

Modelación Matemática Aplicada

Dr. Manuel E. Cortés Cortés

DEDICATORIA

A Miriam por permitirme conocer que el amor es un proceso de límite al infinito, a Yaniet por darme una sucesión geométrica creciente de alegrías, con razón igual a Yaniela, a Manuel por ser la solución óptima que alcanza el Modelo Matemático de la familia.

Contenido

PRIMERA PARTE

TEORÍA DE CONJUNTOS

- Definición de conjunto
- Definiciones de Proposición
- Operadores lógicos
- Conjunción
- Disyunción
- Proposición bicondicional
- Operadores con conjuntos
- Paradoja
- Definición de subconjuntos
- Definición de complemento de un conjunto

TEORÍA DE FUNCIONES

- Definición de Producto Cartesiano
- Definición de funciones
- Formas de representar las funciones:
- Tipos de Funciones:
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Definición de Función Biyectiva
- Gráfico de las funciones

PROBABILIDAD Y LOS CONJUNTOS

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

- Probabilidad como función
- Discretas
- Continua
- VARIABLES ALEATORIAS**
- Distribución uniforme

DERIVADAS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- DEFINICIÓN DE DERIVADA

DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS. DERIVACIÓN EN CADENAS

Derivando

MÁXIMO Y MÍNIMO

Teoría de la optimización

Problema extremos sin restricciones

Criterio de la Segunda Derivada

Generalización de los Máximos y Mínimo

Matriz del Hessiano

DEFINICIÓN DE FORMA CUADRÁTICA

CONDICIÓN SUFICIENTE

CÁLCULO DE LA CONDICIÓN SUFICIENTE

Matrices y Sistema de ecuaciones Lineales

Definición a Sistema de Ecuaciones Lineales

MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA $A_{n \times n}$

Determinantes de una matriz

Sistema de Ecuaciones Lineales. (S.E.L.)

Exposición general de métodos de solución de S.E.L

APLICACIONES AL BALANCE DE REACCIONES QUÍMICAS

SEGUNDA PARTE

Programación Lineal

Formulación del Problema de Programación Lineal

Supuestos de la programación Lineal

Métodos de Solución

MÉTODO GRÁFICO

Otros Métodos de Solución del Problema de P.L

Método Simplex Revisado

Dual de un Problema de P.L.

Método Dual Simplex:

Aplicaciones de la programación lineal

Problema de Inventarios
Problema de Producción y Control de Inventarios
Problema de Programación del Transporte
Formulación del Problema de Transporte con Transbordo.
Problema del Flujo Máximo de Costo Mínimo
Método CPM
Selección de Proyectos (Factibilidad Económica)

Programación Multiobjetivo. PMO

Forma 1. Escoger el criterio más importante
Forma 2. Método de la Función Ponderada
Forma 3. Método de los pasos sucesivos
Forma 4. Optimización de Pareto
Forma 5. Modelo de programación objetivo [Goal programming model] META
Forma 6. Programación Lineal Multiobjetivo. P L M O
CASO DE ESTUDIO: Planteamiento del problema
La PMO para la selección y evaluación de criterios
Ponderación lineal
Método analítico jerárquico (MJA). Saaty
Consistencia de una matriz
Determinación del vector peso de criterios
Matriz de alternativas Recurso-Usos
Determinación de los factores de peso
Método Delphi para la evaluación de alternativas
Ejemplo de Aplicación del Delphi

Teoría de la Decisión

Decisiones en Condiciones de Incertidumbre
Criterio de Hurwicz
Criterio de Laplace.
Criterio de Savage

Decisiones en Condiciones de Riesgo.

Criterio de Optimización del Valor Esperado
Árbol de Decisión

Decisiones en Condiciones de Competencia o Conflicto

REGLAS DEL JUEGO

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA ÓPTIMA

Determinación de la Estrategia Óptima

PRINCIPIOS DEL MIN-MAX

Estrategias Mixtas

Juegos de suma no constante. Dilema del prisionero

Bibliografía

Primera Parte

Segunda Parte

Sitios Web de Internet

Teoría de Conjuntos

La teoría de conjunto comienza con dificultades desde la misma definición de conjunto.

Definición de conjunto: Llamamos conjunto a una colección de objetos y a los objetos que la forman se les llama elementos del conjunto.

Al decir que el conjunto es una colección de objetos, lo que estamos es utilizando un sinónimo para designar la palabra, por lo tanto el propio término conjunto está no definido. Lo mismo sucede con la definición de Universo.

Llamamos Universo al conjunto que en un momento dado es usado como marco de referencia para formar conjuntos.

Esta definición es difícil de hacerla en forma que a todos satisfaga. La experiencia, ha probado que tratar de dar una definición de conjunto y de universo traerá más perjuicios que beneficios.

Los conjuntos pueden ser representados o descritos de dos formas:

- Por enumeración en donde se dan explícitamente todos sus elementos.

Ejemplos:

- a - $A = \{a, e, i, o, u\}$
- b - $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- c - $C = \{\text{Ecuador, Colombia, Venezuela, México}\}$

- Por comprensión en donde sus elementos están dados en forma implícita mediante una relación o frase que los describa.

Ejemplos:

- a - $A = \{\text{Las vocales}\} = \{x/x \text{ es una vocal}\}$
- b - $B = \{x/x = 2K, K \in \mathbb{Z}\}$ números enteros pares
- c - $C = \{\text{Países Latinoamericanos}\}$

Algunos conjuntos conocidos en matemáticas:

- a- Dígitos = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- b- Naturales o enteros positivos.
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

La escuela Francesa considera los naturales incluyendo el cero, no así la escuela Americana que lo denota como el conjunto de los enteros no negativos.

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

c- Enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 Enteros impares $= \{x/x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

d- Racionales $= \mathbb{Q} = \{x/x = p/q, p, q \in \mathbb{Z} (q \neq 0)\}$
 Irracionales $= \mathbb{I} = \{\text{conjunto de números que no pueden expresarse como fracciones}\}$
 $\mathbb{I} = \{x/x \neq p/q, p, q \in \mathbb{Z} (q \neq 0)\}$
 Ejemplos: $\pi, \sqrt{2}, e, \dots$ son irracionales

e- Reales $= \mathbb{R} = \{\text{unión de los números racionales e irracionales}\}$

La representación gráfica de este conjunto es una línea recta.



f- ¿Cómo usted denotaría al conjunto de los números primos por comprensión?

Veremos algunos conceptos de la Lógica Matemática que nos permitan trabajos indistintamente con frases y expresiones.

Definiciones de Proposición: Una expresión que sea verdadera o falsa, pero no ambas, la llamaremos una proposición.

Veamos algunas expresiones:

- a- $3 + 8$ menor que $2 + 10$
- b- Los números primos son divisibles sólo por 4 números.
- c- El fenómeno de “El Niño” es un fenómeno bursátil.

Estas expresiones pueden ser verdaderas o falsas, pero no ambas cosas a la vez.

Luego si p es proposición ella cumple con la tabla $p = 0$ (F) o $p = 1$ (V), denotando a 0 como falso (F) y 1 como verdadero (V).

Operadores lógicos

Negación : La negación es un operador lógico que cambia el valor de verdad de una proposición. A este operador se le designa con el signo $\sim p$ que significa negar el valor de la verdad de la proposición p .

Tabla de verdad del operador negación:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Algunas negaciones más comunes:

Todos algunosno
 Algunos ningunos
 Para todo existe al menos uno

Conjunción: La conjunción se denota por el símbolo $\wedge$ (y) es un operador de relación de dos proposiciones de forma que su resultado sea verdadero sólo cuando ambas proposiciones sean verdaderas.

Tabla de la verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción: La disyunción es un operador lógico denotado por $\vee$ (o) y relaciona a dos proposiciones dando un valor de la verdad falso sólo cuando ambas proposiciones sean falsas.

Tabla de la verdad de la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposición condicional: Proposición que resulta de unir a dos proposiciones y que tendrá un valor de verdad falso solamente cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso, se denota $p \Rightarrow q$ y se puede leer: “Si p, entonces q”, “p sólo si q”, “basta p para que q”, “q si a”, “q y a que a”.

Tabla de la verdad de la condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposición bicondicional:

Tabla de la verdad de la bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Operadores con conjuntos:

Intersección de dos conjuntos:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces definimos el conjunto intersección y se denota $A \cap B$ como $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

Conjunto vacío:

El conjunto vacío que denotaremos por $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos. Podemos decir que:

$$\emptyset = \{x/x \in A \vee x \in A\}$$

Unión de los conjuntos:

Sean A y B dos conjuntos, entonces definimos el conjunto A unión B, que denotaremos por $A \cup B$ como sigue:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

El concepto de conjunto se prepara desde los primeros grados iniciando con el conjunto de los números naturales, también en la geometría se utilizan constantemente los con-

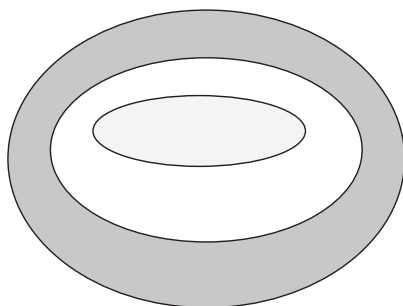
ceptos de conjuntos, definiéndose los objetos geométricos como conjunto de puntos: la circunferencia, la mediatriz de un segmento como conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento, la bisetriz, etc.

En la sistematización de triángulos se pueden ver los diagramas tales como:

Triángulos

Equiláteros

Isósceles



La teoría de conjuntos trabaja sobre el desarrollo de la capacidad de los alumnos para descubrir lo esencial, el núcleo y separarlo de lo no fundamental matemático.

Ejemplos:

1. Simplifique la fracción: $35/56$

Sea M_1 el conjunto de los divisores de 35 y M_2 el de los de 56, entonces nuestro problema será encontrar la intersección de ambos conjuntos:

$$M_1 = \{5, 7\}$$

$$M_2 = \{2, 4, 8, 14, 7, 28\}$$

$$M_1 \cap M_2 = \{7\} \text{ lo que implica } 35/56 = 5/8$$

2) a) Determinar el punto de intersección de dos rectas r_1 y r_2

$$M_1 = r_1 = \{x/x \in r_1\}$$

$$r_1 = \text{recta 1}$$

$$M_2 = r_2 = \{x/x \in r_2\}$$

$$r_2 = \text{recta 2}$$

$$M_1 \cap M_2 = \{x/x \in r_1 \text{ y } x \in r_2\} = \{p\}$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones $3x + y = 7$

$$5x - y = 8$$

que es equivalente a la planteada en a)

$$M_1 = \{x/y = -3x + 7\}$$

$$M_2 = \{x/y = 5x - 8\}$$

$$M_1 \cap M_2 = \{(15/8, -11/8)\}$$

3) Construir un rombo de ángulos iguales.

$$M_1 = \{\text{rombos}\}$$

$$M_2 = \{\text{rectángulos}\}$$

$$M_1 \subset M_2 = \{\text{cuadrados}\}$$

Paradoja: Una paradoja es una proposición que no es ni verdadera ni falsa a la vez. Veamos dos ejemplos, uno teórico y el otro aplicado a la vida.

a. Paradoja de Beltran Rusell

“Existe el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos”.

b. Paradoja del Peluquero

“Existe en un pueblo el Peluquero que corta el cabello a todos aquellos que no se cortan el cabello a sí mismos”.

El problema aquí está en ver si el conjunto de todos los conjuntos se pertenece o no, en el caso a, o si el peluquero se corta el cabello a sí mismo, en el caso b. En ambos casos siempre se llega a un absurdo.

Definición de subconjuntos:

Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es un subconjunto de B y lo denotaremos $A \subset B$ si para toda x que pertenece a A se tiene que x también pertenece a B. Es decir, todos los elementos de A son también de B.

Definición de complemento de un conjunto:

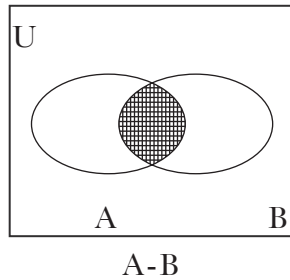
Sea U el conjunto Universo y $A \subset U$, definimos el complemento de A, que denotaremos como A^1 al conjunto:

$$A^1 = \{x/x \notin A \text{ y } x \in U\}$$

Ejercicios:

1) Demuestre que $A - B = A \cap B^1$

$$\text{Sea } x \in A - B \Rightarrow x \in A \text{ y } x \notin B$$



$$X \in A \text{ y } X \in B^1$$

$$\text{Luego } A-B \subseteq A \cap B^1$$

$$\text{Sea } X \in A \cap B^1 \Rightarrow X \in A \text{ y } X \in B^1 \Rightarrow X \in A \text{ y } X \notin B$$

$$\text{Luego } A \cap B^1 \dot{=} A-B$$

$$\text{Y llegamos a } A \cap B^1 \subseteq A-B$$

2) Demuestre que si una condicional es cierta, $p \Rightarrow q$, su recíproca $\sim p \Rightarrow \sim q$ puede que sea o no verdadera.

Veamos la tabla de la verdad.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

3) Demuestre que el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números racionales.

$$\text{Sea } x \in \mathbb{Z}, \text{ existe } a = xb \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z} / x = a/b$$

$$\text{Luego } x \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

4) 46 estudiantes escogen los idiomas que desean aprobar en sus estudios universitarios.

4 alumnas estudian sólo francés

4 alumnos estudian alemán e inglés

Hay igual número de alumnos y alumnas que estudian sólo inglés. No hay alumnos que estudian francés y alumnas que estudian alemán.

Hay 12 estudiantes que no eligen ningún idioma

10 alumnas estudian francés.

El número total de alumnos excede al de alumnas en 2.

Hay igual número de alumnos y de alumnas que estudian idiomas.

a) ¿Cuántos alumnos estudian idiomas?

b) ¿Cuántos estudiantes eligen sólo inglés?

c) Cuántas alumnas no eligen el idioma que van a estudiar?

d) ¿Cuántos alumnos estudian sólo alemán?

Alumnos que estudian idioma = Alumnas que estudian idiomas

$$4 + 6 + x = 4 + x + Z$$

$Z = 6$ alumnos que estudian alemán

46 estudiantes estudian idiomas

$$4 + 6 + x + 4 + x + Z = 46$$

$X = 13$ alumnas y alumnos que estudian inglés

Alumnas = 2 + alumnas

$$12 - y + 4 + 6 + x + 2 = 4 + x + Z + y$$

$y = 7$ alumnos que no eligen idiomas

$$12 - y = 5 \text{ alumnas que no eligen idiomas}$$

$$a) = 23$$

$$b) = 26$$

$$c) = 5$$

$$d) = 6$$

Diagrama de Venn

Alumnas	Alumnos								
12-y	Alemán								
	<table><tr><td></td><td>x</td><td>4</td><td>z</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>x</td><td>y</td></tr></table>		x	4	z	4	6	x	y
	x	4	z						
4	6	x	y						
Francés	Inglés								

5) En una industria se produce con una tasa de 100 artículos por hora de los cuales pasan al control de calidad 60. El resto presenta fallas tipos A, B y C, que se repartieron del modo siguiente:

8 artículos con fallas del tipo A y del tipo B.

12 artículos con solo fallas del tipo A.

3 artículos con fallas de los 3 tipos

5 artículos con fallas de tipos A y C.

2 artículos con solo fallas del tipo B y C.

El número de artículos que tuvieron una sola falla del tipo B o C fue el mismo.

1) ¿Cuántos artículos tuvieron fallas del tipo B?

2) ¿Cuántos artículos tuvieron una sola falla?

6) Encuentre todos los números naturales X que cumplen las condiciones siguientes en forma simultánea.

a) $100 \leq X \leq 1000$

b) x es impar

c) la suma de las cifras básicas es 25.

Sea el número $X = abcd$

Donde $b, c \in [0, 9]$ son dígitos cualesquiera

$a \in [0, 1]$ si $a = 1$ entonces $b=c=d=0$ y no se cumple con la paridad.

$$a = 0$$

$$\text{Ahora } b+c+d = 25$$

Pero $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ número impar

Si $d = 1$ entonces $b + c = 24$ no es posible

$$d = 2 \quad b + c = 23 \quad \text{no es posible}$$

$$d = 3 \quad b + c = 22 \quad \text{no es posible}$$

$$d = 5 \quad b + c = 20 \quad \text{no es posible}$$

$$d = 7 \quad b + c = 18$$

$$\text{Entonces } b = 9 \text{ y } c = 9$$

el número 997

$$d = 9 \quad b + c = 16$$

$$\text{entonces } b = 8 \text{ y } c = 8$$

el número 889

$$b = 9 \text{ y } c = 7$$

el número 979

$$b = 7 \text{ y } c = 9$$

el número 799

Solución $\{779, 889, 979, 997\}$

7) Si 3 veces el mayor de 2 números dados es igual a 4 veces el menor de los 2 y si la diferencia entre ellos es 8, entonces, ¿Cuál es el mayor?

8) Se hizo una entrevista a 885 amas de casa y se encontró la siguiente información sobre la programación de TV

600 veían noticieros

400 veían series policíacas

620 veían programas deportivos

195 veían noticieros y series policíacas
190 veían series policíacas y deportivas
400 veían noticieros y deportivas.

Y todos ven al menos uno de estos tres programas.

Determinar cuántos de los entrevistados ven los 3 tipos de programas mencionados.

Teoría de Funciones

En el tema anterior estudiamos la Teoría de Conjuntos y ahora estudiaremos las relaciones que pueden existir entre los elementos de los conjuntos. De esta forma tenemos algunos ejemplos de conjuntos que se relacionan.

Conjunto A

Conjunto B

- | | |
|----------------------------|--|
| a. Países en una olimpiada | Número de medallas obtenidas por cada país |
| b. Miembros de una familia | Ocupación laboral de cada miembro |
| c. Letras del alfabeto | Conjunto de números naturales |
| d. Valor de una variable | Probabilidad de que esa variable tenga ese valor |

Pueden verse de esta forma muchos ejemplos más de RELACIONES entre los elementos de dos conjuntos.

Definición de Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B definimos el producto cartesiano de A con B, denotado por $A \times B$ de la forma: $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$

Los elementos del par ordenado son parejas ordenadas en donde el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo elemento pertenece al conjunto B.

El producto cartesiano puede denotarse de varias formas.

- a) Si el conjunto consta de un número finito de pares ordenados, entonces se puede expresar en forma enumerativa. Ejemplo:

$$A \times B = \{(-3, 2), (1, 2), (4, -5)\}$$

$$N \times M = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

- b) Si los pares ordenados satisfacen una o varias expresiones matemáticas, entonces se pueden expresar en forma comprensiva. Ejemplo.

$$A \times B = \{(x,y) / 3x + 2y = 5\}$$

$$L = \{(x,y) / 2x - y < 0, x+y \geq 1\}$$

$$C = \{ (x,y) / x^2 + y^2 = 4 \}$$

c) Si se define mediante una gráfica en el plano de coordenadas cartesianas.

Definición de funciones

Una relación $f \subset A \times B$ es una función de A en B si y sólo si se satisface la siguiente condición:

“dos parejas diferentes de f no tienen el mismo primer elemento”

Una definición más clásica plantea “si a cada elemento de A le hace corresponder uno y solo un elemento de B”.

El conjunto A se le llama dominio de definición, dominio o conjunto de partida y al conjunto B se le denomina codominio, conjunto de llegada, conjunto de imágenes o rango. A los elementos de B producidos por la aplicación de la relación a algún elemento de A se les llama valor de la función o imagen del elemento de A en B.

$$R: A \rightarrow B: x \in A, y \in B / y = f(x)$$

f: es la función

x: argumento o variable independiente

y: imagen de x por f o valor de la función

Ejemplos:

$$1. \text{ Sea } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; y = |x|$$

Así definimos una función pues está asegurado que a cada elemento de los reales x le hace corresponder su valor absoluto, único de los reales positivos.

Dominio : $\mathbb{R}$ Codominio : $\mathbb{R}^+$

2) Sea E el conjunto de los triángulos y F el conjunto de los reales positivos que representan el área de dicho triángulo.

Dominio: E Codominio: $\mathbb{R}^+$

$$3) \text{ Sea } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f = \{ (x,y) : x \in [-2,2], y = x^2 \}$$

Dominio : $[-2,2]$ Codominio = $[0,4]$

4. Sea $f : X \rightarrow Y$, donde x es el conjunto de todos los estudiantes de un colegio que se llaman Bolívar y que están entre 13 y 15 años de edad y sea Y el conjunto de tres elementos que constan de los estudiantes llamados Bolívar y que sean los más altos de sus edades respectivas. La función asigna a cada x el único y (más alto) de aquella edad.

5. La función $\left(\frac{3x}{(x-2)(x+5)} \right)$
denota un número real

si y sólo si $(x-2) * (x+5) = 0$; por lo tanto:

Dominio: Números reales menos el 2 y el -5

Imagen: Reales.

Formas de representar las funciones:

Las formas más importantes de representar las funciones son la Tabular, la Analítica y la Gráfica.

Tabular.- Consiste en la representación de una función mediante una TABLA

Analítica.- Cuando la representación de las magnitudes están relacionadas entre sí por una ecuación o fórmula.

Gráfica: Cuando la representación se hace mediante el gráfico de la relación funcional.

Tipos de Funciones:

Funciones Inyectivas

Una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si se satisface la siguiente propiedad:

Si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$

Nota:

- Una función no es inyectiva si un elemento de su imagen está relacionado con dos elementos de su dominio.
- Si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$ puede expresarse también en su contrarrecíproca que es otra forma de expresar la definición de función inyectiva: si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.

- Si al trazar una recta perpendicular al eje de las y , ésta corta al gráfico de f en un solo punto es inyectiva.

Funciones Sobreyectivas

Una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si se satisface la siguiente propiedad: Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Nota:

- Una función sobreyectiva se caracteriza porque el codominio (conjunto de llegada o rango) coincide con la imagen de la función.
- Una función puede ser sobreyectiva y no ser inyectiva.
- Para afirmar si una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva se tiene que indicar el conjunto de partida de A y el de llegada de B .

Definición de Función Biyectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es Biyectiva si y sólo si:

- f es inyectiva
- f es sobreyectiva

Ejercicios:

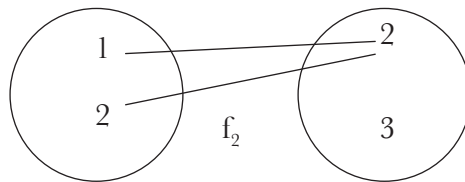
- $y = x$ es una función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva
- $y = +\sqrt{x}$ es una función inyectiva
- $y = |x|$ no es inyectiva pues $f(-2) = f(2) = 2$

Esta función, valor absoluto, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

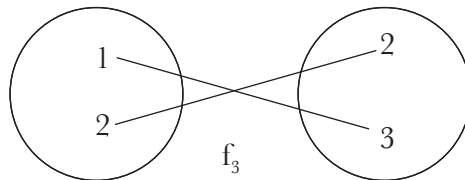
Es sobreyectiva, aunque no es función.

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$

- $f_1 = \{(a, b) / b \text{ es el siguiente de } a\}$ es una función, es inyectiva, sobreyectiva y por supuesto biyectiva. Dominio: $\{1, 2, 3\}$ Codominio: $\{2, 3, 4\}$
- $f_2 = \{(1, 2), (2, 2)\}$ es una función, no es inyectiva ni sobreyectiva.
Dominio: $\{1, 2\}$ Codominio: $\{2\}$



- d) $f_3 = \{ (1,4), (3,2) \}$ es función inyectiva
 Dominio : $\{ 1,3 \}$ Codominio : $\{ 2,4 \}$



- e) $f_4 = \{(1,2), 2,3), (3,3)\}$ es una función, no es inyectiva ni sobreyectiva.

Dominio = $\{1,2,3\}$ Codominio = $\{2,3\}$

- f) $f_5 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (3,3)\}$ no es una función dada que el elemento 3 le corresponden 2 imágenes, no es inyectiva, pero si es sobreyectiva.

Dominio = $\{1,2,3\}$ Codominio = $\{2,3,4\}$

- 5) Si $A = \{2,4,5\}$ y $B = \{x,y\}$ sea la relación $y = \{(a,b)/b = x \text{ si } a \text{ es primo y } b = y \text{ si } a \text{ es par}\}$

Esta relación no es función, no es inyectiva, pero es sobreyectiva.

Dominio = $\{2,4,5\}$ Codominio = $\{x,y\}$

- 5) Si $A = \{\text{dígitos}\}$ y $B = \{\text{enteros del 0 al 10}\}$

- a) $j = A \rightarrow B$ $j = \{(x,y)/y = 0 \text{ si } x \text{ es par, } y = 1 \text{ si } x \text{ es impar}\}$

es función, no es inyectiva, ni sobreyectiva.

Dominio = $\{\text{dígitos}\}$ Codominio = $\{0,1\}$

6) Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ la relación $h(x) = x^2$ es función, no es inyectiva, ni sobreyectiva

7) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sea $g = \{(a, b) / g(a) = b = a + 1\}$

Es función biyectiva

Gráfico de las funciones

La función cuadrática.

a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / j(x) = ax^2 + bx + c$

lugar geométrico parábola

Completando el cuadrado tenemos:

$$j(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$[j(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] = a \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2$$

Nota: La forma canónica, $(y - y_0) = 4p(x - x_0)^2$

Vértice de la parábola (x_0, y_0)

Foco (distancia focal) p

Eje de simetría paralelo al eje y

Si el coeficiente del término cuadrático tiene signo positivo la parábola abre hacia arriba.

Ejemplos:

1) Dada la función $y = 2x^2 - 4x + 7$ haya un bosquejo de su gráfica.

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) + 7 - 2$$

completando el cuadrado

$$(y - 5) = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$(y - 5) = 2(x - 1)$$

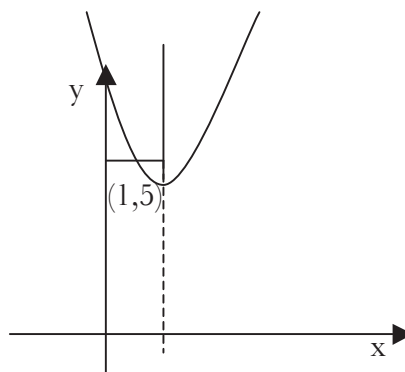
Podemos concluir que:

Vértice de la parábola = $(1,5)$

Distancia focal =

Eje de simetría = y

Abre hacia arriba



2) Dada la función $y = x^2 - 9$ haga el bosquejo de su gráfico.

$$y = x^2 - 9$$

$$(y+9) = x^2$$

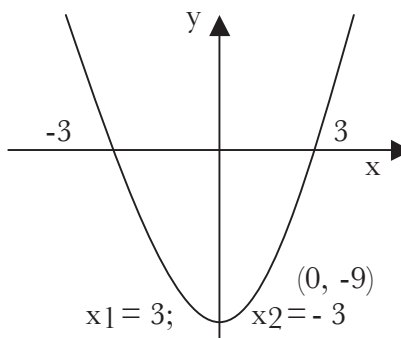
Vértice $(0, -9)$

Distancia focal

Eje = y

Abre hacia arriba

Los ceros de la parábola $x^2 - 9 = 0$



3) $y = -2x^2 + 8x + 4$

$$y = -2(x^2 - 4x) + 4$$

$$y = -2(x^2 - 4x + 4) + 4 + 8$$

$$y = -2(x - 2)^2 + 12$$

$$y - 12 = -2(x - 2)^2$$

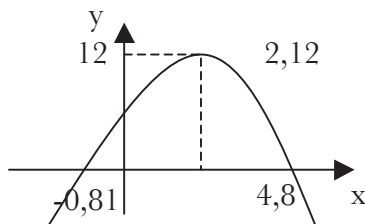
Vértice $(2,12)$

Distancia focal =

Eje de simetría = y

Abre hacia abajo

Los ceros $x_1 = 4,8$, $x_2 = -0,82$



La ecuación cuadrática de dos variables

Sea

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Cumple las siguientes particularidades

- a) Si $A = B = 1$ estamos en presencia de una circunferencia o un conjunto vacío.
 $x^2 + Cx + y^2 + Dy = -E$

Completando el cuadrado

$$\frac{[x + \underline{C}]^2}{2} + \frac{[y + \underline{D}]^2}{2} = \frac{\underline{D}^2 + \underline{C}^2}{4} - E$$

Centro de la circunferencia en $(-C/2, -D/2)$

Radio de la circunferencia $r^2 = \frac{\underline{D}^2 + \underline{C}^2}{4} - E$

En general cuando $A = B$ es una circunferencia.

- b) Si A y B tienen igual signo estamos en presencia de elipse, por el procedimiento del completamiento del cuadrado se obtiene:

Centro de la elipse $\left[\frac{-\underline{C}}{2A}, \frac{-\underline{D}}{2B} \right]$

Semi eje sobre x $a^2 = \left[\frac{-E + C^2/4A + D^2/4B}{A} \right]$

Semi eje sobre y $b^2 = \left[\frac{-E + C^2/4A + D^2/4B}{B} \right]$

- c) Si A y B tienen signos diferentes estamos en presencia de una hipérbola y se cumplen las fórmulas anteriores.
- d) Si $A = 0$ ó $B = 0$ estamos en el caso estudiado de la parábola.

Ejemplos:

- 1) Identificar la curva cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y + 29 = 0$

Al ser $A = 1 \neq B = -4$ y con signos diferentes estamos en presencia de una hipérbola.

La ecuación canónica de la hipérbola será:

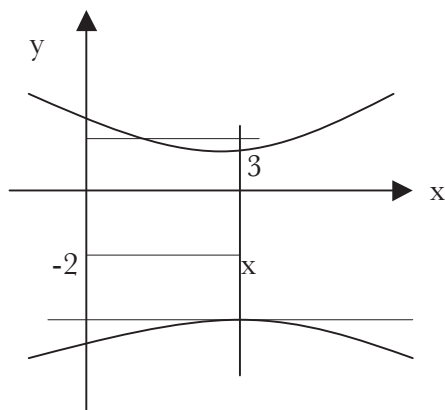
$$\frac{(x-3)^2}{+36} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Centro de la hipérbola (3,-2)

Eje sobre las $x = 6$

Eje sobre las $y = 3$

Se abre sobre eje de las y



2) Determine el lugar geométrico de la ecuación dada por

$$4x^2 + 4y^2 + 32y - 40x + 20 = 0$$

Circunferencia con fórmula $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 36$

Centro en $(5, -4)$

Radio = 6

3) Determine los lugares geométricos que representan las ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

b) $x^2 + 4x - 6y + y^2 = -24$

c) $2y^2 - 20y - 2x + 201 = 0$

Problema gráfico de la programación lineal

El problema de la programación lineal se define como:

Encontrar el conjunto solución de las variables que maximicen o minimicen la función objetivo lineal.

Max. o Mín. $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_n X_n$

Sujeta a un conjunto de m restricciones lineales, del tipo de inecuaciones.

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots \dots \dots x_n \geq 0$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots \dots a_{1n}x_n \{<=>\} b_1$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \{<=>\} b_m$$

Veremos el problema en su solución gráfica.

- 1) Encontrar el valor de la producción de los productos (en toneladas) x_1 y x_2 que maximicen la función objetivo de ganancias $\max Z = 5x_1 + 4x_2$ y que satisfagan las restricciones de consumo material y demandas siguientes:

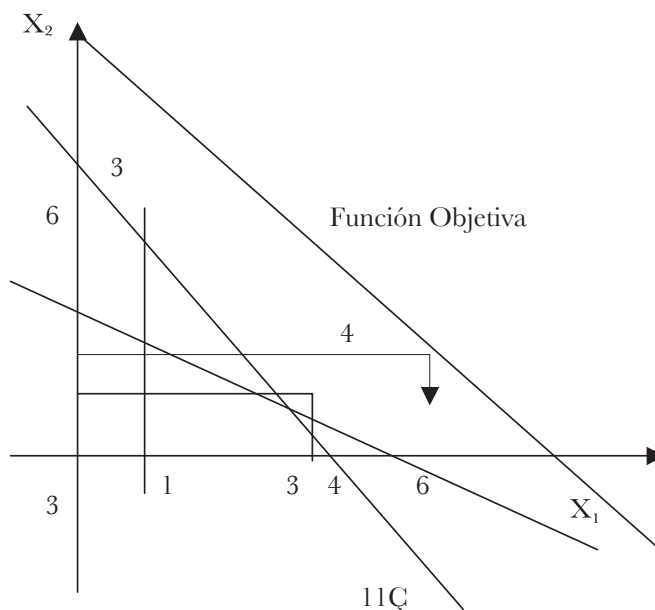
$$\begin{cases} \text{Consumo de materia prima (ton)} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ \text{Consumo de combustible (ton)} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \text{Producir más de 1 ton. de } x_1 & x_1 \geq 1 \\ \text{No producir más de 2 ton de } x_2 & x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Restricciones

1. $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
2. $x_1 + 2x_2 \leq 6$
3. $x_1 \geq 1$
4. $x_2 \geq 2$

Función objetivo:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &= 40 \\ x_1 = 0 \quad x_2 &= 10 \\ x_2 = 0 \quad x_1 &= 8 \end{aligned}$$



La solución óptima se da en la intersección de las restricciones 1 y 2.

$$X_1 = 3 \text{ ton del prod. 1}$$

$$X_2 = 1.5 \text{ ton del prod. 2}$$

$$\text{Max. } Z = 5(3) + 4(1.5) = 15 + 6 = \text{s/.21 Ganancia máxima.}$$

Ejemplo de programación no lineal.

1) Encuentre la solución óptima al problema:

$$\text{Max. } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujete a: } x_1 &\leq 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 &\leq 216 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Probabilidad y los Conjuntos

Supongamos un experimento cuyo resultado no se conoce de antemano. Sea E el espacio muestral del experimento o conjunto de todos los posibles resultados, a los resultados posibles les llamaremos elementos o sucesos elementales.

Sea $E = \{ E_1, E_2, \dots, E_n \}$

E – espacio muestral

E_i – suceso elemental o evento

Ejemplo: Suponga que el experimento es una carrera de caballos numerados del 1 al 4.

El espacio muestral lo consideraremos el ordenamiento de los lugares en la carrera. Así por ejemplo si la carrera puede tener un elemento que sea $(4,1,3,2)$ es decir el caballo 4 llegó en primer lugar,....., el caballo 2 llegó en el último lugar.

E = Espacio muestral = $\{ \text{todos los ordenamientos de } 1,2,3,y 4 \}$ cualquier subconjunto de E se conoce como suceso elemental o evento. Si el subconjunto del espacio muestral es:

$S = \{ \text{todos los resultados de } E \text{ que comiencen con } 1 \}$

Entonces S significa todos los eventos en que el caballo 1 llegue de primero.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

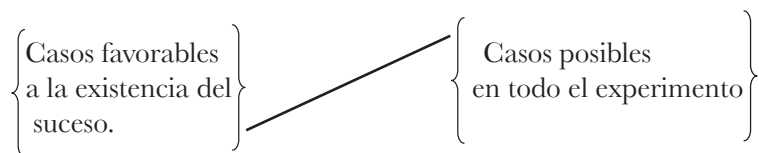
La probabilidad es un número que se le hace corresponder a cada evento S del espacio muestral y que cumple las condiciones:

- 1) $p(S) \in [0,1]$, $0 \leq p(S) \leq 1$
- 2) $p(E) = 1$, la probabilidad del espacio muestral es 1.
- 3) para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \dots$ se cumple:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

Existe otra definición de probabilidad que plantea:

La probabilidad de un suceso o evento S está dada por la relación:



En el cálculo de los casos favorables y los posibles intervienen las fórmulas de las permutaciones, variaciones, combinaciones,... según sea cada caso. También se involucran las operaciones con conjuntos, unión, intersección, complemento, etc.

Ejercicios:

1. Una obra de cuatro tomos se coloca en el estante al azar; calculemos la probabilidad de que los tomos queden en orden, ya sea de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.

Espacio muestral = conjunto de los casos posibles

$$E = P_4 = 4, 3, 2, 1 = 4! = 24 \text{ (factorial 24 casos)}$$

Casos favorables = Es el conjunto de ordenamiento en orden directo o inverso

$$= \{ (1,2,3,4), (4,3,2,1) \} \text{ 2 casos}$$

$$\text{probabilidad} = 2/24 = 1/12$$

- 2) 7 personas toman un elevador en un edificio de 10 pisos, calculemos la probabilidad de que todos se bajen en pisos diferentes.

Espacio muestral = Todas las posibles formas de descender

7 personas en 10 pisos

= Variaciones con repetición

$$= VR_7^{10} = 10^7 \text{ elementos}$$

Casos favorables = Variaciones sin repetición de 10 elementos tomados 7 a 7 sin repetición = $10!/3!$

La probabilidad pedida será:

$$P = V_7^{10} / VR_7^{10} = 0,181444$$

- 3) Un tirador hace blanco en el 80% de sus disparos y otro tirador hace blanco en el 70%. Si los dos hacen el mismo número de disparos, calculemos cuál es el porcentaje de los disparos en que es alcanzado el blanco.

Sea:

A = suceso de que el primer tirador haga blanco.

$$p(A) = 0,8$$

B = suceso de que el segundo tirador haga blanco

$$p(B) = 0,7$$

Suceso de que alguno de los tiradores haga blanco será $A \cup B$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\text{Encontremos } p(A \cap B) = p(A) + p(B/A) = p(B) p(A/B)$$

Pero $p(A/B) = p(A)$ puesto que el primer jugador no depende del otro para hacer el blanco.

$$p(A \cap B) = p(B), p(A) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

Luego

$$p(A \cup B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$$

El 94% de los disparos alcanzan el blanco.

Teoría de las Probabilidades

Probabilidad como función:

Definamos una función cuyo Dominio sea X el conjunto de los posibles resultados que son aleatorios, es decir que suceden según una determinada posibilidad que está relacionada con un valor del intervalo $[0,1]$. A todos los $X \in X$ se les llama variables aleatorias debido a que representan el resultado de una actividad que es aleatoria. El Codominio de esta función será el intervalo $[0,1]$ y a sus valores le llamaremos la probabilidad o la ley de densidad de la variable aleatoria X .

$f: X \rightarrow [0,1]$ f – es la función de probabilidad o de densidad de la variable aleatoria X .

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas:

Discretas: cuando toma uno de los posibles valores.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ y se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1, \text{ donde } p(x_i) \text{ es la probabilidad de } x_i$$

Ejemplo $X = \{1,2,3\}$ con $p(1) = 1/4$; $p(2) = 1/3$

Luego como $p(1) + p(2) + p(3) = 1$, entonces $p(3) = 5/12$

Una variable aleatoria discreta asume a lo más un conjunto numerable de posibles valores, es frecuente que se analicen variables aleatorias cuyo conjunto de valores sea un intervalo.

Continua: Una variable aleatoria x se dice que es continua si su función de probabilidad o de densidad es continua y el valor de la probabilidad de x viene dado por:

$$p(x \leq t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt$$

$f(t)$ es la función de probabilidad o densidad y $p(x \leq t) = F(t)$ es la función de distribución o función acumulada.

Ejemplo: Si la función de densidad de probabilidad de x está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Cuál será el valor esperado de x .

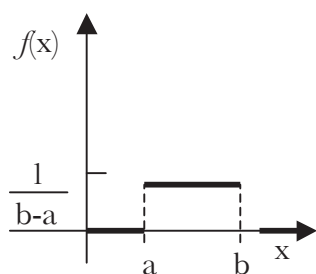
$$E(x) = \int_0^1 \int(x) dx = \int_0^1 3x^3 dx = 3/4$$

VARIABLES ALEATORIAS:

Distribución uniforme

La distribución uniforme tiene la función de densidad probabilística siguiente:

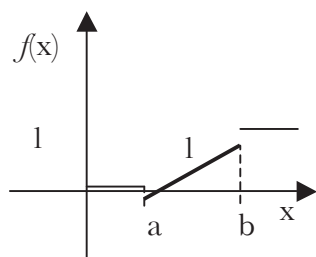
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



(la probabilidad de que la variable aleatoria x esté fuera del intervalo $[a,b]$ es cero y dentro del intervalo es $1 \setminus (b-a)$)

La función de distribución acumulada se expresa como:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$



Ejemplo: Suponga que la carga de 3 camiones que siguen una distribución uniforme entre 600 y 700 arrobas. Mediante esta distribución simule la carga que tendrán.

Si x es la variable aleatoria uniforme (carga de un camión en arrobas) entonces:

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}, \text{ donde } a = 600 \text{ y } b = 700$$

Pero como $f(x) \in [0,1]$ generemos 3 números aleatorios en dicho rango y entonces simulamos la carga.

Camión 1 x_1 . Número aleatorio (de una tabla) = 0,842

Si $f(x_1) = 0,842$, entonces

$$0,842 = \frac{x_1 - 600}{700 - 600} \Rightarrow x_1 = 684 \text{ arrobas}$$

Camión 2 x_2 . Número aleatorio = 0,105

Si $F(x_2) = 0,105$ entonces

$$0,105 = \frac{x_2 - 600}{700 - 600} \Rightarrow x_2 = 611 \text{ arrobas}$$

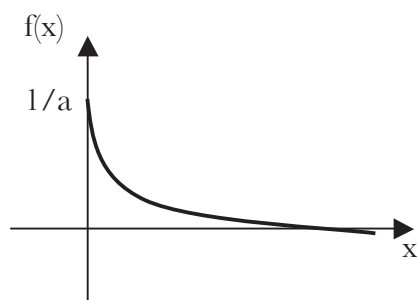
Camión 3 Se deja como deber:

b) Distribución Exponencial

La distribución de densidad probabilística de una variable aleatoria x con distribución exponencial es:

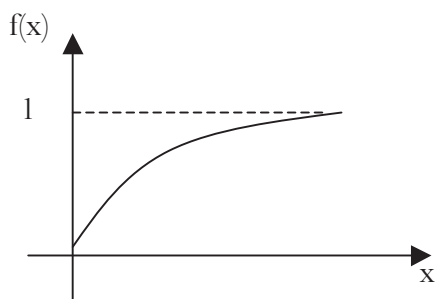
$$f(x) = 1/a \cdot e^{-x/a} \text{ para } x \geq 0$$

donde a = media de la distribución exponencial



La función de distribución acumulada es:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{a} e^{-x/a} dx = -e^{-x/a} \Big|_0^x \\ = -e^{-x/a} + 1$$



$$F(x) = -e^{-x/9} + 1$$

Sustituyendo por un número aleatorio y resolviendo

$$R = -e^{-x/9} + 1$$

$$e^{-x/9} = 1 - R$$

Pero $(1-R)$ es un número aleatorio

$$e^{-x/9} = R$$

$$x = -a \ln R$$

Y de esta forma generamos números aleatorio exponenciales

Ejercicios:

1) Simule el tiempo entre llegadas de 2 buques al puerto de Guayaquil si siguen la distribución exponencial con medio de 10 horas

$$\text{Sea } R_1 = 0,3579$$

$$x_1 = -10 \ln(0,3579) = 10,27 \text{ horas}$$

(es el tiempo entre llegadas del primer buque)

$$R_2 = 0,7349$$

$$x_2 = -10 \ln(0,7349) = 3,09 \text{ horas.}$$

Existen otras leyes de distribución que no están al alcance del curso.

2) En cierta comunidad, la probabilidad de que una persona de 70 años llegue a los 80 es 0,64.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene 70 años y es miembro de esta comunidad muera dentro de los próximos 10 años?

E- suceso de que una persona de 70 años viva más de 10 años

E¹- complemento, es el suceso de que una persona de 70 años muera dentro de los próximos 10 años.

$$p(E) = 0,64$$

$p(E^1) = 1 - p(E) = 0,36$ es la probabilidad de que una persona de 70 años muera dentro de los próximos 10 años

3) En una cierta comunidad el 30% de las personas son fumadoras, el 55% son bebedoras y el 20% tanto fumadoras como bebedoras. Si pide encontrar las probabilidades de:

- que una persona fuma pero no beba
- ni fume ni beba
- fume o no beba

Tenemos la tabla siguiente:

	Fuma	No Fuma	Total
Bebe	0,20		0,55

Sea F el suceso de que fume

B el suceso de que tome

$$p(F)=0,3; \quad p(B)=0,55$$

$$p(F \cap B)=0,2$$

Completen la tabla dejando para último la región sombreada

	Fuma	No Fuma	Total
Bebe	0,20	$0,55-0,2=0,35$	0,55
No Bebe	$0,3-0,2=0,1$	$0,45-0,1=0,35$	$1-0,55=0,45$

Luego

	F	F ¹
B	0,2	0,35

a) probabilidades de que fume y no beba:

$$p(F \cap B^1) = 0,1$$

b) probabilidad que ni fume ni beba

$$p(F^1 \cap B^1) = 0,35$$

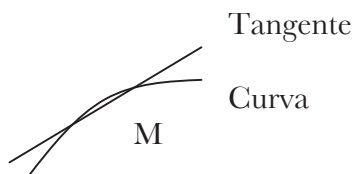
c) probabilidad de que fume o no beba:

$$\begin{aligned} p(F \cup B^1) &= P(F) + P(B^1) - P(F \cap B^1) \\ &= 0,3 + 0,45 - 0,1 \end{aligned}$$

$$p(F \cup B^1) = 0,65$$

Derivadas. Máximos y Mínimos

Si tenemos una curva y un punto sobre ella. En forma elemental la tangente a la curva se define como la recta que corta a la curva en un solo punto. Tal definición es a la vez demasiado restrictivo y amplia y no revela la esencia del problema.



Algunos ejemplos y sus tangentes

a) $y = 3x^2$ parábola con centro en $(0,0)$ y su tangente coincide con el eje x .

b) $y = |x|$ tangente en el eje x

c) $y = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ tangente en el eje x

d) $y = \sqrt[3]{x}$ tangente en el eje x

DEFINICIÓN DE DERIVADA:

Sea f una función real cualquiera. La razón de cambio (instantánea) de $f(x)$ en el elemento $x \in X$ se define como el número.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Suponiendo que este límite existe. Esta razón de cambio X_0 se denomina derivada de f en X_0 .

Diversos símbolos que denotan la derivada:

(Leibniz) $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{df}{dx}(x_0)$

(Lagrange) y' o $f'(x_0)$

(Cauchy) Dy o $Df(x_0)$

Apliquemos la derivada a funciones:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y = mx + b \\
 & f(x) = mx + b; f(x + \Delta x) = m(x + \Delta x) + b \\
 & f(x + \Delta x) - f(x) = (mx + m\Delta x + b) - mx - b \\
 & \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y = m$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & y = x^2 \\
 & \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2 \\
 & \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & f(x) = x^{3/2}; x \geq 0 \\
 & f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^{3/2} - 0}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{1/2} = 0 \quad \text{Derivada por la derecha igual a cero.}$$

Derivadas laterales, derivada por la derecha de f en x_0

$$\text{Si } \begin{matrix} f'(x_0) = a \\ + \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} f'(x_0) = b \\ - \end{matrix}$$

entonces: si $a = b$ la función f es derivable en x_0 y su derivada es $a = b = f'(x_0)$

Si $a \neq b$ la función no es derivable en el punto x_0 .

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular las derivadas laterales en 0

$$\begin{array}{l} f'_-(0) = 2 \\ - \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} f'_+(0) = 0 \\ + \end{array}$$

luego la función no tiene derivada en 0.

NOTA: En este curso suponemos un conocimiento básico de los temas e iremos a tocar sólo algunos aspectos de mayor interés. Damos por conocidas las reglas de la derivación.

DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS. DERIVACIÓN EN CADENAS

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dos funciones derivables, la función compuesta $y = f(g(x))$ tiene derivada con respecto a x :

$$D_x y = D_x [f(g(x))]$$

Sea $y = f(u)$; $u = g(x)$, entonces

$$D_x y = (D_u y) (D_x u)$$

Ejemplo:

1) Derivar $y = (2 - x)^3$ mediante la regla de la cadena

Sea

$$u = 2 - x$$

$$y = u^3$$

$$\text{Luego } y'_u = 3u^2$$

$$u'_x = -1$$

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

$$D_x y = 3u^2 (-1) = -3u^2$$

$$D_x y = -3(2 - x)$$

2) $y = (x^3 + 8)^{2/3}$. Derivar por la regla de la cadena

Sea $y = u^{2/3}$ $u = x^3 + 8$

$$y'_u = 2/3 u^{-1/3} \quad u'_x = 3x^2$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2/3 u^{-1/3} (3x^2)$$

$$y'_x = 2/3 (x^3 + 8)^{-1/3} (3x^2)$$

$$y'_x = \frac{2x^2}{(x^3 + 8)^{1/3}}$$

Ejercicios:

1) $y = \ln [\sec(x)]$

$$y' = \frac{1}{\sec(x)} \cdot \cos(x) = \cot(x)$$

2) $y = \log_3 e^{2x}$

$$y' = \frac{1}{e^{2x}} \cdot 2e^{2x} \cdot \log_3 e$$

3) $y = \ln(\ln(x))$ $x > 0$; $x \neq 1$

$$y' = \frac{1}{x \ln x}$$

4) $y = \frac{(x^2 + 1)^5}{(x^2 - 1)^6}$

$$y' = \frac{2(x^2 + 1)(x^2 - 1)^4}{(x^2 - 1)^7}$$

5) $y = \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^3 (x + 3)^4}$

Aplicando logaritmos

$$\log y = 2 \log (x + 1) - 3 \log (x + 2) - 4 \log (x + 3)$$

Derivando

$$y^1 = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}$$

$$y^1 = -y \frac{(5x^2 + 14x + 5)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$y^1 = - \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} \frac{5x^2 + 14x + 5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$y^1 = - \frac{(5x^2 + 14x + 5)(x+1)}{(x+2)^4 \cdot (x+3)^5}$$

$$6) y = e^{\cos x} \cdot (\sin x)$$

$$y^1 = (\cos x) e^{\cos x} + e^{\cos x} (-\sin x) (\sin x)$$

$$y = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$$

Máximo y Mínimo

Teoría de la optimización

La teoría clásica de la optimización desarrollo el uso del cálculo diferencial puntos extremos de máximo o número sujeto a pensiones de restricciones o no .

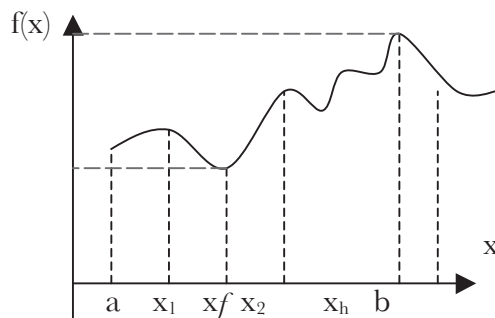
Ejemplo de aplicación a la económica: una empresa puede perseguir maximizar su beneficio p , esto es, maximizar la diferencia entre el ingreso total I y el coste total C . Suponiendo que estos sean funciones del nivel de producción Q entonces:

$$\underbrace{p(Q)} = I(Q) - C(Q)$$

Objetivo
O maximizar $\left\{ \begin{array}{l} Q - \text{variable independiente (mínima elección)} \\ \text{El problema entonces se traduce en encontrar el nivel de } Q \text{ tal que} \\ \text{haga a } p \text{ máximo.} \end{array} \right.$

Problema extremos sin restricciones

Sea $f(x)$ una función en un intervalo $[a,b]$ esta función puede tener extremos (máximos o mínimo) absolutos, globales, extremos locales o relativo



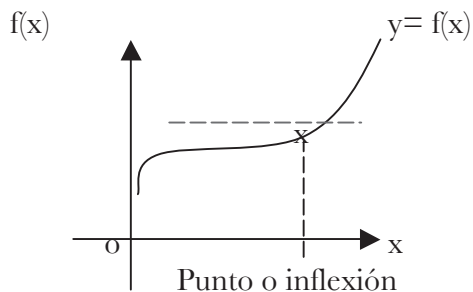
máximo absoluto = x_n

mínimo absoluto en x_f

máximos locales en x_1 y x_2

$f(x_n)$
 $f(x_f)$
 $f(x_1), f(x_2)$

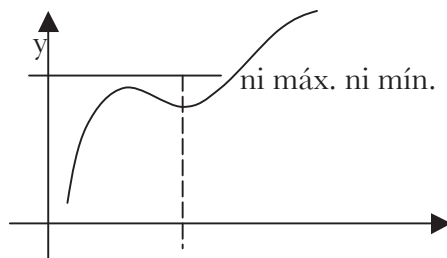
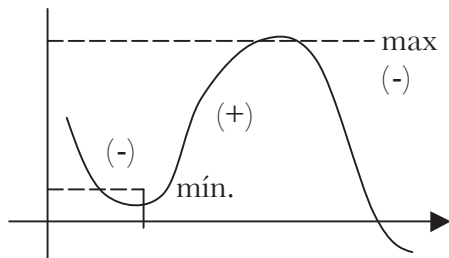
Un punto de inflexión o punto silla es aquel en el cual la pendiente es cero (gradiente) y no es un punto extremo (ni de máximo ni de mínimo)



Criterio de la primera derivada

Si la derivada primera de una función $f(x)$ en $x=x_0$ es $f'(x_0) = 0$, entonces el valor de la función en x_0 , $f(x_0)$, será:

- Un máximo relativo si la derivada $f'(x)$ cambia de positivo a negativo al pasar de un punto inmediato a la izquierda de punto a una inmediatamente a la derecha.
- Un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia su signo de negativo a positivo al pasar de un punto inmediatamente a la izquierda, a una de la derecha de x_0 .
- Ni máximo ni mínimo relativo $f'(x)$ tiene el mismo signo a izquierda y derecha de es:



Ejemplo:

- 1) Encontrar los extremos relativo de la función:

$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

Encontremos el valor crítico

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$$

Resolviendo $3x^2 - 24x + 36 = 0$

$$\begin{array}{rrr} 3 & -18 & -6 \\ 1 & -6 & -6 \\ & -24 & \end{array}$$

$$(3x - 6)(x - 6) = 0$$

Valores crítico

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 6$$

Sea

$$x_1 = 2, f'(2) = 0 \quad y f(2) = 40$$

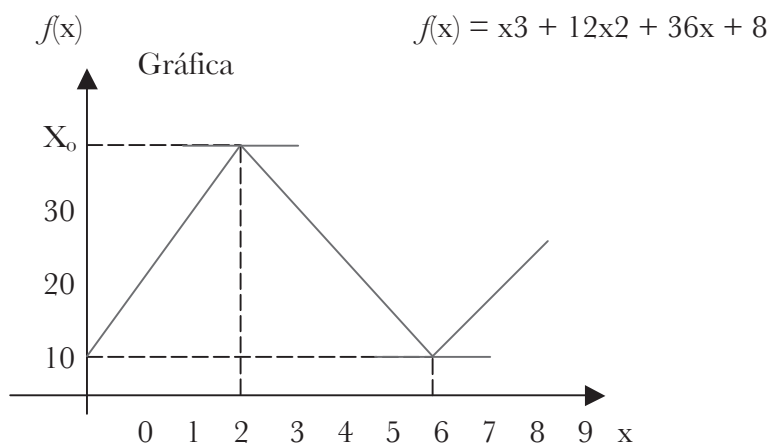
$$x_2 = 6, f'(6) = 0 \quad y f(6) = 8$$

Ahora $f'(x) > 0^{(+)}$ si $x < 2$

$f'(x) < 0^{(-)}$ si $x > 2$ (+) a (-) hay un máximo relativo

$f'(x) < 0^{-}$ si $x > 6$

$f'(x) > 0^{+}$ si $x < 6$ (-) a (+) hay un mínimo relativo



2) Hallar el extremos relativo de la función de coste medio

$$CM = f(Q) = Q^2 - 6Q + 8$$

$$f'(Q) = 2Q - 6 = 0$$

$$Q = 6/2 = 3 \text{ punto extremo}$$

Análisis de la 1ra. derivada

$$f'(x) < 0^- \Rightarrow Q < 3 \quad \frac{3}{(-) \text{ a } (+) \text{ hay un mínimo relativo en } f(2,5) = 1,75}$$

$$f'(x) > 0^+ \Rightarrow Q > 3$$

$$Q^2 - 6Q + 8 = 0$$

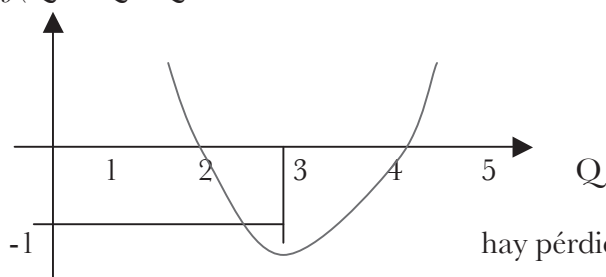
1	-2	-3	$(Q-4)(Q-2) = 0$
1	-3	-2	$Q_1 = 4$ ceros
	-5		$Q_2 = 2$

$$f(3) = 3^2 - 6(3) + 8$$

$$f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$$

Gráfico

$$f(Q) = Q^2 - 6Q + 8$$



hay pérdidas en 2, 43

Criterio de la Segunda Derivada

Si la derivada primera de una función f en $x = x_0$ es $f'(x_0) = 0$, entonces el valor de la función en x_0 será:

- $f(x_0)$
- a) Un máximo si $f''(x_0) < 0$
 - b) Un mínimo si $f''(x_0) > 0$

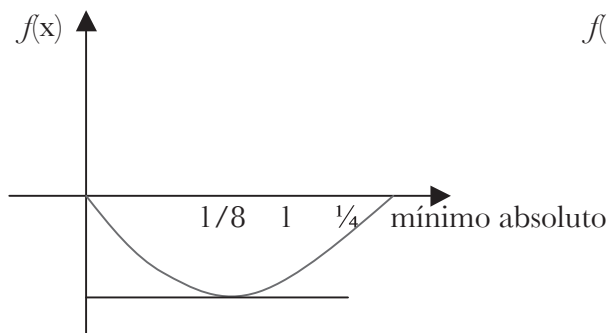
1) Ejemplo:

Sea $f(x) = 4x^2 - x$ encuentre sus puntos extremos

$$f'(x) = 8x - 1 = 0$$

$$x_0 = 1/8 \text{ posible punto extremo}$$

$$f''(x_0) = 8 > 0 \text{ } f(x) \text{ tiene un mínimo en } x_0 = 1/8$$



$$\begin{aligned}
 f(1/8) &= 4(1/8)^2 - 1/8 \\
 &= 1/8[4/8 - 1] \\
 &= 1/8[1/2 - 1] \\
 &= 1/8[-1/2] = -1/16
 \end{aligned}$$

- Una condición necesaria para que x_0 sea un punto extremo de $f(x)$ es que $f'(x) = 0$
- Una condición suficiente para que x_0 sea un extremo de $f(x)$ es que la matriz Hessiana evaluada en x_0 sea:
- a) Definido positiva cuando x_0 es mínimo
 - b) Definido negativo cuando x_0 es máximo

Generalización de los Máximos y Mínimo

Sea $f(x)$ una función no lineal y de varias variables

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que en punto sea un punto extremo es que $f'(x_0) = 0$ y que la matriz del Hessiano H evaluado en x_0 sea:

- a) Definida positiva cuando x_0 es un punto de mínimo
- b) Definida negativa cuando x_0 es un punto de máximo

Matriz del Hessiano

$$H_{x_0} = \begin{pmatrix} T(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{x_0}$$

$4/x_0$ es definido positivo en x_0 si $Q(x) = x_0^T 4/x_0 - x_0$ forma cuadrática

$$Q(x) > 0 \quad x_0 \rightarrow \text{punto de mínimo}$$

$4/x_0$ es definido negativo en x_0 si $Q(x) = x_0^T 4/x_0 - x_0$ forma cuadrática

$$Q(x) < 0 \quad x_0 \rightarrow \text{punto de máximo}$$

DEFINICIÓN DE FORMA CUADRÁTICA

$$\text{Si } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{1 \times n} \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)_{1 \times n}$$

$$\text{Si } H_x = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Se le llama forma cuadrática a:

$$Q(x) = x^T \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = (x_1 \dots x_n)$$

$\begin{pmatrix} 1 \times n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n \times n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n \times 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Consideremos la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Encuentre el óptimo:

CONDICIÓN NECESARIA:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2x_1 &= 0 & x_1 &= \\ x_3 - 2x_2 &= 0 & x_2 &= x_{3/2} \\ 2 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2 &= 3/2 x_3 \\ x_3 &= 4/3 \\ x_2 &= 2/3 \end{aligned}$$

CONDICIÓN SUFICIENTE:

$$H_{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -2$$

$$H/x_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz del Hessiano}$$

CÁLCULO DE LA CONDICIÓN SUFICIENTE

$$x_0^T H x_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$1 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 1$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4/3 + 4/3 & 2/3 - 8/3 \\ -1 & 0 & -6/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = -1 + 0 + (4/3)(-6/3)$$

$$= -1 - 8/3 = \frac{-3 - 8}{3} = \frac{-11}{3}$$

$$= \frac{-3 - 16}{6} = \frac{-19}{6}$$

$$x_o^T H x_o < 0 \text{ Definido negativo}$$

$$x_o \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \text{ es de máximo}$$

El valor máximo de la función

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 1/2 + 2(4/3) + (2/3)(4/3) - (1/2)^2 - (2/3)^2 - (4/3)^2 \\ &= 1/2 + 8/3 + 8/9 - 1/4 - 4/9 - 16/9 \\ &= 57/36 \text{ Pto. de Máximo} \end{aligned}$$

Ejercicios:

1) Sea la función

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 x_2 + 3x_2^2$$

Encuentre el punto de máximo o mínimo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_2 = 0 \quad x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_1 + 6x_2 = 0 \quad x_1 = 0$$

$$x_o = (0, 0)$$

$$4 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x_o^T 4 x_o = 0 \quad \text{Luego nos da un punto de silla no hay ni máximo, ni mínimo.}$$

2) Ejemplo:

Sean las funciones de una empresa:

$I(Q)$ – ingreso total

$C(Q)$ – costo total

Q - cantidad de producción

Definamos la función de beneficio máximo

$$B(Q) = I(Q) - C(Q)$$

Entonces el objetivo será encontrar el nivel de producción Q que nos proporcione el máximo beneficio.

Cond. Necesaria: $\frac{dB(Q)}{dQ} = 0$

$$\frac{d[I(Q) - C(Q)]}{dQ} = \frac{dI}{dQ} - \frac{dC}{dQ} = 0$$

$I'(Q) = C'(Q)$ Luego la producción óptima Q^* implicará que el ingreso marginal se iguale al costo marginal.

Cond. Suficiente:

$$\frac{d^2B(Q)}{dQ^2} = I''(Q) - C''(Q) < 0 \quad Q^* \text{ (prod. de equilibrio)}$$

para que Q^* sea de máximo beneficio

$$I''(Q) < C''(Q)$$

CONCLUSIÓN

Si la tasa de cambio del Ingreso Marginal ($I'(Q)$) es menor que la tasa de cambio del costo marginal ($C'(Q)$) el nivel de producción donde Ingreso marginal = costo marginal, entonces esa producción maximizará el beneficio.

3) Ejemplo:

Siendo

$$I(Q) = 1200Q - 2Q^2$$

$$C(Q) = Q^3 - 61,25Q^2 + 1528,5Q + 200$$

Encuentre el valor de la producción que de máximo beneficio (Q toneladas/semana de producción).

$$B(Q) = 1200Q - 2Q^2 - (Q^3 - 61,25Q^2 + 1528,5Q + 2000)$$

$$B(Q) = 1200Q - 2Q^2 - Q^3 + 61,25Q^2 - 1528,5Q - 2000$$

$$B(Q) = -Q^3 + 59,25Q^2 - 328,5Q - 2000$$

$$\frac{dB(Q)}{dQ} = -3Q^2 + 118,5Q - 328,5 = 0$$

Solución

$$Q^1 = 3$$

$$Q^2 = 36,5$$

$$d^2B(Q) = -6Q + 118,5 \quad -6Q + 118,5/3 = > 0 \text{ Pto. Mín. beneficio}$$

$$-6Q + 118,5/6,4 = < 0 \text{ Pto. Máx. beneficio}$$

$Q^* = 36,5$ (toneladas/semana) producen máximo beneficio

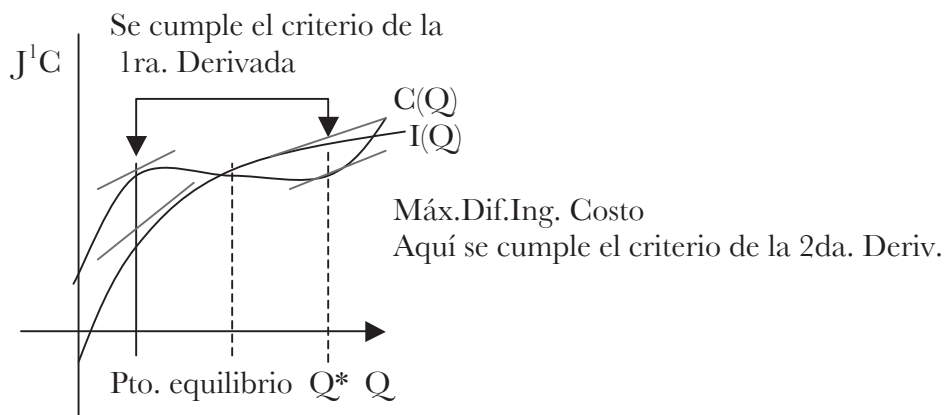
Máximo beneficio

$$B(36,5) = s/.16.318,44 \text{ dólares/semana} \quad B^* = s/.18118,43$$

$$C^* = s/.23017,06$$

$$I^* = 41135,5$$

Se cumple el criterio de la
1ra. Derivada



Multiplicadores de Lagrange

Dada la función objetivo que quiere ser óptima

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeto a las restricciones

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$$

se forma la ecuación auxiliar:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - c] x_i$$

[a – multiplicadores logrange, función de Lagrange (Lagranginno)]

Condición necesaria.- para obtener el posible punto de máximo o mínimo

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & i = 1, n \\ \frac{\partial L}{\partial l} = 0 & x_o - \text{posible extremo} \end{cases}$$

Condición suficiente:

$$H^B = \begin{pmatrix} O & P \\ P^T & Q \end{pmatrix}_{(m+n \times m+n)}$$

n – número de variables

m – número de restricciones

$P_{m \times n}$ – Matriz de los coeficientes de las restricciones del problema

$O_{m \times m}$ – Matriz de ceros (número de restricciones)

$Q_{n \times n}$ – Matriz Hessiano de la funciones objetiva evaluada en

Condiciones Máxima:

Calcular (n-m) determinantes iniciándose en la orden (2m+1) y si dichas determinantes dan signo alterno, iniciándose en $(-1)^{m+1}$, entonces es el punto de máximo.

Condiciones Mínimo:

Calcular (n-m) determinante iniciándose en la de orden (m+1) y se dan el mismo signo que $(-1)^m$, entonces es el punto de mínimo.

Ejemplo:

1) Sea la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

sujeto de las restricciones $x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$
 $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

Encontremos el punto extremo:

$$L(x_1, x_2, x_3, l_1, l_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - l_1 [x_1 + x_2 + 3x_3 - 2] - l_2 [5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5]$$

Condiciones $\left\{ \begin{array}{l} \text{Necesaria y} \\ \text{Suficiente} \end{array} \right.$

Necesaria

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x^1} = 2x^1 - l^1 - 5l^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x^2} = 2x^2 - l^1 - 2l^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3l_1 - l_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l_1} = x_1 + x_2 - 3l_3 - 2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0 \\ 37/54 \quad \quad \quad l = (-4/81, 23/81) \end{array} \right.$$

resolviendo el sistema

$$x_o = \begin{pmatrix} 7/27 \\ 19/54 \end{pmatrix}$$

Calculo Hessiano

$$H^B = \begin{pmatrix} O & P \\ P^T & Q \end{pmatrix}_{(m+n \times m+n)}$$

$$n = 3$$

$$m = 2$$

$$HB = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)_{5 \times 5}$$

$$2m + 1 = 5 \text{ (orden)}$$

$$n - m = 1 \text{ (un solo determinante)}$$

$$\begin{array}{l} |H^B| = 460 > 0 \\ \text{orden} \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Desarrollando por menores el} \\ \text{Hessiano de orden 5 (completo)} \end{array} \right]$$

$$(-1)^m = (-1)^2 > 0$$

y los menos de orden 1 son positivo $\Rightarrow$ estamos en un caso de mínimo (determinante de orden 5)

$$2m+1 = 5$$

($n-m=1$) el último Hessiano de orden 5 de cumplir con el signo

$$(-1)^m = +1 \quad |H^B| > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Matrices y Sistema de Ecuaciones Lineales

Una ecuación de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = c_1$$

se llama ecuación lineal en n variable

$$c_1, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (solución)}$$

Definición a Sistema de Ecuaciones Lineales

Un conjunto de m ecuaciones lineales en n incógnitas se llama sistema de ecuaciones lineales

La solución del sistema es el conjunto n uplos ordenados, que son soluciones de los m ecuaciones simultáneamente, es decir: la solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones.

Notación de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad 1$$

n - número de incógnitas

m - número de ecuaciones

a_{ij} - coeficiente real de la i en la variable j

b_i - término independiente de la ecuación

x_i - variable i - esima, los valores que toman las n variables que satisface al sistema son llamados la solución.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se llama Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneas cuando de los términos independientes son iguales a ceros;

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

En esencia, hay tres tipos de componentes en el sistema de ecuaciones del tipo 1)

1^{ro} el conjunto de los coeficientes a_{11} (constantes)

2^{da} el conjunto de variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$

3^{ro} el conjunto de los términos independientes (constantes) $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$

para representar a estos 3 componentes definiremos el concepto de matriz .

Matriz: se llama matriz a un arreglo rectangular de números ordenados en la forma siguientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El orden de esta matriz es $(m \times n)$ [números de filas x número de columnas]. A los elementos a_{ij} se los llaman elementos de la matriz.

A los valores m y n se les denominan dimensión de la matriz.

Si $m \neq n$ se le llaman matriz rectangulares y cuando $m = n$ se le llaman matriz cuadrado

Cuando $n=1$ a la matriz $m \times 1$ se le denomina matriz columna y si $m=1$ a la matriz $1 \times n$ se le llaman matriz fila.

De esta forma podemos definir los componentes en formas matriciales

1^{ro} Matriz de los coeficientes del sistema :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2^{do} Matriz columna de los variables

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad n \times 1$$

3^{ro} Matriz columna de los términos independiente

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Veamos las diferentes operaciones con matrices para luego regresar a nuestros sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos mediante los diversos métodos más utilizados.

Notas : Se considera que existe la base de conocimientos sobre las matrices, por lo que nos dedicaremos a atacar solo algunos aspectos de interés del tema.

Operaciones con matrices

Sean dos matrices de iguales dimensiones:

$$A_{m \times n} = (a_{ij}) \text{ y } B_{m \times n} = (b_{ij})$$

a) Se define la suma de las matrices $A+B$ como una nueva matriz C de idéntica dimensiones $m \times n$ y que cumple:

$$\begin{aligned} C &= A+B \\ (c_{ij}) &= (a_{ij}) + (b_{ij}) \\ (c_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

b) Se define el producto de un escalar $K \in \mathbb{R}$ por una matriz $A_{m \times n}$ como una nueva matriz $C_{m \times n}$ tal que

$$\begin{aligned} K A_{m \times n} &= C_{m \times n} \\ K(a_{ij}) &= (ka_{ij}) = (c_{ij}) \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

c) Se define la multiplicación de las matrices $A_{m \times n} \times B_{n \times k}$ como una nueva matriz $C_{m \times k}$ tal que cumpla:

$$\begin{aligned} A_{m \times n} \times B_{n \times k} &= C_{m \times k} \\ (a_{ij}) \times (b_{ik}) &= (c_{ik}) \end{aligned}$$

donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

Debe notarse que las matrices deben ser compatibles para el producto es decir:

Si $A_{m \times p}$ y $B_{p \times n}$ pueden ser multiplicados solo si $p=q$ y su producto tendrá la dimensión $m \times n$. (filas de A y columnas de B)

d) Traspuesta de una matriz. Una matriz $A_{m \times n}$ posee una matriz traspuesta $A_{n \times m}$. La matriz traspuesta de $A_{m \times n}$ es otra matriz de orden $n \times m$ que tiene por filas las columnas de $A_{m \times n}$ y por columnas las filas de $A_{m \times n}$.

e) La cuestión de la división:

Aunque las matrices, como los números, pueden ser objeto de operaciones de suma, resta y multiplicación (sujetos a las condiciones de compatibilidad o conformidad), no es posible dividir una matriz por otra. Es decir, no podemos escribir A/B .

El cociente a/b (con $b \neq 0$), de dos números a y b pueden escribirse alternativamente como ab^{-1} o $b^{-1}a$, donde b^{-1} representa el inverso o recíproco de b .

Como $ab^{-1} = b^{-1}a$, la expresión cociente a/b pueden usarse para representar tanto ab^{-1} como $b^{-1}a$. En el caso de las matrices esto es diferente. Para aplicar el concepto de inversa a las matrices, en ciertos casos podemos (como veremos más adelante) definir una matriz B^{-1} como la inversa de la matriz B . Pero del análisis de la condición de compatibilidad o conformidad se deduce que, aunque AB^{-1} esté definido, no podemos asegurar que $B^{-1}A$ también lo esté. Aun cuando AB^{-1} y $B^{-1}A$ estén ambas realmente definidos, todavía puede que no representen el mismo producto.

MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA $A_{n \times n}$

La matriz inversa $A^{-1}_{n \times n}$ de una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ es una matriz que cumple la condición:

$$A_{n \times n} A^{-1}_{n \times n} = I_{n \times n} = A^{-1}_{n \times n} \times A_{n \times n}$$

Donde a la matriz $I_{n \times n}$ se le llama matriz idéntica y tiene la forma:

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots \dots 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$A_{n \times n}$ está pre y postmultiplicada por A^{-1} , el producto será la misma matriz identidad, siendo esta una excepción a la regla de que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Para el cálculo de la de determinante debemos definir dos elementos fundamentales:

Determinantes de una matriz

La determinante de una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ se define como un escalar relacionado en forma unívoca asociado con esa matriz. Podemos hablar de una función del conjunto de las matrices cuadradas en el conjunto de los números reales.

Las propiedades fundamentales de una determinante son:

- Si en $A_{n \times n}$ se intercambiar dos filas, entonces el determinante cambia de signo.
- Si una matriz $A_{n \times n}$ tiene 2 filas o 2 columnas iguales, entonces el determinante es igual a cero.
- Si todas las componentes de una fila o de una columna de la matriz $A_{n \times n}$ se multiplican por un escalar K , entonces la determinante de la matriz resultante es K veces el determinante de A .
- Si dos filas o dos columnas de una matriz $A_{n \times n}$ son proporcionales, entonces el determinante de A es igual a cero.
- Si las componentes de una fila (columna) de una matriz A se multiplican por un escalar K y se suman a las componentes de otra fila, entonces el determinante no se altera.

Si $A^{ij} = -1^{(i+j)} \det (\text{matriz } A_{n \times n} \text{ luego de eliminarlo la fila } i \text{ y la columna } j) n^{-1} \times n^{-1}$

Entonces:

$$\text{Det } A_{n \times n} = |A_{n \times n}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A^{ik}$$

Veremos en la práctica métodos sencillos para calcular la determinante de una matriz $A_{n \times n}$ cuando $n=3$

Cofactor: Se le llama cofactor del elemento a_{ij} de la matriz $A_{n \times n}$ al elemento A^{ij} ya definido anteriormente. Es posible formar una matriz de cofactores que reemplace cada elemento a^{ij} en $A_{n \times n}$ por su cofactor A^{ij} . Esta matriz $C_{n \times n}$ es llamada la matriz de los cofactores.

Adjunto: Se define como matriz adjunta de una matriz $A_{n \times n}$ y se denota como $\text{adj } A_{n \times n}$ a la matriz traspuesta de la matriz de los cofactores.

$$\text{Adj } A_{n \times n} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1n} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1} & A^{n2} & \dots & A^{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Traspuesta}$$

Se define la matriz Inversa de una matriz cuadrada $A_{n \times n}$, siempre que sea no singular, es decir, $\det A_{n \times n} \neq 0$:

Inversa de A = $\frac{\text{traspuesta de la matriz de cofactores}}{\text{determinante de A}}$

$$\text{Inversa de } A = A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

A^{-1} es una matriz cuadrada que cumple que
 $A^{-1} A = A A^{-1} = I$

Ejercicios:

1) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ encuentre sin matriz inversa

Primer paso probar la no singularidad de A.

Se dice que una matriz cuadrada es no singular si su determinante es diferente de cero

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Segundo paso calcular la matriz adjunta de A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{22} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & -3 \\ -15 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

adj A = traspuesta de la matriz de cofactores
 Calcular la inversa como la matriz adjunta dividir por la determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 15 \\ -2 & 7 & -5 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Comprobar $A^{-1}A = AA^{-1} = I_{3 \times 3}$

2) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ compruebe que la matriz

la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

3) Dadas las matrices

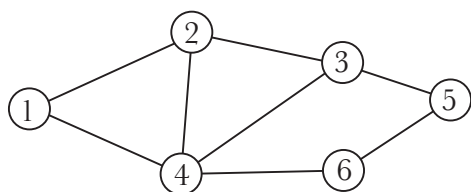
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule :

- $A+B$
- $B-2A$
- $3(2A+B)$
- A^2+AB-B^2

4) Dado el diagrama de la red de comunicación por carreteras entre 6 ciudades se quiere:

a) represente el mismo en forma material para los vínculos entre las ciudades



5) Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Encuentre la matriz C que cumpla $AC=B$

Sistema de Ecuaciones Lineales. (S.E.L.)

Definición: Sistemas de Ecuaciones lineales equivalentes. Dos sistemas de ecuaciones lineales en las mismas variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ son equivalentes, si ambos son compatibles y tienen el mismo conjunto solución o si ambas son incompatibles.

Definición: S.E.L. compatibles si su conjunto solución es no vacío. Los S.E.L. compatibles se clasifican en:

Determinados – si tienen solución única

Indeterminados – si tienen más de una solución.

Regla:

Si en un sistema de ecuaciones lineales se realizan las siguientes transformaciones:

1. Permitir 2 ecuaciones del sistema
2. Multiplicar una ecuación del sistema por un número real diferente de cero.
3. Sustituir una ecuación del sistema por una combinación lineal, con coeficiente no todos nulos, de la ecuación con otra ecuación del sistema.

El sistema de ecuaciones lineales obtenido es equivalente al sistema dado.

Exposición general de métodos de solución de S.E.L.

- 1) Método de Gauss: Es un método general para la resolución de S.E.L., es decir que su aplicación nos permitirá determinar si el sistema es o no compatible y en caso de serlo, si es determinado o indeterminado y permitirá obtener la solución. Consiste en transformar el sistema de ecuaciones en otro equivalente mediante las transformaciones coherentes

Pasos a seguir :

- 1) Si $a_{11} \neq 0$ se convierte el sistema en uno equivalente que posea la 1ra ecuación normal y elimine el primer elemento mediante transformaciones elementales, de las restantes ecuaciones del sistema.
- 2) En el sistema encontrado no se utiliza la primera ecuación. Si $a_{22} = 0$ procede a hacer las transformaciones para encontrar un sistema equivalente que a partir de la tercera ecuación carezca del término en x_1 y x_2 . Si $a_{22} = 0$ se busca un cambio de ecuaciones (excepto la 1ra) y se procede como se dijo anteriormente.

El procedimiento terminará cuando se obtenga algún de las situaciones siguientes:

- a) Si los coeficientes de una de las ecuaciones del sistema son todos ceros, pero el término independiente de esa misma ecuación es diferente de cero, el sistema será incompatible.
- b) Si no ocurre lo anterior se obtendrá un sistema (triangular) con k ecuaciones y se cumple que:

Si $k < n$ (número de variables) el sistema es indeterminado.

Si $k = n$ el sistema es determinado

En ambos casos se procede a encontrar las soluciones despejando de las últimas ecuaciones del sistema hasta la primera, obteniéndose las variables en el orden $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

- 2) El método de Gauss puede ser aplicado a la matriz ampliada del sistema, transformándola en matriz escalón equivalente, en forma similar al método anterior pero aplicado en forma matricial.

- 3) Para matrices cuadradas $m = n$ se pueden aplicar varios métodos.

- a. Método de la matriz inversa.

Si $A_{n \times n} X_{n \times 1} = b_{n \times 1}$ es el S.E.L. representado matricialmente, entonces si la matriz A es no singular: $\det A \neq 0$

Solución $X_{n \times 1} = A^{-1} B_{n \times 1}$

- b. Método de Cramer para sistemas con matriz A no singular.

Calcular determinante del sistema $= \det A_{n \times n}$

Calcular determinante de $x_i = \det A_i$

Donde A_i es la matriz que se obtiene al sustituir en la columna i de A el valor del término independiente del sistema (b).

Calcular la solución: $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$

- c. Método de Jordan. Si se tiene el S.E.L.

$A_{n \times n} X_{n \times 1} = b_{n \times 1}$
 Donde $\det A_{n \times n} \neq 0$

Se coloca la matriz ampliada y mediante transformaciones elementales realizadas a sus filas y columnas, junto con la matriz ampliada, se transforma la matriz $A_{n \times n}$ en la matriz unitaria $I_{n \times n}$, cuando esto se logre en la columna correspondiente a la columna $b_{n \times 1}$ se obtendrá la solución.

$(A_{n \times n} : b_{n \times 1})$
 Se transforma Se transforma
 $A_{n \times n}$ en la $b_{n \times 1}$ en la
 I_n solución

- 4) Existen otros métodos que no van a ser estudiados en este folleto.

APLICACIONES AL BALANCE DE REACCIONES QUÍMICAS

Balancear una reacción química significa calcular cuántas moléculas de cada sustancia deben mezclarse y cuántas moléculas de cada sustancia se obtienen como resultado.

Para esto utilizaremos dos tipos de matrices y la condición de Balance Material:

Matriz Sustancia: Esta matriz tendrá por filas los átomos de las sustancias elementales y como columnas la composición de átomos que habrá en cada sustancia. Si se tienen n – átomos y m sustancias $S_{n \times m}$ será la matriz.

Matriz de coeficientes estequiométricos: matriz fila formada por la coeficientes que balancean la reacción, con la convención de que los que aparezcan en el miembro derecho tendrán signo menos.

$C_{1 \times m}$
 Condición de Balance: $S_{n \times m} C_{m \times 1}^t = 0$

Ejemplos:

1) Balancear: $x C_6H_{12}O_6 \Rightarrow y C_2H_5OH + z CO_2$

Matriz sustancia:

Se tienen tres sustancias y tres átomos diferentes

1ra. Sustancia $C_6H_{12}O_6$
 2da. Sustancia C_2H_5OH
 3ra. Sustancia CO_2

Átomos C,H y O

Matriz Sustancia

Se tienen tres sustancias y tres átomos diferentes

1ra. Sustancia $C_6H_{12}O_6$

2da. Sustancia $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

3ra. Sustancia CO_2

Entonces C, H, y O

	1ra.	2da.	3ra.	
C	6	2	1	
H	12	6	0	= 5
O	6	1	2	3x3

Matriz de coeficientes:

$$C = (X - Y - Z)_{1 \times 3}$$

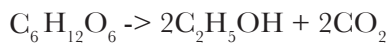
Condición de Balance:

$$\begin{bmatrix} \text{S C}' = 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{-Y} \\ \text{-Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

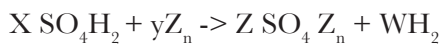
$$\begin{cases} 6X - 2Y - Z = 0 \\ 12X - 6Y = 0 \\ 6X - Y - 2Z = 0 \end{cases}$$

resolviendo $X = 1; Y = 2; Z = 2$

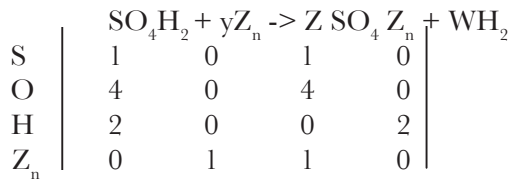
La ecuación balanceada



2) Balancear



Matriz sustancia:

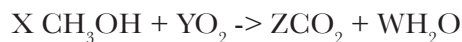


Matriz de coeficientes: (X,Y,-Z,-W)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -Z \\ -W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo $X = Y = Z = W = 1$

3) Balancear



La matriz de insumo-producto, desarrolladas por W. Leontief (premio Nobel en Economía en 1973 por el desarrollo de esta teoría) indican las interrelaciones entre oferta y demanda que se dan en los diferentes sectores de una economía durante algún tiempo. La frase “Insumo-Producto” es utilizada ya que las matrices muestran los valores de los productos de cada industria que son vendidos como insumos tanto a industrias como a consumidores finales.

Veamos un ejemplo muy simplificado: Supongamos una economía que posee sólo 2 industrias llamadas A y B. Consideremos el término otros factores de producción a diversos costos relacionados con las industrias estudiadas.

Sea la matriz de Insumo-Producto siguiente:

	Consumidores Industria A	(Insumo) Industria B	Demanda Final	Totales
Productores (producto)				
Industria A	240	500	460	1200
Industria B	360	200	940	1500
Otros factores de producción	600	800	-	
Totales	1200	1500		

Descripción de la matriz Insumo-Producto:

Filas: Cada fila muestra las compras del producto de la industria representada por los sectores industriales y los consumidores para uso final.

En el ejemplo, los valores dados en millones de dólares, la industria A de su producción total Insume 240 (\$) (para su uso interno), 500 fueron insumos cedidos a la empresa B y 460 fueron directamente a satisfacer la demanda final, luego su producción total fue de $(240 + 500 + 460 = 1200)$

Columnas: Cada columna da el valor de lo que compró como insumo de cada una de las industrias así como lo gastado por otros conceptos. La industria A a fin de producir 1200 unidades compró 240 unidades de su producción, 360 de la producción de B, tiene gastos (ej. mano de obra u otros) por 600 unidades.

Nota: El análisis de insumo.- producto permite estimar la producción total de cada industria cuando existe un cambio en la demanda final mientras la esfera básica de la economía permanece igual. Es importante suponer que cada industria, la cantidad gastada en cada insumo por cada dólar de producción permanece fija. Ej. Con una producción de 1200 unidades A compra 240 unidades de ella misma, 360 de la industria B y gasta 600 unidades en otros conceptos.

Por cada dólar de producción en A se gastará:

$$\frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \quad (= \$0.20 \text{ en A})$$

$$\frac{360}{1200} = \frac{3}{10} \quad (= \$0.30 \text{ en B})$$

$$\frac{600}{1200} = \frac{1}{2} \quad (= \$0.50 \text{ en otros})$$

Análogo para B se tiene:

	A	B	
A	1/5	1/3	Coeficientes de Insumo-Producto cuya suma por columnas es igual a 1.
B	3/10	2/15	
OTROS	1/2	8/15	

Suponga ahora que el valor de la demanda final cambia de 460 a 500 para A y de 940 a 1200 para B. Se quiere estimar el valor de la producción total de A y B para alcanzar a satisfacer las demandas.

Si X_A y X_B sean los nuevos valores de producción para A y B.

Valor de la prod. = Valor consumido + valor consumido + Valor consumido total de A
por A por B por demanda final

$$\begin{aligned} X_A &= 1/5 X_A + 1/3 X_B + 500 \\ X_B &= 3/10 X_A + 2/15 X_B + 1200 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/3 \\ 3/10 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/3 \\ 3/10 & 2/15 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

X matriz de producción

A matriz de coeficientes

C matriz de Demanda final

$$X = A X + C$$

$$X (I-A) = C$$

$$X = (I-A)^{-1} C$$

$(I-A)$ – matriz de Leontief

$$\text{Calculando } X = \begin{pmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{pmatrix}$$

Luego A debe producir 1404.49 unidades y B debe producir 1870.79 unidades.

Ejemplo 1:

		Industria			Demanda
		A	B	C	Final
Industria	A	240	180	144	36
	B				
	C				
Otras					
		120	72	240	--

Entradas en millones de dólares Determine la matriz de producción para la economía.

Solución

$$X_A = 692.5$$

$$X_B = 380$$

$$X_C = 495$$

Programación Lineal

INTRODUCCIÓN:

En esencia la programación lineal típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (es decir, óptima). Puede surgir este problema de asignación siempre que deba seleccionarse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizar esas actividades.

La programación lineal usa un modelo matemático para describir el problema de interés. El adjetivo “lineal” significa que requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean funciones lineales. La palabra “programación” no se refiere aquí a la programación de computadoras; más bien, es esencialmente un sinónimo de planificación.

Por tanto, la programación lineal comprende la planificación de actividades para obtener un resultado “óptimo”, es decir, un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma (según el modelo matemático) entre todas las alternativas factibles.

Breve introducción Histórica

Ya en los siglos XVII y XVIII Newton, Leibniz, Lagrange y Bernoulli trabajaban en problemas óptimos condicionados que desarrollaron el cálculo infinitesimal y el cálculo de las variaciones. Algunos estudiosos plantean que en principio era posible aplicar los métodos generales de optimización, en la teoría de los multiplicadores de Lagrange, por ejemplo en los problemas de programación matemática.

Posteriormente el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonodas Vitalyevich Kantarovitch publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y Kantarovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de *problema de Koopmans-Kantarovitch*.

En 1945 G. Stigler, plantea un problema particular, el de régimen alimentario optimal. En 1947, el problema general de programación lineal se formuló en términos matemáticos precisos por G.B. Dantzig. El término Linear Programming aparece por primera vez en una publicación del propio Dantzig. En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, G.B. Dantzig formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Department of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*).

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology, con Charnes y Cooper.

Respecto al método del simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en el año 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el *United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER*, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma IBM.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro Janos von Neuman (1903-1957), que en 1928 publicó su famoso trabajo Teoría de Juegos. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la Universidad de Princeton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El

Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año.

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo)

El problema general de la programación lineal (P.L.) puede ser descrito como sigue:

Dado un conjunto de m inecuaciones lineales o ecuaciones con n variables, se desea encontrar valores no-negativos de esas variables los cuales satisfagan el conjunto de restricciones y maximicen o minimicen una función lineal de las variables.

$$\text{Sean } x_i \geq 0 \quad i=1,n \text{ (variables no negativas)} \quad (1)$$
[illegible]

Modelación Matemática Aplicada || 81

$$\begin{array}{l} \text{max} \\ \text{o} \quad Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \\ \text{min} \end{array} \quad (3)$$

Notaciones: (1)= restricciones de no negatividad
 (2)= sistema de restricciones
 (3)= función objetivo
 x_i = variable y (incógnitas del sistema)
 a_{ij} = coeficientes tecnológicos (normas) de la restricción i -ésima y la variable j -ésima
 C_j = coeficiente de la función objetivo o costes de x_i .
 b_j = coeficientes o términos independientes.
 $\{<=>\}$ = signos de las restricciones que en cada caso debe ser $<=$,
 $>=$ o $=$.

Se llama solución del problema de P.L. al conjunto de valores que tomen las variables x_i de forma tal que se satisfaga el conjunto (2) o sistema de restricciones, es decir, que se satisfagan todas las inecuaciones del sistema.

Se llama solución factible del problema de P.L. que cumpla que todas sus variables son positivas. Es decir, una solución factible es cuando el conjunto de valores de las variables satisfacen a (1) y (2) simultáneamente.

Se llama solución factible óptima a toda solución que optimice la función objetivo (3).

Supuestos de la programación Lineal.

La programación lineal puede ser aplicada en una gran variedad de problemas, sin embargo tiene ciertas limitaciones que debilitan su aplicabilidad, entre otros éstos pueden ser :

- La proporcionalidad:

Una primera limitación de la programación lineal es el requerimiento de que la función objetivo y cada restricción deben ser lineales. Esto requiere que la medida de la efectividad y los recursos utilizados deben ser proporcionales al nivel de cada actividad (variable) conducida individualmente.

Los problemas de programación no lineal carecen de dicha proporcionalidad, aunque en ocasiones es posible resolver éstos con P.L., esto se presenta en casos especiales no constituyendo una regularidad.

- Aditividad:

Suponer que la medida de efectividad y cada recurso son usados directamente proporcionales al nivel de cada actividad individualmente, no garantiza suficientemente

la linealidad. Es necesario que la actividad sea aditiva con respecto a la medida de efectividad y cada recurso utilizado. En otras palabras la medida total de efectividad y cada recurso total se obtiene de la suma de las efectividades o de los recursos utilizados individualmente.

- **Divisibilidad:**

La solución óptima de un problema de P.L. debe tener valores reales de las variables, es decir, que si una variable de decisión debe tener un valor entero, entonces, la P.L. no garantiza esta solución, dado que al aproximar o truncar la solución real para hacerla entera la nueva solución puede no ser la óptima.

- **Determinística:**

Todos los coeficientes en el modelo de P.L. (a_{ij} , b_j y c_i) son asumidos constantes conocidas. Si el modelo de P.L. servirá para predecir condiciones futuras, los coeficientes utilizados deberán ser calculados sobre la base de predicciones futuras.

En términos generales la P.L. incluye los siguientes aspectos de interés para nuestro estudio:

- a) el planteamiento del problema.
- b) la solución gráfica (a modelos de 2 variables).
- c) la solución analítica.
- d) el análisis de post-optimalidad.

Analizaremos ahora el paso de la Construcción del Modelo para un problema de P.L.

Planteamiento de Problemas.-

Para construir un modelo de P.L. deben seguirse los siguientes pasos:

Paso 1: Definición de las variables.

Paso 2: Construcción del Sistema de Restricciones.

Paso 3: Construcción de la Función Objetivo.

- **Definición de las Variables de Decisión:**

Una variable de decisión es la representación de cada una de las actividades que conforman el problema.

Al definir una variable de decisión deben tenerse en cuenta dos definiciones:

- **Definición Conceptual.**

Con esta definición se determina la actividad (o variable) en el contexto del problema, logrando que esta actividad sea independiente. Para ello se deben tener en cuenta los principios de :

- a-unicidad de origen.
- b-unicidad de destino.
- c-unicidad de estructura tecnológica.
- d-unicidad de coeficiente de coste.

a,b,c y d se refieren a que cada actividad sea única en su origen, su destino, su tecnología y el valor que se le asigne a la función objetivo.

- Definición Dimensional.

Esta definición se refiere al aspecto cuantitativo de la actividad, es decir, la selección de la unidad de medida que se va a representar en el modelo.

- Construcción del sistema de restricciones.

En cuanto al sistema de restricciones y a cada restricción en particular se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Determinar la limitación o restricción que presupone dicha restricción, analizando el signo de la misma $\{<,=,>\}$, la dimensión física y el valor del término independiente b_i .

Paso 2: Determinar las variables que entran en la restricción.

Paso 3: Determinar el valor particular del coeficiente tecnológico de dicha restricción y en cada variable del problema ($j=1,n$), esto es, a_{ij} .

- Construcción de la Función Objetivo:

La función objetivo es la expresión del propósito u objetivo final que deseamos alcanzar al resolver el problema.

En la función objetivo deben aparecer las variables del problema multiplicadas por su coeficiente de costos C_j , el cual debe estar determinado adecuadamente.

Algunos problemas que resuelve la P.L. son:

- Problemas análisis de la producción.
- Transportación de productos terminados.
- Asignación de recursos.
- Inversiones.
- Localización de plantas.
- Inventarios.
- Problemas relacionados con redes.
- Problemas de mezcla.
- Problemas de dieta.
- Problemas de corte de materiales.

- Ruta crítica.
- Otros.

Ejemplo: 1 Planteamiento de Problemas de P.L.

A finales del año 1955 el gobierno Francés se enfrentó ante un problema de selección de fuentes de energía para la producción de electricidad.

Se contaba en aquel momento con plantas para la producción de energía tales como:

- 1- plantas térmicas.
- 2- plantas de derivación.
- 3- plantas con presas de almacenamiento.
- 4- plantas con esclusas.
- 5- plantas con mareomotriz.

La potencia máxima garantizada, medida por horas de consumo en horas hábiles, era de 1692 mega watts.

La potencia máxima, medida por hora de consumos en las 4 horas de máximo consumo diario, era de 2307 mega watts.

La energía anual 7200 macro-watts/hora.

Se quería investigar además el límite de las inversiones (fijar la política de inversiones). Para ello se contaba con la tabla de valores tecnológicos siguientes:

Plantas tipo.	Potencia Garantizada mega-watts	Potencia Máxima mega-watts	Energía anual macro-watts/hora.	Inversión necesaria. En millones de pesos.	Gastos En millones de pesos.
1	1	1.15	7.00	97	136
2	1	1.10	12.60	420	56
3	1	1.20	1.30	130	101
4	1	3.00	7.35	310	104
5	1	2.13	5.47	213	79

Solución del problema: Planteamiento

Variables del problema:

Sea X_i - número de instalaciones del tipo i a poner en funcionamiento.

$$X_i \geq 0 \quad (i=1,5)$$

D - Límite de la inversión disponible. ($D \geq 0$)

Restricciones:

Potencia garantizada	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 1692$
Potencia Máxima	$1.15 X_1 + 1.10 X_2 + 1.20 X_3 + 3.00 X_4 + 2.13 X_5 \geq 2307$
Energía anual	$7 X_1 + 12.6 X_2 + 1.30 X_3 + 7.35 X_4 + 5.47 X_5 \geq 7200$
Inversión Disponible	$97X_1 + 420 X_2 + 130 X_3 + 310 X_4 + 213 X_5 \geq D$

Valor de la Función Objetivo:

$$\text{Min } z = 136 X_1 + 56 X_2 + 101 X_3 + 104 X_4 + 79 X_5$$

Al resolver este problema se podrá saber el número de plantas del tipo y a poner en funcionamiento (explotación) en el país, así como el monto de la inversión necesarias para que se cumplan con la potencia garantizada, la potencia máxima y la energía anual que se necesita, pero que esto se haga de la forma más económica.

Debemos notar aquí que aunque este problema ilustra un planteamiento concreto de P.L. éste no lo es en sí, dado que las variables X_i representan variables enteras (sin punto decimal), siendo entonces una aplicación de lo que constituye la programación en Enteros.

Métodos de Solución:

Para dar solución al modelo de programación lineal se han desarrollado varios procedimientos. La vía más simple consiste en la solución gráfica, para el caso de los problemas con dos variables de decisión, lo cual constituye al mismo tiempo su principal limitación. El algoritmo más conocido y probado a todas las instancias es el llamado método Simplex, basado en una rutina algebraica iterativa que permite ir determinando soluciones básicas factibles vecinas a partir de una solución inicial, hasta llegar a la solución óptima deseada. Se conocen algunas variantes de este método, tales como el Simplex mejorado y el Simplex revisado. El procedimiento más actual desarrollado para resolver el modelo de programación lineal es el conocido método del punto interior de Karmakar.

En este Texto estudiaremos solamente los dos Primeros Métodos mencionados, los cuales serán formalizados a continuación:

MÉTODO GRÁFICO

1. Representar en el plano de coordenadas los hiperplanos correspondientes a cada restricción del modelo.

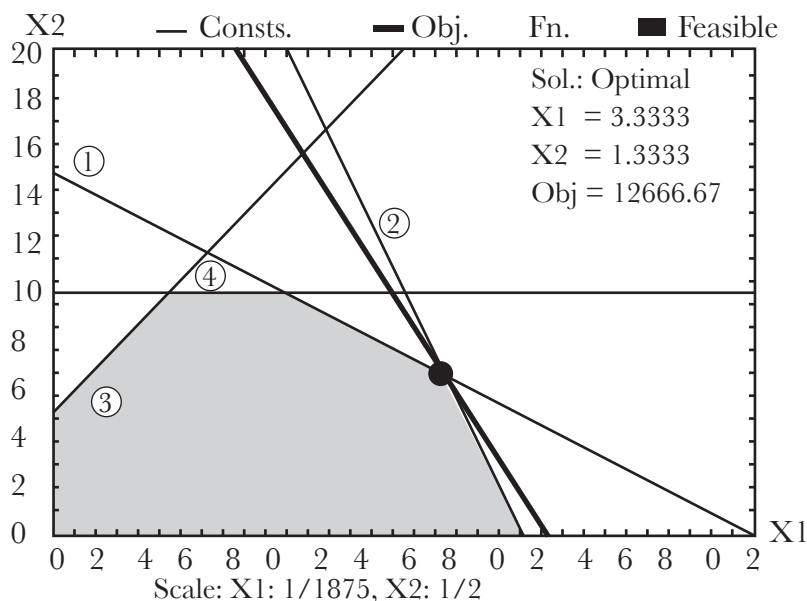
2. Determinar la región factible o conjunto de soluciones factibles por la intercepción de todos los hiperplanos representados.
3. Representar el vector gradiente de la función objetivo.
4. La solución óptima del problema se encuentra en el (los) último(s) punto(s) donde se interceptan las líneas de nivel y la región factible en el sentido del gradiente para problemas de máximo y del anti gradiente para problemas de mínimos.
5. De la solución del sistema de ecuaciones lineales que se obtiene con las ecuaciones de las restricciones activas (se cortan en el punto de solución óptima) se calculan las coordenadas del (de los) punto(s) y evaluando en la función objetivo se determina el valor extremo deseado.

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = 3000 X_1 + 2000 X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 X_2 &\leq 6 \\ 2 X_1 + X_2 &\leq 8 \\ X_2 - X_1 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



MÉTODO SIMPLEX

1. Llevar el modelo de programación lineal original a su forma normal.
2. Construir tabla simplex inicial.
3. Verificar condición de optimalizad.
4. En caso afirmativo (FIN), de lo contrario ir al paso 5.
5. Determinar variable que entra en base.
6. Determinar variable que sale de la base.
7. Realizar transformaciones en la tabla simplex.
8. Ir al paso 3.

Con vistas a la solución del problema es mucho mejor trabajar con sistemas de igualdades (llamado forma normal) que con sistema de desigualdades, es aquí cuando se introduce el concepto de variable de holgura.

Toda restricción del tipo ($\geq$) se puede convertir en una igualdad si le restamos al término de la izquierda una variable de holgura que significa el exceso al límite establecido por el término independiente.

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \dots + a_{in} X_n - X_{n+i} = b_i$$

X_{n+i} es la variable de holgura que se resta en la restricción i -ésima ($X_{n+i} \geq 0$)

Toda restricción del tipo ($\leq$) se puede convertir en una igualdad si le sumamos al miembro de la izquierda una variable de holgura que signifique lo que nos faltó para llegar al límite establecido por el término independiente. (Ahorro u ociosidad.)

$$a_{j1} X_1 + a_{j2} X_2 + \dots + a_{jn} X_n + X_{n+j} = b_j$$

X_{n+j} es la variable de holgura que se suma a la restricción j -ésima

$$X_{n+j} \geq 0$$

De esta forma cualquier problema con restricciones de desigualdad se pueden convertir entonces en problemas con restricciones de igualdad (llamado forma normal), el número de variables será entonces de $m+n$, con lo cual queda explicado como ejecutar el paso 1 del procedimiento.

El costo que se le asigna a las variables de holgura será CERO.

A las restricciones que sean ya una igualdad se les sumara una nueva variable, llamada variable artificial, como premisa para entrar soluciones iniciales al problema. Estas variables artificiales deben ser eliminadas en el proceso de solución, ya que si ellas aparecen en la solución final del problema significaran un error.

El objetivo de las variables artificiales es el de formar la matriz unitaria en la solución inicial del problema, cuando existen en el mismo restricciones de igualdad, o de mayor igual que harían que la variable de holgura respectiva se reste.

El costo de las variables artificiales será muy alto e ira en contra de la función objetivo.

El problema de P.L. cuenta entonces con m restricciones y n variables, con $n > m$ y si se supone que las restricciones son no redundantes, es decir tal que ninguna restricción sea combinación lineal de las restantes o lo que es lo mismo que las restricciones sean independientes.

Habrá más de una soluciones al problema, descartando la solución nula que carece de interés. Para poder resolver este problema se tendrá que tomar entonces un número de m variables solamente diferentes de cero y el resto será igualado a cero. A dichas variables (m en total) diferentes de cero se les llamara, entonces, variables básicas.

Se llama solución básica a toda solución al problema de P.L. que posea al menos m variables diferentes de cero. En caso de haber menos de m variables diferentes de cero, se les llamar  degeneradas a aquellas variables que siendo básicas tengan solución cero. Es decir, una solución básica esta en función de m variables diferentes de cero y el resto ($n - m$) igualadas a priori a cero.

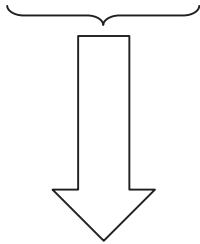
El número total de bases (o de soluciones básicas diferentes) que puede tener el problema será:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

Ejemplo, Si un problema tiene $m = 10$ ecuaciones con $n = 20$ variables, el número de soluciones básicas serian:

$C_{20}^{10} = 250000$, entre las cuales habrán soluciones no interesantes al tener valores negativos, o sistemas de ecuaciones particulares que al intentar resolverlos no tendrán solución.

El objetivo de la P.L. es el de encontrar dentro de un conjunto de enorme de soluciones básicas, una solución básica factible óptima



que satisfaga
a (2)

que tenga
m variables
rentes de uno

que las soluciones
sean positivas
satisfagan (1)

que las soluciones
optimicen a (3)

Paso 2. Para construir la tabla simplex inicial se debe formar una tabla como la que se presenta a continuación.

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 0)

Cj		X1	X2	...	Xn	Xn+1	...	Xn+m	RHS
BASE	Cj-B	C1	C2	...	Cn	0	...	0	
Xb1	Cb1	a11	a12	...	a1n	±1	...	0	b1
.....				...			...		
Xbm	Cbm	am1	am2	...	amn	0	...	±1	bm
Zj		Z1	Z2	...	Zn	Zn+1	...	Zn+m	
Zj - Cj		Z1- C1	Z2- C2		Zn - Cn	Zn+1-Cn+1		Zn+m- Cn+m	

Paso 3: Para verificar la optimalidad es necesario que se cumpla:

En caso de Máximo: Todos los $Cj-Zj \geq 0$

En caso de Mínimo: Todos los $Cj-Zj \leq 0$

Paso 5: Determinar la variable que entra en base:

Para elegir la variable que entra en base, Xk , esta se debe elegir tal que cumpla:

Para F.O de máximo

Para F.O de mínimo

$$Zk-Ck= \min_j \{ Zj - Cj < 0 \}$$

$$Zk-Ck = \max_j \{ Zj-Cj > 0 \}$$

debido a que

$$Z_{\text{nuevo}} = Z_{\text{viejo}} - q (Z_k - C_k) \quad q > 0$$

Paso 6. Determinar la variable que sale de base.

Del conjunto de variables básicas elegir aquella que debe salir para dar lugar a la que entro en el paso anterior. Esta variable debe garantizar que al salir la nueva solución básica sea positiva.

Saldrá de base la variable básica X_{br} tal que:

$$q = \frac{X_{Br}}{p_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{X_{Bi}}{p_{ik}} ; p_{ik} > 0 \right\}$$

p_{ik} son los valores del vector columna p_k de la variable X_k que entra en la base.

$$p_k = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ \vdots \\ p_{mk} \end{pmatrix}$$

Paso 7. Realizar transformaciones elementales en la tabla simples.

En la tabla correspondiente del Simplex debe garantizarse que una vez hechos los cambios pertinentes en la base la nueva matriz básica continua siendo unitaria, para ello se realizan las transformaciones elementales.

La fila r es la del vector que sale (semi pivote). La columna k es la del vector entrante (semi pivote). El elemento $(p_{rk} > 0)$ se le llama elemento pivote.

Se escribe la nueva tabla con el cambio de la nueva variable básica y se dan los siguientes pasos:

paso 7.1) Dividir la (fila r) del vector saliente entre el elemento pivote Pr_k , luego:

$$pr_j = pr_j / pr_k \quad j = 0, n$$

paso 7.2) Para las restantes filas hacer las transformaciones.

$$p_{ij} = p_{ij} - p_{ik} * pr_j / pr$$

Una vez calculada la tabla de la nueva iteración (nueva tabla), pasar al Paso 3.

Ejemplo 1

Reddy Mikks posee una pequeña fábrica de pinturas que produce colorantes para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B para su fabricación, de los cuales se dispone de 6 toneladas diarias de A y 8 toneladas diarias de B como máximo. Los requisitos de fabricación de ambos colorantes se dan a continuación.

	Ton. De materia prima por Ton. De pintura		Disponibilidad en (Ton.)
	Exterior	Interior	
Materia Prima A	1	2	6
Materia Prima B	2	1	8

Un estudio del mercado establece que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de una tonelada. El estudio señala asimismo que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a 2 toneladas diarias. El precio al mayoreo por tonelada es de \$ 3 000.00 para la pintura de exteriores y de \$ 2 000.00 para pintura de interiores.

¿ Cuánta pintura de cada clase debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto total diario ?

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

1) Definición de las Variables

X1→ Toneladas de pintura para exteriores a producir diariamente.

X2→ Toneladas de pintura para interiores a producir diariamente.

2) Función Objetivo

Max Z = 3000 X1 + 2000 X2 “Ingreso bruto total diario
por la producción de pinturas”

3) Sistema de Restricciones

(¿Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

$X1 + 2 X2 \leq 6$	“Disponibilidad de materia prima A”
$2 X1 + X2 \leq 8$	“Disponibilidad de materia prima B”
$X2 - X1 \leq 1$	“Exceso de pintura interior sobre pintura exterior”
$X2 \leq 2$	“Demanda máxima de pintura interior”
$X1 \geq 0, X2 \geq 0$	“Restricciones de no negatividad”

FORMA NORMAL DEL MODELO

Max Z = 3000 X1 + 2000 X2 + 0 S1 + 0 S2 + 0 S3 + 0 S4

S.a:

X1 + 2 X2 + S1 = 6
2 X1 + X2 + S2 = 8
X2 - X1 + S3 = 1
X2 + S4 = 2

X1 ≥ 0 , X2 ≥ 0 , S1 ≥ 0 , S2 ≥ 0 , S3 ≥ 0 , S4 ≥ 0

SIMPLEX TABLEU (ITERACIÓN 0)

Cj		X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS	Razón
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0		
S1	0	1	2	1	0	0	0	6	6
S2	0	2	1	0	1	0	0	8	4
S3	0	-1	1	0	0	1	0	1	X
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	X
Zj		0	0	0	0	0	0	0	
Zj -Cj		-3000	-2000	0	0	0	0		

SOLUCIÓN INICIAL

X1=0 S1=6 Z= 0
X2=0 S2=8
 S3=1
 S4=2

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 1)

Cj		X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS	Razón
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0		
S1	0	0	1.5	1	-0.5	0	0	2	1.3333
X1	3000	1	0.5	0	0.5	0	0	4	8
S3	0	0	1.5	0	0.5	1	0	5	3.3333
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	2
Zj		3000	1500	0	1500	0	0	12000	
Zj -Cj		0	-500	0	1500	0	0		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=4 S1=2 Z= 12000

X2=0 S2=0

S3=5

S4=2

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 2)

Cj		X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS	Razón
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0		
X2	2000	0	1	0.6666	-0.3333	0	0	1.3333	
X1	3000	1	0	-0.3333	0.6666	0	0	3.3333	
S3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
S4	0	0	0	-0.6666	0.3333	0	1	0.6666	
Zj		3000	2000	333.333	1333.33	0	0	12666.67	
Zj -Cj		0	0	333.333	1333.33	0	0		

SOLUCIÓN ÓPTIMA

X1=3.33 S1=0 Z= 12 666.67

X2=1.33 S2=0

S3=3

S4=0.66

INTERPRETACIÓN

Los valores de X1 y X2 indican, según la definición de las variables, que se deben producir 3.33 toneladas de pintura para exteriores y 1.33 toneladas de pintura para interiores, con lo cual se alcanzará un ingreso bruto diario máximo de \$ 12 666.67 .

Además, las variables de holgura S1, S2, S3, S4 indican que se agotan las materias primas A y B (S1=0, S2=0), mientras que S3=3 implica que aun se pueden producir 3 toneladas más de pintura interior sin violar la relación entre ellos y finalmente S4=0.66 significa que aun se pueden producir 0.66 toneladas más de pintura interior, para alcanzar el tope de la demanda máxima esperada.

2.- Hay tres fábricas a lo largo del río Momiss (fábrica F-1, F-2 y F-3). Cada fábrica descarga dos tipos de contaminantes (Contaminantes C-1 y C-2) en el río. Se puede reducir la contaminación del río si se procesan los desechos de cada fábrica. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-1, cuesta 15 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-1 reducirá la cantidad de contaminantes C-1 en 0.10 toneladas y la cantidad de contaminantes C-2 en 0.45 toneladas. El procesamiento de 1 tonelada desechos de la fábrica F-2, cuesta 10 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-2 reducirá la cantidad de las contaminaciones C-1 en 0.20

toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0.25 ton. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-3, cuesta 20 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-3 reducirá la cantidad de contaminaciones C-1 en 0.40 toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0.30 toneladas. El estado quiere reducir la cantidad de contaminantes C-1 y C-2 en el río en por lo menos 40 (resp. 35) toneladas. Se desea minimizar el costo total de reducir la contaminación en las cantidades deseadas.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

1) Definición de las Variables

X1 -- Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-1

X2 -- Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-2

X3 -- Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-3

Función Objetivo

Min $Z = 15 X_1 + 10 X_2 + 20 X_3$ “Costo total por procesar los desechos en las fábricas”

3) Sistema de Restricciones

(¿ Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

$0.10 X_1 + 0.20 X_2 + 0.40 X_3 \geq 40$ “Reducción del C-1 exigida”

$0.45 X_1 + 0.25 X_2 + 0.30 X_3 \geq 35$ “Reducción del C-2 exigida”

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0$ “Restricciones de no negatividad”

SOLUCIÓN ANALÍTICA

Método Simplex

FORMA NORMAL DEL MODELO

Min $Z = 15 X_1 + 10 X_2 + 20 X_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + M A_1 + M A_2$

S.a:

$0.10 X_1 + 0.20 X_2 + 0.40 X_3 - S_1 + A_1 = 40$

$0.45 X_1 + 0.25 X_2 + 0.30 X_3 - S_2 + A_2 = 35$

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad S_1 \geq 0, \quad S_2 \geq 0, \quad A_1 \geq 0, \quad A_2 \geq 0$

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 0)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
A1	M	0.10	0.20	0.40	-1	1	0	0	40	100
A2	M	0.45	0.25	0.30	0	0	-1	1	40	133.33
Zj		0.55M	0.45M	0.70M	-M	M	-M	M	80M	
Zj -Cj		0.55M-15	0.45M-10	0.70M-20	-M	0	-M	0		

SOLUCIÓN INICIAL

X1=0 S1=0 Z= 80M

X2=0 S2=0

X3=0 A1=40

A2=40

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 1)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	0.25	0.50	1	-2.5	2.5	0	0	100	-
A2	M	0.375	0.09	0	0.75	-0.75	-1	1	9.99	13.33
Zj		5+0.375M	10+0.9M	20	-50+0.75M	50-0.75M	-M	M	2000+9.99M	
Zj- Cj		10-0.375M	0.09M	0	-50+0.75M	50-1.75M	-M	0		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=0 S1=0 Z= 2000+9.99M

X2=0 S2=0

X3=100 A1=0

A2=9.99

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 2)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	1.5	0.83	1	0	0	-3.33	3.33	133.33	88.88
S1	0	0.5	0.13	0	1	-1	-1.33	1.33	13.33	26.66
Zj		30	16.66	20	0	0	-66.66	66.66	2666.66	
Zj -Cj		15	6.66	0	0	-M	66.66	66.66-M		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=0 S1=13.33 Z= 2666.66

X2=0 S2=0

X3=133.33 A1=0

A2=0

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 3)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	0	0.43	1	-3	3	0.66	-0.66	93.33	215.38
X1	15	1	0.26	0	2	-2	-2.66	2.66	26.66	100
Zj		15	12.66	20	-30	30	-26.66	26.66	2266.66	
Zj -Cj		0	2.66	0	-30	30-M	-26.66	26.66-M		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=26.66 S1=0 Z= 2266.66

X2=0 S2=0

X3=93.33 A1=0

A2=0

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 4)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	-1.625	0	1	-6.25	6.25	5	-5	50	
X2	10	3.75	1	0	7.5	-7.5	-10	10	100	
Zj		5	10	20	-50	50	0	0	2000	
Zj -Cj		-10	0	0	-50	50-M	0	-M		

SOLUCIÓN ÓPTIMA

X1=0 S1=0 Z= 2000

X2=100 S2=0

X3=50 A1=0

A2=0

INTERPRETACIÓN

La solución óptima alcanzada indica que en la Fábrica-1 no se deben procesar desechos, mientras que se deben procesar 100 toneladas de desecho en la Fábrica-2, y 50 toneladas en la Fábrica-3, para minimizar el costo total que en este caso será de \$2000. Las variables de holgura $S1=0$ y $S2=0$ indican que se cumplen las exigencias de disminuir

Otros Métodos de Solución del Problema de P.L

Método Simplex Revisado.

El método consta con dos Formas:

Forma Estándar 1: Cuando no hay variables artificiales, logra el valor óptimo de la Función objetivo. Se aplica el método Simplex normal pero en donde la Función Objetivo forma parte del Sistema de Restricciones.

Forma Estándar 2: Cuando existen variables artificiales. Consta de dos n

Fases:

Fase 1: Los costes de las variables son CERO, exceptuando las variables artificiales que toman valor UNO. Se aplica el método simplex normal y concluye cuando la Función Objetivo sea CERO.

Fase 2: Se restablecen los costes de las variables, no existen variables artificiales, Se pasa a la Forma Estándar 1.

Forma Matricial del Método Simplex Revisado:

Matriz del Problema:

$$Z - c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

Dual de un Problema de P.L.:

Sea el problema original en su forma PRIMAL:

Caso Máximo:

$$A X \leq b$$

Dimensiones $A_{m \times n}$ $X_{n \times 1}$ $b_{m \times 1}$

$$X \geq 0$$

$$\text{Max } z = C X$$

Dimensión $C_{1 \times n}$

Caso Mínimo:

$$A X \geq b$$

$$X \geq 0$$

$$\text{Min } z = C X$$

Se obtiene el DUAL correspondiente:

$$\begin{array}{ll} A' Y \geq C' & A' Y \geq C' \\ Y \geq 0 & Y \geq 0 \\ \text{Min } z' = b' Y & \text{Max } z' = b' Y \end{array}$$

Método Dual Simplex:

Este método se aplica igual que el Simplex pero con cambio en los criterios de entrada y salida de base (dado que permite términos independientes negativos).

Paso 1: Criterio de Salida $X_r = \text{mínimo} \{ X B_j / X B_j < 0, X B_j \text{ básico} \}$

Paso 2: Criterio de Entrada X_k

Valor Absoluto de $\{ (Z_k - C_k) / Y_{ik} \} = \min \{ (z_j - c_j) / y_{ij} \text{ para } y_{ij} < 0, i \text{ no básico} \}$

Aplicaciones de la programación lineal

Problema de Inventarios:

Dado un almacén con capacidad fija B, un stock inicial de un cierto producto A, el cual está sujeto a precios estacionales conocidos y estas variaciones, con un retardo entre la orden y la recepción del producto. Se pregunta ¿qué cantidad pedir, almacenar y vender con el objetivo de maximizar las ganancias en el período de tiempo dado?

N.- Período de tiempo a estudiar

B.- Capacidad total del producto

A.- Productos almacenados en $t=0$

X_i .- Cantidad de productos ordenados en el período de tiempo i

Y_i .- Cantidad de producto vendido en el período de tiempo i

$X_i, y_i \geq 0$

$i = 1, n$

Restricciones:

Capacidad

$$A + \sum_{j=1}^i (x_j - y_j) \leq B$$

$$A + x_1 - y_1 \leq B$$

$$A + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \leq B$$

.

.

$$A + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n \leq B$$

Venta

$$Y_1 \leq A$$

$$y_i \leq A + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j)$$

$$Y_2 \leq A + x_1 - y_1$$

$$Y_3 \leq A + x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

.

.

$$y_n \leq A + x_1 - y_1 + \dots + x_{n-1} - y_{n-1}$$

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^N (P_j Y_j - C_j X_j)$$

P_j .- precio de venta en productos en el periodo j (estacional)

C_j .- costo del producto en el período j (estacional)

Problema de Producción y Control de Inventarios.

Se desea determinar un programa de producción que minimice la suma de los costos derivados y las fluctuaciones de producción y los inventarios. Existen 2 soluciones extremas: a) minimizar el exceso de producción y b) minimizar las fluctuaciones.

Planteamiento del Problema:

S_o .- productos disponibles al inicio del primer mes (constante)

X_t .- # de unidades producidas en el mes t (producción en t)

R_t .- # de unidades demandadas en el mes t (demanda en t)

S_t .- # de unidades almacenadas en el mes t (almacenamiento en t)

$$X_t, r_t, s_t \geq 0$$

$$\text{1er mes:} \quad x_1 + s_0 - s_1 = r_1$$

$$\text{2do mes:} \quad x_2 + s_1 - s_2 = r_2$$

.

.

$$\text{mes } t: \quad x_t + s_{t-1} - s_t = r_t$$

y_t .- aumento en la producción en t

z_t .- disminución en la producción en t

$$y_t, z_t \geq 0$$

$$x_t - x_{t-1} = y_t - z_t$$

Fluctuación de la producción: aumento y_t o disminución z_t de la producción en t .

$$\text{Min } Z = b \sum_{t=1}^n s_t + a \sum_{t=1}^n y_t$$

a.- costo unitario por aumento en la producción en un mes

b.- costo unitario por almacenar la producción en un mes

El problema queda:

$$X_t, r_t, s_t, y_t, z_t, \geq 0$$

B, a, S_0 .- constantes conocidas

$$X_t + s_{t-1} - s_t = r_t$$

$$X_t - x_{t-1} - y_t + z_t = 0$$

$$\text{Min } Z = b \sum_{t=1}^n s_t + a \sum_{t=1}^n y_t$$

Ejemplo:

La O.M.C fabrica un producto que tiene demanda fluctuante. Demanda pronosticada para 4 meses próximos; 1800, 2200, 3400 y 2800 unidades respectivamente. Debido a la fluctuación existen meses con producción en exceso con grandes costos de manejo y almacenamiento, y otros meses no se cubre la demanda. Se puede producir 2400 unidades/mes en turnos normales, en tiempo extra se puede fabricar hasta 800 unidades mensuales adicionales. En tiempo extra se produce un aumento de \$7 por artículo en los costos de producción. El costo de almacenamiento es de \$3 por unidad por mes. Encuentre el programa óptimo que minimice el costo y satisfaga todas las demandas.

Variables.-

X_j .- producción en tiempo normal en el mes $j \geq 0$

Y_j .- producción en tiempo extra en el mes $j \geq 0$

Z_j .- inventarios al final del mes $j \geq 0$

J: 1, 4

$$\text{Min} Z = 7(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 3(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

Función Objetivo:

Restricciones:

X1			+y1		-z1			=1800
	X2			+y2	+z1		-z2	=2200
		X3			+y3		+z2	=3400
			X4			+y4	+z3-z4	=2800
				Y1				≤ 800
					Y2			≤ 800
						Y3		≤ 800
							Y4	≤ 800
X1								≤ 2400
	X2							≤ 2400
		X3						≤ 2400
			X4					≤ 2400

Solución:

$$X_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2400$$

$$Y_1 = y_2 = 0$$

$$Y_3 = 200$$

$$Y_4 = 400$$

$$Z_1 = 600$$

$$Z_2 = 800$$

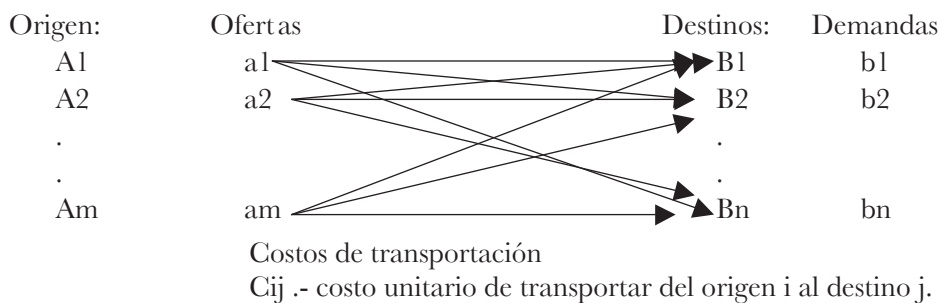
$$Z_3 = 0$$

$$\text{Min } Z = 8400$$

Problema de Programación del Transporte

Formulación del Problema de Transporte.

Transportar un único producto homogéneo dado un origen o puntos de embarque hasta n destinos de forma tal que satisfaga las demandas de los destinos, las ofertas de los orígenes y se minimice el costo total de transportación



$$O = \text{Oferta Total} = \sum a_i$$

$$D = \text{Demanda Total} = \sum b_j$$

Caso a) Problema en Equilibrio: $O = D$

Caso b) Problema en desequilibrio: $O \neq D$

Para resolverlo se necesita crear orígenes o destinos ficticios con costos de transportación cero que asuman la diferencia o déficit y que lleven el problema al caso a.

Problema de transporte:

Variables:

X_{ij} .- Cantidad de unidades a transportar dado el origen i hasta el destino j .

$$X_{ij} \geq 0$$

Restricciones:

Restricciones de orígenes:

$$\sum x_{ij} = a_i, \quad i = 1, m$$

Restricción de destino:

$$\sum x_{ij} = b_j, \quad j = 1, n$$

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum \sum x_{ij} c_{ij}$$

Ejemplo:
Una compañía productora de chicharos enlatado tiene 3 enlatadoras (Bellingham, Washington y Eugene). Dicha producción se envía por camión a cuatro almacenes de distribución (Sacramento, Salt Lake City, Rapid City y Alburquerque). Se quiere hacer un estudio de la transportación con ventas a minimizar los gastos, en la tabla se estiman, la producción de las enlatadoras, las necesidades de los almacenes y los costos de transportación de transporte cargado para cada combinación de enlatadora-almacén. Determine el plan de transportación con mínimo costo.

Costo de em- barque por caja		Almacenes (Costo por camión cargado)				(Carga de camión)
		1	2	3	4	Producción
	1	464	513	654	867	75
Enlatadoras	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Asignación		80	65	70	85	

Planteamiento:

X_{ij}.- Cantidad de cargas por camión que se envían de la enlatadora i al almacén j.

$$X_{ij} \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{21} + 955x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$$

X ₁₁	+X ₁₂	+X ₁₃	+X ₁₄	=75				
		+X ₂₁	+X ₂₂	+X ₂₃	+X ₂₄	=125		
				+X ₃₁	+X ₃₂	+X ₃₃	+X ₃₄	=100
X ₁₁			+X ₂₁		+X ₃₁			=80
	X ₁₂			+X ₂₂		+X ₃₂		=65
		X ₁₃			+X ₂₃		+X ₃₃	=70
			X ₁₄		+X ₂₄		+X ₃₄	=85

Solución óptima:

$$X_{11}=X_{13}=X_{23}=X_{24}=X_{31}=X_{32}=0$$

$$X_{12}=20 \quad X_{14}=55 \quad X_{21}=80 \quad X_{22}=45 \quad X_{33}=70$$

$$X=30$$

$$\text{Min } Z = \$135,479$$

Enlatado	1	$20 + 55 = 75$
	2	$80 + 45 = 125$
	3	$70 + 30 = 100$

Almacén	1	80
	2	$20 + 45 = 65$
	3	70
	4	$55 + 30 = 85$

Las variables significan las cantidades de camiones cargados que se transportarán desde cada origen hasta cada destino.

Formulación del Problema de Transporte con Transbordo.-

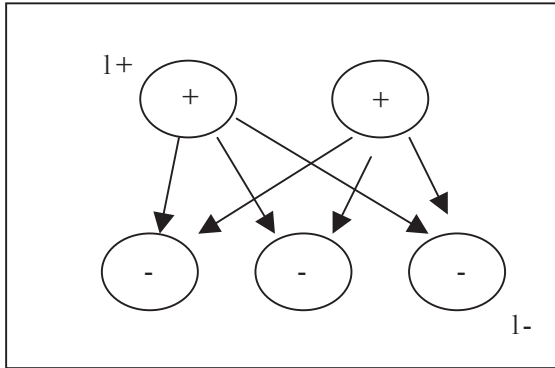
Problema de Flujo Máximo de Costo Mínimo.

Uno de los requerimientos del problema de transporte es que se conozcan de antemano la forma en que se van a distribuir las unidades de cada origen i a cada destino j para poder determinar el costo por unidad cij. No obstante en ocasiones no es evidente cuál es el mejor medio de distribución, pues existe la posibilidad de transbordos en los que los embarques pasarían por puntos de transferencias intermedios (que a su vez pueden ser orígenes o destinos).

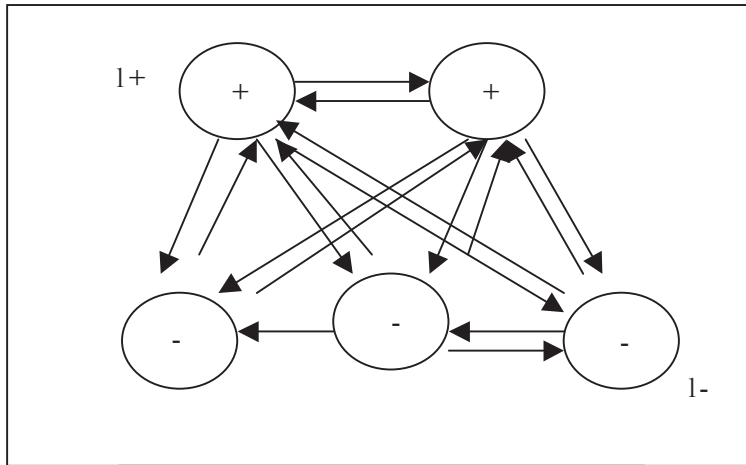
Lo que se pretende ahora es obtener las cantidades que han de mandarse de cada origen a cada destino y la ruta a seguir en cada embarque, con el objetivo de minimizar los costos totales de transporte.

Característica de este problema de transbordo es que cada origen puede enviar el producto no solamente a los destinos sino también a los otros orígenes, y a la vez cada destino puede recibir el producto no solamente de los orígenes, sino de los otros destinos.

Ejemplo:



Problema de transporte:



Problema de transporte con transbordo
(de 1+ a 1- existen muchas rutas)

Sean ahora $i = 1, 2, \dots, m$ (fuentes) $j = m+1, m+2, \dots, m+n$ (destinos)

X_{ij} .- unidades a transportar desde i hasta j

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m+n$$

C_{ij} .- costo de transporte desde i hasta j $\rightarrow c_{ij}$

Orígenes.-

$$\sum x_{ij} = a_i + t_i \quad (i = 1, m)$$

t_i = unidades trasbordadas desde i .

La cantidad total del producto que sale de i es igual a lo existente en i más la trasbordada desde i .

Destinos.-

$$\sum x_{ij} = b_j + t_j \quad (i = 1, j)$$

t_j = unidades trasbordadas

La cantidad total del producto que llega a j es igual a la demanda de j más lo trasbordado desde j .

1) Traslado en destinos

$$\sum x_{ij} = t_i \quad (i = 1, j)$$

$$i = m+1, m+2, \dots, m+n$$

Lo que arriba a un destino es igual a lo que el destino trasborda.

2) Traslado de orígenes

$$\sum x_{ij} = t_j \quad j = 1, \dots, m$$

Lo que arriba es un origen es igual a lo que el origen trasborda.

La Función objetivo será:

$$\text{Min } Z = \sum \sum c_{ij} x_{ij} + \sum c_i t_i$$

Donde c_i = costo unitario del traslado desde i .

El modelo planteado resulta en extremo difícil para entender los t_i como incógnitas. Asignemos un valor constante a t_i y se nos facilitará mucho el cálculo.

Sea $t_0 = \sum a_i$ la cantidad cota superior de t_i .

Tabla de transporte con trasbordo.

		Orígenes	Destinos	
		1 2 3m	m+1 m+2....m+n	
	1	Trasbordo Origen origen	Cij	a1 + to
Orígenes	2			.
	.			.
	m			am + to
	m+1	cij	Trasbordo Destino destino	
Destinos	m+2			
	.			to
	m+n			
		To	b1 + to +....bm + to	

El problema de P.L con Traslado quedaría:

Variables.-

Xij.- Cantidad de prod. Enviado de i a j. (i, j = i, m+n)

Restricciones de Origen.-

$$\begin{aligned} \sum X_{ij} &= a_i + t_o & i &= 1, m \\ \sum X_{ij} &= t_o & i &= m+1, m+n \\ & & i & \neq j \end{aligned}$$

Restricciones de Destino.-

$$t_o \sum a_i = \sum b_j$$

$$\begin{aligned} \sum X_{ij} &= t_o & j &= 1, m \\ \sum X_{ij} &= b_j + t_o & j &= m+1, m+n \\ & & i & \neq j \end{aligned}$$

Función Objetivo.-

$$\text{Min } Z = \sum \sum c_{ij} x_{ij} \quad \text{Modelo con } m+n \text{ orígenes y destinos.}$$

$$\text{Min } Z = X_{12} + 20X_{13} + 14X_{14} + 8X_{15} + 2X_{21} + 10X_{23} + 17X_{24} + 15X_{25} + X_{34} + 2X_{35} + 3X_{43} + X_{45} + X_{53} + X_{54}$$

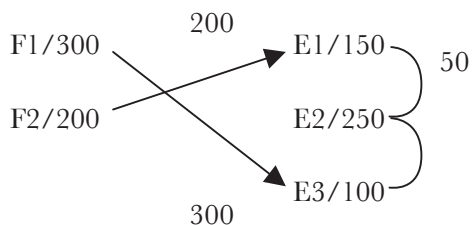
Solución óptima.-

$$X_{15} = 300$$

$$X_{23} = 200$$

$$X_{34} = 50$$

$$X_{54} = 200$$



$$\text{Min } Z = 4650$$

Problema del Flujo Máximo.

Considere una red dirigida y conexa que tiene un solo nodo fuente y un solo nodo destino, y el resto son nodos de trasbordo. De la capacidad de los arcos, el objetivo es determinar el patrón factible que fluye a través de la red que maximiza el flujo total, desde el nodo fuente al nodo destino.

X_{ij} .- Flujo a través del arco i, j .

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum \sum x_{ij}$$

Restricciones:

$$\sum X_{ij} - \sum x_{ji} = b_i, \quad i = 1, n$$

donde $\sum x_{ij}$ es lo que sale y $\sum x_{ji}$ es lo que entra y

$$b_i > 0 \quad \text{si } i \text{ es nodo fuente} \quad (i = 1)$$

$$b_i = 0 \quad \text{si } i \text{ es nodo trasbordo}$$

$$b_i < 0 \quad \text{si } i \text{ es nodo demanda} \quad (i = n)$$

b_i son los flujos netos generados en cada nodo y son datos.

Capacidades:

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j)$$

u_{ij} .- Capacidad del flujo (i, j)
(dato)

Caso particular:

Si V es el flujo estático desde el nodo inicial hasta el nodo final.

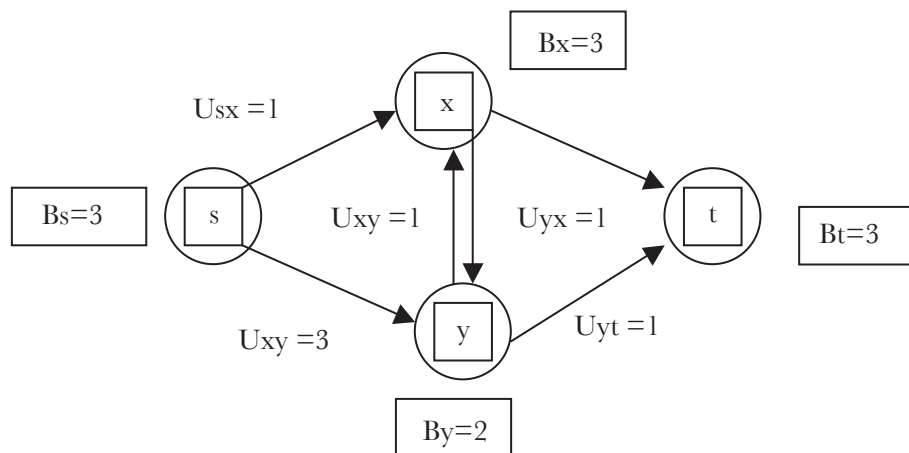
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{flujo de } i \text{ a } j$$

$$\text{Max } Z = \sum x_{ij}$$

$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = b_i, = \begin{cases} V & \text{si } i = 1 \text{ (nodo de inicio)} \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ e } i \neq n \\ -V & \text{si } i = n \text{ (nodo final)} \end{cases}$$

$$x_{ij} \leq u_{ij}$$

Resuelva el problema de flujo de máximo de s a t :



Problema del Flujo Máximo de Costo Mínimo.

Al igual que el problema del flujo máximo, toma en cuenta un flujo a través de una red con capacidades limitadas en sus arcos. Al igual que el problema de la ruta más corta considera un costo (o distancia) para el flujo a través de un arco. Al igual que el problema de transporte o el problema de asignación, puede manejar varios orígenes (nodos fuentes) y varios destinos (nodos demanda) para el flujo, también con costos asociados.

Al igual que el problema de trasbordo, puede considerar varios puntos de conexión (nodos de trasbordo) entre los orígenes y los destinos para este flujo. De hecho, estos problemas estudiados son casos particulares del problema de flujo máximo de costo mínimo.

Definición del problema:

Red conexa, dirigida (orientada) con n nodos (incluye al menos 1 nodo origen y un nodo destino).

Variables de decisión:

x_{ij} = flujo a través del arco $i - j$

c_{ij} = costo unitario de flujo $i - j$

u_{ij} = capacidad del arco $i - j$

b_i = flujo neto generado en el nodo i .

b_i depende de la naturaleza del nodo i .

$b_i > 0$ si nodo i fuente

$b_i < 0$ si nodo i demanda

$b_i = 0$ si i es nodo de transbordo.

El objetivo es minimizar el costo total de enviar los recursos disponibles a través de la red para satisfacer la demanda dada.

$$\text{Min } Z = \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

Sujeta a:

$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = b_i$$

donde $\sum x_{ij}$ es lo que sale y $\sum x_{ji}$ es lo que entra, para cada i .

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{para cada arco } i - j$$

En caso de ser necesario tener cota inferior $a_{ij} > 0$ para el flujo del arco $i - j$ se hace una traslación de variables $x'_{ij} = x_{ij} - a_{ij}$ y se sustituye en el modelo

$$x_{ij} = x'_{ij} + a_{ij}$$

No se garantiza la solución factible en todos los casos.

Una Propiedad de Solución Factible es:

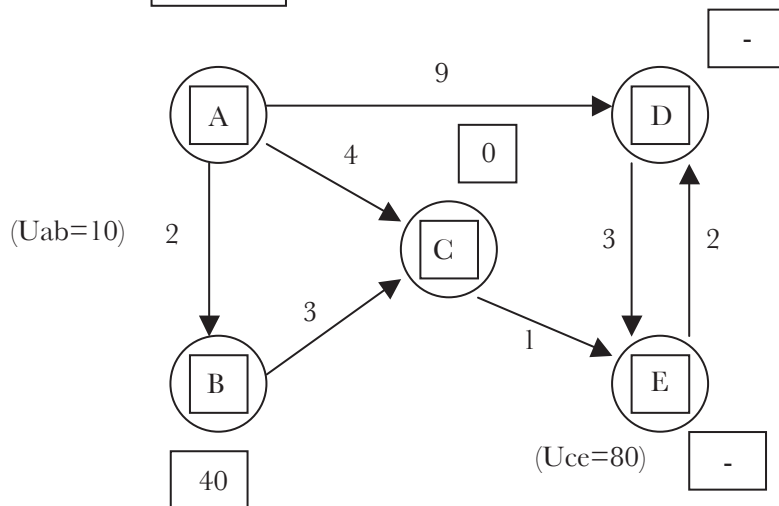
$\sum b_i = 0$ (condición necesaria para la factibilidad del problema)

En caso de suceder que $b_i \neq 0$ se agregará un nodo fuente ficticio o un nodo demanda ficticio con costo cero.

En general x_{ij} son enteros dado que b_{ij} , u_{ij} son siempre enteros.

Ejemplo:

$C_a=50$



A y B son nodos orígenes (fuentes)

D y E son nodos destino (demandas)

C es nodo trasbordo.

Flujo neto generado = 90

Todos los arcos, excepto 2, tienen flujo capacidades que exceden el flujo total generado (90). Estos arcos son; x_{ij} : $u_{ij} = 0$, las excepciones $u_{ab} = 0$ y $u_{ce} = 80$.

$\text{Min } z = 2x_{ab} + 4x_{ac} + 9x_{ad} + 3x_{bc} + x_{ce} + 2x_{de} + 2x_{ed}$

$$\begin{aligned}
 x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} &= 50 \\
 -x_{ab} + x_{bc} &= 40 \\
 -x_{ac} - x_{bc} + x_{ce} &= 0 \\
 -x_{ad} + x_{de} - x_{ed} &= -30 \\
 -x_{ce} - x_{de} + x_{ed} &= -60
 \end{aligned}$$

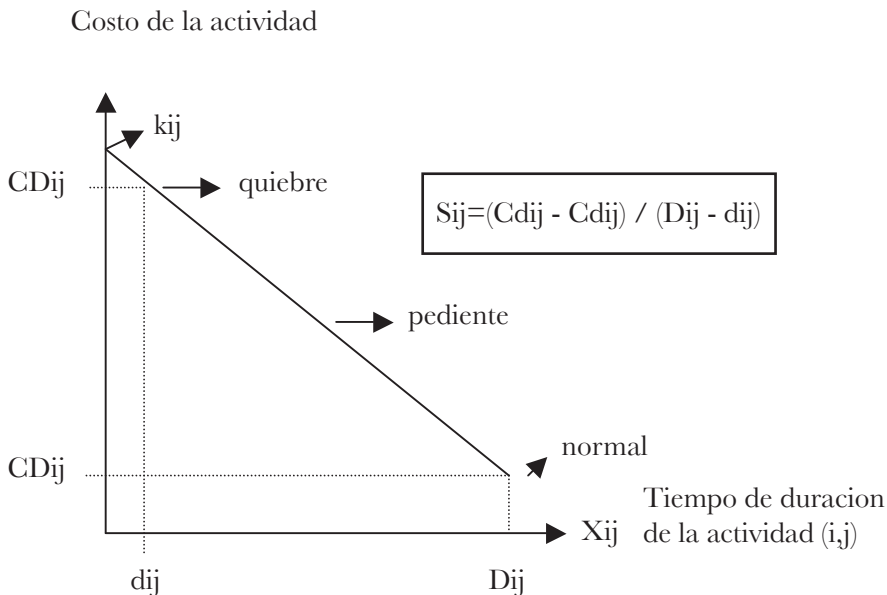
$x_{ab} \leq 10$
 $x_{ce} \leq 80$
 $x_{ij} \geq 0$

Método CPM.

CPM.- 1) supone tiempos determinísticos
 2) le da importancia al tiempo y al costo.

PERT.- 1) supone tiempos aleatorios
 2) le da importancia extrema al tiempo

El CPM presupone la construcción de una curva tiempo - costo por actividad.



C_{di} = Costo crítico
 CD_i = Costo normal
 d_{ij} = tiempo crítico o de quiebre de la actividad (i, j)
 D_{ij} = tiempo normal de la actividad (i, j)
 X_{ij} = tiempo de duración de la actividad (i, j)
 K_{ij} = intersección con el eje de la actividad (i, j).

Costo directo de la actividad (i, j) = $K_{ij} + S_{ij} * X_{ij}$

Costo total del proyecto = $\sum (K_{ij} - S_{ij} * X_{ij})$

Dado un tiempo máximo T de terminación del proyecto, selecciónese la X_{ij} que minimice el costo directo total del proyecto.

Formulación como problema de Programación Lineal.

Variables:

X_{ij} .- tiempo de duración de la actividad (i, j) $i, j = 1, n$

Y_k .- tiempo más próximo (desconocido) para el inicio del evento k (el cual es una función determinística de x_{ij})

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum (-S_{ij} * X_{ij})$$

Nota: $\text{Min } Z = \text{Min } \sum (K_{ij} - S_{ij} * X_{ij})$, si K_{ij} es constante es equivalente a

$$\text{Max } Z = \sum (-S_{ij} * X_{ij})$$

Restricciones.-

$$X_{ij} \geq d_{ij}$$

$$X_{ij} \leq D_{ij}$$

$$Y_i + X_{ij} - Y_j \leq 0$$

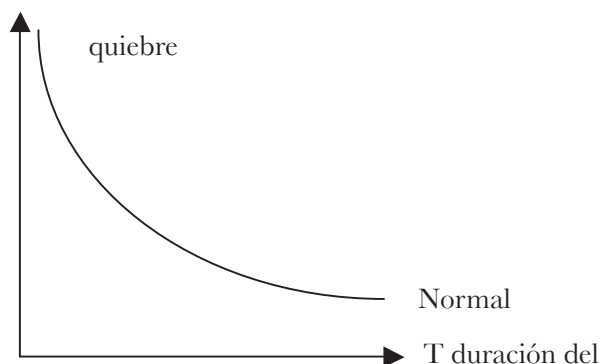
$$Y_n \leq T$$

T es la duración máxima del proyecto.

El evento 1 inicia el proyecto cuando $Y_1 = 0$

Evento n termina el proyecto $Y_n \in T$

Costo directo total mínimo para el



Se puede mejorar el modelo con

$$X_{ij} = d_{ij} + X'_{ij}$$

$$X'_{ij} = X_{ij} - d_{ij} \geq 0$$

Se sustituye en el modelo X_{ij} por X'_{ij} .

El método para resolver estos problemas es el llamado Método Simplex de Redes, éste es una versión simplificada del método simple para resolver problemas del flujo de costo mínimo.

Se realizan los mismos pasos para el Simplex explotando la estructura de la red del problema sin necesidad alguna de la tabla Simplex.

El método Simplex de redes es similar al método Simplex de transporte.

Ejemplo:

Suponga el proyecto para la construcción de una casa cuya tabla se da a continuación. Si la duración del proyecto se considera 40 días. Emplee el método del trueque entre el tiempo y el costo para ver cómo se podría acelerar el proyecto y que se cumpla con la fecha y se obtenga la forma más económica.

Actividad	Tiempo		Costos	
	Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
1-2	2	1	1800	2300
2-3	4	2	3200	3600
3-4	10	7	6200	7300
4-5	4	3	4100	4900
4-6	6	4	2600	3000
4-7	7	5	2100	2400
5-7	5	3	1800	2200
6-8	7	4	9000	9600
7-9	8	6	4300	4600
8-10	9	6	2000	2500
9-11	4	3	1600	1800
9-12	5	3	2500	3000
10-13	2	1	1000	1500
12-13	6	3	3300	4000

Formule y resuelva el problema como modelo de P.L.

1.6.5.2.- Problema del árbol de expansión mínimo.

Este problema tiene similitudes con el problema de la ruta más corta. Se considera una red no orientada con datos de cada nodo y la distancia de cada actividad.

En lugar de encontrar la ruta más corta a través de la red, el problema elige las ligaduras a la red que tengan la longitud total más corta al mismo tiempo que proporciona una trayectoria entre cada par de nodos. Es necesario que las ligaduras se elijan de tal manera que la red resultante forme un árbol que se expande a todos los nodos dados.

Selección de Proyectos (Factibilidad Económica).

Diferentes métodos para la solución óptima de proyectos de inversión.

V.A.E.- Valor actual equivalente: Todos los ingresos y costos que ocurran durante un período son convertidos en una anualidad equivalente. Si $VAE > 0$ el proyecto es recomendable.

V.A.N.- Valor anual o valor presente neto.

T.I.R.- Tasa interna de retorno.- Es el rendimiento que se espera que devengue una inversión. Es la tasa de retorno o tiempo de actualización o descuento de una inversión que hace cero al VAN.

VAN.- Consiste en determinar en un tiempo cero de los flujos de efectivo futuros (corriente de cobros y pagos actualizados) que genere un proyecto y compara esta equivalencia con el desembolso inicial. Si el $VAN > 0$ se recomienda el proyecto.

Suponiendo que se tengan muchos proyectos a evaluar, es necesario acudir a la selección óptima mediante métodos computacionales. Una de estas técnicas es la Programación Lineal que permite resolver con facilidad dichos problemas una vez que se hayan calculado los VAN de cada proyecto de inversión.

VAN es una equivalencia en el tiempo cero de los flujos efectivos futuros que genera la alternativa y compara esta equivalencia con el desembolso inicial. Los proyectos son aceptados cuando VAN tiene valores mayores que cero.

$$VAN = -P + \sum (St / (1+i)^t)$$

Donde

P = desembolso inicial

St = Flujo efectivo neto

T = tasa de recuperación mínima atractiva TREMA

Problema de programación Lineal.

Definición de las variables.-

$$X_{jk} = (1, 0) \quad j = 1, J; k = 1, K$$

J = total de subdivisiones que pretenden realizar inversiones

K = total de proyectos de inversión por subdivisión

T = total de períodos de inversión

VAN_{jk} = Valor anual/ presente neto del proyecto k en la subdivisión j durante el período t.

X_{jk} = variable de decisión para el proyecto k en la subdivisión j .

i = TREMA (tasa de recuperación mínima atractiva)

P_{jkt} = desembolso inicial del proyecto k en la división j

C = capital disponible de la empresa

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum \sum (-P_{jkt} + \sum (S_{jkt} * X_{jk}) / (1 + i)^t) = \sum \sum \text{VAN}_{jk}$$

Restricciones:

1.- Financieras

$$\sum \sum P_{jk} X_{jk} < C$$

2.- Proyectos Excluyentes

$$\sum X_{jk} \leq 1$$

3.- Relaciones de contingencia

Cuando la captación de un proyecto depende de la aceptación previa de otro.

$$-X_{ik} + X_{jk} \geq 0$$

$$i = 1, I$$

$$j = 1, J$$

$$k = 1, K$$

4.- Área obligada

Cuando es obligado a escoger una alternativa de las propuestas.

$$\sum X_{jk} = 1 \quad k = 1, K$$

Ejemplo:

El Director de una empresa mixta ha recibido un conjunto de propuestas que provienen de 3 actividades independientes de producción. Las propuestas que pertenecen a una misma área de producción son mutuamente excluyentes. El desembolso inicial que debe hacerse para cada inversión así como el flujo efectivo de las mismas, constantes para cada año se dan en la tabla. Si las vidas de las propuestas son de 10 años, los valores de rescate mínimos al término de este tiempo son despreciables y la TREMA es de 25% ¿qué propuestas deben seleccionarse si la cantidad de dinero disponible de la empresa es de \$500.000

Actividad	Propuesta	Inv. Inic	Ingreso/ año	Vida propuesta	TREMA	VAN
	A1	100000	30000	10	25	3892
	A2	200000	65000	10	25	7792.310
	A3	300000	85000	10	25	11669.23
	B1	50000	10000	10	25	1938.46
	B2	100000	50000	10	25	3923
	B3	150000	60000	10	25	5861.5
	B4	200000	70000	10	25	7800
	C1	150000	45000	10	25	5838.54
	C2	130000	80000	10	25	5123.07

Definición de variables:

X_{1j} = variable de decisión para la actividad A $j = 1, 3$

X_{2j} = variable de decisión para la actividad B $j = 1, 4$

X_{3j} = variable de decisión para la actividad C $j = 1, 2$

[variables booleanas] [0, 1]

Función Objetivo:

Maximizar el VAN

$$\text{Max } Z = -100000 + \sum (30000/(1+0.25)^t) * X_{11} + -200000 + \sum (65000/(1+0.25)^t) * X_{12} + \dots -130000 + \sum (80000/(1+0.25)^t) * X_{32}$$

Una vez hecho los cálculos correspondientes queda la función objetivo:

$$\text{Max } Z = 3892.3X_{11} + 7792.3X_{12} + 11669.32X_{13} + 1938.46 X_{21} + 3923.07X_{22} + 5861.538X_{31} + 7800X_{24} + 5838.76X_{31} + 5123.076X_{32}$$

Restricciones financieras:

$$100000X_{11} + 200000X_{12} + 300000X_{13} + 50000X_{21} + 100000X_{22} + 150000X_{23} + 200000X_{24} + 150000X_{31} + 130000X_{32} \leq 500000$$

$$X_{jk} \geq 0$$

$J = 1, 3$ (tres actividades)

$K = 1, 3$ para $j = 1$ Para A

$K = 1, 4$ para $j = 2$ para B

$K = 1, 2$ para $j = 3$ para C

Xjk booleana

Solución

$$X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$$

$$\text{Max} = 1959.23$$

De la actividad A se debe tomar la 2da propuesta

De la actividad B se debe tomar la 3ra propuesta

De la actividad C se debe tomar la 1ra propuesta

El máximo valor presente neto es \$1953 (es el resultado en el tiempo cero de los flujos efectivos generados menos los desembolsos iniciales).

Ejercicio de Selección de Proyectos de Inversión

Una compañía se encuentra actualmente analizando las propuestas de inversión de 4 de sus áreas más importantes. Las propuestas de inversión del área A son mutuamente excluyentes. El área B es obligatoria, es decir, es obligatorio seleccionar una propuesta de inversión en ella. En el área C la propuesta 2 es contingente a la propuesta 1 y la propuesta 3 lo es a la propuesta 1 o 2 respectivamente. En el área D la propuesta 2 es contingente a la 1 o 3. La tabla que se muestra da la información necesaria de los proyectos. Si el dinero disponible de esta compañía para nuevas inversiones es de 1'000.000 ¿qué propuestas deben ser seleccionadas?

Área	Propuesta	Inversión Inic.	Ingresos/año	VAN
	A1	300000	120000	9806.45
	A2	400000	140000	13053.716
	A3	500000	100000	16236.56
	B1	700000	300000	22903.23
	B2	800000	340000	26172
	C1	350000	140000	11440.86
	C2	100000	40000	3268.28
	C3	80000	35000	2618.28
	D1	380000	160000	12430.11
	D2	150000	60000	4903.23
	D3	250000	90000	8161.29

La vida útil de cada propuesta es de 5 años y la tasa de recuperación mínima atractiva es del 30%.

Programación Multiobjetivo. PMO

La programación lineal es un método matemático que sirve para optimizar una función llamada objetivo sujeta a una serie de restricciones, presentando las dos características fundamentales siguientes:

1. La relación entre las variables debe ser lineal.
2. La función objetivo a optimizar debe ser única.

Estas características se han convertido en los tiempos actuales en desventajas, por cuanto las relaciones que se establecen en los procesos en raras ocasiones es lineal y los objetivos que se persiguen son múltiples más que único.

La primera característica (desventaja) puede ser resuelta haciendo cambios de variables o pueden asumirse relaciones lineales con cierto grado aceptable de error.

Veremos 6 formas para resolver la PMO, de ellas estudiaremos las dos últimas.

Forma 1. Escoger el criterio más importante.

Se tienen p criterios $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ y se toma Z_m como el más relevante, los pasos a seguir serán:

- Incorporar al sistema de restricciones los restantes criterios en la forma:

$$Z_i \{ > < \} Z_i \quad i=1, p; \quad i \neq m$$

cota superior o inferior del criterio investigado.

- Resolver el nuevo problema de P.L. (con las restricciones incorporadas) considerando como función objetivo la función o criterio Z_m .

es decir, $\max$ o $\min$ Z_m

El problema se convierte a unicriterial.

Desventajas

- Resulta difícil poder escoger un criterio como el mayor de un conjunto de criterios.
- Es poco exacto poder escoger los valores Z_i , como términos independientes.

Forma 2. Método de la Función Ponderada.

Formación de un criterio general en forma de función ponderada cuando hay la posibilidad de medir la significatividad de cada criterio.

Se tienen p criterios $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$

- Con la ayuda de un experto se escogen los coeficientes de ponderación de cada criterio, sean estos $\alpha_i; \dots, i=1, n$

- Formar el criterio general $Z = \sum_{i=1}^b \alpha_i Z_i$ con $\sum_{i=1}^b \alpha_i = 1$
- Resolver el problema unicriterial con la función Z antes mencionados.

Desventajas:

- La tarea se convierte en compleja cuando los p criterios no se expresan en una única unidad de medida, e incluso cuando se refieren a diferentes formas de optimizar (max o min).
- Es difícil la creación del sistema de coeficientes de ponderación para los diversos criterios.

Forma 3. Método de los pasos sucesivos.

- Organizar los p criterios en orden de importancia, $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$
- Resolver el problema para el 1er. criterio Z_1 (el de mayor importancia), sin tomar en cuenta los criterios restantes. Se obtiene así la solución óptima Z_1 para el criterio 1.
- Analizar con un experto la posibilidad de disminución del criterio en una cantidad β_1 (caso de máximo)

$$Z_1 < \beta_1$$

- Incluir la restricción: $Z_1 - \beta_1 < Z_1 < Z_1$ en el sistema de restricciones
- Resolver el nuevo problema para el criterio Z_2 , incluyendo las restricciones c) obteniendo Z_2 . Aplicar b) y c) para el criterio 2)
- Repetir en pasos a), b) y c) para los restantes criterios, resolviendo en cada caso el modelo ampliado en las restricciones pertinentes. De esta forma al resolver el criterio p se tendrá la solución multicriterial del problema.

Desventajas:

- Es un método muy trabajoso y en cada criterio se debe resolver el sistema con una restricción adicional.
- Es necesaria la ayuda de un experto en el sistema para el cálculo de los β_i .

Forma 4. Optimización de Pareto.

Deben hacerse todos los puntos extremos del conjunto de puntos extremos de cada solución obtenida según cada criterio y escoger aquellas soluciones, en las cuales ningún indicador técnico económico pueda ser mejorado sin el empeoramiento de otro indicador (óptimo de Pareto).

Estas soluciones se le presentan al experto que toma las decisiones el cual deberá tener la solución óptima más conveniente al sistema. En la literatura especializada este criterio se toma exclusivamente cuando no hay posibilidad alguna de aplicar los criterios anteriores, este es un criterio útil en el plano teórico.

Desventajas:

- Este método se torna extremadamente laborioso al tener que encontrar los puntos extremos de cada uno de los p criterios. En ocasiones es casi imposible el cálculo de los puntos extremos para algunos criterios complejos.
- La labor del experto que toma la solución se hace muy complejo.

Forma 5. Modelo de programación objetivo [Goal programming model] META.

Se tiene el siguiente problema de P.L. multiobjetivo:

F.O.1

$$\begin{array}{ll} \min & \\ \text{o} & Z = \sum_{i=1}^n C^1_i X_i \\ \max & \end{array}$$

F.O.2

$$\begin{array}{ll} \min & \\ \text{o} & Z = \sum_{i=1}^n C^2_i X_i \\ \max & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{F.O.K} \\ \text{min} \\ \text{o} \\ \text{max} \end{array} \quad Z = \sum_{i=1}^n C^k_i X_i$$

$$X_i > 0 \quad i=1,n$$

Sujeto a las restricciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \{ <, =, > \} B_j \quad j = 1, m$$

1) Se resuelve el problema de P.L. mono objetivo con cada una de las k funciones objetivas y se tiene la siguiente notación.

b_j - valor óptimo del objetivo j ($j = 1,k$)

- d_j - sub-evaluación del objetivo j

+ d_j - sobre evaluación del objetivo j

W_j - factor peso para - d_j y + $d_j = b_j - L_j$

donde L_j = peor valor posible para el objetivo j

- Mínimo valor (límite inferior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de maximización)
- Máximo valor (límite superior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de minimización)

Es decir, se crea la tabla:

objetivo número	óptimo	valor peor	factor peso
j	b_j	L_j	W_j

2) Se convierte el problema anterior (k problemas individuales de P.L.) en un problema mono objetivo como sigue:

$$\text{Minimizar } \sum d_j + \sum +d_j \quad (j= 1,k)$$

Sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n C^1_i X_i + W^-_1 d_1 - W^+_1 d_1 = b_1$$

$$\sum_{i=1}^n C^2_i X_i + W^-_2 d_2 - W^+_2 d_2 = b_2$$

Nuevas restricciones se incrementa una restricción por cada función objetivo del problema de multi-objetividad

$$\sum_{i=1}^n C^k_i X_i + W^-_k dk - W^+_k dk = b_k$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \{ <, =, >, \} B_j \quad j = 1, m$$

$$X_i, -dk, +dk > 0$$

Ventajas:

- Es un método efectivo para lograr de una vez una gradual suavización de cada uno de los objetivos del problema.
- Con trabajar con los valores que da el análisis de sensibilidad para los C_j (peores valores de la f. o.) se puede hacer el análisis para el cálculo de L_j sin necesidad de expertos.

Desventajas:

- Es trabajoso al tener que resolverse por separado cada uno de los objetivos y conformar el nuevo problema global.

Forma 6. Programación Lineal Multiobjetivo. PLMO.

Planteamiento del Problema:

1. Variables: Dos tipos de variables:

- Variables de Decisión. X_i (esenciales del problema)
- Variables de Desviación. (dk^-) , (dk^+) para cada objetivo.

dk^- = desviación por exceso de la función objetivo k .

dk^+ = desviación por defecto de la función objetivo k .

2. Restricciones: Dos tipos de restricciones

- Restricciones del Modelo. Estructuradas. Son las restricciones que no tienen que ver con las metas. Restricciones del Sistema.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \{ <, =, >, \} B_j \quad j = 1, m$$

- Restricciones de Metas. Tienen relación con las Metas u objetivos propuestos. Para cada meta se añade una restricción del tipo:

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i + dk^- + dk^+ = b_k \quad k = 1, K \text{ número de metas.}$$

La omisión de cualquier tipo de variables de desviación en las restricciones de Meta ACOTA la meta en la dirección omitida. Omitir dk^- coloca una cuota superior a la meta. Omitir dk^+ coloca una cuota inferior a la meta.

3. Función Objetivo: Minimizar las Desviaciones de las Metas.

- $\text{Min } Z = \sum dk^- + dk^+$ Función Objetivo sin prioridad $k = 1, K$
- $\text{Min } Z = \sum P_k [w_k (dk^-) + w_k (dk^+)]$ Función Objetivo con Prioridad P_k y preferencias W_k .

Ejemplo de PMO: para la selección de alternativas energéticas (planificación energética) en un proyecto de comunidad rural ambientalmente sostenible ubicada en las áreas cañeras de un Central Azucarero, en un municipio de la Provincia de Cienfuegos, Cuba.

CASO DE ESTUDIO: Planteamiento del problema:

La comunidad comprende 30 viviendas, con una población total estimada de 120-200 personas y un área de 9 000 m², con disponibilidad de agua subterránea, bosques forestales con fines energéticos, dos lagunas naturales, barro para construcción de viviendas y un módulo pecuario que genera residuos con potencial energético apreciable.

Alternativas Energéticas

La energía se utiliza en una amplia gama de actividades dentro de un sistema rural. Para fines prácticos, sin embargo, los requerimientos energéticos se pueden dividir en cuatro servicios básicos: calor, potencia mecánica, iluminación y comunicaciones.

Una vía factible para atacar un problema de selección de alternativas energéticas lo constituye el método de Saaty, también conocido como Método de Jerarquía Analítica.

Matriz de alternativas Recurso-Use Final

Para abordar un problema de este tipo es necesario primeramente conformar una matriz de alternativas recurso-uso final. En la tabla 1 se muestra dicha matriz. Como se puede observar se consideraron todas las fuentes posibles a utilizar, tanto las convencionales como las renovables, pues el propio proceso de selección multicriterial seleccionará las mejores variantes.

Para la aplicación del método se utilizan diferentes criterios (tabla 3), que son recogidos en la función, definida para este caso (1). En este sentido se prefirió procesar las evaluaciones realizadas por los expertos con dicha función, y no utilizar algún tipo de software especializado, pues de esta manera resulta más ilustrativa y sencilla la demostración.

Tabla 1- Posibles combinaciones recurso - uso final. Variables del Modelo

RECURSOS		USOS FINALES					
		Cocción de alimentos	Bombeo de Agua		Iluminación	Aplicaciones eléctricas	Servicio de agua caliente
Queroseno		1	-		-	-	-
Diesel		-	12		-	-	-
Gas Licuado		2	-		-	-	-
Carbón vegetal		3	-		-	-	-
Biogás		4	-		-	-	-
Leña		5	-		-	-	-
Briquetas de paja de caña		6	-		-	-	-
Solar Térmica		7	-		-	-	29
Solar Fotovoltaica		8	13		19	24	-
Energía	Aerogeneradores	-	14		20	25	-
Eólica	Energía mecánica	-	15		-	-	-
Hidroelectricidad		9	16	16'	21	26	30
Electricidad de la red		10	17	17'	22	27	31
Electricidad generada con diesel		11	18		23	28	32

12, 15, 16' y 17' - Bombeo Centralizado.

Modelos para la Solución del problema:
 Los objetivos del Modelo de Programación Lineal Multiobjetivo propuesto son los siguientes:

- Minimizar los costos directos.
- Maximizar la eficiencia del sistema.
- Minimizar el uso de derivados del petróleo.
- Minimizar emisión de CO_x al medio.
- Minimizar emisión de SO_x al medio.
- Minimizar emisión de NO_x al medio.
- Maximizar el uso de fuentes locales y derivados de la biomasa cañera.

Las restricciones que se plantearon coinciden con los usos finales que se establecieron fijando determinadas demandas mínimas a satisfacer en cada uso final y se muestran a continuación:

Las restricciones del problema:

1. Garantizar la energía anual necesaria para la cocción de alimentos. Con un valor calculado de 404106 Kwh/año.
2. Garantizar la energía anual necesaria para el bombeo de agua. Con un valor calculado de 2506 Kwh/año.
3. Garantizar la energía anual necesaria para la iluminación. Con un valor calculado de 4320 Kwh/año.
4. Garantizar la energía anual necesaria para otras aplicaciones eléctricas. Con un valor calculado de 15308 Kwh/año.
5. Garantizar la energía anual necesaria para el calentamiento de agua. Hasta 8 horas/día,
6. Limite de la energía solar térmica para la cocción de alimentos.
7. Disponibilidad de queroseno

El Modelo Matemático obtenido presenta 32 variables de decisión, 14 variables de desviación, 7 variables de holgura, 14 restricciones de ellas 7 restricciones de meta y las 7 restantes del sistema y una función objetivo multicriterial.

Para el modelo, según los expertos consultados, se establecieron las siguientes prioridades:

Prioridad 1, objetivos 1, 4, 5 y 6;

Prioridad 2, objetivos 3 y 7;

Prioridad 3, objetivo 2.

Tomando como valores de las prioridades $p_i = 10^{-3-i}$

Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 9 y 10.

Tabla 2. Fuentes seleccionadas en la optimización multiobjetivo.

Usos Finales		Fuentes seleccionadas y resultados de las variables (xi ,kW/h / año)
Cocción de alimentos		Biogás (39 425), Solar térmica (9 850)
Bombeo de Agua	Individual	Solar Fotovoltaica (360)
	Colectivo	Electricidad de la red (2 146)
Iluminación		Solar Fotovoltaica (4 320)
Otras aplicaciones eléctricas		Solar Fotovoltaica (15 308)
Calentamiento de agua		Solar Térmica (50 508)

Tabla 3. Valores de las funciones objetivos.

Función Objetivo	Optimización Monoobjetivo (costos)	Optimización Multiobjetivo
Z1- Costos totales, USD / año	8 530.241	13 756.69
Z2 - Consumo energía primaria, kW/h / año	668 494.31	773 324.39
Z3 - Energía derivados petróleo, kW/h / año	22 134	2 146.59
Z4 - Emisiones COx, Kg / año	45 557.6	3 102.49
Z5 - Emisiones SOx, Kg / año	1 201.64	258.50
Z6 - Emisiones NOx, Kg / año	193.36	13
Z7 - Energía fuentes locales, kW/h / año	39 425	39425
Valor de la función objetivo global (expresión1)	154.84	

Como se puede apreciar en los resultados resumidos en la tabla 2, al incluir los criterios medio-ambientales en la selección de las fuentes energéticas, las fuentes renovables de energía son promovidas como las mejores variantes en la satisfacción de las necesidades energéticas de la comunidad.

Sin embargo, si se tiene en cuenta solo el criterio económico, lógicamente la solución se desplazará hacia el uso de los combustibles tradicionales que posibilitan lograr mejores indicadores económicos.

En la tabla 3 se realiza una comparación de algunos indicadores importantes de la optimización multiobjetivo, con respecto a una optimización teniendo en cuenta solo el criterio económico. En dicha tabla se puede observar que la optimización multiobjetivo arroja resultados mucho más compatibles con el medio ambiente y acordes con los principios del desarrollo sostenible; en este sentido se observa que con esta solución se evita la emisión al medio ambiente por año de 42 toneladas de CO_x, 943 kilogramos de SO_x y 180 kilogramos de NO_x.

Por otra parte, al considerar los factores ambientales en la selección, se puede apreciar que los costos directos aumentan, aspecto que entra en contradicción con los análisis tradicionales de selección de fuentes de energía. En este sentido se puede señalar, que para la ejecución de un proyecto de inversión generalmente se dispone de un capital limitado; evidentemente, si incluimos esta restricción en el modelo la solución estaría entre las dos variantes analizadas, lo cual se acercaría más a las condiciones reales de nuestros países.

La PMO para la selección y evaluación de criterios.

Este tipo de análisis es utilizado en la selección de criterios, es un método diferente, para las situaciones en las que las ideas, sentimientos y emociones se cuantifican para proporcionar una escala numérica que prioriza alternativas de decisión.

Entre estos métodos se estudia:

- Utilidad
- Ponderación lineal
- Método analítico de jerarquía (Saaty)
- Método Delphi
- Otros

Ponderación lineal

Se tiene la matriz de diferentes alternativas por filas y diversos criterios por columna y se quiere la selección y el ordenamiento de las alternativas.

Matriz de pago

		Criterios		
		C ₁	C ₂	C _k
Alternativas (F _{m x k})	A ₁	R ₁₁	R ₁₂	R _{1k}
	A ₂	R ₂₁	R ₂₂	R _{2k}
	A _m	R _{m1}	R _{m2}	R _{mk}
	Pesos	W ₁	W ₂	W _k

m: número de alternativas

k: número de criterios

A_i: Alternativas

C_j: Criterio discreto k

W_j: factor de peso

R_{ij}: Valor que se le da a la alternativa i según el criterio j

El método consiste en realizar una ponderación lineal de los criterios

$$F_i = \frac{\sum_{j=1}^k w_j * r_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_j}$$

i=1,m, alternativas

k, criterios

Con este valor se permite la selección y ordenamiento de las alternativas

Desventajas de este método: Los resultados finales dependen mucho de las evaluaciones realizadas, normalizaciones, escalas y selección de pesos, por lo que se recomienda el trabajo en grupos de expertos.

Método analítico jerárquico (MJA). Saaty

Se tiene la matriz de comparación de criterios K x K

		Criterios (B)		
A _{k x k} (A)	K (k número de criterios)	C ₁	C ₂	C _k
	C ₁	A _{ij} Matriz de comparación por (k x k)		
	C ₂			
	C _k			

Val-
ores
de a_{ij}

1	Si los criterios tienen igual importancia	Ambos criterios contribuyen de igual manera al objetivo
3	Débil A con relación a B	Es levemente mejor B que A
5	Fuerte A con relación a B	Se ve más clara A que B
7	Muy fuerte A con relación a B	A domina claramente a B
9	Absolutamente A > B	A es absolutamente mejor que B
2,4,6,8	Valores intermedios entre dos apreciaciones	Sirven para afinar el juicio entre dos criterios

		C_1	C_2		C_k
A_{kk}	C_1	A_{11}	A_{12}		A_{1k}
	C_2	A_{21}	A_{22}		A_{2k}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	C_n	A_{k1}	A_{k2}		A_{kk}
Suma de las columnas		$\sum_{i=1}^k a_{i1}$	$\sum_{i=1}^k a_{i2}$		$\sum_{i=1}^k a_{in}$

Se normaliza la matriz de criterios dividiendo cada elemento de la columna por la suma de la misma columna.

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^k a_{ij}} \quad j=1,k \quad N_{k \times k} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\sum_{i=1}^k a_{i1}} & \frac{a_{12}}{\sum_{i=1}^k a_{i2}} & \dots & \frac{a_{1k}}{\sum_{i=1}^k a_{ik}} \\ \frac{a_{k1}}{\sum_{i=1}^k a_{i1}} & \frac{a_{k2}}{\sum_{i=1}^k a_{i2}} & \dots & \frac{a_{kk}}{\sum_{i=1}^k a_{ik}} \end{bmatrix}$$

	C_1	C_2		C_k
C_1	a_{11}	a_{12}		a_{1k}
C_2	a_{21}	a_{22}		a_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_k	a_{k1}	a_{k2}		a_{kk}
Suma de las columnas	$\sum_{i=1}^k a_{i1}$	$\sum_{i=1}^k a_{i2}$		$\sum_{i=1}^k a_{ik}$

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_{ij}}{k} = w_i \quad j = \overline{1, k} \text{ Promedios de los criterios} \quad k = \overline{1, k} \text{ (pesos de los criterios)}$$

Ahora se calculan las matrices de las alternativas por cada criterio de igual forma que antes, con los criterios de comparación ya estudiados

Matriz de las alternativas para cada criterio k ($j = \overline{1, k}$)

b_{ij} idéntico a a_{ij} , pero, bajo el criterio k se dan los valores

	A_1	A_2		A_m
A_1	b_{11}	b_{12}		b_{1m}
A_2	b_{21}	b_{22}		b_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	b_{m1}	b_{m2}		b_{mm}
Suma de las columnas	$\sum_{i=1}^m b_{i1}$	$\sum_{i=2}^m b_{i2}$		$\sum_{i=1}^m b_{im}$

Se normaliza la matriz de alternativa para el criterio k_j dividiendo cada elemento entre la suma de su columna respectiva.

$$b_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^m b_{ij}} \quad i = 1, \overline{m}$$

$$N_{mxm}^k = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{\sum b_{i1}} & \frac{b_{12}}{\sum b_{i2}} & \dots & \frac{b_{1m}}{\sum b_{im}} \\ \frac{b_{m1}}{\sum b_{i1}} & \frac{b_{m2}}{\sum b_{i2}} & \dots & \frac{b_{mm}}{\sum b_{im}} \end{bmatrix} \text{ Matriz normalizada}$$

Se calcula el promedio de cada fila de valores normados.

$$w_i^k = \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij}}{m}$$

Promedio de la fila de la alternativa i para el criterio k (promedio de las alternativas (i) según el criterio k en la matriz normalizada), o sea, peso de las alternativas según el criterio k

Ahora se calcula para cada alternativa un valor promedio por cada criterio.

Alternativa $i = 1, \overline{m}$

$$\sum_{k=1}^k w_i^k w_i = v(A_i)$$

Este valor será el peso de la alternativa i ($i = 1, \overline{m}$) según los criterios k

Con estos valores se ordenan ascendentemente y nos da el orden de importancia de las alternativas según los criterios utilizados.

Consistencia de una matriz

Una matriz B_{lxl} es consistente si $b_{ij} b_{jk} = b_{ik}$ para todo i, j y k , lo que implica que las filas y columnas de la matriz A son LD

Nota: Existen muchos métodos para calcular si una, matriz es LD o no en el algebra lineal, en nuestro caso probaremos otro método. Se dice que la matriz B_{lxl} es consistente si la decisión de los valores (b_{ij}) muestran un juicio coherente o si el nivel de incoherencia es racional y aceptable. Una matriz es consistente si al calcular sus matrices normalizadas sus columnas son iguales.

Se puede probar la consistencia de una matriz de comparación según los criterios A_{kxk} , N_{kk} , o las matrices de las alternativas para el criterio k , A_{mxm}^k , N_{mxm}^k .

Método propio para la consistencia de las matrices: MJA

Sea $A^k_{n \times n}$ la matriz a la que se le quiere probar la consistencia.

$A^k_{n \times n} W^k = N_{\max} W^k$ donde $N_{\max} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} * W_j^k \right]$ suma de los elementos de la columna resultante de A^k si $N_{\max} \rightarrow N$ más consistente será la matriz A^k

Sumando los elementos de la columna resultante de $A^k W$

$$A^k_{n \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad W^k = \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ w_n^k \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$A^k * W^k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad N_{\max} = \sum_{i=1}^m c_i$$

Se prueba que entre más cercana sea $M_{\max}$ a N más consistente será la matriz de comparación A^k . Como resultado del método analítico jerárquico (MJA) se calcula la razón de consistencia como

$$RC = JC/JA$$

n-orden de la matriz A

$$JC \text{ índice de consistencia de } A^k = \frac{N_{\max} - N}{N - 1}$$

$$JA \text{ índice de consistencia aleatoria de } A^k = \frac{1.98 - (N - 2)}{N}$$

$RC \leq 0.1$ el nivel de consistencia de A^k es aceptable

En caso contrario la inconsistencia de A^k es alta y se aconseja al decisor comprobar los valores a_{ij} de A nuevamente

Determinación del vector peso de criterios

Una vez comprobada la consistencia de la matriz A^k se puede ir a determinar los pesos de los criterios que se obtienen mediante los vectores propios de la matriz:

$$(A^k - \lambda J) w = 0 \quad \lambda \text{ auto vector } \in \mathbb{R}$$

Una vez calculado el autovector λ se pasa a sustituir en 1 para encontrar el autovector de los pesos dominantes de los criterios w
 Veamos ahora el ejemplo de selección de alternativas energéticas resuelto por esta vía:

Matriz de alternativas Recurso-Usó Final

Para abordar un problema de este tipo es necesario primeramente conformar una matriz de alternativas recurso-uso final. En la tabla 1 se muestra dicha matriz. Como se puede observar se consideraron todas las fuentes posibles a utilizar, tanto las convencionales como las renovables, pues el propio proceso de selección multicriterial seleccionará las mejores variantes.

Para la aplicación del método se utilizan diferentes criterios (tabla 4), que son recogidos en la función, definida para este caso (1). En este sentido se prefirió procesar las evaluaciones realizadas por los expertos con dicha función, y no utilizar algún tipo de software especializado, pues de esta manera resulta más ilustrativa y sencilla la demostración.
 Ponderación Lineal:

$$F_i = \frac{W_i \left(\frac{C_{mm}}{C} \right) + W_2.E_g + W_3 \left(\frac{A_3}{3} \right) + W_4 \left(\frac{Cp}{3} \right) + W_5 \left(\frac{F_l}{3} \right) + W_6 \left(\frac{3}{IA} \right)}{\sum_{i=1}^6 W_i} \tag{1}$$

W_i	Factores de peso	Cp	Calificación requerida del personal: 1 -muy calificado, 2 -medianamente calificado, 3 -poco calificado
C_{mm}	Costo directo mínimo de referencia, es el menor de los costos de las combinaciones consideradas en cada uso final, \$/kWh	F_l	Aprovechamiento de fuentes locales de energía: 1-fuente a más de 10 km, 2-fuente entre 1 y 10 km, 3 -fuente a menos de 1 km
C	Costo directo de la combinación que se evalúa, \$/kWh	IA	Impacto Ambiental $IA=I+E+R$ I-Intensidad del impacto: 1-baja, 2 -media, 3 -alta

E_g	Eficiencia global $E_g = E_{ext} \cdot E_{uf}$ con E_{ext} Eficiencia externa y E_{uf} Eficiencia de uso final	E-Extensión del impacto 1- baja, 2- media, 3- alta
A_s	Aceptación social: 1- poco aceptada, 2- medianamente aceptada, 3- muy aceptada	R- Reversibilidad del impacto 1- reversible, 2-parcialmente, 3- irreversible

Determinación de los factores de peso

Para la determinación de los factores de peso se utiliza el Método Jerárquico de Saaty. Las evaluaciones propuestas se realizaron según la escala de Saaty (tabla 5)

Tabla 4. Criterios de Selección

No.	Criterios C_j
1	Costos internos
2	Eficiencia
3	Aceptación social
4	Calificación del personal
5	Aprovechamiento de las fuentes locales
6	Impacto ambiental

Tabla 5. Matriz de comparaciones de criterio i (fila) con respecto al j (columna)

Criterios	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	1	8	3	9	5	1
C_2	1/8	1	1/7	3	1/5	1/8
C_3	1/3	7	1	8	3	1/3
C_4	1/9	1/3	1/8	1	1/7	1/9
C_5	1/5	5	1/3	7	1	1/5
C_6	1	8	3	9	5	1

Para determinar si las inconsistencias cometidas invalidan la matriz propuesta, se sigue la siguiente metodología propuesta por Saaty:

1. Normalizar los valores de cada columna de la matriz respecto al total por columna y determinar la suma y el promedio por fila

Criterios	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	Suma	Promedio
C ₁	0.36	0.27	0.39	0.24	0.35	0.36	1.97	0.32
C ₂	0.04	0.03	0.02	0.08	0.01	0.04	0.21	0.03
C ₃	0.12	0.24	0.13	0.21	0.20	0.12	1.02	0.17
C ₄	0.04	0.01	0.02	0.02	0.01	0.04	0.13	0.02
C ₅	0.07	0.17	0.04	0.16	0.07	0.07	0.60	0.10
C ₆	0.36	0.27	0.39	0.24	0.35	0.36	1.97	0.32
Total	2.77	29.33	7.59	37	14.34	2.77	-	-

La suma y los promedios por fila reflejan la ordenación jerárquica de los criterios.

1. Obtener una nueva matriz que resulta de la multiplicación de las columnas de la matriz de comparaciones, por los promedios de cada fila; determinándose posteriormente la suma resultante por fila.

Criterios	C ₁ (x0.32)	C ₂ (x0.03)	C ₃ (x0.17)	C ₄ (x0.02)	C ₅ (x0.10)	C ₆ (x0.32)	Suma
C ₁	0.33	0.24	0.48	0.18	0.5	0.33	2.06
C ₂	0.04	0.03	0.02	0.06	0.02	0.04	0.21
C ₃	0.11	0.21	0.16	0.12	0.3	0.11	1.01
C ₄	0.03	0.01	0.03	0.02	0.01	0.03	0.13
C ₅	0.17	0.15	0.05	0.14	0.10	0.07	0.58
C ₆	0.33	0.24	0.48	0.18	0.5	0.33	2.06

2. Dividir las sumas por las filas del paso 2, por los promedios por fila del paso 1

$$\begin{pmatrix} 2,06 \\ 0,2 \\ 1,01 \\ 0,13 \\ 0,58 \\ 2,06 \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,03 \\ 0,17 \\ 0,02 \\ 0,10 \\ 0,32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,24 \\ 7 \\ 6,31 \\ 6,5 \\ 5,8 \\ 6,24 \end{pmatrix}$$

3. Calcular el Índice de Coherencia

$$IC = \frac{(\lambda_{max} - n)}{(n-1)} \times 100 \quad 2) \quad \text{donde } \lambda_{max} = \frac{6,24+7+6,31++6,5+5,8+6,24}{n} = 6,35$$

n: Número de criterios

IC: 7%

4. Calcular el Cociente de Coherencia

$$CC = \frac{IC}{IC_{aleatorio}} \times 100 \quad (3)$$

$IC_{aleatorio}$ Índice de Coherencia aleatorio: se determina en función de n valores aleatorios resultan de generar un gran número de matrices con evaluaciones entre 9 y 1/9.

$$CC = \frac{0,07}{1,24} = 5,6\%$$

Índice de Coherencia Aleatorio

Tamaño de la matriz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Índice de coherencia	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Tabla Matriz de evaluaciones

5. Comprobación

Para que se acepte la matriz de comparaciones debe cumplirse que $CC < IC$. En este caso $5.6\% < 7\%$, por lo que las inconsistencias cometidas no invalidan las evaluaciones realizadas. Después de comprobada la coherencia de las evaluaciones realizadas, se procede a determinar los pesos de los criterios. El vector peso w resulta el autovector dominante de la matriz de comparaciones, por lo que puede plantearse la siguiente ecuación:

$$(A - \lambda I) (W) = 0 \quad (4)$$

Donde

A Matriz de comparaciones

λ Autovalores de la matriz

W Vector de los pesos

I Matriz Idéntica

Los autovalores de la matriz se obtienen de la siguiente ecuación $|A - \lambda I| = 0$ (5)

$$25.10^8 \lambda - 15.10^9 \lambda^4 + 55.10^9 \lambda^3 - 44.42.10^7 \lambda^2 - 21.53.10^9 \lambda - 24.83.10^8 = 0$$

Autovalor dominante: $\lambda = 4$

La desviación del valor de λ con respecto al número de criterios “n”, es una medida de las inconsistencias cometidas en las comparaciones realizadas.

Al sustituir el valor de I en la expresión (4) se obtiene el autovector dominante, o vector de los pesos:

$$W = (0.652, 0.070, 0.325, 0.045, 0.190, 0.652)$$

Después de obtenido el vector de los pesos se procede a evaluar la expresión (1), conformando la matriz de evaluaciones. Los coeficientes de costos y las eficiencias utilizadas en los cálculos [7], se muestran en las tablas de costos y eficiencia respectivamente.

Tabla Coeficientes de costos

RECURSOS		USOS FINALES					
		Cocción de Alimentos	Bombeo de agua		Iluminación	Aplicaciones eléctricas	Servicio de agua caliente
Queroseno		0.0424	-		-	-	-
Diesel		-	0.5057		-	-	-
Gas Licuado		0.0419	-		-	-	-
Carbón vegetal		0.1183	-		-	-	-
Biogás		0.0259	-		-	-	-
Leña		0.1286	-		-	-	-
Briquetas de paja de caña		0.0635	-		-	-	-
Solar Térmica		0.0066	-		-	-	0.01
Solar Fotovoltaica		0.2733	1.3		0.649	0.5591	-
Energía	Aerogeneradores	-	-		0.449	0.4257	-
Eólica	Energía mecánica	-	2.159		-	-	-
Hidroelectricidad		0.4158	1.415	0.445	0.9341	0.7491	0.4047
Electricidad de la red		0.1646	1.201	0.156	0.4341	0.2807	0.1547
Electricidad generada con diesel		0.2208	1.256		0.5441	0.4891	0.2097

Tabla Eficiencia (%)

RECURSOS		USOS FINALES										
			Cocción de alimentos		Bombeo de agua		Iluminación		Aplicaciones eléctricas		Servicio de agua caliente	
		E_{ext}	E_{uf}	E_{global}	E_{global}	E_{uf}	E_{global}	E_{uf}	E_{global}	E_{uf}	E_{global}	E_{uf}
Queroseno		72	40	28.8	-	-	1	0.2	-	-	40	28.8
Diesel		72	-	-	30	21.6	-	-	-	-	-	-
Gas Licuado		72	50	36	-	-	-	-	-	-	50	36
Carbón vegetal		30	15	4.5	-	-	-	-	-	-	15	4.5
Biogás		88	50	44	-	-	1	0.8	-	-	50	44
Leña		95	10	9.5	-	-	-	-	-	-	10	9.5
Briquetas de paja de caña		94	25	23.5	-	-	-	-	-	-	25	23.4
Solar Térmica		100	20	20	-	-	-	-	-	-	20	20
Solar Fotovoltaica		10	80	8	80	8	40	4	60	6	80	8
Energía	Aerogeneradores	40	-	-	80	32	40	16	60	24	-	-
Eólica	Energía mecánica	40	-	-	60	24	-	-	-	-	-	-
Hidroelectricidad		50	80	40	80	40	40	20	60	30	80	40
Electricidad de la red		23	80	18.4	80	18.4	40	9.2	60	13.8	80	18.4
Electricidad generada con diesel		28	80	23	80	23	40	11.5	60	16.8	80	23

Al enfrentar un problema de selección de fuentes energéticas, en primer lugar debe tenerse en cuenta el contexto y los intereses involucrados, con el fin de escoger el método apropiado, sobre todo cuando se quieren reducir los impactos negativos en el medio ambiente y emplear un tipo de energía más amigable con este.

En resumen, se promueve la utilización de la energía solar térmica y el biogás para la cocción de alimentos; la energía solar fotovoltaica y la energía eléctrica de la red para la demanda de electricidad; y de la energía solar térmica para el calentamiento de agua. El método empleado en la selección permite un ordenamiento de las opciones para cada uso final de la energía, sin constituir un proceso de optimización. En primer lugar

existen elementos subjetivos en el proceso y en segundo lugar no permite incorporar restricciones y condiciones específicas del proyecto, como puede ser el caso de la disponibilidad de recursos. En este sentido resulta importante complementar el análisis ya realizado con la aplicación de la Programación Multiobjetivo.

Método Delphi para la evaluación de alternativas

El método Delphi puede ser aplicado para evaluar alternativas, sometidas a un grupo de expertos a que den categorías de evaluación a las alternativas previamente seleccionadas por el facilitador.

Se tiene un grupo de N expertos ($N > 11$)

Se tiene un grupo de m alternativas o etapas.

Se establece un conjunto de k puntos de corte o categorías de evaluación del tipo de escala de Liker.

Muy adecuado, bastante adecuado, adecuado, poco adecuado, y no adecuado

Muy bien, bien, regular, mal, muy mal

A cada experto se la da la tabla siguiente

A cada experto se la da la tabla siguiente

	Categorías de evaluación			
Alternativas	C ₁	C ₂		C _k
A ₁	Evaluación dada por cada experto			
A ₂				
A _m				

El facilitador construye la tabla de resultados totales de los N expertos

	C_1	C_2	C_3		C_k
A_1	T_{11}	T_{12}	T_{13}		T_{1k}
A_2	T_{21}	T_{22}	T_{23}		T_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	T_{m1}	T_{m2}	T_{m3}		T_{mk}

Tratamiento estadístico

a) Construir la tabla de frecuencias acumuladas de T_l .

	C_1	C_2	C_3		C_k	Total
A_1	T_{11}	T_{12}	T_{13}		$\sum_{j=1}^k T_{1j}$	$\sum_{j=1}^k T_{1j} = T_1$
A_2	T_{21}	T_{22}	T_{23}		$\sum_{j=1}^k T_{2j}$	$\sum_{j=1}^k T_{2j} = T_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_m	T_{m1}	T_{m2}	T_{m3}		$\sum_{j=1}^k T_{mj}$	T_m

b) Construir la tabla de frecuencias acumuladas relativas.

	C_1	C_2		C_{k-1}
A_1	Definir cada elemento de la tabla anterior entre el número de expertos N			
A_2				
A_m				

$$A_i \dots\dots\dots \frac{\sum_{k=1}^k T_{ik}}{N}$$

Se tienen k criterios y se van a encontrar k-1 puntos de corte, por lo que la columna k no es necesaria.

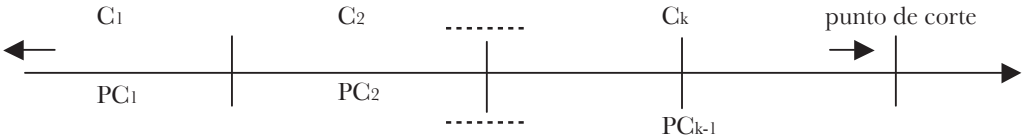
c) Trabajo con la tabla de la distribución normal.

Trabajar con la tabla de la distribución normal, se busca en cada casilla de la anterior el valor z_i correspondiente a la distribución normal, obteniéndose la tabla siguiente.

	C_1	C_2		C_{k-1}	Suma	P promedio	Valor promedio de los expertos a cada N-P alternativo
A_1	Z_{11}	Z_{12}		Z_{1k-1}	$\sum_{j=1}^k Z_{1j}$	$\sum_{j=1}^k Z_{1j} / k - 1 = Z_1$	$\frac{Z_{..}}{m.K} - Z_1$
A_2	Z_{21}	Z_{22}		Z_{2k-1}	$\sum_{j=1}^k Z_{2j}$	$\sum_{j=1}^k Z_{2j} / k - 1 = Z_2$	$\frac{Z_{..}}{m.K} - Z_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	Z_{m1}	Z_{m2}		Z_{mk-1}	$\sum_{j=1}^k Z_{mj}$	$\sum_{j=1}^k Z_{mj} / k - 1 = Z_m$	$\frac{Z_{..}}{m.K} - Z_m$
Puntos de corte	$\frac{\sum_{i=1}^m Z_{i1}}{PC_1}$	$\frac{\sum_{i=1}^m Z_{i2}}{PC_2}$		$\frac{\sum_{i=1}^m Z_{ik-1}}{PC_{k-1}}$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} Z_{ij}$		$N = \frac{Z_{..}}{m.K}$

Los puntos de corte sirven para determinar la categoría o grado de adecuación de cada etapa del procedimiento según la opinión de los expertos.

Los intervalos de confianza nos dan



La ubicación de los valores N-P de cada alternativa en el rayo numérico de los puntos de corte, nos dará el criterio que le otorga los expertos a cada una de las alternativas.

Ejemplo de Aplicación del Delphi:

La Formación docente asistencial en el diseño de la especialidad Enfermería Materno Infantil en Cuba.

En este documento se presentan criterios relacionados con la formación docente del profesor de enfermería Materno infantil, que pueden ser importantes para el desarrollo profesional de los especialistas en esta área.

Para cada uno de los criterios presentados a continuación, indique por favor la importancia que usted estima para su utilidad en el trabajo docente asistencial.

Emplee los valores entre 1 y 4.

Según la leyenda 1= nada, 2=Poco, 3 = Bastante, 4= Mucho. En el caso de no tener respuesta clara, marcar 1.

ELEMENTOS	C1 Muy Poco	C2 Poco	C3 Adecuado	C4 Mucho
Dominio del modelo del profesional de Enfermería.				
Vincula el modelo del profesional con las exigencias sociales.				
Concibe la formación desde los objetivos y su derivación.				
Conoce, relaciona y aplica el contenido de la enfermería.				
Selecciona adecuadamente el método de enseñanza que vincula la profesión con la formación.				
Utiliza los recursos materiales para vincular lo concreto con lo abstracto				
Evalúa el desempeño profesional del especialista.				
Utiliza el proceso instructivo para educar el modo de actuación deseado en la asistencia.				

La empatía en su desempeño lo hace modelo a seguir.				
Desde la formación crea el amor a la profesión.				
El ejemplo como asistencial es paradigmático en la formación.				
Aplica los principios éticos en el trabajo asistencial.				
Desde la formación promueve la continuidad asistencial del cuidado.				
Participa en procesos de actualización de su especialidad y se preocupa por la mejora continua.				
Promueve desde la actividad asistencial la reflexión crítica y valorativa.				
Desde la formación promueve la autonomía del paciente.				
Establece una comunicación personal con sustento en la actividad asistencial.				
Utiliza las potencialidades de la asistencia en la formación del especialista.				
Considera los problemas de salud de la comunidad para organizar el proceso de enseñanza y la investigación.				
Promueve acciones educativas y de comunicación social dirigidas a desarrollar comportamientos saludables.				
Demuestra comportamiento de un profesional comprometido.				
Promueve la sensibilidad por las expectativas y respuestas de los pacientes.				
Utiliza las evidencias de las investigaciones para implementar cambios en la práctica de enfermería.				

Resultados de la Aplicación:

Tabla Original	Muy Poco	Poco	Adecuado	Mucho
Criterios de Expertos	1	2	3	4
1	0	0	2	18
2	0	0	2	18
3	0	0	5	15
4	0	0	0	20
5	0	2	8	10
6	0	0	2	18
7	1	0	8	11
8	0	1	9	10
9	1	0	2	17
10	1	0	2	17
11	1	1	0	18
12	0	0	1	19
13	0	0	0	20
14	0	1	0	19
15	0	1	1	18
16	1	0	0	19
17	0	0	3	17
18	0	0	2	18
19	0	0	5	15
20	0	2	6	12
21	0	0	1	19
22	0	0	11	9
23	0	0	10	10

Tabla de Frecuencia Acumulada de los Expertos:

Tabla	Sumatoria de los resultados de cada celda por filas			
	1	2	3	4
1	0	0	2	20
2	0	0	2	20
3	0	0	5	20
4	0	0	0	20
5	0	2	10	20
6	0	0	2	20
7	1	1	9	20
8	0	1	10	20
9	1	1	3	20
10	1	1	3	20
11	1	2	2	20
12	0	0	1	20
13	0	0	0	20
14	0	1	1	20
15	0	1	2	20
16	1	1	1	20
17	0	0	3	20
18	0	0	2	20
19	0	0	5	20
20	0	2	8	20
21	0	0	1	20
22	0	0	11	20
23	0	0	10	20

Tabla de Frecuencias Relativas Acumulada:

Frecuencia relativa acumulada				
	1	2	3	4
1	0	0	0.1	1
2	0	0	0.1	1
3	0	0	0.25	1
4	0	0	0	1
5	0	0.1	0.5	1
6	0	0	0.1	1
7	0.05	0.05	0.45	1
8	0	0.05	0.5	1
9	0.05	0.05	0.15	1
10	0.05	0.05	0.15	1
11	0.05	0.1	0.1	1
12	0	0	0.05	1
13	0	0	0	1
14	0	0.05	0.05	1
15	0	0.05	0.1	1
16	0.05	0.05	0.05	1
17	0	0	0.15	1
18	0	0	0.1	1
19	0	0	0.25	1
20	0	0.1	0.4	1
21	0	0	0.05	1
22	0	0	0.55	1
23	0	0	0.5	1

Tabla de Distribución Normal Estandarizada Inversa de la Frecuencia Relativa Acumulada y Cálculos de los Puntos de Corte, p, N y N-p.

	Distribución Normal Estándar Inversa				p	N-p
	1	2	3	4	5	6
1	-3.8	-3.8	-1.28155157	-8.88155157	-2.96051719	1.1348297
2	-3.8	-3.8	-1.28155157	-8.88155157	-2.96051719	1.1348297
3	-3.8	-3.8	-0.67448975	-8.27448975	-2.75816325	0.93247576
4	-3.8	-3.8	-3.8	-11.4	-3.8	1.97431251
5	-3.8	-1.281552	-1.3921E-16	-5.08155157	-1.69385052	-0.13183697
6	-3.8	-3.8	-1.28155157	-8.88155157	-2.96051719	1.1348297
7	-1.644854	-1.644854	-0.12566135	-3.4153686	-1.1384562	-0.68723129
8	-3.8	-1.644854	-1.3921E-16	-5.44485363	-1.81495121	-0.01073628
9	-1.644854	-1.644854	-1.03643339	-4.32614064	-1.44204688	-0.38364061
10	-1.644854	-1.644854	-1.03643339	-4.32614064	-1.44204688	-0.38364061
11	-1.644854	-1.281552	-1.28155157	-4.20795676	-1.40265225	-0.42303524
12	-3.8	-3.8	-1.64485363	-9.24485363	-3.08161788	1.25593039
13	-3.8	-3.8	-3.8	-11.4	-3.8	1.97431251
14	-3.8	-1.644854	-1.64485363	-7.08970725	-2.36323575	0.53754826
15	-3.8	-1.644854	-1.28155157	-6.72640519	-2.24213506	0.41644758
16	-1.644854	-1.644854	-1.64485363	-4.93456088	-1.64485363	-0.18083386
17	-3.8	-3.8	-1.03643339	-8.63643339	-2.87881113	1.05312364
18	-3.8	-3.8	-1.28155157	-8.88155157	-2.96051719	1.1348297
19	-3.8	-3.8	-0.67448975	-8.27448975	-2.75816325	0.93247576
20	-3.8	-1.281552	-0.2533471	-5.33489867	-1.77829956	-0.04738793
21	-3.8	-3.8	-1.64485363	-9.24485363	-3.08161788	1.25593039
22	-3.8	-3.8	0.125661347	-7.47433865	-2.49144622	0.66575873
23	-3.8	-3.8	-1.3921E-16	-7.6	-2.53333333	0.70764585
24	-76.6242681	-64.7586301	-26.58035067	-167.963249	-1.82568749	
	Puntos de Corte			Gran Total	N	

Puntos de Cortes para cada criterio:

PC1: muy poco = - 76.62

PC2: poco = - 64.75

PC3: bastante = - 26.58

PC4: mucho = Valores superiores a C3

Valores Promedios dado por los expertos a cada criterio N-P:

Criterio 1 = 1.13 Criterio 2 = 1.13 Criterio 3 = 0.93 Criterio 4 = 1.97 Criterio 5 = -0.13

Criterio 6 = 1.13 Criterio 7 = -0.68 Criterio 8 = -0.01 Criterio 9 = -0.38 Criterio 10 = -0.38

Criterio 11 = -0.42 Criterio 12 = 1.25 Criterio 13 = 1.97 Criterio 14 = 0.53 Criterio 15 = 0.41

Criterio 16 = -0.18 Criterio 17 = 1.05 Criterio 18 = 1.13 Criterio 19 = 0.93 Criterio 20 = -0.04

Criterio 21 = 1.25 Criterio 22 = 0.66 Criterio 23 = 0.07

Como puede observarse todos los N-P valores de los 23 criterios son superiores al punto de corte PC4 correspondiente a la categoría de mucho valorando así los expertos que todos los criterios elaborados aportan mucha utilidad al trabajo docente asistencial.

Teoría de la Decisión

Introducción

Decidir es un proceso por el cual una o más personas seleccionan una alternativa de entre un conjunto de ellos, para de acuerdo a determinados criterios alcanzar una serie de objetivos y metas preestablecidas, todo dentro del entorno de los posibles estudios que pueda guardar la naturaleza. Suponiéndose que la mayoría de dichas alternativas no son absolutamente buenas o malas.

La persona que toma la decisión en la solución de un problema se le llama “decisor” y el proceso de su decisión puede realizarse haciendo uso de los principios de la metodología de la investigación científica que sigue las formas siguientes:

1. Observar el sistema donde incide la decisión.
2. Identificar y formular el problema sobre el cual se quiere decidir.
3. Establecer el modelo matemático que resolverá el problema planteado.
4. Seleccionar el método de solución.
5. Probar el modelo y su solución.
6. Introducción en la práctica de los resultados obtenidos.
7. Comprobar y ajustar los resultados.

Durante el proceso de toma de decisión y solución del problema, el decisor se enfrenta con una serie de alternativas llamada estrategias y con una serie de imponderables llamados estados de la naturaleza.

Estrategias: son programas generales de acción para el logro de los objetivos propuestos, que guían el pensamiento en la toma de decisiones. Las estrategias responden al cómo y se relacionan con nuevos productos o servicios, recursos disponibles diversos, mercadotecnia, finanzas, estructuras organizativas, personales y de relaciones públicas.

Definición de estrategia: es una vía, dentro de un conjunto determinado de ellas, que selecciona el decisor para alcanzar un objetivo, es decir, es la acción tomada dentro de un conjunto posible de acciones o alternativas disponibles al decisor. Toda estrategia reportaría un beneficio.

Estados de la naturaleza: son resultados de los factores del medio exterior al sistema que se van del control del decisor y que conspiran en mayor o menor medida en el alcance de los objetivos que se persiguen en el sistema. En el entorno están dados los posibles

estados que guarda la naturaleza en relación a los objetivos del decisor sobre las cuales este no ejerce ningún control.

Definición de estados de la naturaleza: son los diferentes resultados o salidas que se presentan como consecuencia de la reacción del medio ante las diferentes alternativas posibles del sistema.

Además como aspecto esencial en la decisión están los objetivos, que es lo que se propone alcanzar el decisor, es la meta que aspiramos concretamente obtener.

Se puede decir que en toda toma de decisión aparecen los siguientes elementos:

- Una o más decisiones que tienen una serie de objetivos y metas bien definidas.
- Un conjunto de posibles estrategias a seleccionar.
- Un conjunto de posibles resultados generados por las estrategias dadas.
- Un conjunto de estados de la naturaleza como consecuencia de la reacción del medio ante diferentes alternativas posibles.
- Una matriz que relaciona estrategias, estados de la naturaleza y resultados.
- Un proceso de decisión (selección de políticas) que toma una o varias acciones, dado un cierto entorno y metas explícitas de las decisiones.
- Un criterio que enmarca el proceso de decisión.

Ejemplo 1:

Un decisor (petróleos SA), cuyo objetivo es hacer un país autosuficiente en energéticos y con capacidad de generar importantes divisas a través de la exportación de excedentes. Estos propósitos traducidos a metas para el año 1982, significan por ejemplo, una exportación de dos millones y medio de barriles diarios de crudo de los cuales un millón serán exportados.

Suponga que estudios geológicos del paleocanal de Chicontepec en el Estado de Veracruz, muestran que los posibles estados de la naturaleza (entorno relativos a los objetivos de Pemex son cuatro:

- a. Región con posible producción de un millón de barriles diarios de crudo ligero.
- b. Región con posible producción de 200 mil barriles diarios de crudo ligero.
- c. Región con gas únicamente.
- d. Región seca.

Ante tales posibilidades, Petróleos SA puede instrumentar en la región una sola o una combinación de las tres siguientes estrategias.

- a. No hacer nada.
- b. Explorar y explotar.
- c. Realizar estudios geológicos más completos.

ESTADOS DE LA NATURALEZA

La matriz obtenida, llamada matriz de decisión o matriz de pagos, que relaciona las estrategias, los estados de la naturaleza y los resultados obtenidos en millones de pesos será:

NO HACER NADA A1	PERDIDA 500 E1	PERDIDA 100 E2	PERDIDA 50 E3	0 E4
EXPLORAR Y EXPORTAR. A2	GANANCIAS 500	GANANCIA 100	GANANCIA 100	PERDIDA 900
REALIZAR ESTUDIOS MAS COMPLETOS A3	PERDIDA 30	PERDIDA 30	PERDIDA 30	PERDIDA 30

El proceso de decisión consistirá en seleccionar una o varias estrategias o alternativas, bajo el criterio de minimizar las pérdidas financieras.

La teoría de la decisión utiliza diferentes procedimientos que permiten formular la preferencia. Como base de este método esta la teoría de la utilidad elaborada por John von Newman y Oskar Morgenstern (1944)

La base axiomática sobre la que descansa la toma de la decisión plantea los siguientes axiomas.

- Sean dos estrategias a_1 y a_2 de forma tal que a_1 sea más conveniente que a_2 ,
- $(a_1 > a_2)$ entonces los resultados obtenidos deberán ser: $v(a_1) > v(a_2)$
- Sean tres estrategias a_1 , a_2 , y a_3 en donde se cumple que $a_1 > a_2$ y $a_2 > a_3$, entonces los resultados de a_1 deben ser mejores que los de a_3 ; $v(a_1) > v(a_3)$.
- Si existe una estrategia $a = (1 - a) a_1 + a a_2$ entonces, los resultados de a se obtendrán como: $v(a) = (1 - a) v(a_1) + a v(a_2)$.
- Si a_1 y a_2 son dos estrategias tales que es posible obtener ambos resultados,

a la vez, entonces se cumplirá: $v(a_1 + a_2) = v(a_1) + v(a_2)$.

La matriz de pagos o matriz general de decisión.

En todo problema de decisión debe existir la llamada matriz de pagos o de decisión, en donde las filas están formadas por los diferentes cursos de acción, estrategias o alternativas (a_i) en las columnas estarán los estados de la naturaleza (e_j) y en la intersección de ambos se encontrará el resultado obtenido R_{ij} .

MATRIZ DE PAGOS.

ALTERNATIVAS ESTRATEGIAS.	ESTADOS DE LA NATURALEZA.			
	E1	E2		EN
A1	R11	R12		R1n
A2	R21	R22		R2n
:	:	:	:	:
.	.	.	.	.
Am	Rm1	Rm2		Rmn

Ante este problema se encontrará el decisor que tendrá las dificultades siguientes:

- El decisor, debe identificar sus estrategias o el conjunto de cursos de acción a su alcance.
- El decisor, debe enumerar los estados de la naturaleza de tal manera que sean mutuamente excluyentes y totalmente exhaustivos; además debe cuantificar los resultados correspondientes a cada combinación posible de estrategias con estados de la naturaleza, es decir encontrar su matriz de pagos.
- El decisor, debe escoger un criterio adecuado para elegir el curso de acción que más le convenga.

Todo problema de decisión presenta la siguiente secuencia en la adopción de decisiones.
 datos-----> decisión-----> resultado.
 pasado presente futuro.

Para el proceso de toma de decisión el decisor, puede utilizar su intuición, es decir que se orienta para el presente, pero abarca desordenadamente recuerdos del pasado y estimaciones de lo que pueda suceder en el futuro, una forma mucho más científica será aplicando el enfoque analítico que supone un estudio sistemático y una evaluación

cuantitativa del pasado y el futuro. Con ambos métodos se elaboran procedimientos lógicos: comparación, análisis, síntesis, abstracción y ambos tienen un punto en la tarea de toma de decisiones.

Los problemas que se presentan con claridad y homogeneidad, no solo de los objetivos, alternativas y gastos, sino también de las propias soluciones, son estructurados y las soluciones se buscan sobre la base de reglas y procedimientos previamente elaborados. A este tipo de problemas les vamos a buscar solución en nuestro texto:

Los problemas estructurados de toma de decisiones pueden ser clasificados en cuatro grandes categorías:

1. Decisiones en condiciones de incertidumbre.
2. Decisiones en condiciones de competencia o conflicto.
3. Decisiones en condiciones de riesgo.
4. Decisiones en condiciones de certeza.

Solamente en el caso 2 se tendrán dos grupos de decisores, en el resto solo habrá uno.

Cada una de estas categorías son resueltas por diferentes medios y existen varias teorías para afrontarlas, tales como la teoría de las probabilidades, la teoría de juegos, la investigación de operaciones y la programación lineal, entre las más importantes.

Decisiones en Condiciones de Incertidumbre.

La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre completa significa que se desconocen las probabilidades de ocurrencia de los diversos estados naturales pertinentes al problema de decisiones considerado. El carácter de la incertidumbre se asocia con el hecho de que nos demos cuenta de que somos incapaces de estimar o calcular la probabilidad que se produzca cada uno de los estados naturales.

El decisor se enfrenta con situaciones que nunca ocurrieron y que quizás no se repitan de esa misma forma en el futuro previsible. En tales situaciones cada curso de acción factible conducirá a una respuesta específica contenida dentro de cierto conjunto de respuestas posibles, pero no podemos saber cuál es la respuesta que obtendremos, ni tampoco podemos aplicar una ponderación probabilística a esos resultados posibles.

Los criterios de decisión que se emplean cuando predominan estas condiciones de incertidumbre, reflejan los valores personales y las actitudes fundamentales hacia el riesgo que tienen los responsables de la toma de decisiones. El decisor puede adoptar una actitud intermedia entre pesimismo y optimismo, o bien se puede decidir a utilizar al-

gún otro criterio más conveniente. Es por esto que desgraciadamente no está aceptado universalmente ninguno de éstos criterios y lo que se tiende es a escoger el mejor según la aspiración del decisor.

Se tiene la tabla Matriz de Pagos que muestra las diferentes alternativas o estrategias y se conocen los estados de la naturaleza, además se ha podido determinar para cada combinación anterior el resultado previsto. En este caso la incertidumbre está dada por el hecho de que las probabilidades de los estados de la naturaleza no existen en general o no pueden ser valorados incluso ni aproximadamente.

Veamos algunos criterios establecidos al efecto por científicos que han estudiado estos casos.

Criterio de Wald.

Una de las primeras sugerencias fueron hechas por Abraham Wald, conocida con el nombre de criterio MAXIMIN.

Wald resultó ser un pesimista extremo, al valorar que la naturaleza se convierte en un contrincante poderoso, agresivo y razonable, por lo que al decisor no le queda más opción que seleccionar lo mejor de lo peor, es decir el máximo de las consecuencias mínimas, de aquí su nombre MAXIMIN.

La fórmula de la regla de decisiones será:

$$\max_i \min_j [R_{ij}] \quad i = 1, m ; j = 1, n]$$

Para cada estrategia i se toma el mínimo de los resultados de los estados de la naturaleza y al final se elige el MAXIMIN.

Este criterio es obviamente muy pesimista, en la mayoría de las situaciones, el criterio MAXIMIN.

EJEMPLO 2:

Una cadena decide construir un nuevo hotel en la zona hotelera.

Se necesita conocer la cantidad racional de habitaciones. Se hace el estudio de los gastos en la construcción de los diferentes números de habitación, así como el ingreso esperando en dependencias de la cantidad de habitaciones que se alquilen.

La cantidad de habitaciones en el hotel pueden ser de 20, 30, 40 o 50 y la cantidad de habitaciones alquiladas que depende de una serie de factores casuales y de razones desconocidas por la cadena, puede ser de 10, 20, 30, 40 o 50 la tabla de las ganancias es la siguiente:

	Alquiler posible.				
Construir.	10	20	30	40	50
20	62	245	245	245	245
30	14	198	380	380	380
40	-33	160	332	515	515
50	-81	101	284	468	650

Aplicando Wald.

Estrategia i.	min. de estado j.	
1	62	max.estratégia= 62 estrategia 1.construir 20 habitaciones.
2	14	
3	-33	

Según el criterio pesimista de Wald, para ese nivel de alquiler es mejor construir el mínimo número de habitaciones (Estrategia 1=20 habitaciones).

Criterio de Hurwicz.

Leonid Hurwicz propone ante la incertidumbre completa, la utilización de un optimismo relativo. El se pregunta ¿por qué siempre ha de suponer que la naturaleza es malévola? . Si un individuo se siente optimista él es capaz de expresar inteligentemente esa situación mediante un cierto grado de optimismo. La filosofía de este criterio es la de no ir a las situaciones extremas sino, recorrer resultados intermedios.

Sea **a** el valor del coeficiente de optimismo prefijado por el decisor de antemano, entonces, la fórmula utilizada será:

$$V = \text{Max } i \quad [a \text{ Max. } j \text{ (Rij) } + (1 - a) \text{ Min } j \text{ (Rij)}]$$

De este caso se busca para cada estrategia aquellos estados de la naturaleza que den máximo y mínimo resultado y posteriormente la estrategia elegida será la que dé máximo valor al aplicar la fórmula.

Para el caso del ejemplo anterior se tendrá para $a = 0,9$

	estrategia	max	(a) x max	min	(1-a) x min	V
	1	245	$0,9(245)62$	$0,1 (62)$	226,7	
	2	380	$0,9(380)14$	$0,1 (14)$	343,4	
Max	3	515	$0,9(515)-33$	$0,1 (-33)$	460,2	
	4	650	$0,9(650)-81$	$0,1 (-81)$	576,9	

Según el criterio de HURWICZ, es mejor construir 50 habitaciones. (Estrategia 4 = 50 habitaciones)

Criterio de Laplace.

Pierre-Simon Laplace, Astrónomo y Matemático Francés, fundador de la corriente moderna de la teoría de las probabilidades resolvió este problema de la forma siguiente:

Puesto que no conocemos las probabilidades de ocurrencia de los estados naturales, diremos por supuesto que las probabilidades son las mismas para esos estados. Calculamos después el valor monetario esperado de cada estrategia y escogemos la que tenga el valor monetario esperado más elevado. En otras palabras, según Laplace, se debe tomar la media de cada estrategia y de ellas elegir la mejor.

Para el ejemplo anterior se tiene:

$$p(E1)=p(E2)=\dots=p(E_m)=1/m$$

Estrategia i.

- 1 $(62 + 245 + 245 + 245 + 245) / 5 = 208.4$
- 2 $(14 + 198 + 380 + 380 + 380) / 5 = 270.4$
- 3 $(-33 + 160 + 332 + 515 + 515) / 5 = 297.8$
- 4 $(-81 + 101 + 284 + 468 + 650) / 5 = 284.4$

Según Laplace la mejor estrategia es la de construir 40 habitaciones (Estrategia 3 = 40 habitaciones)

Criterio de Savage.

El estadístico Leonard J. Savage ha sugerido otro criterio para decidir en condiciones de incertidumbre completa, este criterio es totalmente diferente a los anteriores. Savage es un pesimista extremo, según él, el decisor, una vez conocido el resultado, puede arrepentirse de haber escogido esa estrategia. Savage sostiene que el decisor tiene que procurar que esta posible aplicación se reduzca al mínimo.

Savage sugiere que podemos conocer el grado de nuestro arrepentimiento por medio de la diferencia entre el resultado realmente obtenido y el resultado que se hubiera obtenido en el caso de haber conocido de antemano el estado natural que iba a ocurrir al elegir una estrategia óptima, aconseja orientarse no por las ganancias sino por el riesgo, como óptima, se elige aquella estrategia cuyo grado de riesgo es mínimo en condiciones pésimas.

$$O = \min_i \{ \max_j [O_{ij}] \}$$

Donde:

O_{ij} se obtiene de la llamada matriz de pérdida de oportunidad, es decir, los valores O_{ij} , se obtiene según la regla.

- Se escribe un cero en las celdas de la matriz de pagos en donde se presenta el mejor resultado de una columna específica.
- En sustitución de los valores de las otras celdas de la columna, se escribe la diferencia entre el resultado óptimo y los demás resultados correspondientes a cada estrategia considerada.

En consecuencia Savage aconseja escoger la estrategia que corresponda al mínimo de los arrepentimientos máximos.

Según el ejemplo se tiene.

Matriz de pérdida de oportunidad.

	E1	E2	E3	E4	E5
A1	0	0	135	270	405
A2	48	47	0	135	270
A3	95	85	48	0	135
A4	143	144	96	47	0

Estrategia	max.	
1	405	
2	270	min. estrategia = 135
3	135	estrategia 3
4	144	según Savage se deben construir 40 habitaciones.

Según Wald se deben construir 20 habitaciones, según Hurwicz con un coeficiente de optimismo del 90% se deben construir 50 habitaciones, para Laplace se deben construir 40 habitaciones y por último, Savage plantea que se deben construir 40 habitaciones.

Nos queda la interrogante, cuál de las posibles decisiones es la de mayor preferencia. Se puede proceder así, si la solución, es igual por varios criterios, entonces la escogemos. La decisión del criterio lo hace el decisor al más alto nivel. En caso de faltar la suficiente información para la elección de la estrategia es posible un acercamiento alternativo, el cual está unido al cálculo de las probabilidades del éxito y fracaso sobre la base de la experiencia pasada o el criterio de expertos.

Ejemplo 3:

La Compañía Zip de renta de automóviles los ofrece en renta a razón de 10 dólares diarios, el cliente paga su propia gasolina y aceite. Los autos sólo se rentan por un día. La compañía no tiene automóviles propios, sino que los arrienda sobre una base diaria, de una gran empresa arrendadora. Esta última es la que absorbe el costo de mantenimiento de los automóviles.

La compañía debe especificar cuantos automóviles quiere arrendar en un día determinado, por lo menos con una semana de anticipación.

La Compañía Zip paga a la firma arrendadora 7 dólares diarios por concepto de arrendamiento.

La compañía Zip se enfrenta al problema de decidir cuántos automóviles debe arrendar para un día determinado de la semana siguiente con 7 días de anticipación. La demanda de éstos automóviles es variable y fluctúa de un día a otro.

Si la compañía Zip arrienda más autos que los requeridos por su clientela en un día dado, perderá el importe del arrendamiento, o sea 7 dólares por cada automóvil que no pueda rentar. Si la demanda de automóvil es mayor que el número disponible, deja de obtener una utilidad de 3 dólares por automóvil.

En este problema el factor desconocido (aleatorio) es el número de solicitudes de renta en un día determinado. Los estados de la naturaleza, son los eventos. “ 10 solicitudes de renta”, “ 11 solicitudes de renta”,.....etc. Las estrategias son “ arrendar 10 automóviles”, “ arrendar 11 automóviles”.....etc. El problema es decidir cuál es la mejor estrategia.

El problema puede considerarse en incertidumbre parcial si se consiguen muestra de tiempos pasados y se calculan tablas de frecuencias y probabilidades. Esto se verá posteriormente.

Consideremos el problema con incertidumbre total, se pide entonces.

- a. a) Calcule la matriz de pagos del problema, en donde:
- b. b) Las estrategias son el número de automóviles arrendados por la empresa:
(10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16) i
Los estados de la naturaleza son el número de automóviles solicitados en renta:
(10, 11, 12, 13, 14, 15, y 16) j

El resultado se obtiene de la fórmula

$$\text{Beneficio} \quad \begin{matrix} 10E_j - 7A_i \text{ si } j \geq i \\ 10E_i - 7A_i \text{ si } j < i \end{matrix}$$

- b. Aplicando los métodos estudiados en clase de decisión con incertidumbre y su experiencia personal decida cuál será el número de autos que deberá arrendar la empresa.

Para concluir con la incertidumbre completa diremos que éste es un tema interesante que crea más problemas de los que resuelve. En tales condiciones, el estudio y la comparación de varios criterios de decisión le ayudarán a distinguir sus rasgos indeseables y los defectos que contienen esos criterios. Una forma de resolver este problema, cuando esto sea posible, es convirtiéndolo en un problema de incertidumbre incompleta, utilizando el cálculo de las probabilidades y el concepto del valor esperado.

Si en el ejemplo anterior de la compañía Zip se pudiese obtener la probabilidad del número de automóviles solicitados en renta, para cada número de automóviles rentados se podría entonces encontrar el valor esperado, pongamos el caso de “arrendar 15 automóviles” y que se tenga la tabla siguiente:

Número de automóviles	Probabilidad.	Beneficios	Beneficio esperado
10	0.05	-\$5	-\$0.25
11	0.05	5	0.25
12	0.10	15	1.50
13	0.15	25	3.75
14	0.20	35	7.00
15	0.25	45	11.25
16	0.20	45	9
			32.50

e esta forma se calculó la tabla de todos los valores esperados:

Número de autos Arrendados.	valor esperado (beneficio)
10	30.00
11	32.50
12	34.50
13	35.50
14	35.00
15	32.00
16	27.50

La decisión seleccionada será arrendar 13 automóviles que no coincide con ninguno de los criterios estudiados ni con la media, ni con la moda de la distribución de frecuencias.

Decisiones en Condiciones de Riesgo

Hemos visto anteriormente que cierto grado de incertidumbre es una característica estructural del problema de decisiones. Esto significa que, en el momento de decidir, el decisor no puede estar completamente seguro acerca de cuál será cada una de las ramificaciones de cualquier curso de acción que él se decida a adoptar. Es decir a toda decisión, aunque sea absolutamente correcta, va unido pues, un elemento de riesgo, que es posible valorar y también reducir dentro de unos límites aceptables, pero nunca eliminarlo del todo. En ocasiones el riesgo es generalmente menor, porque se trata de problemas ya afrontados otras veces y frente a los cuales, el decisor tiende a adoptar mecánicamente la misma conducta experimentada con éxito en ocasiones anteriores. Cuanto más complejo es el problema y mayores alternativas presente así como el número y la importancia de las variables en el juego, tanto mayor es el coeficiente de riesgo en la adopción de la decisión. La habilidad de quién toma la decisión está precisamente en saber valorar, donde es posible reducir al mínimo el coeficiente de riesgo en las propias decisiones.

La teoría estadística de las decisiones utiliza modelos matemáticos como implementos básicos para resolver las dificultades inherentes al riesgo. Veamos entonces algunos criterios basados exclusivamente en la probabilidad o en la utilidad.

Criterio de Optimización del Valor Esperado.

En el caso de decisión con riesgo se conoce para cada estado de la naturaleza o suceso futuro posible su valor de probabilidad quedando la matriz de pagos como sigue:

	E1	E2	...	En
	p1	p2	...	pn
A1	R11	R12	...	R1n
A2	R21	R22	...	R2n
:	:	:		:
Am	Rm1	Rm2	...	Rmn

Donde p_i - probabilidad de que el suceso futuro E_i se verifique.
El criterio para escoger la alternativa más oportuna será:

$$\begin{array}{l} \text{Max} \\ \text{o} \\ \text{Min} \\ i \end{array} E [A_i] = \sum_{j=1}^n R_{ij} p_j \quad i = 1, m$$

EJEMPLO 1:

Una política de mantenimiento preventivo, requiere tomar decisiones acerca de cuándo a una máquina deberá dársele servicio en forma regular a fin de minimizar el costo de una rotura repentina.

Cada vez que una de las n máquinas se descompone hay que darle un mantenimiento preventivo que cuesta \$ 100 y al final de T períodos se les da un mantenimiento preventivo a todas las n máquinas con un costo de \$ 10 por máquina.

Si se tiene 50 máquinas en el taller y las probabilidades de que se descompongan en períodos T está dada en la tabla.

Período (T)	1	2	3	4	5
Probabilidad descomposición p_t	0.05	0.07	0.10	0.13	0.18

En este caso aplicaremos la fórmula para el cálculo del valor esperado del costo de mantenimiento en el período

$$E C (T) = \left\{ C_1 \sum_{i=1}^{T-1} E (n_t) + C_2 N \right\} / T$$

Donde C_1 = costo de reparar una máquina descompuesta = 100

C_2 = Costo de mantenimiento preventivo por máquina = 10

T = períodos.

N = número de máquinas.

$E(n_t)$ = número esperado de máquinas descompuestas en el período t .

$$E (n_t) = \sum_{j=1}^n p_{tj}$$

$$\text{Luego } EC (T) = \left\{ C_1 \sum_{i=1}^{T-1} p_{ti} + C_2 n \right\} / T$$

Período T	Probabilidad P t	Probabilidad acumulada hasta T - 1	EC (T) \$
1	0.05	0	500
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366,7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

Luego el mantenimiento preventivo se aplica a todas las máquinas cada 3 períodos. Para obtener el menor costo esperado por período.

EJEMPLO 2: (ahora en donde no aparece el período de tiempo).

Un director se encuentra con que tiene que escoger entre dos variantes, ambas convenientes para su Empresa y cuyos resultados están relacionados en ambos casos, a tres posibles sucesos futuros. La primera variante que llamaremos A1 requiere la inversión de un millón de pesos, y puede llevar si se verifica el primero de los sucesos previstos, E1 a una ganancia de \$ 2 millones; Si se verifica el segundo o tercer suceso (E2, E3) provocaría por el contrario la pérdida del capital invertido. La variante A2, implica la inversión de \$ 400 mil que pueden perderse en el suceso E3, pero que puede traducirse en una ganancia de \$ 700 mil en el caso de los sucesos E1 o E2 considerando el grado de probabilidad de los 3 sucesos, iguales a 0,5, 0,2 y 0,3 respectivamente qué alternativa usted propondría.

	Sucesos Futuros.		
	E1	E2	E3
Alternativas.	p1=0,5	p2 = 0,2	p3 = 0,3
A1- Em prender			
Negocio A	2000 000	-1000 000	-1000 000
A2 - Em prender			
Negocio B	700 000	700 000	- 400 000
A3 - No em prender			
Ninguno.	0	0	0

Matriz de pagos.

Aplicando la fórmula de la Esperanza matemática para cada alternativa se tiene:

$$E(A1) = 0,5 (2000\ 000) + 0,2 (-1000\ 000) + 0,3 (-1000\ 000) = \$500\ 000.$$

$$E(A2) = 0,5 (700\ 000) + 0,2 (700\ 000) + 0,3 (-400\ 000) = \$37\ 000.$$

$$E(A3) = 0$$

Según el criterio de la Esperanza matemática este director deberá emprender el negocio A1.

Árbol de Decisión.

El árbol de decisiones es una técnica sencilla que señala el grado de riesgo involucrado en una decisión importante y que por lo tanto, permite que el decisor haga comparaciones entre los cursos de acción.

Entre los matemáticos que originaron y desarrollaron esta técnica mencionaremos al desaparecido John Von Neuman, y a los Profesores Robert Schlaejer y Moward Raiffa de la Universidad Harvard de los Estados Unidos.

El árbol de decisión es un método gráfico, que permite analizar todos los resultados posibles en un proceso multietápico y matemáticamente podemos concebirlo como una red no orientada, finita y conexa, que no tiene ciclo y que está formada por 2 vértices como mínimo. Se comienza en un punto que podemos denominar TRONCO, y a partir de aquí se bifurcan las RAMAS.

El árbol de decisión consta de Nodos, Ramas, Probabilidades Estimadas y Utilidades o Pagos.

El árbol de decisión puede ser determinístico o estocástico:

Árbol de Decisión Determinístico: Representa un problema en el cual cada posible alternativa y su correspondiente resultado se conoce con certeza.

Árbol de Decisión Estocástico: Se caracteriza por que en cada alternativa y su resultado existe un cierto riesgo dado la probabilidad.

En los árboles de decisión existen 2 tipos de nodos.

Nodo de Decisión, denotado por un cuadrado y requiere una decisión para seleccionar una de las ramas que parten de él.

Nodo de Probabilidad, denotado por un círculo, de él parten los diferentes estados de la naturaleza, como valores enteros o con sus probabilidades según sea el árbol determinístico o estocástico respectivamente.

Explicaremos el árbol de Decisión mediante un ejemplo.

EJEMPLO 3:

El presidente y principal accionista de una empresa manufacturera mediana de componentes electrónicos, se enfrenta con esta situación:

Las ventas para cierto producto se están elevando y él quiere decidir si debe aumentar la producción actual mediante una nueva línea de producción o hacer que sus empleados trabajen sobre una base de tiempo extra con las facilidades de producción actuales.

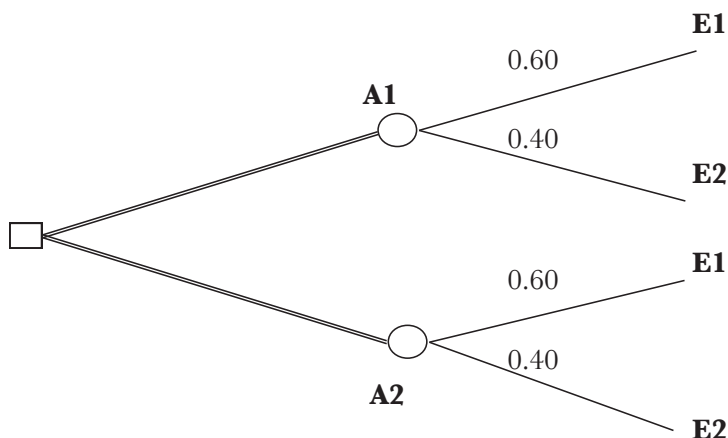
Se decide consultar a los ejecutivos sobre ese problema y se obtiene la información siguiente:

- a. El vicepresidente, encargado de la producción, está a favor de instalar su nuevo equipo de producción.
- b. Su Director de mercadotecnia también está a favor de instalar una nueva unidad de producción, pues dice que habló con sus principales clientes y puede pronosticar el aumento de un 20% en las ventas de ese producto dentro de unos cuantos meses.
- c. Su tesorero se muestra inseguro en lo que respecta a la situación en general e indica que existe la probabilidad de que la compañía sufra una baja en sus ventas de un 5%.
- d. Otros ejecutivos plantean que la situación se resuelve con tiempo extra de trabajo sin la necesidad de ir a instalar un nuevo equipo.
- e. Luego de intensos análisis y discusiones los administradores llegan a la conclusión de que existen 2 eventos y calcularon sus probabilidades.

E1: Las ventas aumentarían en un 20% con $p(E1) = 0,60$

E2: Las ventas disminuirían en un 5%, con $p(E2) = 0,40$

f) El aparato económico hace un cálculo y se presenta el siguiente diagrama arborescente.



t0: momento de decidir

t1: fecha de terminación

Queda ahora al presidente la responsabilidad de tomar la decisión.

- a. Supongamos que el presidente se va a auxiliar del valor monetario esperado y para ello procede a escoger la estrategia más deseable.

- A1 = Instalar nuevo equipo.

$$5\,200\,000 (0,60) + 3\,600\,000 (0,40) = \text{N\$ } 4\,560,000$$

- A2: Utilizar tiempo extra

$$4\,800\,000 (0,60) + 4\,000,000 (0,40) = \text{N\$ } 4,480,000$$

La decisión será de comprar e instalar un nuevo equipo de producción para su fábrica.

- b. Suponiendo que el presidente busque una función de utilidad, dado su aversión por el riesgo y que esa función sea:

$$(5,200\,000) = 1,0$$

$$(4\,800\,000) = 0,96$$

$$(4\,000\,000) = 0,90$$

$$(3\,600\,000) = 0,88$$

$$(2\,000\,000) = 0,60$$

$$(1\,000\,000) = 0,40$$

Para A1 $1(0,6) + 0,88 (0,4) = 0,952$

Para A2 $0,96 (0,6) + 0,9 (0,4) = 0,936.$

La decisión volverá a ser la de instalar un nuevo equipo

EJEMPLO 4:

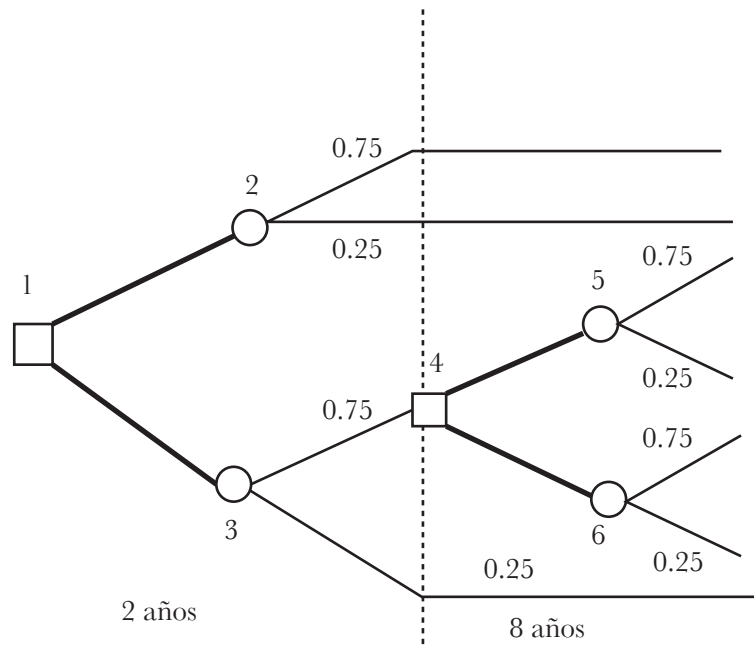
Una compañía tiene ahora las opciones de construir una planta de tamaño completo o una pequeña que puede ampliarse luego. La decisión depende principalmente de las demandas futuras del producto que producirá la planta.

La construcción de una planta de tamaño completo puede justificarse en términos económicos si el nivel de demanda es alto. En caso contrario, quizá sea recomendable construir una planta pequeña ahora y después decidir en dos años si esta se deba ampliar. La empresa esta interesada a estudiar el problema en un período de 10 años y un estudio de mercado señala que las probabilidades de tener demandas altas y bajas en 10 años son de 0,75 y 0,25 respectivamente.

La valoración económica a los siguientes valores:

- a. Construir una planta grande costará N\$ 5 millones y una planta pequeña costará solo N\$ 1 millón. La expansión de la planta pequeña de aquí a 2 años costará N\$ 4,2 millones.
- b. La planta completa y la demanda alta (baja) producirán N\$ 1 000 000 (N\$ 300 000) anualmente.
- c. La pequeña planta y una baja demanda generan N\$ 200 000 anuales.
- d. La planta pequeña y una demanda alta producirán N\$ 250 000 para cada uno de los 10 años.
- e. La planta pequeña ampliada con demanda alta (baja) generará N\$ 900 000 (N\$ 200 000) anualmente.
- f. La planta pequeña sin expansión y con alta demanda en los ocho años producirá N\$250 000 y con una baja demanda producirá N\$ 200 000 cada uno de los ocho años restantes.

La gráfica de estos datos será:



Evaluemos las alternativas y calculemos el valor esperado con el objetivo de decidir cuál será la mejor.

Iniciaremos evaluando la etapa 2 y luego la etapa 1.

Etapa 2.- Últimos 8 años.

Nodo 4.

$E(\text{ganancia neta} / \text{expansión}) = (900\,000 \times 0,75 + 200\,000 \times 0,25) \times 8 - 4200\,000 = \text{N\$ } 1\,600\,000.$

$E(\text{ganancia neta} / \text{expansión}) = (250\,000 \times 0,75 + 200\,000 \times 0,25) \times 8 = \text{N\$ } 1\,900\,000.$

Luego la decisión se toma en el nodo 4 es no expandirse y obtener una ganancia neta de N\$ 1 900 000. Este sería el resultado de la etapa 2.

Etapa 1. Primeros 2 años.

$E(\text{ganancia neta} / \text{planta grande}) = (1\,000\,000 \times 0,75 + 300\,000 \times 0,25) \times 10 - 5\,000\,000 = \text{N\$ } 3\,250\,000.$

$E(\text{Ganancia neta} / \text{planta pequeña}) = 1900\,000 + 250\,000 \times 0,75 + 200\,000 \times 0,25 - 1\,000\,000 = \text{N\$ } 1\,137\,500.$

Decisión óptima = construir una planta grande. Tomar esta decisión ahorra evidentemente la consideración de las alternativas en el modo 4.

EJERCICIO 5:

Una compañía turística A tiene actualmente el 20% de la demanda del mercado en cierta ciudad pequeña. Su competidora mayor, es la compañía B, tiene el 80% restante. Un grupo de investigadores promocionales hace un estudio para desarrollar su nuevo método competitivo el cuál se pronostica que tiene un 80% de probabilidades de ser desarrollado.

Si A desarrolla y lanza el nuevo método al mercado hay una probabilidad de 0,6 de que B también desarrolle un método similar. Si eso ocurre, hay 0,2 de probabilidades de que A gane un 80% del mercado, una probabilidad de 0,3 de que la A tenga un 60% del mercado y una probabilidad de 0,5 de que tenga un 40% del mercado. Si B no puede desarrollar también un nuevo método, entonces la A tiene una probabilidad de 0,7 de obtener un 80% del mercado y una probabilidad de 0,3 de obtener un 50% del mercado. En caso de que la A no pueda desarrollar el nuevo método, conservará su punto actual de 20% del mercado.

Encuentre el árbol de decisiones de este problema.

EJERCICIO 6:

La Empresa “computadoras Artex” está interesada en desarrollar una cinta magnética para un nuevo tipo de computadoras.

Esta Empresa no tiene personal de investigación disponible para desarrollar el producto nuevo, por lo que va a subcontratar la fase de investigación a un Instituto de Investigación Científica. Artex, ha destinado 250 000 dólares para la investigación y el desarrollo de la nueva cinta magnética y ha pedido presupuestos a varias firmas e Institutos de Investigación. El contrato se otorgará no en base al precio (esto es, N\$ 250 000) sino de acuerdo con el plan técnico presentado en la propuesta y con los antecedentes técnicos de la firma que la presenta. El “Instituto de Investigación Boro” está realizando la presentación de su propuesta (y presupuesto) a “Computadoras Artex”. El gerente de Boro calcula que costaría cerca de 50 000 dólares preparar una propuesta.

Además, ha estimado que las posibilidades de que se les otorgue el contrato son de 1 a 1 (o sea, que es tan probable obtenerlo, como no obtenerlo). Entre los investigadores del Instituto Boro, se han planteado varias alternativas en lo referente a cómo desarrollar el producto, en caso de que se les otorgara el contrato. Se estudiaron 3 alternativas:

1ra.) Incluye el uso de ciertos componentes electrónicos. Los Ingenieros estimaron que desarrollar su prototipo de cinta (este es, una versión preliminar para pruebas técnicas) sólo costaría 50 000 con este método, pero que habría solamente un 50% de probabilidad de que el prototipo fuera satisfactorio.

2do.) Incluye el uso de ciertos aparatos magnéticos. El costo de desarrollo de un prototipo bajo este enfoque, costaría 80 000 dólares con un 70% de probabilidad de éxito.

3ro.) Alternativa puramente mecánico con un costo de 120 000 dólares, para el cuál el equipo técnico manifiesta estar completamente seguro de que podrían desarrollar exitosamente el prototipo.

En virtud del plazo especificado en el contrato “Investigaciones Boro” tendría suficiente tiempo para probar con sólo 2 alternativas. Por lo tanto, si las alternativas de usar dispositivos magnéticos o electrónicos fallaran, el segundo intento tendría que ser necesariamente la acción mecánica, a fin de garantizar la obtención de un prototipo exitoso.

Decisiones en Condiciones de Competencia o Conflicto

Muchos autores consideran a los problemas de decisión con información perfecta como problemas en condiciones de certeza, cuando se tiene la información imperfecta o incompleta se les denomina en 2 categorías; decisiones con Riesgo y decisiones con incertidumbre de tal forma las situaciones extremas son la certeza y la incertidumbre y dejan al riesgo como una situación intermedia. Es de preguntarse y el conflicto donde lo dejan, el hecho es que muchos autores llevan las situaciones en conflicto a la llamada Teoría de juegos y lo excluyen de la decisión.

Dos o más individuos se encuentran en una situación de competitividad o conflicto si el logro de los objetivos de uno de ellos implica la reducción de las probabilidades de los demás para alcanzar los suyos. Existe una teoría matemática que describe el comportamiento de los participantes y esa es la Teoría de Juegos. Su objetivo consiste en elaborar recomendaciones sobre la forma razonable de las acciones de cada uno de los contrincantes en el curso de una situación de conflicto. La vida está llena de conflictos y competencia.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía —Equilibrio General, distribución de costes, etc.— se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

En el oligopolio, los resultados que obtiene cada empresa dependen no sólo de su decisión sino de las decisiones de las competidoras. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones cuyo resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes. La técnica para su análisis fue puesta a punto por un matemático, John Von Neumann en colaboración con el economista Oskar Morgenstern. El libro que publicaron en 1944, “Theory of Games and Economic Behavior”, abrió un insospechadamente amplio campo de estudio en el que actualmente trabajan miles de especialistas de todo el mundo.

John Von Neumann nació en Budapest, Hungría, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zurich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a los Estados Unidos donde trabajará en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Sus aportaciones a la ciencia económica se centran en dos campos:

Es el creador del campo de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre este tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica la *Theory of Games and Economic Behavior*. La teoría de juegos es un campo en el que trabajan actualmente miles de economistas y se publican a diario cientos de páginas. Pero además, las formulaciones matemáticas descritas en este libro han influido en muchos otros campos de la economía. Por ejemplo, Kenneth Arrow y Debreu se basaron en su axiomatización de la teoría de la utilidad para resolver problemas del Equilibrio General.

En 1937 publica *A Model of General Economic Equilibrium*”, del que E. Roy Weintraub dijo en 1983 ser “el más importante artículo sobre economía matemática que haya sido escrito jamás”. En él relaciona el tipo de interés con el crecimiento económico dando base a los desarrollos sobre el “crecimiento óptimo” llevado a cabo por Allais y otros.

Las situaciones de conflicto en la práctica son muy complicadas, por lo que para hacer posible un análisis de ellos es necesario construir un modelo simplificado y formalizado de la situación, denominado “JUEGO”. El juego se realiza a base de reglas determinadas.

En el juego pueden chocar los intereses de dos o más contrincantes; en el primer caso es un juego de dos personas y el segundo de varias personas.

Existe el llamado juego de dos personas con suma cero, debido a que lo que gana un jugador es lo que pierde el otro, de manera que la suma neta de sus ganancias es cero

En todo juego de dos personas deben existir:

1. Las estrategias del jugador 1.
2. Las estrategias del jugador 2.
3. La matriz de pagos.

REGLAS DEL JUEGO: Es el sistema de condiciones que determinan las posibles variantes de acción de las dos partes, la cantidad de información de cada parte de la conducta de la otra, la sucesión de las alteraciones de las jugadas y el resultado o fin de juego. El resultado no siempre tiene una expresión cuantitativa, pero generalmente se establece una escala de medidas expresándose éste con un número definido.

Tomemos la convención siguiente: en juegos de dos personas, nosotros seremos A y trataremos siempre de ganar y el contrario será B que será el que trataremos de hacer perder.

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA: Es el conjunto de reglas que determinan de una manera única la elección de cada jugada personal del jugador dada la dependencia de la situación que se haya creado en el proceso de juego.

JUEGO $M \times N$: Se denominará así a un juego en donde el jugador A tenga M estrategias posibles y el jugador B tenga N estrategias.

En la matriz de pagos se escribirá en cada caso como resultado la ganancia que recibirá el jugador A.

La matriz de pagos será la siguiente:

		jugador B				
		estrategias	B1	B2		Bn
jugador A	A1		R11	R12		R1n
	A2		R21	R22		R2n
	:		:	:		:
	Am		Rm1	Rm2		Rmm

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA ÓPTIMA.- Es aquella en que al repetirse el juego garantiza al jugador dado, la ganancia media máxima posible. Al elegir ésta estrategia, el razonamiento debe ser que el enemigo es tan razonable como nosotros y hace lo posible para evitar que consigamos nuestro objetivo. Este principio introduce en el juego un riesgo que notablemente está presente en cada estrategia. La teoría de juegos tiene la restricción de que la ganancia se reduce artificialmente a un sólo número.

A modo de conclusión preliminar la teoría de juego se divide en cuanto a:

a) JUGADORES.

- Juegos de 2 personas.
- Juegos de n personas.

b) NUMERO DE ESTRATEGIAS DISPONIBLES EN CADA DECISOR.

- Juegos finitos.
- Juegos infinitos.

c) OBJETIVOS DEL JUEGO.

- Juegos suma cero.
- Juegos suma diferente de cero o meta-juegos.

EJEMPLO DE TOMA DE DECISIÓN: 1

La compañía Telefónica Nacional debe delinear una estrategia para argumentar la revisión del contrato colectivo de trabajo con su sindicato.

La empresa supone por diversas razones históricas, que pueden ocurrir 4 situaciones con el sindicato.

E1: Negociación difícil.

E2: Demandas realistas.

E3: Demandas leves.

E4: Cambios extremos de postura por parte del sindicato durante las negociaciones.

Por su parte el sindicato considera también por razones históricas, promover alguna de las siguientes estrategias:

S1: Demandas extremadamente exageradas.

S2: Demandas exageradas.

S3: Demandas razonables.

S4: Demandas leves, favorables a la empresa, no al sindicato.

A través de un intermediario que comunica a la empresa y al sindicato, previa la negociación, se puede (en teoría) diseñar una tabla de consecuencias en donde aparezca el aumento probable en el salario de un obrero por hora según la combinación de estrategias, obteniéndose así la matriz de pagos.

Matriz de pagos.		estrategias de la empresa.			
		E1	E2	E3	E4
estrategias del sindicato.	S1	25	14	15	32
	S2	40	17	13	16
	S3	30	5	12	15
	S4	0	8	11	3

En este ejemplo la teoría de juegos define estrategias que maximice el objetivo del aumento en el salario.

Más adelante estudiaremos los métodos que dan solución a este problema.

Determinación de la Estrategia Óptima.

PRINCIPIOS DEL MIN-MAX.- Designemos por i el número de nuestra estrategia A_i y con j la estrategia B_j del adversario. Al elegir A_i , siempre tenemos que hacer el cálculo de que el adversario responderá con una de las estrategias B_j para lo cual nuestra ganancia será la mínima.

Determinemos el valor de esta ganancia, es decir, el menor valor de R_{ij} en la línea (estratégica) i y llamémosle a_i .

$$a_i = \min_j [R_{ij} \quad \text{para } i = 1, m]$$

Para la estrategia j del adversario B_j se tendría que estará interesado en llevar nuestra ganancia al mínimo.

$$b_j = \max_i [R_{ij} \quad \text{para } j = 1, n]$$

Al elegir cualquier estrategia A_i debemos calcular que como resultado de las acciones razonadas del contrario no ganaremos nada más que a_i . Teniendo en cuenta que nuestro adversario es razonable también, tenemos que elegir la estrategia A_i a la que le corresponde el valor máximo de a_i .

$$a = \max_i [a_i].$$

$$\text{luego } a = \max_j \min_j [R_{ij}].$$

A la magnitud a se le llama valor inferior del juego, o ganancia Max-Min. Es evidente que si nos atenemos a la estrategia Max-Min, tendremos garantizado para cualquier conducta del adversario una ganancia que en cualquier caso será no menor que a , por lo que se le llama valor inferior del juego, o sea el mínimo garantizado que nos proponemos asegurar manteniéndonos con la estrategia más prudente.

Para nuestro adversario se obtiene de igual forma el valor b .

$$b = \min_j \max_i [R_{ij}].$$

A este valor b le llamamos el valor superior del juego. De esta forma el adversario se garantiza independientemente de lo que emprendamos contra él, la suma de su pérdida en cualquier caso será no mayor que b .

Las estrategias Max-Min y Min-Max más prudentes de los jugadores, suelen denominarse c el término general de “ESTRATEGIAS Min- Max”.

Existen juegos para los cuales las estrategias Min-Max son estables. Estos son los que tienen un valor inferior igual al superior.

$$a = b$$

Este elemento de la matriz de pagos es el menor de su fila y el mayor de su columna y se le llama el “punto de silla” Las estrategias asociadas a un punto de silla se denominan óptimas y su conjunto, la solución del juego. En el juego con punto de silla, el par de estrategias óptimas es algo semejante a una posición de equilibrio. Cualquier desviación

de la estrategia óptima lleva al jugador que se desvía a consecuencias desfavorables que lo obligan a volver a la posición inicial.

Estas estrategias se caracterizan por:

- Si las dos partes se rigen por sus estrategias óptimas, la ganancia media será igual al valor del juego R_{ij} , que es simultáneamente su valor inferior y superior.
- Si una de las partes mantienen su estrategia óptima y la otra se desvía de la suya, ello conducirá a que la parte que se desvía solo podía perder y en ninguno de los casos podía aumentar su ganancia

En la Teoría de Juegos se demuestra que cada juego con su información perfecta tiene punto de silla y en consecuencia tiene solución, o sea, que existe un par de estrategias óptimas de una y otra parte que den ganancia media igual al valor del juego.

EJEMPLO: 2

Existe una competencia fuerte entre dos hoteles de características similares, el primero llamémosle el hotel de la cadena A y el segundo de la cadena B .

En la cadena A se ha hecho un estudio del mercado basado en cuatro estrategias básicas para lograr ser mas competitivos, estas estrategias son:

A1: Mantener la actividad normal en el hotel.

A2: Fomentar una nueva imagen mediante la divulgación por la prensa y la radio.

A3: Hacer ofertas promocionales atrayentes a los turistas.

A4: Hacer una ligera reducción de la capacidad hotelera para lograr una mayor calidad en el servicio.

Un grupo de Expertos de la cadena A ha calculado los beneficios, en miles de pesos, que podrían obtener en el transcurso de una semana, suponiendo que la cadena B hará lo mismo.

La matriz de pagos obtenida es la siguiente:

(Suponiéndose que 100 sea el máximo que pueda obtenerse en una semana)

Beneficios en miles de pesos		Estrategias de la cadena B			
		B1	B2	B3	B4
Estrategias de la cadena A	A1	40	50	50	30
	A2	80	50	30	70
	A3	70	60	80	90
	A4	50	20	40	60

Se quiere saber cuál será la mejor decisión para la cadena A en medio de la competencia.

Solución. Busquemos la estrategia Max-Min para la cadena A

Estrategias de A	Min	Max-Min.
A1: normal	40	
A2: divulgación	30	A = 60
A3: Ofertas	60	A3: Ofertas promocionales.
A4: Disminución	20	

Estratégias Min-Max para la cadena B

Estrategias de B	Max	Min-Max.
B1: Normal	80	
B2: Divulgación.	60	b = 60
B3: Ofertas:	80	B2: Divulgación.
B4: Disminución	90	

Obtenemos en este caso el punto de silla.
 $a = b = 60$

Luego según este problema, la cadena A tiene su estrategia óptima en las ofertas promocionales, mientras que la cadena B debe hacer divulgaciones con la cuál A ganaría 60 mil pesos y B tendría que contentarse con 40 mil pesos.

Estrategias Mixtas.

En este tipo de problemas se puede observar el hecho fundamental de que se puede predecir la estrategia de un jugador, por lo cual el oponente puede aprovechar esta información para mejorar su posición. Una característica esencial de un plan racional para jugar un juego como éste es, que ningún jugador pueda predecir qué estrategia usará el otro. Entonces en lugar de aplicar algún criterio conocido para determinar una sola estrategia que se usara en forma definitiva, es necesario elegir entre las estrategias aceptables de alguna manera aleatoria. El hacer esto, ningún jugador conoce de antemano cuál de sus propias estrategias se usará, mucho menos las de su oponente.

Esto sugiere, en términos muy generales, el tipo de enfoque que se requiere para juegos sin punto de silla. Si cada jugador se ve obligado a elegir una estrategia pura única, entonces, no hay nada que hacer, hay que guiarse por el principio del Min-Max. Otra cosa es, si se pueden alterar nuestras estrategias de una manera aleatoria, con ciertas probabilidades.

Una Estrategia Mixta asigna probabilidades a cada estrategia básica de modo que, el conjunto de ellas equivalen a 1. La interpretación de un juego con Estrategias Mixtas es que el juego se repite muchas veces antes de cada partida, se confía su elección a la casualidad, se sortea y se escoge la estrategia que le tocó.

Las estrategias mixtas representan en la teoría de juegos un modelo de táctica favorable, flexible cuando ninguno de los jugadores sabe cómo se comportará el contrario. Sean las estrategias mixtas de ambos jugadores las siguientes:

$$S_a = \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$$

$$S_b = \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{matrix}$$

Donde p_i ($i = 1, n$) son las probabilidades de que el jugador A aplique las estrategias A_i ($i = 1, n$) y se tiene

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Análogamente q_j ($j = 1, m$) son las probabilidades de que el jugador B aplique sus estrategias B_j ($j = 1, m$)

$$q_1 + q_2 + \dots + q_m = 1.$$

Cualquier juego entre dos personas con suma cero, tiene por lo menos, una solución, o sea un par de estrategias óptimas que son en forma general mixtas (S^*A , S^*B) y un valor correspondiente al resultado R_{ij}

El par de estrategias óptimas (S^*A , S^*B) que forman la solución del juego tienen la siguiente propiedad:

- Si uno de los jugadores sigue una estrategia óptima, entonces para el otro no puede ser ventajoso renunciar a la suya.
- Este par de estrategias forma en el juego cierta situación de equilibrio, un jugador tiende a maximizar la ganancia, el otro a minimizarla y en el caso de un comportamiento razonable, se establece un equilibrio y una ganancia estable V .

Si $V > 0$ el juego es ventajoso para nosotros.

$V < 0$ el juego es ventajoso para el adversario.

$V = 0$ El juego es justo y es igualmente ventajoso para cada participante.

Aplicación de la Programación Lineal para la Obtención de Estrategias Optimas Mixtas.

Suponga la matriz de pagos para un juego de suma cero entre dos competidores:
Ganancias para A

		Estrategias para B				
		B1	B2	...	Bn	
Estrategias para A	A1	R11	R12	...	R1n	p1
	A2	R21	R22	...	R2n	p2
	:	:	:		:	:
	Am	Rm1	Rm2	...	Rmn	pm
Probabilidades para B		q1	q2		qn	

Sea V el menor valor esperado de las ganancias obtenidas para el jugador A, cuando el jugador B toma sus estrategias B1, B2..... Bn respectivamente.

$$E1 = R11 p1 + R21 p2 + \dots + Rm1 pm$$

$$E2 = R12 p1 + R22 p2 + \dots + Rm2 pm$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$En = R1n p1 + R2n pn + \dots + Rmn pm$$

$$V = \min (E1, E2, \dots En)$$

El objetivo para A es obtener los valores de p1, p2 ... pm tales que hagan máximo a V

Como problema de P. L. será:

$$X1, X2, \dots Xm > 0 , V > 0$$

Función objetivo: Max V.

Restricciones:

$$\begin{aligned} x1 + x2 + \dots + xm &= 1 \\ R11 x1 + R21 x2 \dots + Rm1 xm &> V \\ R12 x1 + R22 x2 \dots + Rm2 xm &> V \\ \vdots &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ R1n x1 + R2n x2 \dots + Rmn xm &> V \end{aligned}$$

EJEMPLO 3:

En el plano de la competencia en el mercado internacional se tiene la empresa Cubana Suchel de perfumería y la firma Rexona de Inglaterra. Suchel tiene la elección de subir sus precios, dejarlos como están o disminuirlos. La firma Rexona tiene las mismas opciones. Las ventas brutas en miles de pesos de la Empresa Suchel para cada uno de los pares de elecciones posibles se muestran en la tabla:

Beneficios en miles de pesos.

SUCHEL	R E X O N A		
	aumento	invariante	disminución.
aumento.	90	100	110
invariante.	110	100	90
disminución	120	100	80

Se desea saber cómo debe actuar la empresa Suchel ante la competencia.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Variables. p_1, p_2, p_3 Probabilidades para SUCHEL

Sean $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$p_1 > 0$

$p_2 > 0$

$p_3 > 0$

V - El menor valor esperado de las ventas brutas de la Empresa Suchel.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Maximizar el menor valor esperado de las ventas para Suchel (Max-Min).

$$\text{Max } Z = V$$

RESTRICCIONES:

Para un aumento de la empresa Rexona (B1)

$$90 p_1 + 110 p_2 + 120 p_3 \geq V$$

Para la empresa Rexona invariante: (B2)

$$100 p_1 + 100 p_2 + 100 p_3 \geq V$$

Para una disminución de la Empresa Rexona: (B3)

$$110 p_1 + 90 p_2 + 80 p_3 \geq V$$

Problema este de Programación Lineal que debemos resolver aplicando paquetes de programas.

La solución a éste problema nos dará el valor esperado máximo de las ventas brutas de Suchel (valor obtenido de V) y las probabilidades que tiene la Empresa para su trabajo futuro.

EJEMPLO 4: Resuelva el ejemplo No. 1. y de una interpretación de sus resultados.

EJEMPLO 5: Dos agencias Turísticas A y B muestran simultáneamente sin ponerse de acuerdo 1, 2, 3 giras turísticas. La ganancia la decide la cantidad total de giras, si el número es par gana A y recibe de B una suma igual a este número, si es impar, A paga a B una suma igual a este número.
¿Cómo deberán proceder las agencias?

EJEMPLO 6: Resuelva el problema de la competencia entre el sindicato y la administración de la Empresa y analice sus resultados.

Juegos de suma no constante. Dilema del prisionero

Dos sospechosos son detenidos en cercanías del lugar de un crimen y la policía comienza aplicar las técnicas de interrogatorio por separado.

Cada uno de ellos tiene la posibilidad de elegir entre confesar acusando a su compañero, o de no hacerlo.

Si ninguno de ellos confiesa, entonces ambos pasarán un año en prisión acusados de cargar un arma sin autorización. Si ambos confiesan y se acusan mutuamente, los dos irán a prisión por 5 años cada uno, pero si sólo uno confiesa y acusa a su compañero al implicado le caerán 20 años y el acusador saldrá libre por colaborar con la policía.

Las estrategias a definir en este caso son: Confesar o No Confesar.

¿Cómo se construiría la tabla de alternativas? y ¿Cuáles son las Estrategias Adecuadas para cada uno de ellos y para los dos en su conjunto?

Preso N° 1	
Preso N° 2	Confiesa
	No Confiesa
Preso N° 2	Confiesa
	No Confiesa

En todos los juegos, dos partes deben tomar una decisión, donde los resultados dependen de las decisiones de ambas partes y bajo el supuesto que cada uno busca favorecer sus propios intereses.

No obstante, cada uno escoge en aislamiento del otro, tomando la otra decisión como dada. Como resultado, los dos tienen resultados relativamente malos (larga duración en prisión o cero ganancias).

El Dilema del Prisionero ha sido influyente a lo largo de las ciencias sociales, desde la segunda mitad del siglo XX, porque ilustra cómo quienes toman las decisiones de manera racional y buscando proteger sus intereses, pero escogiendo sus estrategias en aislamiento, actúan recíprocamente para obtener resultados malos.

¿Pero es realmente racional actuar así?

En el juego del Dilema del Prisionero, el aislamiento es impuesto por las reglas del juego --los Prisioneros han sido aislados por la Policía, y no tiene ninguna opción para comunicarse--. Pero los empresarios pudieron, en principio, ponerse de acuerdo en una estrategia común, y compartir las ganancias del mercado entre ellos. Así no estarían tomando la estrategia del otro como dada, sino que en cambio, estarían coordinando sus estrategias.

Por supuesto, se diseñan leyes antimonopolios para hacer que conductas semejantes sean ilegales, y que han sido promulgadas porque muchas personas creen que los hombres de negocios no deberían colaborar para establecer precios altos en los mercados. Sin embargo, en otro tipo de problemas la cooperación también puede ser la mejor solución para un juego.

En un juego de Dilema del Prisionero, la matriz se representa de la siguiente manera:

Preso N° 1

	NC	C
Preso N° 2		
NC	(P,P)	(T,S)
C	(S,T)	(R,R)

Donde NC: Acción sin cooperación

C: Acción con cooperación

T: Tentación de traicionar al cómplice

S: Pago a la persona que es traicionada

R: Pago por cooperar entre sí si ambos así lo hacen

P: Castigo por no cooperar

En un juego de Dilema del Prisionero debe cumplirse que $T > R > P > S$. El equilibrio se alcanza cuando ninguno de los dos jugadores puede mejorar sus ganancias actuando unilateralmente (Equilibrio de Nash)

Bibliografía

Parte 1

- Filloy Yague Eugenio, Rojano Cevallos Teresa; Álgebra; grupo editorial Iberoamericana , México, 2001.
- Pinzón Balam José Manuel; Temas de Álgebra; Universidad Autónoma de Yucatán; México; 2002.
- Lehmann, C. Álgebra; Ed. Limusa; México. 2000.
- De Oteyza E; Lam E; Hernández C; Carrillo A; Temas selectos de matemáticas; Primera edición; Prentice Hall Hispanoamericana; México; 1998.
- Larson Roland; Álgebra intermedia; Mc Gras Hill; 2ª. Ed.; México; 2000.
- Aponte Gladis; Fundamentos de Matemática Básica; 2ª. Ed.; Addison Wesley; México; 1998.
- SEP; Matemática con hoja electrónica de cálculo “Enseñanza de las matemáticas con tecnología”; SEP-ILCE, México, 2000.
- Leithold Louis; Algebra; OXFORD; México; 1999.
- Fuenlabrada de la Vega Trucios Samuel; Aritmética y Álgebra; Mc Graw Hill; México; 2000.
- Leithold L. Cálculo con geometría analítica. Ed. Harla. 6º edición. México. 1989.
- Smith Robert T. CÁLCULO TOMO 1. McGraw Hill. Colombia. 2000
- Ayres JR. F., E. Mendelson. CÁLCULO. Mc. Graw Hill. Colombia 2001.
- Antonyan, Natella. PROBLEMARIO DE PRECÁLCULO. Thomson Learning. México. 2001
- Waner, Stefan. Cálculo Aplicado. 2ª. Ed. Thomson Learning. México. 2002
- Purcell, Edwin J. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Prentice Hall. México. 1997.
- Mochón, S. QUIERO ENTENDER EL CÁLCULO. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1994

- Wisniewski P.M., H.A. Gumeta Chávez., I. López Saura. PROBLEMARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL. DE UN
- A VARIABLE. INTERNACIONAL Thomson Editores. México. 2001.
- Wenzelburger E. CÁLCULO DIFERENCIAL. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1993.
- Quijano M., C. Navarrete. CÁLCULO I. Universidad Autónoma de Yucatán. México. 2002.
- Anderson, David R.; Sweeney Dennis J. ; Williams Thomas A. ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA. Thomson Editores. México, 2005.
- Berenson, Mark L.; Levine, D.M. ESTADISTICA BASICA EN ADMINISTRACION; Conceptos y aplicaciones. Edit.Prentice Hall, Pearson. México. 1999.
- Black, Ken. ESTADÍSTICA EN LOS NEGOCIOS; CECSA. México. 2005
- Kohler, Heinz. ESTADÍSTICA PARA NEGOCIOS Y ECONOMIA. Edit. CECSA, México, 1998.
- Levin, Richard I. Estadística PARA ADMINISTRADORES. Edit. Prentice Hall, Pearson, México, 1998.
- Webster, Allen L. ESTADISTICA APLICADA A LA EMPRESA Y LA ECONOMIA. Edit. Mc. Graw-Hill, México, 2002.

Parte 2 y 3

- AQUILANO C. Dirección y Administración de la producción y las operaciones. -- México : Ed. Mac Graw Hill, 1995.
- ÁLVAREZ, MERCEDES. Modelos Económicos Matemáticos II. -- La Habana : Ed. ISPAE, 1987.-- t II.
- BOSSEL, HARTMUT. Modeling and Simulation. -- Estados Unidos : Ed. Sales and Customen Service Office, 1990.
- CORTÉS CORTÉS, MANUEL E. Introducción a la Investigación de Operaciones. -- Guayaquil : Ed. Universidad de Guayaquil, 1999. -- 187p.
- CHIANG, ALPHA C. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. -- Madrid : Mc Graw Hill, 1987.
- EPPEN, G. D. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. -- México : Ed. Prentice Hall, 2000.
- FELIPE, PILAR. Programación Matemática I. -- La Habana: Ed. Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo, 1988. -- 352p.
- _____. Programación Matemática II. -- La Habana: Ed. Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo, 1988. -- 281p.
- Gestión y Calidad del Mantenimiento. -- La Habana : Ed. ISPJAE, 1996. -- 111p.
- HEIZER, J Dirección de la Producción / J. Heizer, Barry Render. -- México : Ed. Prentice may, 1998.
- HILLIER, FREDERICK S. Operations Research / Frederick Hillier y Gerald S. Lieberman. -- San Francisco : Ed Holden-Day, 1974. -- 582p.
- KAUFMANN, ARNOLD. Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones. -- La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1981. -- 570p.
- KOHLOR, H. Statistics for Business and Economics. -- New York : Ed. Harper Collins Publishers, 1994.
- MCKEOWN, D. Modelos Cuantitativos para la Administración. -- México : Ed. Iberoamericana, S.A, 1986.

- MATHUR, K. Investigación de Operaciones : El arte de la toma de decisiones / K. Mathur, D. Solow. -- México : Ed. Prentice – Hall Hispanoamericana, SA, 1996.
- MONKS, JOSEPH G. Operations Management. Shaum's Outline Series : Ed. McGraw Hill, 1985.
- NEWMAN, G. DONALD. Engineering economic analysis. -- San José : Editorial McGraw Hill, 1983.
- PORTELA SILVA, MANUEL. Modelos Matemáticos I / Manuel Portela Silva, Vladimir Kuznich Artemenko. -- La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1998.
- _____. Modelos Matemáticos II / Manuel Portela Silva, Vladimir Kuznich Artemenko. -- La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1998.
- PORTUONDO PICHARDO, FERNANDO M. Economía de Empresas Industriales. -- Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1985.-- t II.
- RÍOS - INSUA, MARÍA JESÚS. Procesos de Decisión Multicriterios / María Jesús Ríos-Insua, Sixto Ríos-Insua. – España : Ed. EUDENA. 1989.
- SADASCHIV ADIGA. Object – Oriented Simulation to Support research in Manufacturing Systems. Int. J. Prod. Res. (California) Vol 29: (No, 12): 2529-2542, Feb, 1991.
- SCHROEDER, ROGER G. Administración de Operaciones. – México : Ed. McGraw Hill, 1990.
- _____. Operations Management. Decision making in the operations function. – Minnesota : Ed. McGraw Hill, 1985.
- SCHWEVER, H. Process engineering economics. -- La Habana : Ed. Revolución, 1966.
- SEPÚLVEDA, J. Ingeniería económica : Serie Schaum / J. Sepúlveda, W. Souder, B. Gottfried. – México : Ed. McGraw Hill, 1985.
- TAHA, HANDY. Investigación de Operaciones. – México : Ed. Alfaomega, 1991. -- 989p.
- THIERAUF, R. Toma de Decisiones por medio de la Investigación de Operaciones / R. Thierauf, R. A. Grosse. -- México : Ed. Linusa Noriega, 1993.

- THUESEN, G. J. Engineering economy / G. J. Thuesen, W. J. Fabrycky. -- USA: Ed. Prentice Hall int, 1984.
- TRUJILLO, JOSÉ M. Métodos Económico - Matemáticos I / José M. Trujillo, José A. Díaz. -- La Habana : Ed. ENPES, 1988. -- 339p.
- _____. Métodos Económico - Matemáticos II. / José M. Trujillo, José A. Díaz. -- La Habana : Ed. ENPES, 1988. -- 395p.
- WATSON, GALLAGHER. Métodos Cuantitativos para la toma de decisiones en Administración. -- México : Ed. Mc Graw-Hill, 1982. -- 612p.
- WINSTON, WAYNE L. Investigación de Operaciones : Aplicaciones y Algoritmos. -- México : Ed. Iberoamericana, 1994. -- 1337p.

Sitios Web de Internet

- <http://www.jalonso.com/programación.htm#multiobjetivo>.
Título: Programación Multicriterio: Un instrumento para el diseño de sistemas de producción.
- <http://gente.pue.uplap.mx/~absalon/papers/perfiles 96.html>
Título: Aplicaciones de la Investigación de Operaciones.
- <http://www.sio-ams.com>
Título: Teorías y metodologías principales de la Investigación de Operaciones.
- <http://www.unirioja.es/Informacion/Asignaturas/Empresas/207180.html>
Título: Matemáticas para Economistas.
- <http://www.home.coqui.net/maan/empresa.htm>
Título: Métodos de Optimización.
- <http://www.geocities.com/Silicon Vallery/Pines/7894/dual.html>
Título: El dual de la Programación Lineal.
- <http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/optas/dantzig.html>
Título: Profesor George Dantzig: Linear Programming Fourder Turns 80.
- <http://www.sio-ams.com/progmate.htm>
Título: Programación Lineal.

- <http://www.ee.uwa.edu.au/~croft/com446/lccd.html>
Título: Linear Programming.
- <http://www.altavista.lineal.com>
Título: Programación Lineal.
- http://www-2.cs.cmu.edu/~koopman/des_s99
Título: Profits and Business Models.
- http://www-2.cs.cmu.edu/~koopman/des_s99
Título: End Of Life Wearout & Replacement
- <http://www.monografias.com/punto de equilibrio.html>