entre el algoritmo híbrido <i>CC+BB-BurChen</i> y el método <i>B&Bde Burer-Vandenbussche</i>	147
J. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el método <i>B&B</i> de Burer-Chen para los problemas Básicos y Extendidos	149
K. Resultados de la comparación entre el algoritmo híbrido <i>CC+BB-BurChen</i> y el método <i>BB-BurChen</i> .	153
L. Relación detallada de los resultados obtenidas por el algoritmo híbrido en los 81 problemas generados por el diseño experimental	155
M. Reporte de resultados de STATGRAPHICS para el diseño experimental	158
M.1. Resultados de la prueba ANOVA simple para el factor (κ) condición de la matriz Q	158
M.2. Resultados del análisis experimental	159
M.2.1. Análisis Experimental - Variable TNC	160
M.2.2. Análisis Experimental - Variable TTR	162
M.2.3. Análisis Experimental - Variable ITO	164
M.3. Análisis Experimental - Variable NTI	166

M.4. Pronósticos del tiempo total requerido por el algoritmo híbrido	167
N. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el algoritmo híbrido para los Problemas Extras	169
Ñ. Relación detallada de las soluciones obtenidas por el método <i>B&B</i> de Burer-Chen para los Problemas Extras	171
O. Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global	173

Índice de cuadros

4.1. Resumen de resultados para el método <i>C&C</i>	73
4.2. Diferencias fundamentales entre el algoritmo híbrido y el método <i>B&B</i> de Burer-Vandenbussche.	82
4.3. Diferencias fundamentales entre el algoritmo híbrido y el método <i>B&B</i> de Burer-Chen.	85
4.4. Características del diseño multifactorial realizado	90
4.5. Factores de mayor impacto para cada parámetro, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$	91
4.6. Resumen de los resultados para los problemas extras	94
C.1. Singularidades determinadas en la iteración-1, paso 2-1.	122
D.1. Características de las matrices que conforman la base de problemas pruebas	127
D.2. Reporte de las soluciones de <i>C&C</i> para los problemas 20-100-S.	128
E.1. Resultados del alg. híbrido utilizando relajación [<i>RSDP</i> ₁] en los problemas básicos.	132
E.2. Resultados del alg. híbrido utilizando relajación [<i>RSDP</i> ₁] en los problemas básicos (Continuación)	133
E.3. Resultados del alg. híbrido utilizando relajación [<i>RSDP</i> ₁] en problemas extendidos	134
F.1. Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [<i>RDNN</i>] en los problemas básicos	136
F.2. Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [<i>RDNN</i>] en los problemas básicos (Continuación)	137
F.3. Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [<i>RDNN</i>] en problemas extendidos	138

G.1. Iteraciones <i>B&B</i> necesarias para encontrar la solución óptima de los 16 problemas no resueltos por el método de corte y continuación utilizando MAXPAFO=1 y MAXPAFO=5.	141
G.2. Resultados de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon para los resultados alcanzados por los algoritmos <i>CC+BB-BurChen</i> y <i>CC+BB-BurVan</i>	142
H.1. Resultados del método <i>B&B</i> de Burer-Vandenbussche para los problemas Problemas Básicos	144
H.2. Resultados del método <i>B&B</i> de Burer-Vandenbussche para los problemas Problemas Básicos (Continuación)	145
H.3. Resultados del método <i>B&B</i> de Burer- Vandenbussche para los Problemas Extendidos	146
I.1. Resultados de la prueba de rango entre los resultados alcanzados por el algoritmo <i>CC+BB-BurChen</i> y el método <i>BB-BurVan</i>	148
J.1. Resultados del algoritmo <i>B&B</i> de Burer-Chen para los problemas Problemas Básicos	150
J.2. Resultados del algoritmo <i>B&B</i> de Burer-Chen para los problemas Problemas Básicos (Continuación)	151
J.3. Resultados del método <i>B&B</i> de Burer-Chen para los Problemas Extendidos	152
K.1. Resultados de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon para los resultados obtenidos por el algoritmo <i>CC+BB-BurChen</i> y el método <i>BB-BurChen</i>	154
L.1. Resultados detallados correspondientes a cada uno de los 81 experimentos realizados (muestra)	156
L.2. Resultados detallados correspondientes a cada uno de los 81 experimentos realizados (Continuación)	157
M.1. ANOVA Table for NTI by Condition	158
M.2. ANOVA Table for TTR by Condition	158
M.3. ANOVA Table for TNC by Condition	159
M.4. ANOVA Table for ITO by Condition	159
M.5. Error estándar para TNC basado en el error total con 69 grados de libertad	160
M.6. Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable TNC	160

M.7. Error estándar para TTR basado en el error total con 69 grados de libertad . . .	162
M.8. Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable TTR	162
M.9. Error estándar basado en el error total con 69 grados de libertad	164
M.10. Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable ITO	164
M.11. Error estándar basado en el error total con 69 grados de libertad	166
M.12. Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable NTI	166
M.13. Tabla con valores pronosticados para la variable TTR en problemas de más de 100 variables	168
N.1. Resultados del algoritmo híbrido $C&C+B&B$ para los Problemas Extras	170
O.1. Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global para los Pro- blemas Básicos	174
O.2. Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global para los Pro- blemas Básicos (Continuación)	175

Índice de figuras

1.1. Ilustración gráfica de la estrategia global	22
2.1. Se cumple $H^p(\hat{y}(z)) = 0$ para todo $z \in [z^1, z^2]$	45
2.2. El punto $(x^{(0)}, 0)$ no está conectado con $(\bar{x}, 1)$ por una curva solución . . .	46
2.3. Ilustración de un “salto” desde (\hat{x}, \hat{t}) a (\tilde{x}, \hat{t})	48
2.4. Pseudocódigo del método de continuación con saltos	49
3.1. Representación visual del árbol generado por el método $B\&B$	52
3.2. Pseudocódigo del método de ramificación y acotación	53
3.3. Pseudocódigo del algoritmo híbrido	63
3.4. Gráfica de la función $f(x_1, x_2)$	64
3.5. Esquema del árbol generado por el algoritmo para el ejemplo ilustrativo . .	66
4.1. Comparación de las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones realizadas.	79
4.2. Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al tiempo total requerido. .	80
4.3. Comparación entre el método $B\&B$ de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número total de iteraciones	83
4.4. Comparación entre el método de BB-BurVan y el algoritmo híbrido respecto al tiempo total de requerido.	84
4.5. Comparación entre el algoritmo híbrido CC+BB-BurChen y el método $B\&B$ de Burer-Chen respecto al número total de iteraciones	86
4.6. Comparación entre el algoritmo híbrido-RDNN y el método $B\&B$ de Burer-Chen respecto al tiempo total requerido.	87
4.7. Comparación entre el algoritmo híbrido y el método de Burer-Chen respecto al gap relativo y entre el tiempo estimado y real calculado por el algoritmo híbrido en la solución de los Problemas Extras	95

4.8. Comparación entre el algoritmo híbrido y el método de Burer-Chen respecto al gap relativo y entre el tiempo estimado y real calculado por el algoritmo híbrido en la solución de los Problemas Extras	96
A.1. Estructura local de $\sum_{pcg}^{(v)}(f, h, g)$ en la vecindad de cada p.c.g.	115
C.1. Gráfica de la función $f(x_1, x_2)$	120
C.2. Aproximación de las curvas $x(t)$, $w(t)$ y $\mu(t)$ en la iteración-0	121
C.3. Gráfica del conjunto $M(t)$ para diferentes niveles del parámetro t	123
C.4. Aproximación de las curvas $x(t)$ y $w(t)$ en la iteración 1.	125
C.5. Aproximación de las curvas $x(t)$ y $w(t)$ en la iteración 2.	126
C.6. Esquema del árbol generado por el algoritmo para el ejemplo ilustrativo	126
D.1. Mediciones de la calidad de las soluciones $C\&C$	128
D.2. Comparación entre el primer mínimo local y la solución óptima calculada por $C\&C$	129
D.3. Número de Iteraciones $C\&C$ versus dimensión del problema.	129
D.4. Tiempo total requerido por $C\&C$ versus dimensión del problema.	130
G.1. Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al Total de Nodos Creados.	139
G.2. Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones para encontrar la solución óptima.	140
G.3. Frecuencia relativa del número de iteraciones del algoritmo híbrido versus dimensión del problema	140
G.4. Comparación del tiempo total requerido por “ $CC + BB - BurChen.m$ ” con $MAXPAFO=1$ vs $MAXPAFO=5$	141
I.1. Comparación entre el método de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número de nodos creados.	147
I.2. Comparación entre el método de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones necesarias para alcanzar una solución óptima.	148
K.1. Gráfica log-log con el total de nodos creados por $CC+BB-BurChen$ y $BB-BurChen$	153
K.2. Gráfica log-log con el total del número de iteraciones necesarias para encontrar una solución óptima por $CC+BB-BurChen$ y $BB-BurChen$	154

M.1. Diagrama de Pareto según la ANOVA para la variable TNC versus los factores N,D,QI	161
M.2. Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable TTR versus los factores N,D,QI y sus interacciones	163
M.3. Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable ITO versus los factores N,D,QI y sus interacciones	165
M.4. Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable NTI versus los factores N,D,QI y sus interacciones	167

INTRODUCCIÓN

El problema cuadrático con restricciones de caja es uno de los problemas más simples de la programación no lineal, que por su interés teórico y alta complejidad computacional ha acaparado la atención de numerosos investigadores.

Problemas de programación cuadrática con restricciones de caja aparecen frecuentemente en la solución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales (Hauska, Ferreau, & Diehl, 2011), en la discretización de problemas de control óptimo con variable continua (Zometa, Kugel, Faulwasser, & Findeisen, 2012), problemas de reconstrucción de imágenes por proyecciones (Beck & Tiboulle, 2009), en la implementación de métodos robustos para la programación no lineal (Hu & Dai, 2007), y por su relación directa con el problema cuadrático con variables 0-1, problemas combinatorios, como por ejemplo, el particionamiento de grafos (Kenning & Vannelli, 1997) y (Hager & Klylyuk, 1999).

Resulta conocido que los problemas cuadráticos convexos tienen solución en tiempo polinomial (Maros & Mészáros, 1999). El interés de este trabajo, sin embargo, se centra en los problemas no convexos, en cuyo caso se tiene un problema que por su complejidad pertenece a la clase NP-Duro (Vavasis, 1995).

Para la solución de este problema se han diseñado numerosos métodos, los cuales según su carácter se clasifican en locales y globales. Entre ellos, por ejemplo: método de conjuntos activos de (Gill & Wong, 2015), algoritmos de punto interior (Hansen & Joumard, 1992), adaptaciones del método de proyecciones (Chinneck, 2004) y métodos de ramificación y acotación (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b; Burer & Vandenbussche, 2008a). Los resultados más significativos están relacionados con los enfoques basados en ramificación y acotación (*B&B*). Estos algoritmos se distinguen por poseer un fuerte tratamiento en el cálculo de las cotas inferiores (Chen & Burer, 2012). Sin embargo, en ellos no existe un

refinamiento adecuado para el cálculo de las cotas superiores.

Otro enfoque reportado en la literatura consiste en la utilización de una estrategia global basada en corte y continuación, cuyos precedentes pueden encontrarse en los trabajos de Guddat et. al. (Guddat, Guerra, & Jongen, 1990). El procedimiento genera una sucesión monótona decreciente de mínimos locales que aproximan una solución óptima del problema. Las principales limitaciones del método están asociadas a la falta de un criterio para identificar el mínimo global y la aparición de singularidades no tratables en el proceso de cálculo.

Problema Científico

Necesidad de diseñar un algoritmo de optimización global para el problema cuadrático no convexo con restricciones de caja que aproveche las ventajas de los métodos referidos (corte-continuación, ramificación-acotación, etc.), y que a la vez supere las limitaciones señaladas a estos.

Objeto de la Investigación

El problema de optimización cuadrático no convexo con restricciones de caja.

Campo de acción

Los métodos numéricos para la continuación de curvas paramétricas y los procedimientos de ramificación y acotación.

Objetivo General

Diseñar un algoritmo para la solución del problema objeto de la investigación que aproveche las ventajas del método de corte y continuación y las bondades de los procedimientos de ramificación y acotación más avanzados.

Objetivos específicos

1. Construir una parametrización adecuada para el problema cuadrático con restricciones de caja y analizar sus características.
2. Definir una estrategia de continuación para el problema paramétrico generado.
3. Adecuar la filosofía del método de Ramificación-Acotación al problema objeto de estudio.

4. Desarrollar un algoritmo híbrido que utilice los elementos positivos de los métodos de Corte-Continuación y Ramificación-Acotación.
5. Validar experimentalmente el algoritmo propuesto.
6. Evaluar la conducta del algoritmo ante cambios en las características del problema.

Hipótesis

La combinación de un método de corte y continuación con un método de ramificación y acotación apropiado para el cálculo de una solución óptima del problema cuadrático no convexo con restricciones de caja, permitirá evadir el tratamiento de las singularidades no tratables por el primer método, y obtener cotas superiores e inferiores de muy buena calidad para la evaluación de la función objetivo. Estos resultados posibilitarán identificar el mínimo global del problema reduciendo significativamente el número de iteraciones, el número total de nodos a explorar y el tiempo de cómputo en comparación con los métodos que sólo utilizan ramificación y acotación.

Estructura de la tesis

La tesis está estructurada en Introducción, cuatro Capítulos, Conclusiones y Recomendaciones, Referencias Bibliográficas y Anexos. En el primer capítulo se presenta un resumen del estado actual de la teoría relacionada con los métodos de solución para el problema de programación cuadrática no convexa con restricciones de caja. Se plantean conceptos y teoremas que apoyan la teoría soporte de los procedimientos de optimización que se proponen en el desarrollo de la tesis. Adicionalmente se presentan formulaciones equivalentes al problema cuadrático original que serán usadas en el desarrollo del trabajo.

EL Capítulo 2 se dedica al análisis de los fundamentos sobre los cuales se construye el método de corte y continuación. Se presenta una inmersión específica para el problema y se demuestra que el problema paramétrico así obtenido pertenece a la clase \mathcal{F} de Jongen-Jonker-Twilt. Adicionalmente se analizan los procedimientos reportados para el tratamiento de las singularidades que aparecen durante la aplicación del método de continuación. El capítulo concluye con la presentación de un pseudocódigo para el método de corte y continuación.

En el tercer capítulo se presenta el desarrollo del algoritmo híbrido que se propone. Justificada la aplicación del método de continuación en la estrategia general de corte y continuación, y partiendo de los métodos de ramificación y acotación más eficientes reportados, se propone combinar ambos procedimientos para resolver las limitaciones señaladas a uno y otro. La nueva propuesta modifica el tratamiento a las singularidades que aparecen durante la aplicación del método de continuación, el esquema de ramificación y el procedimiento para el cálculo de las cotas superiores del método *B&B*. El capítulo finaliza con la formalización del algoritmo en forma de pseudocódigo, y se ilustra su funcionamiento a través de un ejemplo sencillo.

Los aspectos generales de la implementación del algoritmo y los experimentos computacionales son tratados en el capítulo 4. Adicionalmente se describen los problemas utilizados para la experimentación, compuestos por la biblioteca de problemas pruebas más referenciada en los artículos revisados, y un conjunto de problemas de mayor dimensión generados para este trabajo. Los resultados experimentales evidencian el buen funcionamiento del algoritmo, y permiten verificar la hipótesis propuesta. Adicionalmente se estudia la conducta del algoritmo ante cambios en las características del problema, tales como, su dimensión, el número de valores propios negativos y la densidad de la matriz Q .

Las Conclusiones brindan el análisis del alcance de los resultados de este trabajo y su comparación con los objetivos propuestos, haciendo énfasis en el cumplimiento de la hipótesis formulada.

Las Recomendaciones se centran en futuras líneas de trabajo relativas a la posibilidad de extender el algoritmo a problemas cuadráticos más generales y/o específicos.

Este trabajo es el resultado de muchos años de investigación (2005-2016), donde se reportan varios artículos científicos, publicados en revistas cubanas y extranjeras, la participación en múltiples eventos científicos nacionales e internacionales de la especialidad y se han recibido dos distinciones científico-técnicas, por logros relacionados con la temática presentada en la tesis.

Publicaciones

1. Miranda, R., and Allende, S., and Pérez, B. and Bouza, G. (2015) Algoritmo de corte y continuación con ramificación y acotación para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja. Revista Ciencias Matemáticas. Vol. 29, Nro. 1, pp. 19-29. ISSN:0256-5374.
2. Miranda Pérez, Ridelio (2010) Theoretical approach for the calculation of a feasible point on the special non-convex set described by a polyhedron and a quadratic function. Revista Optimization. Vol. 59, No. 6, pp. 917-927. Print ISSN:0233-1934 Online ISSN:1029-4945.
3. Miranda, R. (2009) Solución de problemas de programación cuadrática con restricciones de caja utilizando un método de continuación con saltos. Boletín Sociedad Cubana de Matemática y Computación. CD-ROM. ISSN:1728-6042
4. Miranda, R., Allende, S., Guddat, J. (2005) MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CUADRÁTICO SIMPLEX ESTÁNDAR. Boletín Sociedad Cubana de Matemática y Computación. ISSN:1728-6042

Eventos

- 12th International Workshop on Operations Research (2017), La Habana, Cuba.
Desempeño computacional de estrategias híbridas para la solución de problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja. (Miranda, R., and Allende, S., and Pérez, B. and Bouza, G.)
- 12th International Conference on Operations Research (2016), La Habana, Cuba.
Estrategia híbrida para la solución de problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja. (Miranda, R., and Allende, S., and Pérez, B. and Bouza, G.)
- X International Conference PARAOPT (2010), Karlsruhe, Alemania.
Parametric strategy for finding feasible points in quadratic programs. (Miranda, R., Guddat, J., Allende, S.)

- 9th International Conference on Operations Research, La Habana, Cuba.
Estrategia paramétrica de solución aproximada para problemas de factibilidad en conjuntos definidos por la intersección de un poliedro y una forma cuadrática. (Miranda, R.)
- XI COMPUMAT (2009), La Habana, Cuba.
Solución de problemas de programación cuadrática con restricciones cuadráticas utilizando un método de continuación con saltos. (Miranda, R.)
- 8th International Workshop on Operations Research (2009), La Habana, Cuba.
Experimentación numérica en la solución de problemas de programación cuadrática con restricciones de caja vía inmersión. (Miranda, R., Allende, S., Guddat, J.)
- CLAIO 2008, Cartagena de Indias, Colombia.
Solution of simplex standard quadratic programming problems using a parametric strategy. (Miranda, R.)
- IX PARAOPT (2007), Cienfuegos, Cuba.
Solving quadratic programming problems using parametric optimization. (Miranda, R., Allende, S., Guddat, J.)
- VII International Conference on Approximation, Optimization and Mathematics for Economics in the Caribbean (2006), Santo Domingo, República Dominicana.
Método de optimización global basado en programación paramétrica y métodos de continuación con saltos para la solución de problemas de optimización cuadrática. (Miranda, R., Allende, S., Guddat, J.)
- VIII PARAOPT (2005), Cairo, Egipto.
Parametric optimization approach for solving quadratic optimization problems with box constraints. (Miranda, R.)

Capítulo 1

Marco teórico del problema

1.1. Introducción

De forma general, el problema de la programación cuadrática consiste en encontrar el mínimo global de una función cuadrática de n -variables sujeta a restricciones de desigualdad lineal.

$$\begin{aligned} [QP] \quad f_{opt} &= \min\{f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \mid x \in \Omega\} \\ \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \quad x \geq 0\} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

– donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota una matriz simétrica de orden n y $q \in \mathbb{R}^n$ el vector de los coeficientes en la componente lineal de la función objetivo. La matriz de rango completo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y el vector $b \in \mathbb{R}^m$ definen, junto a la no negatividad de las variables, las desigualdades lineales que conforman el conjunto de restricciones del problema.

La programación cuadrática constituye una de las áreas más importantes de la programación no lineal, tanto desde el punto de vista teórico, como por su amplia utilización en la solución de problemas de la economía y la industria. Modelos de programación cuadrática se pueden encontrar en la planificación de negocios (Onanaye & Agbolamagbin, 2016) , la planificación financiera (Gondzoi & Grothey, 2007), en la tecnología industrial (Enkhbat & Ibaraky, 1996)y la industria química (Hannemann-Tamas, Gabort, Gabor, & Hangos, 2013). Otras aplicaciones prácticas reportadas son la modelación de problemas de control predictivo (Dang, Tran, & Ling, 2015; Schlipf, Schlipf, & Kühn, 2013), optimización de unidades de generación multiple (Franke, Schönung,

Blaumann, Frick, & Kautsch, 2013), optimización de sistemas de abastecimiento de agua (Wagenpfeil, Arnold, Linke, & Sawodny, 2013) y modelación económica de despachos eléctricos (Subathra, Selvan, Victoire, Christinal, & Amato, 2014).

Como herramienta matemática resalta su utilización en la solución de problemas de optimización no lineal dentro del esquema de la programación cuadrática secuencial (Bolte & Pauwels, 2016), modelación de problemas tipo mochila (Zhang & Hua, 2012), modelación de problemas de la teoría de grafos, tales como el clique máximo (Nam, 2015) y el particionamiento de grafos (Jeong, 2014) ; así como en el ajuste de curvas (Yang & Jiang, 2015), y el análisis estadístico de datos (Hertog & Stehouwer, 2000), etc.

Se conocen varias instancias particulares de [QP] de gran interés para la comunidad científica. Entre ellas se destacan: el problema cuadrático con restricciones de caja, el problema cuadrático simplex estándar, el problema cuadrático de mochila y el problema cuadrático de asignación. El primero de ellos constituye el objeto de estudio de esta investigación. Pero antes de centrar la atención en su estudio y caracterización, es preciso formalizar los conceptos y definiciones que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo.

1.2. Conceptos básicos y notaciones

Con el fin de lograr una mejor comprensión del texto que aquí se presenta, en este epígrafe se definen un grupo de conceptos básicos y notaciones que serán manejados en el cuerpo de la tesis. En primer lugar se presentan las definiciones de solución factible, mínimo local y global, precisando que la diferencia entre las dos últimas radica en el alcance del conjunto sobre el cual se cumple la propiedad de valor mínimo.

Definición 1.2.1. *Una solución factible del problema (1.1.1) es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que satisface todas las restricciones del problema. (Esto es: $Ax \leq b$, $x \geq 0$)*

Definición 1.2.2. *Se dice que una solución factible $x^* \in \Omega$ es un mínimo local de (1.1.1) si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$ con $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$.*

Definición 1.2.3. *Se dice que una solución factible $x^* \in \Omega$ es un mínimo global de (1.1.1) si $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$.*

En muchos problemas prácticos resulta imposible encontrar el mínimo global (puede que no exista) en un tiempo prudencial, y en otros no es de gran interés determinar su solución exacta, sino que basta con encontrar una “buena” aproximación para el valor del mínimo absoluto f_{opt} . En estos casos se emplea el concepto de solución ε -aproximada.

Definición 1.2.4. *Se dice que x es una solución ε -aproximada para f_{opt} , si*

$$\left| \frac{f(x) - f_{opt}}{f_{opt}} \right| \leq \varepsilon \quad (1.2.1)$$

– donde $0 \leq \varepsilon \leq 1$ es tolerancia permitida (error relativo máximo permitido para la solución aproximada), y f_{opt} es el valor mínimo absoluto de la función objetivo $f(x)$ sobre la región factible del problema.

Por el importante papel que desempeñan las matrices para este trabajo resulta indispensable definir aquí los conjuntos y operaciones entre estas que más se utilizarán. En el desarrollo del documento se asumirá la notación de las matrices con letras mayúsculas, y los vectores con minúsculas. La notación M_{ij} se utilizará para referirse al elemento ubicado en la fila- i y columna- j de la matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Para identificar a la fila- k (columna- k) de la misma matriz M se utilizará la notación M_{k*} (M_{*k}), mientras que la notación q_j se empleará para referirse al elemento (j) del vector $q \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.5. *Se dice que una matriz $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, si $Y = Y^T$*

Al conjunto de todas las matrices simétricas de dimensión (n) se denotará por (S^n).

Definición 1.2.6. *Se dice que una matriz simétrica $Y \in S^n$ es semidefinida (definida) positiva, si $x^T Y x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($x^T Y x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$).*

Al conjunto de todas las matrices semidefinidas (definidas) positivas de dimensión (n) se denotará por S_+^n (S_{++}^n). Alternativamente se utilizará también la notación $Y \succeq 0$ ($Y \succ 0$) para denotar que una matriz Y es semidefinida (definida) positiva.

Definición 1.2.7. *Se dice que una matriz simétrica $Y \in S^n$ es semidefinida (definida) negativa, si $x^T Y x \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($x^T Y x < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$).*

Al conjunto de todas las matrices semidefinidas (definidas) negativas de dimensión (n) se identificará por $S_{(-)}^n$ ($S_{(-)}^n$). Como en el caso anterior, para denotar que una matriz Y es semidefinida (definida) negativa se utilizará también la notación $Y \preceq 0$ ($Y \prec 0$).

Definición 1.2.8. Se dice que una matriz $Y \in S^n$ es copositiva, si $x^T Y x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Al conjunto de todas las matrices copositivas de dimensión (n) se denotará por \mathcal{C}^n .

Definición 1.2.9. Se dice que una matriz simétrica $Y \in S^n$ es completamente positiva, si para cierto $k > 0$, $\exists N \in \mathbb{R}^{n \times k}$ con $N_{ij} \geq 0 \forall (i, j)$ tal que $Y = N N^T$

Al conjunto de todas las matrices completamente positivas de dimensión (n) se denotará por \mathcal{P}^n .

Definición 1.2.10. Se dice que una matriz simétrica $Y \in S^n$ es doblemente no negativa, si $Y \succeq 0$ y todos sus elementos son no negativos. (Esto es: $Y_{ij} \geq 0 \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Al conjunto de todas las matrices doblemente no negativas de dimensión (n) se denotará por \mathcal{D}^n . Partiendo de las definiciones anteriores, no es difícil demostrar la relación

$$\mathcal{P}^n \subseteq \mathcal{D}^n \subseteq S_+^n \quad (1.2.2)$$

Definición 1.2.11. La traza de una matriz $Y \in S^n$ es el número real que resulta de la suma de los elementos de su diagonal principal, y se denota por $\text{trace}(Y) = \sum_{j=1}^n Y_{jj}$.

Definición 1.2.12. Dadas dos matrices $Q, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define como producto interno de Q por Y a la operación matricial $Q \bullet Y = \text{trace}(Q^T Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} Y_{ij}$.

Definición 1.2.13. Se define como inercia de la matriz simétrica $Q \in S^n$ a la tripleta $In(Q) = [QI; QCI; Q_0]$ que identifica el número de valores propios negativos, positivos y nulos de la matriz Q respectivamente. Aquí QI (resp. QCI) se toman según su denominación en inglés: Quadratic Index (resp. Quadratic Co-Index).

Definición 1.2.14. Se define como condición de una matriz simétrica $Q \in S^n$ con valores propios $\{\lambda_k\}$, ($k=1, \dots, n$) a la razón entre el mayor y el menor valor propio de Q , y se denota por “ $\text{cond}(Q)$ ”. Esto es $\text{cond}(Q) = \frac{\max\{|\lambda_k|\}}{\min\{|\lambda_k|\}}$, donde: $\min\{|\lambda_k|\} \neq 0$.

Definición 1.2.15. El producto de Hadamard de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, se define como el vector $w = u \circ v$, con $w \in \mathbb{R}^n$ y $w_j = u_j v_j$, $j=1, \dots, n$.

1.3. El problema cuadrático con restricciones de caja

El problema objeto de atención en esta tesis es el problema cuadrático no convexo con restricciones de caja que se obtiene de (1.1.1) cuando $Q \notin S_+^n$, $A = I$ (matriz identidad de orden n) y $b = e = [1; 1; \dots; 1]^T \in \mathbb{R}^n$.

$$[BQP] \quad \begin{aligned} f_{minglob} &= \min\{f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x : x \in B\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq e\} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Dado que todo problema (1.3.1) en cajas más generales $l \leq x \leq u$ ($l, u \in \mathbb{R}^n$) puede reducirse, por un cambio de variables, a un problema equivalente con $0 \leq x \leq e$, en este trabajo sólo nos referiremos al problema en la caja estándar definida según B .

Este problema resulta uno de los casos especiales más estudiados dentro de la programación cuadrática y uno de los problemas clásicos de formulación más simples de la programación no lineal, que por su importancia es considerado como un problema fundamental en la optimización global (Horst, Pardalos, & Thoai, 2000) y en consecuencia ha acaparado la atención de numerosos investigadores.

Problemas de programación cuadrática con restricciones de caja aparecen frecuentemente en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (Hauska *et al.*, 2011), en la discretización de problemas de control óptimo con variable continua (Zometa *et al.*, 2012), modelación de la transmisión de señales (Fu, Ma, Chan, & So, 2012), reconstrucción de imágenes por proyecciones (Beck & Tiboulle, 2009), problemas de complementariedad lineal (Moré & Toraldo, 2006), métodos de programación cuadrática secuencial en la programación no lineal (Izmailov & Solodov, 2016), problemas de superficies de respuesta (Asachi & Marandi, 2015; Iqbal, Nadeem, Sherazi, & Khan, 2015) y por su relación directa con el problema cuadrático con variables 0-1, en la solución de problemas combinatorios, como por ejemplo, el particionamiento de grafos (Hager, James, & Hungerford, 2015).

Un aspecto importante a destacar es el papel fundamental que desempeña la matriz Q en las características del problema (1.3.1), y en general de todo problema cuadrático.

Tan es así que, por ejemplo, a partir de la inercia de Q los problemas de la programación cuadrática se clasifican en:

- Problemas cuadráticos convexos: Cuando Q es semidefinida positiva ($Q \succeq 0$). En ese caso, todos los valores propios de Q son no negativos.
- Problemas cuadráticos cóncavos: Cuando Q es semidefinida negativa ($Q \preceq 0$). En ese caso, todos los valores propios de Q son no positivos.
- Problemas cuadráticos indefinidos: Cuando Q no pertenece a ninguno de los casos anteriores, o sea, tiene valores propios negativos y positivos a la vez.

Está demostrado que los problemas cuadráticos convexos ($QI = 0$) pertenecen a la clase **P** de los problemas con solución determinística en tiempo polinomial (Kozlov, Tarasov, & Khachian, 1979). En este caso, todo punto de mínimo local es a su vez un mínimo global (Horst, Pardalos, & Thoai, 1995), y por tanto puede ser resuelto utilizando métodos de la programación convexa.

Entre los múltiples procedimientos reportados para la solución de este tipo de problemas están los algoritmos basados en métodos de conjuntos activos (Hungerländer & Rendl, 2015; Gill & Wong, 2015), algoritmos de punto interior (Pirhaji, Mansouri, & Zangiabadi, 2016) , métodos de Barrera (Krumke, 1994), de penalización (Ben Daya & Al Sultan, 1997) y de continuación (Ferreau, Kirches, Potschka, Bock, & Diehl, 2014).

En el caso que nos interesa, los problemas cuadráticos no convexos (indefinidos y cóncavos), al igual que todos los problemas no convexos de la programación no lineal, se caracterizan por poseer un número indeterminado de mínimos locales diferentes, que pueden encontrarse tanto en la frontera como en el interior de la región factible. Sólo en el caso particular de los problemas cuadráticos cóncavos con restricciones de caja ($QCI = 0$), se puede asegurar que el mismo posee 2^n mínimos locales ubicados en los extremos de la caja B . Esta característica lo hace equivalente al problema cuadrático binario $\{0-1\}$ (Pardalos, 1990). Adicionalmente, se sabe que pueden existir diferencias significativas entre la calidad de los mínimos locales y el(los) mínimo(s) global(es).

Estas características hacen de [BQP] un problema bien difícil de resolver, que por su alta

complejidad computacional se ha demostrado pertenecer a la clase de problemas **NP-Duros** (Vavasis, 1995). En este caso resulta evidente la imposibilidad de aplicar de forma directa los procedimientos de la programación convexa para resolver (1.3.1). Todo ello ha motivado la aparición y desarrollo de numerosas técnicas de optimización especialmente diseñadas para la solución de este problema, a lo cual estará dedicado el epígrafe (1.6). Pero antes de esto, resulta útil la revisión de un conjunto de criterios de optimalidad específicos para este problema, los cuales constituyen la base de la mayoría de los métodos de solución desarrollados.

1.4. Criterios de optimalidad para el problema BQP

En este epígrafe se resume una selección de los resultados teóricos más importantes relacionados con la caracterización del conjunto de posibles soluciones del problema (1.3.1). Una primera alternativa para lograr este objetivo consiste en describir los posibles mínimos locales mediante las conocidas condiciones necesarias de optimalidad de primero y segundo orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que para el problema [BQP] en particular adquieren la siguiente forma (Vandenbussche & Nemhauser, 2005a).

Lema 1.4.1. *(Condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT1))*
Si $x \in B$ es un mínimo local de [BQP], entonces existen vectores $y, z \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$Qx + q + y - z = 0, \quad (\text{Estacionalidad}) \quad (1.4.1)$$

$$0 \leq x \leq e, \quad y, z \geq 0 \quad (\text{Factibilidad}) \quad (1.4.2)$$

$$y \circ (e - x) = 0, \quad z \circ x = 0, \quad (\text{Complementariedad}) \quad (1.4.3)$$

– donde $y, z \in \mathbb{R}^n$ son los multiplicadores de Lagrange relativos a las restricciones ($x \leq e$) y ($x \geq 0$) respectivamente, y la multiplicación [$z \circ x$] y [$y \circ (e - x)$] se refiere al producto de Hadamard de dichos vectores.

Como es tradicional, a las soluciones $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{3n}$ del sistema anterior se les conoce como puntos-KKT.

En particular, vale significar que cuando para algún índice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene ($x_i^* = 0$

y $z_i^* = 0$) ó ($x_i^* = 1$ e $y_i^* = 0$), entonces se dice que la solución (x^*, y^*, z^*) es degenerada. En caso contrario se le llama solución no degenerada.

Lema 1.4.2. (*Condiciones necesarias de segundo orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT2)*)
Si $x^* \in B$ es un mínimo local de [BQP], entonces existen vectores $y, z \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen (1.4.1-1.4.3) y la matriz Q es semidefinida positiva sobre el plano tangencial a B en x^* , que en este caso resulta $T_{x^*}B = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = 0, \text{ si } x_i^* \in \{0; 1\}\}$.

$$\text{Esto es : } \quad x^T Q x \geq 0 \quad \forall x \in T_{x^*}B \quad (1.4.4)$$

Lema 1.4.3. (*Condición suficiente de segundo orden de Karush-Kuhn-Tucker*)
Si (x^*, y^*, z^*) es una solución no-degenerada del sistema (1.4.1-1.4.3) que satisface

$$x^T Q x > 0 \quad \forall x \in T_{x^*}B \quad (1.4.5)$$

Entonces el punto x^* es un mínimo local de [BQP]. (Nocedal & Wright, 1999)

Tomando en cuenta las condiciones KKT de primer orden y el signo de las derivadas puras de primer y segundo orden de la función objetivo en el problema (1.3.1), en (Hansen, Jourmard, Ruiz, & Xiong, 1991) se formulan y demuestran los siguientes resultados.

Teorema 1.4.4. (*Hansen et al., 1991*): Si x^* es un mínimo local de (1.3.1), entonces se cumple:

(a) Para todo i con $Q_{ii} < 0$,

$Q_{i*}x^* + q_i > 0$ y $x_i^* = 0$, ó

$Q_{i*}x^* + q_i < 0$ y $x_i^* = 1$

(b) Para todo i con $Q_{ii} \geq 0$

$Q_{i*}x^* + q_i > 0$ y $x_i^* = 0$, ó

$Q_{i*}x^* + q_i = 0$ y $0 \leq x_i^* \leq 1$, ó

$Q_{i*}x^* + q_i < 0$ y $x_i^* = 1$

Si x^* corresponde a una solución no degenerada, entonces las condiciones del teorema resultan también suficientes para un mínimo local de (1.3.1). En caso contrario, determinar si x^* es un extremo local es un problema **NP-Duro** (Murty & Kabadi, 1987).

El teorema anterior ha sido ampliamente utilizado en la generación de estrategias de

conjuntos activos en muchos de los algoritmos diseñados para la solución del problema [BQP] (Hansen *et al.*, 1991; Vandembussche & Nemhauser, 2005b; Burer & Vandembussche, 2008a; Burer & Chen, 2011; Chen & Burer, 2012).

Como bien se puede observar, los criterios anteriores están dirigidos a la caracterización del conjunto de puntos estacionarios y/o mínimos locales del problema (1.3.1), sin embargo, existen muy pocos resultados relacionados con la caracterización de sus mínimos globales. En este sentido, resulta interesante el siguiente teorema, que debido a Murty (Murty, 1988), muestra la relación existente entre [BQP] y cierto modelo de programación lineal.

Teorema 1.4.5. (*Murty, 1988*): *Si x^* es una solución óptima de (1.3.1), entonces x^* también es una solución óptima del problema de programación lineal definido por*

$$\min\{(Qx^* + q)^T x \mid 0 \leq x \leq e\} \quad (1.4.6)$$

Dada la implicación implícita en el teorema, el mismo pudiera ser útil para probar el carácter no global de las soluciones calculadas.

En los dos teoremas que siguen se presentan criterios adicionales para la comprobación del carácter global de las soluciones de [BQP].

Teorema 1.4.6. (*deAngelis, Pardalos, & Toraldo, 1997*): *Sea \bar{x} un punto KKT de [BQP], y D una matriz diagonal definida por $D = \text{diag}\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right)$. Si la función $\rho(x) = f(x) + (x - \bar{x})^T D(x - \bar{x})$ es (estrictamente) convexa, entonces \bar{x} es un (el único) mínimo global de [BQP].*

Para el enunciado del segundo resultado se supone conocido un mínimo local no degenerado x^* de [BQP]. Sean además (y^*) e (z^*) los multiplicadores de Lagrange correspondientes según (1.4.1-1.4.3), y definamos $v^* = y^* - z^*$.

Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $x_j^* \in \{0; 1\}$ ($j=1, \dots, m$) y que $0 < x_j^* < 1$ ($j=m+1, \dots, n$), entonces la matriz Q se puede expresar como $Q = \begin{pmatrix} Q_A & Q_B \\ Q_B^T & Q_C \end{pmatrix}$, con $Q_A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q_B \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ y $Q_C \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$.

Definiendo finalmente las matrices $F = Q_A - Q_B Q_C^{-1} Q_B^T$, y $H = \alpha I_m$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ elegido de tal forma que $(F + H) \succeq 0$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.4.7. (Neumaier, 1996): Sea $a_j = \frac{H_{jj}}{2(v^*)_j}$, entonces:

$$(Qx^* + q)^T(x - x^*) \geq 0 \quad y \quad f(x) - f(x^*) \geq (Qx^* + q)^T(x - x^*)(1 - \sum_{j=1}^m a_j(x_j - x_j^*)).$$

Adicionalmente se demuestra que:

Si $\alpha = \sum_{j=1}^m |a_j| \leq 1$, entonces x^* es un mínimo global de [BQP].

Si $\alpha = \sum_{j=1}^m |a_j| < 1$, entonces x^* es el único mínimo global de [BQP].

En la revisión bibliográfica realizada no se encuentran referencias sobre la utilidad que pueden brindar estos resultados. En el capítulo-4 de este trabajo se valora la utilización de estos criterios para comprobar el carácter global de las soluciones calculadas.

Por otra parte, resulta muy interesante reflexionar sobre el resultado presentado por (Hager, Pardalos, Roussos, & Sahinoglou, 1991) que considera la relación existente entre el número de valores propios negativos de Q y la cardinalidad del conjunto de restricciones activas en los puntos de mínimo local x^* para el problema (1.3.1).

Teorema 1.4.8. (Hager et al., 1991): Si la matriz Q tiene s -valores propios negativos ($QI = s$), entonces en cualquier mínimo local x^* de (1.3.1) se tienen al menos s -restricciones activas

Como consecuencia directa de este teorema se tiene que toda solución óptima de un problema cóncavo es necesariamente un extremo de la caja B . Asimismo, se tiene que todo problema indefinido tiene al menos una solución en la frontera de B . Finalmente, si existe una solución óptima en el interior de una cara de la caja B , entonces Q tiene exactamente un valor propio negativo.

Existen otros criterios (Floudas & Visweswaran, 1995; deAngelis et al., 1997) relacionados con la optimalidad de las soluciones de [BQP] y del problema cuadrático general (1.1.1), cuya utilidad práctica está aún por demostrar.

1.5. Formulaciones equivalentes

La experiencia investigativa acumulada demuestra que en muchas ocasiones resulta conveniente trabajar con formulaciones equivalentes, en lugar del problema original. En relación con el problema [BQP], las formulaciones equivalentes más ampliamente

utilizadas están estrechamente relacionadas con la programación semidefinida positiva y las condiciones de optimalidad de primer orden de Karush-Kuhn- Tucker.

Dado que toda solución del problema (1.3.1) cumple necesariamente las condiciones KKT de primer orden (1.4.1 -1.4.3), una reformulación lógica de este puede lograrse insertando dichas condiciones en el problema. Utilizando además la relación $\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x = \frac{1}{2}(q^T x - e^T y)$, válida para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3n}$ que satisface tales condiciones (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b), se puede llegar a la siguiente formulación equivalente.

$$[BQP - KKT] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}(q^T x - e^T y) \mid x \in \bar{B} \right\} \quad (1.5.1)$$

$$\bar{B} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq e, \quad y, z \geq 0 \\ Qx + q + y - z = 0, \\ y \circ (e - x) = 0, \quad z \circ x = 0, \end{array} \right\} \quad (1.5.2)$$

A diferencia del problema [BQP] original, esta reformulación tiene función objetivo lineal, pero su región factible es no convexa. La no convexidad de \bar{B} está relacionada con las restricciones cuadráticas de complementariedad. Obsérvese que en (1.5.1-1.5.2) se triplica el número de variables y se requieren $7n$ -restricciones para definir al conjunto factible.

Otra vía para reformular el problema (1.3.1) es la sugerida por Padberg (Padberg, 1989). La misma consiste en linealizar las componentes cuadráticas de $f(x)$ con ayuda del cambio de variables $x_{ij} = x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Dado que $\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n q_i x_i$, el siguiente problema

$$[BQP - Padberg] \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_{ii} x_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Q_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n q_i x_i \mid x \in \hat{B} \right\} \quad (1.5.3)$$

$$\hat{B} = \{x \in \mathbb{R}^{n+n \times n} \mid 0 \leq x_j \leq 1, \quad x_{ij} = x_i x_j, \quad (1 \leq i, j \leq n)\} \quad (1.5.4)$$

es equivalente a [BQP]. Como en el caso anterior, aquí se logra linealizar la función objetivo $f(x)$ a costa de trasladar la no convexidad del problema a la región factible resultante \hat{B} e incrementar en $\frac{n(n+1)}{2}$ el número de variables y el número de restricciones. Dado que la relación $x_{ij} = x_i x_j$ puede escribirse en forma matricial como $X = xx^T$, la reformulación (1.5.3-1.5.4) puede también reescribirse en forma matricial como:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} Q \bullet X + q^T x \mid (x, X) \in \widehat{BP} \right\} \quad (1.5.5)$$

$$\widehat{BP} = \left\{ (x, X) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)} \mid 0 \leq x \leq e, \quad X = xx^T, \right\} \quad (1.5.6)$$

En (Burer & Vandembussche, 2008a) se combinan los modelos (1.5.1-1.5.2) y (1.5.5-1.5.6) para obtener una nueva formulación equivalente del problema [BQP].

$$[BQP - BurVan] \quad \min \left\{ \frac{1}{2} Q \bullet X + q^T x \mid (x, y, z, X) \in \widehat{B} \right\} \quad (1.5.7)$$

$$\widehat{B} = \left\{ (x, y, z, X) \in \mathbb{R}^{n \times (n+3)} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq e, \quad X = xx^T, \\ Qx + q + y - z = 0, \quad y, z \geq 0, \\ \frac{1}{2} Q \bullet X + q^T x = \frac{1}{2} (q^T x - e^T y) \\ y \circ (e - x) = 0, \quad z \circ x = 0 \end{array} \right\} \quad (1.5.8)$$

Este modelo, aunque posee un incremento sensible en el número de variables y restricciones (incluyendo no linealidades importantes como $X = xx^T$, $y \circ (e - x) = 0$ y $z \circ x = 0$), ha sido muy usado en los últimos años motivado principalmente por el vínculo que posee con la programación semidefinida positiva y por las facilidades que ofrece para la aplicación de los métodos de ramificación y acotación.

Por último, en (Burer, 2009) se demuestra la equivalencia del siguiente problema de programación completamente positiva

$$[BQP - BurChen] \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}^T \\ \tilde{q} & \tilde{Q} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix} \mid (\tilde{x}, \tilde{X}) \in \tilde{B} \right\} \quad (1.5.9)$$

$$\tilde{B} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{X}) \in \mathbb{R}^{4n+2n \times (4n+1)} \mid \begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \text{diag}(\tilde{A}\tilde{X}\tilde{A}^T) = \tilde{b}^2, \\ \tilde{X}_{\tilde{E}} = 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^{1+4n} \end{array} \right\} \quad (1.5.10)$$

con el problema cuadrático

$$\min \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x \mid \begin{array}{l} Qx + y - z = -q, \\ x + s = e, \quad x, z, y, s \geq 0 \\ x \circ z = 0, \quad z \circ y = 0, \quad y \circ s = 0 \end{array} \right\} \quad (1.5.11)$$

que se obtiene adicionando variables de holgura en las restricciones ($x \leq e$) en (1.5.1), donde \mathcal{P}^{1+4n} es el cono de las matrices completamente positivas de dimensión $(1+4n)$, y E el conjunto índice en el que se satisfacen las restricciones de complementariedad.

La equivalencia, según Burer (Burer, 2009), del modelo (1.5.11) con (1.5.9-1.5.10) se

$$\text{completa definiendo en este último, } \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ s \end{pmatrix} \in R^{4n}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S^{4n \times 4n},$$

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{4n}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} Q & -I & I & 0 \\ I & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \in R^{2n \times 4n}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} -q \\ e \end{pmatrix} \in R^{2n},$$

$$\tilde{E} = \{(i, n+i) : i = 1, \dots, 3n\}.$$

La importancia de disponer de todas estas formulaciones equivalentes radica en que de la solución de una de ellas, siempre es posible extraer la solución óptima del problema original [BQP], lo cual se aprovecha para formular diferentes métodos de solución como se verá en el epígrafe que sigue.

1.6. Métodos empleados para resolver problemas cuadráticos no convexo con restricciones de caja

Como se ha visto ya, el problema cuadrático no convexo con restricciones de caja es uno de los problemas **NP-duros** de formulación más simple dentro de la programación no lineal, y en consecuencia ha recibido la atención de numerosos investigadores. Dada la imposibilidad de encontrar un algoritmo determinístico que resuelva este tipo de problemas en tiempo polinomial, un objetivo más práctico en la optimización global consiste en desarrollar métodos eficientes que permitan determinar una solución ε -aproximada para $f_{minglob}$. Con este objetivo práctico en mente, en este epígrafe se procede a una revisión crítica de los principales enfoques propuestos para la resolución del problema [BQP].

Muchos de los métodos de solución desarrollados para resolver problemas de programación cuadrática son implementaciones de técnicas no lineales como los métodos de punto interior y los métodos de conjuntos activos. Estos procedimientos se basan en el cálculo de

puntos estacionarios que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad tipo Karush-Kuhn-Tucker, y resultan muy buenos para la determinación de mínimos locales, pero no garantizan la convergencia al óptimo global. Gould y Toint (Gould & Toint, 2002) presentan una excelente colección de tales métodos, y la función *quadprog.m* disponible entre las herramientas de optimización de Matlab (MathWorks, 2013) contiene una muy buena implementación de estos. Otros enfoques también ensayados resultan el método de barrera Dang-Xu (Dang & Xu, 2000) y el método de planos cortantes sugerido por Yajima-Fujie (Yajima & Fujie, 1998). El primero de ellos consiste en la continuación de trayectorias descritas por el parámetro de barrera, que decrece desde valores suficientemente grandes que garantizan la convexidad de la función barrera. Sin embargo, los autores del trabajo sólo pueden demostrar la convergencia del método a un mínimo local. En el segundo caso, los autores se centran en la resolución de la formulación equivalente (1.5.3-1.5.4) propuesta por Padberg (Padberg, 1989). Pero, como la envoltura convexa de \widehat{B} no es un poliedro, no se puede garantizar que la adición de un número finito de inecuaciones produzca una solución factible para [BQP].

Los métodos exactos de búsqueda global más ampliamente utilizados emplean mecanismos típicos de los procedimientos de ramificación y acotación. Así, por ejemplo, Hansen et al. (Hansen *et al.*, 1991) proponen un algoritmo de ramificación tricotómica, basada en las condiciones necesarias de optimalidad del teorema-1.4.4. La introducción de tales condiciones permite restringir el conjunto factible de cada nuevo subproblema, después de lo cual se utiliza una aritmética de intervalos en el cálculo de cotas inferiores para $f(x)$. La limitación fundamental de este algoritmo radica en la imposibilidad de resolver cada subproblema como un problema de programación lineal.

Un aporte decisivo para el desarrollo de estos métodos lo constituyen los trabajos de Vandebussche y Nemhauser (Vandebussche & Nemhauser, 2005b, 2005a). Partiendo de la formulación (1.5.1-1.5.2), los autores proponen resolver el problema lineal que se obtiene relajando las restricciones cuadráticas de complementariedad, las cuales se van forzando luego de forma iterativa en un esquema de ramificación y acotación. La ventaja fundamental de esta propuesta radica en que el árbol generado por el método de ramificación y acotación resulta finito. En el trabajo se propone la introducción de ciertas

inecuaciones lineales adicionales válidas que inciden favorablemente en la eficiencia del método.

Una mejora significativa de este último resultado fue propuesta luego por Burer y Vandenbussche (Burer & Vandenbussche, 2008a). En este trabajo se utiliza, en lugar del modelo (1.5.1-1.5.2), la formulación equivalente (1.5.7-1.5.8). La novedad de la propuesta consiste en que para el cálculo de las cotas inferiores se introduce una relajación semidefinida positiva sobre la condición $X = xx^T$. El resto del procedimiento se mantiene igual, incluyendo la estrategia de ramificación basada en las condiciones KKT de complementariedad. Los resultados experimentales obtenidos por los autores superan de forma sustancial los alcanzados por Vandenbussche-Nemhauser.

En (Chen, 2010) se propone una variación del algoritmo de Burer-Vandenbussche con la incorporación de condiciones necesarias de segundo orden al modelo (1.5.7-1.5.8). Según el reporte, los experimentos realizados muestran una reducción en el número de nodos explorados, pero a costa de un incremento sensible en el tiempo de resolución.

Finalmente, Burer y Chen (Chen & Burer, 2012) han presentado un algoritmo, que emplea el mismo esquema finito de ramificación y acotación propuesto anteriormente, pero difiere de estos en que para el cálculo de las cotas inferiores, los autores utilizan una relajación doblemente no-negativa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{x}\tilde{x}^T \end{pmatrix}$ en la formulación equivalente (1.5.9-1.5.10). Los experimentos realizados muestran resultados superiores a todos los anteriormente descritos, motivo por el cual en dicho trabajo se concluye que este resultado es el estado actual del arte en el tema.

En este algoritmo, al igual que todos los que le anteceden, el procedimiento de ramificación y acotación se caracteriza por un tratamiento muy refinado para el cálculo de cotas inferiores. Pero aquí, al igual que en (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b) y (Burer & Vandenbussche, 2008a), se dedica muy poco esfuerzo al cálculo de las cotas superiores. En todos se utiliza como cota superior el valor de $f(x)$ en un mínimo local de la caja B . Por la importancia que tiene el enfoque de ramificación y acotación basado en las condiciones KKT de primer orden y relajación convexa, en el capítulo 3 se analizan las particularidades de estos procedimientos.

Un enfoque menos explorado para la solución del problema [BQP] consiste en la ejecución

sucesiva de los dos pasos que caracterizan a la estrategia global propuesta en (Gomez, Guddat, Jongen, Ruckmann, & Solano, 2000) :

Paso-1: Partiendo de una solución factible $x^0 \in B$ calcular un mínimo local x^* de [BQP].

Paso-2: Determinar una nueva solución factible $\bar{x} \in B$ con $f(\bar{x}) \leq f(x^*) - \varepsilon$, (con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño), y regresar al paso-1 tomando $x^0 = \bar{x}$. (Ver figura-1.1)

Como resultado de la ejecución efectiva de esta estrategia se genera una sucesión monótona decreciente de mínimos locales $\{x_k^*\}$, ($k=1,2,\dots$), con $f(x_k^*) \geq f(x_{k+1}^*)$, la cual proporciona cotas superiores de muy buena calidad para el valor $f_{minglob}$ del problema (1.3.1). En

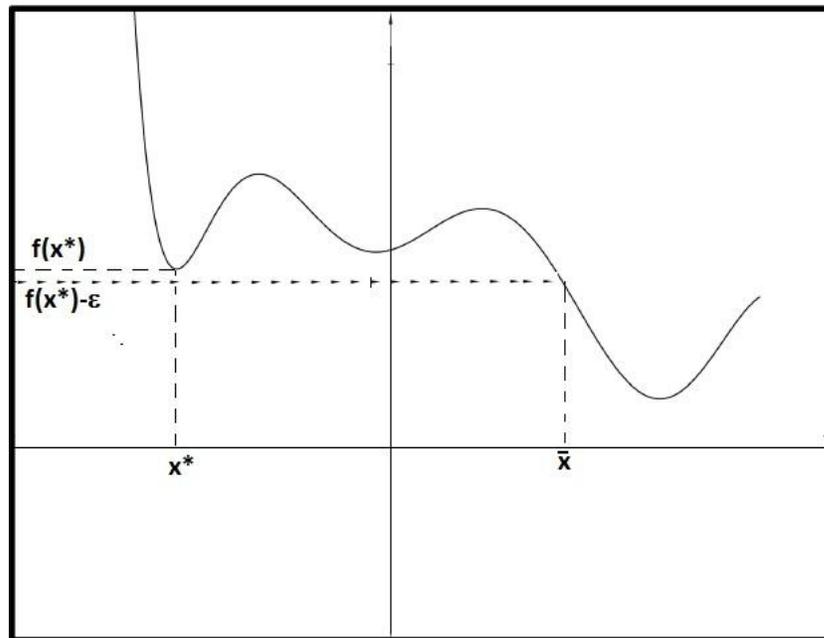


Figura 1.1: Ilustración gráfica de la estrategia global

el esquema anterior, la realización del paso-1 no ofrece complicación alguna, y puede resolverse aplicando un método de búsqueda local (Newton, Gradiente proyectado, etc) Sin embargo, debido a la no convexidad de la función cuadrática $f(x)$, encontrar una solución para la inecuación definida en el segundo paso resulta un problema bien complejo de resolver. Siguiendo aquí las ideas propuestas en (Gomez *et al.*, 2000), en este trabajo se propone buscar una solución de esta situación utilizando para ello un método de inmersión. Con este fin se debe construir una familia de problemas de optimización uniparamétricos

$P(t)$ ($t \in [0, 1]$), definidos de forma conveniente para que, de la solución de $P(t)$ en $t=1$, se pueda derivar una solución factible para el segundo paso de la estrategia global.

De esta forma, y siempre que el problema paramétrico construido tenga una estructura topológica adecuada, se espera que, partiendo de cierta solución $(x^{(0)}, t^{(0)})$ conocida de $P(t)$ para el parámetro $t^{(0)} = 0$ y utilizando un método de continuación de curvas (Allgower & Georg, 1990, 1992), se pueda alcanzar la solución deseada con $t=1$.

Este enfoque tiene dos limitaciones fundamentales que impiden su aplicación práctica directa. En primer lugar, la aplicación del método de continuación no garantiza la posibilidad de alcanzar la solución deseada para $t=1$. Adicionalmente, la estrategia global así definida no dispone de toda la información necesaria para identificar cuándo se alcanza un mínimo global del problema cuadrático original. En el capítulo 2 de este trabajo se analiza de forma detallada las particularidades de esta estrategia, para la cual se propone luego (en el tercer capítulo) una alternativa dirigida a superar las limitaciones señaladas.

1.7. Conclusiones parciales del capítulo

El desarrollo de este capítulo está dedicado a la formulación del problema y el análisis del estado actual de la teoría relacionada con los métodos de solución para el problema de programación cuadrática no convexa con restricciones de caja. Los resultados fundamentales que en él se alcanzan se resumen a continuación.

- La descripción de las características del problema a tratar y sus aplicaciones prácticas fundamentan la actualidad e importancia de la investigación.
- El análisis detallado de las formulaciones equivalentes al problema cuadrático con restricciones de caja es un resultado importante a tener en cuenta en la formulación de nuevas estrategias de solución para el problema cuadrático con restricciones de caja.
- La revisión del estado actual de la teoría relacionada con los métodos de solución del problema objeto de estudio constituye la fundamentación teórica para la formulación del algoritmo propuesto.

Capítulo 2

Método de corte y continuación

En este capítulo se estudia de forma detallada la estrategia de optimización global de dos pasos presentada al final del capítulo-1. En esencia, el segundo paso de esta estrategia equivale, para el caso bajo estudio, a resolver el siguiente problema de factibilidad

$$[Pfact] \text{ Determinar un } \bar{x} \in M, \quad \text{con} \quad (2.0.1)$$

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} g_j(x) = -x_j \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \\ g_{n+j}(x) = x_j - 1 \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \\ g_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0 \leq 0 \end{array} \right. \right. \quad (2.0.2)$$

donde $q_0 = f(x^*) - \varepsilon = \frac{1}{2}(x^*)^T Qx^* + q^T x^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y $x^* \in B$ es el mejor mínimo local de [BQP] calculado durante la ejecución del primer paso de la estrategia.

Obsérvese que, la última restricción del problema (2.0.1-2.0.2) introduce un corte cuadrático no convexo en la caja $[0, 1]^n$, que deja al mínimo local x^* fuera del conjunto factible M . Dado que la restricción cuadrática $g_{2n+1}(x)$ es no convexa, entonces M es también no convexo (pudiendo incluso ser no conexo), con lo cual el problema [Pfact] resulta igualmente no convexo, y en consecuencia bien complejo de resolver.

De todas formas, en (Gomez *et al.*, 2000) se propone buscar una solución de (2.0.1-2.0.2) por inmersión de este en un a familia de problemas de optimización uniparamétrica $P(t)$, y la determinación por métodos de continuación de una solución para el problema $P(t=1)$.

Para una mejor comprensión del texto que sigue, se sugiere a los lectores la revisión del Anexo-A de esta tesis, en el cual se presenta un pequeño resumen de los conceptos y definiciones más relevantes relacionados con la programación paramétrica.

Este capítulo continúa con la presentación de una propuesta concreta para la ejecución del enfoque descrito en la solución del problema cuadrático con restricciones de caja. De esta forma, en el epígrafe 2.1 se propone una inmersión específicamente diseñada para el problema (1.3.1) y se describen sus principales características. En el epígrafe 2.2 se demuestra la pertenencia del problema paramétrico así construido a la clase de problemas \mathcal{F} definida por Jongen, Jonker y Twilt. Estos resultados constituyen aportes de esta investigación y fueron publicados en la revista *Optimization* (Miranda, 2010). Finalmente, en el epígrafe (2.3) se analizan los aspectos más relevantes relacionados con la utilización de un método de continuación, y los procedimientos reportados para el tratamiento de las singularidades que aparecen durante su aplicación.

2.1. El problema paramétrico

Resulta evidente que si se encuentra una solución factible del siguiente problema auxiliar de optimización, se tiene entonces una solución para el problema (2.0.1-2.0.2) y con ello una solución para el segundo paso de la estrategia global presentada al final del primer capítulo.

$$[QPA] \min \left\{ f(x) = \frac{1}{2}(x - x^0)^T D(x - x^0) + d^T x \mid x \in M \right\} \quad (2.1.1)$$

donde $D \in S_+^n$, y $d, x^0 \in \mathbb{R}^n$ (con $0 \leq x^0 \leq e$).

Aquí, al igual que en el problema [Pfact], la no convexidad de la restricción cuadrática $g_{2n+1}(x)$ hace que el problema [QPA] sea tan complejo de resolver como el propio problema cuadrático original.

Siguiendo la idea propuesta por (Gomez *et al.*, 2000), y tomando en cuenta la estructura particular del conjunto M en el problema auxiliar (2.1.1), se propone la inmersión de [QPA] en la siguiente familia de problemas de optimización paramétrica, específicamente diseñada para este problema, que constituye uno de los aportes de este trabajo.

$$[P_R(t)] : \min \left\{ F(x, w, t) = \frac{1}{2}(x - x^0)^T D(x - x^0) + d^T x + \frac{1}{2}(w - w^0)^2 + cw \mid (x, w) \in M_R(t) \right\} \quad (2.1.2)$$

$$M_R(t) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{array}{l} G_j(x, w, t) = -x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ G_{n+j}(x, w, t) = x_j - 1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ G_{2n+1}(x, w, t) = t(\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0) + (1-t)(w - w^0) \leq 0 \\ G_{2n+2}(x, w, t) = -w \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.1.3)$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $w^0 \in \mathbb{R}_+$, y $0 \leq t \leq 1$.

Entre las características que distinguen a la inmersión $[P_R(t)]$ se cuentan:

- En el modelo (2.1.2-2.1.3) sólo se introduce una nueva variable adicional (w), lo cual representa una disminución importante en las dimensiones del problema paramétrico a tratar, en comparación con las inmersiones citadas en (Gomez *et al.*, 2000), en las que se precisa una nueva variable (w_j) por cada restricción (g_j) del problema [QPA].
- No es difícil comprobar que si se alcanza una solución $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ de $[P_R(t)]$ para la cual se satisface una de las condiciones $\bar{t} \geq 1$ o $\bar{w} \geq w^0$, entonces la componente (\bar{x}) una solución factible del problema auxiliar [QPA].
- Según la definición-A.1.3 del Anexo-A, los puntos críticos generalizados (en lo adelante p.c.g.) (x, w, t) del problema $P_R(t)$ se obtienen de la solución del sistema $\mathcal{H}^0(x, w, \mu, t) = 0$, con

$$\mathcal{H}^0(x, w, \mu, t) = \left[\begin{array}{l} \alpha_0(D[x - x^0] + d) - \sum_{j \in J_L(x, w, t)} \mu_j * e_j + \sum_{j \in J_U(x, w, t)} \mu_{n+j} * e_j + \mu_{2n+1}t(Qx + q) \\ \alpha_0(w - w^0 + c) + \mu_{2n+1}(1-t) - \eta_2 \mu_{2n+2} \\ -x_j \quad \forall j \in J_L(x, w, t) \\ x_j - 1 \quad \forall j \in J_U(x, w, t) \\ \eta_1 [t(\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0) + (1-t)(w - w^0)] \\ -\eta_2 w \end{array} \right] \quad (2.1.4)$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{R}^{2n+3}$ con $|\alpha_0| + \sum_{j \in J_0(x, w, t)} |\alpha_j| \neq 0$

– donde $J_0(x, w, t) = \{j \mid G_j(x, w, t) = 0\}$ es el conjunto de índices activos de $M_R(t)$, $J_L(x, w, t) = \{j \mid x_j = 0\}$ y $J_U(x, w, t) = \{j \mid x_j = 1\}$ los subconjuntos de índices activos correspondientes a las restricciones $x_j \geq 0$ y $x_j \leq 1$ respectivamente, y los coeficientes η_1 y η_2 quedan definidos por las expresiones:

$$\eta_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } G_{2n+1} \text{ es activa} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \begin{cases} 1, & \text{si } G_{2n+2} \text{ es activa} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Al conjunto de todos los puntos críticos generalizados de $[P_R(t)]$ se le denotará por Σ_{pcg} .

- El punto $(x^0, w^0, 0)$ es una solución factible inicial del problema $[P_R(t)]$.

Si, adicionalmente, x^0 es un punto interior de la caja B ($0 < x^0 < e$), entonces G_{2n+1} es la única restricción activa del problema paramétrico (2.1.2-2.1.3) en el punto $(x^0, w^0, 0)$.

Utilizando ahora un método de continuación adecuado, se pretende determinar una curva solución de $[P_R(t)]$ que conecte a la solución inicial conocida (x^0, w^0) cuando $t = 0$ con una solución $(x(t), w(t))$ que cumpla $t \geq 1$ (ó $w(t) > w^0$), con lo cual se tiene en $x(t)$ una solución factible para el paso-2 de la estrategia de corte y continuación.

La ejecución de un método de continuación sobre el problema paramétrico presupone la solución del sistema de puntos críticos $\mathcal{H}^0(x, w, \mu, t) = 0$.

Una hipótesis básica para el correcto funcionamiento de los métodos de continuación es que la matriz Jacobiana $A = D_{(x,w,\mu)} \mathcal{H}$ del sistema (2.1.4) sea no singular, donde

$$A = \begin{pmatrix} D + \eta_1 t \mu_{2n+1} Q & 0_{n \times 1} & E_{\{J_B(x,w,t)\}} & t(Qx + q) & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times |J_B|} & (1-t) & -\eta_2 \\ E_{\{J_B(x,w,t)\}}^T & 0_{|J_B| \times 1} & 0_{|J_B| \times |J_B|} & 0 & 0 \\ t(Qx + q)^T & (1-t) & 0_{1 \times |J_B|} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times n} & -\eta_2 & 0_{1 \times |J_B|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

Los p.c.g. (ceros de 2.1.4) que, junto con la condición de no singularidad del A , satisfacen $\mu_j \neq 0 \forall j \in J_0(x, w, t)$, y para los cuales la matriz Jacobiana (2.1.6) es de rango completo.

$$\frac{\partial G_{J_0(x,w,t)}(x, w, t)}{\partial(x, w)} = \begin{pmatrix} E_{J_B(x,w,t)}^T & 0 \\ t(Qx + q)^T & 1-t \\ 0_{1 \times n} & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

se llaman puntos críticos no degenerados (ver definición-A.1.5 del Anexo-A) o puntos críticos generalizados de tipo-1 (definición-A.2.1 del Anexo-A). Al conjunto de todos los p.c.g. de tipo-1 se le denotará por $\Sigma_{pcg}^{(1)}$.

Las soluciones de $\mathcal{H}(x, w, \mu, t) = 0$ para los cuales $\det(A) = 0$ son degeneraciones básicas (singularidades) de los p.c.g. tipo-1. En (Jongen, Jonker, & Twilt, 1986) se estudia la estructura local de las singularidades en la programación paramétrica y se define la clase \mathcal{F} de problemas, para los cuales sólo pueden aparecer 4 tipos de singularidades (ver Anexo-A). A los problemas paramétricos que pertenecen a la clase \mathcal{F} se les llama JJT-regulares.

Partiendo de las definiciones A.2.2 - A.2.5 del Anexo-A, los puntos críticos generalizados de tipo-2, 3, 4, y 5 se pueden identificar porque:

En los p.c.g. tipo-2 $\exists!k \in J_0(x, w, t)$ con $\mu_k = 0$, y $\mu_j \neq 0 \forall j \in J_0(x, w, t)$ con $j \neq k$.

En los p.c.g. tipo-3 se anula exactamente un valor propio de la matriz

$$D_{(x,w)}^2 L(x, w, \mu, t)|_{T_{(x,w)}M(t)}.$$

En los p.c.g. tipo-4 no se satisface la condición de regularidad de independencia lineal (LICQ), definición-A.1.1 y $|J_0(x, w, t)| \leq n + 1$.

En los p.c.g. tipo-5 se viola la LICQ y $|J_0(x, w, t)| = n + 2$.

La ocurrencia de un **p.c.g. tipo-2** de $P_R(t)$ se puede detectar controlando el conjunto $J_0(x, w, t)$ y el signo de los coeficientes $\mu_j \in J_0(x, w, t)$, pues estos están asociados a la activación de una nueva restricción o al cambio de signo de un multiplicador de Lagrange asociado a una de las restricciones activas.

Para detectar un **p.c.g. tipo-3** de $P_R(t)$ se debe controlar la matriz $D_x^2 L(x, w, \mu, t)|_{T_{(x,w)}M(t)}$, donde

$$\begin{aligned} L(x, w, \mu, t) = & \frac{1}{2}(x - x^0)^T D(x - x^0) + d^T x + \frac{1}{2}(w - w^0)^2 + cw - \sum_{j \in J_L(x, w, t)} \mu_j x_j + \dots \\ & + \sum_{j \in J_U(x, w, t)} \mu_j (x_j - 1) + \eta_1 \mu_{2n+1} \left(t \left(\frac{1}{2} x^T Q x + q^T x - q_0 \right) + (1 - t)(w - w^0) \right) - \eta_2 \mu_{2n+2} w \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

es la función de Lagrange asociada al problema $P_R(t)$

$$D_{(x,w)}^2 L(x, w, \mu, t) = \begin{pmatrix} D + \eta_1 t \mu_{2n+1} Q & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

es la matriz Hessiana correspondiente a $L(x, w, \mu, t)$, y

$$T_{(x,w)}M_R(t) = \left\{ \begin{array}{l} \xi_j = 0, \quad si \quad j \in J_B(x, w, t) \\ \xi_{n+1} = 0, \quad si \quad \eta_{2n+2} = 1 \\ \sum_{j \notin J_B(x, w, t)} \xi_j (Q_{j*} x + q_j) + \xi_{n+1} (1 - t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

es el plano tangencial a $M_R(t)$ en el punto (x, w) .

En el caso de los **p.c.g. tipo-4** (x, w, t) de $P_R(t)$, estos sólo pueden ocurrir cuando $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $|J_B(x, w, t)| < n$ y $Q_{j*} x + q_j = 0 \forall j \notin J_B(x, w, t)$, mientras que los **p.c.g. tipo-5** sólo pueden encontrarse en los puntos extremos de la caja B , con $w=0$ y $t = \frac{w^0}{\frac{1}{2} x^T Q x + q^T x - q_0 + w^0}$.

En (Jongen *et al.*, 1986) se prueba que la clase \mathcal{F} es abierta y densa en la topología fuerte

de Whitney, pero esta propiedad no se hereda a problemas particulares, como por ejemplo $P_R(t)$. Esto justifica la necesidad de probar que la familia de problemas uni-paramétricos (2.1.2-2.1.3) pertenece a la clase \mathcal{F} .

2.2. Teorema de genericidad y perturbación

En este epígrafe se prueba la pertenencia del problema $[P_R(t)]$ a la clase \mathcal{F} definida por Jongen, Jonker y Twilt (Jongen *et al.*, 1986), con lo cual se garantiza que el mismo posee una estructura topológica adecuada para la aplicación sobre él de un método de continuación. Pero antes de pasar al enunciado y demostración de este resultado, es preciso probar un conjunto de resultados preliminares, que serán utilizados en la demostración.

2.2.1. Resultados preliminares

Para facilitar la presentación de los resultados que siguen es conveniente identificar a las funciones $f(x)$ y $g_{2n+1}(x)$ que intervienen en el problema auxiliar (2.1.1) con el vector de coeficientes que define a cada una de ellas. En lo adelante $\Upsilon(f) = (D, d) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n \times (n+1) + n}$ será el vector que identifica a los coeficientes de la función objetivo $f(x) = \frac{1}{2}(x - x^0)^T D(x - x^0) + d^T x$, mientras que $\Upsilon(g_{2n+1}) = (Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n \times (n+1) + n + 1}$ identificará a la restricción $g_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0$.

De esta forma el problema (2.1.1) se puede identificar con el vector de coeficientes $\Upsilon = (D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, y en consecuencia la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^{\hat{n}} \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{2n+3})$ definida en (2.2.1), representa de modo natural la inmersión del problema (2.1.1) en la familia de problemas de optimización paramétricos (2.1.2-2.1.3), donde $\hat{n} = n \times (n + 1) + 2n + 1$.

$$\Phi(\Upsilon) = \begin{pmatrix} f(x) + \frac{1}{2}(w - w^0)^2 + cw \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_{2n}(x) \\ tg_{2n+1}(x) + (1 - t)(w - w^0) \\ -w \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

De ahí que la hipótesis $P_R(t) \in \mathcal{F}$, es equivalente a $\Phi(\Upsilon) \in \mathcal{F}$, lo cual se convierte en una hipótesis sobre los datos del problema $[QPA]$. O sea, se desea saber para qué juegos de parámetros (Υ) los problemas tipo $[P_R(t)]$ generados por Φ resultan JJT-regulares para

$t \in (0, 1)$. Por lo tanto, resulta razonable estudiar las propiedades del conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$. Pero antes de resolver esta interrogante, es necesario enunciar y demostrar un grupo de resultados sobre los cuales se sostiene la conclusión a que se arriba.

En lo que sigue, los problemas (2.1.1) y (2.1.2-2.1.3) se identificarán también como $P(\Upsilon)$ y $P(\Phi(\Upsilon))$ respectivamente.

Asimismo se utilizará $\Upsilon^k = (D^k, d^k, Q^k, q^k, q_0^k) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, $k = 1, 2, \dots$ para denotar a una sucesión de vectores que identifica a una sucesión de problemas $P[\Upsilon^k]$ de tipo (2.1.1), y $\bar{\Upsilon} = (\bar{D}, \bar{d}, \bar{Q}, \bar{q}, \bar{q}_0) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ al vector fijo que caracteriza al problema $P[\bar{\Upsilon}]$ del mismo tipo. Además se asumirá que $(x^k, w^k, t^k) \in \mathbb{R}^{n+2}$ es un punto crítico generalizado (p.c.g.) del problema $P[\Phi(\Upsilon^k)]$ y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ un p.c.g. de $P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$.

Lema 2.2.1. *Sean las sucesiones $\Upsilon^k = (D^k, d^k, Q^k, q^k, q_0^k) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ y $(x^k, w^k, t^k) \in \mathbb{R}^{n+2}$, definidas de forma tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\Upsilon^k\} = \bar{\Upsilon}$, y $\lim_{k \rightarrow \infty} \{(x^k, w^k, t^k)\} = (\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$.*

Entonces todas las funciones que integran el problema $P[\Phi(\Upsilon)^k]$ (y sus respectivas derivadas) convergen puntualmente a las correspondientes funciones que integran el problema $P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ (y a sus correspondientes derivadas)

$$D^r F^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow D^r \bar{F}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \quad , \quad r=0,1,2,\dots$$

$$D^r G_j^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow D^r \bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \quad , \quad r=0,1,2,\dots$$

donde:

$$F^k(x) = \frac{1}{2}(x - x^0)^T D^k (x - x^0) + (d^k)^T x + \frac{1}{2}(w - w^0)^2 + cw,$$

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2}(x - x^0)^T \bar{D} (x - x^0) + \bar{d}^T x + \frac{1}{2}(w - w^0)^2 + cw,$$

$$G_{2n+1}^k(x, w, t) = t(\frac{1}{2}x^T Q^k x + (q^k)^T x - q_0^k) + (1-t)(w - w^0), y$$

$$\bar{G}_{2n+1}(x, w, t) = t(\frac{1}{2}x^T \bar{Q} x + \bar{q}^T x - \bar{q}_0) + (1-t)(w - w^0)$$

Para el resto de las restricciones ($j \neq 2n + 1$), $G_j^k(x, w, t) = \bar{G}_j(x, w, t)$

Demostración

Este resultado se sustenta en la continuidad de cada una de las funciones F y G_j , ($j = 1, \dots, 2n + 2$), las cuales son todas cuadráticas o lineales.

Lema 2.2.2. *Sean Υ^k , $\bar{\Upsilon}$, (x^k, w^k, t^k) y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ definidos como en el Lema anterior, siendo (x^k, w^k, t^k) solución factible de $P[\Phi(\Upsilon)^k]$ y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ solución factible de $P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ con $\Upsilon^k \rightarrow \bar{\Upsilon}$ y $(x^k, w^k, t^k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$.*

Entonces existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$, $J_0(x^k, w^k, t^k) \subseteq J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$

Demostración

Sea $k_0 > 0$ tal que $j \in J_0(x^k, w^k, t^k) \forall k > k_0$. Entonces $G_j^k(x^k, w^k, t^k) = 0 \forall k > k_0$.

Utilizando ahora el Lema-2.2.1 se tiene entonces que $G_j^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow \bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, de donde $\bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = 0$. De lo anterior se concluye que $j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, y en consecuencia, $J_0(x^k, w^k, t^k) \subseteq J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \forall k > k_0$. \square

Lema 2.2.3. Sean Υ^k , $\bar{\Upsilon}$, (x^k, w^k, t^k) y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ definidos como en el Lema-2.2.1.

Entonces existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ el cumplimiento de la LICQ en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ implica el cumplimiento de la LICQ en (x^k, w^k, t^k)

Demostración

Supóngase que se cumple la LICQ en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, y que existe un $k_0 > 0$, tal que $\forall k > k_0$ no se cumple la LICQ en (x^k, w^k, t^k) . En ese caso $\exists \alpha^k \in \mathbb{R}^{|J_0(x^k, w^k, t^k)|}$ con $\|\alpha^k\| > 0$ y $\sum_{j \in J_0(x^k, w^k, t^k)} \alpha_j^k D_{(x,w)} G_j^k(x^k, w^k, t^k) = 0$. Dado que $J_0(x^k, w^k, t^k) \subseteq J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ y por continuidad de las funciones G y de los coeficientes α^k , con $\alpha^k \rightarrow \bar{\alpha}$ se tiene entonces que $\sum_{j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})} \bar{\alpha}_j D_{(x,w)} \bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = 0$, con $\|\bar{\alpha}\| > 0$, a partir de lo cual se tiene la violación de la LICQ en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, lo que contradice la hipótesis. \square

Lema 2.2.4. Sean Υ^k , $\bar{\Upsilon}$, (x^k, w^k, t^k) y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ definidos como en el Lema-2.2.1. Sean además $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P[\Phi(\Upsilon)^k]$ y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg} P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$

Entonces existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ y $\forall j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ con $\bar{\mu}_j \neq 0$ se cumple $j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_j^k \neq 0$

Demostración

Sea $j_0 \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ con $\bar{\mu}_{j_0} \neq 0$, y supóngase que existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ $j_0 \notin J_0(x^k, w^k, t^k)$. Entonces $\forall k > k_0$ se tiene que $G_{j_0}^k(x^k, w^k, t^k) \neq 0$, y con esto $\mu_{j_0}^k = 0$. Pero por continuidad, $\mu_{j_0}^k \rightarrow \bar{\mu}_{j_0}$. Entonces $\bar{\mu}_{j_0} = 0$, lo cual contradice el supuesto de $\bar{\mu}_{j_0} \neq 0$. Luego $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k) \forall k > k_0$.

Asumiendo ahora que $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$, y supóngase que $\mu_{j_0}^k = 0 \forall k > k_0$. En ese caso por continuidad se tiene $\mu_{j_0}^k \rightarrow \bar{\mu}_{j_0}$, con lo cual $\bar{\mu}_{j_0} = 0$ que contradice la hipótesis de $\bar{\mu}_{j_0} \neq 0$. Luego $\exists k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ $\mu_{j_0}^k \neq 0$. \square

Observación: Para el caso en que $j_0 \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ con $\bar{\mu}_{j_0} = 0$ puede ocurrir una de las tres situaciones que siguen para el índice j_0 .

a).- $j_0 \notin J_0(x^k, w^k, t^k)$, $G_{j_0}^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow 0$ y $\mu_{j_0}^k = 0$

b).- $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k \neq 0$, con $\mu_{j_0}^k \rightarrow 0$

c).- $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k = 0$

Teorema 2.2.5. (Teorema de estabilidad local de los puntos críticos generalizados):

Sean Υ^k , $\bar{\Upsilon}$, (x^k, w^k, t^k) y $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ definidos como en el Lema-2.2.1.

Si $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$, entonces $\exists k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ se tiene también que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.

Si $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^\nu P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ con $(\nu = 2, 3, 4, 5)$, entonces $\exists k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ se cumple $(x^k, w^k, t^k) \in (\sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]) \cup (\sum_{pcg}^\nu P[\Phi(\Upsilon)^k])$

Demostración

La demostración de este teorema consiste en verificar las características que distinguen a cada tipo de punto crítico generalizado, según la definición de estos dada en el Anexo-A.

(1) Sea $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ (ver propiedades (1a), (1b) y (1c) en la definición-A.2.1 del Anexo-A). Entonces:

(1-i) Partiendo de la LICQ en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ (propiedad 1a) y aplicando entonces el Lema-2.2.3, se tiene la existencia de un $k_0 > 0$, tal que $\forall k > k_0$, $M^k(t^k)$ satisface la LICQ en (x^k, w^k, t^k) y con ello se cumple la propiedad (1a) para (x^k, w^k, t^k) .

(1-ii) Partiendo del cumplimiento de la propiedad (1b) en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ ($J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = J_{\neq}(\bar{\mu})$) y aplicando los Lemas-2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4, se tiene la existencia de un $k_0 > 0$, tal que $\forall k > k_0$ $J_0(x^k, w^k, t^k) = J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ y $\mu_j^k \neq 0 \forall j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, con lo cual se tiene (1b) para (x^k, w^k, t^k)

(1-iii) Sean \bar{L} y L^k las funciones de Lagrange correspondientes a los problemas $P(\Phi(\bar{\Upsilon}))$ y $P(\Phi(\Upsilon^k))$ respectivamente. A partir de (1c) en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ se tiene que $D_{(x,w)}^2 \bar{L}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{(\bar{x}, \bar{w})} M(\bar{t})}$ es no singular. El Lema-2.2.1 implica la existencia de un $k_0 > 0$, tal que $\forall k > k_0$, $D_{(x,w)}^2 L^k(x^k, w^k, \mu^k, t^k) \rightarrow D_{(x,w)}^2 \bar{L}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})$, así como $T_{(x^k, w^k)} M(t^k) \rightarrow T_{(\bar{x}, \bar{w})} M(\bar{t})$. Ahora por continuidad de los valores propios se tiene que $\forall k > k_0$ todos los valores propios de $D_{(x,w)}^2 L^k(x^k, w^k, \mu^k, t^k)|_{T_{(x^k, w^k)} M(t^k)}$ también son distintos de cero, y con ello se tiene (1c) para (x^k, w^k, t^k)

Como conclusión se tiene entonces que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.

(2) Sea $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^2 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ (ver propiedades (2a), (2b) y (2c) en la definición-A.2.2 del Anexo-A). Entonces:

(2-i) De $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P[\Phi(\Upsilon)^k]$ se sigue que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P_2^p[\Phi(\Upsilon)^k]$. Ahora de $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg} P_2^p[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ y por la estabilidad local de los p.c.g. no degenerados (p.c.g. tipo-1) se tiene (2a) para (x^k, w^k, t^k) .

(2-ii) De (2b) en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ se tiene que $\exists j_0 \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ tal que $\bar{\mu}_{j_0} = 0$, y $\bar{\mu}_j \neq 0 \forall j \neq j_0$. Lemas-2.2.2 y 2.2.4 implican que $j \in J_0(x^k, w^k, t^k) \setminus \{j_0\}$, y $\mu_j^k \neq 0 \forall j \neq j_0$.

A partir de las observaciones correspondientes al Lema-2.2.4 se sigue:

- a).**- Si $j_0 \notin J_0(x^k, w^k, t^k)$, con $G_{j_0}^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow 0$ y $\mu_{j_0}^k = 0$. Entonces $|J_0(x^k, w^k, t^k) \setminus J_{\neq}(x^k, w^k, t^k)| = 0$. De este resultado, junto con (2-i), se puede concluir que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.
- b).**- Si $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k \neq 0$, con $\mu_{j_0}^k \rightarrow 0$, entonces se tiene un caso igual al anterior, pues $|J_0(x^k, w^k, t^k) \setminus J_{\neq}(x^k, w^k, t^k)| = 0$. De aquí que utilizando (2-i) se puede concluir que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$
- c).**- Si $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k = 0$. En este caso $|J_0(x^k, w^k, t^k) \setminus J_{\neq}(x^k, w^k, t^k)| = 1$ y con ello se tiene (2b) para (x^k, w^k, t^k) . Esto es $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^2 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.

(2-iii) De (2-i) y (2-ii)(c) en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ se tiene que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P_2^{p-1}[\Phi(\Upsilon)^k]$. Ahora por la estabilidad local del los p.c.g. no degenerados (p.c.g. tipo-1) se tiene que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P_2^{p-1}[\Phi(\Upsilon)^k]$, y con esto (2c) para (x^k, w^k, t^k) .

En resumen se puede concluir que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k] \cup \sum_{pcg}^2 P[\Phi(\Upsilon)^k]$

(3) Sea $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^3 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$. (ver propiedades (3a) y (3b) en la definición-A.2.3 del Anexo-A). Entonces:

(3-i) Partiendo de (1-i) y (1-ii) se sigue (3a) para (x^k, w^k, t^k) .

(3-ii) De (3b) en $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ se sabe que se anula un solo valor propio de las matrices

$D_{(x,w)}^2 \mathbf{L}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{(\bar{x}, \bar{w})} M(\bar{t})}$ y $D_{(x,w,\mu)} \mathcal{G}_3(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})$, siendo

$$\mathcal{G}_3(x, w, \mu, t) = \begin{pmatrix} D_{(x,w)} L(x, w, \mu, t) \\ G_j(x, w, t), \quad j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \end{pmatrix}$$

De (3-i) se tiene la existencia de un $k_0 > 0$ con $J_0(x^k, w^k, t^k) = J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \forall k > k_0$.

Por continuidad de las funciones en \mathcal{G}_3 y de los multiplicadores de Lagrange $D_{(x,w,\mu)} \mathcal{G}_3(x^k, w^k, \mu^k, t^k) \rightarrow D_{(x,w,\mu)} \mathcal{G}_3(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})$, así como $D_{(x,w)}^2 L^k(x^k, w^k, \mu^k, t^k) \rightarrow D_{(x,w)}^2 \bar{L}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})$, sobre sus respectivos planos tangenciales.

Asumiendo que para los valores propios $\{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n+1}\}$ de $D_{(x,w)}^2 \bar{L}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{(\bar{x}, \bar{w})} M(\bar{t})}$ el único $j_0 \in \{1, \dots, n+1\}$ con $\bar{\beta}_{j_0} = 0$ y $\bar{\beta}_j \neq 0, \forall j \neq j_0$, se tiene entonces por continuidad de los valores propios $\{\beta_1^k, \dots, \beta_{n+1}^k\}$ de $D_{(x,w)}^2 L^k(x^k, w^k, \mu^k, t^k)|_{T_{(x^k, w^k)} M(t^k)}$ y $\{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n+1}\}$ que $\beta_j^k \neq 0 (\forall j \neq j_0)$.

En el caso del valor propio $\beta_{j_0}^k$ puede ocurrir uno de los dos casos siguientes:

- (*) $\beta_{j_0}^k \neq 0$ con $\beta_{j_0}^k \rightarrow 0$. En este caso se tiene $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$
- (**) $\beta_{j_0}^k = 0$, en cuyo caso se tiene (3b) para (x^k, w^k, t^k) .

Luego se cumple que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k] \cup \sum_{pcg}^3 P[\Phi(\Upsilon)^k]$

(4) Sea $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^4 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ (ver propiedades (4a), (4b) y (4c) en la definición-A.2.4 del Anexo-A). Entonces:

(4-i) Dado que $D_{(x,w)}\bar{F}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \notin \text{span}\{D_{(x,w)}\bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})\}$ se tiene $\bar{\alpha}_0 = 0$ en

$$\bar{\alpha}_0 D_{(x,w)}\bar{F}(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})} \bar{\alpha}_j D_{xw}\bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = 0 \quad (2.2.2)$$

Lemas-2.2.2, 2.2.4 y (4b) implican que $J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\alpha_j^k \neq 0 \quad \forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ en $\sum_{j \in J_0(x^k, w^k, t^k)} \alpha_j^k D_{xw}\bar{G}_j(x^k, w^k, t^k) = 0$. Luego si $p = |J_0(x^k, w^k, t^k)|$ vale $p \leq n + 1$.

Ahora de $\text{rang} \left[D_{(x,w)}\bar{G}_j(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \right] = p - 1$ se sigue que $\text{rang} \left[D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k), j \in J_0(x^k, w^k, t^k) \right] \in \{p - 1, p\}$.

En el primer caso, si $(\text{rang}[D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k), j \in J_0(x^k, w^k, t^k)] = p - 1)$ se completa entonces (4a) para (x^k, w^k, t^k) y como en ese caso $D_{(x,w)}F^k(x^k, w^k, t^k) \notin \text{span}\{D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k), j \in J_0(x^k, w^k, t^k)\}$ entonces $(\alpha_0)^k = 0$ en

$$\alpha_0^k D_{(x,w)}F^k(x^k, w^k, t^k) + \sum_{j \in J_0(x^k, w^k, t^k)} \alpha_j^k D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k) = 0 \quad (2.2.3)$$

En ese caso:

(4-ii) De $\alpha_j^k \neq 0 \quad \forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ se sigue (4b) para (x^k, w^k, t^k) en (2.2.3).

(4-iii) Según lema-2.2.4, de $\text{rang} \left[DG_j^k(x^k, w^k, t^k), (j \in J_0(x^k, w^k, t^k)) \right] = p - 1$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 0_{p+2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{(x,w)}^2 L_4(x^k, w^k, t^k) & D_{x,w}G_{J_0}^k(x^k, w^k, t^k) \\ D_{(x,w)}G_{J_0}^k(x^k, w^k, t^k) & 0 \\ D_{(t,x,w)}^2 L_4(x^k, w^k, t^k) & D_t G_{J_0}^k(x^k, w^k, t^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.2.4)$$

para $\alpha_1 = 0$ y $\|\alpha_2\| > 0$, con lo cual $(x^k, w^k, \alpha^k, t^k, 0)$ es un p.c.g. del problema $[P_4(t)]$ (ver problema (A.2.7) en Anexo-A), y con ello, por la estabilidad local de los p.c.g. no degenerados de $[P_4(t)]$ se cumple (4c) en (x^k, w^k, t^k) , y en consecuencia $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^4 P[\Phi(\Upsilon^k)]$.

En el segundo caso, ($\text{rang}[D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k), j \in J_0(x^k, w^k, t^k)] = p$): Si la siguiente matriz es no singular.

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} D_{(x,w)}^2 L_4(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{\alpha}_0) & D_{(x,w)} \bar{G}_1 & \cdots & D_{(x,w)} \bar{G}_{p-1} & D_{(x,w)} \bar{F} \\ (D_{(x,w)} \bar{G}_1)^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (D_{(x,w)} \bar{G}_{p-1})^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (D_{(x,w)} \bar{F})^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})} \quad (2.2.5)$$

Entonces existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$, la sucesión de matrices

$$U^k = \begin{pmatrix} D_{(x,w)}^2 L_4(x^k, w^k, \alpha^k, t^k, \alpha_0^k) & D_{(x,w)} G_1^k & \cdots & D_{(x,w)} G_{p-1}^k & D_{(x,w)} F^k \\ (D_{(x,w)} G_1^k)^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (D_{(x,w)} G_{p-1}^k)^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (D_{(x,w)} F^k)^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x^k, w^k, t^k)} \quad (2.2.6)$$

converge, por continuidad, a la matriz \bar{U} , y también son todas no singulares a partir de cierto $k_0 > 0$. De este resultado, y dado que $\text{rang}(D_{(x,w)}G_j^k(x^k, w^k, t^k), j \in J_0(x^k, w^k, t^k)) = p$ se tiene $\alpha_0^k \neq 0$ en (2.2.3), y se puede sustituir

$$D_{(x,w)} F^k(x^k, w^k, t^k) = \frac{1}{\alpha_0^k} \sum_{j \in J_0(x^k, w^k, t^k)} \alpha_j^k D_{(x,w)} G_j^k(x^k, w^k, t^k) \quad (2.2.7)$$

en la última fila y en la última columna de la secuencia de matrices. Aplicando ahora transformaciones elementales de filas y columnas en dicha secuencia se alcanza la matriz

$$\begin{pmatrix} D_{(x,w)}^2 L_4(x^k, w^k, \alpha^k, t^k, \alpha_0^k) & D_{(x,w)} G_1^k & \cdots & D_{(x,w)} G_p^k \\ (D_{(x,w)} G_1^k)^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_{(x,w)} G_p^k)^T & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(x^k, w^k, t^k)} \quad (2.2.8)$$

Ahora, por continuidad, existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$ las matrices tipo (2.2.8) son no singulares, resultando también que las matrices $D_{(x,w)}^2 L_4(x^k, w^k, \mu^k, t^k)$ son no singulares sobre sus respectivos espacios tangenciales.

De lo anterior, y tomando en cuenta la LICQ (rango=p) y $\alpha_j^k \neq 0$ ($\forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$), se puede concluir que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$

En resumen $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k] \cup \sum_{pcg}^4 P[\Phi(\Upsilon)^k]$

(5) Sea $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg}^5 P[\Phi(\bar{\Upsilon})]$ (ver propiedades (5a), (5b) y (5c) en la definición-A.2.1 del Anexo-A). Partiendo aquí del cumplimiento de (5c) para $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ se tiene la existencia de dos situaciones diferentes a analizar:

Primero: $\bar{\mu}_j \neq 0 \forall j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$. Por Lemas-2.2.2 y 2.2.4 se tiene entonces que $J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) = J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_j^k \neq 0 \forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$. Este resultado combinado con (5a) y (5b) para $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$, se tiene (5a), (5b) y (5c) para (x^k, w^k, t^k) y con ello $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^5 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.

Segundo: Existe un $j_0 \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ tal que $\bar{\mu}_{j_0} = 0$ mientras que $\bar{\mu}_j \neq 0 \forall j \in J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \setminus \{j_0\}$. Del Lema-2.2.4 se sigue que $J_0(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \setminus \{j_0\} \subseteq J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_j^k \neq 0, \forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k) \setminus \{j_0\}$

En el caso de $\mu_{j_0}^k$, y según observación del lema-2.2.4, puede ocurrir una de las siguientes alternativas:

- a).- $j_0 \notin J_0(x^k, w^k, t^k)$, $G_{j_0}^k(x^k, w^k, t^k) \rightarrow 0$ y $\mu_{j_0}^k = 0$. $\Rightarrow (x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$
- b).- $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k \neq 0$, con $\mu_{j_0}^k \rightarrow 0$. Entonces $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k]$
- c).- $j_0 \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ y $\mu_{j_0}^k = 0$. Entonces $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^5 P[\Phi(\Upsilon)^k]$

En resumen se puede concluir que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg}^1 P[\Phi(\Upsilon)^k] \cup \sum_{pcg}^5 P[\Phi(\Upsilon)^k]$.

Con esto se concluye la demostración del teorema de estabilidad local. \square

Los conceptos y resultados que a continuación se presentan son necesarios para el análisis que se realiza en el epígrafe que sigue. Para más detalles sobre esta teoría puede consultarse (Gomez *et al.*, 2000) y sus referencias.

Considérese las funciones $f_r, \bar{f}_{\bar{r}} \in C^k(U, \mathbb{R})$, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $k \geq 1$, $r = 1, 2, \dots, r^1$, $\bar{r} = 1, 2, \dots, r^2$ y los conjuntos F^1 y F^2 definidos por $F^1 = \{x \in U \mid f_r(x) = 0, r = 1, \dots, r^1\}$ y $F^2 = \{x \in U \mid \bar{f}_{\bar{r}}(x) = 0, \bar{r} = 1, \dots, r^1\}$, de forma tal que $\{Df_r(x), r = 1, \dots, r^1\}$ y $\{D\bar{f}_{\bar{r}}(x), \bar{r} = 1, \dots, r^1\}$ son linealmente independientes para cada $x \in F^1$ (resp. $x \in F^2$). Entonces F^1 y F^2 son C^1 -variedades de dimensiones $n - r^1$ (resp. $n - r^2$) y de codimensiones r^1 (resp. r^2). En lo adelante se usará la notación $\dim(F^1) = n - r^1$ y $\text{cod}(F^1) = r^1$.

Definición 2.2.1. Se dice que F^1 interseca transversalmente a F^2 si el conjunto $\{Df_r(x), r = 1, \dots, r^1, D\bar{f}_{\bar{r}}(x), \bar{r} = 1, \dots, r^1\}$ es linealmente independiente $\forall x \in F^1 \cap F^2$ (notación $F^1 \pitchfork F^2$).

Cuando $F^1 \pitchfork F^2$ entonces $F^1 \cap F^2$ es una C^1 -variedades de dimensión $n - r^1 - r^2$.

Teorema 2.2.6. *(Teorema parametrizado de Sard (Gomez et al., 2000))*

Sea $\phi \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}, \mathbb{R}^r)$, $k > \max\{0, n - r\}$, con $\Phi : (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \mapsto \Phi(x, z) \in \mathbb{R}^r$. Si $0_r \in \mathbb{R}^r$ es un valor regular de Φ ($\text{rang}(D\Phi(x, z)) = r$ para cada $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$ que satisfice $\Phi(x, z) = 0$), entonces para casi todo $\bar{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, 0_r es un valor regular de la función dada por $\Phi_{\bar{z}}(\cdot) = \Phi(\cdot, \bar{z})$.

Aquí y en lo adelante, la expresión *-para casi todo-* siempre hará referencia a la medida de Lebesgue del espacio correspondiente.

Lema 2.2.7. *(Gomez et al., 2000) La unión numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^n que poseen medida n -dimensional de Lebesgue nula tiene, igualmente medida nula.*

Lema 2.2.8. *(Gomez et al., 2000) Sea A una matriz de dimensión $n \times n$ con $\text{rang}(A) \geq 1$. Entonces $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = 0\}$ posee medida n -dimensional de Lebesgue nula.*

Una vez presentados todos estos resultados, se está en condiciones de pasar al enunciado y demostración del teorema de genericidad y perturbación.

2.2.2. Teorema de genericidad y perturbación

El objetivo central de este epígrafe es, precisamente, la demostración de que la familia de problemas uni-paramétricos (2.1.2-2.1.3) pertenece a la clase \mathcal{F} de Jongen-Jonker-Twilt. En el siguiente teorema se plantea el resultado que se necesita probar.

Teorema 2.2.9. *El conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$ es abierto y denso en $\mathbb{R}^{\hat{n}}$.*

La diferencia (aporte) fundamental entre este teorema y el resto de los resultados reportados anteriormente, reside en que el carácter de la inmersión no se asume (como es habitual) sobre un espacio de funciones, sino sobre $\mathbb{R}^{\hat{n}}$.

Demostración.

La demostración de este teorema se realizará en dos partes. Primero, se probará que $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$ es abierto, y luego su densidad.

Primera parte: el conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$ es abierto.

Para ello se debe demostrar que el conjunto de todos los vectores $(D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, para los que $\Phi(\Upsilon) \in \mathcal{F}|_{(0,1)}$, es abierto en $\mathbb{R}^{\hat{n}}$. Partiendo entonces del juego de datos

$\bar{\Upsilon} = (\bar{D}, \bar{d}, \bar{Q}, \bar{q}, \bar{q}_0)$, arbitrario pero fijo, y el problema $P(\bar{\Upsilon})$ con $P(\bar{\Upsilon}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$, se debe probar que para toda sucesión de datos $\Upsilon^k = (D^k, d^k, Q^k, q^k, q_0^k)$ con $\Upsilon^k \rightarrow \bar{\Upsilon}$ cuando $k \rightarrow \infty$, existe un $k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$, $P(\Upsilon^k) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$.

Supóngase que es posible construir una sucesión $\Upsilon^k \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, $k=1,2,\dots$, con $\Upsilon^k \rightarrow \bar{\Upsilon}$ cuando $k \rightarrow \infty$ con $P(\Upsilon^k) \notin \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$ para todo k .

En ese caso, existe una sucesión de puntos $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P(\Phi(\Upsilon^k))$ con $(x^k, w^k, t^k) \notin \bigcup_{v=1}^5 \sum_{pcg}^{(v)} P(\Phi(\Upsilon^k))$.

Ahora, como (x^k, w^k, t^k) pertenece a un conjunto compacto, es posible obtener una subsucesión convergente (S.p.d.g., sea esta $(x^k, w^k, t^k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$).

Empleando ahora el Lema-2.2.1 se tiene que para $(x^k, w^k, t^k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ y $\Upsilon^k \rightarrow \bar{\Upsilon}$, también $(F^k, G_j^k)(x^k, w^k, t^k) \rightarrow (\bar{F}, \bar{G}_j)(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$. Dado que $(x^k, w^k, t^k) \in \sum_{pcg} P(\Phi(\Upsilon^k))$ se sigue que $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \sum_{pcg} P(\Phi(\bar{\Upsilon}))$, y como $P(\bar{\Upsilon}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$, se llega a que $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \bigcup_{v=1}^5 \sum_{pcg}^{(v)} P(\Phi(\bar{\Upsilon}))$.

Utilizando ahora el teorema de estabilidad local de los puntos críticos generalizados, $\exists k_0 > 0$ tal que $\forall k > k_0$, $(x^k, w^k, t^k) \in \bigcup_{v=1}^5 \sum_{pcg}^{(v)} P(\Phi(\Upsilon^k))$, lo cual es una contradicción con el supuesto asumido en la hipótesis, y con esto se tiene que $\Phi^{-1}(\mathcal{F}|_{(0,1)})$ es abierto.

Esto es, si $\bar{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ con $P(\Phi(\bar{\Upsilon})) \in \mathcal{F}|_{(0,1)}$, entonces existe una vecindad $\bar{V} = V(\bar{\Upsilon})$ tal que para todo $\tilde{\Upsilon} \in \bar{V}$ se tiene que $P(\Phi(\tilde{\Upsilon})) \in \mathcal{F}|_{(0,1)}$. \square

Segunda Parte: $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$ es denso.

Ahora se tiene que probar que el conjunto de $\Upsilon = (D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, para los cuales el problema $P(\Phi(\Upsilon)) \in \mathcal{F}|_{(0,1)}$, es denso en $\mathbb{R}^{\hat{n}}$. Para ello hace falta probar un teorema de perturbación, como el enunciado en (Ruckmann & Tammer, 1992), en el cual se llega al resultado deseado con ayuda de perturbaciones con polinomios de grado 2.

En el caso específico del problema $[P_R(t)]$, dado que las funciones que lo definen son todas afines y/o cuadráticas, el mismo resultado se alcanza para casi todos los datos $\Upsilon = (D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ del problema [QPA].

Pero antes de pasar a la demostración se hace necesario precisar algunos elementos. Sea

$$\bar{M}_R(q, q_0, t) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} (x, w) \in M_R(t) \\ (x, w) \text{ no satisface la LICQ en } M_R(t) \end{array} \right. \right.$$

Como en (Ruckmann & Tammer, 1992), para la demostración del teorema de perturbación, resulta necesario probar el siguiente lema.

Lema 2.2.10. *Partiendo del cumplimiento de la LICQ sobre la caja B , entonces para casi todo vector $(q, q_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ se cumple:*

1. $\overline{M}_R(q, q_0, t)$ es una variedad cero dimensional en \mathbb{R}^{n+2}
2. $\forall (x, w) \in \overline{M}_R(q, q_0, t)$ se cumple que
 $\dim(\text{span}\{DG_j(x, w, t), j \in J_0(x, w, t)\}) = |J_B(x, w, t)| + 2$ y existen multiplicadores $\tilde{\mu}_j \neq 0 \ \forall j \in J_0(x, w, t)$ (únicos) tales que $\sum_{j \in J_0(x, w, t)} \tilde{\mu}_j D_{(x, w)} G_j(x, w, t) = 0$.

Demostración

Tomando en cuenta el análisis realizado en el epígrafe-2.1, la violación de la LICQ en $\overline{M}(q, q_0, t)$ implica que G_{2n+1} y G_{2n+2} tienen que ser activas (ver matriz Jacobiana 2.1.6). De igual forma $\tilde{\mu}_{2n+1} \neq 0$ y $\tilde{\mu}_{2n+2} \neq 0$, y $(Qx + q)^T \in \text{span}\{E_{\{J_B(x, w, t)\}}\}$, y con ello $\tilde{\mu}_j \neq 0 \ \forall j \in \tilde{J}_B(x, w, t) = \{j \in J_B(x, w, t) \mid Q_{j*}x + q_j \neq 0\}$.

Sea $\psi_2 : \mathbb{R}^{\tilde{n}+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{\tilde{n}+1}$, ($\tilde{n} = n + 2 + |J_B(x, w, t)|$), la aplicación definida por

$$\psi_2(x, w, t, \mu, q, q_0) = \begin{bmatrix} D_x \tilde{L}(x, w, t, \mu, q, q_0) \\ D_w \tilde{L}(x, w, t, \mu, q, q_0) \\ G_j(x, w, t), \quad j \in J_B(x, w, t) \\ G_{2n+1}(x, w, t) \\ G_{2n+2}(x, w, t) \end{bmatrix}$$

donde

$$\tilde{L}(x, w, t, \mu, q, q_0) = \sum_{j \in J_B(x, w, t)} \mu_j G_j(x, w, t) + \mu_{2n+1} G_{2n+1}(x, w, t) + G_{2n+2}(x, w, t) \quad (2.2.9)$$

Entonces $\psi_2(x, w, t, \mu, q, q_0) = 0$ caracteriza al conjunto $\overline{M}_R(q, q_0, t)$, y no es difícil comprobar que el Jacobiano

$$D_{(x, w, \tilde{\mu}_{2n+1}, q, q_0)} \psi_2 = \begin{bmatrix} t\tilde{\mu}_{2n+1}Q & 0 & t(Qx + q) & \tilde{\mu}_{2n+1}tI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t & 0 & 0 \\ E_{\{J_B(x, w, t)\}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t(Qx + q)^T & 1 - t & 0 & tx^T & -t \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

tiene rango completo en el intervalo $t \in (0, 1)$.

Luego $0_{(\tilde{n}+1)}$ es un valor regular de ψ_2 y para cada subconjunto $\hat{J} \subset (J_B(x, w, t) \cup \{2n+1\})$ se cumple

$$\{\psi_2^{-1}(0_{(\tilde{n}+1)})\} \cap \{(x, w, t, \mu, q, q_0) \mid \mu_j = 0, \quad j \in \hat{J}\} \quad (2.2.11)$$

donde “ \pitchfork ” indica “intersección transversal” .

Aplicando ahora el teorema parametrizado de Sard (Teorema-2.2.6) se tiene que para casi todo $(q, q_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $0_{(\bar{n}+1)}$ es un valor regular de $(\psi_2)_{(q, q_0)}(x, w, t, \mu)$.

Entonces $((\psi_2)_{(q, q_0)})^{-1}(0)$ es una variedad cero dimensional (luego $\overline{M}_R(q, q_0, t)$ también), descrita por $(n + |J_B(x, w, t)| + 3)$ -ecuaciones, y con ello se tiene la demostración del primer punto.

Adicionalmente se tiene que, para casi todo (q, q_0) y todo punto $(x, w, t, \mu) \in ((\psi_2)_{(q, q_0)})^{-1}(0)$, se cumple $\mu_j \neq 0 \ \forall j \in \widehat{J}$, y

$$\dim(\text{span} \{DG_j(x, w, t), \ j \in J_B(x, w, t) \cup \{2n + 1, 2n + 2\}\}) = 2 + |J_B(x, w, t)| \quad (2.2.12)$$

Para ello basta con observar el jacobiano correspondiente.

$$(DG_j, j \in J_0(x, w, t)) = \begin{pmatrix} E_{\{J_B(x, w, t)\}} & 0 & 0 \\ t(Qx + q)^T & 1 - t & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0 - w + w^0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

donde $(\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - q_0) + (w^0 - w) > 0$. Dado que $\widehat{J} \subset (J_B(x, w, t) \cup \{2n + 1\})$ se ha elegido arbitrariamente, se concluye (por el Lema-2.2.7) la certeza del segundo punto. \square

El siguiente teorema indica que con probabilidad uno, para todo juego de datos $(D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\widehat{n}}$ el problema $[P_R(t)]$ resultante está en la clase $\mathcal{F}|_{(0,1)}$, y con ello se prueba la densidad del conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{R}^{\widehat{n}}$.

Teorema 2.2.11. *Todo subconjunto medible del conjunto*

$\{(D, d, Q, q, q_0) \in \mathbb{R}^{\widehat{n}} \mid \Phi(D, d, Q, q, q_0) \notin \mathcal{F}|_{(0,1)}\}$ *tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración

La demostración de este teorema se dividirá en dos casos diferentes.

Caso-1: Para casi todo vector $(D, d) \in \mathbb{R}^{\frac{n \times (n+1)}{2} + n}$, todo punto crítico generalizado de $[P_R(t)]$ que satisface la LICQ es de tipo 1, 2 ó 3.

Caso-2: Sea $(q, q_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ arbitrario, pero fijo, tal que cumplan con el Lema (2.2.10) . Entonces para casi todo $(D, d) \in \mathbb{R}^{\frac{n \times (n+1)}{2} + n}$ cada punto crítico generalizado de $[P_R(t)]$ es de tipo 4 ó 5.

Demostración del Caso-1.

Para esta demostración se introducen, como en (Ruckmann & Tammer, 1992), las aplicaciones $\psi_3 : \mathbb{R}^{3n+4} \mapsto \mathbb{R}^{3n+3}$ y $\varphi_3 : \mathbb{R}^{3n+4} \mapsto \mathbb{R}^{\frac{1}{2}\bar{n}(\bar{n}+1)}$ (con $\bar{n} = n + 1 + |J_0(x, w, t)|$)

definidas por

$$\psi_3(x, w, t, u) = \begin{cases} D(x - x^0) + d - \sum_{J_0(x, w, t)} u_j e_j + \eta_1 t u_{2n+1} (Qx + q) \\ (w - w^0) + c + \eta_1 (1 - t) u_{2n+1} - \eta_2 u_{2n+2} \\ G_j(x, w, t), \quad j \in J_B(x, w, t) \\ u_{p+j} + G_j(x, w, t), \quad j \notin J_B(x, w, t) \\ (1 - \eta_1) u_{2n+1} + t(\frac{1}{2} x^T Qx + q^T x + q_0) + (1 - t)(w - w^0) \\ (1 - \eta_2) u_{2n+2} - w \end{cases} \quad (2.2.14)$$

y $\varphi_3(x, w, t, u) = A$ (ver 2.1.5).

No es difícil de comprobar que $\psi_3(x, w, t, u) = 0$ caracteriza (bajo LICQ) al conjunto de los puntos críticos generalizados del problema $[P_R(t)]$ (Kojima & Hirabayashi, 1984), mientras $\varphi_3(x, w, t, u)$ caracteriza a la matriz Hessiana (2.1.8) sobre el plano tangencial (2.1.9).

Los tres conjuntos que se definen a continuación describen (bajo LICQ) las características de los p.c.g. tipo 1, 2 y 3.

$$\tilde{M}_\Gamma = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^{6n+7+\frac{1}{2}\bar{n}(\bar{n}+1)} \mid z_2 = \psi_3(z_1); z_3 = \varphi_3(z_1), z_1 \in \mathbb{R}^{3n+4}\}$$

$$M(K) = \mathbb{R}^{3n+4} \times 0_{3n+3} \times A(K)$$

$$M(K, \bar{K}) = M(K) \cap \{z \in \mathbb{R}^{6n+7+\frac{1}{2}\bar{n}(\bar{n}+1)} : z_{n+2+j} = 0, \quad j \in \bar{K}\}$$

donde $K \subset \{1, \dots, \bar{n}\}$, $\bar{K} \subset J_0(x, w, t)$, y $A(K)$ es el subconjunto de $S^{\bar{n}}$ con rango igual a $|K|$ cuyas columnas con índices en K son linealmente independientes.

En (Gomez *et al.*, 2000) se demuestra que $A(K)$ es una C^1 -variedad descrita por $\frac{1}{2}(\bar{n} - |K|)(\bar{n} - |K| + 1)$ ecuaciones con gradientes linealmente independientes en cada punto solución.

Resulta entonces que $M(K)$ queda descrito por $z_2 = 0$, junto con las $\frac{1}{2}(\bar{n} - |K|)(\bar{n} - |K| + 1)$ ecuaciones que caracterizan a $A(K)$, con lo cual $M(K)$ es una C^1 -variedad de codimensión $(3n + 3) + \frac{1}{2}(\bar{n} - |K|)(\bar{n} - |K| + 1)$.

De igual forma se tiene que \tilde{M}_Γ es una C^1 -variedad de codimensión $(3n + 3) + \frac{1}{2}(\bar{n})(\bar{n} + 1)$. Como $M(K, \bar{K})$ queda descrito por las ecuaciones de $M(K)$ junto con $z_{n+2+j} = 0$ ($j \in \bar{K}$), se tiene entonces que dicho conjunto es una C^1 -variedad de codimensión $cod(M(K)) + |\bar{K}|$.

Sea ahora $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2^T \\ \Delta_2 & \Delta_3 \end{pmatrix}$ una matriz de $A(K)$, donde las entradas de la submatriz Δ_3 tienen sus dos índices en K , entonces Δ_3 es regular y $A(K)$ es, localmente, la solución del

sistema:

$$\Theta(\Delta) = \Delta_1 - \Delta_2^T \Delta_3^{-1} \Delta_2 = 0 \quad (2.2.15)$$

Según (Gomez, 2001), el jacobiano de Θ contiene una matriz identidad, que corresponde a las derivadas parciales respecto a las entradas de las matrices que no contienen columnas con índice en K .

Para seguir como en (Gomez *et al.*, 2000) se introduce ahora la aplicación

$\psi_4 : \mathbb{R}^{6n+7+\frac{1}{2}\bar{n}(\bar{n}+1)} \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)+n} \mapsto \mathbb{R}^{6n+7+\frac{1}{2}\bar{n}(\bar{n}+1)+\frac{1}{2}(\bar{n}-|K|)(\bar{n}-|K|+1)+|\bar{K}|}$, definida por

$$\Psi_4(z, D, d) = \begin{pmatrix} z_2 - \psi_3(z_1) \\ z_3 - M_\Upsilon(z_1) \\ z_2 \\ \Theta(z_3) \\ u_{n+2+j}, j \in \bar{K} \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

Se puede comprobar que $\Psi_4(z, D, d) = 0$ caracteriza a los tres conjuntos \tilde{M}_Υ , $M(K)$, y $M(K, \bar{K})$. Cómo la matriz Jacobiana de $\frac{\partial \Psi_4(z, D, d)}{\partial (z_1, z_2, z_3, D, d)}$ es de rango completo para casi todo (K, \bar{K}) con $\{n+2, \dots, n+|J_0(x, w, t)|\} \subseteq K$, se puede concluir que $\mathbf{0}$ es un valor regular de Ψ_4 , y por el teorema parametrizado de Sard, también lo es de $(\Psi_4)_{(D, d)}(z)$ para casi todo (D, d) y para todo par de conjuntos índices K y \bar{K} con la propiedad descrita anteriormente.

$$\frac{\partial \Psi_4(z, D, d)}{\partial (z_1, z_2, z_3, D, d)} = \begin{pmatrix} \otimes & I_{3n+3} & 0 & \odot & \begin{pmatrix} -I_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ \otimes & 0 & I_{\frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2}} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{3n+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(I_{\frac{1}{2}(\bar{n}-|\bar{K}|)(\bar{n}-|\bar{K}|+1)} \otimes \right) & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} I_{|K|} & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

donde \odot es la matriz diagonal que se obtiene al derivar respecto a D la expresión $D(x-x^0)$, y \otimes se usa para designar a una expresión que no tiene importancia para este análisis.

Dado que existe un número finito de tales pares de conjuntos índices, se concluye que para casi todo (D, d)

$$\tilde{M}_\Upsilon \cap M(K, \bar{K}) \quad (2.2.18)$$

Suponiendo ahora que (D, d) han sido elegidos de forma tal que vale (2.2.18), entonces $cod(\tilde{M}_r \cap M(K, \bar{K})) = 1 - \frac{1}{2}(\bar{n} - |K|)(\bar{n} - |K| + 1) - |\bar{K}|$.

Finalmente, como $\frac{1}{2}(\bar{n} - |K|)(\bar{n} - |K| + 1) - |\bar{K}| \leq 1$, se tiene entonces que

$$cod(\tilde{M}_r \cap M(K, \bar{K})) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \text{si } \bar{K} = \emptyset \text{ y } |K| = \bar{n} \\ 0, \quad \text{si } \bar{K} = \emptyset \text{ y } |K| = \bar{n} - 1 \\ 0, \quad \text{para } |\bar{K}| = 1 \text{ y } |K| = \bar{n} \end{array} \right\} \quad (2.2.19)$$

Aquí, al igual que en (Gomez *et al.*, 2000), se tiene para el primer caso un p.c.g. tipo-1, en el segundo un p.c.g. tipo-3 y en el tercer caso un p.c.g. tipo-2, con lo cual se concluye la prueba para el caso-1. \square

Demostración caso-2

Para esta demostración se escogerá un (q, q_0) arbitrario, pero fijo, de forma tal que satisfaga las condiciones del Lema-2.2.10.

Dado que $\bar{M}(q, q_0, t)$ es un conjunto discreto, basta con probar que, para casi todo (D, d) , y un $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t}) \in \bar{M}(q, q_0, t)$ arbitrario, pero fijo, $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ es un p.c.g. tipo-4 ó tipo-5.

S.p.d.g. sea $p = |J_0(x, w, t)|$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ fijo, que satisface las condiciones del Lema-2.2.10, y elegido de forma tal que

$$\sum_{j \in J_0(x)} \bar{u}_j D_t G_j(x, w, t) \neq 0 \quad (2.2.20)$$

lo cual en el problema (2.1.2-2.1.3) resulta de $\frac{1}{2}x^T Q x + q^T x - q_0 + w^0 - w \neq 0$ (> 0).

Como en (Ruckmann & Tammer, 1992), aquí también se cumple para casi todo (d)

$$D_{(x,w)} F(x, w, t) \notin \text{span}\{D_{(x,w)} G(x, w, t), j \in \hat{J}\} \quad (2.2.21)$$

para todo $\hat{J} \subseteq J_0(x, w, t)$ que satisface $\dim(\text{span}\{D_{(x,w)} G(x, w, t), j \in \hat{J}\}) \leq n + 1$.

Para continuar el estudio se distinguen, en lo adelante, dos situaciones por separado:

Situación-1: $p = n + 2$

Aquí resulta que todas las restricciones están activas (n -restricciones de caja, más G_{2n+1} y G_{2n+2}) y como $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ satisfacen el Lema-2.2.10, de la definición de p.c.g. tipo-5 se tienen (5a) y (5b), mientras que de (2.2.20) y Lema-2.2.10 se tiene (5c) para casi todo (D, d) , y con ello, la situación-1 corresponde a un p.c.g. tipo-5 (ver definición-A.2.5 en Anexo-A).

Situación-2: $p \leq n + 1$

Con esto se tiene (4a) y por el Lema-2.2.10 también se cumple (4b) de la definición de

p.c.g. tipo-4 (ver definición-A.2.4 en el Anexo-A), consecuencia de lo cual existe un índice $j_0 \in J_0(x, w, t)$ tal que

$$D_{(x,w)}G_{j_0}(x, w, t) = \sum_{j \neq j_0} \alpha_j D_{(x,w)}G_j(x, w, t) \quad (2.2.22)$$

En lo adelante sólo falta por probar (4c).

Según (Gomez, 2001), para ello basta con probar el cumplimiento de las desigualdades

$$D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})W \neq 0 \quad (2.2.23)$$

$$[D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})]^T (W(W^T(D_{(x,w)}^2 \tilde{L})W)^{-1}W^T) [D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})] \neq 0 \quad (2.2.24)$$

donde W es una matriz, cuyas columnas forman una base del subespacio tangencial al espacio vectorial generado por $\{D_{(x,w)}G_{J_0(x,w,t)}\}$, de donde se tiene que $\text{rang}(W^T(D_{(x,w)}^2 \tilde{L})W) = n - p$

Tomando ahora $W = \begin{pmatrix} \bar{E}_{\{J_B^*(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})\}} \\ 0_{1 \times (n - |J_B(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})|)} \end{pmatrix}$, no es difícil verificar el cumplimiento de (2.2.23) para casi todo (D,d), donde $\bar{E}_{\{J_B^*(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})\}}$ es una matriz de $n \times (n - |J_B(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})|)$ cuyas $n - |J_B(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})|$ columnas resultan vectores e_j correspondientes a cada $j \notin J_B(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$.

Adicionalmente se cumple

$$\text{rang}(W(W^T(D_{(x,w)}^2 \tilde{L})W)^{-1}W^T) > 1 \quad (2.2.25)$$

Empleando el Lema-2.2.8 se tiene que $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y^T(W(W^T(D_{(x,w)}^2 \tilde{L})W)^{-1}W^T)y = 0\}$ tiene medida de Lebesgue igual a cero. En base a este resultado, y aplicando el Teorema de Fubini (Jimenez, 1989) se cumple que el conjunto (D,d) para los cuales $D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})$ satisface (2.2.25) también tiene medida de Lebesgue nula, y con esto

$$[D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})]^T (W(W^T(D_{(x,w)}^2 \tilde{L})W)^{-1}W^T) [D_{(x,w)}F(\bar{x}, \bar{w}, \bar{t})] \neq 0 \quad (2.2.26)$$

para casi todo (D,d). Luego, se tiene el cumplimiento de (4c) y con esto finaliza la prueba de la situación-2, y de la segunda parte del teorema de genericidad (densidad). \square .

En (Miranda, 2010) se propone una generalización de la inmersión $[P_R(t)]$ para el problema cuadrático (1.1.1), y como aquí, se demuestra su pertenencia a la clase \mathcal{F} .

Con este resultado se demuestra que la inmersión $[P_R(t)]$ pertenece a la clase \mathcal{F} definida por Jongen-Jonker-Twilt, con lo cual $\Sigma_{pcg} = \cup_{v=1}^5 \Sigma_{pcg}^v$.

Conociendo que $\Sigma_{pcg}^{(1)}$ es una C^2 -variedad unidimensional y $\Sigma_{pcg}^{(v)}$ un conjunto discreto (para $v=2,3,4,5$) (Jongen *et al.*, 1986), se puede concluir que Σ_{pcg} posee una estructura topológica adecuada para el empleo de métodos de continuación en la solución de $P_R(t)$.

2.3. Método de continuación

Conociendo ahora que $P_R(t)$ es un problema JJT-regular, resulta factible la utilización de un método de continuación para determinar una curva solución \widehat{C} que conecte a la solución inicial conocida (x^0, w^0) de $\mathcal{H}(x, w, \mu, t) = 0$ para $t=0$ (2.1.4), con una solución $(\bar{x}(t), \bar{w}(t))$ cuando el parámetro $t = 1$, o $\bar{w}(t) \geq w^0$ y con ello resolver el segundo paso de la estrategia global.

Dado que para $t=0$ la matriz (A) definida en (2.1.5) tiene rango completo, el problema $[P_R(t)]$ es regular en el sentido de Kojima-Hirabayashi (ver definición-A.2.7 del Anexo-A) relativo a cierto intervalo $[t_a, t_b]$, con $t_a = 0$ y $t_b > 0$.

En consecuencia el punto $(x^0, w^0, \mu^0, 0) \in \mathcal{H}^{-1}(0)$, y según (Jongen *et al.*, 1986), existe una componente conexa y compacta \widehat{C} de $\mathcal{H}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{J}_0(x^0, w^0, t_a)|} \times [t_a, t_b])$, con $(x^0, w^0, \mu^0, t_a) \in \widehat{C}$.

– En esta solución particular, el vector μ^0 resulta $\mu_{2n+1}^0 = -c$, y $\mu_j^0 = 0$ ($\forall j \neq 2n+1$).

La propiedad de valor regular junto con el teorema de la función implícita garantizan la existencia de un intervalo $[z^1, z^2] \in \mathbb{R}$ de un conjunto abierto $Z \subset \mathbb{R}$ con $[z^1, z^2] \subseteq Z$, así como una C^1 -función unívocamente determinada

$$\widehat{y} : z \in Z \mapsto \widehat{y}(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{w}(z), \widehat{\mu}(z), \widehat{t}(z)), \quad (2.3.1)$$

que satisface $\widehat{y}(z^1) = (x^0, w^0, \mu^0, t_a)$, $\widehat{t}(z^2) \in (t_a, t_b)$, $\widehat{C} = \{\widehat{y}(z) | z \in [z^1, z^2]\}$ y $\widehat{y}(z)|_{[z^1, z^2]} : [z^1, z^2] \mapsto \widehat{C}$ es un homeomorfismo (ver Figura-2.1).

Aplicar un método de continuación a lo largo de la curva \widehat{C} , requiere una discretización

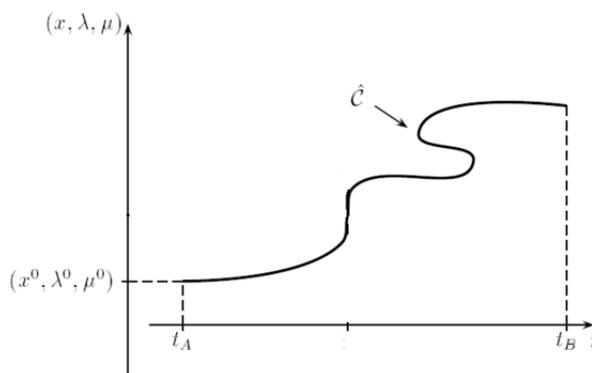


Figura 2.1: Se cumple $H^p(\widehat{y}(z)) = 0$ para todo $z \in [z^1, z^2]$

($z^1 = z_1 < \dots < z_N = z^2$) del intervalo $[z^1, z^2]$, así como el cálculo de los correspondientes puntos solución $\hat{y}_k = \hat{y}(z_k) \in \hat{C}$ (resp. aproximaciones adecuadas \bar{y}_k de $\hat{y}(z_k)$, $k = 1, \dots, N$). Uno de los procedimientos más utilizados para el cálculo de \hat{y}_k a partir de \hat{y}_{k-1} en los métodos de continuación es el método de predicción y corrección. Un estudio detallado de estos puede encontrarse en (Allgower & Georg, 1990).

Es de desear entonces, y basados en la estabilidad local de los p.c.g., que partiendo de $(x^0, w^0, \mu^0, 0)$ (p.c.g. tipo-1), el método de continuación genere una secuencia de puntos críticos generalizados no degenerados (p.c.g. tipo-1) sobre la curva \hat{C} , que permita conectar a este punto con $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, 1) \in \hat{C}$, y con ello se tendría una solución (\bar{x}) para [QPA].

Desafortunadamente, cuando los problemas son no convexos no se garantiza la existencia de tal curva solución \hat{C} que conecte a la solución inicial $(x^0, w^0, \mu^0, 0)$ con la solución deseada $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\mu}, 1)$, como bien se ilustra en la figura-2.2.

Tales situaciones coinciden con la aparición de puntos singulares durante la aplicación

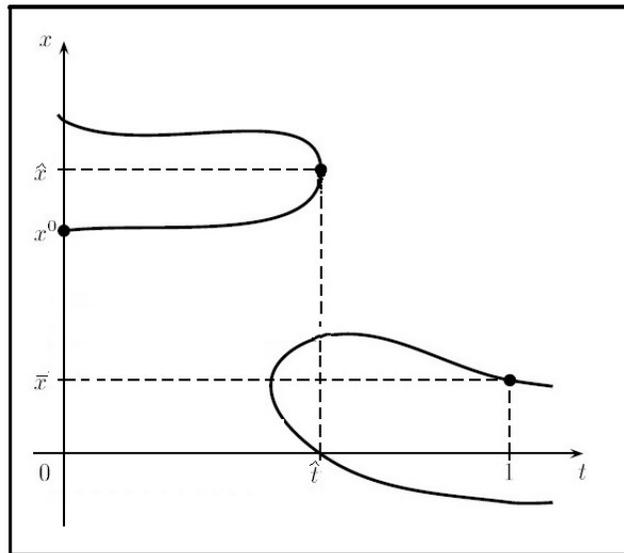


Figura 2.2: El punto $(x^0, 0)$ no está conectado con $(\bar{x}, 1)$ por una curva solución

del método de continuación (anulan el determinante de la matriz jacobiana A definida en 2.1.5). Recordar que cuando el problema $[P_R(t)]$ es JJT-regular relativo al intervalo $[t_a, t_b]$, junto con los puntos críticos no degenerados (p.c.g. tipo-1), el conjunto \sum_{pcg} también suele contener puntos singulares (puntos críticos generalizados tipo 2, 3, 4 y 5).

En particular se conoce que el conjunto \sum_{pcg}^1 es abierto y denso en \sum_{pcg} y constituye

una C^2 -variedad unidimensional en $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, mientras que los conjuntos \sum_{pcg}^v ($v=2,3,4,5$) se componen respectivamente de puntos aislados. En consecuencia la aparición de tales singularidades sólo puede ocurrir de forma aislada (Jongen *et al.*, 1986).

En tales situaciones se tienen dos problemas fundamentales: identificar el tipo de singularidad encontrada y diseñar una estrategia para abordarlas. Una alternativa para resolver el primer señalamiento es el chequeo de las condiciones que caracteriza a cada p.c.g. (ver definiciones del epígrafe-A.2 en el Anexo-A).

Respecto al segundo aspecto, hay que diferenciar el tratamiento en los p.c.g. tipo-2 y tipo 5 (que satisfacen la MFCQ) del resto de las singularidades. Conociendo que en la vecindad de cada p.c.g. de tipo-2, el conjunto \sum_{pcg} consiste de la intersección las curvas soluciones de los problemas $P_2^p(t)$ y $P_2^{p-1}(t)$ (ver A.2.3). En tales situaciones, y según se muestra en la figura-A.1 Type-2 (a,b,c,d) del Anexo-A, siempre resulta posible continuar avanzando por la curva \widehat{C} para valores crecientes de t , ya sea utilizando la propia curva por la que se ha llegado, o siguiendo por la otra curva que en él se cruza. Algo similar ocurre con los p.c.g tipo-5 que satisfacen la condición de regularidad de Mangasarian-Fromovitz, (ver definición-A.1.2 y figura-A.1 Type5-k del Anexo-A), para los cuales también se puede continuar por la curva \widehat{C} para valores crecientes de t , ya sea utilizando la curva por la que se ha llegado, o una de las curvas que en el se cortan.

El paso por tales puntos requiere, sin embargo, la actualización del sistema de puntos críticos (2.1.4) y del conjunto de índices activos $J_0(x, w, t)$, para poder continuar exitosamente por la curva \widehat{C} .

En el resto las singularidades (p.c.g. tipo-3, p.c.g. tipo-4 y p.c.g. tipo-5 que no satisfacen la MFCQ) se trata de puntos de retorno de la curva \widehat{C} con respecto a t (como ocurre por ejemplo el punto $(\widehat{x}, \widehat{t})$ de la figura-2.2) ó de un punto final de la curva. Ver también la figura-A.1 tipo-3, tipo-4 y tipo-5 (l,m) en el Anexo-A de este trabajo.

Una alternativa para resolver tales situaciones es la opuesta por Guddat *et. al.* Se trata de las, así llamadas, “rutinas de salto” presentadas en (Gomez *et al.*, 2000).

La idea fundamental de estas rutinas consiste en aplicar un procedimiento de descenso sobre $P_R(t)$ con $t = \widehat{t}$ fijo, que partiendo de la singularidad detectada $(\widehat{x}, \widehat{w}, \widehat{t})$, permita determinar un mínimo local $(\widetilde{x}, \widetilde{w}, \widehat{t}) \in M_R(\widehat{t})$. Si este procedimiento resulta exitoso, se tiene entonces que el nuevo punto $(\widetilde{x}, \widetilde{w}, \widehat{t})$ pertenece a otra componente conexa de $\mathcal{H}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{J}_0(\widehat{x}, \widehat{w}, \widehat{t})|} \times [\widehat{t}, \widehat{t} + \varepsilon])$, y con ello se habrá realizado un “salto” a una nueva curva \widetilde{C} , la cual podría ser continuada para valores crecientes de t ($\geq \widehat{t}$), como se ilustra

en la figura-2.3.

Guddat et. al. demuestran que la ejecución de tales “saltos” es realizable desde cualquier

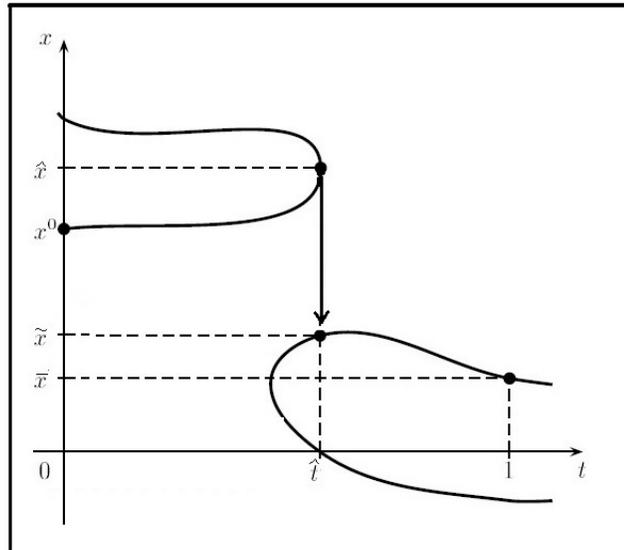


Figura 2.3: Ilustración de un “salto” desde (\hat{x}, \hat{t}) a (\tilde{x}, \hat{t})

p.c.g. de tipo-2 y/ó de tipo-3- Sin embargo, en los p.c.g. de tipo-4 y de tipo-5 sólo cuando en ellos se verifica el cumplimiento de las condiciones de regularidad de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ).

A las singularidades tipo-4 y tipo-5 en las que no se satisface la MFCQ se les referirá en lo adelante como *singularidades no tratables* por el método de continuación, pues en tales puntos no existe dirección de descenso factible, que permita realizar la referida estrategia de salto.

Como resultado de la experimentación computacional realizada (Miranda, 2010; Miranda, Allende, Pérez, & Bouza, 2015), se pudo detectar que, para el caso particular del problema $P_R(t)$, las singularidades que mayor frecuencia aparecen son precisamente los p.c.g. de tipo-2 y los p.c.g. de tipo-4. Un aporte de esta investigación consiste precisamente caracterizar la naturaleza de las singularidades tipo-4, cuando la componente \hat{x} del punto $(\hat{x}, \hat{w}) \in M_R(\hat{t})$ coincide con un mínimo local de [BQP].

Lema 2.3.1. *Si (x, w, t) es un punto crítico generalizado tipo-4 del problema paramétrico $[P_R(t)]$ cuya componente x es un mínimo local del problema cuadrático [BQP], entonces, en el punto (x, w, t) no satisfacen las condiciones de regularidad de Mangasarian-Fromovitz.*

Demostración

Supongamos que (x, w, t) satisface la MFCQ, y que x es un mínimo local de (1.3.1).

Entonces existe un vector $\xi = (\xi_x, \xi_w) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $\xi_x \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_{(x,w)}G_j(x, w, t)\xi < 0$ $\forall j \in J_0(x, w, t)$. El desarrollo de este sistema de inecuaciones permite concluir que:

- De la inecuación correspondiente a G_{2n+2} se tiene que $\xi_w > 0$.
- Introduciendo este resultado en la condición correspondiente a G_{2n+1} se tiene que $(Qx + q)\xi_x + (1 - t)\xi_w < 0$. Como $1 - t > 0$ y $\xi_w > 0$, entonces $(Qx + q)\xi_x < 0$.

Si además se tiene que $-e_j\xi_j < 0, \forall j \in J_L(x, w, t)$, y $e_j\xi_j < 0, \forall j \in J_U(x, w, t)$, entonces el vector ξ_x es una dirección de descenso factible para [BQP], lo cual contradice la hipótesis de que x sea un mínimo local de dicho problema. \square

El pseudocódigo-2.4 esquematiza una posible alternativa para la implementación del método de continuación y saltos descrito. Una dificultad adicional para la implementación

Inicio $k=0$. Elegir $(x^0, w^0) \in M_R(t^0 = 0)$.

REPEAT

Paso-1: Aplicando predictor-corrector, calcular una solución $(x^{k+1}, w^{k+1}, \mu^{k+1}, t^{k+1})$ de (2.1.4).

Paso-2: Verificar a cuál de los conjuntos Σ_{pcg}^v ($v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) pertenece el nuevo p.c.g.

Para ello se propone la ejecución de los pasos 2.1 ó 2.2

Paso-2.1: $IF_{(1)} |J_0(x^k, w^k, t^k)| \neq |J_0(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1})|$ THEN.

Paso-2.1.a $IF_{(2)} |J_0(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1})| = n + 2$ THEN $(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^5$

Si cumple MFCQ elegir una curva y continuar con Paso-4. En caso contrario ir al Paso-3.

ENDIF₍₂₎.

Paso-2.1.b $ELSEIF_{(1)} (x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^2$.

Actualizar \mathcal{H}^p , seleccionar curva e ir al Paso-4.

ENDIF₍₁₎.

Paso-2.2 $IF_{(3)} \det(A(x^k, w^k, t^k))\det(A(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1})) < 0$ THEN $(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^3$

Realizar salto a una nueva componente conexa ir a Paso-4.

Paso-2.2.a $ELSEIF_{(3)} \mu_j^k \mu_j^{k+1} < 0, \forall j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ THEN $(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^4$.

Si cumple MFCQ saltar a una nueva componente conexa e ir al Paso-4.

En caso contrario ir a Paso-3.

Paso-2.2.b $ELSEIF_{(3)} \mu_j^k \mu_j^{k+1} < 0$, para algún $j \in J_0(x^k, w^k, t^k)$ THEN $(x^{k+1}, w^{k+1}, t^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^2$.

Actualizar \mathcal{H}^p , seleccionar curva y continuar e ir al Paso-4.

Paso-2.2.c $ELSEIF_{(3)} (x^{k+1}, w^{k+1}) \in \Sigma_{pcg}^1$, continuar al paso-4.

ENDIF₍₃₎.

Paso-3 Singularidad no tratable detectada. Abortar el método de continuación.

Paso-4 Poner $k=k+1$.

UNTIL $(t^k < 1)$ and $(w^k < w^0)$

Figura 2.4: Pseudocódigo del método de continuación con saltos

práctica de este procedimiento es carencia de una cota inferior que permita construir un criterio para medir la calidad de las soluciones alcanzadas. Adicionalmente, la determinación de una dirección de descenso y la instrumentación práctica de los saltos resultan elementos bien complicados y computacionalmente costosos. Estas son las razones fundamentales que explican la falta de reportes con implementaciones serias de este procedimiento en la práctica.

En el siguiente capítulo se propone resolver estas limitaciones combinando el método de corte y continuación con un esquema de particionamiento del conjunto factible que permita evadir el tratamiento las singularidades no tratables, y el empleo de un mecanismo eficiente para el cálculo de las cotas inferiores.

2.4. Conclusiones parciales del capítulo

En el capítulo se presenta una parametrización específica para el problema cuadrático con restricciones de caja, y se describen sus características esenciales. Estos resultados constituyen la base teórica sobre la que se fundamenta el diseño del método de continuación y saltos que se elabora como estrategia de solución par el problema objeto de estudio. Los resultados más importantes que se obtienen se resumen a continuación.

- La inmersión propuesta aventaja a las inmersiones reportadas en la literatura consultada por el reducido número de variables adicionales y por la facilidad de que presenta para la caracterización de sus singularidades.
- La caracterización de la estructura de los cinco puntos críticos generalizados descritos por Jongen, Jonker y Twilt para el problema paramétrico estudiado, constituye la base para la codificación del método de continuación y saltos que se presenta.
- La demostración de la pertenencia de la inmersión propuesta a la clase \mathcal{F} de problemas de optimización paramétrica que sólo contienen las cuatro singularidades descritas por Jongen, Jonker y Twilt, a diferencia de las demostraciones habituales, se realiza sobre un espacio vectorial $\mathbb{R}^{\hat{n}}$, y garantiza la existencia de una estructura topológica adecuada para la aplicación de un método de continuación.

Capítulo 3

Formulación del algoritmo híbrido

En este capítulo se analizan las posibilidades que brinda la utilización de un método de ramificación y acotación, como alternativa para el tratamiento de las singularidades que aparecen durante la aplicación del método de corte y continuación. La idea que se propone con este nuevo enfoque consiste en dividir la región factible en dos subconjuntos disjuntos, con lo cual sólo uno de ellos puede contener la singularidad a tratar. Esto posibilita la aplicación del método de corte y continuación sobre la subregión que no contiene la singularidad encontrada, y con ello eludir su tratamiento. Resulta entonces natural hibridar el método de corte y continuación con un esquema de ramificación y acotación. Para ello se tomarán en cuenta los métodos de ramificación y acotación más exitosos reportados para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja.

El capítulo inicia con un resumen de los aspectos básicos que conforman el método de ramificación y acotación. En el segundo epígrafe se describen las especificidades que caracterizan en lo fundamental al método de ramificación y acotación que se propone implementar en este trabajo, y en el tercer epígrafe se presenta la combinación del método de corte y continuación con el de ramificación y acotación que da origen al algoritmo híbrido que se defiende en esta tesis.

3.1. Métodos de ramificación y acotación

Entre los métodos de optimización global más efectivos desarrollados para la solución del problema cuadrático no convexo con restricciones de caja se encuentran, sin lugar a dudas, los métodos de ramificación y acotación (a los que en lo adelante también se referirá como

B&B del inglés Branch and Bound). La descripción que sigue a continuación captura, en esencia, el funcionamiento de estos algoritmos.

Partiendo del problema original P_0 descrito por una función objetivo $f(x)$ y la región

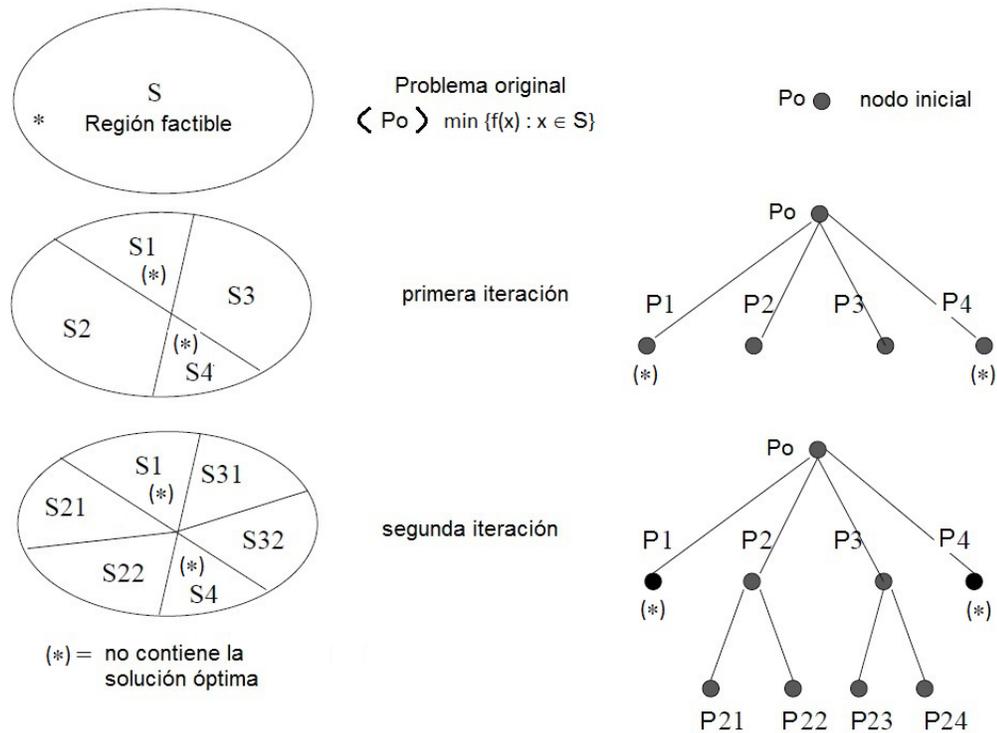


Figura 3.1: Representación visual del árbol generado por el método *B&B*

factible S , el procedimiento inicia (iteración-0 en el esquema gráfico-3.1) con el cálculo de una cota superior f_{UB} (evaluando f en una solución factible), y una cota inferior f_{LB} , que generalmente se obtiene resolviendo un problema relajado (Acotación). Si la solución calculada no es óptima, se procede entonces (iteración-1) a dividir la región factible en subconjuntos ($S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$) disjuntos (Ramificación), sobre cada uno de los cuales se define un subproblema P_k (nodos del árbol representado en la parte derecha del esquema gráfico). El proceso continúa con la determinación de cotas inferiores y superiores en los subproblemas generados y la eliminación de los nodos que no pueden contener la solución óptima (marcados con $(*)$ en el esquema gráfico). Los nodos que no se pueden eliminar son objeto de nuevas divisiones, tras lo cual los nuevos subproblemas pasan a formar parte de una lista de candidatos a examinar en próximas iteraciones. La iteración concluye con la selección de un nodo de la lista sobre el cual se repite todo el proceso en

la siguiente iteración. La figura-3.1 contiene una representación gráfica del árbol generado por la aplicación recursiva de esta estrategia.

En sentido general, los métodos de ramificación y acotación están caracterizados por cuatro componentes fundamentales: (1) relajación del problema y cálculo de cotas inferiores, (2) determinación de cotas superiores y eliminación de nodos, (3) diseño de una estrategia de ramificación para la región factible, y (4) selección del subproblema o nodo a resolver en cada iteración.

La forma en que se instrumentan estos cuatro aspectos originan distintas formulaciones algorítmicas. En la figura-3.2 se presenta un pseudocódigo que describe el esquema general que se sigue cuando se implementa un algoritmo de ramificación y acotación. En el epígrafe

1. $Iter = k = 0$, $Lista = \{0\}$, $f_{UB}^{(*)} = \infty$. Fijar parámetros $MaxIter$ y ε .
2. Calcular una cota inferior $f_{LB}^{(0)}$ para el problema P_0 .
3. Seleccionar un nodo $k \in Lista$ para ser procesado.
4. Calcular una cota superior $f_{UB}^{(k)}$ evaluando $f(x)$ en un punto $\bar{x} \in P_k$.
5. Si $f_{UB}^{(k)} < f_{UB}^{(*)}$, actualizar $f_{UB}^{(*)} = f_{UB}^{(k)}$ y poner $x^{(*)} = x^{(k)}$.
Hacer $f_{LB}^{(*)} = \min\{f_{LB}^{(k)} \mid k \in Lista\}$. Hacer $Lista = Lista \setminus \{k\}$.
6. Si $f_{UB}^{(*)} - f_{LB}^{(*)} = 0$, FIN - $x^{(*)}$ solución óptima de P_0 .
Si $\left| \frac{f_{UB}^{(*)} - f_{LB}^{(*)}}{f_{UB}^{(*)}} \right| \leq \varepsilon$, FIN - $x^{(*)}$ solución ε -aproximada de P_0
7. Particionar P_k en m -subproblemas $P_{end+1}, \dots, P_{end+m}$. ($end =$ último elemento de $Lista$).
8. Calcular cota inferior $f_{LB}^{(j)}$ para cada subproblema P_j con $(end-m \leq j \leq end)$.
9. Actualizar $Lista = Lista \cup \{end + 1, \dots, end + m\}$.
10. Eliminar de la lista a todo subproblema P_j con $f_{LB}^{(j)} \geq f_{UB}^{(*)}$.
11. Si $(Lista = \emptyset)$ ó $(Iter > MaxIter)$, FIN - $x^{(*)}$ mejor solución encontrada para P_0 .
12. Hacer $Iter = Iter + 1$ y regresar al paso (3).

Figura 3.2: Pseudocódigo del método de ramificación y acotación

siguiente se describen las características de la implementación que se utilizará en este trabajo.

3.2. Formalización del método *B&B* a utilizar

El algoritmo de ramificación y acotación que se propone utilizar en este trabajo incorpora los elementos más avanzados que se reportan en la literatura en relación con el empleo de los métodos *B&B* diseñados para la solución de problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja. A continuación se describen los aspectos fundamentales que distinguen a esta implementación.

3.2.1. Cálculo de las cotas inferiores

Un elemento esencial de los métodos de ramificación y acotación es, sin lugar a dudas, su habilidad para relajar el problema a resolver con el fin de obtener un problema auxiliar más simple (por ejemplo, convexo), sobre el cual sea posible el cálculo de una buena cota inferior (f_{LB}) para el valor óptimo de la función objetivo con un bajo costo computacional. En el caso del problema cuadrático con restricciones de caja se distinguen dos vías fundamentales para dicha relajación.

1. La aproximación de la función objetivo del problema [BQP] por una función minorante convexa $h(x)$, ($h(x) \leq f(x)$, $\forall x \in B$).
2. Construir un problema con función objetivo convexa equivalente a [BQP], y aproximar el conjunto factible resultante por un sobreconjunto convexo.

Utilizando la primera opción, se obtiene directamente un problema relajado convexo, cuyo único mínimo local resulta una cota inferior para el mínimo global del problema original. Un ejemplo de este tipo de aproximaciones se tiene con la función α -minorante de Adjiman-Floudas (Adjiman & Floudas, 2001) $h(x) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha x_i(x_i - 1)$, $\alpha > 0$. Sin embargo, la alternativa que con mayor éxito se ha utilizado en los últimos tiempos es la acotación, por relajación convexa del conjunto factible, de una formulación equivalente a [BQP], como por ejemplo, las presentadas en el epígrafe-1.5 del capítulo 1. En primera instancia, la opción más popular en la década de los 90 fue la relajación lineal de las restricciones. Esto se evidencia por la gran cantidad de reportes que la utilizan (Sherali &

Tuncbilek, 1995),(Yajima & Fujie, 1998).

Pero los resultados de mayor impacto reportados en la literatura están estrechamente ligados al uso de la relajación semidefinida positiva. En el Anexo-B se resumen las características principales de la programación semidefinida positiva.

Este enfoque tiene sus orígenes en los trabajos iniciales de Shor (Shor, 1987). En esencia, Shor utiliza la formulación equivalente (1.5.5), sobre la cual propone sustituir la condición $X = xx^T$ por sus equivalentes $\text{rang}(X)=1$ y $X - xx^T \in S_n^+$, eliminando (relajando) luego la condición de rango.

Finalmente no se utiliza $X - xx^T \in S_n^+$, sino la condición equivalente $\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \in S_+^n$, y se adicionan las restricciones $\text{diag}(X) \leq x$ (Sherali & Alameddine, 1992), para obtener la relajación semidefinida positiva de [BQP] más simple que se conoce (Chen, 2010).

$$[RSDP_0] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid (x, X) \in \widehat{B}_0 \right\} \quad (3.2.1)$$

$$\widehat{B}_0 = \left\{ (x, X) \in \mathbb{R}^{n+n \times n} \mid 0 \leq x \leq 1, \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0, \text{diag}(X) \leq x \right\} \quad (3.2.2)$$

Tomando en cuenta la experimentación realizada por Hu (Hu, 2006), esta relajación brinda buenas cotas inferiores en problemas de hasta 20 variables, pero no exhibe igual comportamiento en problemas de mayor dimensión.

Un aporte fundamental en el desarrollo de este tipo de estrategias fue, sin lugar a dudas, la formulación de modelos equivalentes que incorporan las condiciones KKT de optimalidad de primer orden (Vandenbussche & Nemhauser, 2005a, 2005b), como ocurre, por ejemplo, con las formulaciones (1.5.7) y (1.5.9) presentadas en el epígrafe-1.5.

Utilizando estos resultados, Burer y Vandenbussche (Burer & Vandenbussche, 2008a) proponen relajar las condiciones de rango ($\text{rang}(x) = 1$) y de complementariedad en la formulación equivalente (1.5.7), para obtener el siguiente problema de programación semidefinida positiva.

$$[RSDP_1] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid (x, y, z, X) \in \widehat{B}_1 \right\} \quad (3.2.3)$$

$$\widehat{B}_1 = \left\{ (x, y, z, X) \in \mathbb{R}^{3n+n \times n} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq e \quad \text{diag}(X) \leq x, \quad \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0, \\ Qx + q + y - z = 0, \quad y, z \geq 0, \\ Q \bullet X + q^T x = \frac{1}{2}(q^T x - e^T y) \end{array} \right\} \quad (3.2.4)$$

Aunque este modelo emplea un número mayor de variables, el mismo permite aprovechar las ventajas que ofrece la programación semidefinida positiva en el cálculo de mejores cotas inferiores para el valor de $f_{minglob}$. El algoritmo *B&B* diseñado por Burer y Vandembussche (Burer & Vandembussche, 2008a) se sustenta sobre la base de esta relajación. Los experimentos reportados en su trabajo (en problemas de hasta 60 variables) muestran que la calidad de las acotaciones que se alcanzan con $[RSDP_1]$ es superior a las determinadas por todos los modelos reportados hasta esa fecha.

Sin embargo, y según la opinión de este autor, el aporte más importante de la propuesta de Burer-Vandembussche está estrechamente relacionado con las facilidades que ofrece para el desarrollo de la estrategia de ramificación que se presentará más adelante.

Con el fin de conseguir una aproximación más fina del conjunto factible, en (Chen, 2010) se propone incorporar a $[RSDP_1]$ las condiciones necesarias de segundo orden. Según su reporte, los experimentos realizados muestran una mejoría en la calidad de las acotaciones alcanzadas, pero a costa de un incremento sensible en el tiempo de resolución, motivo por el cual esta alternativa ha sido escasamente utilizada.

Más recientemente, Burer y Chen (Chen & Burer, 2012) estudiaron el vínculo del problema $[BQP]$ con problemas de programación completamente positiva. En (Burer, 2009), el autor demuestra la equivalencia del problema cuadrático (1.3.1) con el problema de programación completamente positiva (1.5.9) y utiliza esta formulación como base para la implementación de un nuevo procedimiento *B&B*. Para ello, y tomando en cuenta que los problemas de programación completamente positiva pertenecen a la clase NP-duros, Burer y Chen (Chen & Burer, 2012; Burer, 2015) se valen de la equivalencia de la condición $Y \in \mathcal{C}$ con $Y \succeq 0$, $Y \geq 0$ y $\text{rang}(Y) = k$ (en este caso con $k=1$), y relajando la condición de rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix}$, obtienen el siguiente problema de programación *doblemente no negativa*.

$$[RDNN] \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}^T \\ \tilde{q} & \tilde{Q} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix} \mid (\tilde{X}, \tilde{x}) \in \widetilde{RB} \right\} \quad (3.2.5)$$

$$\widetilde{RB} = \left\{ (\tilde{X}, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^{4n \times 4n + 4n} \left| \begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \text{diag}(\tilde{A}\tilde{X}\tilde{A}^T) = \tilde{b}^2, \\ \tilde{X}_{\tilde{E}} = 0, \quad \tilde{E} = \{i, n+i\} : i = 1, \dots, 3n\}, \\ \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \end{array} \right. \right\} \quad (3.2.6)$$

donde \mathcal{D} representa al cono convexo y cerrado de matrices doblemente no negativas.

La estructura algebraica de esta formulación brinda la posibilidad de aplicar un método de solución tipo Lagrangiano aumentado, que combinado con un método de descomposición, permiten resolver el problema (3.2.5-3.2.6) de forma eficiente. Utilizando este tipo de acotación Burer y Chen (Chen & Burer, 2012) han diseñado un nuevo método de ramificación y acotación para resolver el problema cuadrático con restricciones de caja. Los experimentos reportados (en problemas de hasta 125 variables) muestran que con este enfoque se alcanzan acotaciones de muy alta calidad con una reducción significativa del esfuerzo computacional requerido.

Tomando en cuenta que ambas relajaciones ($[RSDP_1]$ y $[RDNN]$) proporcionan muy buenas acotaciones, en este trabajo se evaluarán la utilización de las dos alternativas, para decidir cuál de ellas resulta más ventajosa dentro del esquema híbrido que se propone.

3.2.2. Elección del nodo a explorar

Existen varios criterios para determinar en que orden recorrer (explorar) el árbol generado por el método de ramificación y acotación. Este orden queda determinado por la regla que se utilice para la selección del nodo a explorar en cada iteración. Entre las reglas más utilizadas se encuentran la exploración horizontal y la exploración en profundidad (Clausen, 1999). En este trabajo se asume la regla más ampliamente utilizada, que prioriza la exploración del nodo con menor cota inferior calculada (MCI), pues se sospecha que la región factible que este define puede contener el punto de mínimo global del problema.

[Regla-MCI] (Selección del nodo con Menor Cota Inferior):

Prioriza la exploración del subproblema (P_k) con menor cota inferior calculada.

Esta es también la regla utilizada en los métodos *B&B* reportados por Vandenbussche-Nemhauser (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b), Burer-Vandenbussche (Burer & Vandenbussche, 2008a) y Burer-Chen (Chen & Burer, 2012).

3.2.3. Cálculo de las cotas superiores y eliminación de nodos

El cálculo de las cotas superiores (f_{UB}) dentro del esquema de ramificación y acotación se utiliza para la eliminación de nodos o subproblemas. Como referencia para ello se toma a la menor de todas las cotas superiores calculadas, que en lo adelante se denotará por (f_{UB}^*). Si para un subproblema (P_k) se tiene que ($f_{LB}^{(k)} > f_{UB}^*$), entonces dicho subproblema

no puede contener al mínimo global del problema original, y por tanto puede ser eliminado de la lista de candidatos.

Para determinar la cota superior $f_{UB}^{(k)}$ se propone, en general, la evaluación de la función objetivo en una solución factible del problema (P_k) (Floudas & Visweswaran, 1995).

Una mejor acotación se puede alcanzar cuando la solución factible seleccionada es un punto de mínimo local del problema. Esto es $f_{LB}^{(k)} = f(x^*)$, donde x^* es un mínimo local de (P_k) . Este es el criterio que se sigue en los algoritmos de Burer-Vandenbussche y Burer-Chen referidos anteriormente.

3.2.4. Estrategias de ramificación

Toda estrategia de ramificación consiste en la división de cierta parte de la región factible (en dos o más subregiones) por la adición de nuevas restricciones, frecuentemente asignando valores a las variables. Si el conjunto en cuestión se divide en dos, a la ramificación utilizada se le llama particionamiento dicotómico. De forma general, una estrategia de particionamiento pasa necesariamente por establecer: (a) qué reglas utilizar para la selección de la(s) variable(s) que interviene en la división del conjunto seleccionado y (b) qué reglas utilizar para la construcción de los nuevos subconjuntos.

a). Selección de la(s) variable(s) para el particionamiento.

Existen múltiples reglas heurísticas orientadas a determinar qué variable(s) seleccionar para la partición del conjunto. Una descripción de las reglas más utilizadas en el particionamiento dicotómico puede encontrarse en (Miranda *et al.*, 2015).

En este trabajo se introduce una nueva regla de selección de las variables para el particionamiento dicotómico (aporte), que prioriza la selección de las variables cuyo índice se corresponde con las componentes negativas en la diagonal principal en la matriz Q .

[Regla-RSD] (Selección basada en los elementos de la Diagonal de la matriz Q):

Seleccionar entre las variables que violan las condiciones KKT de complementariedad (1.4.3) aquella cuyo índice (i) (no seleccionado anteriormente) se corresponda con el menor elemento diagonal Q_{ii} de la matriz Q .

Tras este criterio subyace la idea de utilizar el teorema de Hansen (teorema-1.4.4) para reducir la dimensión en los subproblemas generados por la ramificación. Observe que en los problemas no convexos, (RSD) da prioridad a la selección de las componentes de (x, y, z) que corresponden a elementos Q_{ii} negativos.

Según Hansen (Hansen *et al.*, 1991), las coordenadas x_i^* de la solución óptima para [BQP], correspondientes a elementos negativos en la diagonal principal de la matriz Q ($Q_{ii} < 0$), toman uno de sus valores extremos. Como consecuencia de esto, en los subproblemas generados, se puede fijar la variable a uno de estos valores ($x_i = 0$ ó $x_i = 1$).

La condición de complementariedad (1.4.3) permite deducir que, junto con la condición $x_i = 0$ se cumple también $y_i = 0$, y que $x_i = 1$ implica $z_i = 0$. En ese caso, si el índice (i) elegido se corresponde con el índice de un elemento negativo en la diagonal principal de Q , la utilización de (RSD) implica reducir en dos la dimensión de los subproblemas hijos generados en cada iteración del algoritmo *B&B*.

b). Regla para la construcción de los nuevos subproblemas.

Una vez seleccionado el índice de las variables relacionadas con la partición, es preciso definir qué criterios seguir para la división del conjunto factible en dos nuevos subconjuntos. Por lo general, dichas reglas consisten en la adición de restricciones lineales sobre el conjunto factible que se quiere dividir. En (Miranda *et al.*, 2015) se resumen los criterios más utilizados con estos fines en el particionamiento dicotómico.

En este trabajo se elige la regla de particionamiento (PKKT) utilizada en (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b) que persigue el cumplimiento forzoso de las condiciones KKT de complementariedad eliminadas en la relajación.

[Regla-PKKT] (Partición basada en condiciones KKT de complementariedad):

*Esta regla está asociada al particionamiento de conjuntos que contienen restricciones KKT de estacionalidad (1.4.1) y de factibilidad (1.4.2). Una vez fijado el índice (i) de la variable a particionar, la división del conjunto se realiza forzando el cumplimiento de las condiciones KKT de complementariedad $y_i * (1 - x_i) = 0$, $z_i * x_i = 0$ asociadas a este índice, que fueron relajadas en el modelo. Esto implica que la construcción de los nuevos subproblemas se concreta adicionando en uno de los nodos hijos las restricciones $x_i = 0, y_i = 0$ y en el otro $x_i = 1, z_i = 0$.*

En esencia esta regla supone la construcción de cuatro conjuntos de índices I^0, I^1, I^y e I^z , definidos por:

$$\begin{aligned} I^0 &= \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | x_i = 0\} & I^1 &= \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | x_i = 1\} \\ I^y &= \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | y_i = 0\} & I^z &= \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | z_i = 0\} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

los cuales se inician todos vacíos.

La aplicación recursiva del criterio (PKKT) es equivalente a insertar índices en estos conjuntos de forma progresiva. De esta forma, cada nodo particular del árbol así generado

queda caracterizado por (3.2.7). Observe que la satisfacción de todas las condiciones de complementariedad es equivalente a la relación $I^0 \cup I^y = I^1 \cup I^z = \{1, \dots, n\}$. Esta condición caracteriza entonces al nodo final del árbol.

A simple vista se puede comprobar que este esquema sólo es aplicable a problemas cuya solución óptima se corresponde con uno de los vértices de la caja B ($Q \preceq 0$). Contemplar posibles soluciones con al menos una componente x_i en el interior de $[0;1]$ implica insertar un nodo hijo adicional caracterizado por las restricciones $y_i = 0$ y $z_i = 0$. Pero con esta tercera rama se genera entonces una árbol tricotómico. Para conservar el particionamiento dicotómico en (Vandenbussche & Nemhauser, 2005a) se propone aplicar la siguiente variación de (PKKT):

- Cuando $Q_{ii} < 0$ utilizar (PKKT) tal y como se indica en la regla descrita arriba.
- Cuando $Q_{ii} \geq 0$ utilizar la siguiente variación

$$\text{(PKKT-1)} \text{ Si } \frac{x_i^* z_i^*}{\hat{z}_i} \geq \frac{y_i^*(1-x_i^*)}{\hat{y}_i} \quad (\text{con } \hat{z}_i, \hat{y}_i \neq 0)$$

Definir los subproblemas adicionando en el primer hijo las restricciones $x_i = 0$ y $y_i = 0$, pero en el segundo sólo la condición $z_i = 0$.

$$\text{(PKKT-2)} \text{ Si } \frac{y_i^*(1-x_i^*)}{\hat{y}_i} > \frac{x_i^* z_i^*}{\hat{z}_i} \quad (\text{con } \hat{z}_i, \hat{y}_i \neq 0)$$

Definir los subproblemas insertando en el primer hijo las condiciones $x_i = 1$ y $z_i = 0$, y en el segundo sólo la condición $y_i = 0$

donde (x_i^*, y_i^*, z_i^*) corresponden a las i -te coordenadas de la solución calculada en el problema relajado, y (\hat{z}_i, \hat{y}_i) a las coordenadas de las cotas superiores de (y_i, z_i) determinadas según:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= -q_i - \sum_{j=1}^n \min\{0, Q_{ij}\} \\ \hat{z}_i &= q_i + \sum_{j=1}^n \max\{0, Q_{ij}\} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Aquí se debe resaltar que el árbol generado con el empleo del esquema de ramificación descrito (reglas SPD y PKKT), tiene un número finito de nodos. Este comportamiento se debe a la regla de partición (PKKT) empleada por vez primera en (Vandenbussche & Nemhauser, 2005a), y más tarde en las implementaciones de Burer-Vandenbussche (Burer & Vandenbussche, 2008a) y Burer-Chen (Chen & Burer, 2012).

Resumiendo, el método de ramificación y acotación que se valora emplear en este trabajo contempla evaluar cuál de las relajaciones ([RSDP1] ó [RDNN]) proporciona mejores

resultados en el cálculo de las cotas inferiores, y evaluar la función objetivo en un mínimo local del problema para el cálculo de las cotas superiores. Además se propone utilizar una estrategia de ramificación basada en el empleo de las reglas (RSD) para la selección de la(s) variable(s) objeto(s) de la partición, y definir los nuevos subproblemas utilizando la regla (PKKT), que busca el cumplimiento forzoso de las condiciones de complementariedad. Finalmente, se selecciona el subproblema con menor cota inferior (MCI) como el nodo a explorar en la próxima iteración y se repite el procedimiento.

3.3. Formulación del algoritmo híbrido

Como se indicó al inicio de este capítulo, una alternativa para resolver el problema asociado a las singularidades no tratables que aparecen durante la aplicación del método de corte y continuación, consiste en evitar su tratamiento. La aplicación de un esquema de partición sobre la región factible pudiera ser una solución a este problema.

Tomando como base estas ideas, en este trabajo se propone resolver las limitaciones señaladas al método *C&C* utilizando la siguiente estrategia:

Cada vez que el método de continuación detecta una singularidad no tratable, se procede a dividir la región factible en dos subregiones disjuntas. Dado que la singularidad detectada sólo puede estar en uno de los dos subconjuntos, la aplicación del método de continuación sobre la partición que no la contiene es una alternativa para eludir su tratamiento.

Si al aplicar el método de corte y continuación sobre el nuevo subproblema aparece otra singularidad no tratable, se realiza una nueva partición de la subregión afectada, y así sucesivamente. La aplicación sucesiva de este procedimiento brinda la posibilidad de aislar los puntos correspondientes a las singularidades no tratables, a la vez que permite continuar la búsqueda sobre las subregiones que no las contienen.

Si, adicionalmente, se dispone de un mecanismo para el cálculo de una cota inferior (f_{LB}^k) del mínimo global $f_{minglob}$ en cada subproblema (P_k), entonces, con ayuda de esta, se puede tener una medida para la calidad de las soluciones (mínimos locales) calculadas por *C&C*. Esto es: si el valor $f_{UB}^* = f(x^*)$ del mejor mínimo local x^* encontrado por *C&C* es igual al peor (menor) valor f_{LB}^* de todas las cotas inferiores f_{LB}^k calculadas, entonces se puede afirmar que la solución $(x^*, f(x^*))$ es un mínimo global del problema [BQP]. En ese caso se tiene necesariamente que $f_{minglob} = f(x^*) = f_{UB}^* = f_{LB}^*$.

De forma alternativa, se puede plantear un objetivo menos exigente, en el que sólo se pida

determinar una solución ε -aproximada para $f_{minglob}$. En ese caso el cálculo del *gap-relativo* defino por

$$gaprel = \left| \frac{f_{UB}^* - f_{LB}^*}{f_{UB}^*} \right| \quad (3.3.1)$$

puede servir para la implementación de un criterio de parada del tipo ($gaprel < \varepsilon$), donde $\varepsilon > 0$ es la tolerancia permitida.

La creación de un algoritmo híbrido, que combine el método de corte y continuación con un método de ramificación y acotación (como el presentado en el epígrafe anterior), parece ser la vía más natural para llevar a feliz término las ideas propuestas en este epígrafe.

En principio, el algoritmo híbrido que se propone debe funcionar como sigue:

Se inicia el proceso iterativo de corte y continuación que incluye el cálculo de un mínimo local x^* para [BQP] y la búsqueda, por continuación, de una solución factible $\bar{x} \in B$ que proporcione valores más pequeños de la función objetivo ($f(\bar{x}) < f(x^*)$). En cada iteración se asigna $f_{UB}^* = f(x^*)$.

Siempre que el método de continuación concluya exitosamente con una solución $\bar{x} \in M$, se procede al cálculo de un nuevo mínimo local, iniciando la búsqueda desde el punto \bar{x} .

Si el método de continuación no puede alcanzar una solución para $t = 1$, y se detiene por detectar una singularidad no tratable, entonces se aplica una iteración del método *B&B*.

Para ello se procede a calcular una cota inferior para el problema (acotación) y se verifica si el mínimo local calculado es el mínimo global del problema (o una solución “ ε - aproximada”, según sea la exigencia prefijada). En caso afirmativo el algoritmo concluye reportando a x^* como la solución global (“ ε - aproximada”) del problema.

En otro caso, se procede a dividir el conjunto factible en dos subconjuntos (ramificación), definiendo con ello dos subproblemas hijos, los cuales, inicialmente, heredan la cota inferior f_{LB}^k del problema (padre) (P_k) que les da origen.

Seguidamente se elimina el nodo padre y todos los nodos cuyas cotas inferiores sean mayor que (f_{UB}^*) (eliminación), y se coloca al resto en una lista de problemas pendientes.

Finalmente se selecciona un nodo de la lista, y se repite todo el procedimiento descrito.

El algoritmo culmina cuando se reconoce que se ha alcanzado la solución óptima (“ ε - aproximada”), en cuyo caso la lista de nodos pendientes queda vacía.

El pseudocódigo que aparece en la figura-3.3 resume el funcionamiento lógico del algoritmo híbrido propuesto.

Inicio: $Iter = 0, k=0, B_0 = B, Lista = \{0\}, x^{(0)} = \frac{1}{2}e$, fijar $TMAX$.

Paso-1: Iniciando en $x^{(k)}$, calcular un mínimo local x^* de (1.3.1) sobre B_k .
 Hacer $f_{UB}^{(k)} = f(x^*)$ y $f_{UB}^{(*)} = \min\{f_{UB}^{(j)}, j \in Lista\}$.

Paso-2: Determinar una nueva solución factible $\bar{x} \in B$ con $f(\bar{x}) \leq f_{UB}^{(*)} - \varepsilon$.
 Para ello se propone la ejecución de los pasos 2.1 a 2.4

Paso-2.1: Utilizar método de continuación para resolver problema $[P_R(t)]$ sobre B_k .
 Si se alcanza una solución \bar{x} para $[P_R(t = 1)]$, poner $k = k + 1, x^{(k)} = \bar{x}$
 y regresar al Paso-1. En caso contrario seguir al paso 2.2.

Paso-2.2: Resolver problema relajado sobre B_k para calcular cota inferior $f_{LB}^{(k)}$.
 Eliminar de $Lista$ a todas los índices $\{j\}$ con $f_{LB}^{(j)} \geq f_{UB}^{(*)}$.
 Hacer $f_{LB}^{(*)} = \min\{f_{LB}^{(j)}, j \in Lista\}$.
 Determinar índice $j^* \in Lista$ con $f_{LB}^{(j^*)} = f_{LB}^{(*)}$ (Criterio MCI)
 Hacer $Lista = Lista \setminus \{k\}$

Paso-2.3: Verificar condición de parada:
 Si $f_{UB}^{(*)} = f_{LB}^{(*)}$, FIN, x^* solución óptima para [BQP].
 Si $|\frac{f_{UB}^{(*)} - f_{LB}^{(*)}}{f_{UB}^{(*)}}| \leq \varepsilon$, FIN, x^* solución ε - aproximada para [BQP].
 Si $tiempo \geq TMAX$, x^* mejor solución calculada para el tiempo $TMAX$ establecido.
 En caso contrario, seguir al paso 2.4

Paso-2.4: Empleando el criterios RSD y PKKT, particionar B_k en dos subconjuntos disjunto
 Indexar las nuevas subcajas como B_{end+1} y B_{end+2} , ($end = \text{último elemento de } Lista$)
 Asignar $f_{I.R}^{(end+1)} = f_{I.R}^{(end+2)} = f_{I.R}^{(k)}$ y continuar al paso 2.5

Paso-2.5: Hacer $k=j^*, Iter = Iter + 1$, determinar un $x^{(k)} \in B_k$ y regresar al Paso-1.

Figura 3.3: Pseudocódigo del algoritmo híbrido

Queda aún por determinar, cuál de las dos relajaciones presentadas en el epígrafe anterior (relajación semidefinida positiva o relajación doblemente no negativa) reporta los mejores dividendos para el algoritmo. Esto presupone el desarrollo de dos alternativas del algoritmo, una para cada variante.

La convergencia del algoritmo queda garantizada por la finitud del árbol generado en el esquema de ramificación y acotación (Burer, 2009). Sin embargo, el tiempo y la memoria RAM que necesita el algoritmo para su ejecución crecen exponencialmente con las dimensiones del problema, lo cual queda determinado principalmente por la naturaleza

del método de *B&B* que lo domina.

A continuación se ilustran los pasos aspectos más importantes en el funcionamiento del algoritmo a través de un ejemplo sencillo. La solución detallada del problema planteado puede encontrarse en el Anexo-C.

Planteamiento del problema (Tomado de (Dang & Xu, 2000)).

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 1,5x_1 - x_2 : x \in S \} \\ S = \{ & x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1 \} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Dado que los valores propios de la matriz son -2 y 2 el problema clasifica como indefinido. En la figura-3.4 se puede observar la gráfica de la función objetivo.

El algoritmo inicia determinando un mínimo local (Paso-1) en el punto $x = (0; 1)$, con lo

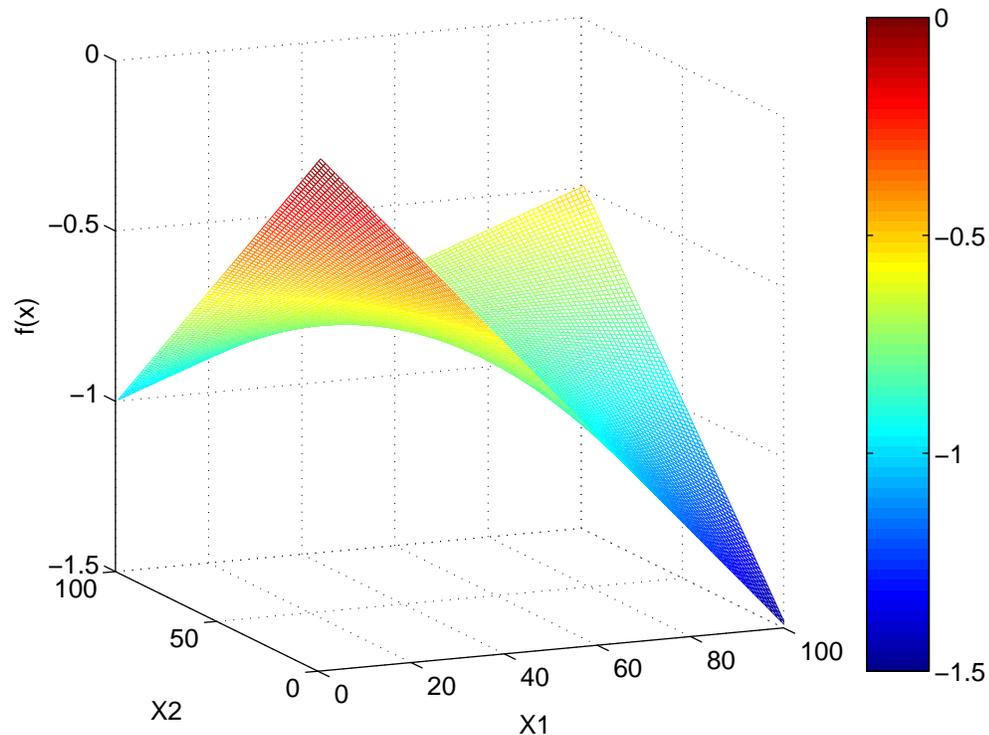


Figura 3.4: Gráfica de la función $f(x_1, x_2)$

cual $f_{UB}^{(*)} = f_{UB}^{(0)} = -1,0$, y $x^* = (0; 1)$.

En buscas de obtener una solución \bar{x} con $f(\bar{x}) < f(x^{(*)})$, se aplica entonces un paso del algoritmo de corte y continuación (Paso-2.1). Dado que *C&C* no puede alcanzar su

objetivo (se detecta un p.c.g tipo-4 en $t=0.999$ que no satisface la MFCQ, ver figura-C.2 y tabla-C.1 del Anexo-C), se procede entonces, como parte del esquema $B\&B$, al cálculo de una cota inferior $f_{LB}^0 = -1,5$.

Como $gaprel = \left| \frac{-1+1,5}{-1} \right| = 0,5$ no satisface la condición de parada, se continua entonces con la división del conjunto factible y la construcción de dos nuevos subproblemas, ambos con la misma función objetivo del problema original, pero con regiones factibles

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0; 0 \leq x_2 \leq 1\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

Finalmente se selecciona (según el criterio MCI) el subproblema con región factible B_1 y se repite nuevamente todo el proceso.

El resultado de esta nueva iteración es prácticamente el mismo de la iteración anterior, con la diferencia que la cota inferior calculada $f_{LB}^1 = -1,0$ posibilita la eliminación de este nodo de futuras exploraciones ($f_{LB}^1 = f_{UB}^*$).

Seleccionando entonces el subproblema con región factible B_2 , se determina (en la siguiente iteración) el mínimo local $x = (1; 0)$, con $f_{UB}^{(2)} = -1,5$, con lo cual $f_{UB}^{(*)} = -1,5$ y $x^* = (1; 0)$

La aplicación del método de continuación lleva nuevamente en un p.c.g. tipo-4, y al resolver el problema relajado correspondiente se tiene $f_{LB}^{(2)} = -1,5$.

Como en este caso $f_{UB}^{(*)} = f_{LB}^{(*)} = 0$, $x^* = (1; 0)$ y $f^* = -1,5$ es la solución óptima del problema. En la figura-3.5 se muestra una representación esquemática del procedimiento analizado. En el ejemplo se ilustra, cómo actúa el esquema de ramificación en la evasión de las singularidades no tratables, y cómo las cotas inferiores calculadas permiten identificar la obtención del mínimo global.

Para tener una validación seria del funcionamiento del algoritmo diseñado, se necesita, sin embargo, enfrentar el mismo a la solución de problemas de mayor variedad y envergadura. El capítulo-4, y final, está dedicado precisamente a la ejecución de una amplia y variada experimentación numérica sobre una base de problemas pruebas reconocida.

3.4. Conclusiones parciales del capítulo

El resultado fundamental del este capítulo es el desarrollo de un nuevo algoritmo para la solución del problemas cuadráticos no convexo con restricciones de caja. Como antesala de este resultado se analizan las particularidades de los métodos de ramificación y acotación diseñados para la solución de estos problemas. La combinación de un algoritmo de corte y continuación con el método de ramificación y acotación seleccionado permite en el

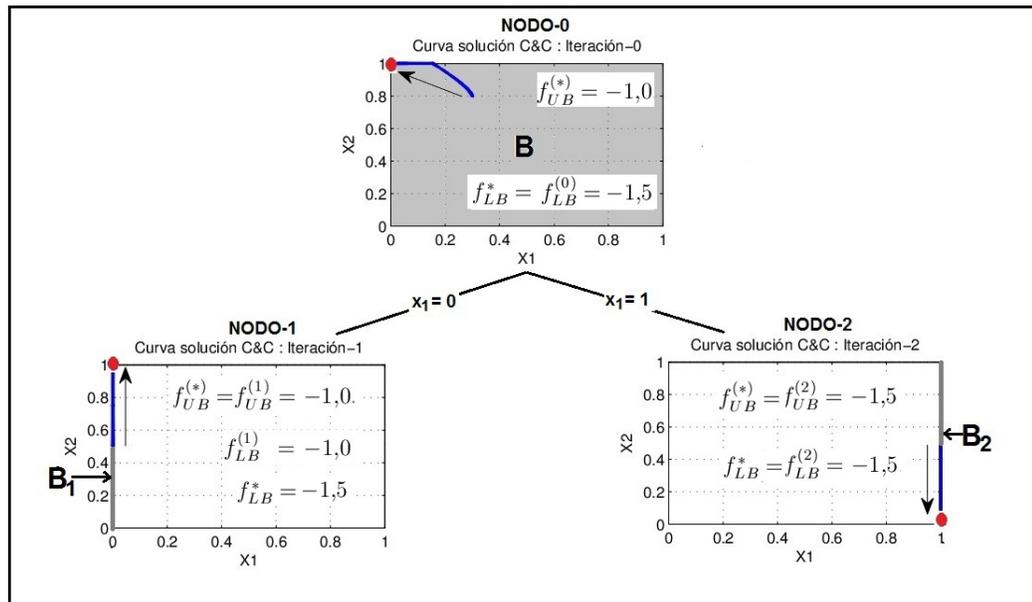


Figura 3.5: Esquema del árbol generado por el algoritmo para el ejemplo ilustrativo

algoritmo híbrido resultante resuelva las limitaciones señaladas a los dos procedimientos. Los aportes fundamentales del capítulo se resumen a continuación.

- El análisis detallado de los reportes más actuales relacionados con la implementación de los métodos de ramificación y acotación diseñados para la solución del problema [BQP] permitieron la selección de las estrategias más avanzadas en la implementación del nuevo algoritmo .
- El empleo de un enfoque de ramificación y acotación permite evitar el tratamiento de las singularidades no tratables detectadas por el algoritmo, durante la aplicación del método de continuación.
- El empleo del método de corte y continuación para el cálculo de las cotas superiores introduce cortes más restrictivos en el conjunto de soluciones factibles que mejora los mecanismos propuestos en los métodos de ramificación y acotación analizados.
- La introducción de un nuevo criterio (RSD) para la selección de la variable a particionar explota las características del problema y contribuye a disminuir la dimensión de los subproblemas hijos generados por el esquema de ramificación, aportando con ello eficiencia al algoritmo propuesto.

Capítulo 4

Experimentos computacionales y análisis de resultados

En este capítulo se describe la implementación del algoritmo propuesto y se analizan los resultados de la experimentación computacional realizada. De esta manera se argumenta la validez de combinar los métodos de corte-continuación y ramificación-acotación para resolver las limitaciones de uno y otro. En primer lugar se consideran diferentes variaciones del algoritmo híbrido en cuanto a la forma de calcular las cotas inferiores. Adicionalmente se comparan sus resultados con los de otros algoritmos reportados, y se estudia la conducta del algoritmo ante diferentes características del problema, como son su dimensión, densidad y porcentaje de valores propios negativos en la matriz Q .

Los experimentos realizados están dirigidos a buscar respuesta a las siguientes interrogantes.

1. ¿Cuál es el comportamiento del método de corte y continuación en la resolución de problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja?
2. ¿Cuánto aporta la incorporación del mecanismo de ramificación-acotación a la solución de las limitaciones del método de corte y continuación descritas en el capítulo 2, y viceversa?, y ¿cuál de las relajaciones $[RSDP_1]$ ó $[RDNN]$ resulta más ventajosa implementar?
3. ¿Cómo se comporta el rendimiento del algoritmo híbrido en comparación con otros algoritmos reportados?

4. ¿Qué relación existe entre los factores que caracterizan al problema y el comportamiento del algoritmo?.
5. ¿Cuál es la dimensión tope de los problemas que el algoritmo puede resolver para los límites de tiempo y memoria RAM establecidos?.

4.1. Sobre la implementación y la base de problemas pruebas

En este epígrafe se describen las características del programa implementado y de los problemas pruebas seleccionados para la experimentación.

4.1.1. Sobre la implementación del algoritmo híbrido

La implementación del algoritmo híbrido consiste de dos componentes fundamentales: el método de corte y continuación (*C&C*) descrito en el epígrafe-2.3 del capítulo 2 y el método de ramificación y acotación (*B&B*) presentado en el capítulo 3.

En correspondencia con la estrategia global de dos pasos descrita al final del primer capítulo, la codificación de *C&C*, a su vez, consta de dos partes: una rutina para el cálculo de los mínimos locales de [BQP] (paso-1), y la determinación de una solución factible del problema (1.3.1) que cumpla la condición de corte $g_{2n+1}(x)$ introducida en (2.1.1) (paso-2). En esta investigación, como en la mayor parte de los trabajos referenciados, se utilizará la función *quadprog.m* disponible en MatLab para el cálculo de los mínimos locales del problema cuadrático (1.3.1). Al igual que en (Chen & Burer, 2012), y buscando diversificar la búsqueda local en los diferentes niveles (subproblemas) del algoritmo, en la implementación realizada se asigna, como punto de partida $x^{(k)}$ para *quadprog.m* (Paso-2.5 del pseudocódigo, figura-3.3), a la componente x de la solución del subproblema relajado correspondiente. Con el fin de tener una solución inicial $0 \leq x^0 \leq e$, en el nodo inicial (nodo-0) la búsqueda se iniciará siempre en el centro de la caja B .

Por su parte, para la solución del segundo paso, tal y como se indica en el epígrafe-2.3 del capítulo 2, se propone aplicar un método de continuación. Buscando un programa adecuado para estos fines, se revisaron múltiples implementaciones disponibles en internet. Entre ellos, por ejemplo, PITCON (Rheinboldt & Burkardt, 1983), ALCON (Deuffhard, Fiedler,

& Kunkel, 1983), PAFO (Gollmer, Kausmann, Nowack, Wendler, & Bacallao, 1995), PHCpack (Vershelde, 1999) y PHoM (Gunji *et al.*, 2004). Sin embargo, aunque todos estos programas realizan buenas aproximaciones de una curva solución definida por un sistema de ecuaciones no lineales, el único que contempla el tratamiento de singularidades es PAFO. PAFO es un programa Fortran que ejecuta la continuación de la curva usando la librería PITCON, pero adicionalmente incluye la rutina JUMP para la ejecución de los saltos propuestos en (Guddat *et al.*, 1990) para el tratamiento de las singularidades. Sin embargo, la versión disponible de este programa está diseñada para la solución de problemas paramétricos de hasta 20 variables, que para el caso de la inmersión propuesta en este trabajo, equivale a un problema cuadrático tipo (1.3.1) con no más de 5 variables. Por esta razón fue necesario implementar un nuevo código de continuación, que, en esencia, se corresponde con el pseudocódigo-2.4 del epígrafe-2.3. El nuevo programa (en lo adelante ***CandC.m***) es una función de MatLab, que en su versión actual sólo está diseñado para la solución de problemas paramétricos tipo $P_R(t)$, pero puede resolver problemas de mucha mayor dimensión (sólo limitados por la memoria RAM disponible en la PC donde se ejecute). Entre las características específicas que distinguen al código ***CandC.m*** se cuentan:

- La implementación del mecanismo de predicción-corrección sobre el que funciona el método se realizó siguiendo el esquema trazado en (Allgower & Georg, 1990).
- Para identificar los tipos de puntos críticos generalizados que se obtienen en cada nueva iteración se implementó la lógica descrita en el pseudocódigo-2.4.
- Aunque la continuación se inicia siempre en un p.c.g. no estacionario, no es objetivo mantener esta propiedad a lo largo de la curva \hat{C} que se aproxima.
- El tratamiento para todas las singularidades tipo 3, 4 y 5 será siempre ramificar. En estos momentos el código no contempla la implementación de la estrategia de saltos propuesta por Guddat *et al.* (Guddat *et al.*, 1990). Estos resultan computacionalmente muy complicados y costosos, y se pudo comprobar en la práctica que resuelven muy pocos casos (Miranda, 2010; Miranda *et al.*, 2015). Por lo tanto, cuando el programa *CandC.m* detecta una de estas singularidades se detiene, reportando la mejor solución calculada y el tipo de singularidad determinada.

- Junto a la condición de parada $t=1$, se contempla la condición $w \geq w^0$, que según se indica en el epígrafe-2.1, también genera una solución factible del problema [QPA].

Por su parte, para la ejecución del método de ramificación y acotación ($B\&B$), y siguiendo la lógica descrita por el pseudocódigo-3.3 presentado en el epígrafe-3.3, se utiliza una variación de la función de MatLab ***quadprogbb.m***, desarrollada por Burer y Chen (Chen & Burer, 2012) que implementa dicha rutina. El código ***quadprogbb.m*** está disponible en el sitio WEB (<http://dollar.biz.uiowa.edu/~sburer>).

En consonancia con la idea de valorar las dos relajaciones que mejores resultados reportan en la literatura consultada, se implementan sobre MatLab dos variantes del algoritmo híbrido propuesto: ***CC+BB-BurVan.m*** y ***CC+BB-BurChen.m***.

Las particularidades de cada una de estas variantes se describen a continuación:

◇ ***CC+BB-BurVan.m***: Función de MatLab desarrollada para la variante del algoritmo híbrido que utiliza la relajación $[RSDP_1]$ de Burer-Vandenbussche en el cálculo de las cotas inferiores. En la implementación de este sistema se concatenan las funciones de MatLab:

- ***quadprog.m***, para el cálculo de los mínimos locales (Paso-1 del algoritmo),
- ***CandC.m***, para resolver los problemas paramétricos $[P_R(t)]$ (Paso-2.1), y
- ***quadprogBB-BurVan.m***, variante de la función de MatLab ***quadprogbb.m***, que utiliza los códigos ***cvx.m*** (Grant & Boyd, 2014) y ***sdpt3.m*** (Toh, Tutuncu, & Todd, 2012) diseñados para resolver problemas de programación semidefinida positiva (Paso-2.2).

◇ ***CC+BB-BurChen.m***: Función de MatLab que codifica la variante del algoritmo híbrido que emplea la relajación $[RDNN]$ de Burer-Chen en el cálculo de las cotas inferiores. Como en el caso anterior, este sistema contiene las las siguientes funciones de MatLab:

- ***quadprog.m***, para el cálculo de los mínimos locales (Paso-1),
- ***CandC.m***, para la ejecución del método de continuación (Paso-2.1), y
- ***quadprogBB-BurChen.m***, variante de la función de MatLab ***quadprogbb.m***, que incluye la función ***opt_dnn.m*** desarrollada por Burer y Chen (Burer, 2010) para resolver problemas de programación doblemente no negativa (Paso-2.2).

Son dos las variaciones introducidas al código *quadprobb.m*, y las mismas son comunes a las dos variantes (*BurVan* y *BurChen*) descritas arriba:

- Las cotas superiores f_{UB}^k , indicadas en el paso-1, se obtienen evaluando la función objetivo del [BQP] en los mínimos locales determinados por *CandC.m*.
- Para la estrategia de ramificación (Paso-2.4) se utiliza el criterio (RSD), que prioriza la selección de las variables con índices asociados a componentes negativas en la diagonal principal de la matriz Q . (En (Burer & Vandenbussche, 2008a) y (Chen & Burer, 2012) se utiliza el criterio (SKKT), que prioriza la selección del índice correspondiente a la mayor violación de las condiciones KKT (1.4.3) de complementariedad).

En ambos casos se ha fijado un tiempo límite de cálculo igual a 40000 CPU-seg y una tolerancia $\varepsilon = 0,01$. Se debe aclarar, además, que la codificación de todos estos algoritmos no es un producto informático terminado, sino una herramienta de apoyo a la investigación.

4.1.2. Sobre los problemas pruebas utilizados

Para la experimentación computacional se seleccionó la base de problemas pruebas de programación cuadrática con restricciones de caja utilizada en (Chen & Burer, 2012), disponibles en <http://dollar.biz.uiowa.edu/~sburer>, más 27 problemas adicionales de mayor dimensión generados por el autor. Esta base de problemas está integrada por:

- 54 *problemas básicos*, con dimensiones de entre 20 y 60 variables, introducidos por Vandenbussche y Nemhauser en (Vandenbussche & Nemhauser, 2005a), y
- 36 *problemas extendidos*, con dimensiones de entre 70 y 100 variables, propuestos por Burer y Chen (Chen, 2010; Burer & Chen, 2011).

Adicionalmente, y con el fin de extender el estudio a problemas de mayor dimensión se utilizará también un conjunto de 36 problemas, conformado por:

- 9 *problemas extras* de 125 variables utilizados por Burer en (Burer, 2010), y
- 27 *problemas extras* generados de forma aleatoria para este trabajo, de ellos 9 tienen 150 variables, otros 9 con 175 variables y 9 con 200 variables.

Todos los problemas extras fueron obtenidos usando el mismo código (*genboxqp.m*) empleado para generar los problemas básicos y extendidos. (*genboxqp.m*) es una función de MatLab desarrollada por Burer y Vandembussche (Burer & Vandembussche, 2008b) y está disponible en el mismo sitio de los problemas pruebas <http://dollar.biz.uiowa.edu/~sburer>.

Para identificar cada problema se empleará la tupla (N-D-S), donde N es la dimensión (número de variables) del problema, D la densidad (porcentaje de elementos distintos de cero) de la matriz Q y S la semilla utilizada para la generación aleatoria. Para cada combinación de N y D se generan tres réplicas del problema tomando para ello las semillas (S=1,2,3) en el generador de números aleatorios (*rand.m*) de Matlab. Así por ejemplo la notación 50-60-1 indica que el problema tiene 50 variables, el 60 % de los elementos de la matriz Q son diferentes de 0, y que para la generación aleatoria de este problema se utilizó la semilla S=1.

Un aspecto no estudiado en los trabajos referidos hasta aquí, es el comportamiento del algoritmo en relación con las características del problema. Esto es: ¿cómo se comporta el algoritmo, en dependencia de la dimensión (N), de la densidad (D), del porcentaje de valores propios negativos (\widehat{QI}) y la condición (κ) de la matriz Q ?

En la tabla-D.1 del Anexo-D se muestran las características de las matrices correspondientes a los problemas pruebas en relación con los factores citados ($N, D, \widehat{QI}, \kappa$). La información correspondiente al porcentaje de valores propios negativos y la condición de las matrices Q son características de la base de problemas pruebas no publicadas anteriormente. La información que se muestra en la tabla evidencia que la biblioteca utilizada abarca un amplio rango de problemas respecto a sus dimensiones ($20 \leq N \leq 200$), a la densidad de la matrices ($20\% \leq D \leq 100\%$), y su condición ($27,5 \leq \kappa \leq 15164,51$). Sin embargo, todas las matrices que conforman la base de problemas pruebas tienen aproximadamente el mismo porcentaje de valores propios negativos ($\widehat{QI} \approx 50\%$).

En consecuencia, para estudiar el efecto de este factor en el comportamiento del algoritmo será necesario generar nuevos problemas, cuyas características serán descritas más adelante, en el epígrafe-4.5.

La corrida de los experimentos se realizó en un procesador Intel(R) Core(TM) i3-3110M a 2.40 GHz con 2.00 GB de memoria RAM, bajo el sistema operativo windows 7 Profesional. En los epígrafes que siguen se describen los experimentos computacionales realizados y se analizan los resultados alcanzados, sobre cuya base se busca dar respuesta a las

interrogantes formuladas en la introducción de este capítulo.

4.2. El método de Corte y Continuación. Resultados.

El objetivo central de este primer grupo de experimentos está dirigido a estudiar el comportamiento del método de corte y continuación puro (*C&C*) ante la solución de problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja.

Los criterios a medir para caracterizar dicho comportamiento serán: *la efectividad del procedimiento, la calidad de las soluciones alcanzadas, y el esfuerzo computacional requerido para ello.*

En la tabla-4.1 se compactan los resultados extraídos al resolver los 90 problemas pruebas clasificados como *básicos* y *extendidos* en el epígrafe-4.1.2. En la columna (*Glob*)

<i>Prob.</i>	Total	<i>Glob</i>	<i>Loc</i>	Salida
Básicos	54	50	4	p.c.g. tipo-4 + no MFCQ
Extendidos	36	24	12	p.c.g. tipo-4 + no MFCQ

Tabla 4.1: Resumen de resultados para el método *C&C*.

se muestra el número de problemas pruebas (74 de 90), en los cuales el valor $f_{minglob}$ correspondiente a la solución óptima determinada por el código *CandC.m* coincide con el valor óptimo reportado en el sitio <http://dollar.biz.uiowa.edu/~sburer>. Adicionalmente, se pudo verificar que en los 90 problemas pruebas resueltos (para los que se alcanza la solución óptima y para los que no), el método *C&C* siempre concluye reportando que ha encontrado un p.c.g. tipo-4, en el cual no se satisface la condición de regularidad MFCQ (ver columna “Salida”). En todos los casos se pudo comprobar, que la componente x en tales puntos coincide con un mínimo local de [BQP] (ver lema-2.3.1).

Como consecuencia de este resultado, se puede concluir que la condición de salida del algoritmo no permite identificar, si la solución calculada es un mínimo global del problema o si sólo se trata de un mínimo local de este. Para ilustrar lo anterior basta con observar el comportamiento de *CandC.m* en los tres problemas básicos con $N=20$.

En la tabla-D.2 del Anexo-D se muestran el valor de la función objetivo para la solución calculada por *C&C* (f_{minloc}^*) y el valor óptimo reportado en la web ($f_{minglob}^{WEB}$) para los tres problemas referidos. Obsérvese que en los problemas 1 y 3 se tiene $f_{minloc}^* = f_{minglob}^{WEB}$. En

ese caso la diferencia $dif = f_{minloc}^* - f_{minglob}^{WEB} = 0$ (columna “dif”). En el problema 2, sin embargo, el algoritmo se detiene en un mínimo local, que no es global ($f_{minloc}^* > f_{minglob}^{WEB}$) y ($dif = 5,441$).

Si se revisa ahora la columna (“Salida”) de la tabla, se puede comprobar que en los tres casos, la causa por la cual se ha detenido la búsqueda es la misma: se ha detectado un p.c.g. tipo-4, para el cual que no se satisface la MFCQ.

Conclusión: la condición de salida del algoritmo C&C no permite diferenciar si la solución encontrado es un mínimo global o un mínimo local del problema.

Respecto a la calidad de las soluciones aportadas por C&C, sin embargo, los experimentos realizados muestran muy buenos resultados. En la figura-D.1 del Anexo-D se representa el gab-relativo ($gaprel = \frac{f_{minloc}^* - f_{minglob}^{WEB}}{|f_{minglob}^{WEB}|}$). Como bien se puede observar, en todos los casos (incluyendo los 16 problemas no resueltos por *CandC.m*), el gab-relativo es inferior al 4% ($gaprel < 0,04$).

Por otro lado, en la figura-D.2 del mismo Anexo-D se muestra cómo, a medida que incrementa la dimensión de los problemas, aumenta la diferencia entre el primer mínimo local calculado (cota superior en *quadprogBB-BurChen.m* y *quadprogBB-BurChen.m*) y la solución final reportada por C&C (cota superior para el algoritmo híbrido).

Respecto al esfuerzo computacional requerido para alcanzar tales resultados, la figura-D.3 del Anexo-D muestra que, en promedio (subrayado) se requieren 2 ó 3 iteraciones C&C (máximo 4), mientras que el tiempo total de ejecución resulta inferior a los 350 CPU-segundos (ver figura-D.4 del Anexo-D).

Una alternativa para reconocer si la solución calculada es la solución óptima de [BQP] consiste en el empleo de los criterios de optimización enunciados en los teoremas 1.4.5, 1.4.6 y 1.4.7 del primer capítulo. En la tabla-O.1 del Anexo-O se resumen los resultados de la aplicación de estos tres criterios sobre los 54 problemas básicos ($20 \leq N \leq 60$).

• **Criterio de Murty**

Los resultados relacionados con este criterio se encuentra reflejados en la última columna (“Murty”) de la tabla. En este caso, la cadena de ceros (0) y unos (1) que se muestra en dicha columna se debe interpretar como sigue. Un (1) en la posición (i) indica que el mínimo local x_{loc} determinado por *CandC.m* en la iteración (i) coincide con la solución x_{PL} del PL (1.4.6) asociado a este, mientras que, por el contrario, un (0) en la misma posición indica que x_{loc} no es la solución de dicho PL. Así, por ejemplo, en el problema

20-100-1, la cadena (01) indica que el mínimo local x_{loc} , calculado por $C\&C$ en la primera iteración, no coincide con la solución x_{PL} del PL (1.4.6) a él asociado, y en consecuencia, según Murty, x_{loc} no es un mínimo global para [BQP]. Por su parte, el uno (1) que aparece como segundo dígito de la cadena indica que el mínimo local x_{loc} determinado por $CandC.m$ en la segunda iteración, es también la solución del PL (1.4.6) a él asociado, con lo cual, según Murty, este sí es un candidato a mínimo global de [BQP].

De esta suerte, y para que el criterio de Murty pueda ser útil, es de esperar que, en los 4 *problemas básicos* 20-100-2, 30-70-1, 50-40-3 y 50-50-1, no resueltos por $C\&C$, se obtengan cadenas de puros ceros (00...0). Esto indica que ninguno de los mínimos locales calculados es el mínimo global. Por su parte, en cada uno de los problemas, donde $CandC.m$ determinó un mínimo global, se debe obtener una cadena de ceros terminada con un uno (00...01), indicando que el único candidato a mínimo global es el último mínimo local.

Sin embargo, al revisar en la tabla-O.1 las cadenas (101, 001, 011, 100) correspondientes a los problemas no resueltos por $CandC.m$, estas no se corresponden con los resultados esperados. Es más, según esta información, en los tres primeros casos, el último mínimo local calculado por $CandC.m$ es candidato a mínimo global del problema (terminan en 1). Similar diferencia se observa cuando se contrastan las cadenas correspondientes a los 50 problemas en los que la solución de $CandC.m$ coincide con la reportada en la WEB. El resultado esperado sólo se obtiene en 21 de los casos. Es más, en 14 de ellos se obtienen cadenas de ceros, comportamiento este asociado a los problemas no resueltos.

Estas inconsistencias hacen que el criterio de Murty no sea una herramienta confiable para determinar el carácter de las soluciones obtenidas por $C\&C$.

- ***Criterio de DeAngelis***

Al evaluar la pertinencia del criterio de DeAngelis, se pudo comprobar que el mismo no se satisface para ninguno de los problemas estudiados. En todos los casos se tiene que la matriz Hessiana $Q + D$ resultante, asociada a la función $\rho(x) = f(x) + (x - \bar{x})^T D(x - \bar{x})$, contiene valores propios negativos (tercera columna “deAngelis” de la tabla-O.1 en el Anexo-O).

• *Criterio de Neumaier*

Finalmente, el criterio de Neumaier no se satisface para ninguna de las soluciones óptimas citadas, pues en todos los casos $\alpha = \sum_{j=1}^m |a_j| > 1$, y con ello no se puede utilizar la conclusión del teorema-1.4.7.(ver columna “Neumaier” de la tabla-O.1 en el Anexo-O).

En resumen, luego de estos resultados se tiene que ninguno de los criterios citados puede utilizarse para resolver la problemática de reconocer el carácter de las soluciones calculadas por el método de corte y continuación.

Como conclusión final de este epígrafe queda demostrado que, a pesar de los buenos resultados que muestra método de corte y continuación en la solución de problemas cuadráticos con restricciones de caja, las limitaciones inherentes a él:

- (A1) no puede resolver las dificultades asociadas a las singularidades no tratables, y
- (A2) carece de un criterio para reconocer cuándo se ha alcanzado la solución óptima, impiden su aplicación práctica exitosa.

4.3. Análisis del Algoritmo híbrido

El estudio del comportamiento del método de corte y continuación sirvió también para mostrar sus limitaciones fundamentales. La hipótesis fundamental de este trabajo se traduce en que la utilización de un método de ramificación y acotación (*B&B*) puede resolver ambas dificultades. Las características fundamentales del algoritmo híbrido propuesto se resumen a continuación:

- En el cálculo de las cotas superiores se utiliza el método de corte y continuación.
- En el paso de ramificación, se utiliza el criterio RSD para la selección del índice de las variables sobre las cuales se efectuará la partición, y la construcción de los nuevos subproblemas se realiza siguiendo la regla PKKT.
- Seleccionar el subproblema con menor cota inferior como el nodo a resolver en la próxima iteración (regla MCI).
- Finalmente, para el cálculo de las cotas inferiores se propone seleccionar, entre las relajaciones [*RSDP*₁] de Burer-Vandenbussche y [*RDNN*] de de Burer-Chen, aquella que proporciona mejores resultados.

Se espera, además, que el empleo del esquema de corte y continuación proporcione mejores cotas superiores que los métodos *B&B* estudiados, reforzando con ello la estrategia de eliminación de nodos del algoritmo.

Para evaluar el rendimiento de los algoritmos se tomarán en cuenta los parámetros:

- calidad de las soluciones (cotas superiores f_{UB}^* obtenidas),
- número total de nodos creados (TNC),
- número total de iteraciones (nodos resueltos o explorados) (NTI),
- la iteración en que se determina el mínimo global (ITO), y
- tiempo total Requerido (TTR).

La diferencia que existe entre ITO y NTI, es que, la primera designa a la iteración en que el algoritmo encuentra la solución óptima, mientras que NTI es el número total de iteraciones que realiza el algoritmo, que incluye, además, todas las iteraciones necesarias para demostrar que la solución encontrada es un mínimo global del problema.

Como en (Burer & Vandembussche, 2008a) y (Chen & Burer, 2012), para comparar las dos variantes del algoritmo híbrido entre sí, se utilizará una gráfica log-log por cada parámetro (TNC, NTI, ITO, TTR). En cada una de ellas, las coordenadas (x,y) asociadas a una instancia o problema corresponden al valor del parámetro que se mide, calculado por cada uno de los procedimientos que se comparan. Una instancia (a,b) ubicada por debajo de la línea diagonal ($y = x$), indica que el valor (b) del parámetro analizado, calculado por el código *CC+BB-BurChen.m*, ubicado en la ordenada, es inferior al valor (a) determinado por *CC+BB-BurVan.m* que se representa en la abscisa.

Con el objetivo de determinar ¿cuál de las dos variantes del algoritmo híbrido (*CC+BB-BurChen.m* ó *CC+BB-BurVan.m*) muestra mejor desempeño?, se procede a resolver los 90 problemas pruebas (*básicos* y *extendidos*) presentados en el epígrafe-4.1.2. En los Anexos E y F de este trabajo se presentan, de forma detallada, los resultados alcanzados por ambos algoritmos.

Un primer resultado, sobre el que se desea llamar la atención demuestra que, en todos los casos, el valor $f_{minglob}$ determinado por ambos códigos coinciden, cuando menos en 8 cifras significativas, con los valores reportados en el sitio WEB.

Asimismo se observa que la estrategia de ramificación diseñada (igual para las dos variantes), cumple con el propósito para el que fue diseñada: “evadir el tratamiento de las singularidades no tratables”. Evidencias de este comportamiento se puede encontrar, por ejemplo, cuando ambos algoritmos logran evadir exitosamente las singularidades no tratables detectadas al resolver los 16 problemas no resueltos por *C&C* (ver tabla-4.1), y continuar con la exploración, determinando en todos los casos el mínimo global para estos problemas.

Como dato adicional, vale destacar que *CC+BB-BurVan.m* sobrepasa el límite de tiempo prefijado (40000 seg) en 13 de los 90 problemas resueltos. Excepto en estos casos, la condición de parada ($gaprel = 0$) funciona correctamente (en los dos algoritmos) como criterio para identificar el mínimo global de cada problema.

Estos resultados son evidencias experimentales que muestran cómo la utilización del método B&B permite resolver las limitaciones (A1) y (A2) señaladas al método C&C. Seguidamente se compara el rendimiento de las dos variantes del algoritmo híbrido entre sí, respecto a los parámetros propuestos (TNC,NTI,ITO,TTR). Para ello se emplearán, como en el epígrafe anterior, las gráficas tipo log-log.

• ***Comparación del número total de iteraciones y el tiempo total requerido.***

En la figura-4.1 se representa el número total de iteraciones (NTI) realizadas por las dos variantes del algoritmo en una escala log-log. En la gráfica se observa claramente cómo el número total de iteraciones que necesita el algoritmo que emplea la relajación [*RDNN*] es inferior al número total de iteraciones que necesita cuando el mismo utiliza la relajación [*RSDP₁*] (todas las mediciones están por debajo de la línea $y=x$).

Por su parte, en la figura-4.2 se observa cómo, en la gran mayoría de los problemas (con excepción de uno), el algoritmo que emplea la relajación [*RDNN*] resuelve los problemas en menor tiempo (TTR) que cuando utiliza la relajación [*RSDP₁*].

En particular se tiene que la variante con [*RDNN*] resuelve todos los problemas dentro del límite de tiempo prefijado, mientras que la variante con [*RSDP₁*] resuelve sólo 77 en ese rango de tiempo. En los 13 problemas restantes (ubicados sobre la línea vertical que marca los 40000 segundos) *CC+BB-BurVan.m* se ve obligado a abortar sin poder comprobar si la mejor solución calculada es o no el mínimo global del problema ($gaprel > 0,01$).

Para comprobar si las diferencias detectadas son o no significativas, se aplica entonces una prueba de suma de rangos de Wilcoxon para muestras pareadas (Berry, Mielke,

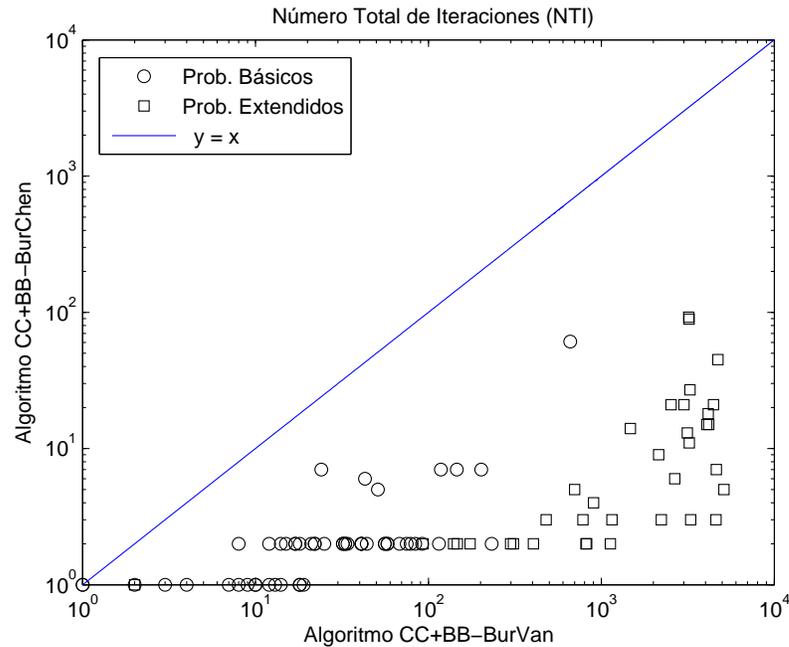


Figura 4.1: Comparación de las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones realizadas.

& Johnston, 2012; Nahm, 2016). Esta prueba (estadística no paramétrica) permite identificar si las muestras comparadas proceden de poblaciones con la misma distribución de probabilidad (hipótesis nula H_0). La hipótesis alternativa (H_1), por su parte, establece que hay diferencias significativas respecto a la tendencia central de las poblaciones.

Como resultado de la comparación de las muestras pareadas correspondientes a los resultados NTI y TTR (ver Anexos-E y F), se obtiene (para ambos casos), según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon (ver dos primeras filas de la tabla-G.2 en el Anexo-G), que se debe rechazar la hipótesis nula ($p - value < 0,05$). Este resultado permite concluir que hay evidencia estadística que demuestra la existencia de diferencias significativas entre los valores NTI y TTR calculados por *CC+BB-BurChen* y *CC+BB-BurVan*, que como se pudo ver antes, favorece a la primera.

- ***Comparación respecto al total de nodos creados y al número de iteraciones realizadas para encontrar la solución óptima.***

En la figura-G.1 del Anexo-G se representa el número total de nodos creados (TNC) por los códigos *CC+BB-BurChen.m* y *CC+BB-BurVan.m* en una escala log-log. Aquí se puede comprobar que, cuando el algoritmo utiliza la relajación [RDNN], se genera un número

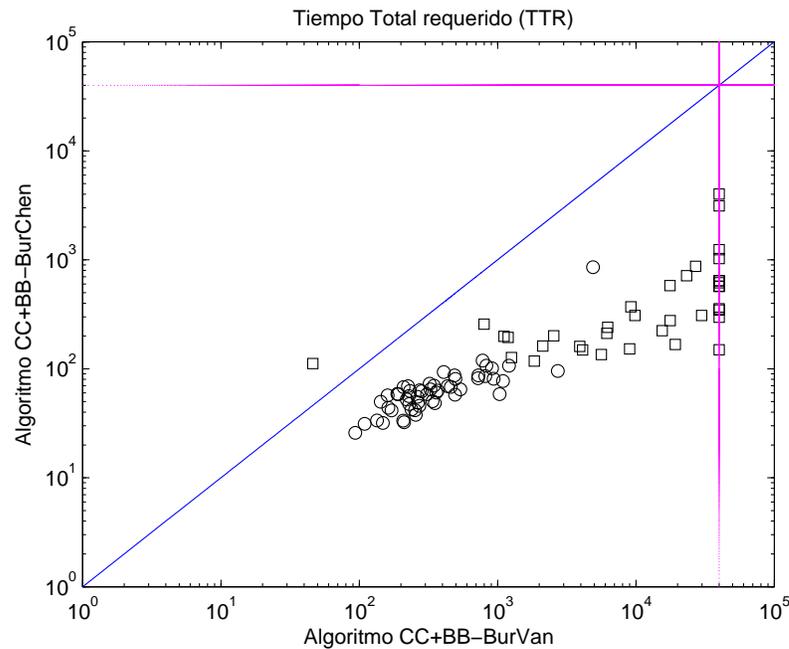


Figura 4.2: Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al tiempo total requerido.

inferior de nodos al generado cuando utiliza la relajación $[RSDP_1]$.

Por su parte, en la figura-G.2 del Anexo-G se puede verificar que la versión que utiliza la relajación $[RDNN]$ alcanza la solución óptima, por lo general, en menos iteraciones que cuando utiliza la relajación $[RSDP_1]$.

Para comprobar si las diferencias detectadas son o no significativas, se procede (igual que con NTI y TTR) a aplicar una prueba de suma de rangos de Wilcoxon para muestras pareadas. Como resultado de la comparación de las muestras correspondientes a TNC e ITO (ver Anexos-E y F), se obtiene (para ambos casos), según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon (ver dos últimas filas de la tabla-G.2 en el Anexo-G), que se debe rechazar la hipótesis nula ($p - value < 0,05$). Este resultado permite concluir que hay evidencia estadística que demuestra la existencia de diferencias significativas entre los valores TNC e ITO calculados por $CC+BB-BurChen$ y $CC+BB-BurVan$, que como se pudo ver antes, favorece a la primera.

Tomando en cuenta estos resultados se puede concluir que el empleo de la relajación doblemente no negativa $[RDNN]$ de Burer y Chen proporciona un rendimiento superior del algoritmo híbrido en todos los aspectos evaluados. Esta será entonces la variante

seleccionada para el resto de la experimentación, y en lo adelante (mientras no se especifique lo contrario), se referirá a ella simplemente como el *algoritmo híbrido*.

La experimentación realizada permitió, asimismo, estudiar la relación entre el número de iteraciones del algoritmo híbrido seleccionado (*CC+BB-BurChen*) y la dimensión de los problemas resueltos. En la figura-G.3 del Anexo-G se puede constatar que la situación más frecuente reportada, en este caso, es la ejecución de 2 iteraciones del algoritmo híbrido. En la misma figura se observa que, con el incremento de la dimensión (problemas extendidos), también aumenta el número de veces en que el algoritmo necesita 10 o más iteraciones para determinar la solución óptima del problema. Por otra parte, los elementos aportados en el epígrafe-4.2, evidencian que las cotas superiores calculadas por el método de corte y continuación del método híbrido son muy buenas (y en muchos casos el mínimo global del problema). Tomando en cuenta que su ejecución tiene asociado un costo computacional no despreciable, resulta natural cuestionarse si realmente conviene ejecutar el paso de corte y continuación en todas las iteraciones del algoritmo.

Para responder a esta interrogante se realizaron varios experimentos, consistentes en la aplicación repetida del algoritmo híbrido variando en cada uno de ellos el número de iteraciones (MAXPAFO) en que se aplica *C&C*. En tales casos, el cálculo de las cotas superiores, en las iteraciones posteriores a (MAXPAFO), se realiza como en (Chen & Burer, 2012), buscando sólo un mínimo local del problema.

En la tabla-G.1 del Anexo-G se compara el número de iteraciones *B&B* necesitadas por el algoritmo híbrido para encontrar el mínimo global en los 16 problemas no resueltos por *C&C* (ver tabla-4.1 y figura-D.3 del Anexo-D), utilizando para ello MAXPAFO = 1 y MAXPAFO = 5. Como se puede observar en la tabla, en la mayoría de los casos, las dos alternativas precisan la misma cantidad de iteraciones *B&B* para obtener la solución óptima del problema (sólo en el problema 50-40-3 se reduce de 2 a 1). Tomando en cuenta, además, la diferencia entre los tiempos totales requeridos para la ejecución de ambas estrategias (ver figura-G.4 del Anexo-G), resulta evidente que el esfuerzo computacional requerido es notablemente superior cuando MAXPAFO = 5.

A partir de este resultado se puede concluir que las mejoras alcanzadas por la utilización del método *C&C* en más de una iteración no se corresponde con el esfuerzo computacional requerido para ello. Luego, en lo adelante se trabajará, fijando el parámetro MAXPAFO=1.

4.4. Comparación con otros algoritmos

A continuación se compara el algoritmo híbrido seleccionado con los métodos de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche (Burer & Vandenbussche, 2008a) y de Burer-Chen (Chen & Burer, 2012), los dos métodos más eficientes reportados en la literatura consultada para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja.

Las características fundamentales de estos procedimientos fueron presentadas durante el desarrollo de la sección-3.2 del capítulo anterior.

Para evaluar el rendimiento de los algoritmos se tomarán en cuenta los mismos parámetros establecidos en el epígrafe anterior (TNC,TTR,ITO,NTI). Adicionalmente se contempla el *gap-relativo* para evaluar la calidad de la solución calculada en aquellos problemas donde el algoritmo se detiene por alcanzar el límite de tiempo prefijado o por exceder la capacidad de memoria RAM disponible en la máquina.

4.4.1. Comparación con el método de Burer-Vandenbussche

A continuación se presentan los resultados de la comparación entre el algoritmo híbrido propuesto y el método de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche (Vandenbussche & Nemhauser, 2005b). Las diferencias fundamentales entre los dos algoritmos que se comparan se resumen en la tabla-4.2. Estas diferencias provocan

Criterio	Algo. híbrido	Método BB-BurVan
Cálculo de las cotas inferiores	Relajación [RDNN]	Relajación [$RSDP_1$]
Cálculo de las cotas superiores	Método $C\&C$	Cálculo de un mínimo local
Selección del índice de ramificación	Regla RSD	Regla SKKT

Tabla 4.2: Diferencias fundamentales entre el algoritmo híbrido y el método $B\&B$ de Burer-Vandenbussche.

naturalmente un comportamiento también diferente en cuanto al rendimiento de ambos algoritmos. En los Anexos-F y H (respectivamente) se muestran de forma detallada los resultados de la experimentación realizada por cada uno de los algoritmos. En los tópicos que se presentan a continuación se resumen los resultados más significativos para esta comparación, acompañado de las gráficas log-log que propician una mejor comprensión de los mismos.

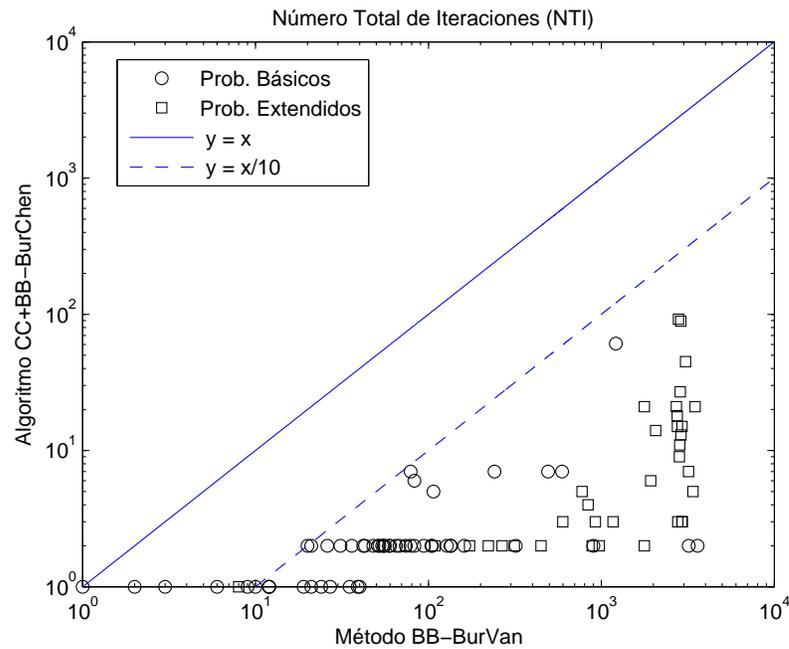


Figura 4.3: Comparación entre el método $B\&B$ de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número total de iteraciones

• **Comparación del número total de iteraciones y el tiempo total requerido.**

En la figura-4.3 se representa el número total de iteraciones (NTI) realizadas por el algoritmo híbrido (eje-y) contra las iteraciones realizadas por el método $B\&B$ de Burer-Vandenbussche (eje-x). En la misma se evidencia que, en todos los problemas, el algoritmo propuesto necesita un número considerablemente menor de iteraciones para resolver los problemas pruebas que el método de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche. La línea discontinua $y = \frac{x}{10}$ permite corroborar además que, en la mayoría de los casos, el número de iteraciones realizadas por el algoritmo híbrido es cuando menos 10 veces menor que el número de iteraciones ejecutadas por el método $B\&B$ de Burer y Vandenbussche. Por su parte, en la figura-4.4 se observa que, en general, el algoritmo híbrido necesita menos tiempo (TTR) para resolver los problemas que el método de Burer-Vandenbussche. En particular, se pudo observar que el algoritmo propuesto resuelve todos los problemas antes del límite de tiempo prefijado, mientras que el método de Burer-Vandenbussche tiene que concluir forzosamente en 13 de ellos (prácticamente todos los problemas con 80 o más variables), por sobrepasar este límite de tiempo. En la gráfica, estos 13 problemas se corresponden con las instancias ubicadas sobre la línea vertical correspondiente a los

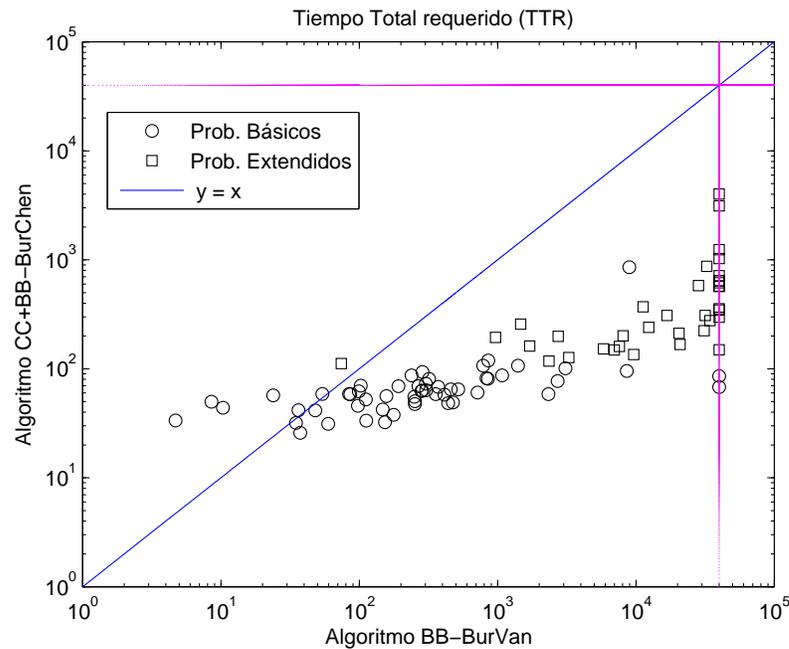


Figura 4.4: Comparación entre el método de BB-BurVan y el algoritmo híbrido respecto al tiempo total de requerido.

40000 CPU-segundos. En todos estos casos, el *gap-relativo* calculado para estas instancias supera la tolerancia prefijada ($0,0139 \leq \text{gaprel} \leq 0,0384$).

• ***Comparación respecto al total de nodos creados y al número de iteraciones realizadas para encontrar la solución óptima.***

En la figura-I.1 del Anexo-I se representa el total de nodos creados (TNC) por el algoritmo híbrido (eje-y) contra los nodos creados por el método *B&B* de Burer-Vandenbussche (eje-x). La lectura de esta gráfica evidencia que, para todos los problemas, el árbol generado por el algoritmo híbrido tiene un número considerablemente menor de nodos (máximo 159) que el generado por el método de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche (máximo 10231). Observe que todas las instancias aparecen por debajo de la diagonal principal (línea $y = x$). Adicionalmente, la línea discontinua $y = \frac{x}{10}$ muestra que, en la mayoría de los casos, el número de nodos creados por el algoritmo híbrido es, cuando menos, 10 veces menor que los generados por su contraparte.

En la figura-I.2 del Anexo-I, por su parte, se observa claramente que el algoritmo híbrido logra alcanzar la solución óptima (ITO) en un número considerablemente menor de

iteraciones que el método de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche. Este resultado es una evidencia la efectividad del mecanismo *C&C* para el cálculo de las cotas superiores. Del epígrafe-4.2 se conoce que el método de corte y continuación encuentra la solución óptima en 74 de los 90 problemas resueltos. De esta forma, el algoritmo híbrido diseñado también encuentra la solución óptima de todos esos problemas en la primera iteración (instancias ubicadas sobre el eje x).

Como en el epígrafe anterior, para comprobar si las diferencias detectadas son o no significativas, se procede a aplicar una prueba de suma de rangos de Wilcoxon para muestras pareadas para los cuatro parámetros analizados (ver Anexos-AnexoCap5D y H). Como resultado de estas pruebas (ver tabla-I.1 en el Anexo-I) se puede concluir que (en todos los casos) se debe rechazar la hipótesis nula ($p - value < 0,05$). Este resultado permite concluir que hay evidencia estadística que demuestra la existencia de diferencias significativas entre los valores de NTI, TTR, TNC e ITO calculados por *CC+BB-BurChen* y *BB-BurVan*, que como se pudo ver antes, favorece a la primera.

4.4.2. Comparación con el método de Burer-Chen

Entre todos los métodos revisados, el método de ramificación y acotación de Burer-Chen es el método que mejores resultados muestra al resolver problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja, lo cual concuerda con los reportes citados (Chen & Burer, 2012). Las diferencias fundamentales entre este método y el algoritmo híbrido propuesto en este trabajo se resumen en la tabla-4.3. En los Anexos-F y J aparecen los resultados detallados

Criterio	Algoritmo híbrido	Método <i>B&B</i> de Burer-Chen
Cálculo de las cotas superiores	Método <i>C&C</i>	Cálculo de un mínimo local
Selección del índice de ramificación	Regla RSD	Regla SKKT

Tabla 4.3: Diferencias fundamentales entre el algoritmo híbrido y el método *B&B* de Burer-Chen.

que miden el desempeño de los dos algoritmos ante la solución de los 90 problemas pruebas (básicos y extendidos) seleccionados. La revisión de estos resultados muestra nuevamente que el algoritmo híbrido tiene, en sentido general, un mejor desempeño que el método de Burer-Chen. Las evidencias de este comportamiento se puede apreciar en las gráficas log-log que se muestran en las figuras-4.5 y 4.6.

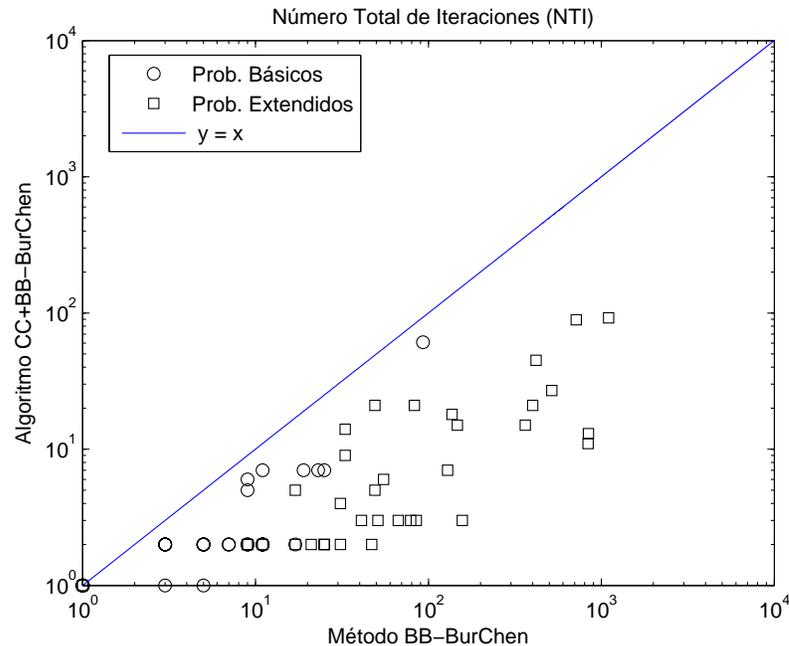


Figura 4.5: Comparación entre el algoritmo híbrido CC+BB-BurChen y el método *B&B* de Burer-Chen respecto al número total de iteraciones

• **Comparación del número total de iteraciones y el tiempo total requerido.**

En la figura-4.5 se representa el número total de iteraciones (NTI) realizado por ambos procedimientos para la solución de los 90 problemas pruebas (básicos y extendidos). En la misma se puede comprobar que el algoritmo híbrido propuesto resuelve la totalidad de los problemas en un número menor de iteraciones que el método de ramificación y acotación de Burer-Chen.

En la figura-4.6, por su parte, se representa el tiempo total requerido (TTR) por ambos procedimientos para la solución de los problemas pruebas. En este caso se aprecia que, al resolver los problemas de menor dimensión (problemas básicos - representados en con círculos), el método de ramificación y acotación de Burer-Chen requiere menos tiempo que el algoritmo híbrido propuesto.

Sin embargo, al resolver los problemas de mayor dimensión (representados por cuadrados), el tiempo de ejecución del primero es mayor que el del algoritmo híbrido.

Este comportamiento se debe a que el esfuerzo computacional requerido por el algoritmo híbrido para mejorar la calidad de las cotas superiores (método *C&C*) sólo tiene su

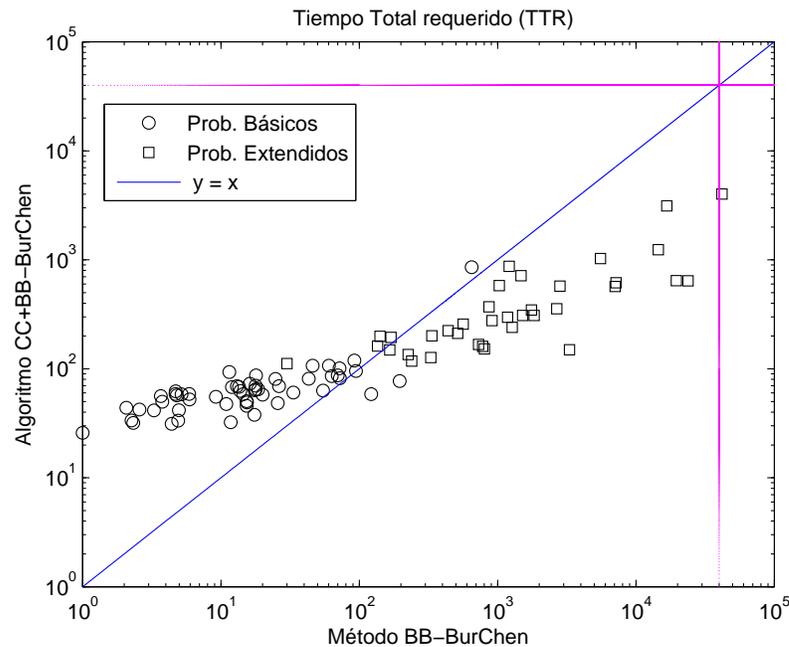


Figura 4.6: Comparación entre el algoritmo híbrido-RDNN y el método $B\&B$ de Burer-Chen respecto al tiempo total requerido.

recompensa cuando la dimensión de los problemas es superior a las 60 variables.

En la gráfica se observa, además, que, con la sola excepción del problema 100-75-2, ambos algoritmos resuelven todos los problemas antes del tiempo límite establecido. En ese caso, el método de Burer-Chen se ve forzado a abortar por superar los 40000 CPU-segundos. Observe que el *gap - relativo* ($gaprel = 0,03$) reportado para este problema es superior al establecido, motivo por el cual no se puede concluir que la solución calculada sea una ε -aproximación para el mínimo global de BQP.

• ***Comparación respecto al total de nodos creados y al número de iteraciones realizadas para encontrar la solución óptima.***

En la figura-K.1 del Anexo-I se puede comprobar que, para cada problema resuelto (con excepción de 20-100-2), el árbol generado por el algoritmo híbrido tiene menor número de nodos (máximo 159) que el generado por el método $B\&B$ de Burer-Chen (máximo 1101). Obsérvese también, que la diferencia se hace más marcada en los problemas de mayor dimensión (problemas extendidos - representados con cuadrados).

Finalmente, en la figura-K.2 del Anexo-I se puede comprobar que el algoritmo híbrido

requiere menos iteraciones para detectar la solución óptima que el método *B&B* de Burer-Chen. Aquí es válido el comentario realizado en el epígrafe-4.4.1 sobre el aporte del método de corte y continuación en esta tarea.

Como en los epígrafes anteriores, para comprobar si las diferencias detectadas son o no significativas, se procede a aplicar una prueba de suma de rangos de Wilcoxon con muestras pareadas para los cuatro parámetros analizados (ver Anexos-AnexoCap5D y J). Como resultado de estas pruebas (ver tabla-K.1 en el Anexo-K) se concluye que (en todos los casos) se debe rechazar la hipótesis nula ($p\text{-value} < 0,05$). Este resultado permite concluir que hay evidencia estadística que demuestra la existencia de diferencias significativas entre los valores de NTI, TTR, TNC e ITO calculados por *CC+BB-BurChen* y *BB-BurChen*, que como se pudo ver antes, favorece a la primera.

Los resultados alcanzados en este epígrafe conforman una evidencia experimental sobre la cual se puede inferir que el algoritmo híbrido diseñado posee un comportamiento superior al de los métodos *B&B* propuestos por Burer y Vandembussche (Burer & Vandembussche, 2008b) y Burer-Chen (Chen & Burer, 2012), los dos algoritmos que en la literatura consultada muestran los mejores resultados al resolver problemas cuadráticos no convexos con restricciones de caja.

4.5. Influencia de las características del problema en el desempeño del algoritmo híbrido

Luego de estudiar el comportamiento del algoritmo híbrido y comparar sus resultados con los métodos de Burer-Vandembussche y Burer-Chen, interesa ahora estudiar, qué efecto pueden tener los cambios en las características del problema (en lo adelante, *factores*) en el desempeño del algoritmo. En el caso del problema cuadrático, los factores que potencialmente pueden influir en el desempeño de cualquier método de solución se corresponden con las características de la matriz Q . Estos factores son:

N : dimensión del problema,

D : densidad de la matriz Q ,

\widehat{QI} : porcentaje de valores propios negativos en la matriz Q , y

κ : condición de la matriz Q .

Para la evaluación del desempeño del algoritmo se utilizarán los mismos *parámetros* (también llamados *variables de respuesta* en el diseño factorial) que se han empleado a través de toda en la experimentación (TNC,TTR,NTI,ITO) y el *gap-relativo* (*gaprel*), para medir el error relativo de la solución calculada, cuando el algoritmo supera el tiempo límite prefijado o requiere más memoria RAM que la disponible.

Desafortunadamente, al no disponer de un procedimiento que genere matrices de condición (κ) predeterminada, sin afectar al resto de las características de la matriz, no se pudo incluir este factor en el diseño experimental.

Con el fin de obtener alguna información sobre la influencia de κ en el comportamiento del algoritmo, y tomando como referencia los resultados de los 90 problemas pruebas resueltos, se realizó una prueba ANOVA simple sobre este factor para cada uno de los parámetros establecidos. Los resultados de esta prueba (ver tablas-M.1, M.2, M.3 y M.4 del Anexo-M) no permiten inferir que (κ) tenga una influencia significativa sobre las variables que determinan el desempeño del algoritmo (p-value=0,0357, 0.0066, 0.0216 y 0,0478 respectivamente, con $\alpha=0.05$)).

Tomando en cuenta lo planteado en el epígrafe-4.1.2, las características de las matrices que conforman la base de problemas pruebas no satisfacen los requerimientos exigidos para el cumplimiento del objetivo propuesto. Para suplir esta dificultad, se generaron 81 nuevos problemas pruebas, en los cuales, las características (factores) N, D, \widehat{QI} están controladas por el siguiente diseño de experimentos multifactorial.

Para cada uno de los factores se consideran tres niveles, tal y como se indican en la tabla-4.4. Como resultado de este diseño se obtienen $3^3 = 27$ tipos de matrices diferentes. Empleando ahora el fichero *genboxqp.m* se ejecutan tres réplicas (con semillas $S=1,2,3$) en cada tipo de problema, para generar las 81 matrices Q que caracterizan a los 81 problemas diseñados. Finalmente, para garantizar que las matrices generadas tengan el porcentaje de valores propios negativos indicado en el diseño, se adiciona un valor conveniente $\lambda \in \mathbb{R}$ a todos los elementos de su diagonal principal. Las matrices así obtenidas tienen entonces la forma $Q + \lambda I$, donde I es una matriz identidad del mismo orden que Q .

La ejecución de los experimentos, como tal, consiste en resolver cada uno de los problemas generados, utilizando para ello el algoritmo híbrido propuesto. En el Anexo-L de este trabajo se muestran los resultados detallados correspondientes a cada uno de los 81 problemas (experimentos) resueltos (muestra).

Para la realización del análisis experimental se utilizó el programa STATGRAPHICS

Factores	Niveles	Nivel Inferior	Nivel Medio	Nivel Alto	Unidad de Medida
Dimensión	3	20,0	60,0	100,0	Nro. de Variables
Densidad	3	25,0	50,0	75,0	%
\widehat{QI}	3	20,0	60,0	100,0	%

Tabla 4.4: Características del diseño multifactorial realizado

Plus 5.0., el cual junto con los resultados alcanzados, brinda una interpretación resumida de los mismos (The StatAdvisor). En el Anexo-M se presentan los reportes emitidos por STAGRAPHICS, con todas las salidas originadas para cada una de las variables de respuesta (parámetros) estudiados. En lo que sigue, se utilizan estos resultados, para extraer las conclusiones más importantes del estudio realizado.

• **Identificación de factores significativos en el comportamiento del algoritmo.**

Un resultado de mucha valía para el estudio, resulta, sin lugar a dudas, reconocer, entre los factores estudiados, cuáles de ellos inciden de forma significativa en el rendimiento del algoritmo. La respuesta a esta interrogante la proporciona el análisis de varianza (ANOVA) realizado (Tabla ANOVA del Anexo-M para cada uno de las variables de respuesta).

En la tabla-4.5 se resume, para cada uno de los parámetros analizados, los factores que, en la prueba ANOVA, poseen un p-value inferior a 0.05. Este resultado permite identificar que los factores N y \widehat{QI} , y la interacción de N con D, tienen una influencia significativa (con un nivel de confianza del 95 %) sobre los parámetros que miden el comportamiento del algoritmo.

Los gráficos de Pareto que aparecen en las figuras-M.1, M.2, M.3 y M.4 del Anexo-M sirven para validar el resultado anterior. En ellos se representan, en orden decreciente por su influencia, el efecto principal de cada factor (N,D, \widehat{QI}) y de sus interacciones sobre cada uno de los parámetros TNC, TTR, ITO y NTI, respectivamente.

La línea vertical que se distingue en estas gráficas identifica los factores significativos (con un nivel de significación $\alpha = 0,05$) para cada uno de los parámetros que miden el rendimiento del algoritmo híbrido. Observe que, para cada parámetro, los factores que sobrepasan esta línea se corresponden con los seleccionados en la tabla-4.5.

En la tabla aparecen, además, el estadígrafo R^2 y el sentido en que se modifica la respuesta

Parámetro	Factores	p-value	Sentido
TNC $R^2 = 0,32$	N	0.0021	+
	\widehat{QI}^2	0.0042	-
	N*D	0.0361	+
TTR $R^2 = 0,32$	N	0.0007	+
	\widehat{QI}^2	0.0231	-
	N*D	0.0237	+
ITO $R^2 = 0,24$	\widehat{QI}^2	0.0022	-
	N	0.0508	+
NTI $R^2 = 0,32$	N	0.0026	+
	\widehat{QI}^2	0.0046	-
	N*D	0.0349	+

Tabla 4.5: Factores de mayor impacto para cada parámetro, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$

de cada parámetro cuando se incrementa el valor de los factores. Esta información permite reconocer (era esperado) que el incremento de la dimensión (N) y/o su interacción (N*D) implican un aumento (sentido +) en el número de iteraciones requeridas, el tiempo de ejecución, el total de nodos creados y la iteración en que se alcanza la solución óptima. Sin embargo, un incremento en el porcentaje de valores propios negativos (\widehat{QI}) implica una disminución (sentido -) en el valor de estos cuatro parámetros. Consideramos que este comportamiento singular se corresponde con el procedimiento empleado para generar las matrices del experimento (ver epígrafe-4.1.2). Recuérdese que la forma de construcción de las matrices implica una relación directa entre \widehat{QI} y el número de elementos negativos en la diagonal principal de Q . Esta situación es explotada por el algoritmo, pues el empleo del criterio RSD implica la asignación directa de uno de los valores extremos ($x_i = 0$ ó $x_i = 1$) a las variables (x_i) correspondientes a elementos negativos ($Q_{ii} < 0$) en la diagonal principal de la matriz Q , y como consecuencia de esto, los subproblemas hijos generados por el esquema de $B\&B$ tienen un menor número de variables.

• ***Ecuaciones de regresión.***

Partiendo de los datos reportados en el Anexo-G, y tomando en cuenta sólo los factores que han sido identificados como significativos para cada una de las variables de respuesta (parámetros) que evalúan el comportamiento del algoritmo, se pueden ajustar, por

regresión, las ecuaciones de segundo orden que aparecen a continuación:

$$TNC = -8,28704 + 0,202778 * N + 1,525 * \widehat{QI} + 0,623333 * D + 0,0103889 * N * D - 0,0127083 * \widehat{QI}^2 \quad (4.5.1)$$

$$TTR = -51,3606 + 7,48549 * N + 42,6929 * \widehat{QI} + 24,0321 * D + 0,400534 * N * D - 0,355774 * \widehat{QI}^2 \quad (4.5.2)$$

$$NTI = -3,55556 + 0,103704 * N + 0,733333 * \widehat{QI} + 0,305 * D + 0,00508333 * N * D - 0,00611111 * \widehat{QI}^2 \quad (4.5.3)$$

$$ITO = -3,13426 + 0,0222222 * N + 0,184722 * \widehat{QI} - 0,00153935 * \widehat{QI}^2 \quad (4.5.4)$$

Sin embargo, el estadígrafo R^2 reportado en la tabla-4.5 para cada parámetro, indica que el modelo ajustado en cada caso, explica aproximadamente sólo un 32 % (24 % de ITO) de la variabilidad de cada uno de ellos.

• **Relaciones entre las variables de respuesta.**

Por otra parte, analizando (a priori) el comportamiento de cada uno de los parámetros (TNC,TTR,ITO,NTI) estudiados, se puede sospechar la existencia de cierta relación entre ellos. Las ecuaciones-4.5.5 y 4.5.5 reflejan las mejores relaciones encontradas entre varias alternativas probadas.

$$NTI = 0,4851TNC - 0,1259 \quad (R^2 = 0,9991) \quad (4.5.5)$$

$$TTR = 73,12NTI + 7,335ITO + 1,278 \quad (R^2 = 0,9682) \quad (4.5.6)$$

La ecuación-4.5.5 identifica la existencia de una relación lineal fuerte ($R^2 = 0,9991$) entre NTI y TNC. La ecuación resultante explica que el algoritmo sólo resuelve (explora) aproximadamente la mitad (0.48) de los nodos generados. Como consecuencia de esto se tiene que la otra mitad de los nodos creados resulta eliminada. Este resultado evidencia la fuerza que aporta la búsqueda de una mejor cota superior al criterio de eliminación asumido en el algoritmo.

Por su parte, según la ecuación-4.5.6 las variaciones en el tiempo que emplea el algoritmo (TTR) para resolver los problemas quedan determinados (en un 96.84 %) por la rapidez con que se alcance la solución óptima (ITO) y el número total de iteraciones (NTI) necesarias para comprobar que la solución obtenida es el mínimo global del problema. La ecuación resultante explica asimismo que, por cada iteración realizada, el algoritmo consume aproximadamente 73 CPU-segundos, y que cada iteración que demore en encontrar la solución óptima cuesta aproximadamente 7 CPU-segundos.

Todos estos resultados permiten pronosticar, en función de las características del problema, el comportamiento esperado del algoritmo. Así, por ejemplo, usando las relaciones (4.5.1-4.5.4) es posible pronosticar el tiempo de ejecución, el número de nodos e iteraciones que

se deben generar por el algoritmo híbrido para resolver problemas de más de 100 variables. En la tabla-M.13 del Anexo-M se refleja el tiempo total de ejecución pronosticado según (4.5.2) en problemas de hasta 200 variables. Según estos resultados es de esperar que el algoritmo propuesto sea capaz de resolver problemas de hasta 200 variables sin sobrepasar la barrera de tiempo máximo establecida. En el epígrafe siguiente se discute la veracidad de esta y otras cuestiones relacionadas con la solución de problemas con más de 100 variables.

4.6. Solución de problemas con más de 100 variables

Con el fin de investigar las capacidades del algoritmo propuesto en problemas de mayor dimensión (más de 100 variables) y probar hasta cuántas variables resulta posible emplear el algoritmo conservando las mismas limitaciones de tiempo y memoria, se procede a resolver los 36 problemas extras presentados al inicio del capítulo. En los Anexos-N y AnexoCap5J se presentan los resultados detallados de las soluciones para los 36 *problemas extras* utilizando primero el algoritmo híbrido y luego el método de Burer-Chen (respectivamente).

En el análisis que resumen los resultados más importantes extraídos de este estudio.

- ***Capacidad del algoritmo para resolver problemas de mayor dimensión.***

Los resultados del Anexos-I sirven para mostrar que el algoritmo híbrido mantiene un desempeño exitoso, al menos en la solución de los problemas de hasta 175 variables. Asimismo se verifica, que el tiempo no es la limitación fundamental para resolver problemas de mayor dimensión, sino la capacidad de memoria RAM disponible.

En la tabla-4.6 se resumen estos resultados, agrupando los problemas por su dimensión. Las tripleta (**R-T-M**) que aparece en las dos últimas columnas de la tabla (las de los algoritmos), reflejan: (**R**), la cantidad de problemas Resueltos por el algoritmo; (**T**), la cantidad de problemas no resueltos por el algoritmo por sobrepasar el límite de tiempo prefijado; y (**M**), la cantidad de problemas no resueltos por el algoritmo debido a limitaciones de memoria. Según estos resultados, el algoritmo híbrido detecta la solución óptima en 22 de los 36 problemas propuestos, mientras que el método de Burer-Chen solo puede encontrar la solución óptima en 4 de ellos (todos con 125 variables).

En particular, el algoritmo híbrido puede resolver 20 de los primero 27 problemas (problemas con 125, 150 y 175 variables), pero sólo resuelve 2 de los 9 problemas con

Dimensión	Problemas	Híbrido R-T-M	Burer-Chen R-T-M
125	9	7-0-2	4-1-4
150	9	7-1-1	0-0-9
175	9	6-0-3	0-0-9
200	9	2-0-7	0-0-9

Tabla 4.6: Resumen de los resultados para los problemas extras

200 variables, por exceder la capacidad de memoria RAM disponible.

Obsérvese además que, sólo un problema (per capita) concluye por exceder el límite de tiempo máximo prefijado (40000 CPU-segundos). En el resto de los casos (13 problemas para el algoritmo propuesto y 32 para Burer-Chen) los dos códigos se detienen porque la memoria RAM disponible (2GB) no es suficiente para guardar todos los datos generados durante el proceso de cálculo.

Esta resulta entonces la limitación fundamental para que ambos algoritmos puedan resolver problemas de mayor dimensión.

Adicionalmente, en la figura-4.7 se puede constatar que los tiempos reportados por el algoritmo híbrido, están ligeramente por encima de los tiempos pronosticados en la tabla-M.13 del Anexo-M, cuando se utiliza la ecuación (4.5.2).

Para finalizar, en la figura-4.8 se representa el gap relativo correspondiente a las soluciones calculadas por ambos algoritmos. En ella se observa que el algoritmo *CC+BB-BurChen* alcanza aproximaciones de mejor calidad que el método *B&B-BurChen*. Estos resultados confirman el buen comportamiento del algoritmo híbrido propuesto. Todos estos resultados confirman el buen comportamiento del algoritmo híbrido en la solución de problemas con más de 100 variables (*Problemas Extras*), y las ventajas de este respecto al método de ramificación y acotación de Burer y Chen (Chen & Burer, 2012).

4.7. Conclusiones parciales del capítulo

En el capítulo se describe la implementación de los algoritmos discutidos en la tesis y los problemas pruebas empleados en la experimentación realizada. Los resultados alcanzados evidencian el buen funcionamiento del procedimiento propuesto y permiten verificar las ventajas del mismo respecto a los métodos que le dan origen. Adicionalmente se analiza el

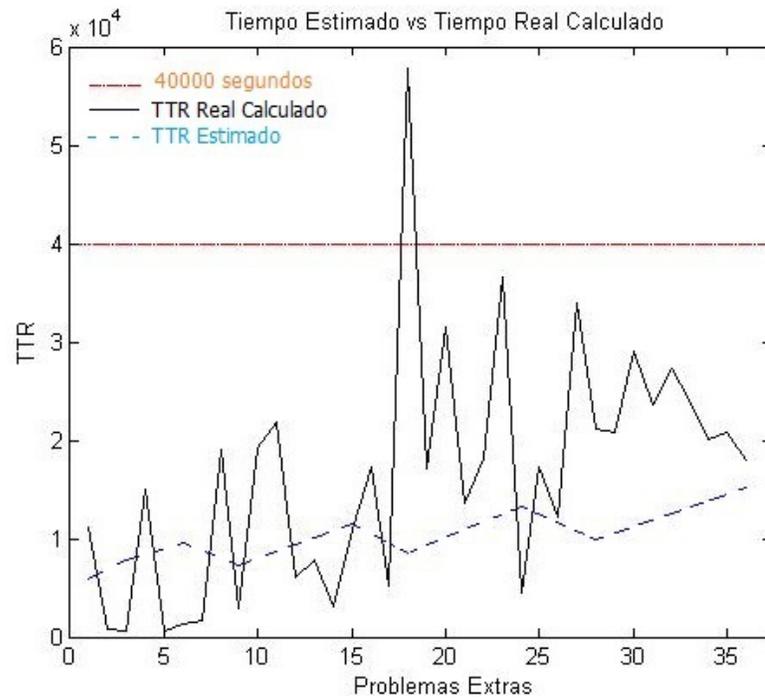


Figura 4.7: Comparación entre el algoritmo híbrido y el método de Burer-Chen respecto al gap relativo y entre el tiempo estimado y real calculado por el algoritmo híbrido en la solución de los Problemas Extras

efecto que provocan los cambios de las características del problema en el comportamiento del algoritmo. Los resultados más importantes del capítulo se resumen a continuación.

- La implementación del método de continuación *CandC.m* permite resolver problemas de gran dimensión, cuya única limitación está dada por las características de la computadora donde se ejecutan los experimentos.
- La programación del algoritmo propuesto sobre MatLab facilitó el empleo de los métodos de ramificación y acotación originales de Burer-Vandenbussche y Burer-Chen disponibles en la WEB, codificados sobre este lenguaje.
- Los problemas pruebas (*extras* y *diseñados*) generados para esta investigación constituyen un complemento a la base de problemas pruebas seleccionada.
- Los experimentos relacionados con la aplicación del método de continuación permitió comprobar sus limitaciones teóricas referentes al manejo de las singularidades y a la falta de un criterio para reconocer el mínimo global.

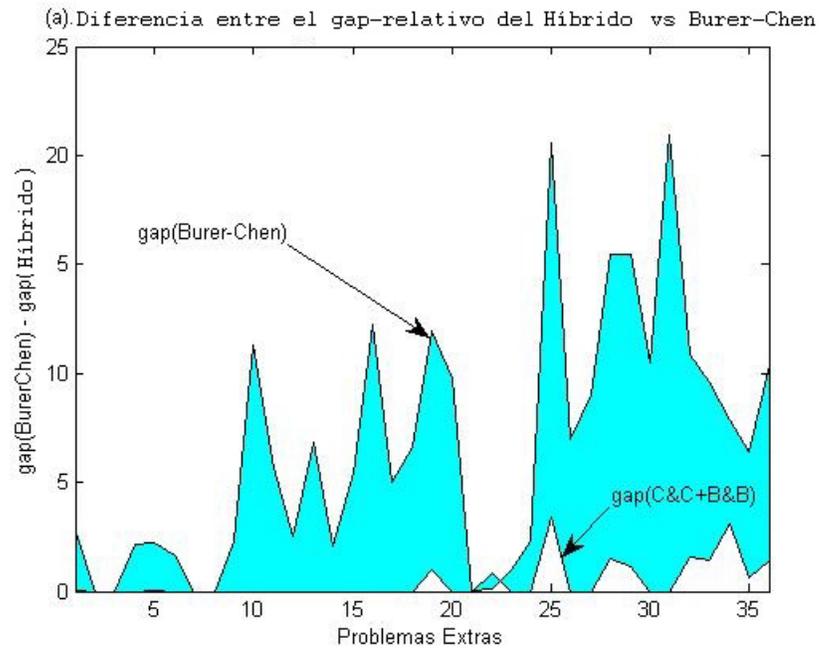


Figura 4.8: Comparación entre el algoritmo híbrido y el método de Burer-Chen respecto al gap relativo y entre el tiempo estimado y real calculado por el algoritmo híbrido en la solución de los Problemas Extras

- La experimentación computacional realizada permitió validar la efectividad del método de ramificación y acotación como mecanismo para resolver las limitaciones del método de corte y continuación.
- Los experimentos realizados muestran que el algoritmo propuesto supera los resultados de los métodos más eficientes reportados en la literatura consultada y permite resolver problemas de mayor dimensión.
- El diseño experimental realizado permitió caracterizar el efecto que provocan los cambios en las características del problema en el comportamiento del algoritmo propuesto.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como resultado de la investigación realizada, en este trabajo de tesis se presenta un algoritmo para la solución del problema de programación cuadrática no convexa con restricciones de caja. El algoritmo resultante es un híbrido que combina un método de corte y continuación con un método de ramificación y acotación. El primero de ellos genera una sucesión monótona decreciente de mínimos locales, que actúa como una aproximación por arriba del valor mínimo global del problema, mientras que el segundo, permite la obtención de cotas inferiores que aproximan a $f_{minglob}$ por abajo.

Esta dualidad permite el cálculo de la solución óptima con una reducción significativa en el número de iteraciones y el total de nodos generados por el esquema $B\&B$, y en consecuencia, una disminución considerable del tiempo de cómputo en comparación con los métodos que sólo utilizan ramificación y acotación.

Producto de la investigación teórica y experimental realizada se han obtenido los siguientes resultados:

1. Las reformulaciones del problema cuadrático original presentadas en el capítulo-1 permiten la utilización de diferentes enfoques para el cálculo de las cotas inferiores, así como el diseño de una estrategia de ramificación eficiente.
2. La inmersión $[P_R(t)]$ presentada aventaja a las reportadas en la literatura, al reducir de forma significativa el número de variables adicionales en el modelo resultante.
3. La demostración de la pertenencia de la inmersión propuesta a la clase \mathcal{F} de Jongen-Jonker-Twilt constituye la fundamentación teórica que justifica la aplicabilidad de los métodos de continuación sobre el problema paramétrico definido, y a diferencia de las pruebas habituales, esta se realiza sobre un espacio vectorial $\mathbb{R}^{\hat{n}}$.

4. La caracterización de los cinco tipos de puntos críticos generalizados correspondientes al problema paramétrico propuesto facilitan la codificación del método de continuación empleado.
5. La introducción del criterio (RSD) para la selección de la variable a particionar dentro del esquema de ramificación y acotación explota las características del problema e incide directamente en la reducción de la dimensión de los subproblemas hijos generados por el algoritmo.
6. El empleo del método de corte y continuación para el cálculo de las cotas superiores introduce cortes más restrictivos en el conjunto de soluciones factibles que mejora los mecanismos propuestos en los métodos de ramificación y acotación analizados.
7. Los problemas pruebas (*problemas extras* y *problemas diseñados*) generados para esta investigación constituyen un complemento a la base de problemas pruebas seleccionada.
8. Los experimentos relacionados con la aplicación del método de continuación permitió comprobar las limitaciones teóricas del método de corte y continuación, referentes al manejo de las singularidades y a la falta de un criterio para reconocer el mínimo global.
9. La experimentación computacional realizada permitió validar la efectividad del método de ramificación y acotación como mecanismo para resolver las limitaciones del método de corte y continuación.
10. Los experimentos realizados muestran que el algoritmo propuesto supera los resultados de los métodos más eficientes reportados en la literatura consultada y permite resolver problemas de mayor dimensión.
11. El diseño experimental realizado permitió caracterizar el efecto que provocan los cambios en las características del problema en el comportamiento del algoritmo propuesto.
12. La experimentación realizada permitió validar la hipótesis planteada en la introducción de la tesis.

RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

1. Estudio la aplicabilidad del algoritmo a otros tipos de problemas cuadráticos, por ejemplo, el problema cuadrático simplex estándar, el problema cuadrático de mochila, el problema cuadrático de asignación.
2. Continuar ensayando criterios de selección de las variables más sofisticados dentro que permitan incrementar la eficiencia en el esquema de ramificación del algoritmo.
3. Continuar la búsqueda de alternativas que permitan estudiar la influencia de la condición de la matriz en el comportamiento del algoritmo.
4. Realizar experimentos en computadoras de mayor disponibilidad de memoria RAM con vistas investigar la capacidad del algoritmo para resolver problemas de mayor dimensión conservando el límite de tiempo prefijado.
5. Estudiar las posibilidades de introducir adaptaciones en el algoritmo que permitan resolver problemas de optimización más generales, por ejemplo, el problema cuadrática estándar con restricciones lineales, el problema cuadrático con restricciones cuadráticas, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adjiman, C., & Floudas, C. (2001). The α bb global optimization algorithm for nonconvex problems: An overview. En B. Springer-Science+Business Media (Ed.), (Vol. 53, p. 155-186). Kluwer Academic.
- Alizadeh, F. (1995). Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 5, 13-51.
- Allgower, E., & Georg, K. (1990). *Numerical continuation methods: An introduction*. Springer Verlag, Berlin.
- Allgower, E., & Georg, K. (1992). Continuation and path following. *Acta Numerica*, 1-64.
- Asachi, M., & Marandi, R. (2015). Response surface modeling of lead and copper removal from oil field brine by potential sorption method. *Particulate Science and Technology*, 33(3), 290-300.
- Beck, A., & Tibouille, M. (2009). Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *IEEE Trans. on Image Processing*, 18, 2419-2434.
- Ben Daya, M., & Al Sultan, K. (1997). A new penalty function algorithm for convex quadratic programming. *European Journal of Operation Research*, 101(1), 155-163.
- Berry, K., Mielke, P., & Johnston, J. (2012). Thetwo-samplerank-sumtest:early development. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 8.
- Bolte, J., & Pauwels, E. (2016). Majorization-minimization procedures and convergence of sqp methods for semi-algebraic and tame programs. *Mathematics of Operations Research*, 41(2), 442-465.
- Bomze, I., Csendes, T., Horst, R., & Pardalos, P. (1997). *Developments in global optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London.
- Burer, S. (2009). On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs. *Math. Program.*, 120, 479-495.
- Burer, S. (2010). Optimizing a polyhedral-semidefinite relaxation of completely positive programs. *Mathematical Programming Computation*, 2(1), 1-19.

- Burer, S. (2015). A gentle , geometric introduction to copositive optimization. *Management*.
- Burer, S., & Chen, J. (2011). Relaxing the optimality conditions of box QP. *Computational Optimization and Applications*, 48, 653–673.
- Burer, S., & Vandembussche, D. (2008a). A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations. *Math. Program.*, 113(Ser. A), 259-282.
- Burer, S., & Vandembussche, D. (2008b). A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations. *Math. Program.*, 2 Ser. A(113), 259-282.
- Chen, J. (2010). *Convex relaxations in nonconvex and applied optimization*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, <http://ir.uiowa.edu/etd/654>.
- Chen, J., & Burer, S. (2012). Globally solving nonconvex quadratic programming problems via completely positive programming. *Mat. prog. Comp.*, 4, 33-52.
- Chinneck, J. (2004). The constraint consensus method for finding approximately feasible points in nonlinear programs. *INFORMS Journal on Computing*, 16(3), 255-265.
- Clausen, J. (1999). Branch and bound algorithms - principles and examples. *Computer*, 1-30.
- Dang, C., & Xu, L. (2000). A barrier function method for the nonconvex quadratic programming problem with box constraints. *Journal of Global Optimization*(18), 165-188.
- Dang, T., Tran, T., & Ling, K. (2015). Numerical algorithms for quadratic programming in model predictive control - an overview. En *Issat int. conf. on modelling of complex systems and enviroment*. <https://www.researchgate.net/publication/301878008-Analytical-results-for-the-multi-objective-design-of-model-predictive-control>.
- deAngelis, P., Pardalos, P., & Toraldo, G. (1997). Quadratic programming with box constraints. En I. M. Bomze, T. Csendes, R. Horst, & P. M. Pardalos (Eds.), *Developments in global optimization* (p. 73-93). Boston, MA: Springer US.
- Deuffhard, P., Fiedler, B., & Kunkel, P. (1983). Efficient numerical pathfollowing beyond critical points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(4), 912-927.
- Enkhbat, R., & Ibaraky, T. (1996). Response surface analysis using quadratic programming. *International Journal of Systems and Management*, 24(1).
- Ferreau, H., Kirches, C., Potschka, A., Bock, H., & Diehl, M. (2014). qpOASES: a parametric active-set algorithm for quadratic programming. *Math. Prog. Comp.*(6), 327–363.
- Floudas, C., & Visweswaran, V. (1995). Quadratic optimization. (<http://citeseer.ist.psu.edu/floudas95quadratic.html>)

- Franke, R., Schönung, H., Blaumann, M., Frick, A., & Kautsch, S. (2013). Real-time and intraday optimization of multiple power generation units. *PowerGen Europe*.
- Fu, X., Ma, W., Chan, F., & So, H. (2012). Complex-valued semidefinite relaxation approach for two-dimensional address localization using distance measurements and imperfect receiver positions. En *Proc. int. conf. signal process.*
- Gill, P., & Wong, E. (2015). Methods for convex and general quadratic programming. *Mathematical Programming Computation*, 7(1), 71–112.
- Gollmer, R., Kausmann, U., Nowack, D., Wendler, K., & Bacallao, J. (1995). *Program package pafo*.
- Gomez, W. (2001). On the generic quadratic penalty embeddings for nonlinear optimization problems. *Optimization*(50), 279-295.
- Gomez, W., Guddat, J., Jongen, H., Ruckmann, J., & Solano, C. (2000). *Curvas críticas y saltos en optimización no lineal*. <http://www.emis.de/monographs/curvas/index.html>.
- Gondzoi, J., & Grothey, M. (2007). Parallel ipm solver for structured qps: application to financial planning problems. *Annals of Operations Research*, 152, 319-339.
- Gould, N., & Toint, P. (2002). Numerical methods for large-scale non-convex quadratic programming. En . A. O. Amritsar (Ed.), (Vol. 72, p. 149-179). Kluwer Acad., Dordrecht.
- Grant, M., & Boyd, S. (2014). *The cvx users' guide*. <http://www.stanford.edu/~boyd/cvx>.
- Guddat, J., Guerra, F., & Jongen, H. (1990). *Parametric optimization: Singularities, path following and jumps*. Wiley, Chichester.
- Guddat, J., Guerra, F., Nowack, D., & Ruckmann, J. (2006). On the calculation of feasible point of a nonconvex set: pathfollowing and jumps. *Optimization*, 56(1), 73-103.
- Gunji, K., Kim, S., Kojima, M., Takeda, A., Fujisawa, K., & Mizutami, T. (2004). Phom – a polyhedral homotopy continuation method for polynomial systems. *Computing*(73), 55-77.
- Hager, W., James, T., & Hungerford, J. (2015). Continuous quadratic programming formulations of optimization problems on graphs. *European Journal of Operational Research*(240), 328-337.
- Hager, W., & Klylyuk, Y. (1999). Graph partitioning and continuous quadratic programming. *SIAM*, 12(4), 500-523.
- Hager, W., Pardalos, P., Roussos, I., & Sahinoglou, H. (1991). Active constraints, indefinite quadratic test problems, and complexity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 68(3), 499-511.

- Hannemann-Tamas, R., Gabort, A., Gabor, S., & Hangos, K. (2013). Model complexity reduction of chemical reaction networks using mixed-integer quadratic programming. *Computers and Mathematics with Applications*, 65(10), 1575-1595.
- Hansen, P., & Joumard, B. (1992). Reduction of indefinite quadratic programs to bilinear programs. *Journal of Global Optimization*(2), 41-62.
- Hansen, P., Joumard, B., Ruiz, M., & Xiong, J. (1991). *Global minimization of indefinite quadratic functions subject to box constraints* (Tech. Rep.). GERAD, Ecole Polytechnique Universite MacGill, Montreal, Canada.
- Hauska, B., Ferreau, H. J., & Diehl, M. (2011). An auto-generated real-time iteration algorithm for nonlinear mpc in the microseconds range. *Automatica*, 47, 2279-2285.
- Hertog, D., & Stehouwer, H. (2000). Optimizing color picture tubes by high-cost non-linear programming. *European Journal on Operation Research*.
- Horst, R., Pardalos, P., & Thoai, N. (1995). *Introduction to global optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Londres.
- Horst, R., Pardalos, P., & Thoai, N. (2000). *Introduction to global optimization 2nd edn*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Londres.
- Hu, S. (2006). *semidefinite relaxation based branch and bound method for non convex quadratic programming*. Unpublished master's thesis, Massachusetts Institute for technology.
- Hu, Y., & Dai, Y. (2007). Inexact barzilai-borwein method for saddle point problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 14(4), 299-317.
- Hungerländer, P., & Rendl, F. (2015). A feasible active set method for strictly convex quadratic problems with simple bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 25(3), 1633-1659.
- Iqbal, M., Nadeem, A., Sherazi, F., & Khan, R. (2015). Optimization of process parameters for kitchen waste composting by response surface methodology. *International Journal of Environmental Science and Technology*, 12(5), 1759-1768.
- Izmailov, A., & Solodov, M. (2016). Some new facts about sequential quadratic programming methods employing second derivatives. *Optimization methods and Software*, 31(6), 1111-1131.
- Jeong, J. (2014). *Indefinite knapsack separable quadratic programming: Methods and applications*. Doctoral dissertations, The University of Tennessee, Knoxville, <http://trace.tennessee.edu/utk-graddiss/2704>.
- Jimenez, M. (1989). *Medida, integración y funcionales*. Editorial Pueblo y Educación, Habana.

- Jongen, H., Jonker, P., & Twilt, F. (1986). Critical sets in parametric optimization. *Mathematical Programming*(34), 333-353.
- Karmarkar, N. (1984). New polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4, 373-395.
- Kenning, A., & Vannelli, A. (1997). Vlsi placement using quadratic programming and network partitioning techniques. *International Transactions in Operational Research*, 4(5-6), 353-364.
- Klerk, E. de, Roos, C., & Terlaky, T. (1997). *A short survey on semidefinite programming* (Tech. Rep.). Technische Universitat Delf.
- Kojima, H., & Hirabayashi, R. (1984). Continuous deformation on nonlinear programs. *Math. Prog.*(21), 150-198.
- Kozlov, M., Tarasov, S., & Khachian, L. (1979). Polynomial solvability of convex quadratic programming. *Soviet Math. Dokl.*, 20, 1108-1111.
- Krumke, S. (1994). *Eine modifizierte barriermethode fur konvexe quadratische optimierungsprobleme*. Unpublished master's thesis, University of Wurzburg, Germany. (Diplomthesis)
- Maros, I., & Mészáros, C. (1999). A repository of convex quadratic programming problems. *Optimization Methods and Software*, 11.
- MathWorks, T. (2013). *Matlab reference guide*. <http://www.mathworks.com>.
- Miranda, R. (2010). Theoretical approach for the calculation of a feasible point on the special non-convex set described by a polyhedron and a quadratic function. *Optimization*, 59(6), 917-927.
- Miranda, R., Allende, S., Pérez, B., & Bouza, G. (2015). Algoritmo de corte y continuación con ramificación y acotación para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja. *Ciencias Matemáticas*, 29(1), 19-29.
- Moré, J., & Toraldo, G. (2006). On the solution of large qp problems with bound constraints. *SIAM Journal of Optimization*, 1(1), 93-113.
- Murty, K. (1988). *Linear complementarity, linear and nonlinear programming*. Helderman Verlag.
- Murty, K., & Kabadi, S. (1987). Some np-complete problems in quadratic and nonlinear programming. *Mathematic Programming*(39), 117-129.
- Nahm, F. (2016). Nonparametric statistical tests for the continuous data: the basic concept and the practical use. *Korean J Anesthesiol.*, 69(1), 8-14.
- Nam, N. C. (2015). On globally solving the maximum weighted clique problem. <http://www.optimization-online.org/DB-FILE/2014/12/4678.pdf>.

- Neumaier, A. (1996). Second-order sufficient optimality conditions for local and global nonlinear programming. *Journal of Global Optimization*, 9(2), 141–151.
- Nocedal, J., & Wright, S. (1999). *Numeric optimization*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Onanaye, A., & Agbolamagbin, P. O. (2016). Quadratic programming as an optimization tool for portafolio management. *International Journal of Mathematics and Computer Applications Research (IJMCAR)*, 6(2), 19-32.
- Padberg, M. (1989). The boolean quadric polytope: Some characteristics, facets and relatives. *Mathematical Programming*, 45, 139-172.
- Pardalos, M. (1990). Polynomial time algorithms for some calsses of constrained nonconvex quadratic problems. *Optimization*, 21, 843-853.
- Pirhaji, M., Mansouri, H., & Zangiabadi, M. (2016). Global convergence of an inexact interior-point method for convex quadratic symmetric cone programming. *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, 42(6), 1363-1385.
- Rheinboldt, G., & Burkardt, J. (1983). A locallyparametrized continuation process. *ACM Trans. Math. Software*(9), 215-235.
- Ruckmann, J., & Tammer, K. (1992). On linear-cuadratic peturbations in one-parametric nonlinear optimization. *Systems Science*, 18(1), 37-48.
- Schlipf, D., Schlipf, D., & Kühn, M. (2013). Nonlinear model predictive control of wind turbines using lidar. *Wind Energy*, 16(7), 1107–1129.
- Sherali, H., & Tuncbilek, C. (1995). A reformulation- convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems. *Journal of Global Optimization*(7), 101-112.
- Sherali, H. D., & Alameddine, A. (1992). A new reformulation- linearization technique for solving bilinear programming problems. *Journal of Global Optimization*, 2, 379-410.
- Shor, N. (1987). Quadratic optimization problems. *Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1, 128-139.
- Subathra, M., Selvan, S., Victoire, T., Christinal, A., & Amato, U. (2014). A hybrid with cross-entropy method and sequential quadratic programming to solve economic load dispatch problem. *IEEE Syst. Journal*, 9(3), 1031-1044.
- Toh, K., Tutuncu, R., & Todd, M. (2012). On the implementation and usage of sdpt3 – a matlab software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 4.0. En M. F. Anjos & J. B. Lasserre (Eds.), *Handbook on semidefinite, conic and polynomial optimization* (pp. 715–754). Springer US.
- Vandenbussche, D., & Nemhauser, G. (2005a). A polyhedral study of nonconvex quadratic programs with box constraints. *Math. Program.*, 102, 531–557.

- Vandenbussche, D., & Nemhauser, G. (2005b). A branch-and-cut algorithm for nonconvex quadratic programs with box constraints. *Math. Program.*, 102, 559-575.
- Vavasis, S. (1995). *Complexity issues in global optimization: a survey*. R.Horst and P.M.Pardalos (eds), Handbook of global optimization, Kluwer, Dordrecht.
- Verschelde, J. (1999). Algorithm 795: Phcpack: A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Trans. Math. Softw.*(25), 251-276.
- Wagenpfeil, J., Arnold, E., Linke, H., & Sawodny, O. (2013). Modeling and optimized water management of artificial inland waterway systems. *Journal of Hydroinformatics*, 15(2), 348-365.
- Yajima, Y., & Fujie, T. (1998). A polyhedral approach for nonconvex quadratic programming problem with box constraints. *Journal of Global Optimization*(13), 151-170.
- Yang, J., & Jiang, Z. (2015). Rectangle fitting via quadratic programming. En *2015 IEEE 17th international workshop on multimedia signal processing (mmsp)* (p. 1-6).
- Zhang, B., & Hua, Z. (2012). Simple solution methods for separable mixed linear and quadratic knapsack problem. *Applied Mathematical Modelling*, 36(7), 3245-3256.
- Zometa, P., Kugel, M., Faulwasser, T., & Findeisen, R. (2012). Implementation aspects of model predictive control for embedded systems. En *Proceedings of the 2012 American control conference* (p. 1205-1210). Montreal, Canada.

ANEXOS

Anexo A

Programación paramétrica

El desarrollo de este Anexo está dirigido a la presentación de los conceptos y notaciones básicas de la programación paramétrica, los cuales constituyen la base fundamental del procedimiento corte y continuación que se presenta en este trabajo.

A.1. Conceptos básicos

Los problemas de optimización uniparamétricos han sido estudiados intensivamente en las últimas décadas (Jongen *et al.*, 1986; Guddat *et al.*, 1990; Ruckmann & Tammer, 1992; Bomze, Csendes, Horst, & Pardalos, 1997; Gomez *et al.*, 2000; Gomez, 2001; Guddat, Guerra, Nowack, & Ruckmann, 2006).

Tales problemas se denotan por $P(t)$, y en general poseen el siguiente planteamiento.

$$P(t) \text{ mín}\{f(x, t) | x \in M(t)\} \quad (\text{A.1.1})$$

$$M(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} h_i(x, t) =, \quad i = 1, \dots, m \\ g_j(x, t) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s \end{array} \right. \right. \quad (\text{A.1.2})$$

donde t es un parámetro real, y las funciones $f, h_i, g_j \in C^3(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$.

Nótese que cada problema $P(t)$ queda descrito por la tripleta de funciones (f, h, g) , con $h = (h_1, \dots, h_m)$ y $g = (g_1, \dots, g_s)$. Para estudiar la estructura del conjunto factible $M(t)$ resulta conveniente introducir las llamadas condiciones de regularidad.

Definición A.1.1. *Se dice que $M(\bar{t})$ satisface las condiciones de regularidad de independencia lineal (LICQ) en \bar{x} si el conjunto de vectores $\{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), \quad i \in I; \quad D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), \quad j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})\}$ es linealmente independiente.*

donde, $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, s\}$, y $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{j \in J : g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0\}$ es el conjunto índice correspondiente a las restricciones activas en (\bar{x}, \bar{t}) .

Una condición adicional sobre M, más débil que la LICQ, pero que posee su propio interés es la llamada MFCQ.

Definición A.1.2. Se dice que la condición de regularidad de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) se cumple en $\bar{x} \in M(\bar{t})$ si:

MF1: Los vectores $\{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I\}$ son linealmente independientes.

MF2: Existe un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que

- $D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) * \xi = 0, i \in I$
- $D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) * \xi < 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$

El interés principal en el estudio de los problemas de optimización paramétricos recae sobre el conjunto de puntos críticos generalizados del mismo. De acuerdo con la definición dada por Jongen, Jonker y Twilt en (Jongen *et al.*, 1986) se tiene:

Definición A.1.3. Un punto $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{t})$ se llama punto crítico generalizado (p.c.g.) de $P(t)$ si $\bar{x} \in M(\bar{t})$ y el conjunto $\{D_x f(\bar{x}, \bar{t}), D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), i \in I; D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})\}$ es linealmente dependiente.

Al conjunto de todos los puntos críticos generalizados se denota por \sum_{pcg} .

Esto es : $\sum_{pcg} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (x, t) \text{ es un p.c.g. de } P(t)\}$.

De la definición anterior se tiene que, si $\bar{x} \in M(\bar{t})$ es un p.c.g. de P(t), entonces existen coeficientes $\lambda_0, \lambda_i, i \in I; \mu_j, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$ tales que

$$\lambda_0 D_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})} \mu_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

Si el p.c.g. (\bar{x}, \bar{t}) satisface además la condición de regularidad LICQ, entonces $\lambda_0 \neq 0$ y se obtiene, en particular, la existencia de multiplicadores $\lambda_i, i \in I$; y $\mu_j, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$, unívocamente determinados, tales que

$$D_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})} \mu_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

Definición A.1.4. Un p.c.g. (\bar{x}, \bar{t}) de $P(\bar{t})$ se llama punto estacionario si existen multiplicadores $\lambda_i, i \in I$, y $\mu_j \geq 0, j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$, tales que se verifica la relación (A.1.4).

Definición A.1.5. Sea (\bar{x}, \bar{t}) un p.c.g. de $P(\bar{t})$. Se dice que el mismo es un punto crítico no degenerado si se cumplen las siguientes condiciones:

ND1: Se cumple la LICQ en (\bar{x}, \bar{t}) .

ND2: $\mu_j \neq 0, \quad \forall j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})$

ND3: $D_x^2 L|_{T_{\bar{x}}M(\bar{t})}$ es no singular.

En la definición anterior $D_x^2 L$ es la matriz hessiana de la función de Lagrange definida por

$$L(x, \lambda, \mu, t) = D_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x}, \bar{t})} \mu_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) \quad (\text{A.1.5})$$

y $T_{\bar{x}}M(\bar{t})$ representa el espacio tangencial a $M(\bar{t})$ en \bar{x} descrito por

$$T_x M(t) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : D_x h_i(x, t) * \xi = 0, \quad i \in I; \quad D_x g_j(x, t) * \xi = 0, \quad j \in J_0(x, t)\} \quad (\text{A.1.6})$$

La notación $D_x^2 L|_{T_{\bar{x}}M(\bar{t})}$ significa que la matriz hessiana $D_x^2 L$ está restringida sobre el espacio tangencial $T_{\bar{x}}M(\bar{t})$ y la misma está representada por la clase de matrices $V^T (D_x^2 L) V$, donde V es una matriz cuyas columnas forman una base de $T_{\bar{x}}M(\bar{t})$.

El conjunto \sum_{pcg} se compone, en general, (localmente considerado) de un número finito de curvas unidimensionales, lo cual constituye una premisa importante para la aplicación de los métodos de continuación en el cálculo de puntos críticos generalizados.

La estructura local del conjunto ha sido caracterizada completamente por Jongen, Jonker y Twilt en (Jongen *et al.*, 1986), donde se define la clase \mathcal{F} de tal forma que si $(f, h, g) \in \mathcal{F}$ entonces \sum_{pcg} está compuesta solo por cinco tipos de puntos críticos generalizados bien diferenciados y excluyentes. A continuación se define cada uno de estos cinco tipos de p.c.g., siguiendo para ello la caracterización dada en (Jongen *et al.*, 1986).

A.2. Definición de los cinco puntos críticos generalizados

En este subepígrafe se describen los cinco tipos de puntos críticos generalizados que componen la clase \mathcal{F} de Jongen-Jonker-Twilt.

Definición A.2.1. Se dice que (\bar{x}, \bar{t}) es un p.g.c. de tipo-1 si el mismo es un punto no degenerado de $P(\bar{t})$. Notación $\sum_{pcg}^{(1)}$.

De esta forma, un p.g.c. (\bar{x}, \bar{t}) es de tipo-1 si:

(1a) Se cumple la LICQ en (\bar{x}, \bar{t}) .

(1b) $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = J_{\neq}(\bar{\mu})$, donde $J_{\neq}(\bar{\mu}) = \{j \in J_0(\bar{x}, \bar{t}) : \bar{\mu}_j \neq 0\}$

(1c) $D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}M}(\bar{t})}$ es no singular.

En lo adelante, si no se aclara otra cosa, se tomará, s.p.d.g., $J_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \dots, p\}$.

A partir de (1a) se tiene la existencia de multiplicadores de Lagrange unívocamente determinados $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, y $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^s$, tales que si $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es una solución del sistema $\mathcal{H}(x, \lambda, \mu, \bar{t}) = 0$, donde \mathcal{H} está definida por:

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u, t) = \begin{bmatrix} D_x L(x, \lambda, u_j^+, t) \\ h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_m(x, t) \\ u_1^{(-)} + g_1(x, t) \\ \vdots \\ u_s^{(-)} + g_s(x, t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.1})$$

con $u_j = \begin{cases} \mu_j & \text{si } g_j(x, t) = 0 \\ g_j(x, t) & \text{si } g_j(x, t) < 0 \end{cases}$, $u_j^{(+)} = \max\{0, \mu_j\}$, y $u_j^{(-)} = -\min\{\mu_j, 0\}$.

Pero si se toma en cuenta el cumplimiento de las condiciones de complementariedad, $(\mu_j = 0, \forall j \notin J_0(x, w, t))$ también es posible trabajar con el sistema reducido

$$\mathcal{H}^p(x, \lambda, \mu, t) = \begin{bmatrix} D_x L(x, \lambda, \mu, t) \\ h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_m(x, t) \\ g_1(x, t) \\ \vdots \\ g_p(x, t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.2})$$

Los puntos críticos generalizados tipo 2-5 representan tres degeneraciones diferentes de los p.c.g. tipo-1, y los mismos quedan caracterizados como sigue.

Definición A.2.2. Se dice que (\bar{x}, \bar{t}) es un p.g.c. tipo-2 de $P(\bar{t})$, y se denota $\sum_{pcg}^{(2)}$, cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(2a) \bar{x} es un punto crítico no degenerado del problema $P_2^p(\bar{t})$ con $p \geq 1$, donde

$$P_2^p(t) : \min\{f(x, t) : x \in M^p(t)\} \quad (A.2.3)$$

$$M^p(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x, t) = 0, \quad i \in I; \quad g_j(x, t) = 0, \quad j \in J_0(x, t)\}$$

(2b) Para los multiplicadores de Lagrange, unívocamente determinados, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, con $\mathcal{H}^p(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) = 0$, se cumple que $|J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus J_{\neq}(\bar{\mu})| = 1$. Es decir, se anula exactamente un multiplicador de Lagrange ($\mu_{j_0} = 0$) correspondiente a la restricción activa G_{j_0} . (s.p.d.g. sea $j_0 = p$).

(2c) El punto (\bar{x}, \bar{t}) es un punto crítico no degenerado del problema $P_2^{p-1}(\bar{t})$.

Definición A.2.3. Se dice que (\bar{x}, \bar{t}) es un p.g.c. tipo-3 de $P(\bar{t})$, y se denota $\sum_{pcg}^{(3)}$, cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(3a) Valen las condiciones (1a) y (1b) de la definición (A.2.1).

(3b) Sean $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ definidas como en (1a). El punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ es un punto crítico no degenerado del problema $(P_3(t))$, definido por

$$P_3(t) : \min\{F_3(x, \lambda, \mu, t) : \mathcal{H}^p(x, \lambda, \mu, t) = 0\} \quad (A.2.4)$$

donde $F_3(x, \lambda, \mu, t) = t$.

La condición (3b) implica que se anula exactamente un valor propio de la matriz

$$D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}}M(\bar{t})}$$

Definición A.2.4. Se dice que (\bar{x}, \bar{t}) es un p.g.c. tipo-4 de $P(\bar{t})$, y se denota $\sum_{pcg}^{(4)}$, si el mismo satisface las siguientes condiciones.

(4a) $1 \leq m + p \leq n$, y se cumple que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} D_x h_1(\bar{x}, \bar{t}) \\ \vdots \\ D_x h_m(\bar{x}, \bar{t}) \\ D_x g_1(\bar{x}, \bar{t}) \\ \vdots \\ D_x g_p(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix} = m + p - 1 \quad (A.2.5)$$

(4b) $\bar{\alpha}_{m+j} \neq 0$ para cada $1 \leq j \leq p$, donde $\bar{\alpha}$ es fijo y está definido de tal forma que

$$\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^p \bar{\alpha}_{m+j} D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (A.2.6)$$

(4c) El punto $(\bar{x}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{m+p-1}, \bar{t}, 0)$ es un punto crítico no degenerado del problema $(P_4(t))$, definido por

$$P_4(t) : \min\{F_4(x, \alpha, t, \alpha_0) : G_4(x, \alpha, t, \alpha_0) = 0\} \quad (A.2.7)$$

donde $F_4(x, \alpha, t, \alpha_0) = t$,

$$G_4(x, \alpha, t, \alpha_0) = \begin{pmatrix} D_x L_4(x, \alpha, t, \alpha_0) \\ h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_m(x, t) \\ g_1(x, t) \\ \vdots \\ g_p(x, t) \end{pmatrix}$$

y $L_4(x, \alpha, t, \alpha_0) = \alpha_0 f(x, t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i D_x h_i(x, t) + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{m+j} D_x g_j(x, t) + \bar{\alpha}_{m+p} D_x g_p(x, t)$.

Definición A.2.5. Se dice que (\bar{x}, \bar{t}) es un p.g.c. tipo-5 de $P(\bar{t})$, y se denota $\sum_{pcg}^{(5)}$, si el mismo satisface las siguientes condiciones.

(5a) $m + p = n + 1$ y $\text{rang}\{Dh_1(\bar{x}, \bar{t}), \dots, Dh_m(\bar{x}, \bar{t}), Dg_1(\bar{x}, \bar{t}), \dots, Dg_p(\bar{x}, \bar{t})\} = n + 1$

(5b) $\bar{\alpha}_{m+j} \neq 0$ para cada $1 \leq j \leq p$, donde $\bar{\alpha}$ se define como en (A.2.6),

(5c) Para cada vector $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$,

con $D_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^p \tilde{\mu}_j D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ vale que $J_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus J_{\neq}(\tilde{\mu}) \leq 1$.

Una vez definidos los cinco tipos de puntos críticos generalizados, la clase \mathcal{F} definida por Jongen, Jonker y Twilt se puede formular como

$$\mathcal{F} = \left\{ (f, h, g) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{1+m+s}) \left| \sum_{pcg} (f, h, g) \subseteq \cup_{v=1}^5 \sum_{pcg}^{(v)} (f, h, g) \right. \right\} \quad (\text{A.2.8})$$

donde $\sum_{pcg}^{(v)}(f, h, g)$ es el conjunto de los puntos críticos generalizados tipo (v) para el problema paramétrico definido por las funciones f , h y g .

En la figura-(A.1) se ilustra la estructura local de $\sum_{pcg}^{(v)}(f, h, g)$ en la vecindad de cada uno de los cinco puntos críticos generalizados que componen la clase \mathcal{F} .

En (Jongen *et al.*, 1986) se analiza detalladamente la estructura local en la vecindad de cada uno de estos cinco puntos, demostrándose además, que si un problema uniparamétrico pertenece a la clase \mathcal{F} el mismo posee una estructura adecuada para la aplicación de métodos de continuación. Asimismo, se prueba que el conjunto de todos los problemas de optimización paramétrica que pertenecen a la clase \mathcal{F} es un conjunto genérico, o sea, abierto y denso respecto a la topología fuerte de Whitney. En el mismo trabajo se enuncia y demuestra el siguiente teorema de perturbación, que garantiza la pertenencia a

la clase \mathcal{F} de los problema de optimización uniparamétrico, para casi toda perturbación cuadrática.

Teorema A.2.1. (*Teorema de perturbación*). Sean $(f, h, g) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{1+m+s})$. Entonces cada subconjunto medible del conjunto

$$\left\{ (A, b, c, d) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)+n+n(m+s)+m+s} : \Phi \left(\begin{array}{c} f(x) + \frac{1}{2}x^T A x + b^T x \\ h_1(x) + c_1^T x + d_1 \\ \vdots \\ h_m(x) + c_m^T x + d_m \\ g_1(x) + c_{m+1}^T x + d_{m+1} \\ \vdots \\ g_{m+s}(x) + c_{m+s}^T x + d_{m+s} \end{array} \right) \right\} \notin \mathcal{F} \quad (\text{A.2.9})$$

tiene medida de Lebesgue igual a cero.

donde Φ es la aplicación de inmersión del problema de optimización en la familia de problemas de optimización uni-paramétrica.

Definición A.2.6. Un problema paramétrico $P(t)$ se denomina regular en el sentido de Jongen-Jonker-Twilt (JJT-regular), si $(f, h, g) \in \mathcal{F}$.

Definición A.2.7. De igual forma se dice que $P(t)$ es regular en el sentido de Kojima-Hirabayashi (KH-regular), si 0_{n+m+p} es un valor regular de \mathcal{H}^p

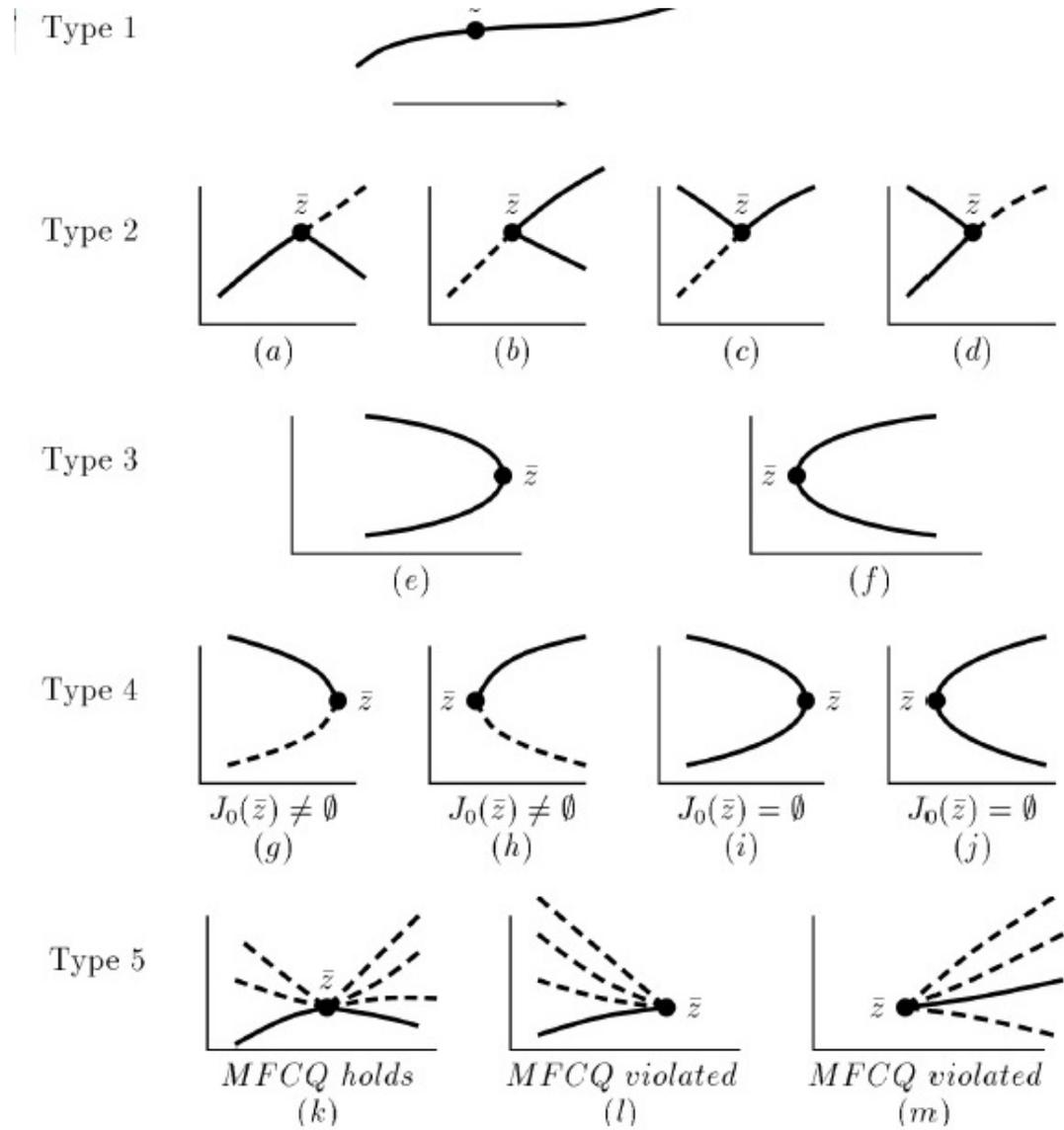


Figura A.1: Estructura local de $\sum_{pcg}^{(v)}(f, h, g)$ en la vecindad de cada p.c.g.

Anexo B

Programación Semidefinida Positiva

La programación semidefinida positiva (PSD) (o SDP, por sus siglas en inglés) resulta probablemente una de las áreas de desarrollo más exitosas de las matemáticas en los últimos tiempos. SDP tiene múltiples aplicaciones teóricas y prácticas, entre las que se destacan: la programación convexa, optimización combinatoria, y problemas de control.

El problema de programación semidefinida positiva como problema de optimización puede ser definido como sigue

$$\mu^* = \min \{ C \bullet X \mid A_i \bullet X = b_i \ (i = 1, \dots, m), \ X \succeq 0 \} \quad (\text{B.0.1})$$

donde la función (lineal) objetivo $C \bullet X = \text{trace}(CX) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$ es el producto interno de dos matrices reales y simétricas de n-filas y n-columnas: la matriz constante $C \in S^n$ y una matriz variable $X \in S^n$. Las restricciones lineales $A_i \bullet X = b_i \ (i = 1, \dots, m)$, quedan definidas por las matrices constantes reales y simétricas $A_i \in S^n$ de n-filas y n-columnas, y el vector $b \in \mathbb{R}^m$, y adicionalmente la condición crucial de que la matriz X tiene que ser semidefinida positiva.

En principio, la programación semidefinida positiva (PSD) puede ser vista como una extensión de la programación lineal (PL), en la cual se reemplaza el vector de variables por una matriz variable simétrica, y las restricciones de no negatividad por la de semidefinida positiva.

En este sentido, el model dual correspondiente a (B.0.1) puede formularse como

$$(y^*, S^*) = \max \left\{ b^T y \mid \sum_{i=1}^n y_i A_i + S = C, \quad S \succeq 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (\text{B.0.2})$$

El teorema de dualidad simple implica que $C \bullet X - b^T y = S \bullet X \geq 0$ para toda solución factible. La igualdad se cumple en la solución óptima, si los conjuntos factibles de ambos problemas tienen interior no vacío (dualidad fuerte). Sin embargo, la teoría relativa a la programación semidefinida positiva resulta más débil que la correspondiente a la programación lineal. Aquí puede suceder que el problema primal (B.0.1) sea factible, pero su dual correspondiente (B.0.2) no. Incluso, puede ocurrir que ambos problemas (B.0.1) y (B.0.2) tengan solución y no satisfacer la condición de dualidad fuerte ($S \bullet X = 0$).

Tomando en cuenta las analogías entre la programación lineal y la programación semidefinida positiva, no es de sorprender que los métodos de punto interior desarrollados inicialmente para la programación lineal (Karmarkar, 1984), hallan sido exitosamente extendidos a la programación semidefinida positiva (Alizadeh, 1995).

Estos autores demuestran que tales problemas de optimización cónica se pueden resolver por técnicas de minimización secuencial, donde la restricción cónica se elimina con la introducción de un término de barrera en la función objetivo. Un papel muy importante juega aquí la función barrera:

$$f_{bar}(X) = -\log(\det(X)) \quad (\text{B.0.3})$$

De esta suerte, el problema primal (B.0.1) puede reescribirse como

$$\min \{ C \bullet X - \mu \log(\det(X)) \mid A_i \bullet X = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \} \quad (\text{B.0.4})$$

donde el parámetro μ se va disminuyendo secuencialmente y tiende a cero. Continuando con las tendencias de la programación lineal, los métodos primal-dual han tomado gran popularidad también en la programación semidefinida positiva. En ellos se busca minimizar el *gap*

$$C \bullet X - b^T y = \text{trace}(XS) \quad (\text{B.0.5})$$

empleando para ello la función barrera

$$f_{PD} = -(\log(\det(X)) + \log(\det(S))) = -\log(\det(SX)) \quad (\text{B.0.6})$$

con lo cual la secuencia de problemas a resolver resulta

$$\min_{(X,y,S)} \left\{ S \bullet X - \mu \log(\det(SX)) \mid A_i \bullet X = b_i \ (i = 1, \dots, m), \sum_{i=1}^n y_i A_i + S = C \right\} \quad (\text{B.0.7})$$

Aplicando aquí las condiciones KKT de primer orden se obtiene:

$$A_i \bullet X = b_i \ (i = 1, \dots, m) \quad (\text{B.0.8})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i A_i + S = C \quad (\text{B.0.9})$$

$$SX = \mu I \quad (\text{B.0.10})$$

$$X, S \succ 0 \quad (\text{B.0.11})$$

El sistema anterior tiene un único par de soluciones positivas definidas, denotadas por $X(\mu) \succ 0$ y $S(\mu) \succ 0$. La aplicación de un método primal-dual resuelve aproximadamente este sistema para cada valor de μ .

Una explicación más detallada de las particularidades de estos procedimientos puede encontrarse, por ejemplo, en (Klerk, Roos, & Terlaky, 1997) y en general sobre la programación semidefinida positiva en la web <http://www-user.tu-chemnitz.de/helmberg/semidef.html>.

Anexo C

Ejemplo Ilustrativo

Problema original (Tomado de (Dang & Xu, 2000)).

$$\begin{aligned} \min\{f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 1,5x_1 - x_2 : x \in S\} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

Dado que los valores propios de la matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ son -2 y 2 el problema clasifica como indefinido. En la figura-C.1 se puede observar que el problema tiene dos mínimos locales: uno en $x = (0; 1)$ con valor $f(0; 1) = -1$ y otro en $x = (1; 0)$ con valor $f(1; 0) = -1,5$; que resulta, a su vez, el mínimo global del problema.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

ITERACIÓN-0:

Paso-1: Tomando, por ejemplo, $x^{(0)} = [0,3; 0,8]$ como punto de partida, el primer mínimo local calculado resulta ser $x = (0; 1)$ y con ello $f_{UB}^{(*)} = f_{UB}^{(0)} = -1,0$, y $x^* = (0; 1)$.

Paso-2.1: En base a este resultado, y tomando, por ejemplo, a $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0,3; 0,8)$, $D=I$, $d=(0;0)$ y $\varepsilon = 0,01$, el problema auxiliar [QPA] correspondiente resulta:

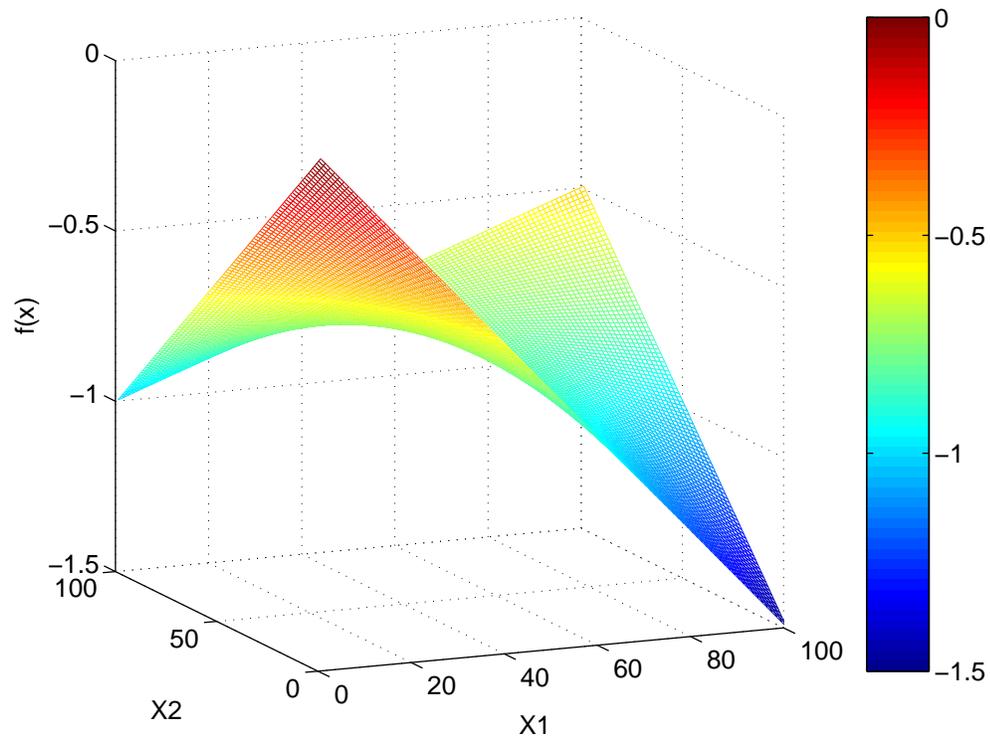


Figura C.1: Gráfica de la función $f(x_1, x_2)$

$$\min f_{aux}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[(x_1 - 0,3)^2 + (x_2 - 0,8)^2]$$

Sujeto a :

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_1 - 1 \leq 0$$

$$g_4(x_1, x_2) = x_2 - 1 \leq 0$$

$$g_5(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 1,5x_1 - x_2 + 1,01 \leq 0$$

(C.0.2)

donde la restricción $g_5(x_1, x_2)$ resulta precisamente a la condición de corte $f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon$.

A partir de este problema auxiliar, y fijando $w^{(0)} = 1$, y $c = 1$ se obtiene (según 2.1.2) el siguiente problema de optimización paramétrica.

$$\min F(x_1, x_2, w, t) = \frac{1}{2}[(x_1 - 0,3)^2 + (x_2 - 0,8)^2] + \frac{1}{2}(w - 1)^2 + w$$

Sujeto a :

$$G_1(x_1, x_2, w, t) = -x_1 \leq 0$$

$$G_2(x_1, x_2, w, t) = -x_2 \leq 0$$

$$G_3(x_1, x_2, w, t) = x_1 - 1 \leq 0$$

$$G_4(x_1, x_2, w, t) = x_2 - 1 \leq 0$$

$$G_5(x_1, x_2, w, t) = t(2x_1x_2 - 1,5x_1 - x_2 + 1,001) + (1 - t)(w - 1) \leq 0$$

$$G_6(x_1, x_2, w, t) = -w \leq 0$$

(C.0.3)

En la figura-C.2 se representan las curvas de puntos críticos generalizados, correspondientes a las variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $w(t)$, determinadas por el método de continuación al resolver el problema-C.0.3, y en la tabla-C.1 se resaltan las coordenadas de los puntos más significativos en cada una de ellas.

Observe que las curvas concluyen en el p.c.g. tipo-4 (0;1;0,93) que se detecta para

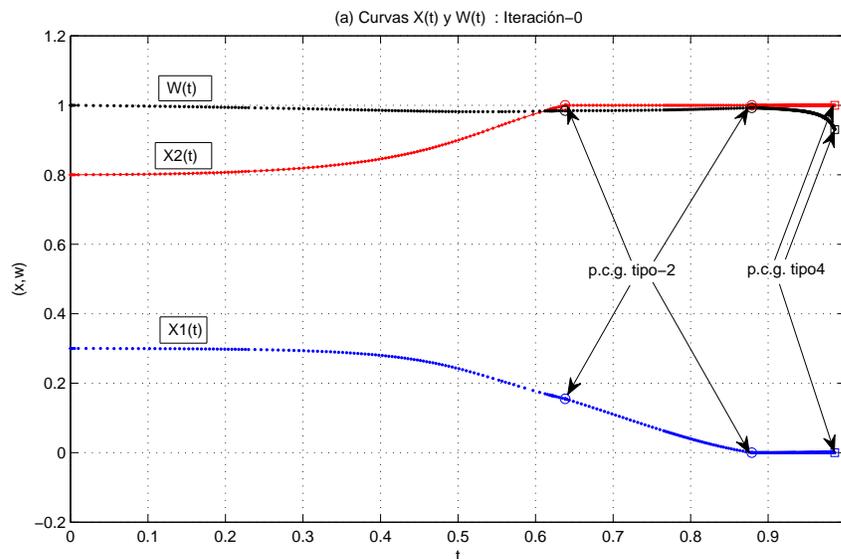


Figura C.2: Aproximación de las curvas $x(t)$, $w(t)$ y $\mu(t)$ en la iteración-0

$t = 0,999$. Dado que la componente x del p.c.g. tipo-4 a que se ha llegado resulta el mismo mínimo local (0;1) del problema [BQP] calculado en el paso-1, se tiene (según

Tabla C.1: Singularidades determinadas en la iteración-1, paso 2-1.

t	x_1	x_2	w	Singularidad	Comentario
0.000	0.300	0.800	1.000	tipo-1	g.c.p. no estacionario
0.638	0,155	1.000	0.984	tipo-2	Rest. G_4 se activa
0,879	0.000	1.000	0.993	tipo-2	Rest. G_1 se activa
0.999	0.000	1.000	0.930	tipo-4	$\mu_1, \mu_5, \mu_6 \rightarrow \infty$

lema-2.3.1) que en dicho punto no se satisface la condición de regularidad MFCQ. En consecuencia, se trata de una singularidad no tratable por el método de continuación, con lo cual el algoritmo se ve forzado a concluir sin poder alcanzar el objetivo de llegar a $t=1$. En la figura-C.3 se ilustra el porqué de la ocurrencia de este tipo de singularidad. Obsérvese que el conjunto factible $M(t)$, conexo cuando $t=0.2$ (ver figura-C.3a), se separa en dos componentes conexas disjuntas (figura-C.3b), una de las cuales (la que contiene a la solución $x = (0; 1)$) se va reduciendo a medida que se incrementa el valor del parámetro t (figura-C.3c), hasta quedar un conjunto vacío cuando $t = 1$ (ver figura-C.3d). Sin embargo, todos los puntos que integran la componente conexa no vacía, ubicada en la parte inferior derecha de la caja, satisfacen la condición $f(x) \leq f(x^* - \varepsilon)$. Recordemos que existe dirección de descenso apropiada para saltar a esta componente (Gomez *et al.*, 2000)). En tal situación, el algoritmo híbrido propone seguir con el paso 2-2, o sea, aplicar una iteración del método de ramificación y acotación.

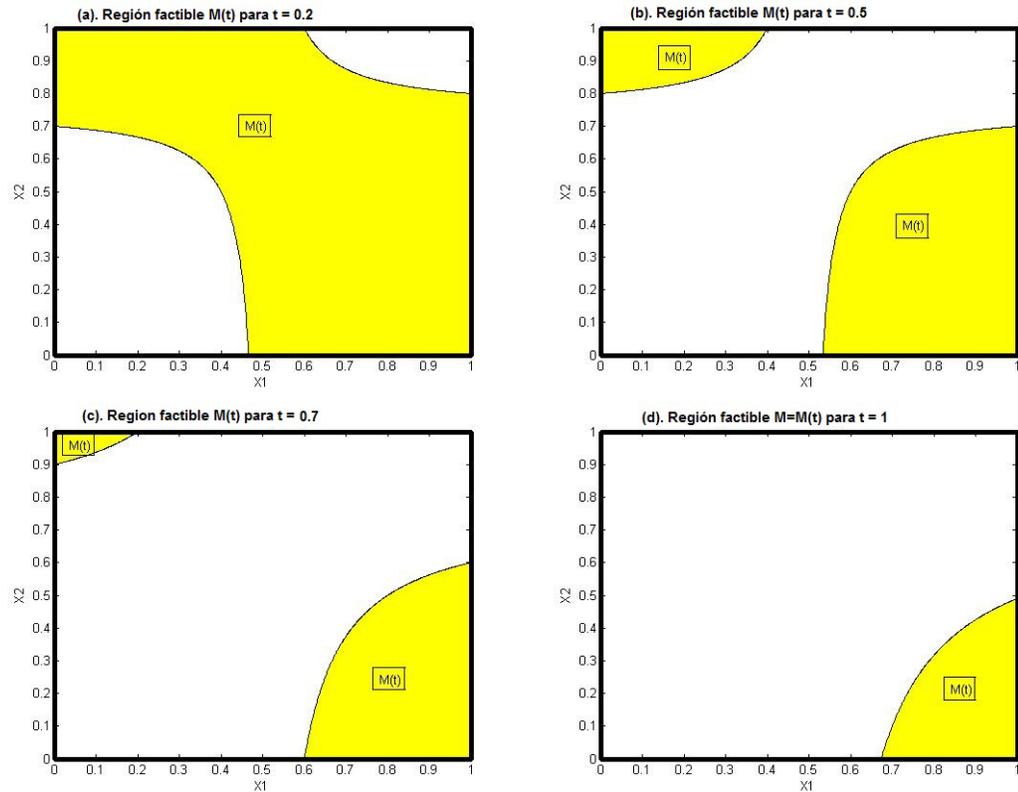


Figura C.3: Gráfica del conjunto $M(t)$ para diferentes niveles del parámetro t

Paso-2.2: Resolver el problema relajado [RDNN] correspondiente.

$$[RDNN] \quad \min \left\{ \tilde{X}_{12} + \tilde{X}_{21} - 1,5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \mid (\tilde{X}, \tilde{x}) \in \widetilde{RB} \right\} \quad (C.0.4)$$

$$\widetilde{RB} = \left\{ (\tilde{X}, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^{8 \times (8+1)} \mid \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{array}{l} \tilde{X}_{11} + 2\tilde{X}_{17} + \tilde{X}_{77} \\ \tilde{X}_{22} + 2\tilde{X}_{28} + \tilde{X}_{88} \\ 4\tilde{X}_{22} - 4\tilde{X}_{23} + 4\tilde{X}_{25} + \tilde{X}_{33} - 2\tilde{X}_{35} + \tilde{X}_{55} \\ 4\tilde{X}_{11} - 4\tilde{X}_{14} + 4\tilde{X}_{16} + \tilde{X}_{44} - 2\tilde{X}_{46} + \tilde{X}_{66} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,25 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & \tilde{X} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}^{(9 \times 9)} \right\} \quad (C.0.5)$$

donde $\tilde{x} = (x_1, x_2, z_1, z_2, y_1, y_2, s_1, s_2)^T$, $\tilde{X} \in S_8^+$, y \mathcal{D} representa al cono convexo y cerrado de matrices de 9×9 doblemente no negativas.

La solución de este problema resulta $\tilde{x} = (1; 0; 0,33; 0,25; 0,66; 0,18; 0; 1)^T$, con $f_{LB}^{(0)} = -1,5$, y por tanto $f_{LB}^{(*)} = -1,5$

Paso-2.3: Como $|\frac{f_{UB}^{(*)}-f_{LB}^{(*)}}{f_{UB}^{(*)}}| = |\frac{-1+1,5}{-1}| = 0,5$, no se cumple la condición de mínimo global.

Paso-2.4: Partición del conjunto.

Dado que la solución \tilde{x} calculada no satisface las condiciones KKT de complementariedad.

$$x \circ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.0.6})$$

$$y \circ s = \begin{pmatrix} 0,66 \\ 0,18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,18 \end{pmatrix} \quad (\text{C.0.7})$$

Empleando la regla (RSD) se selecciona el índice $i = 1$ y aplicando ahora la regla (PKKT) se construyen los subconjuntos:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0; 0 \leq x_2 \leq 1\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

Finalmente se asigna $f_{LB}^{(1)} = f_{LB}^{(2)} = -1,5$, y se elimina el problema B_0 .

La lista de problemas pendientes resulta ahora $Lista = \{B_1, B_2\}$.

Paso-2.5: Dado que las cotas inferiores para ambos problemas son iguales, se selecciona el subproblema con región factible B_1 y se repite todo el proceso.

ITERACIÓN-1

Paso-1: Tomando, por ejemplo, $\bar{x}^{(1)} = [0; 0,5]$ como punto de partida en la caja B_1 , se llega al mismo mínimo local $x = (0; 1)$ de la primera iteración y con ello $f_{UB}^{(1)} = -1,0$.

Paso-2.1: La figura-C.5 muestra las curvas de p.c.g. que determina el método de continuación. Como se puede observar el método concluye nuevamente en un p.c.g. tipo-4 $(0; 1; 0,93)$, cuando $t=0,999$, para el cual (se sabe) no se cumple la MFCQ.

Paso-2.2: Se calcula $f_{LB}^{(1)} = -1,0$ (solución del problema [RDNN] correspondiente).

Paso-2.3: Como $|\frac{f_{UB}^{(*)}-f_{LB}^{(*)}}{f_{UB}^{(*)}}| = |\frac{-1+1,5}{-1}| = 0,5 > 0$, no se satisface el criterio de parada.

Paso-2.4: Ahora $f_{LB}^{(1)} = f_{UB}^{(*)}$, se elimina el problema de la lista, quedando $Lista = \{2\}$.

Paso-2.5: Se selecciona el subproblema con región factible B_2 y se repite el procedimiento.

ITERACIÓN-2

Paso-1: Partiendo del punto $\bar{x}^{(2)} = [1; 0,5] \in B_2$ se calcula el mínimo local $x = (1; 0)$, con $f_{UB}^{(2)} = -1,5$. Actualizando la cota superior se tiene: $f_{UB}^{(*)} = -1,5$, y se pone $x^* = (1; 0)$

Paso-2.1: La aplicación del método de continuación lleva nuevamente en un p.c.g. tipo-4.

Paso-2.2: Al resolver el problema relajado [RDNN] correspondiente se tiene $f_{LB}^{(2)} = -1,5$.

Paso-2.3: Como $f_{UB}^{(*)} = f_{LB}^{(*)} = 0$, se tiene la solución óptima del problema.

El algoritmo concluye satisfactoriamente, reportando al punto $x^* = (1; 0)$ con $f^* = -1.5$ como el mínimo global del problema.

En la figura-C.6 se representa un esquema del árbol generado por el algoritmo. En

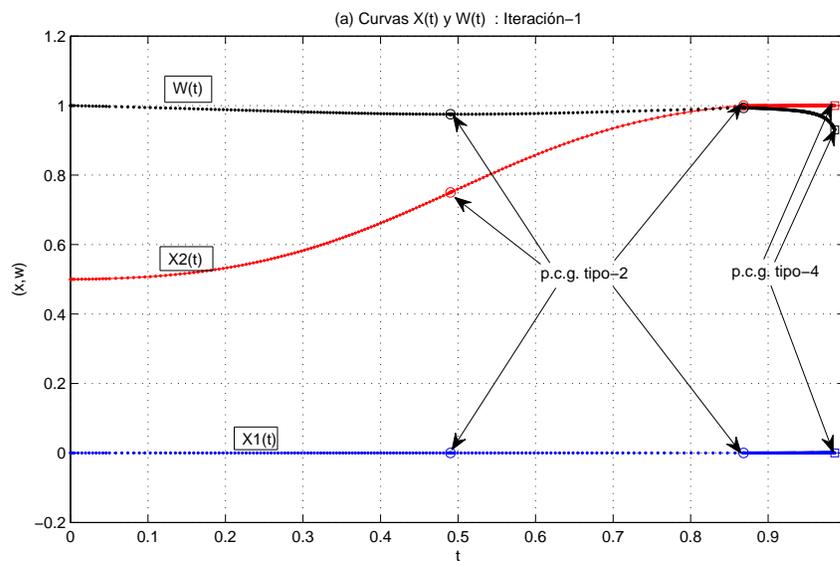


Figura C.4: Aproximación de las curvas $x(t)$ y $w(t)$ en la iteración 1.

las gráficas se resalta la curva solución determinada por la aplicación de $C\&C$ en cada problema, y la singularidad no tratable (p.c.g. tipo-4) en la que concluye el método de continuación en cada iteración.

Obsérvese que luego de la ramificación, la región factible se reduce a una cara de la caja B : el intervalo $[0 \leq x_2 \leq 1]$ con $x_1 = 0$ en la región B_1 , y con $x_1 = 1$ en B_2 .

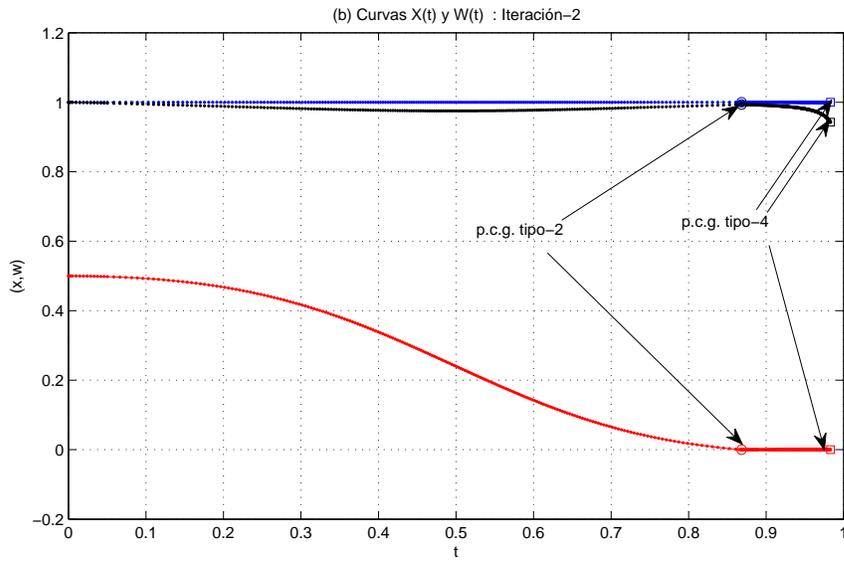


Figura C.5: Aproximación de las curvas $x(t)$ y $w(t)$ en la iteración 2.

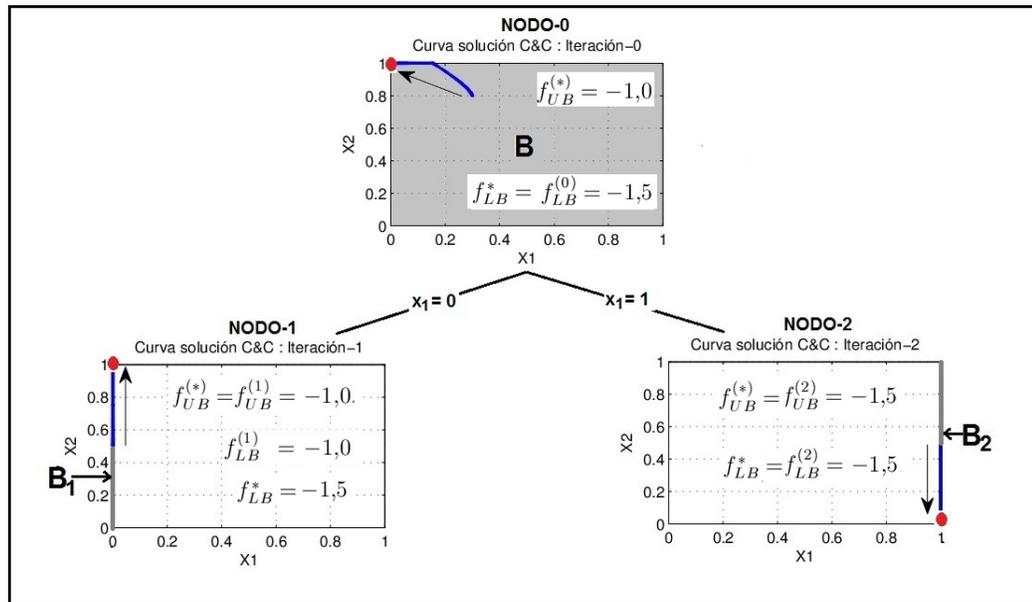


Figura C.6: Esquema del árbol generado por el algoritmo para el ejemplo ilustrativo

Anexo D

Características de los problemas pruebas y resultados del método de corte y continuación

D.1. Características de los problemas pruebas

Conjunto de Problemas	Dimensión N	Densidad D	V. Propios Neg. \widehat{QI}	Condición $\kappa_{min}-\kappa_{max}$
Básicos	20	100	$\approx 50\%$	74.77 - 186.55
	30	[60:10:100]	$\approx 50\%$	27.50 - 971.72
	40	[30:10:100]	$\approx 50\%$	28.36 - 691.78
	50	[30;40;50]	$\approx 50\%$	42.61 - 830.78
	60	20	$\approx 50\%$	69.30 - 1886.71
Extendidos	70	[25;50;75]	$\approx 50\%$	99.91 - 487.86
	80	[25,50,75]	$\approx 50\%$	64.09 - 728.49
	90	[25;50;75]	$\approx 50\%$	99.85 - 587.43
	100	[25;50;75]	$\approx 50\%$	81.24 - 319.32
Extras	125	[25;50;75]	$\approx 50\%$	205.90 - 1164.82
	150	[25;50;75]	$\approx 50\%$	101.97 - 15164.51
	175	[25;50;75]	$\approx 50\%$	210.18 - 567.30
	200	[25;50;75]	$\approx 50\%$	205.90 - 1164.82

Tabla D.1: Características de las matrices que conforman la base de problemas pruebas

La notación [a:b:c] utilizada para los problemas con dimensión $N=30$ y $N=40$, como en MatLab, designa al vector cuya primera componente es (a), y el resto de las componentes se obtienen incrementando en (b) la componente anterior, hasta llegar a la última componente

(c).

Así, para $N=30$ por ejemplo, la notación $[60:10:100]$ sirve para denotar el vector $[60;70;80;90;100]$.

D.2. Resultados del método de corte y continuación

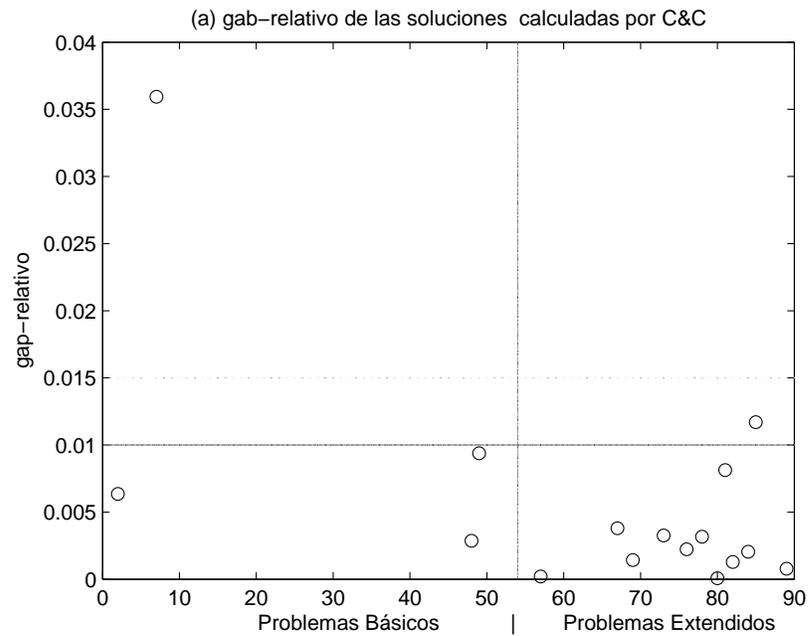


Figura D.1: Mediciones de la calidad de las soluciones $C\&C$.

$Prob.$	N-D-S	f_{minloc}^*	$f_{minglob}^*$	dif	Salida
1	20-100-1	-706.500	-706.500	0.000	p.c.g. tipo-4 + no MFCQ
2	20-100-2	-851.059	-856.500	5,441	p.c.g. tipo-4 + no MFCQ
3	20-100-3	-772.000	-772.000	0.000	p.c.g. tipo-4 + no MFCQ

Tabla D.2: Reporte de las soluciones de $C\&C$ para los problemas 20-100-S.

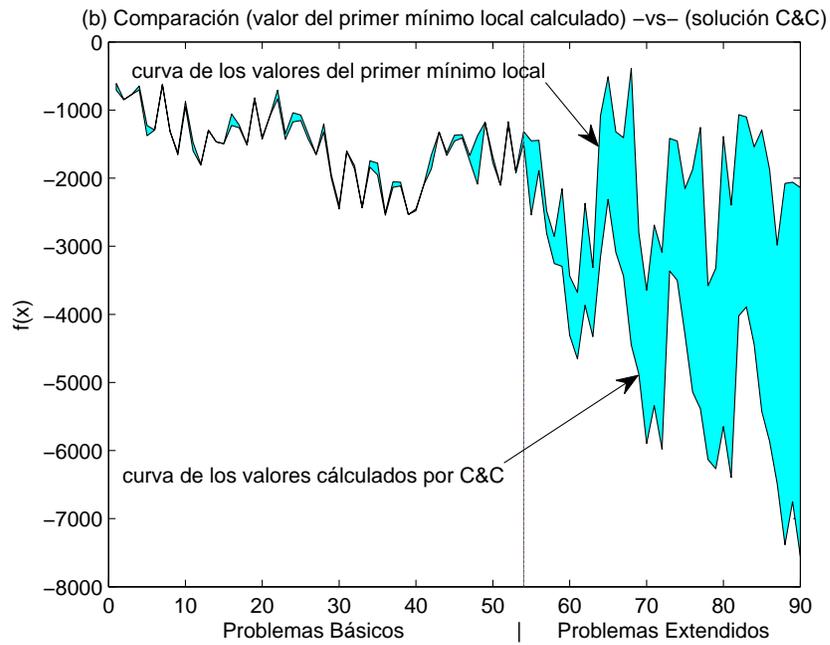


Figura D.2: Comparación entre el primer mínimo local y la solución óptima calculada por *C&C*.

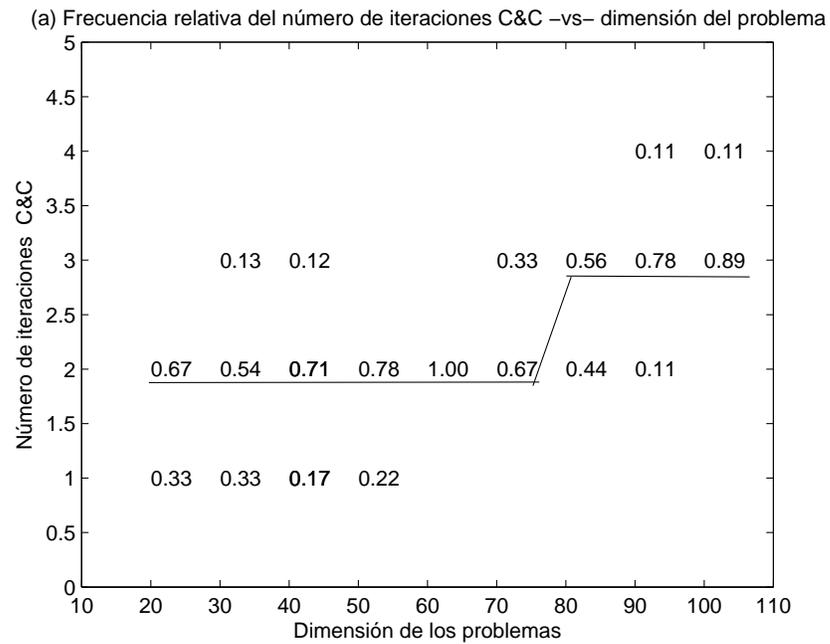


Figura D.3: Número de Iteraciones *C&C* versus dimensión del problema.

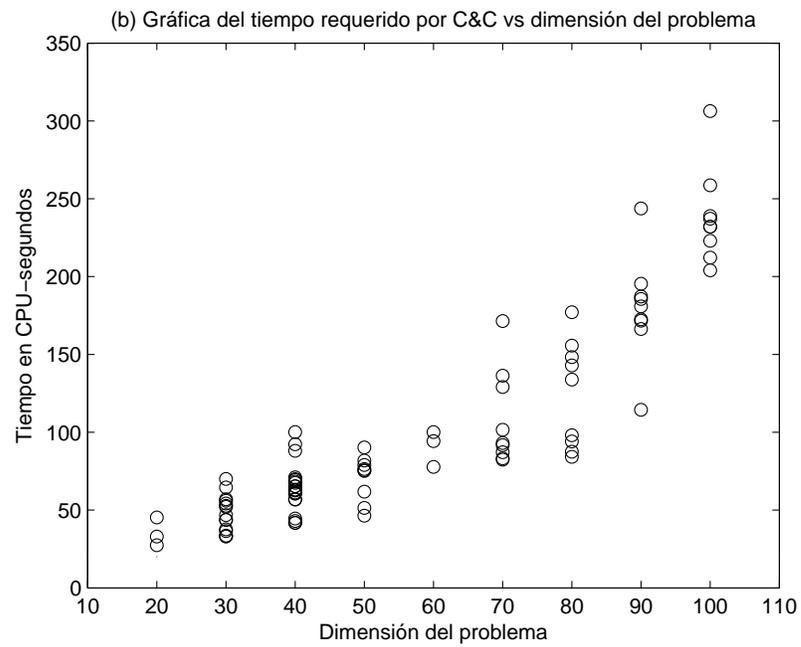


Figura D.4: Tiempo total requerido por *C&C* versus dimensión del problema.

Anexo E

Relación detallada de las soluciones obtenidas por el algoritmo híbrido con relajación [RSDP1] para los problemas Básicos y Extendidos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
1	20-100-1	7.06500000e+02	17	109.2787	8	7	0.0000
2	20-100-2	8.56500000e+02	65	238.5879	33	32	0.0000
3	20-100-3	7.72000000e+02	3	93.5850	1	0	0.0000
4	30-60-1	7.06000000e+02	87	309.1628	43	38	0.0000
5	30-60-2	1.37717308e+03	15	170.8991	7	6	0.0000
6	30-60-3	1.29350000e+03	37	255.9352	18	10	0.0000
7	30-70-1	6.54000000e+02	103	266.2469	51	36	0.0000
8	30-70-2	1.31300000e+03	25	208.0897	12	5	0.0000
9	30-70-3	1.65740147e+03	45	224.7662	22	16	0.0000
10	30-80-1	9.52728571e+02	49	274.1873	24	22	0.0000
11	30-80-2	1.59700000e+03	5	162.1006	2	1	0.0000
12	30-80-3	1.80978205e+03	7	143.0685	3	2	0.0000
13	30-90-1	1.29650000e+03	17	148.3257	8	7	0.0000
14	30-90-2	1.46684444e+03	39	211.0069	19	16	0.0000
15	30-90-3	1.49400000e+03	3	134.6288	1	0	0.0000
16	30-100-1	1.22712500e+03	29	228.1358	14	12	0.0000
17	30-100-2	1.26050000e+03	31	220.4918	15	14	0.0000
18	30-100-3	1.51105000e+03	89	339.2085	44	0	0.0000
19	40-30-1	8.39500000e+02	25	208.9165	12	11	0.0000
20	40-30-2	1.42900000e+03	83	435.8355	41	33	0.0000
21	40-30-3	1.08600000e+03	65	322.4852	32	30	0.0000
22	40-40-1	8.37000000e+02	405	1.2088e+3	202	86	0.0000
23	40-40-2	1.42800000e+03	9	160.4002	4	3	0.0000
24	40-40-3	1.17350000e+03	117	492.7447	58	54	0.0000
25	40-50-1	1.15450000e+03	83	360.5651	41	37	0.0000
26	40-50-2	1.43098000e+03	65	368.9735	32	31	0.0000
27	40-50-3	1.65362857e+03	113	495.8803	56	41	0.0000
28	40-60-1	1.32266667e+03	293	1.0935e+3	146	131	0.0000
29	40-60-2	2.00422857e+03	117	537.6886	58	51	0.0000
30	40-60-3	2.45450000e+03	19	189.8844	9	8	0.0000
31	40-70-1	1.60500000e+03	29	229.5242	14	12	0.0000
32	40-70-2	1.86750000e+03	21	188.5272	10	9	0.0000
33	40-70-3	2.43650000e+03	45	271.5665	22	11	0.0000
34	40-80-1	1.83850000e+03	37	282.1746	18	16	0.0000
35	40-80-2	1.95250000e+03	21	191.2572	10	9	0.0000
36	40-80-3	2.54550000e+03	43	346.9774	21	20	0.0000
37	40-90-1	2.13550000e+03	35	232.3635	17	13	0.0000
38	40-90-2	2.11300000e+03	67	407.8490	33	32	0.0000
39	40-90-3	2.53500000e+03	37	252.8932	18	17	0.0000
40	40-100-1	2.47637778e+03	51	458.7365	25	0	0.0000
41	40-100-2	2.10250000e+03	69	352.0786	34	27	0.0000
42	40-100-3	1.86607447e+03	235	910.1254	118	0	0.0000

Tabla E.1: Resultados del alg. híbrido utilizando relajación [$RSDP_1$] en los problemas básicos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
43	50-30-1	1.32450000e+03	27	263.0957	13	10	0.0000
44	50-30-2	1.66800000e+03	185	934.6644	92	90	0.0000
45	50-30-3	1.45361250e+03	151	723.1738	75	58	0.0000
46	50-40-1	1.41100000e+03	83	488.8135	41	34	0.0000
47	50-40-2	1.74576190e+03	137	725.5138	68	53	0.0000
48	50-40-3	2.09450000e+03	35	327.5865	17	16	0.0000
49	50-50-1	1.19840909e+03	1321	4.8929e+3	660	631	0.0000
50	50-50-2	1.77600000e+03	169	815.4484	84	64	0.0000
51	50-50-3	2.10609783e+03	231	1.0345e+3	115	74	0.0000
52	60-20-1	1.21200000e+03	159	829.4573	7	68	0.0000
53	60-20-2	1.92550000e+03	113	780.1298	56	53	0.0000
54	60-20-3	1.48300000e+03	465	2.7283e+3	232	219	0.0000

Tabla E.2: Resultados del alg. híbrido utilizando relajación $[RSDP_1]$ en los problemas básicos (Continuación)

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
55	70-25-1	2.53890909e+03	599	1.8434e+3	299	229	0.0000
56	70-25-2	1.88800000e+03	1401	4.1152e+3	700	0	0.0000
57	70-25-3	2.81228205e+03	811	2.5495e+3	405	394	0.0000
58	70-50-1	3.25250000e+03	1647	5.6279e+3	823	760	0.0000
59	70-50-2	3.29600000e+03	621	2.1202e+3	310	298	0.0000
60	70-50-3	4.30650000e+03	5	46.2031	2	1	0.0000
61	70-75-1	4.65550000e+03	349	1.2619e+3	174	150	0.0000
62	70-75-2	3.86515385e+03	8357	2.9897e+4	4178	4012	0.0000
63	70-75-3	4.32940000e+03	5313	1.9252e+4	2656	2645	0.0000
64	80-25-1	3.15700000e+03	295	1.1150e+3	147	122	0.0000
65	80-25-2	2.31234375e+03	4289	1.5481e+4	2144	1907	0.0000
66	80-25-3	3.09087500e+03	1629	6.1521e+3	814	267	0.0000
67	80-50-1	3.44810000e+03	9441	4.0003e+4	4720	3182	0.0384
68	80-50-2	4.44920455e+03	281	1.1925e+3	140	137	0.0000
69	80-50-3	4.88600000e+03	961	3.9283e+3	480	333	0.0000
70	80-75-1	5.89600000e+03	2257	8.9984e+3	1128	1109	0.0000
71	80-75-2	5.34099999e+03	1567	6.2506e+3	783	699	0.0000
72	80-75-3	1.51105000e+03	9207	4.0003e+4	4603	4496	0.0143
73	90-25-1	8.39500000e+02	6007	2.3274e+4	3003	2989	0.0000
74	90-25-2	3.50028576e+03	10231	4.0001e+4	5115	3599	0.0208
75	90-25-3	4.29900000e+03	4445	1.7655e+4	2222	709	0.0000
76	90-50-1	5.15200000e+03	9253	4.0005e+4	4626	4578	0.0139
77	90-50-2	5.38650000e+03	187	798.8750	93	91	0.0000
78	90-50-3	6.15100000e+03	2303	9.8290e+3	1151	918	0.0000
79	90-75-1	6.26745000e+03	8909	4.0001e+4	4454	3913	0.0196
80	90-75-2	5.64750000e+03	8709	4.0007e+4	4067	3430	0.0295
81	90-75-3	6.45000000e+03	8917	4.0009e+4	4146	4081	0.0165
82	100-25-1	4.02750000e+03	4327	2.7040e+4	2532	2195	0.0000
83	100-25-2	3.89255556e+03	1907	9201.3602	901	3	0.0000
84	100-25-3	4.45350000e+03	2941	1.7614e+4	1470	1073	0.0000
85	100-50-1	5.49000000e+03	6433	4.0008e+4	3216	3194	0.0378
86	100-50-2	5.86600000e+03	6509	4.0008e+4	3254	2971	0.0340
87	100-50-3	6.48500000e+03	6577	4.0010e+4	3288	3217	0.0167
88	100-75-1	7.38419565e+03	6451	4.0004e+4	3225	2783	0.0256
89	100-75-2	6.75550000e+03	6403	4.0006e+4	3201	3152	0.0221
90	100-75-3	7.55400000e+03	6279	4.0002e+4	3139	2824	0.0230

Tabla E.3: Resultados del alg. híbrido utilizando relajación $[RSDP_1]$ en problemas extendidos

Anexo F

Relación detallada de las soluciones obtenidas por el algoritmo híbrido con la relajación [RDNN] para los problemas Básicos y Extendidos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
1	20-100-1	7.06500000e+02	3	31.2025	2	0	0.0000
2	20-100-2	8.56500000e+02	5	42.2576	2	1	0.0000
3	20-100-3	7.72000000e+02	1	25.8599	1	0	0.0000
4	30-60-1	7.06000000e+02	7	58.5478	6	0	0.0000
5	30-60-2	1.37717308e+03	1	41.4993	1	0	0.0000
6	30-60-3	1.29350000e+03	5	37.7924	2	0	0.0000
7	30-70-1	6.54000000e+02	9	49.0684	5	2	0.0000
8	30-70-2	1.31300000e+03	1	33.4036	1	0	0.0000
9	30-70-3	1.65740147e+03	5	69.1777	2	0	0.0000
10	30-80-1	9.52728571e+02	9	63.5321	7	0	0.0000
11	30-80-2	1.59700000e+03	1	43.8942	1	0	0.0000
12	30-80-3	1.80959837e+03	1	49.8652	1	0	0.0000
13	30-90-1	1.29650000e+03	1	31.8100	1	0	0.0000
14	30-90-2	1.46684444e+03	1	32.3510	1	0	0.0000
15	30-90-3	1.49400000e+03	1	33.6164	1	0	0.0000
16	30-100-1	1.22712500e+03	1	56.2826	1	0	0.0000
17	30-100-2	1.26050000e+03	5	52.2724	2	0	0.0000
18	30-100-3	1.51105000e+03	5	50.4738	2	0	0.0000
19	40-30-1	8.39500000e+02	3	67.9365	2	0	0.0000
20	40-30-2	1.42900000e+03	3	69.1617	2	0	0.0000
21	40-30-3	1.08600000e+03	5	73.0426	2	0	0.0000
22	40-40-1	8.37000000e+02	11	106.8070	7	0	0.0000
23	40-40-2	1.42800000e+03	1	56.9388	1	0	0.0000
24	40-40-3	1.17350000e+03	3	57.8580	2	0	0.0000
25	40-50-1	1.15450000e+03	3	60.4820	2	0	0.0000
26	40-50-2	1.43098000e+03	3	63.1122	2	0	0.0000
27	40-50-3	1.65362857e+03	3	80.7270	2	0	0.0000
28	40-60-1	1.32266667e+03	11	77.1126	7	0	0.0000
29	40-60-2	2.00422857e+03	5	64.7721	2	0	0.0000
30	40-60-3	2.45450000e+03	1	58.8217	1	0	0.0000
31	40-70-1	1.60500000e+03	3	47.5714	2	0	0.0000
32	40-70-2	1.86750000e+03	1	58.7583	1	0	0.0000
33	40-70-3	2.43650000e+03	5	45.7687	2	0	0.0000
34	40-80-1	1.83850000e+03	1	62.1521	1	0	0.0000
35	40-80-2	1.95250000e+03	1	58.4174	1	0	0.0000
36	40-80-3	2.54550000e+03	5	70.1125	2	0	0.0000
37	40-90-1	2.13550000e+03	5	62.5881	2	0	0.0000
38	40-90-2	2.11300000e+03	3	93.2565	2	0	0.0000
39	40-90-3	2.53500000e+03	1	41.6111	1	0	0.0000
40	40-100-1	2.47637778e+03	3	68.2016	2	0	0.0000
41	40-100-2	2.10250000e+03	3	48.4219	2	0	0.0000
42	40-100-3	1.86607447e+03	11	101.1869	7	0	0.0000

Tabla F.1: Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [RDNN] en los problemas básicos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
43	50-30-1	1.32450000e+03	1	55.4228	1	0	0.0000
44	50-30-2	1.66800000e+03	3	81.0810	2	0	0.0000
45	50-30-3	1.45361250e+03	5	81.9253	2	0	0.0000
46	50-40-1	1.41100000e+03	3	87.1347	2	0	0.0000
47	50-40-2	1.74576190e+03	5	87.03264	2	0	0.0000
48	50-40-3	2.09450000e+03	3	64.7088	2	2	0.0000
49	50-50-1	1.19840909e+03	89	855.4233	61	5	0.0000
50	50-50-2	1.77600000e+03	5	85.7665	2	0	0.0000
51	50-50-3	2.10609783e+03	5	58.6069	2	0	0.0000
52	60-20-1	1.21200000e+03	3	106.9699	2	0	0.0000
53	60-20-2	1.92550000e+03	5	119.2067	2	0	0.0000
54	60-20-3	1.48300000e+03	5	95.5121	2	0	0.0000

Tabla F.2: Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [RDNN] en los problemas básicos (Continuación)

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
55	70-25-1	2.53890909e+03	3	117.5512	2	0	0.0000
56	70-25-2	1.88800000e+03	9	148.7038	5	0	0.0000
57	70-25-3	2.81228205e+03	5	200.9781	2	1	0.0000
58	70-50-1	3.25250000e+03	5	135.2115	2	0	0.0000
59	70-50-2	3.29600000e+03	5	161.8044	2	0	0.0000
60	70-50-3	4.30650000e+03	1	111.5337	1	0	0.0000
61	70-75-1	4.65550000e+03	3	127.0310	2	0	0.0000
62	70-75-2	3.86515385e+03	21	308.3848	15	0	0.0000
63	70-75-3	4.32940000e+03	9	166.9644	6	0	0.0000
64	80-25-1	3.15700000e+03	5	198.2997	2	0	0.0000
65	80-25-2	2.31234375e+03	13	223.8626	9	0	0.0000
66	80-25-3	3.09087500e+03	5	211.7333	2	0	0.0000
67	80-50-1	3.44810000e+03	75	1.0294e+3	45	18	0.0000
68	80-50-2	4.44920455e+03	5	194.2839	2	0	0.0000
69	80-50-3	4.88600000e+03	7	160.7401	3	2	0.0000
70	80-75-1	5.89600000e+03	3	152.3732	2	0	0.0000
71	80-75-2	5.34099999e+03	3	240.2054	3	0	0.0000
72	80-75-3	5.98050000e+03	5	149.2636	3	0	0.0000
73	90-25-1	3.37250000e+03	33	714.6053	21	12	0.0000
74	90-25-2	3.50028576e+03	9	297.3053	5	0	0.0000
75	90-25-3	4.29900000e+03	7	276.5512	3	0	0.0000
76	90-50-1	5.15200000e+03	13	355.3923	7	2	0.0000
77	90-50-2	5.38650000e+03	5	256.7885	2	0	0.0000
78	90-50-3	6.15100000e+03	7	308.2016	3	2	0.0000
79	90-75-1	6.26745000e+03	35	615.4473	21	0	0.0000
80	90-75-2	5.64750000e+03	27	568.8223	15	4	0.0000
81	90-75-3	6.45000000e+03	29	574.6018	18	18	0.0000
82	100-25-1	4.02750000e+03	27	870.7638	21	18	0.0000
83	100-25-2	3.89255556e+03	5	371.2680	4	0	0.0000
84	100-25-3	4.45350000e+03	19	581.2175	14	12	0.0000
85	100-50-1	5.49000000e+03	159	3.1322e+3	89	73	0.0000
86	100-50-2	5.86600000e+03	45	1.2387e+3	27	0	0.0000
87	100-50-3	6.48500000e+03	5	346.3519	3	0	0.0000
88	100-75-1	7.38419565e+03	21	643.4552	11	0	0.0000
89	100-75-2	6.75550000e+03	109	4.0233e+3	92	48	0.0000
90	100-75-3	7.55400000e+03	19	641.6260	13	0	0.0000

Tabla F.3: Resultados del alg. híbrido utilizando la relajación [RDNN] en problemas extendidos

Anexo G

Resultados de la comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido.

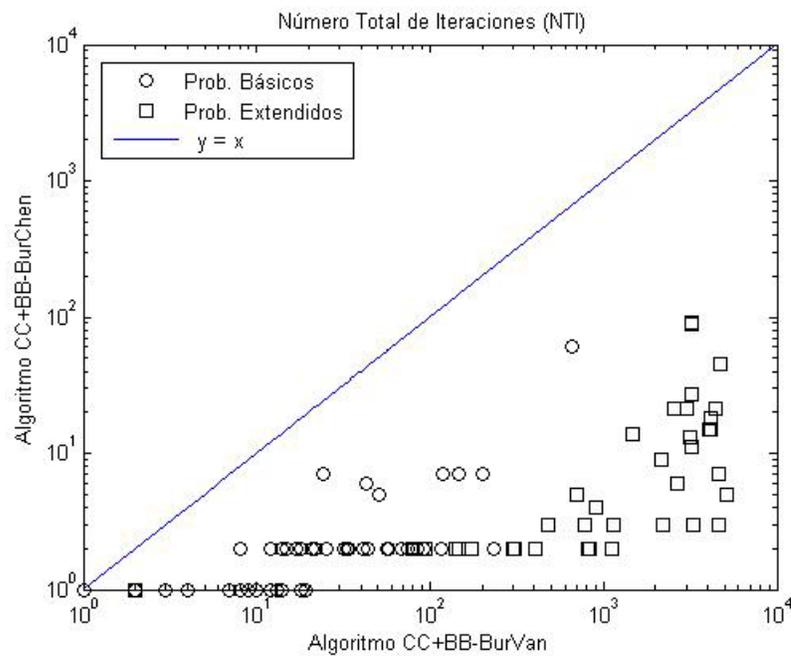


Figura G.1: Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al Total de Nodos Creados.

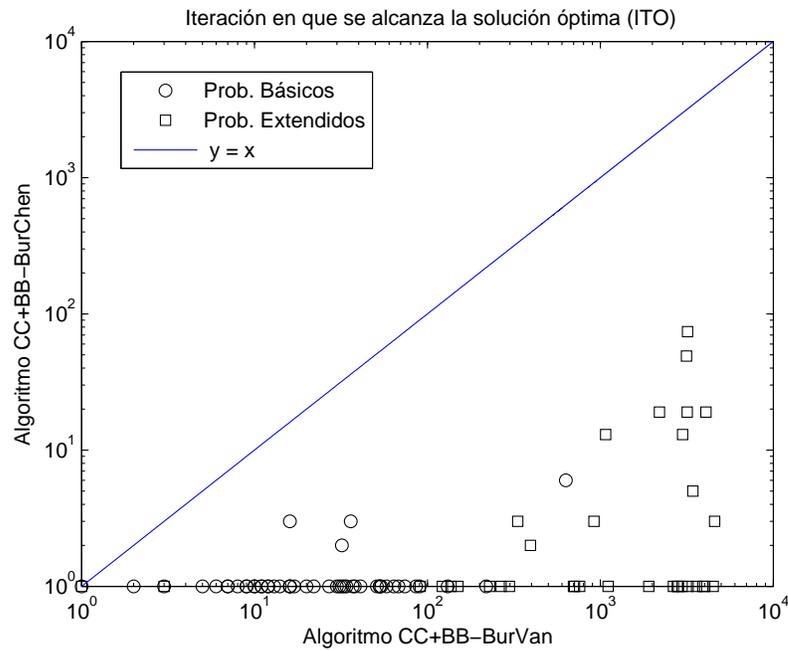


Figura G.2: Comparación entre las dos variantes del algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones para encontrar la solución óptima.

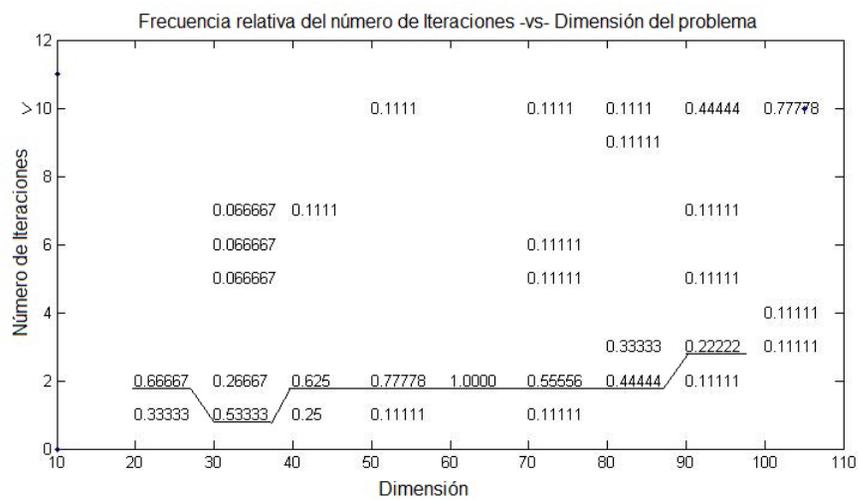


Figura G.3: Frecuencia relativa del número de iteraciones del algoritmo híbrido versus dimensión del problema

<i>Prob.</i>	MAXPAFO=1	MAXPAFO=5
20-100-2	1	1
30-70-1	2	2
50-40-3	2	1
50-50-1	5	5
70-25-3	1	1
80-50-1	18	18
80-50-3	2	2
90-25-1	12	12
90-50-1	2	2
90-50-3	2	2
90-75-2	4	4
90-75-3	18	18
100-25-1	18	18
100-25-3	12	12
100-50-1	73	73
100-75-3	48	48

Tabla G.1: Iteraciones *B&B* necesarias para encontrar la solución óptima de los 16 problemas no resueltos por el método de corte y continuación utilizando MAXPAFO=1 y MAXPAFO=5.

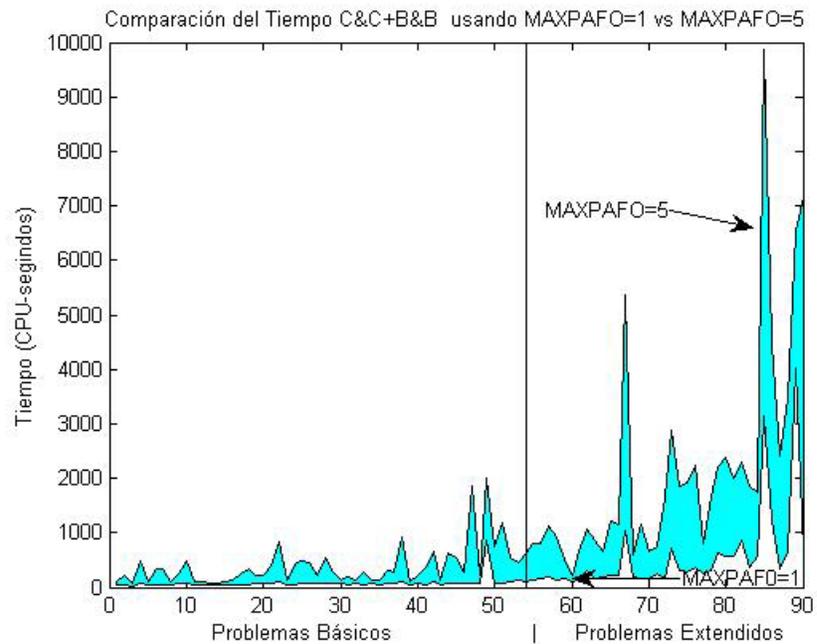


Figura G.4: Comparación del tiempo total requerido por “*CC + BB – BurChen.m*” con MAXPAFO=1 vs MAXPAFO=5

Parámetro	p-value	Ho	stats.zval	stats.ranksum
NTI	5.6229e-23	rejected	-9.8699	4.7205e+03
TTR	6.4086e-16	rejected	-8.0813	10011
TNC	1.2725e-24	rejected	-10.2430	4.5755e+03
ITO	6.4255e-26	rejected	-10.5279	4630

Tabla G.2: Resultados de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon para los resultados alcanzados por los algoritmos *CC+BB-BurChen* y *CC+BB-BurVan*

Anexo H

Relación detallada de las soluciones obtenidas por el método *B&B* de Burer-Vandenbussche para los problemas Básicos y Extendidos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
1	20-100-1	-7.06500000e+02	41	59.5612	20	7	0.0000
2	20-100-2	-8.56500000e+02	103	147.5613	51	32	0.0000
3	20-100-3	-7.72000000e+02	25	37.5026	12	0	0.0000
4	30-60-1	-7.06000000e+02	167	357.1331	83	38	0.0000
5	30-60-2	-1.37717308e+03	25	48.1419	12	6	0.0000
6	30-60-3	-1.29350000e+03	85	177.4511	42	10	0.0000
7	30-70-1	-6.54000000e+02	215	475.8655	107	36	0.0000
8	30-70-2	-1.31300000e+03	55	112.2427	27	5	0.0000
9	30-70-3	-1.65740147e+03	87	192.1620	43	16	0.0000
10	30-80-1	-9.52728571e+02	159	305.2159	79	22	0.0000
11	30-80-2	-1.59700000e+03	7	10.3428	3	1	0.0000
12	30-80-3	-1.80978205e+03	5	8.5332	2	2	0.0000
13	30-90-1	-1.29650000e+03	21	34.8974	10	7	0.0000
14	30-90-2	-1.46684444e+03	81	153.6298	40	16	0.0000
15	30-90-3	-1.49400000e+03	3	4.6956	1	0	0.0000
16	30-100-1	-1.22712500e+03	79	157.2490	39	12	0.0000
17	30-100-2	-1.26050000e+03	63	111.7747	31	14	0.0000
18	30-100-3	-1.51105000e+03	121	252.3316	60	0	0.0000
19	40-30-1	-8.39500000e+02	7205	4.0003e+4	3602	11	0.0435
20	40-30-2	-1.42900000e+03	97	267.5885	48	33	0.0000
21	40-30-3	-1.08600000e+03	113	302.9383	56	30	0.0000
22	40-40-1	-8.37000000e+02	483	1.4046e+3	241	86	0.0000
23	40-40-2	-1.42800000e+03	13	23.8369	6	3	0.0000
24	40-40-3	-1.17350000e+03	159	413.1998	79	54	0.0000
25	40-50-1	-1.15450000e+03	271	716.5126	135	37	0.0000
26	40-50-2	-1.43098000e+03	105	285.3258	52	31	0.0000
27	40-50-3	-1.65362857e+03	119	319.2248	59	41	0.0000
28	40-60-1	-1.32266667e+03	985	2.7194e+3	492	131	0.0000
29	40-60-2	-2.00422857e+03	211	518.7345	105	51	0.0000
30	40-60-3	-2.45450000e+03	25	54.0855	12	8	0.0000
31	40-70-1	-1.60500000e+03	109	252.7840	54	12	0.0000
32	40-70-2	-1.86750000e+03	43	84.4277	21	9	0.0000
33	40-70-3	-2.43650000e+03	43	97.6722	21	11	0.0000
34	40-80-1	-1.83850000e+03	49	99.1854	24	16	0.0000
35	40-80-2	-1.95250000e+03	39	86.0969	19	9	0.0000
36	40-80-3	-2.54550000e+03	53	102.6798	26	20	0.0000
37	40-90-1	-2.13550000e+03	111	281.3946	55	13	0.0000
38	40-90-2	-2.11300000e+03	137	286.8078	68	32	0.0000
39	40-90-3	-2.53500000e+03	19	36.3794	9	17	0.0000
40	40-100-1	-2.47637778e+03	149	372.4836	74	0	0.0000
41	40-100-2	-2.10250000e+03	167	438.5188	83	27	0.0000
42	40-100-3	-1.86607447e+03	1187	3.0931e+3	593	0	0.0000

Tabla H.1: Resultados del método *B&B* de Burer-Vandenbussche para los problemas Problemas Básicos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
43	50-30-1	-1.32450000e+03	71	249.9136	35	10	0.0000
44	50-30-2	-1.66800000e+03	269	851.8903	134	90	0.0000
45	50-30-3	-1.45361250e+03	257	832.7333	128	58	0.0000
46	50-40-1	-1.41100000e+03	73	238.3695	36	34	0.0000
47	50-40-2	-1.74576190e+03	323	1.0787e+3	161	53	0.0000
48	50-40-3	-2.09450000e+03	131	458.7365	65	16	0.0000
49	50-50-1	-1.19840909e+03	2429	8.9656e+3	1214	631	0.0000
50	50-50-2	-1.71300000e+03	6411	4.0007e+4	3205	64	0.1308
51	50-50-3	-2.10609783e+03	641	2.3337e+3	320	74	0.0000
52	60-20-1	-1.21200000e+03	189	787.2122	94	68	0.0000
53	60-20-2	-1.92550000e+03	209	856.1647	104	53	0.0000
54	60-20-3	-1.48300000e+03	1801	8.5888e+3	900	219	0.0000

Tabla H.2: Resultados del método *B&B* de Burer-Vandenbussche para los problemas Problemas Básicos (Continuación)

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
55	70-25-1	-2.5389e+03	445	2.3520e+3	222	74	0.0000
56	70-25-2	-1.8880e+03	1547	6.9766e+3	773	748	0.0000
57	70-25-3	-2.8122e+03	1771	8.0705e+3	885	53	0.0000
58	70-50-1	-3.2525e+03	1943	9.6429e+3	971	228	0.0000
59	70-50-2	-3.2960e+03	347	1.7080e+3	173	121	0.0000
60	70-50-3	-4.3065e+03	17	74.0692	8	5	0.0000
61	70-75-1	-4.6555e+03	629	3.2738e+3	314	61	0.0000
62	70-75-2	-3.8651e+03	5857	3.1663e+4	2928	489	0.0000
63	70-75-3	-4.3294e+03	3863	2.0857e+4	1931	1555	0.0000
64	80-25-1	-3.1570e+03	535	2.739e+4	267	263	0.0000
65	80-25-2	-2.3123e+03	5653	3.1156e+4	2826	187	0.0000
66	80-25-3	-3.0908e+03	3547	2.0477e+4	1773	1300	0.0000
67	80-50-1	-3.4481e+03	6145	4.0004e+4	3072	1719	0.0381
68	80-50-2	-4.4492e+03	149	966.8942	74	72	0.0000
69	80-50-3	-4.8860e+03	1199	5.8311e+3	599	569	0.0000
70	80-75-1	-5.8960e+03	897	1.2364e+4	448	381	0.0000
71	80-75-2	-5.3401e+03	1845	4.0005e+4	922	812	0.0000
72	80-75-3	-5.9805e+03	5857	4.0003e+4	2928	5	0.0547
73	90-25-1	-3.3725e+03	6977	4.0009e+4	3488	191	0.03947
74	90-25-2	-3.5002e+03	6977	3.4304e+4	3391	88	0,0535
75	90-25-3	-4.2990e+03	6783	4.0007e+4	2934	2874	0.0000
76	90-50-1	-5.1520e+03	5869	1.4696e+3	3196	1480	00.0218
77	90-50-2	-5.3865e+03	6393	1.6786e+4	109	101	0.0000
78	90-50-3	-6.1510e+03	219	4.0012e+2	1169	543	0.0000
79	90-75-1	-6.2636e+03	2339	4.0013e+4	2714	2680	0.0242
80	90-75-2	-5.6475e+03	5429	4.0006e+4	2752	2591	0.0246
81	90-75-3	-6.4500e+03	5505	3.2553e+4	2744	4	0.05732
82	100-25-1	-4.0275e+03	5489	1.1256e+4	1771	1711	0.0000
83	100-25-2	-3.8926e+03	3543	2.8292E+4	838	147	0.0000
84	100-25-3	-4.4535e+03	1677	3.2553e+4	2062	158	0.0000
85	100-50-1	-5.4900e+03	4125	4.0012e+4	2878	2490	0.0387
86	100-50-2	-5.8660e+03	5757	4.0002e+4	2860	2257	0.0291
87	100-50-3	-6.4850e+03	5721	4.0011e+4	2767	142	0.0361
88	100-75-1	-7.3842e+03	5535	4.0000e+4	2837	91	0.0444
89	100-75-2	-6.7555e+03	5675	4.0007e+4	2794	320	0.0408
90	100-75-3	-7.5540e+03	5589	40002e+4	2885	2062	0.0340

Tabla H.3: Resultados del método *B&B* de Burer- Vandebussche para los Problemas Extendidos

Anexo I

Resultados de la comparación entre el algoritmo híbrido *CC+BB-BurChen* y el método *B&B* de *Burer-Vandenbussche*

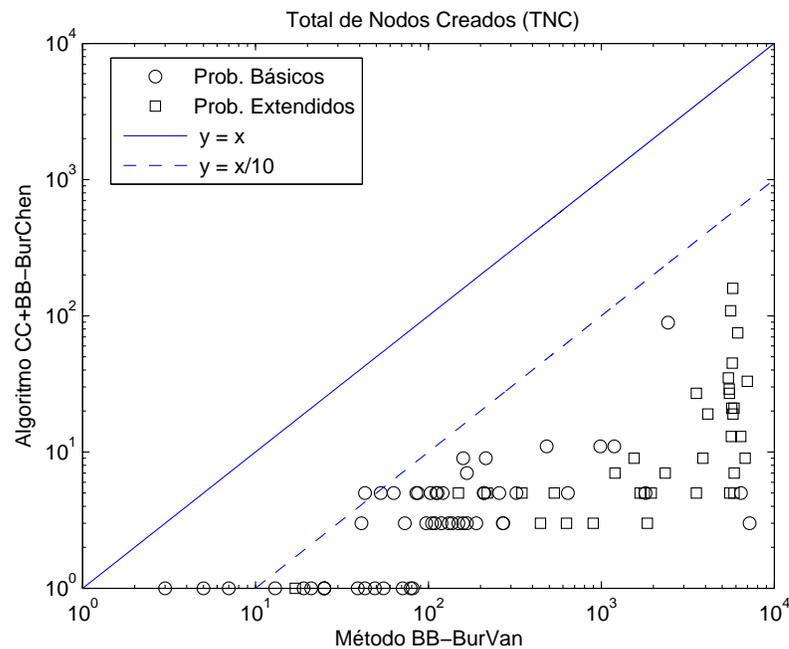


Figura I.1: Comparación entre el método de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número de nodos creados.

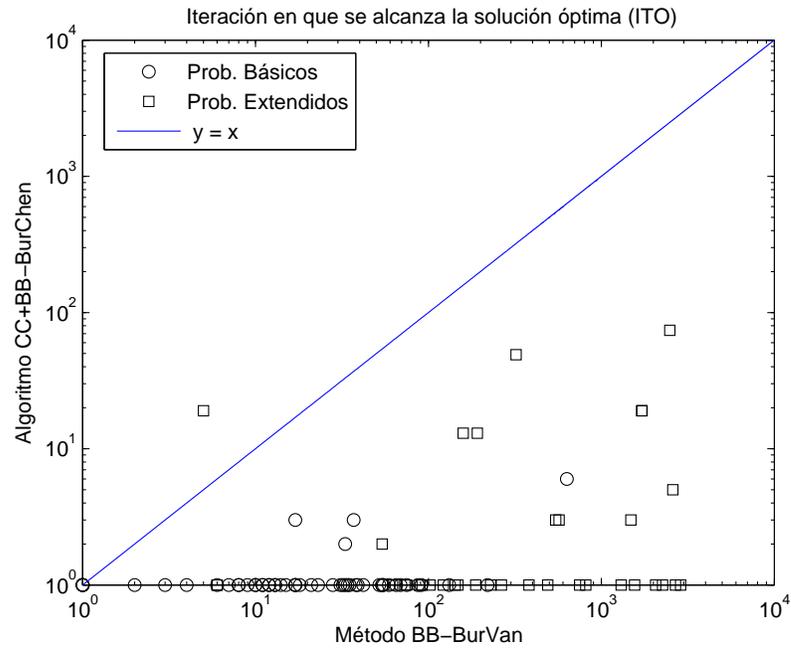


Figura I.2: Comparación entre el método de Burer-Vandenbussche y el algoritmo híbrido respecto al número de iteraciones necesarias para alcanzar una solución óptima.

Parámetro	p-value	Ho	stats.zval	stats.ranksum
NTI	3.7997e-26	rejected	-10.5772	4473
TTR	2.0925e-10	rejected	-6.3544	10793
TNC	3.5294e-27	rejected	-10.7977	4381
ITO	1.5621e-26	rejected	-10.6602	4.5795e+03

Tabla I.1: Resultados de la prueba de rango entre los resultados alcanzados por el algoritmo *CC+BB-BurChen* y el método *BB-BurVan*

Anexo J

Relación detallada de las soluciones
obtenidas por el método *B&B* de
Burer-Chen para los problemas
Básicos y Extendidos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
1	20-100-1	7.06500000e+02	5	4.4098	5	3	0.0000
2	20-100-2	8.56500000e+02	3	2.5794	3	1	0.0000
3	20-100-3	7.72000000e+02	1	0.9662	1	1	0.0000
4	30-60-1	7.06000000e+02	11	14.5325	9	7	0.0000
5	30-60-2	1.37717308e+03	1	3.2826	1	1	0.0000
6	30-60-3	1.29350000e+03	9	17.4745	9	4	0.0000
7	30-70-1	6.54000000e+02	9	15.4496	9	5	0.0000
8	30-70-2	1.31300000e+03	3	4.9130	3	1	0.0000
9	30-70-3	1.65740147e+03	11	26.2785	11	9	0.0000
10	30-80-1	9.52728571e+02	11	17.5591	11	6	0.0000
11	30-80-2	1.59700000e+03	1	2.0739	1	1	0.0000
12	30-80-3	1.80959837e+03	1	3.7676	1	1	0.0000
13	30-90-1	1.29650000e+03	1	2.3213	1	1	0.0000
14	30-90-2	1.46684444e+03	5	11.7911	5	4	0.0000
15	30-90-3	1.49400000e+03	1	2.2540	1	1	0.0000
16	30-100-1	1.22712500e+03	1	3.6830	1	1	0.0000
17	30-100-2	1.26050000e+03	3	5.9299	3	2	0.0000
18	30-100-3	1.51105000e+03	9	15.3640	9	2	0.0000
19	40-30-1	8.39500000e+02	3	12.0070	3	3	0.0000
20	40-30-2	1.42900000e+03	3	13.0669	3	2	0.0000
21	40-30-3	1.08600000e+03	5	16.1789	5	1	0v
22	40-40-1	8.37000000e+02	19	60.3167	19	17	0.0000
23	40-40-2	1.42800000e+03	1	4.7901	1	1	0.0000
24	40-40-3	1.17350000e+03	7	19.9938	7	1	0.0000
25	40-50-1	1.15450000e+03	9	33.4103	9	1	0.0000
26	40-50-2	1.43098000e+03	11	54.7241	11	10	0.0000
27	40-50-3	1.65362857e+03	5	24.7682	5	5	0.0000
28	40-60-1	1.32266667e+03	25	196.0214	25	9	0.0000
29	40-60-2	2.00422857e+03	5	18.5658	5	2	0.0000
30	40-60-3	2.45450000e+03	1	4.6931	1	1	0.0000
31	40-70-1	1.60500000e+03	3	10.9236	3	2	0.0000
32	40-70-2	1.86750000e+03	1	5.8956	1	1	0.0000
33	40-70-3	2.43650000e+03	5	15.3421	5	3	0.0000
34	40-80-1	1.83850000e+03	1	4.7159	1	1	0.0000
35	40-80-2	1.95250000e+03	1	5.1969	1	1	0.0000
36	40-80-3	2.54550000e+03	5	17.8310	5	3	0.0000
37	40-90-1	2.13550000e+03	3	13.8016	5	2	0.0000
38	40-90-2	2.11300000e+03	1	11.4857	3	1	0.0000
39	40-90-3	2.53500000e+03	1	4.9738	1	1	0.0000
40	40-100-1	2.47637778e+03	3	13.5246	3	1	0.0000
41	40-100-2	2.10250000e+03	7	25.8073	7	6	0.0000
42	40-100-3	1.86607447e+03	23	71.9486	23	21	0.0000

Tabla J.1: Resultados del algoritmo *B&B* de Burer-Chen para los problemas Problemas Básicos

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
43	50-30-1	1.32450000e+03	1	9.1978	1	1	0.0000
44	50-30-2	1.66800000e+03	7	43.2049	7	5	0.0000
45	50-30-3	1.45361250e+03	13	72.4826	11	8	0.0000
46	50-40-1	1.41100000e+03	3	17.9395	3	1	0.0000
47	50-40-2	1.74576190e+03	11	70.0147	11	10	0.0000
48	50-40-3	2.09450000e+03	3	17.8486	3	1	0.0000
49	50-50-1	1.19840909e+03	93	649.9029	93	90	0.0000
50	50-50-2	1.77600000e+03	11	63.2399	11	6	0.0000
51	50-50-3	2.10609783e+03	19	121.8805	17	9	0.0000
52	60-20-1	1.21200000e+03	5	45.9840	5	1	0.0000
53	60-20-2	1.92550000e+03	11	92.1310	11	7	0.0000
54	60-20-3	1.48300000e+03	11	94.5700	11	3	0.0000

Tabla J.2: Resultados del algoritmo *B&B* de Burer-Chen para los problemas Problemas Básicos (Continuación)

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
55	70-25-1	2.53890909e+03	17	239.6858	17	7	0.0000
56	70-25-2	1.88800000e+03	17	166.3752	17	1	0.0000
57	70-25-3	2.81228205e+03	25	334.9523	25	22	0.0000
58	70-50-1	3.25250000e+03	21	225.9950	21	16	0.0000
59	70-50-2	3.29600000e+03	9	135.7645	9	6	0.0000
60	70-50-3	4.30650000e+03	1	30.0417	1	1	0.0000
61	70-75-1	4.65550000e+03	25	329.0087	25	13	0.0000
62	70-75-2	3.86515385e+03	147	1.5149e+3	147	144	0.0000
63	70-75-3	4.32940000e+03	55	727.7364	55	41	0.0000
64	80-25-1	3.15700000e+03	11	141.2024	11	4	0.0000
65	80-25-2	2.31234375e+03	35	438.6283	33	30	0.0000
66	80-25-3	3.09087500e+03	33	514.8350	31	19	0.0000
67	80-50-1	3.44810000e+03	419	5.5336e+3	419	307	0.0000
68	80-50-2	4.44920455e+03	9	169.4944	9	7	0.0000
69	80-50-3	4.88600000e+03	41	780.4970	41	9	0.0000
70	80-75-1	5.89600000e+03	47	803.3835	47	26	0.0000
71	80-75-2	5.34099999e+03	79	1.2743e+3	79	51	0.0000
72	80-75-3	5.98050000e+03	157	3.3067e+3	157	5	0.0000
73	90-25-1	3.37250000e+03	83	1.4764e+3	83	56	0.0000
74	90-25-2	3.50028576e+03	49	1.1819e+3	49	35	0.0000
75	90-25-3	4.29900000e+03	55	912.2334	51	16	0.0000
76	90-50-1	5.15200000e+03	129	2.6748e+3	129	26	0.0000
77	90-50-2	5.38650000e+03	25	563.8476	25	1	0.0000
78	90-50-3	6.15100000e+03	85	1.8381e+3	85	85	0.0000
79	90-75-1	6.26745000e+03	401	7.1903e+3	401	360	0.0000
80	90-75-2	5.64750000e+03	363	7.0800e+3	363	342	0.0000
81	90-75-3	6.45000000e+03	137	2.8229e+3	137	85	0.0000
82	100-25-1	4.02750000e+03	49	1.2138e+3	49	45	0.0000
83	100-25-2	3.89255556e+03	31	865.9915	31	20	0.0000
84	100-25-3	4.45350000e+03	35	1.0279e+3	33	33	0.0000
85	100-50-1	5.49000000e+03	749	1.6738e+4	715	610	0.0000
86	100-50-2	5.86600000e+03	523	1.4523e+4	517	498	0.0000
87	100-50-3	6.48500000e+03	67	1.7566e+4	67	57	0.0000
88	100-75-1	7.38419565e+03	856	1.9616e+4	839	496	0.0000
89	100-75-2	6.75550000e+03	1101	4.1927e+4	1101	1047	0.03014
90	100-75-3	7.55400000e+03	867	2.3818e+4	843	257	0.0000

Tabla J.3: Resultados del método *B&B* de Burer-Chen para los Problemas Extendidos

Anexo K

Resultados de la comparación entre el algoritmo híbrido *CC+BB-BurChen* y el método *BB-BurChen*.

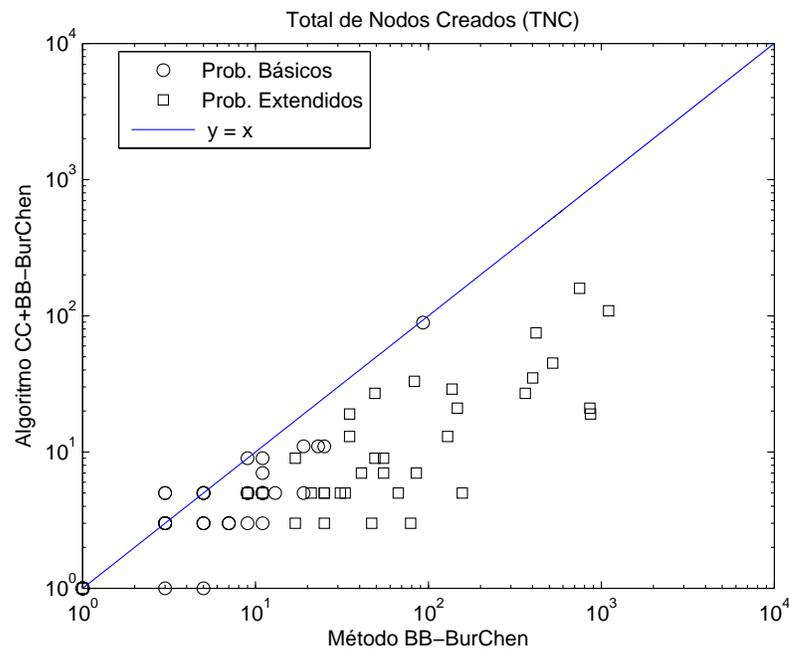


Figura K.1: Gráfica log-log con el total de nodos creados por *CC+BB-BurChen* y *BB-BurChen*.

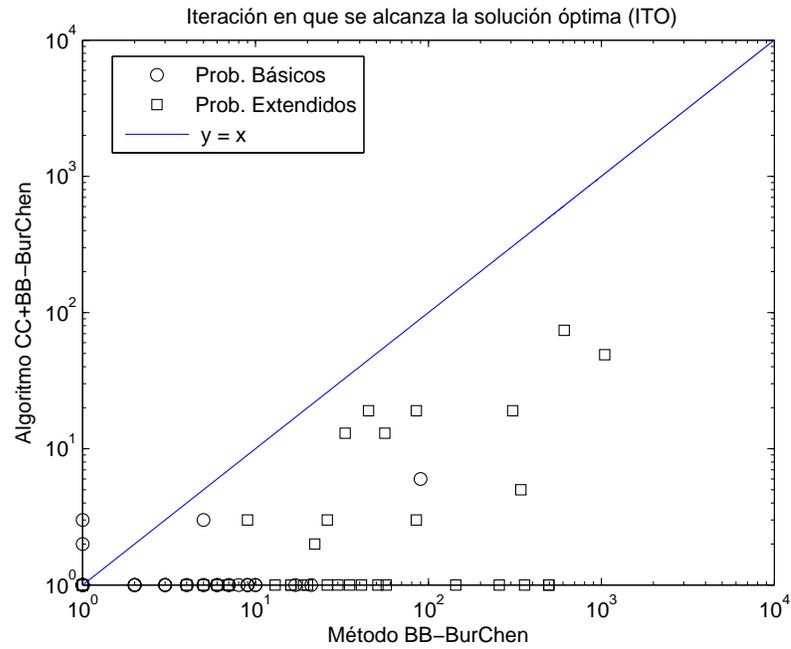


Figura K.2: Gráfica log-log con el total del número de iteraciones necesarias para encontrar una solución óptima por $CC+BB-BurChen$ y $BB-BurChen$.

Parámetro	p-value	Ho	stats.zval	stats.ranksum
NTI	2.0878e-08	rejected	-5.6046	6204
TTR	0.0054	rejected	2.7836	14932
TNC	2.7560e-04	rejected	-3.6372	6.8845e+03
ITO	1.1359e-12	rejected	-7.1129	5889

Tabla K.1: Resultados de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon para los resultados obtenidos por el algoritmo $CC+BB-BurChen$ y el método $BB-BurChen$

Anexo L

Relación detallada de los resultados obtenidas por el algoritmo híbrido en los 81 problemas generados por el diseño experimental

BLOCK	N	QI	D	TNC	TTR	ITO	NTI
1	20,0	100,0	50,0	1	34,76	1	1
1	100,0	60,0	75,0	231	9079,18	24	112
1	100,0	60,0	50,0	13	487,97	1	6
1	60,0	100,0	50,0	1	133,85	1	1
1	60,0	60,0	25,0	39	452,92	13	19
1	60,0	100,0	75,0	5	145,40	1	2
1	20,0	100,0	25,0	1	34,61	1	1
1	100,0	100,0	75,0	3	374,46	1	2
1	20,0	60,0	75,0	5	49,56	3	2
1	20,0	60,0	50,0	1	35,69	1	1
1	20,0	100,0	75,0	1	41,90	1	1
1	100,0	20,0	75,0	17	527,39	1	8
1	100,0	100,0	25,0	3	379,71	1	2
1	20,0	20,0	25,0	1	28,04	1	1
1	60,0	100,0	25,0	1	105,30	1	1
1	60,0	60,0	50,0	7	114,09	3	3
1	100,0	100,0	50,0	5	390,92	1	2
1	60,0	20,0	50,0	3	73,50	1	1
1	20,0	60,0	25,0	1	29,87	1	1
1	60,0	20,0	75,0	3	89,05	1	1
1	60,0	60,0	75,0	13	189,82	6	3
1	100,0	20,0	25,0	17	492,08	1	8
1	20,0	20,0	75,0	3	27,53	1	1
1	100,0	20,0	50,0	9	248,48	1	4
1	60,0	20,0	25,0	5	96,38	1	2
1	100,0	60,0	25,0	67	1572,66	16	33
1	20,0	20,0	50,0	1	25,13	1	1
2	100,0	100,0	75,0	1	363,27	1	1
2	60,0	100,0	25,0	7	142,28	1	3
2	60,0	60,0	50,0	11	203,83	8	6
2	100,0	60,0	50,0	13	500,07	3	6
2	60,0	100,0	75,0	1	129,67	1	1
2	20,0	20,0	50,0	3	35,98	1	1
2	60,0	60,0	25,0	7	185,99	1	3
2	100,0	60,0	25,0	19	687,23	1	9
2	100,0	100,0	50,0	7	483,09	1	4
2	20,0	60,0	25,0	1	22,25	1	1
2	20,0	20,0	75,0	1	25,73	1	1
2	100,0	100,0	25,0	3	417,75	1	1
2	20,0	60,0	75,0	1	26,16	1	1
2	60,0	20,0	50,0	5	103,42	1	2

Tabla L.1: Resultados detallados correspondientes a cada uno de los 81 experimentos realizados (muestra)

BLOCK	N	QI	D	TNC	TTR	ITO	NTI
2	100,0	20,0	25,0	7	265,27	5	3
2	60,0	20,0	75,0	3	110,59	1	2
2	20,0	100,0	50,0	3	38,27	1	1
2	60,0	60,0	75,0	3	72,98	1	1
2	20,0	60,0	50,0	1	32,52	1	1
2	60,0	100,0	50,0	1	129,94	1	1
2	20,0	100,0	25,0	3	37,27	1	1
2	100,0	60,0	75,0	11	421,21	1	5
2	20,0	20,0	25,0	3	25,32	1	2
2	60,0	20,0	25,0	5	80,72	3	2
2	20,0	100,0	75,0	1	36,15	1	1
2	100,0	20,0	50,0	5	199,04	1	2
2	100,0	20,0	75,0	11	435,71	8	5
3	100,0	60,0	25,0	17	591,72	1	8
3	20,0	20,0	25,0	3	22,06	1	2
3	20,0	100,0	75,0	3	49,10	1	1
3	20,0	60,0	50,0	1	37,16	1	1
3	20,0	20,0	75,0	1	28,20	1	1
3	60,0	20,0	50,0	3	73,43	1	1
3	60,0	100,0	50,0	1	94,41	1	1
3	20,0	100,0	25,0	1	49,79	1	1
3	100,0	60,0	75,0	175	5124,38	1	85
3	60,0	20,0	25,0	3	78,43	1	1
3	100,0	100,0	75,0	3	374,46	1	2
3	20,0	100,0	50,0	3	35,77	1	1
3	60,0	100,0	25,0	7	133,82	1	3
3	20,0	60,0	25,0	3	35,35	1	1
3	20,0	20,0	50,0	1	28,85	1	1
3	100,0	60,0	50,0	17	683,03	1	9
3	20,0	60,0	75,0	5	28,94	2	2
3	100,0	100,0	50,0	3	398,32	1	2
3	100,0	20,0	25,0	5	181,09	1	2
3	60,0	60,0	50,0	7	136,78	2	3
3	100,0	20,0	75,0	67	2718,97	1	31
3	100,0	100,0	25,0	3	383,58	1	2
3	60,0	20,0	75,0	5	103,31	3	3
3	60,0	100,0	75,0	1	125,68	1	1
3	60,0	60,0	25,0	11	156,10	5	6
3	60,0	60,0	75,0	3	110,59	1	2
3	100,0	20,0	50,0	5	209,96	1	2

Tabla L.2: Resultados detallados correspondientes a cada uno de los 81 experimentos realizados (Continuación)

Anexo M

Reporte de resultados de STATGRAPHICS para el diseño experimental

M.1. Resultados de la prueba ANOVA simple para el factor (κ) condición de la matriz Q

suorce	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	13224,5	77	171,747	27,48	0,0357
Within groups	12,5	2	6,25		
Total (Corr.)	13237,0	79			

Tabla M.1: ANOVA Table for NTI by Condition

suorce	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	8,21523E7	77	1,06691E6	151,48	0,0066
Within groups	14086,8	2	7043,42		
Total (Corr.)	8,21664E7	79			

Tabla M.2: ANOVA Table for TTR by Condition

suorce	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	56395,9	77	732,415	45,78	0,0216
Within groups	32,0	2	16,0		
Total (Corr.)	56427,9	79			

Tabla M.3: ANOVA Table for TNC by Condition

suorce	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	9938,34	77	127,415	20,39	0,0478
Within groups	12,5	2	6,25		
Total (Corr.)	9950,84	80			

Tabla M.4: ANOVA Table for ITO by Condition

M.2. Resultados del análisis experimental

A continuación se presentan los resultados obtenidos por el programa STATSGRAPHICS en el análisis de los resultados experimentales. Antes de pasar a la exposición de los resultados se debe aclarar que en los gráficos de Pareto se los factores estudiados se identifican con las letras mayúsculas A, B y C, donde:

- La letra (**A**) se corresponde con el factor *dimensión de la matriz* (**N**)
- La letra (**B**) se corresponde con el factor *porcentaje de valores propios negativos* (\widehat{QI})
- La letra (**C**) se corresponde con el factor *densidad de la matriz* (**D**)

M.2.1. Análisis Experimental - Variable TNC

- Resúmen Analítico

Efectos estimados para la variable Total de Nodos Creados (TNC)

	Efecto Principal	+/- Error Estándar
promedio	12,6296	+/- 8,57164
N	25,3333	+/- 7,9358
QI	-4,51852	+/- 7,9358
D	12,3704	+/- 7,9358
N^2	17,3333	+/- 13,7452
N*QI	-6,22222	+/- 9,71933
N*D	20,7778	+/- 9,71933
QI^2	-40,6667	+/- 13,7452
QI*D	-4,0	+/- 9,71933
D^2	20,6667	+/- 13,7452
bloque	-13,3333	+/- 9,16347
bloque	2,96296	+/- 9,16347

Tabla M.5: Error estándar para TNC basado en el error total con 69 grados de libertad

- Análisis de Varianza para TNC

R-squared=32,375 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 23,8029 percent

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
N	8664,0	1	8664,0	10,19	0,0021
QI	275,63	1	275,63	0,32	0,5709
D	2065,85	1	2065,85	2,43	0,1236
N^2	1352,0	1	1352,0	1,59	0,2115
N*QI	348,444	1	348,444	0,41	0,5242
N*D	3885,44	1	3885,44	4,57	0,0361
QI^2	7442,0	1	7442,0	8,75	0,0042
QI*D	144,0	1	144,0	0,17	0,6819
D^2	1922,0	1	1922,0	2,26	0,1373
blocks	1985,19	2	992,593	1,17	0,3172
Total error	58663,0	69	850,188		
Total (corr.)	86747,6	80			

Tabla M.6: Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable TNC

Standard Error of Est.=29,158 Mean absolute error = 15,316

Durbin-Watson statistic=2,0855 (P=0,2903) Lag 1 residual autocorrelation=-0,0451704

• Diagrama de Pareto y Ecuación de Regression para la variable TNC

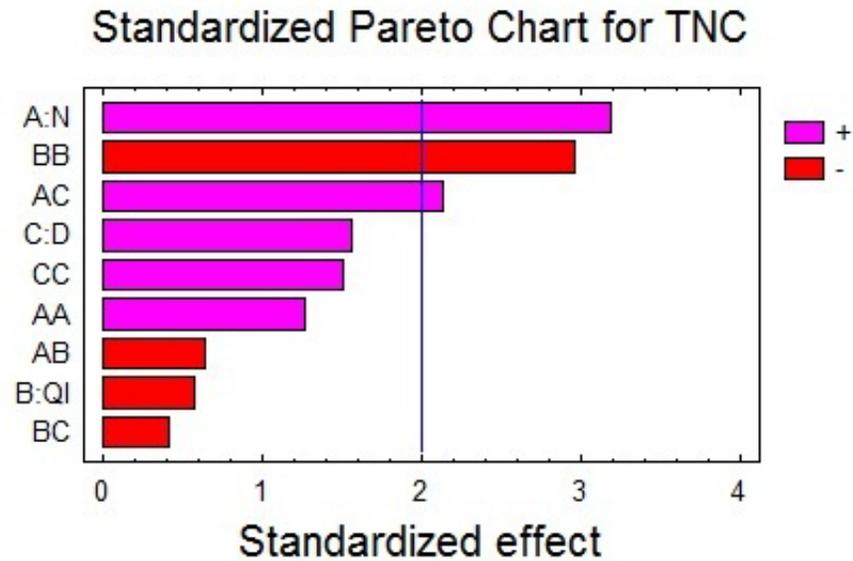


Figura M.1: Diagrama de Pareto según la ANOVA para la variable TNC versus los factores N,D,QI

Ecuación de Regresión para la variable TNC respecto a los factores significativos.

$$TNC = -8,28704 + 0,202778 * N + 1,525 * \widehat{QI} + 0,623333 * D + 0,0103889 * N * D - 0,0127083 * \widehat{QI}^2 \quad (M.2.1)$$

M.2.2. Análisis Experimental - Variable TTR

• Resumen Analítico

Efectos estimados para la variable Tiempo Total Requerido (TTR)

	Efecto Principal	+/- Error Estándar
average	295,004	+/- 305,502
N	25,1003,3	+/- 282,84
QI	-47,0419	+/- 282,84
D	23,03	+/- 282,84
N^2	805,496	+/- 489,893
N*QI	-101,289	+/- 346,407
N*D	801,068	+/- 346,407
QI^2	-1138,48	+/- 489,893
QI*D	-157,839	+/- 346,407
D^2	650,387	+/- 489,893
block	-415,558	+/- 326,596
block	86,7802	+/- 326,596

Tabla M.7: Error estándar para TTR basado en el error total con 69 grados de libertad

• Análisis de Varianza para TTR

R-squared = 32,5774 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 24,0308 percent

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
N	1,35892e7	1	1,35892e7	12,58	0,0007
QI	29874,6	1	29874,6	0,03	0,8684
D	3,69306e6	1	3,69306e6	3,42	0,0687
N^2	2,91971e6	1	2,91971e6	2,70	0,1047
N*QI	92336,0	1	92336,0	0,09	0,7709
N*D	5,77539e6	1	5,77539e6	5,35	0,0237
QI^2	5,8326e6	1	5,8326e6	5,40	0,0231
QI*D	224220,0	1	224220,0	0,21	0,6501
D^2	1,90352e6	1	1,90352e6	1,76	0,1887
blocks	1,94612e6	2	973061,0	0,90	0,4109
Total error	7,45186e7	69	1,07998e6		
Total (corr.)	1,10525e8	80			

Tabla M.8: Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable TTR

Standard Error of Est. = 1039,22

Mean absolute error = 503,137

Durbin-Watson statistic=2,0868 (P=0,2882) Lag 1 residual autocorrelation=-0,04567

• **Diagrama de Pareto y Ecuación de regresión para la variable TTR**

Ecuación de regresión para la variable TTR respecto a los factores significativos.

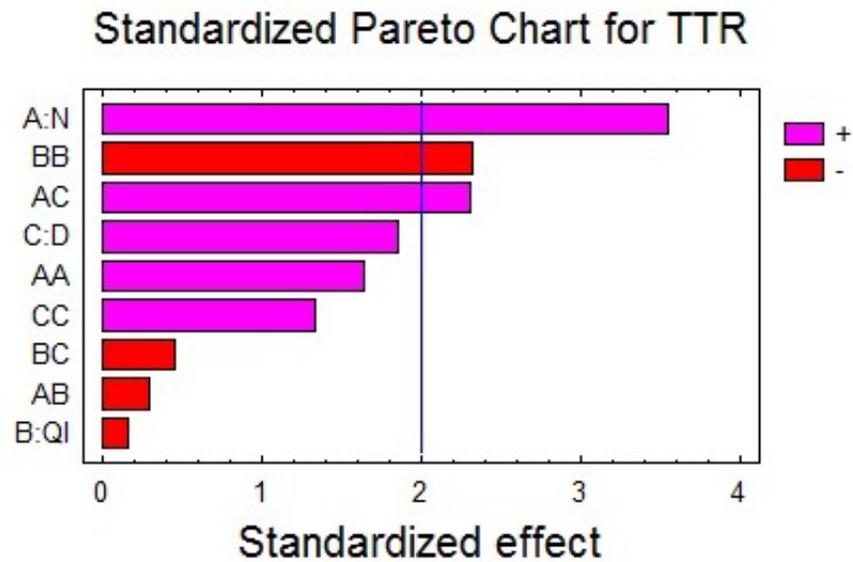


Figura M.2: Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable TTR versus los factores N,D,QI y sus interacciones

$$TTR = -51,3606 + 7,48549 * N + 42,6929 * \widehat{QI} + 24,0321 * D + 0,400534 * N * D - 0,355774 * \widehat{QI}^2 \quad (M.2.2)$$

M.2.3. Análisis Experimental - Variable ITO

• Resumen Analítico

Efectos estimados para la variable Total de Nodos Creados (ITO)

average	3,28395 +/- 0,966142
N	1,77778 +/- 0,894474
QI	-0,555556 +/- 0,894474
D	0,111111 +/- 0,894474
N^2	-0,592593 +/- 1,54927
N*QI	-0,611111 +/- 1,0955
N*D	0,444444 +/- 1,0955
QI^2	-4,92593 +/- 1,54927
QI*D	-0,166667 +/- 1,0955
D^2	1,96296 +/- 1,54927
block	-0,567901 +/- 1,03285
block	-1,60494 +/- 1,03285

Tabla M.9: Error estándar basado en el error total con 69 grados de libertad

• Análisis de Varianza para ITO

R-squared = 23,7341 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 14,0666 percent

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
A:N	42,6667	1	42,6667	3,95	0,0508
B:QI	4,16667	1	4,16667	0,39	0,5366
C:D	0,166667	1	0,166667	0,02	0,9015
N^2	1,58025	1	1,58025	0,15	0,7033
N*QI	3,36111	1	3,36111	0,31	0,5788
N*D	1,77778	1	1,77778	0,16	0,6862
QI^2	109,191	1	109,191	10,11	0,0022
QI*D	0,25	1	0,25	0,02	0,8795
D^2	17,3395	1	17,3395	1,61	0,2094
blocks	51,4321	2	25,716	2,38	0,1000
Total error	745,278	69	10,8011		
Total (corr.)	977,21	80			

Tabla M.10: Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable ITO

Standard Error of Est. = 3,28651

Mean absolute error = 1,83173

Durbin-Watson statistic=2,27049 (P=0,0817) Lag 1 residual autocorrelation=-0,1353

• **Diagrama de Pareto y ecuación de regresión para la variable ITO**

Ecuación de regresión para la variable ITO respecto a los factores significativos..

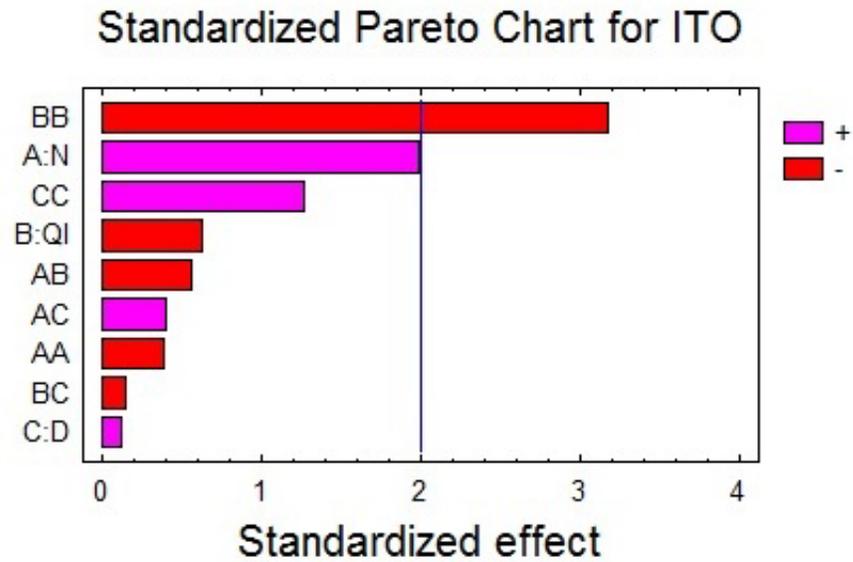


Figura M.3: Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable ITO versus los factores N,D,QI y sus interacciones

$$ITO = -3,13426 + 0,0222222 * N + 0,184722 * \widehat{QI} - 0,00153935 * \widehat{QI}^2 \quad (M.2.3)$$

M.3. Análisis Experimental - Variable NTI

- Resumen Analítico

Efectos estimados para la variable Total de Nodos Creados (NTI)

average	6,0 +/- 4,16582
N	12,037 +/- 3,8568
QI	-1,85185 +/- 3,8568
D	5,88889 +/- 3,8568
N^2	8,77778 +/- 6,68018
N*QI	-2,5 +/- 4,7236
N*D	10,1667 +/- 4,7236
QI^2	-19,5556 +/- 6,68018
QI*D	-1,83333 +/- 4,7236
D^2	9,88889 +/- 6,68018
block	-6,44444 +/- 4,45345
block	1,55556 +/- 4,45345

Tabla M.11: Error estándar basado en el error total con 69 grados de libertad

- Análisis de Varianza para NTI

R-squared = 31,7738 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 23,1254 percent

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
N	1956,02	1	1956,02	9,74	0,0026
QI	46,2963	1	46,2963	0,23	0,6326
D	468,167	1	468,167	2,33	0,1314
N^2	346,722	1	346,722	1,73	0,1932
N*QI	56,25	1	56,25	0,28	0,5983
N*D	930,25	1	930,25	4,63	0,0349
QI^2	1720,89	1	1720,89	8,57	0,0046
QI*D	30,25	1	30,25	0,15	0,6991
D^2	440,056	1	440,056	2,19	0,1433
blocks	458,0	2	229,0	1,14	0,3257
Total error	13856,0	69	200,811		
Total (corr.)	20308,9	80			

Tabla M.12: Resultados del Análisis de varianza (ANOVA) para la variable NTI

Standard Error of Est. = 14,1708

Mean absolute error = 7,39872

Durbin-Watson statistic=2,07982 (P=0,2992) Lag 1 residual autocorrelation=-0,04246

• **Diagrama de Pareto y ecuación de regresión para la variable NTI**

Ecuación de regresión para la variable NTI respecto a los factores significativos.

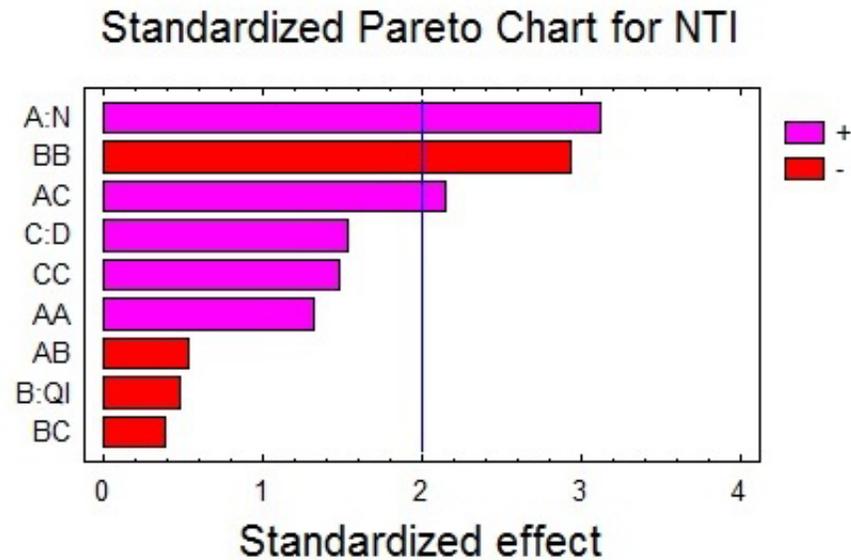


Figura M.4: Diagrama de Pareto correspondiente al ANOVA de la variable NTI versus los factores N,D,QI y sus interacciones

$$NTI = -3,55556 + 0,103704 * N + 0,733333 * \widehat{QI} + 0,305 * D + 0,00508333 * N * D - 0,00611111 * \widehat{QI}^2 \quad (M.3.1)$$

M.4. Pronósticos del tiempo total requerido por el algoritmo híbrido

Problema	TTR-Estimado
125-50-20	3.6115e+3
125-50-60	5.7546e+3
125-50-100	9.5394e+3
150-50-20	3.9989e+3
150-50-60	7.3634e+3
150-50-100	1.07278e+4
175-50-20	4.3863e+3
175-50-60	8.1513e+3
175-50-100	1.19163e+4
200-50-20	4.7737e+3
200-50-60	8.9392e+3
200-50-100	1.31048E+4

Tabla M.13: Tabla con valores pronosticados para la variable TTR en problemas de más de 100 variables

Anexo N

**Relación detallada de las soluciones
obtenidas por el algoritmo híbrido
para los Problemas Extras**

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
91	125-25-1	-5.5358e+03	403	1.1124e+4	209	209	0.0065
92	125-25-2	-6.1561e+03	11	762.4468	7	0	0.0000
93	125-25-3	-6.8155e+03	7	685.2359	3	0	0.0000
94	125-50-1	-9.3084e+03	429	4.9331e+3	229	6	0.0000
95	125-50-2	-8.3910e+03	7	1.4948e+4	3	0	2.7410e-07
96	125-50-3	-8.3439e+03	33	596.1629	19	0	1.6670
97	125-75-1	-1.2330e+03	11	1.2460e+3	7	0	0.0000
98	125-75-2	-1.0359e+04	385	1.6239e+3	217	0	0.0000
99	125-75-3	-9.6355e+03	75	1.8996e+4	45	0	0.0000
100	150-25-1	-7.2640e+3	521(507)	1.9196e+4	267(258)	0	0 (2.241)
101	150-25-2	-8.8460e+3	507	2.1452e+4	326	325	0.0000
102	150-25-3	-9.1443e+3	91	5.6591e+3	74	0	0.0000
103	150-50-1	-9.8403e+3	145	7.4955e+3	129	0	0.0000
104	150-50-2	-1.2383e+4	49	3.0176e+3	41	0	0.0000
105	150-50-3	-1.2779e+4	217	1.1085e+4	132	131	0.0000
106	150-75-1	-1.2011e+4	567	1.9240e+4	283	0	0.0000
107	150-75-2	-1.4478e+4	91	4.8888e+3	67	0	0.0000
108	150-75-3	-1.4881e+4	739	5.5983e+4	551	429	0.0000
109	175-25-1	-9.2050e+3	387	1.7088e+4	198	0	0.9590
110	175-25-2	-1.0591e+4	393	3.1548e+4	323	0	0.0000
111	175-25-3	-1.1320e+4	193	1.3575e+4	147	0	0.0000
112	175-50-1	-1.3099e+4	381	1.8224e+4	196	0	0.8650
113	175-50-2	-1.5384e+4	505	3.6543e+4	375	0	0.0000
114	175-50-3	-1.7134e+4	49	4.5310e+3	42	0	0.0000
115	175-75-1	-1.5626e+4	369	1.7295e+4	184	0	3.4060
116	175-75-2	-1.8452e+4	197	1.2174e+4	143	0	0.0000
117	175-75-3	-1.8803e+4	429	3.4002e+4	319	0	0.0000
118	200-25-1	-1.1687e+4	227	2.1153e+4	139	0	1.4630
119	200-25-2	-1.2541e+4	281	2.0725e+4	141	0	1.1250
120	200-25-3	-1.2964e+4	247	2.9077e+4	197	0	0.0000
121	200-50-1	-2.3335e+4	213	2.3661e+4	172	0	0.0000
122	200-50-2	-1.7839e+4	283	8.3725e+3	143	0	1.5500
123	200-50-3	-1.8815e+4	285	2.4184e+4	145	0	1.4250
124	200-75-1	-2.0330e+4	279	2.0119e+4	139	0	3.0760
125	200-75-2	-2.2163e+4	311	2.0863e+4	160	0	0.6410
126	200-75-3	-2.0870e+4	253	1.7897e+4	129	0	1.3910

Tabla N.1: Resultados del algoritmo híbrido $C\&C+B\&B$ para los Problemas Extras

Anexo Ñ

Relación detallada de las soluciones
obtenidas por el método *B&B* de
Burer-Chen para los Problemas
Extras

Problema	N-D-S	$f_{minglob}$	TNC	TTR	NTI	ITO	gap-relativo
91	125-25-1	-5.4596e+03	713	1.45730e+4	356	110	2.7420
92	1250-25-2	-6.1561e+03	241	6.6236e+3	145	134	0
93	125-25-3	-6.8155e+03	179	8.6352e+3	147	91	0
94	125-50-1	-9.1771e+03	179	4.9331e+3	465	6	2.1840
95	125-50-2	-8.2499e+03	755	1.6917e+4	377	147	2.2570
96	125-50-3	-8.2368e+03	767	1.6329e+4	383	91	1.6670
97	125-75-1	-1.2330e+03	689	2.0762e+4	493	367	0
98	125-75-2	-1.0161e+04	943	1.9927e+4	470	367	3.8900
99	125-75-3	-9.5228e+03	964	2.0819e+4	484	134	2.0070
100	150-25-1	-6.7379e+3	437	1.4418e+4	218	132	11.3060
101	150-25-2	-8.4421e+3	435	1.5666e+4	217	193	5.6600
102	150-25-3	-8.9505e+3	533	1.8234e+4	266	217	2.5000
103	150-50-1	-9.3149e+3	451	1.5145e+4	225	187	6.7990
104	150-50-2	-1.2164e+4	451	1.7050e+4	225	152	2.0630
105	150-50-3	-1.2197e+4	451	1.8870e+4	225	135	5.4610
106	150-75-1	-1.1069e+4	451	1.4857e+4	225	2	12.2310
107	150-75-2	-1.3892e+4	437	1.7319e+4	218	1	5.0120
108	150-75-3	-1.4155e+4	437	1.5947e+4	218	188	6.6160
109	175-25-1	-8.3924e+3	323	1.4868e+4	161	148	11.9790
110	175-25-2	-9.8849e+3	323	1.5133e+4	161	141	9.7630
111	175-25-3	-1.0640e+4	323	1.6419e+4	161	135	0.0601*
112	175-50-1	-1.1946e+4	323	1.5314e+4	161	55	0.0880*
113	175-50-2	-1.4196e+4	323	1.6298e+4	161	1	0.9999*
114	175-50-3	-1.6813e+4	323	2.2962e+4	161	114	2.2720
115	175-75-1	-1.3594e+4	323	2.2163e+4	161	49	20.5590
116	175-75-2	-1.7420e+4	323	1.9436e+4	161	8	6.9720
117	175-75-3	-1.7457e+4	323	1.6583e+4	161	155	9.0350
118	200-25-1	-1.0369e+4	247	1.6166e+4	123	38	15.4280
119	200-25-2	-1.1110e+4	247	1.5365e+4	123	3	15.4360
120	200-25-3	-1.1857e+4	247	1.8800e+4	123	110	10.4800
121	200-50-1	-1.3100e+4	247	2.1034e+4	123	5	20.8620
122	200-50-2	-1.5903e+4	279	2.0836e+4	139	38	15.0310
123	200-50-3	-1.7007e+4	279	2.2512e+4	139	69	13.3260
124	200-75-1	-1.7337e+4	279	2.1006e+4	139	26	21.4880
125	200-75-2	-2.0200e+4	279	2.3451e+4	139	101	10.7890
126	200-75-3	-1.8692e+4	279	2.0885e+4	139	4	14.5350

captionResultados del método *B&B* de Burer-Chen para los Problemas Extras

Anexo O

Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global

Problema Nro	N-D-S	deAngelis min EIG(Q+D)	Neumaier (α)	Murty OK
1	20-100-1	-139.0113	40,2088	01
2	20-100-2	-114.0289	36.9892	101
3	20-100-3	-110.1739	36.1233	1
4	30-60-1	-104.7040	96.6419	01
5	30-60-2	-104.7040	220.5190	00
6	30-60-3	-148.7317	104.7188	0
7	30-70-1	-140.4244	56.4488	001
8	30-70-2	-150.7750	60.2621	1
9	30-70-3	-147.4824	232.6819	000
10	30-80-1	-154.5657	154.6209	00
11	30-80-2	-143.4602	40.3571	01
12	30-80-3	-140.4005	68.5622	10
13	30-90-1	-160.9917	49.7868	1
14	30-90-2	-150.3159	231.4800	0
15	30-90-3	-145.1836	66.1095	1
16	30-100-1	-141.4367	92.6420	110
17	30-100-2	-177.5549	50.3560	11
18	30-100-3	-199.5677	122.7251	10
19	40-30-1	-99.6027	69.4221	11
20	40-30-2	-117.0529	98.8347	11
21	40-30-3	-122.5496	94.9475	11
22	40-40-1	-139.3606	217.0261	011
23	40-40-2	-105.6267	53.1849	11
24	40-40-3	-135.3776	89.0720	01
25	40-50-1	-140.3409	103.9338	01
26	40-50-2	-139.7688	215.3850	00
27	40-50-3	-159.9099	160.3152	00
28	40-60-1	-152.9662	471.0196	00
29	40-60-2	-169.3550	127.6861	00
30	40-60-3	-144.0781	58.8139	11
31	40-70-1	-155.6061	97.2237	1
32	40-70-2	-140.6956	60.0180	01
33	40-70-3	-160.5092	71.9500	1
34	40-80-1	-193.4711	62.5290	01
35	40-80-2	-164.3313	67.2510	11
36	40-80-3	-165.1697	219.6553	00
37	40-90-1	-216.6188	65.8610	01
38	40-90-2	-211.9939	69.2798	011
39	40-90-3	-155.8811	82.2393	1
40	40-100-1	-177.1323	130.5403	00
41	40-100-2	-211.7353	91.7233	1
42	40-100-3	-206.3841	229.0412	010

Tabla O.1: Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global para los Problemas Básicos

Problema Nro	N-D-S	deAngelis min EIG(Q+D)	Neumaier Suma (S)	Murty OK
43	50-30-1	-121.3775	113.8533	1 *
44	50-30-2	-115.5719	124.0968	11
45	50-30-3	-124.2368	151.6102	00
46	50-40-1	-137.4102	93.4853	01 *
47	50-40-2	-160.8518	236.6937	00
48	50-40-3	-148.0113	90.7269	011
49	50-50-1	-178.1955	179.7653	100
50	50-50-2	-181.5957	230.4931	11
51	50-50-3	-175.4188	458.2328	0
52	60-20-1	-105.0493	125.7012	01 *
53	60-20-2	-105.9185	207.4968	01 *
54	60-20-3	-126.4192	249.4997	01 *

Tabla O.2: Resultados de la aplicación de los criterios de optimización global para los Problemas Básicos (Continuación)