tercera edición

ecuaciones diferenciales aplicadas

MURRAY R SPIEGEL

PRENTICE HALL

ecuaciones diferenciales aplicadas

MURRAY R. SPIEGEL

Consultor matemático y
ex-profesor y jefe,
Departamento de Matemáticas
Rensselaer Polytechnic Institute
Hartford Graduate Center

Traducción:

HENRY RIVERA GARCIA
M. Sc., Ingeniería Industrial, University of Pittsburgh

PRENTICE-HALL IHISPANOAMERICANA, S.A.

México ■ Englewood Cllffs ■ Londres ■ Sydney • Toronto ■ Nueva Delhi ■ Tokio ■ Singapur ■ Rio de Janeiro

ecuaciones diferenciales aplicadas

MURRAY R. SPIEGEL

Consultor matemático y
ex-profesor y jefe,
Departamento de Matemáticas
Rensselaer Polytechnic Institute
Hartford Graduate Center

Traducción:

HENRY RIVERA GARCIA
M. Sc., Ingeniería Industrial, University of Pittsburgh

PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

México ▪ Englewood Cliffs ▪ Londres ▪ Sydney ▪ Toronto ▪ Nueva Delhi ▪ Tokio ▪ Singapur ▪ Rio de Janeiro

ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS

PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Enrique Jacob No. 20, Col. El Conde C.P. 53500
Naucalpan de Juárez . Edo. de México.
Miembro de la- Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

ISBN 968-880-053-8

Traducido de la tercera edición en inglés de
APPLIED DIFFERENTIAL EQUATIONS

ISBN 0-13-234997-3

3456789012 E.C.-85 8612345790

Impreso en México Printed in Mexico

OCT

PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A.
Calz. de Chabacano 65 Local A
Col. Asturias Del. Cuauhtémoc

1000 1994

A

mi madre

contenido

CAPITULO TRES

APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SIMPLES DE ORDEN SUPERIOR 70

CAPITULO CUATRO

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES 166

CAPITULO CINCO

APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES 223

CAPITULO SEIS

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE 260

CAPITULO SIETE

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO SERIES 304

CAPITULO OCHO

CAPITULO NUEVE

parte II

sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

CAPITULO DIEZ

CAPITULO ONCE

parte III

ecuaciones diferenciales parciales

CAPITULO DOCE

CAPITULO TRECE

CAPITULO CA TORCE

SOLUCIONES DE PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA USANDO FUNCIONES DE BESSEL Y DE LEGENDRE 632

APENDICE

prefacio

El propósito de este libro es el de proporcionar una introducción a las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones para los estudiantes de ingeniería, ciencias y matemáticas. Para alcanzar este propósito, el libro ha sido escrito con los siguientes objetivos:

1. Demostrar cómo las ecuaciones diferenciales pueden ser útiles en la solución de variados tipos de problemas-en particular, mostrar al estudiante cómo (a) ***traducir*** problemas a un lenguaje de ecuaciones diferenciales, esto es, establecer la formulación matemática de problemas; (b) ***resolver*** la ecuación diferencial resultante sujeta a condiciones dadas; *y* (c) ***interpretar*** las soluciones obtenidas. Problemas elementales de muchos campos diferentes e importantes se explican en relación a su formulación matemática, solución, e interpretación. Las aplicaciones están ordenadas de modo tal que los tópicos de mayor interés a los estudiantes o al profesor pueden escogerse sin dificultad.
2. Motivar a los estudiantes de modo que se consiga un entendimiento de los tópicos y se desarrolle un interés. Esto se hace por medio de ayudas como ejemplos, preguntas y problemas para discusión.
3. Proporcionar relativamente pocos métodos de resolver ecuaciones diferenciales que pueden aplicarse a un grupo ***grande*** de problemas. Se ha **enfatizado** en un número mínimo de métodos básicos que el estudiante encuentra normalmente en la práctica; otros métodos menos utilizados que sin embargo son de interés se pueden encontrar en los ejercicios.
4. Proporcionar al estudiante que desee investigar métodos e ideas más avanzados, o problemas y técnicas más complicados una oportunidad para que lo haga. Esto se hace al ofrecer cerca de **2.200** ejercicios ordenados en dificultad. Los ejercicios tipo A son en su mayoría fáciles, requieren poca originalidad y están diseñados para propósitos de práctica. Los ejercicios tipo B envuelven computaciones algebraicas más complicadas o mayor originalidad que

la del grupo A. Los ejercicios tipo C están dirigidos principalmente a complementar el material del texto; ellos exigen un alto grado de originalidad y conocimiento, diseñados para desafiar al estudiante.

5. Unificar la presentación a través de un enfoque ordenado y lógico, haciendo énfasis en conceptos generales en vez de hacerlo en detalles aislados. Por ejemplo, después de introducir el muy simple método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, se introducen los conceptos de transformación de variables y los de hacer una ecuación exacta al multiplicar por un factor integrante apropiado. Estos conceptos se usan luego en la solución de otros tipos de ecuaciones.

6. Separar la teoría de las ecuaciones diferenciales de sus aplicaciones para dar amplia atención a cada una. Esto se consigue presentando la teoría y aplicaciones en capítulos separados, particularmente en los primeros capítulos del libro. Esto se hace por dos razones. Primero, desde un punto de vista pedagógico, parece no aconsejable mezclar teoría y aplicaciones en las etapas iniciales puesto que el principiante generalmente encuentra difícil la formulación matemática de problemas aplicados; cuando él se ve forzado a hacerlo, además de aprender técnicas de solución, generalmente ningún tema se domina. Al tratar teoría sin aplicaciones y luego ampliar gradualmente a las aplicaciones (al mismo tiempo que se revisa la teoría), el estudiante puede aprender mejor ambos tópicos puesto que la atención así se concentra en sólo un aspecto a la vez. Una segunda razón para separar teoría y aplicaciones es la de facultar a los profesores que deseen presentar un mínimo de aplicaciones de hacerlo tan fácilmente sin tener que estar en la difícil posición de tener que "saltar" capítulos.

El libro está dividido en tres partes principales. Parte 1 trata de las *ecuaciones diferenciales ordinarias,* Parte II con *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* y Parte III con *ecuaciones diferenciales parciales.* Es útil discutir los capítulos en cada parte.

Parte 1, ecuaciones diferenciales ordinarias. El Capítulo uno da una presentación general a las ecuaciones diferenciales incluyendo la motivación por problemas de valor inicial y de frontera junto con tópicos relacionados. En el Capítulo dos se discuten métodos para resolver algunas ecuaciones de primer orden y simples de alto orden. Estos métodos se aplican en el Capítulo tres a campos tales como física (incluyendo mecánica, electricidad, flujo de calor, etc.), química, biología y economía. El Capítulo cuatro discute métodos básicos para resolver ecuaciones diferenciales lineales mientras que el Capítulo cinco usa estos métodos en problemas aplicados.

En el Capítulo seis se presenta la transformada de Laplace y se hacen aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales. Entre los tópicos considerados están la función gamma, funciones de impulso y la función delta de Dirac, el problema tautócrono y servomecanismos,

El Capítulo ocho, el cual es opcional, introduce la idea de funciones ortogonales y problemas de Sturm-Liouville usando generalizaciones a partir de vectores en dos y tres dimensiones. Algunos tópicos tratados en este capítulo son eigenvalores y eigenfunciones, y series ortogonales incluyendo series de Fourier y de Bessel.

En el capítulo final de la Parte I, Capítulo nueve, se presenta una introducción a varios métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se incluye una discusión de diagramas de computador y elementos de análisis de errores.

Parte II, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta parte consiste de dos capítulos. El primero de estos, el Capitulo diez, tiene el propósito de servir de introducción general y de ofrecer varios métodos para resolver ecuaciones diferenciales simultáneas junto con aplicaciones tales como el movimiento planetario y de satélites, vibraciones, electricidad y biología. Incluídos en este capítulo están los principios elementales del análisis del plano de fase y estabilidad motivados por el problema del depredador-presa en ecología.

El segundo capítulo, Capítulo once, el cual es otro capítulo opcional, discute métodos matriciales para resolver sistemas lineales. Este capítulo muestra cómo conceptos teóricos importantes tales como eigenvalores y ortogonalidad surgen de manera natural en el proceso de solución.

Parte III, ecuaciones diferenciales parciales. Esta parte está compuesta de tres capítulos. El primero de estos, el Capítulo doce, intenta servir de una introducción general a algunas de las ideas concernientes a las ecuaciones diferenciales parciales. Estas incluyen deducciones de ecuaciones importantes que surgen en varios campos tales como conducción de calor, vibración y teoría de potencial. El segundo capítulo, Capítulo trece, presenta métodos de series de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Finalmente, el Capítulo catorce, el cual es opcional explora métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales usando funciones de Bessel y de Legendre. Un aspecto importante de este capítulo es el problema de la bomba atómica el cual se trata junto con otros tipos de problemas más convencionales y relativamente inofensivos dados en los Capítulos doce y trece.

Los capítulos han sido escritos y ordenados para proporcionar un máximo de flexibilidad. Por ejemplo, los Capítulos seis y once se pueden omitir sin ninguna pérdida de continuidad si el profesor decide no cubrir las transformadas de Laplace o métodos matriciales. Similarmente, en el Capítulo diez el método de la solución complementaria-particular para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se ilustra sin el uso de matrices mientras que en el Capítulo once se trata con matrices. Así, el profesor puede usar uno u otro o ambos para demostrar sus relaciones. Como otro ejemplo, en el Capítulo trece, el cual presenta métodos de series de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales, las series de Fourier se introducen en una manera histórica, esto es, como Fourier pudo haberlas descubierto. Como resultado, este capítulo es esencialmente independiente del Capítulo ocho, el cual trata con funciones y series ortogonales, proporcionándole al profesor la opción de omitir enteramente el Capítulo ocho. En casos donde pudiera existir alguna duda, los capítulos y secciones de capítulos han sido marcados con un diamante para indicar que son opcionales. Sin embargo, los capítulos y secciones que han sido marcados como opcionales (tales como los concernientes a las transformadas de Laplace, métodos numéricos y aplicaciones particulares), no han sido marcados como tales debido a que el cubrimiento u omisión de los tópicos incluidos generalmente dependerán de la clase de curso que se ofrezca, los tópicos a considerar, etc.

Debido al alto grado de flexibilidad, el libro se puede usar en una variedad de cursos empezando desde un curso de uno a dos semestres e incluyendo sólo ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. El diagrama en la pagina xvi, el cual indica secuencias posibles de capítulos, puede ser útil al profesor en la planeación de un curso. Por ejemplo, en un curso semestral que cubra ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, una posible secuencia de capítulos es 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13. Una doble flecha indica que los capítulos se pueden intercambiar. Así, por ejemplo, el Capítulo siete si se desea podría preceder al Capítulo seis.

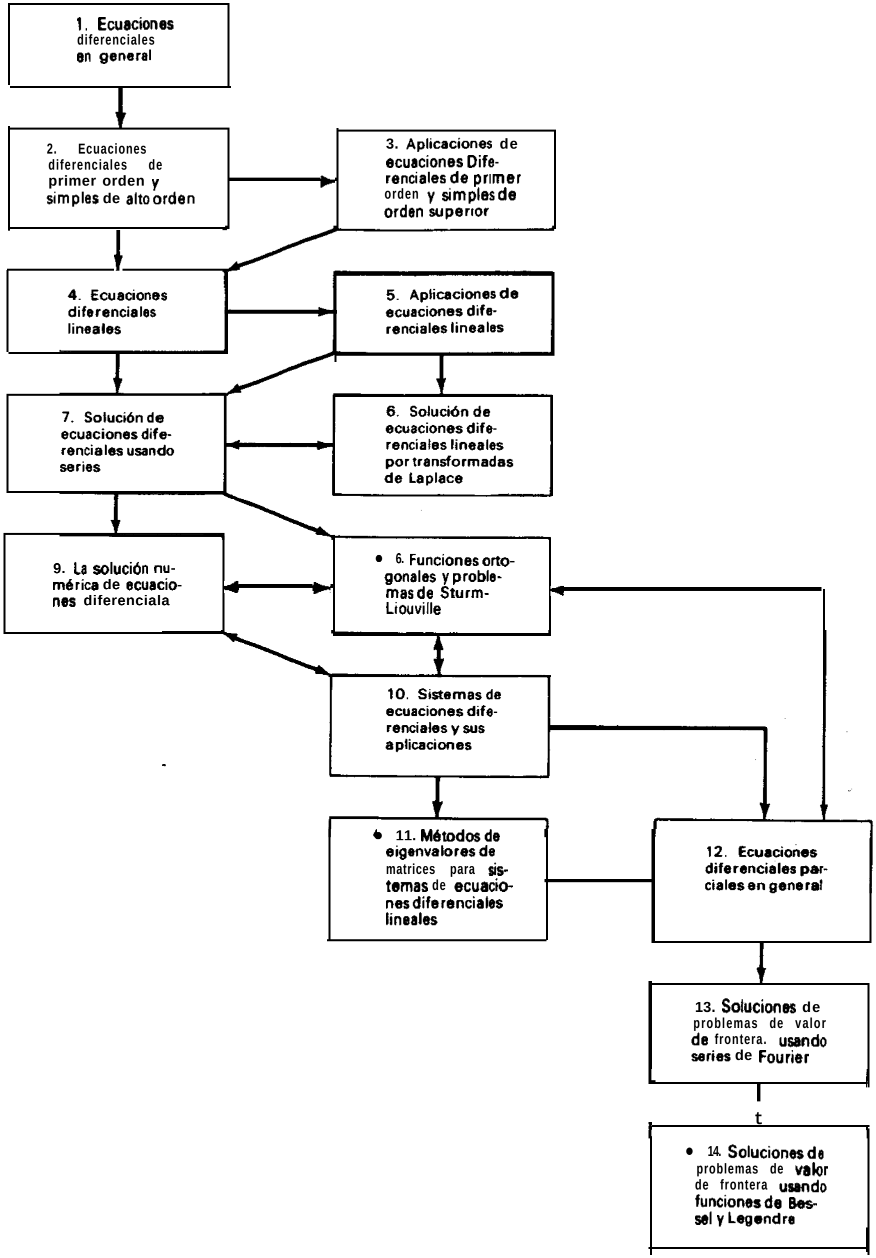
El autor desea aprovechar esta oportunidad para expresar sus agradecimientos a Esther y Meyer Scher por su continuado interés y estímulo; al grupo asesor de la Prentice Hall, especialmente a Leslie Nadell y Bob Sickles, por su excelente cooperación; y a los siguientes profesores de matemáticas quienes revisaron el manuscrito y proporcionaron muchas sugerencias útiles: Ebon E. Betz, United States Naval Academy; E. E. Burniston, North Carolina State University; John Burns, Virginia Polytechnic Institute and State University; Ronald Hirschorn, Queen's University; James Hurley, University of Connecticut; R. N. Kesarwani, University of Ottawa; Anthony L. Peressini, University of Illinois; William L. Perry, Texas A & M University; Daniel Sweet, University of Maryland; Henry Zatzkis, New Jersey Institute of Technology.

* * *

Fue un gran placer enterarme de la traducción al idioma Español de mi libro *Ecuaciones diferenciales aplicadas,* tercera edición. Espero que esto dará una oportunidad a otros de disfrutar la belleza del tema de las ecuaciones diferenciales y sus numerosas aplicaciones.

Murray R. Spiegel

POSIBLES SECUENCIAS DE CAPITULOS



I

ecuaciones diferenciales ordinarias

uno

ecuaciones diferenciales en general

1 Conceptos de ecuaciones diferenciales

1.1 ALGUNAS DEFINICIONES Y OBSERVACIONES

El descubrimiento independiente del cálculo por ***Newton y Leibniz*** en el siglo 17 proporcionó el ímpetu para los grandes avances que siguieron **en las** matemáticas, ciencias, e ingeniería. Una de las más importantes y fascinantes ramas de las matemáticas que proporcionó el medio para las formulaciones matemáticas y soluciones de variados problemas en estas áreas se llama ***ecuaciones diferenciales,*** las cuales estudiaremos en este libro. Con el objeto de seguir adelante, necesitamos primero algunas definiciones.

Definición 1. Una ***ecuación diferencial*** es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama una ***ecuación diferencial ordinaria.*** Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) **la** ecuación se llama una ***ecuación diferencial*** *parcial.**

Ejemplo 1. La ecuación $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ 0 y' =2x + y (1)

en la cual y es una función desconocida de una sola variable x es una ecuación diferencial ordinaria. Frecuentemente escribimos y = $f(x)$ y llamamos **a** ***x la variable independiente,*** y y, la cual depende de x, la ***variable dependiente.*** Por brevedad podemos denotar el valor de y en x por y(x), y sus derivadas sucesivas por $y'(x)$, y " (x) , , o simplemente $y', y'',$.

Ejemplo 2. La ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$ (2)

en la cual x es una función desconocida en una sola variable t es una ecuación diferencial ordinaria. Podemos escribir $x = g(t)$, donde t es la variable independiente y x la variable dependiente. Por brevedad podemos denotar el valor de x en t por x(t), y también podemos denotar las derivadas por x'(t), x"(t), ., 0 simplemente x', x",

Ejemplo 3. La ecuación $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V$ (3)

en la cual V es una función desconocida en dos variables x y y es una ecuación diferencial parcial. Podemos escribir $V = F(x, y)$, donde x y y son variables independientes y V es la variable dependiente. Por brevedad podemos denotar el valor de V en x y y por $V(x, y)$.

*Excluimos de la clase de ecuaciones diferenciales aquellas que son identidades tales como

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y$$

Definición 2. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Ejemplo 4. La derivada más alta que aparece en la ecuación (1) es dy/dx, la cual es de primer orden, esto as, de orden 1. Por tanto, la ecuación diferencial es una ecuación de orden 1, o una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Ejemplo 5. La derivada más alta que aparece en ecuación (2) es d^2x/dt^2, la cual es de segundo orden, esto es, orden 2. La ecuación diferencial es por tanto de orden 2, o una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Ejemplo 6. La derivada más alta que aparece en ecuación (3) es $\partial^2 V/\partial x^2$ 0 $\partial^2 V/\partial y^2$, ambas son de segundo orden. Por tanto, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Observación 1. Una ecuación diferencial ordinaria **de** orden n puede expresarse como

$$g(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

Si podemos resolver esta ecuación por la derivada más alta, obtenemos una o más ecuaciones de orden n tomando la siguiente forma:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, 4^{(n-1)}) \tag{5}$$

Ejemplo 7. La ecuación de primer orden $(y')^2 + xy' - y = 0$ (6)

es equivalente a las sigüientes dos ecuaciones de primer orden

$$y' = \tfrac{1}{2}(\sqrt{x^2 + 4y} - x), \qquad 2" = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{x^2 + 4y} + x) \tag{7}$$

Observación 2. Adicionalmente a su orden, es útil clasificar una ecuación diferencial ordinaria como una (ecuación diferencial ***lineal o no-lineal*** de acuerdo a la siguiente.

Definición 3. ***Una ecuación diferencial ordinaria lineal*** es una ecuación que puede ser escrita -en la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \mathbf{F(s)} \tag{8}$$

donde $F(x)$ y los coeficientes ***a,(x),*** $a_1(x), \ldots,$ ***a,(x)*** son funciones dadas de ***x y a,(x)*** no es idéntica a cero.* Una ecuación diferencial que no puede escribirse en la forma (8) se llama una ***ecuación diferencial no-lineal.***

Ejemplo 8. Las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Ejemplo 9. La ecuación (6) o las dos ecuaciones equivalentes (7) son no-lineales.

*En álgebra $au + bv$ donde a y b no dependen de u o de v frecuentemente se llama una función lineal de u y v. La terminología *lineal* en la Definición 3 está inspirada en una generalización de esta idea debido a que el lado izquierdo de (8) es una función lineal de $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Las ideas presentadas en las Observaciones 1 y 2 también se pueden extender a las ecuaciones diferenciales parciales. Como tendremos ocasión de observar a lo largo de este libro, las ecuaciones diferenciales lineales son en general más fáciles de manejar que las ecuaciones no lineales.

Definición 4. Una *solución* de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación, esto es, la reduce a una identidad.

Ejemplo 10. Las funciones definidas por $x = e^{5t}$ y $x = e^{-3t}$ son dos soluciones de la ecuación (2), puesto que la sustitución de éstas conducen respectivamente a

$$25e^{5t} - 2(5e^{5t}) - 15e^{5t} = 0, \qquad 9e^{-3t} - 2(-3e^{-3t}) - 15e^{-3t} = 0$$

las cuales son identidades. Otra solución es $x = 0$, y pueden existir otras. De hecho $x = c_1e^{5t} + c_2e^{-3t}$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias es una solución.

Ejemplo 11. La función definida por $V = e^{3x}\operatorname{sen} 2y$ es una solución de (3) puesto que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3e^{3x}\operatorname{sen} 2y,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 9e^{3x}\operatorname{sen} 2y,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2e^{3x}\cos 2y,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4e^{3x}\operatorname{sen} 2y$$

de modo que al sustituir encontramos la identidad $9e^{3x}\operatorname{sen} 2y + 2(-4e^{3x}\operatorname{sen} 2y) = e^{3x}\operatorname{sen} 2y$.

Observación 3. En los Ejemplos 10 y 11 las soluciones se dieron sin restricciones sobre los valores que asumen las variables independientes. Algunas veces, sin embargo, debemos restringir tales valores, como por ejemplo cuando queremos que los valores de la función sean reales o tengan otras propiedades. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, entonces para que $f(x)$ sea real debemos tener $-3 \leqq x \leqq 3$. Tales valores constituyen lo que se llama el *dominio* de la función. Cuando no se especifica el dominio, como muchas veces ocurre, asumimos que el dominio es el conjunto de todos los valores para los cuales las operaciones indicadas producen resultados con sentido. Así, por ejemplo, si una función se define por $f(x) = 1/(x - 3)$, entonces el dominio es el conjunto de todos los valores de x excepto 3, esto es $x \neq 3$, puesto que la división por cero carece de sentido.

Ejemplo 12. La función definida por $y = \sqrt{9 - x^2}$ es una solución de

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{9}$$

puesto que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \tag{10}$$

y al sustituir en la ecuación diferencial (9) se obtiene una identidad

$$\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Sin embargo, es claro que si deseamos que la función sea real y la derivada (10) exista debemos restringir x al dominio $-3 < x < 3$; esto es, debemos excluir $x = -3$ y $x = 3$. Así podemos decir que $y = \sqrt{9 - x^2}$ es una solución de

(9) sobre el intervalo $-3 < x < 3$. Otros dominios podrían también tomarse. Por ejemplo, las funciones definidas por $y = \sqrt{9-x^2}$, $0 \leqq x < 3$, o $y = \sqrt{9-x^2}$, $1 < x < 2$ son también soluciones de (9).

Observaciones similares pueden hacerse para funciones de dos o más variables. Por ejemplo, si $V = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$, entonces para que V y sus derivadas parciales con respecto a x y y existan y sean reales, se debe restringir x y y de modo que $x^2+y^2 < 9$, dominio que geométricamente representa el interior de un círculo de radio 3 en el plano xy y con centro en el origen.

Observación 4. En todos los ejemplos anteriores tratamos con soluciones 8-n las cuales la variable dependiente fue resuelta *explícitamente* en términos de las variables independientes, y por esta razón nos referimos a las funciones como *funciones explícitas.* Corno se aprendió en cálculo, sin embargo, podemos tener funciones definidas *implícitamente* por ecuaciones que involucran las variables dependientes e independientes, en cuyo caso ellas se refieren como *funciones implícitas.*

Ejemplo 13. Dada la relación $x^2+y^2 = 9$ entre x y y, podemos considerar a y alefinida implícitamente como una función de x. De hecho, notando que la relación es equivalente a $y = \pm\sqrt{9-x^2}$, podemos ver que una de éstas es la misma que aparece en la relación del Ejemplo 12. Esta situación nos indica el hecho de que al tratar con funciones implícitas se puede requerir investigación adicional para determinar la función especificada que se desea, puesto que se pueden incluir muchas funciones. Note que si diferenciamos $x^2+y^2 = 9$ implícitamente, considerando a y como una función de x, obtenemos:

$$2x + 2yy' = 0 \quad 0 \quad y' = -\frac{x}{Y} \tag{11}$$

la cual concuerda con (9). El hecho de que debemos ser cuidadosos sobre lo que **estamos** haciendo puede ilustrarse al notar que $x^2+y^2 = -9$ también satisface formalmente a (ll), pero ella ni siquiera define a y como una función real de x.

Ejemplo 14. Asuma que
$$y^3 - 3s + 3y = 5 \tag{12}$$
define a y (implícitamente) como una función de x. Entonces esta función sería una solución de

$$y'' = -2y(y')^{\prime\prime} \tag{13}$$

puesto que al diferenciar (12) con respecto a x encontramos

$$y' = \frac{1}{y^2+1}, \qquad y'' = \frac{-2y}{(y^2+1)^3} \tag{14}$$

de modo que la sustitución de las derivadas dadas por (14) en (13) produce la identidad

$$\frac{-2y}{(y^2+1)^3} = -2y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)^3 \tag{15}$$

La pregunta de si (12) realmente sí define a y como una función de x requiere mayor investigación, pero hasta que tal decisión se obtenga ella se puede referiir como a una *solución formal..* .

1.2 EJEMPLOS SENCILLOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA

Muy frecuentemente, especialmente en problemas aplicados, una ecuación diferencial se resuelve sujeta a unas condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer. Como un ejemplo sencillo, considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x (Figura 1.1) de tal manera que su aceleración en cualquier tiempo $t \geqq 0$ está dado por $a = 16 - 24t$. (a) Encuentre la posición x de la partícula medida del origen 0 a cualquier tiempo $t > 0$, asumiendo que inicialmente ($t = 0$) está localizada en $x = 2$ y está viajando a una velocidad $v = -5$. (b) Trabaje parte (a) si solamente se sabe que la partícula está localizada inicialmente en $x = 2$, y en $x = 7$ cuando $t = 1$

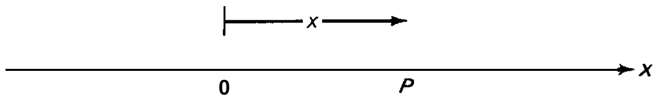


Figura 1.1

Para formular matemáticamente este problema, recordemos primero del cálculo que la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve a lo largo del eje x están dadas respectivamente por

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{Y} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{16}$$

Entonces de la primera frase del enunciado del problema se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t \tag{17}$$

la cual es la ecuación diferencial requerida para el movimiento.

Solución a la Parte (a) Las condiciones sobre la función x dadas en parte (a) son

$$x = 2, \qquad v = -5 \text{ en } t = 0 \text{ esto es, } x(0) = 2,\ x'(0) = -5 \tag{18}$$

Se debería notar que el significado del signo menos en $v = -5$ es de que la partícula está viajando inicialmente hacia la izquierda. Si integramos (17) una vez, encontramos

$$\frac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 + c_1 \tag{19}$$

donde c_1 es una constante arbitraria. Esta constante puede determinarse de la segunda condición en (18) con $t = 0$ en (19). Encontramos $-5 = 0 + c_1$, esto es, $c_1 = -5$, de modo que

$$\frac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 - 5 \tag{20}$$

La integración de (20) da $\quad x = 8t^2 - 4t^3 - 5t + c_2 \qquad (21)$

donde c_2 es otra constante arbitraria que puede determinarse de la primera condición en (18) con $t = 0$ en (21). Encontramos 2 = Cl + c_2 o $c_2 = 2$. Así

$$x = 8t^2 - 4t^3 - 5t + 2 \tag{22}$$

la cual es la ley requerida de movimiento permitiéndonos determinar la posición en cualquier tiempo $t > 0$; por ejemplo, al tiempo $t = 1$, $x = 1$, al tiempo $t = 2$, $x = -8$, etc.

Solución a la Parte (b) En esta parte todavía tenemos la misma ecuación diferencial (17) para el movimiento, pero las condiciones han cambiado a

$$x = 2 \text{ en } t = 0, \qquad x = 7 \text{ en } t = 1 \quad \text{o} \quad x(0) = 2, \qquad x(1) = 7 \tag{23}$$

En este caso integramos (17) como antes para obtener (19). Sin embargo, puesto que no tenemos una condición para dx/dt, no podemos todavía determinar c_1, y por tanto debemos integrar (19) para obtener

$$x = 8t^2 - 4t^3 + c_1 t + c_2 \tag{24}$$

Podemos ahora usar las dos condiciones en (23) para hallar las dos constantes arbitrarias en (24). Esto conduce a $2 = 0 + c_2$, $7 = 8(1)^2 - 4(1)^3 + c_1 + c_2$ o $c_1 = 1$, $c_2 = 2$
de modo que

$$x = 8t^2 - 4t^3 + t + 2 \tag{25}$$

Las formulaciones matemáticas de las partes (a) y (b) en el problema anterior son, respectivamente,

$$\text{(a)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t, \qquad x(0) = 2, \ x'(0) = -5 \tag{26}$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t, \qquad x(0) = 2, \ x(1) = 7 \tag{27}$$

Una diferencia importante entre ellas es que en (a) las condiciones sobre la función desconocida x y sus derivadas x' o dx/dt están especificadas en un *valor* de la variable independiente (en este caso $t = 0$), mientras que en (b) las condiciones sobre la función desconocida x se especifican en ***dos valores*** de la variable independiente (en este caso $t = 0$ y $t = 1$). Los dos tipos de problemas presentados en (a) y (b), respectivamente, se llaman ***problemas de valor inicial y problemas de valor de frontera.*** Debemos así hacer las siguientes- definiciones.

Definición 5. Un ***problema de valor inicial*** es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en ***un valor*** de la variable independiente. Tales condiciones se llaman ***condiciones iniciales.***

Definición 6. Un ***problema de valor de frontera*** es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en ***dos*** o ***más valores*** de la variable independiente. Tales condiciones se llaman ***condiciones de frontera.***

Considere el siguiente ejemplo ilustrando las observaciones anteriores,

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Una curva en el plano xy tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto (x, y) de ella es igual a $2x$. Hallar la ecuación de la curva si ésta pasa por el punto $(2, 5)$.

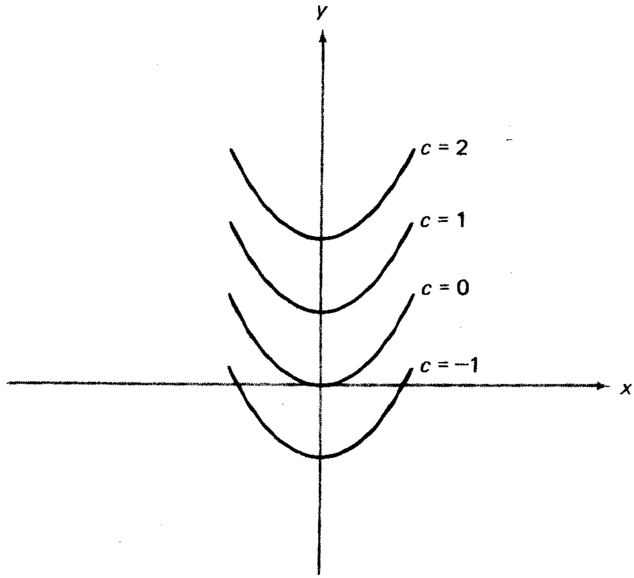


Figura 1.2

Solución Puesto que la pendiente de una curva en cualquier punto (x, y) de ella está dada por dy/dx, del enunciado del problema se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{28}$$

una ecuación diferencial de primer orden. Puesto que la curva debe pasar por el punto (2, 5),

$$y = 5 \text{ cuando } x = 2 \text{ esto es, } y(2) = 5 \tag{29}$$

El problema de resolver (28) sujeta a (29) es un problema de valor inicial.

La integración de (28) da $y = x^2 + c$ (30)

donde c es una constante arbitraria. Usando la condición (29) en (30) se obtiene $5 = (2)^2 + c$ de modo que $c = 1$. Así la curva requerida está dada por

$$y = x^2 + 1 \tag{31}$$

Gráficamente, (30) representa una ***familia de curvas*** en el plano xy, cada miembro de ella está asociado con un valor particular de c. En la Figura 1.2 se muestran algunos de estos miembros para $c = 0, -1, 1, 2$. Puesto que c puede variar, frecuentemente se llama un ***parámetro*** para distinguirlo de las variables principales x y y. La ecuación diferencial (28) que es satisfecha por todos los miembros de la familia frecuentemente se llama la ecuación. ***diferencial de la familia.***

Observación 5. La misma terminología usada en este ejemplo puede también usarse en el problema de la página 7. Así, (24) representa una **familia** de curvas en el plano tx, cada miembro de la cual está asociado con valores particulares de los dos parámetros c_1 y c_2, mientras que (17) es la ecuación diferencial de la familia. Para especificar el número de parámetros involucrados, algunas veces hablamos de una ***familia de curvas de un parámetro,*** una ***familia de curvas de dos parámetros,*** etc. Las soluciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales pueden entonces referirse como la ***solución con un parámetro (o*** la ***familia de soluciones con un parámetro),*** la ***solución con dos parámetros (o*** la ***familia de soluciones con dos parámetros),*** etc. También podemos referirnos a estas curvas como ***curvas solución.***

En el proceso de la formulación matemática de problemas aplicados, pueden surgir muchas clases de ecuaciones diferenciales, como veremos en futuros capítulos. En la siguiente lista vemos una pequeña muestra de ellas.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{32}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \tag{33}$$

$$v + M\frac{dv}{dM} = v^2 \tag{34}$$

$$EIy^{(IV)} = w(x) \tag{35}$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 5I = 100 \operatorname{sen} 20t \tag{36}$$

$$y'' = \frac{w}{H}\sqrt{1 + (y')^2} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial U}{dt} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = F(x, y) \tag{41}$$

La ecuación (32) es famosa en el campo de la mecánica en conexión con el movimiento armónico simple, como en las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple. Elia podría, sin embargo surgir en muchas otras conexiones.

La ecuación (33) surge en mecánica, calor, electricidad, aerodinámica, análisis de esfuerzos y en muchos otros campos.

La ecuación (34) surgió en un problema de vuelo de cohete.

La ecuación (35) es una ecuación importante en ingeniería civil en la teoría de deflexión o doblamiento de vigas.

La ecuación (36) puede surgir en la determinación de la corriente I como una función del tiempo t en un circuito de corriente alterna, pero también podría surgir en mecánica, biología, y economía.

La ecuación (37) surge en conexión con un problema de suspensión de cables.

La ecuación (38) podría-surgir en problemas de electricidad, calor, aerodinámica, teoría de potenciales, y en muchos otros campos.

La ecuación (39) surge en la teoría de conducción de calor, como también en la difusión de neutrones en una pila atómica para la producción de energía nuclear. También surge en la teoría de movimiento browniano.

La ecuación (40) surge en conexión con la vibración de cuerdas, como también en la propagación de señales eléctricas.

La ecuación (41) es famosa en la teoría de análisis de esfuerzos.

Estas son solo una pequeña parte de las muchas ecuaciones que podrían surgir en algunos de los campos de los cuales están tomadas. Exámenes de ecuaciones tales como éstas por matemáticos puros, matemáticos aplicados, físicos teóricos y aplicados, químicos, ingenieros, y otros científicos a través de los años han conducido a la conclusión de que existen ciertos métodos definidos por medio de los cuales muchas de estas ecuaciones pueden resolverse. Tales ecuaciones y métodos junto con los nombres de las personas asociadas con ellas se darán a lo largo del libro.* A pesar de todo lo que se conoce, sin embargo, muchas ecuaciones permanecen sin solución, algunas de ellas de gran importancia. Gigantescas máquinas modernas de cálculo actualmente están siendo ocupadas en determinar soluciones a tales ecuaciones vitales para la investigación relacionada con seguridad nacional, planeación económica, e ingeniería aeroespacial así como también en muchos otros campos.

Uno de los objetivos de este libro es ofrecer una introducción a algunos de los problemas importantes que surgen en la ciencia y la ingeniería con los cuales la mayoría de científicos deberían estar familiarizados. Para conseguir este objetivo, será necesario demostrar cómo uno resuelve las ecuaciones que surgen como resultado de las formulaciones matemáticas de estos problemas. El estudiante debiera siempre recordar que hay tres etapas en la solución teórica de problemas científicos.

1. ***Formulación matemática del problema científico.*** Las leyes científicas, que por supuesto están basadas en experimentos u observaciones, están traducidas en ecuaciones matemáticas. En muchos casos un *modelo matemático* se usa para aproximarse a la realidad física. Así, per ejemplo, al tratar con el movimiento de un planeta, tal como la tierra, alrededor del Sol, podemos considerar a la Tierra y al Sol como partículas (o puntos de masa). Sin embargo, en un estudio de la rotación de la tierra sobre sus ejes, tal modelo es claramente inapropiado, de tal modo que podemos considerar a la tierra como una esfera o aún más precisamente como un esferoide ovalado.

2. ***Solución de las ecuaciones.*** Las ecuaciones formuladas en Etapa 1 necesitan ser resueltas, sujetas a condiciones obtenidas del problema, para determinar la incógnita, o incógnitas, involucradas. Los procedimientos usados pueden producir una solución exacta o, en casos donde soluciones exactas no se pueden obtener, soluciones aproximadas. Frecuentemente, para elaborar los cálculos numéricos se recurre al uso de calculadoras. El proceso de obtener soluciones frecuentemente conduce a preguntas de naturaleza puramente matemática que algunas veces tienen mayor interés que el problema científico original. De hecho, muchos de los avances en las matemáticas fueron obtenidos como un resultado de los intentos de resolver problemas en la ciencia y la ingeniería.

*En la contraportada del frente del texto se da una lista de referencias de algunos de los contribuidores importantes a la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

3. ***Interpretación científica de** la **solución.*** Con el uso de las soluciones conocidas, el científico puede ser capaz de interpretar lo que está sucediendo desde el punto de vista aplicado. Puede hacer gráficas o tablas y comparar la teoría con los experimentos. Puede incluso basar investigación posterior en tales interpretaciones. Por supuesto que, si encuentra que los experimentos u observaciones no están de acuerdo con la teoría, debe revisar el modelo matemático y su formulación matemática hasta que se consiga un acuerdo razonable.

Cada una de estas etapas es importante en la solución final de un problema aplicado y, por esta razón, enfatizaremos todas las tres etapas en este libro.

Puesto que, como uno podría esperar, las ecuaciones diferenciales parciales son mucho más complicadas que las ecuaciones diferenciales ordinarias, la mayor parte de este libro, esto es, los once capítulos en las Partes I y II, se dedican a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Las ecuaciones diferenciales parciales se tratan en los tres capítulos de la Parte III. Así, a menos que se diga lo contrario, cuando nos refiramos a una ecuación diferencial implicaremos una ecuación diferencial ordinaria.

EJERCICIOS A

1. Complete la siguiente tabla.

	Ecuación diferencial	Ordinaria o parcial	Orden	Variables independientes	Variables dependientes
(a)	$y' = x^2 + 5y$				
(b)	$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$				
(c)	$\frac{\partial U}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y}$				
(d)	$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$				
(e)	$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{r\phi}$				
(f)	$\frac{d^2 x}{dy^2} - 3x = \text{sen } y$				
(g)	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sqrt[3]{\frac{\partial V}{\partial y}}$				
(h)	$(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$				
(i)	$y'' + xy = \text{sen } y''$				
(j)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$				

2. Haga una tabla similar a la anterior para las ecuaciones diferenciales (32)-(41) de la página 10 y complete la tabla.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones diferenciales ordinarias en la tabla del Ejercicio 1 son lineales y cuáles son no-lineales?

4. Trabaje el Ejercicio 3 para la tabla construida en el Ejercicio 2.

5. Muestre que cada una de las funciones definidas en la Columna 1, con una excepción, es una solución de la correspondiente ecuación diferencial en la Columna II, sujeta a las condiciones dadas, si hay alguna.

1	II
(a) $y = e^{-x} + x - 1$.	$y'' + y = x;\ y(0) = 0$.
(b) $y = Ae^{5x} + Be^{-2x} - \frac{1}{2}e^{x}$	$y'' - 3y' - 10y = 6e^{x}$.
(c) $s = 8 \cos 3t + 6 \operatorname{sen} 3t$.	$\frac{d^2s}{dt^2} = -9s;\ s = 8,\ \frac{ds}{dt} = 18$ a $t = 0$.
(d) $8x^3 \quad 27y^2 = 0$.	$(y')^3 = y;\ y(0) = 0$.
(e) $Y(x, t) = 4 \operatorname{sen}(2x \quad 3t)$.	$9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2};\ Y(\pi, 0) = 0$
(f) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + c_3e^{3x}$	$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$
(g) $y = Ax^3 + Bx^{-4} \quad \frac{x^2}{3}$.	$x^2y'' + 2xy' \quad 12y = 2x^2$.
(h) $1 + x^2y + 4y = 0$.	$y'' = 2x(y')^2;\ y'(0) = 0.\ y''(0) = \frac{1}{8}$
(i) $xy^2 \quad y^3 = c$.	$y\,dx + (2x - 3y)dy = 0$.
(j) $V(x, y) = e^{2x-y} \cos(y - 2x)$.	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

6. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad instantánea está dada como una función del tiempo t por $v = 12 \quad 3t^2$ Al tiempo $t = 1$, está localizada en $x = -5$. (a) Establezca un problema de valor inicial que describa el movimiento. (b) Resuelva el problema en (a). (c) Determine dónde estará la partícula en los tiempos $t = 2$ y $t = 3$. (d) Determine los tiempos cuando la partícula está en el origen. Al hacer esto, ¿qué supuestos se están haciendo? (e) Describa el movimiento de la partícula usando un gráfico u otro medio.

7. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo tal que su aceleración instantánea está dada como una función del tiempo t por $a = 10 \quad 12t^2$. En los tiempos $t = 2$ y $t = 3$, la partícula está localizada en $x = 0$, y $x = -40$ respectivamente. (a) Establezca la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describen el movimiento. ¿El problema es de valor inicial o de frontera? (b) Solucione el problema en (a). (c) Determine la posición de la partícula en $t = 1$. (d) Dibuje aproximadamente el gráfico de x contra t y úselo para describir el movimiento de la partícula.

8. Trabaje el Ejercicio 7 si la partícula está inicialmente en $x = 3$ y tiene una velocidad $v = -6$.

9. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) del plano xy está dada por $4 - 2x$. (a) Establezca la ecuación diferencial de la familia. (b) Determine una ecuación para aquel miembro particular de la familia que pasa por el punto (0, 0). *(c)* Dibuje varios miembros de la familia incluyendo al hallado en (b).

10. Trabaje el Ejercicio 9 si la pendiente está dada por $4e^{-2x}$.

11. Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial o de frontera. En cada caso dé una interpretación física o geométrica posible.

(a) $\frac{dy}{dx} = 3 \text{ sen } x$, $y(\pi) = -1$. (b) $\frac{dx}{dt} = 4e^{-t} - 2$, $x = 3$ cuando $t = 0$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 8 - 4t + t^2$, $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = -3$ cuando $t = 0$.

(d) $\frac{ds}{du} = 9\sqrt{u}$, $s(4) = 16$. (e) $y'' = 12x(4 - x)$, $y(0) = 7$, $y(1) = 0$.

12. En cada uno de los aparies siguientes se da una ecuación diferencial para una familia de curvas. Obtenga las curvas solución para cada familia y dé el número de parámetros involucrados. Halle los miembros particulares de cada familia que satisfagan las condiciones dadas.

(a) $y' = -4/x^2$, $y(1) = 2$. (b) $y'' = 1 - \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(c) $y'' = \sqrt{2x + 1}$, $y(0) = 5$, $y(4) = -3$.

EJERCICIOS B

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad en cualquier tiempo $t \geqq 0$ está dada por $v = 1/(t^2 + 1)$. Asumiendo que inicialmente se encuentra en el origen, muestre que la partícula nunca pasará a $x = \pi/2$.

2. ¿Para qué valores de la constante m la función $y = e^{mx}$ será una solución a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales? (a) $y' - 2y = 0$. (b) $y'' + 3y' - 4y = 0$. (c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

3. ¿El método del Ejercicio 2 podría funcionar para hallar soluciones a $x^2y'' - xy' + y = 0$? Explique. De sus conclusiones, ¿puede usted sugerir una clase de ecuaciones diferenciales que siempre tengan soluciones de la forma $y = e^{mx}$?

4. (a) Si $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$ son dos soluciones de $y'' + 3y' - 4y = 0$ muestre que $y = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$ es también una solución, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. (b) Use el resultado de (a) para hallar una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

5. Si $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$ son soluciones de $y'' + y^2 = 0$, $y = Y_1(x) + Y_2(x)$, ¿es también una solución? Compare con el Ejercicio 4 y discuta. ¿Puede usted caracterizar el tipo de ecuación diferencial que tenga la propiedad descrita en el Ejercicio 4?

6. Muestre que una solución de $y' = 1 + 2xy$ sujeto a $y(1) = 0$ es $y = e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2}\, dt$.

7. Es $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$ una solución a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - x}{y + 5}$?

8. La ecuación diferencial de una familia de curvas en el plano xy está dada por

$$y''' = -24 \cos \frac{\pi x}{2}.$$

(a) Halle una ecuación para la familia y dé el número de parámetros involucrados. (b) Halle un miembro de esta familia que pase por los puntos $(0, -4)$, $(1, 0)$, y que tenga una pendiente de 6 en el punto donde $x = 1$.

9. ¿Es posible que la ecuación diferencial de una familia con tres parámetros sea de orden 4? Explique.

EJERCICIOS C

1. En la ecuación $dy/dx + dx/dy = 1$, ¿cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable independiente en la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dy^2} = 1$$

2. Muestre que la ecuación de primer orden $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$ es equivalente a dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Muestre que $y = cx$ y $x^2 - y^2 = c$, donde c es cualquier constante, son soluciones de la ecuación.
3. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones e interprete geométricamente: (a) $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 1$; (b) $\frac{dy}{dx} = e^y$, $y(1) = 0$; (c) $\frac{dy}{dx} = \sec y$, $y(0) = 0$. (Sugerencia: Escriba cada ecuación diferencial en términos de dx/dy en vez de dy/dx.)
4. (a) Muestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2}\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ es una identidad. (*Sugerencia:* Derive ambos lados de $dy/dx = 1/dx/dy$ con respecto a x.) (b) Use el resultado en (a) para transformar la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dy^2} + (\operatorname{sen} x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

con variable independiente y, en una con variable independiente x. ¿Puede usted obtener la solución de esta ecuación?
5. Muestre que $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, donde a es cualquier constante distinta de cero, es una solución de $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$.

1.3 SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

En páginas 8-9 consideramos una ecuación diferencial la cual tenía una solución que involucraba una constante arbitraria (o parámetro) la cual se podía determinar a partir de una condición dada. En forma similar, en las páginas 7-8 consideramos una ecuación diferencial de segundo orden la cual tenía una solución que involucraba dos constantes arbitrarias (parámetros) las cuales se podían determinar a partir de dos condiciones dadas.

Suponga ahora que nos dan un problema de valor inicial o de frontera que busca determinar la solución de una ecuación diferencial de orden n satisfaciendo n condiciones especificadas. Para conseguir esto sería bueno si pudiéramos hallar una solución de la ecuación diferencial que contuviera n constantes arbitrarias, para luego usar las n condiciones y encontrar las n constantes, y así obtener la solución requerida. Como una ilustración, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el problema de valor inicial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. (42)

Para satisfacer las dos condiciones iniciales en (42), es natural para nosotros buscar una solución a la ecuación diferencial en (42), que esperamos tenga dos constantes arbitrarias, y luego usar las dos condiciones para determinar estas constantes. Hasta el momento, por supuesto, no sabemos cómo determinar tal solución, y los métodos para hacerlo deben dejarse para un capítulo posterior. Suponga, sin embargo, que por algún medio (tales como por conocimiento previo o usando error y ensayo) lleguemos a

$$y = A\cos x + B\operatorname{sen} x \tag{43}$$

la cual tiene las dos constantes arbitrarias A y B que se necesitan y que puede verificarse como una solución. Usando la primera condición de (42) en (43), esto es, $y(0) = 3$, o $y = 3$ cuando $x = 0$, encontramos $A = 3$, de modo que (43) se convierte en:

$$y = 3 \cos x + B \operatorname{sen} x \tag{44}$$

Para hallar B primero tomamos la derivada en (44) para obtener

$$y' = -3 \operatorname{sen} x + B \cos x \tag{45}$$

Luego usando la segunda condición de (42) en (45), esto es, $y'(0) = -4$ o $y' = -4$ cuando $x = 0$, encontramos $B = -4$. La solución requerida está así dada por

$$y = 3 \cos x - 4 \operatorname{sen} x \tag{46}$$

Ahora ***en general*** una ecuación de orden n tendrá una solución que involucra n constantes arbitrarias, y debido a su especial importancia para nosotros le damos el nombre especial de ***solución general.**** Una solución particular obtenida de esta solución general al seleccionar los valores particulares de las constantes arbitrarias (por ejemplo para satisfacer condiciones dadas) se llama entonces una ***solución particular.***

Ejemplo 15. En el problema (42) de la página 15, $y = A \cos x + B \operatorname{sen} x$ es la solución general, mientras que $y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen} x$ es una solución particular.

Ejemplo 16. En el Ejemplo ilustrativo 1, páginas 8-9, $y = x^2 + c$ es la solución general de $y' = 2x$, mientras que $y = x^2 + 1$ y $y = x^2 - 3$ son soluciones particulares.

Ejemplo 17. Para la ecuación diferencial $$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \tag{47}$$

$y = (x + c)^3$ es la solución general, y $y = (x - 2)^3$ es una solución particular.

Ejemplo 18. Para la ecuación diferencial $$y' = 4y \tag{48}$$

$y = Ae^{B+2x}$ ***no*** es la solución general puesto que **la** podemos escribir como $y = (Ae^B)e^{2x}$ o $y = ce^{2x}$, la cual es una solución pero tiene sólo una constante, mientras que la ecuación diferencial es de orden 2.* Sin embargo, el estudiante puede mostrar fácilmente por sustitución directa que $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ con las dos constantes c_1, c_2 es una solución de (48) y es por tanto su solución general.

La solución general de una ecuación diferencial puede ocurrir en forma implícita. Para examinar esta situación consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x}, \quad y(1) = 2. \tag{49}$$

*Una justificación teórica para usar el término de solución general está dada en la **referencia** [13] de la **Bibliografía**. De ahora en adelante números en corchetes cuadrados se referirán a la Bibliografía.

*Si una relación involucra un conjunto de constantes que no pueden remplazarse por un conjunto menor, las constantes algunas veces se dice que son *esenciales*.

Una solución es $$y^2 - xy = c \tag{50}$$

tal como puede verificarse por diferenciación implícita de (50). Puesto que (50) involucra una constante arbitraria, nos referimos a ella como la solución general. Para obtener la solución particular que satisfaga $y(1) = 2$, sustituimos $x = 1$, $y = 2$ en (50) y encontramos $c = 2$. Así

$$y^2 - xy = 2 \tag{51}$$

La solución requerida al problema de valor inicial está en (51). Para mostrar explícitamente esto solucionemos (51) para y en términos de x por la fórmula cuadrática para obtener

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 8}}{2} \tag{52}$$

Probando la condición $y = 2$ cuando $x = 1$ en (52) muestra que debemos excluir el signo menos en (52). La solución requerida es por tanto

$$y = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 8}) \tag{53}$$

Es de interés interpretar el resultado gráficamente. Las curvas descritas por (52) se muestran en la Figura 1.3. Aunque ambas curvas representan curvas solución a la ecuación diferencial (49), sólo una de ellas satisface la condición $y(1) = 2$, esto es, pasa por el punto (1, 2). Es también de interés notar que para puntos en la recta $y = x/2$ que separa las dos curvas, el denominador a la derecha de la ecuación diferencial en (49) es cero.

Los comentarios anteriores sugieren lo siguiente. Dado el problema de valor inicial

$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{54}$$

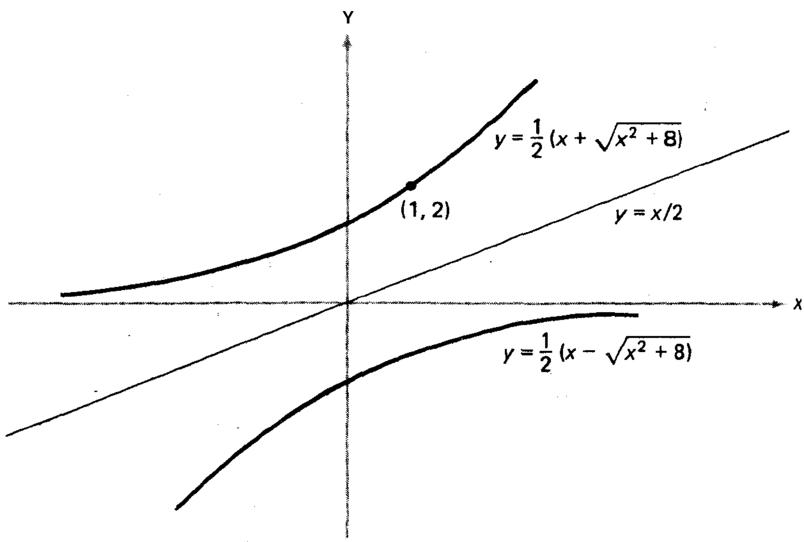


Figura 1.3

que involucra una ecuación diferencial de primer orden, tratamos de hallar una solución que contiene una constante arbitraria llamada la solución general. Esto puede ocurrir en cualquiera de. las formas

$$y = f(x, c), \qquad U(x, y) = c, \qquad G(x, y, c) = 0 \tag{55}$$

la primera representando a una función explícita, y las dos últimas a funciones implícitas. La constante c se determina entonces de modo que se satisfaga la condición dada en (54). Las extensiones a ecuaciones de alto orden se hacen fácilmente.

El problema de hallar soluciones generales de ecuaciones diferenciales será tratado en capítulos posteriores. Un problema más simple es el problema inverso de hallar la ecuación diferencial a partir del conocimiento de su solución general, esto es, "dada la respuesta, hallar el problema". Para motivar el procedimiento, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Encuentre una ecuación diferencial que tenga como solución general

$$y = ce^{-2x} + 3x - 4 \tag{56}$$

Diferenciando (56) se obtiene $y' = -2ce^{-2x} + 3$ (57)

Eliminemos ahora c entre las ecuaciones (56) y (57). Podemos hacer esto ya sea resolviendo c en una ecuación y sustituir en la otra, o más fácil en este caso multiplicar la ecuación (56) por 2 y sumar la ecuación (57). El resultado es

$$y' + 2y = 6x - 5 \tag{58}$$

Como chequeo podemos süstituir (56) en (58) para hallar la identidad

$$y' + 2y = -2ce^{-2x} + 3 + 2(ce^{-2x} + 3x - 4) = 6x - 5$$

Así, (58) es la ecuación diferencial de primer orden requerida teniendo a (56) como su solución general. De acuerdo a la página 9, podemos interpretar (56) como una ***familia de curvas de un parámetro,*** y llamar (58) la ecuación ***diferencial de la familia.***

La misma idea se puede usar con soluciones generales que contienen más de una constante arbitraria, simplemente diferenciando tantas veces como existan constantes arbitrarias y luego usar estos resultados para eliminar todas las constantes arbitrarias. Ilustremos el procedimiento con algunos ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre una ecuación diferencial cuya solución sea $y = c_1 x + c_2 x^3$.

Solución. Puesto que hay dos constantes arbitrarias c_1 y c_2, tenemos que diferenciar dos veces, obteniendo

$$y = c_1x + c_2x^3, \qquad y' = c_1 + 3c_2x^2, \qquad y'' = 6c_2x \tag{59}$$

Ahora eiiminemos las constantes arbitrarias. Para esto, resolvamos c_2 en la última ecuación de (59). Encontramos $c_2 = \dfrac{y''}{6x}$. (60)

Usando esto en la segunda ecuación de (59) da $y' = c_1 + xy''/2$, de modo que

$$c_1 = y' - \frac{xy''}{2} \tag{61}$$

Finalmente, usando (60) y (61) en la primera ecuación de (59), tenemos

$$y = \left(y' - \frac{xy''}{2}\right)x + (x^3)\left(\frac{y''}{6x}\right) \tag{62}$$

la cual al simplificarla se reduce a la ecuación diferencial de segundo orden requerida.

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \tag{63}$$

Chequeo. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2(6c_2x) - 3x(c_1 + 3c_2x^2) + 3(c_1x + c_2x^3) = 0$
Note que $y = c_1x + c_2x^3$ representa gráficamente a una ***familia de curvas de dos parámetros en*** el plano xy, y ***(63) es*** la ***ecuación diferencial de esta familia.***

Observación 6. Si ***nos*** dan una solución que contiene n constantes arbitrarias, frecuentemente es fácil obtener una ecuación diferencial de orden mayor a n que tenga esta solución. Así, en el Ejemplo ilustrativo 2, $y = c_1x + c_2x^3$ sería una solución de la ecuación de cuarto grado $y^{(IV)} = 0$. Por supuesto que ésta no es la solución general de esta ecuación. Cuando buscamos la ecuación diferencial que tenga una solución general dada (por ejemplo $y = c_1x + c_2x^3$) buscamos aquella del ***menor orden,*** esto es, de orden igual al número de constantes arbitrarias (en este caso ***dos).***

· EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encontrar una ecuación diferencial para la familia de círculos con radio 1 y centro en cualquier punto del plano xy.

Solución. La ecuación de un círculo con centro en ***(A, B)*** y radio 1 es

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = 1 \tag{64}$$

Aquí tenemos dos parámetros o constantes arbitrarias ***A y B.*** Lo que buscamos es la ecuación diferencial cuya solución general esté dada por (64), para lo cual podemos usar el mismo procedimiento dado anteriormente. Diferenciando (64) con respecto a x,

$$2(x - A) + 2(y - B)y' = 0 \tag{65}$$

Resolviendo para $(x - A)$ y sustituyendo en (64), tenemos

$$(y - B)^2(y')^2 + (y - B)^2 = 1 \tag{66}$$

donde hemos tenido éxito en eliminar a ***A.*** Para eliminar a ***B,*** resolvamos para $(y - B)$ para obtener

$$y - B = \pm[1 + (y')^2]^{-1/2} \tag{67}$$

Diferenciando y simplificando esta última ecuación se obtiene

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm 1 \tag{68}$$

la cual es la ecuación diferencial de segundo orden requerida. El estudiante puede recordar que el lado izquierdo de (68) es la curvatura de un plano curvo. Así, (68) establece que la curvatura de un cierto plano curvo en cualquier punto de él es igual a 1 en valor absoluto. Solamente los círculos de radio 1 tienen esta propiedad.

1.4 SOLUCIONES SINGULARES

Cada vez que se formule un problema de valor inicial o de frontera, hay tres preguntas en relación a éste que podrían y deberían hacerse.

1. Pregunta de existencia. ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones dadas?

2. Pregunta de unicidad. Si existe una solución que satisface las condiciones dadas, ¿puede haber una solución diferente que también satisfaga las condiciones?

3. Pregunta de determinación. ¿Cómo encontrar las soluciones que satisfagan las condiciones dadas?

Una tendencia natural es proceder directamente a la tercera pregunta e ignorar las dos primeras. Sin embargo, supóngase que llegamos a una formulación matemática de algún problema aplicado y pudiéramos probar que no tiene solución. Entonces claramente no vale la pena gastar tiempo en tratar de encontrar una solución. De nuevo, aún si tuvieramos éxito en encontrar una solución, respondiendo así afirmativamente a la Pregunta 1, está todavía la pregunta de unicidad. Si se pueden encontrar dos o más soluciones, esto violaría el principio científico fundamental de que un sistema no puede comportarse en varias formas diferentes ***bajo las mismas condiciones.*** En tal caso se pondría en sospecha la validez de la formulación matemática.

Para mostrar que hay alguna base para hacer las preguntas anteriores, supongamos que se nos ha dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \qquad y(2) = 0 \tag{69}$$

Del Ejemplo 17, página 16, la ecuación diferencial (69) tiene la solución general $y = (x + c)^3$. De la condición en (69) se tiene $(2 + c)^3 = 0$ de modo que $c = -2$. Así, obtendríamos una solución que satisface (69) dada por

$$y = (x - 2)^3 \tag{70}$$

Sin embargo otra solución de (69) está dada por $y = 0$. Aún una tercera solución está dada por

$$y = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \tag{71}$$

Así, la solución no es única.

La solución de (69) dada por $y = 0$ no puede obtenerse de la solución general $y = (x + c)^3$ con ninguna selección de la constante c de modo que no es una solución particular. Es costumbre llamar una ***solución singular*** a cualquier solución de una ecuación diferencial que no pueda obtenerse de la solución general mediante una selección particular de las constantes arbitrarias. Como el nombre lo sugiere, las soluciones singulares son soluciones no ***usuales*** o ***extrañas.*** Ocasionalmente, éstas aparecen en problemas aplicados cuya formulación matemática involucra ecuaciones diferenciales no lineales.

Observación 7. Algunos autores emplean la terminología de ***solución general*** para referirse a ***todas las soluciones*** de una ecuación diferencial (esto es, incluyendo todas aquellas que hemos llamado soluciones singulares). Nosotros no hemos hecho esto porque, como ya se ha indicado, tenemos un punto de vista práctico que generalmente no se interesa en todas las soluciones, sino en aquella solución de una ecuación diferencial de orden n que contiene n constantes arbitrarias las cuales pueden afortunadamente determinarse a partir de n condiciones asociadas.*

Debido a situaciones tales como las anteriores, los matemáticos han llegado a estar interesados en teoremas, llamados ***teoremas de existencia y unicidad,*** que sirven para decirnos dónde se puede garantizar la existencia y unicidad de las soluciones en vez de confiar en el azar.+ Presentaremos un ejemplo de uno de estos teoremas en la próxima sección. Presentaremos también un procedimiento gráfico conocido como el método de ***campo de direcciones*** que con frecuencia permite visualizar dentro de las clases de soluciones que pueden ocurrir y sus relaciones. Sin embargo, puesto que principalmente estamos interesados en este libro con problemas aplicados que pueden ser resueltos exactamente y para los cuales existen soluciones y son únicas, hemos marcado la próxima sección como ***opcional,*** indicando que el-estudiante puede omitir la sección y pasar directamente al Capítulo dos sin perturbar de ninguna manera la continuidad de la presentación.

EJERCICIOS A

1. Muestre que cada ecuación diferencial en-la Columna 1 tiene por solución la correspondiente relación en la Columna II. Obtenga las soluciones particulares que satisfagan las condiciones en la Columna III.

I	II	III
(a) $y' + y \tan x = 0$	$y = A \cos x$.	$y(\pi) = 4$.
(b) $y'' - y = 4x$.	$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 4x$.	$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$
(c) $y' = (y + x)/(y - x)$.	$x^2 - y^2 + 2xy = c$.	$y(-2) = 3$.
(d) $y''' = 0$.	$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$.	$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y(1) = 2, \\ y(2) = 9. \end{cases}$
(e) $x(y')^2 + 2yy' + xyy'' = 0$.	$xy^2 = Ax + B$.	$\begin{cases} y(3) = 1, \\ y'(3) = 2. \end{cases}$

2. Encuentre una ecuación diferencial correspondiente a cada relación, con las constantes arbitrarias indicadas. Verifique en cada caso que la ecuación diferencial tiene la relación como su solución general

(a) $y = 3x^2 + ce^{-2x}$: c. (b) $y = x + c \operatorname{sen} x$: c.
(c) $x^2 - ay^2 = 1$: a. (d) $y \ln x = bx$: b.

*La terminología de solución completa se usa algunas veces para denotar todas las soluciones, esto es, la solución general junto con las soluciones singulares, si hay alguna.

'El autor conoce al menos el caso de un científico quien, desesperado por resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones dadas, sometió el problema a un computador (a un gran costo), pero aún no encontró solución. Finalmente, se le indicó que mediante el uso de un avanzado teorema de existencia se podía haber mostrado que el problema no tenía solución.

(e) $y = c_1 \operatorname{sen} 4x + c_2 \cos 4x + x: c_1, c_2$.
(f) $I = \alpha t e^{-t} + \beta e^{-t} + 2 \operatorname{sen} 3t: \alpha, \beta$.
(g) $x^2 + y^2 - cx = 0: c$.
(h) $y = ax^3 + bx^2 + cx: a, b, c$.
(i) $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + Ce^{4x}: A, B, C$.
(j) $r = a \ln \phi + b\phi + c: a, b, c$.

3. Encuentre una ecuación diferencial para cada una de las siguientes familias de curvas en el plano xy: (a) Todos los círculos en el origen y con cualquier radio. (b) Todas las parábolas que pasan por el origen con el eje x como su eje común. (c) Todos los círculos con centros en $y = x$ y tangentes al eje y. (d) Todas las elipses con centro en el origen y ejes en los ejes coordenados.

EJERCICIOS B

1. Encuentre una ecuación diferencial de tercer orden que tenga como solución $y = ax \operatorname{sen} x + bx \cos x$, donde a y b son constantes arbitrarias. ¿Clasificaría usted esta solución como una solución general o particular de la ecuación de tercer orden?
2. (a) ¿Cuántas constantes arbitrarias tiene $y = c_1 e^{5x + c_2} + c_3 e^{5x}$? (b) Encuentre una ecuación diferencial que tenga ésto como solución general.
3. Muestre que la solución general de $y'' + y = e^{-x^2}$ es

$$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt - \cos x \int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen} t \, dt$$

Encuentre la solución particular que satisfaga $y(0) = y'(0) = 0$.
4. (a) Escribiendo la ecuación diferencial del Ejemplo 17, página 16, en la forma $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{3y^{2/3}}$ y luego integrando directamente, verifique la solución general allí obtenida.

(b) De la forma de la ecuación diferencial en (a), ¿puede usted sugerir cómo la solución singular $y = 0$ de la ecuación original pudo haber sido descubierta? (ver página 20).
5. Encuentre la solución general de $dy/dx = y^3$. ¿Es $y = 0$ una solución singular? Explique.
6. (a) Muestre que $y' = y^p$, donde p es una constante tal que $0 < p < 1$ tiene soluciones dadas por $y = 0$ y $y = [(1-p)(x + c)]^{1/(1-p)}$. Examine los casos especiales $p = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. (b) Discuta las relaciones entre estas soluciones. (c) ¿Hay otras soluciones además de las dadas en (a)? (d) Discuta los casos donde $p \leqq 0$, $p \geqq 1$.
7. (a) Muestre que $y = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x$ es la solución general de $y'' + \lambda y = 0$ donde λ es una constante. (b) Muestre que no existe solución al problema de valor de frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ distinta de $y = 0$ a menos que λ tome uno de los valores $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \ldots$ y determine soluciones en estos casos. (c) De estas observaciones, ¿qué puede usted concluir acerca de la existencia y unicidad de las soluciones al problema de valor de frontera dado en (b)?

EJERCICIOS C

1. (a) Muestre que la ecuación diferencial para $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones que al menos son doblemente diferenciables, pueden escribirse en la forma de determinantes como*

$$\begin{vmatrix} y & u_1(x) & u_2(x) \\ y' & u_1'(x) & u_2'(x) \\ y'' & u_1''(x) & u_2''(x) \end{vmatrix} = 0$$

(b) ¿Qué pasa en el caso donde

$$W = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

*Ver Apéndice para un breve repaso de determinantes.

El determinante W se llama el Wronskiano de $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

2. (a) Haga uso de los ejercicios anteriores para obtener la ecuación diferencial que tenga como solución general $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$. (b) Generalice el método del Ejercicio 1 y, así, obtenga una ecuación diferencial que tenga como solución general $y = c_1 x^4 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x$.

3. Discuta las posibles soluciones de $(y' - 2x)(y' - 3x^2) = 0$.

4. Muestre que (a) $|y'| + 1 = 0$ no tiene solución. (b) $(y')^2 + 1 = 0$ tiene solución pero no solución real. (c) $|y'| + |y| = 0$ tiene una solución pero ninguna involucra una constante arbitraria.

5. (a) Encuentre una ecuación diferencial para la familia de tangentes a $x^2 + y^2 = 1$. (Sugerencia: Haga $(\cos c, \operatorname{sen} c)$ cualquier punto en el círculo.) (b) Muestre que la solución general de la ecuación diferencial en (a) está definida por la familia de líneas tangentes. (c) Muestre que $x^2 + y^2 = 1$ es una solución de la ecuación diferencial de (a). ¿Qué clase de solución es ésta?

6. (a) Use el Ejercicio 6B para ***resolver*** el problema de valor inicial $y' = y^p$, $y(0) = 1$. (b) Determine el límite de la solución en (a) a medida que $p \to 1$. (c) ¿La función obtenida en (b) es una solución de $y' = y$, $y(0)$? Discuta.

7. (a) Halle la ecuación diferencial de la familia $y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ donde $n \neq 0$ es el parámetro. (b) Muestre que $y = e^x$ es una solución de la ecuación encontrada en (a) y explique por qué esto no es tan sorprendente.

2 Observaciones adicionales relacionadas con las soluciones

2.1 OBSERVACIONES SOBRE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Digamos desde un principio que, para la mayoría de las ecuaciones diferenciales que trataremos, hay soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones especificadas. Sin embargo, por temor a que el ingeniero o el científico lleguen a ser demasiado confidentes con sus conocimientos, mostramos por medio de un ejemplo, qué tan importante es estar prevenido sobre los problemas de existencia y unicidad. El estudiante que piense que estará protegido por el 99 por ciento de los casos está probablemente en lo correcto, pero el autor conoce unos pocos que estuvieran "atrapados" en la categoría del 1 por ciento restante.

Consideremos la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$ (1)

la cual surgió en un cierto problema aplicado, cuyos detalles omitimos. Es suficiente decir que una curva experimental obtenida aparece en la Figura 1.4. De esta curva aparece que $y = 0$ para $x \leq 0$ y que y aumenta (de alguna manera) para $x \geq 0$. Mediante métodos sencillos que discutiremos más adelante, el científico dedujo que la solución general de (1) es $y = cx^3$, donde c es una constante arbitraria. Consideraciones teóricas proporcionó la condición $y = 1$ donde $x = 1$ fa cual estuvo de acuerdo con el experimento. Por tanto, el científico decidió que la solución requerida estaba dada por $y = x^3$, cuyo gráfico aparece en la Figura 1.5. Los gráficos experimentales y teóricos estuvieron de acuerdo para $x \geq 0$ pero no lo estuvieron para $x < 0$. El científico decidió que las matemáticas deben estar equivocadas. Sin embargo, resultó que el ***manejo*** de las matemáticas estuvo equivocado. El científico erróneamente ha asumido, como siempre lo había hecho antes, que existía una solución única. No es difícil mostrar que

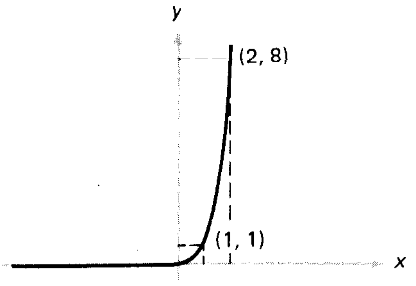


Figura 1.4

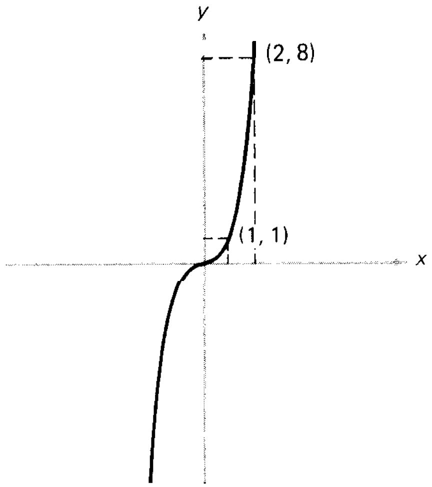


Figura 1.5

$$y = \begin{cases} Ax^3, & x \geqq 0 \\ Bx^3, & x \leqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

donde A y B son constantes, es también una solución. Escogiendo $A = 1$ para satisfacer y = 1 donde x = 1 y escogiendo $B =$ 0 en la solución (2), obtenemos

$$y = \begin{cases} x^3, & x \geqq 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases} \tag{3}$$

estando completamente de acuerdo con el experimento.

Este ejemplo muestra la necesidad de conocer cuándo una solución única realmente existe. Aunque no podemos adentrarnos en los detalles de la prueba, no debemos esconder nuestras cabezas de la realidad como el avestruz del probervio sino que, **en** vez, satisfaceremos nuestra conciencia con la siguiente cita

Teorema de existencia-unicidad. Dada la ecuación diferencial de primer orden $y' = F(x, y)$, si $F(x, y)$ satisface las siguientes condiciones:*

1. $F(x, y)$ es real, finita, simple valorada, y continua en todos los puntos de una región R del plano xy (que puede contener todos los puntos).

2. $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ es real, finita, simple valorada y continua en R.

Entonces existe una y sólo una solución $y = g(x)$ en R, tal que $y = y_0$ cuando $x = x_0$, esto es, $y(x_0) = y_0$.**

Observación. Este teorema da las *condiciones suficientes* para la existencia y unicidad de una solución, esto es, si las condiciones se cumplen, la

*Algunas de las condiciones dadas en el teorema están implicadas por otras y se enuncian meramente por énfasis.

**Se puede concluir más precisamente que $g(x)$ existe y es continua en algún intervalo $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$; esto es, $|x - x_0| \leqq h$ dónde h es algún número positivo que depende de $F(x, y)$.

existencia y unicidad están aseguradas. Sin embargo, las condiciones no son ***condiciones necesarias;*** esto es, si no se satisfacen todas las condiciones, puede que ***aún*** baya una solución única. Se debería notar que el teorema no nos dice cómo obtener esta solución. Correspondientes teoremas para ecuaciones de alto orden también existen.*

Una interpretación gráfica de este teorema es que, si R ***es*** la región (parte sombreada en la Figura 1.6) en la cual las condiciones especificadas se cumplen, entonces por cualquier punto $(x_0\ y_0)$ en R pasará una y sólo una curva C cuya pendiente en cualquier punto de R está dada por $y' = F(x, y)$. La solución $y = g(x)$ representa la ecuación de esta curva en R. El teorema equivale a establecer que existe una solución única a $y' = F(x, y)$ en R, la cual puede describirse por cualquiera de las ecuaciones dadas en (55), página 18, donde c se determina al conocer el punto (x_0, y_0), esto es, $y(x_0) = y_0$. Esto sirve para soportar el uso de la terminología de ***solución general,*** puesto que si se satisfacen las condiciones del teorema no existen ***otras soluciones en R.*** Pueden surgir complicaciones si tratamos de extender la solución más allá de la región R. De hecho las soluciones singulares, si hay alguna, tienden a ocurrir en la frontera de la región.

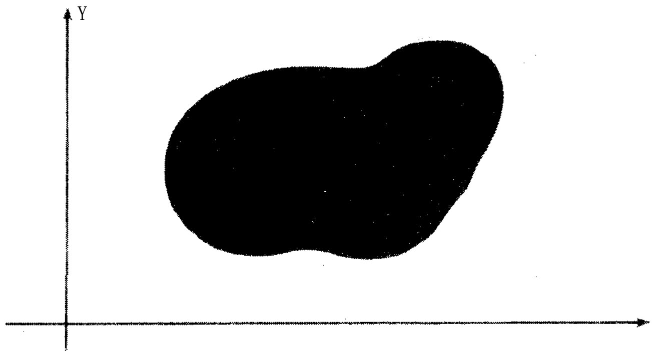


Figura 1.6

En un cierto sentido el teorema de existencia-unicidad puede ser más significativo desde el, punto de vista práctico donde las condiciones no se cumplen que cuando ellas sí se cumplen. Esto es debido a que cuando ellas no se cumplen ni la existencia ni la unicidad de la solución pueden garantizarse y esta falta de garantía debería servir como una alarma de complicaciones potenciales. Por ejemplo, en el caso de la ecuación diferencial (1) del científico, página ***23,*** las condiciones no se cumplen en una región rectangular tal como se muestra en la Figura 1.7 la cual contiene puntos donde $x \leqq 0$. Así el científico pudo no haberse sentido tan confidente y tal vez incluso podría haber obtenido la solución teórica correcta (3) estando de acuerdo con el experimento.

Consideremos algunos ejemplos adicionales que ilustren el uso del teoremo de existencia-unicidad.

*Un teorema de estos se considera en el Ejercicio 2C, página 33 y en el Capítulo cuatro, Para las pruebas de los teoremas incluyendo el dado anteriormente vea [13].

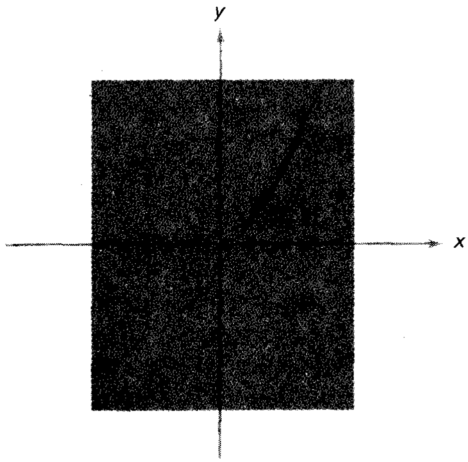


Figura 1.7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Determine si existe una solución única para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{9-(x^2+y^2)}, \qquad y(1) = 2 \tag{4}$$

Solución Tenemos $F(x, y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$, $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}$ (5)

y vemos que una complicación potencial surge para los puntos (x, y) para los cuales $x^2+y^2=9$. Supongamos que estamos alejados de tales puntos al escoger por ejemplo una región R dentro del círculo $x^2+y^2=8$ (ver Figura 1.8),

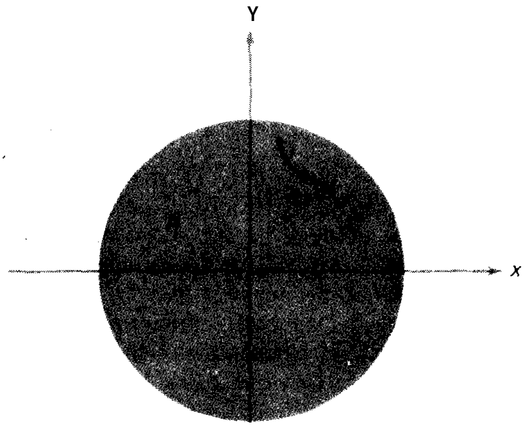


Figura 1.8

la cual incluye al punto $(1, 2)$ descrito por la condición inicial. Entonces, puesto que se cumplen las condiciones del teorema, podemos concluir que sí existe una solución única al problema de valor inicial. En otras palabras, existe una única curva solución C contenida en la región R que pasa por el punto $(1, 2)$ como se indica en la Figura 1.8.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Use el teorema de existencia-unicidad para determinar si existe una solución única para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \qquad y(2) = 0 \tag{6}$$

Solución Tenemos $\quad F(x, y) = 3y^{2/3}; \ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2}{y^{1/3}}$ (7)

Así esperamos tener complicaciones en regiones que incluyan puntos donde $y = 0$. Del teorema de existencia-unicidad no podemos garantizar la existencia o unicidad de una solución en tales regiones. Probando $y = 0$ vemos que es una solución lo cual muestra que al menos una solución existe, pero no sabemos si es única. Realmente como se vió en la página 20, ésta no es única.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{8}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ se asumen continuas en un intervalo $a \leqq x \leqq b$, pruebe que existe una solución única a la ecuación diferencial tal que $y(x_0) = y_0$ donde x_0 está dentro del intervalo.

Solución Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ donde $F(x, y) = Q(x) - P(x)y, \ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -P(x)$ (9)

de modo que las condicciones del teorema de existencia-unicidad se cumplen en una región rectangular R acotada por las rectas $x = a$ y $x = b$. Así el resultado requerido está probado.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) Determine si existe una solución única para el problema de-valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{10}$$

(b) Verifique su conclusión en (a) resolviendo el problema

Solución (a) Tenemos $\quad F(x, y) = y^2, \ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ (11)

Así las condiciones del teorema de existencia-unicidad se satisfacen en cualquier región R tal coma, el rectángulo de la Figura 1.9 y podemos concluir que existe una solución úniica en R.

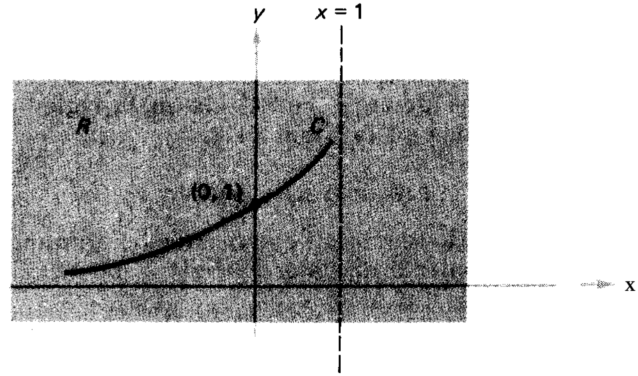


Figura 1 .9

(b) Escriba la ecuación diferencial dada como $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$.

Entonces al integrar se tiene $x = -\frac{1}{y} + c$. Puesto que y = 1 cuando $x = 0$, esto da c = 1 de modo que $x = -\frac{1}{y} + 1$, esto es, $y = \frac{1}{1-x}$.

La única curva solución C correspondiente a esto también se muestra en la Figura 1.9. Se debería notar que aun cuando la región R pueda escogerse tan grande como se desee y que aún se satisfagan las condiciones del teorema de existencia, la curva no se extiende indefinidamente hacia la derecha.* De hecho, como se ve, no se extiende más allá de $x = 1$ lo cual representa una asíntota. El hecho de que $x = 1$ sea una barrera no es del todo evidente desde la ecuación diferencial dada. Estos resultados indican las complejidades que pueden ocurrir en ecuaciones no-lineales.

2.2 CAMPO DE DIRECCIONES Y EL METODO DE LAS ISOCLINAS

Suponga que nos dan la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y) \tag{12}$$

donde $F(x, y)$ satisface las condiciones del teorema de existencia-unicidad. En cada punto (a, b) de la región R (ver Figura 1.10) podemos construir una línea corta, llamada un ***elemento de línea,*** con pendiente $F(a, b)$. Si hacemos esto para un gran número de puntos, obtenemos un gráfico tal como se muestra en la Figura 1.10 llamado el ***campo de direcciones*** de la ecuación diferencial. Los elementos de línea representan líneas tangentes a las curvas solución en estos puntos.

Es bastante llamativo que mediante el uso de esta simple idea podamos llegar a tener una representación de la solución general de la ecuación diferencial ***sin ni siquiera resolver la ecuación. La*** técnica es por supuesto muy útil, especialmente cuando no se puede encontrar una solución exacta. El grá-

*El teorema de existencia-unicidad expresa esto al no garantizar más de lo que se establece en el segundo pie de página de la página 24.

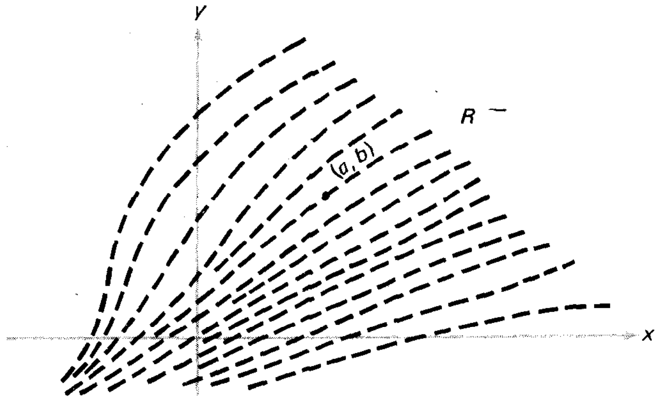


Figura 1.10

fico indica que la solución general de (12) está dada por

$$y = f(x, c), \qquad U(x, y) = c \quad \text{o} \quad G(x, y, c) = 0 \tag{13}$$

donde c es una constante arbitraria. Así, cada curva de la Figura 1.10 corresponde a un valor diferente de c, o dicho de otra manera, existirá una y sólo una curva que pasa por un punto dado de acuerdo al **teorema** de **existencia**-unicidad. Ilustremos el procedimiento de obtener el campo de direcciones para una ecuación diferencial al considerar el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Obtenga el campo de direcciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{14}$$

Solución Es conveniente escoger puntos (x, y) para los cuales x y y sean enteros, y calcular las pendientes correspondientes en estos puntos. En ecuaciones más complicadas el uso de la calculadora de bolsillo puede servir para minimizar cálculos laboriosos, y se pueden usar otros puntos que permitan una mayor precisión. Los cálculos se indican en la Figura 1.11 para el caso donde x y y están entre -4 y 4. Así, por ejemplo, la pendiente correspondiente a $x = 2$, $y = 3$, esto es, el punto (2, 3) es $-\frac{2}{3}$. Puesto que x/y no existe para $y = 0$ las entradas para estos casos se indican por una raya.

El correspondiente campo de direcciones se indica en la Figura 1.12. El gráfico parece indicar que las curvas correspondientes a la solución general son círculos con centro en el origen; esto es,

$$x^2 + y^2 = c \tag{15}$$

la cual llega a ser más evidente con la selección de más puntos. El resultado (15) es realmente correcto puesto que tiene la solución general de (14); o di-

$y \backslash x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
-3	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$
-2	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
3	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$
4	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1

Figura 1.11

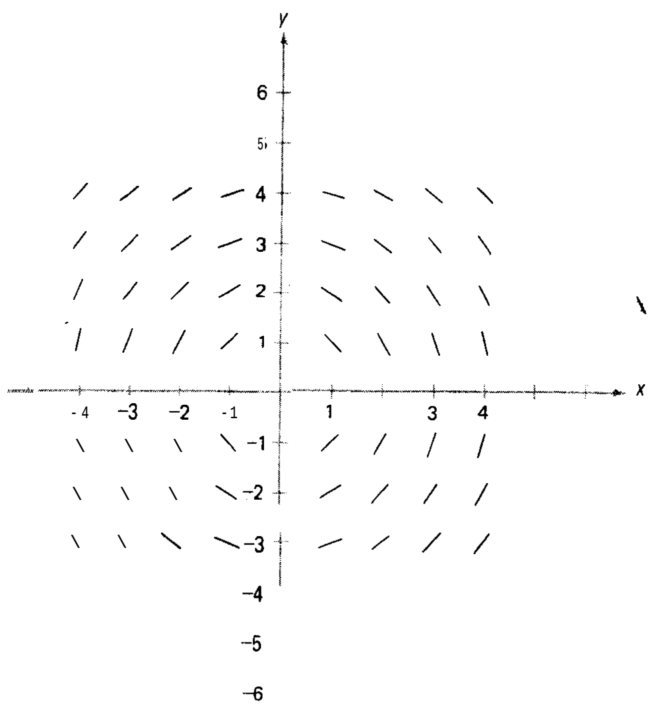


Figura 1.12

cho de otra manera, la ecuación diferencial de la familia de círculos (15) esta dada por (14).

Cuando se busca el campo de direcciones para la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y) \tag{16}$$

el trabajo involucrado se puede reducir en algo al hacer

$$F(x, y) = m \tag{17}$$

donde m es una constante, y darse cuenta que cualquier punto sobre la curva representado por (17) tiene asociado un elemento de línea con pendiente m. Esto frecuentemente se llama el ***método de las isoclinas*** (isoclina significa ***pendiente constante)*** y se ilustra en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Use el método de las isoclinas para trabajar el Ejemplo ilustrativo 5, en la página 29.

Solución Para obtener el campo de direcciones requerido, escojamos un valor particular de ***m,*** digamos $m = 2$. Entonces sobre la correspondiente recta $y = -x/2$ construimos elementos de línea paralelos de pendiente $m = 2$, ***co-*** mo se muestra en la Figura 1.13. Luego hacemos lo mismo para otros valores de ***m*** y así obtenemos el patrón indicado.

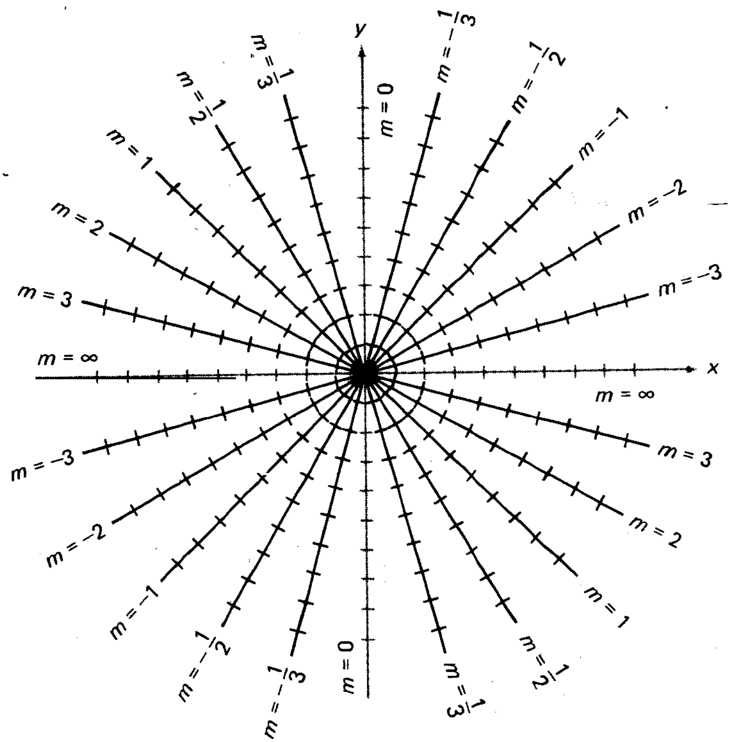


Figura 1 .13

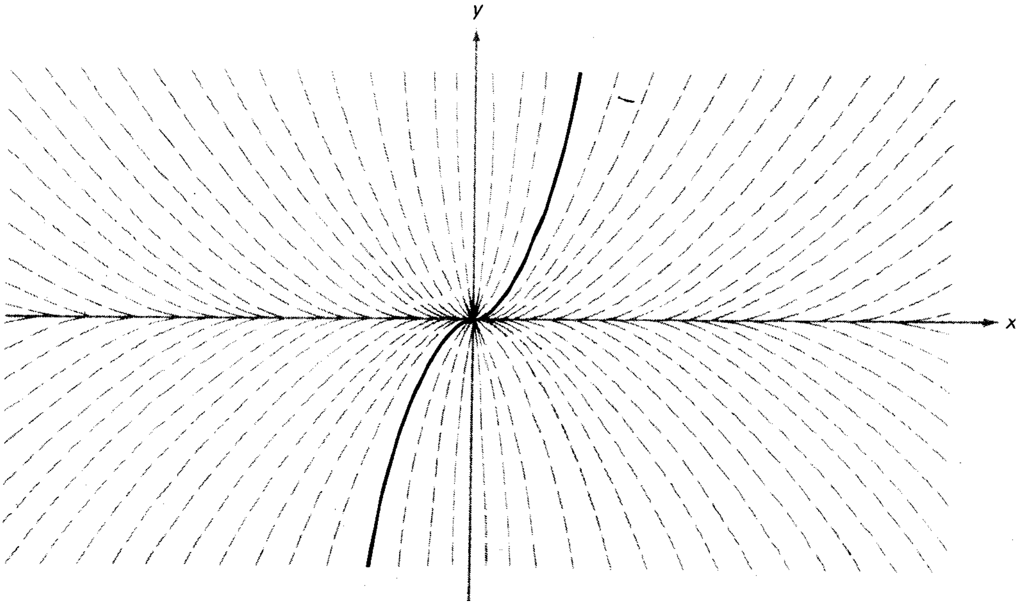


Figura 1.14

El dilema del científico referido en la página 23 pudo haber sido resuelto por medio del uso del campo de direcciones, como se indica en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Obtenga el campo de direcciones de la ecuación diferencial $xy' = -3y = 0$

Solución El campo de direcciones obtenido por el método de las isoclinas, o como en las páginas 29-30, se muestra en la Figura 1.14. Es interesante que esta figura revela la posibilidad de soluciones tales como

$$y = cx^3 \quad 0. \quad y = \begin{cases} Ax^3, & x \geqq 0 \\ Bx^3, & x \leqq 0 \end{cases}$$

la segunda de las cuales, con $A = 1$, $B = 0$, da la solución deseada de la página 24.

El campo de direcciones de la Figura 1.14 sirve para ilustrar de una manera elegante el teorema de existencia-unicidad en vista del hecho de que hay infinitas soluciones por el punto (0, 0), mientras que no hay soluciones por $(0, y)$ donde $y \neq 0$.

EJERCICIOS A

1. Use el teorema de existencia-unicidad para determinar si existen soluciones únicas para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

(a) $y' = 3x + 2y$; $y(1) = 4$.
(b) $y' = 1/(x^2 + y^2)$; $y(0) = 1$.
(c) $y' = 1/(x^2 + y^2)$; $y(0) = 0$.
(d) $y' + xy = x^2$; $y(0) = 2$.
(e) $y' = (x - 2y)/(y - 2x)$; $y(1) = 2$.
(f) $y' = 1/(x^2 \quad y^2)$; $y(1) = 2$.
(g) $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 2$.
(h) $y' = \sqrt{xy}$, $y(1) = 0$.
(i) $y' = y \csc x$; $y(0) = 1$.
(j) $y' = 1/\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}$; $y(3) = 2$.

2. (a) Muestre que la ecuación diferencial $y' = y^{1/2}$ tiene las soluciones $y = \frac{1}{4}(x + c)^2$ y $y = 0$. (b) Discuta estas soluciones y sus relaciones con el teorema de existencia-unicidad y entre cada una.

3. (a) Obtenga el campo de direcciones para $y' = 2x - y$. (b) Explique la relación existente entre las varias soluciones de la ecuación y el campo de direcciones. (c) ¿Puede usted estimar la posición aproximada de aquella curva que pasa por (0, O)? (d) Muestre que la solución general de $y' = 2x - y$ es $y = 2x - 2 + ce^{-x}$, y compare así con su estimativo en (c).

4. Obtenga el campo de direcciones para cada una de las siguientes ecuaciones (a) $y' = 2x$. (b) $y' = y/x$. (c) $y' = x + y$. (d) $y' = 1/(x^2 + 4y^2)$.

5. (a) Obtenga el campo de direcciones para $y' = y^{1/2}$. (b) Explique la conexión entre el campo de direcciones y los resultados del Ejercicio 2.

EJERCICIOS B

1. Discuta la existencia y la unicidad de una solución al problema de valor inicial $y' = P(x)y + Q(x)y^n$, $y(x_0) = y_0$, para constantes dadas n, x_0, y_0.

2. Encuentre el campo de direcciones para las ecuaciones diferenciales dadas en Ejercicios A 1(a)-(f), y relacione los resultados obtenidos con las conclusiones obtenidas en esos ejercicios.

3. Discuta la existencia y la unicidad de una solución al problema de valor inicial $y' = 1 + xy + x^2y^2$, $y(0) = 1$. Generalice al caso $y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$, $y(0) = y_0$.

EJERCICIOS C

1. Muestre que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y - x} + 1$ tiene soluciones $y = x$, $y = x + \frac{1}{4}(x + c)^2$ e infinitamente muchas otras soluciones, tales como, por ejemplo

$$y = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + \frac{1}{4}(x + c)^2, & x \geqq 0 \end{cases}$$

¿Cómo podría usted explicar esto?

2. Un teorema de existencia-unicidad para la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = F(x, y, y')$, la cual puede escribirse como dos ecuaciones de primer orden $z' = F(x, y, z)$, $y' = z$, establece que si $F(x, y, z)$ y sus derivadas parciales $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ son reales, simple valoradas, y continuas en todos los puntos (x, y, z) dentro de la región R del espacio tridimensional, entonces existe una y sólo una solución $y = g(x)$ que pasa por cualquier punto dado de R. Note que si el punto es (x_0, y_0, z_0) esto es equivalente a $y = y_0$, $y' = z_0$ para $x = x_0$ (a) Usando este teorema investigue la existencia y unicidad de soluciones a $y'' + x(y')^2 = 1$. (b) Trabaje parte (a) para $xy'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$. (c) ¿Qué dificultades ocurren en caso de que se especifiquen condiciones en $x = 0$? (d) ¿Puede pensar usted en una generalización de este teorema?

3. ¿Piensa usted que es posible generalizar el método del campo de direcciones a ecuaciones diferenciales de segundo orden? Explique.

4. Muestre que $y = 0$, $y = c^2x + 2c$, $y = -1/x$ son soluciones de

$$y' = \left(\frac{\sqrt{1 + xy} - 1}{x}\right)^2$$

Discuta estas soluciones y sus relaciones con el teorema de existencia-unicidad y entre cada una.

dos

ecuaciones diferenciales de primer orden y ordinarias simples -de alto orden

1 El método de separación de variables

Suponga que se nos da una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{1}$$

Entonces, considerando dy/dx como una cociente de diferenciales, esto también puede ser escrito en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

Así, por ejemplo,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{2y - 5x} \tag{3}$$

puede también ser escrita
$$(x - 3y)dx + (5x - 2y)dy = 0 \tag{4}$$

donde $M \equiv x - 3y$, $N \equiv 5x - 2y$. El problema de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden está vinculado con la solución de la ecuación (1) o (2). Un tipo especialmente simple de ecuación que ocurre a menudo en la práctica es aquelia que puede ser escrita en la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{5}$$

donde un término involucra sólo a x mientras el otro involucra sólo a y. Esta ecuación puede ser resuelta inmediatamente por integración. Así, la solución general es

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c \tag{6}$$

donde c es la constante de integración. Nosotros podemos por supuesto regresar a la ecuación (5) tomando la diferencial en ambos lados de (6), y así eliminar a c; esto es,

$$d\int f(x)dx + d\int g(y)dy = d(c) \quad \text{or} \quad f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Puesto que el método de solución depende de la posibilidad de escribir (1) o (2) en la forma (5), donde las variables son "separadas" en dos términos, éste es llamado el ***método de separación de variables, y*** las variables se dice que son separables. Esta situación afortunada en la cual las variables son separables, para nuestro pesar, no ocurre todas las veces. Por ejemplo, no hay manera de que la ecuación (4) pueda ser escrita en la forma (5). En tales casos estaremos forzados a buscar otros métodos. La búsqueda de tales métodos será el tema concerniente al resto de este capítulo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) Encuentre la solución general de $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 1}{2 - Y}$ y (b) determine la solución particular para la cual y = 4 cuando $x = -3$.

Solución (a) Separando las variables podemos escribir la ecuación dada en la forma

$$(x^2 + 1)dx + (y - 2)dy = 0 \tag{7}$$

La integración da la solución general requerida

$$\int(x^2 + 1)dx + \int(y - 2)dy = c \quad \text{esto es,} \quad \frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y = c \tag{8}$$

(b) Colocando $x = -3$, $y = 4$ en (8) da $c = -12$. La solución particular requerida es

$$\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y = -12 \tag{9}$$

Observación 1. Se debería notar que para llegar de la ecuación diferencial a (7) debemos multiplicar por $y - 2$ así que, estrictamente hablando deberíamos asumir $y \neq 2$. Sin embargo, si olvidaramos esto, o aún optaramos por ignorarlo, no conseguimos nada, porque aparece de todos modos en el hecho de que las curvas (8) tienen una pendiente vertical en el punto donde $y = 2$.

Observación 2. La solución puede, si se desea, obtenerse explícitamente en este caso al resolver y en (9). El resultado se encontrará por la fórmula cuadrática y será

$$y = \frac{12 + \sqrt{-24x^3 - 72x - 720}}{6}$$

Ocasionalmente, el hecho de que una ecuación diferencial pueda ser "separable" no es tan obvio, como lo muestra el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resolver $\quad x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y.$

Solución Podemos escribir la ecuación (multiplicando por dx) como

$$x\,dy - y\,dx = 2x^2y\,dx \quad \text{or} \quad (2x^2y + y)dx - x\,dy = 0$$

esto es,
$$y(2x^2 + 1)dx - x\,dy = 0$$

Dividiendo por x y y, esto es por xy, da

$$\left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)dx - \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{o} \quad \int\left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)dx - \int\frac{dy}{y} = c$$

así que*
$$x^2 + \ln|x| - \ln|y| = c \tag{10}$$

Esto también puede escribirse en una forma libre de logaritmos escribiendo (10) sucesivamente como

$$x^2 + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c, \qquad \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c - x^2, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = e^{c-x^2} = e^ce^{-x^2}$$

*Se debe notar que $\int dx/x = \ln x$ sólo si $x > 0$. Para $x < 0$ ó $x < 0$, $\int dx/x = \ln|x|$. Una tabla con algunas integrales importantes aparece en el interior de la contraportada posterior de este libro.

$$\frac{x}{y} = \pm e^{c} e^{-x^2}, \qquad y = \pm e^{-c} x e^{x^2} \text{ o finalmente } y = Axe^{x^2}$$

Chequeo. Colocando $y = Axe^{x^2}$ en la ecuación diferencial dada, tenemos

$$x(2Ax^2e^{x^2} + Ae^{x^2}) - Axe^{x^2} = 2x^2(Axe^{x^2}) \quad o \quad 2Ax^3e^{x^2} = 2Ax^3e^{x^2}$$

EJERCICIOS A

1. Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios, sujetos a las condiciones donde se den.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$; $y = 2$ donde $x = 1$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$; $y(1) = 3$.

(c) $3x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0$. (d) $2y\, dx + e^{-3x}\, dy = 0$.

(e) $y' = \dfrac{x + xy^2}{4y}$; $y(1) = 0$. (f) $r\dfrac{d\phi}{dr} = \phi^2 + 1$.

(g) $\text{sen}^2 y\, dx + \cos^2 x\, dy = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. (h) $x\sqrt{1 + y^2}\, dx = y\sqrt{1 + x^2}\, dy$.

(i) $2y \cos x\, dx + 3\,\text{sen}\, x\, dy = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$. (j) $y' = 8xy + 3y$.

(k) $\dfrac{dI}{dt} + 51 = 10$; $Z(0) = 0$. (1) $y\, dx + (x^3y^2 + x^3)dy = 0$.

2. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + xy^2}{2y + x^2y}.$$

Halle la ecuación del miembro de la familia que pasa por (2, 1).

EJERCICIOS B

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y - 1)(x - 2)(y + 3)}{(x - 1)(y - 2)(x + 3)}$. 2. $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{\text{sen}\,\phi + e^{2r}\text{sen}\,\phi}{39 + e^{r}\cos 2\phi}$; $r = 0$ donde $\phi = \dfrac{\pi}{2}$

3. $x^3e^{2x^2 + 3y^2}\, dx - y^3e^{-x^2 - 2y^2}\, dy = 0$. 4. $\dfrac{dU}{ds} = \dfrac{U + 1}{\sqrt{s} + \sqrt{sU}}$.

EJERCICIOS C

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de tal manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea x (medida de $x = 0$) y el tiempo t (medido de $t = 0$). Si la partícula está localizada en $x = 54$ cuando $t = 0$ y $x = 36$ cuando $t = 1$, ¿dónde estará cuando $t = 2$?

2. Muestre que la ecuación diferencia $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y^2 - x^4}{4xy}$ no es separable pero se convierte en separable con el cambio de la variable dependiente de y a v de acuerdo a la transformación $y = vx$. Use esto para encontrar la solución de la ecuación original.

3. (a) Muestre que la ecuación diferencial no separable $[F(x) + yG(xy)]\, dx + xG(xy)dy = 0$ se convierte en separable al cambiar la variable dependiente de y a

v de acuerdo a la transformación $v = xy$. (b) Use esto para resolver $(x^2 + y \operatorname{sen} xy)dx + x \operatorname{sen} xy\, dy = 0$.

2 El método de la transformaciõn de variables

Puesto que una ecuación diferencial cuyas variables son separables es muy fácil de resolver, una pregunta relativamente obvia que podría formularse es la siguiente.

Pregunta. **¿Existen** algunos tipos de ecuaciones diferenciales cuyas variables no son separables, que de alguna manera se puedan cambiar o transformar en ecuaciones cuyas variables sean separables?

La respuesta a esta pregunta es "si". De hecho una de las más importantes maneras de resolver una ecuación diferencial dada es hacer un apropiado cambio ***o transformación de variables*** de tal manera que la ecuación dada se reduzca a algún tipo conocido que pueda resolverse. La situación es mucho más análoga al de los "trucos ingeniosos" a menudo usado en cálculo para la evaluación de integrales por un cambio de variable. En algunos casos la transformación particular de variables a ser usada es sugerida por la forma de la ecuación. En otros casos la transformación puede ser menos obvia.

2.1 LA ECUACION HOMOGENEA

Una ecuación que casi siempre puede transformarse en una con variables separables es

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

y cualquier ecuación diferencial que es o se pueda escribir en esta forma se llama ***ecuación diferencial homogénea.*** Para cambiar (1) en una ecuación separable, usamos la transformación $y/x = v$ ó $y = vx$, esto es, el cambio de la variable dependiente de y a v manteniendo la misma variable independiente x. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

y la ecuación (1) se convierte en $\quad v + x\dfrac{dv}{dx} = f(v)$

de modo que

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} \tag{2}$$

donde las variables están separadas. La solución se obtiene entonces por integración.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x + y}$

*Debería notarse que el método no funciona en el caso $f(u) = v$; esto es, $f(y/x) = y/x$. Sin embargo, en este caso la ecuación ya ea de tipo separable.

Solución Podemos escribir la ecuación como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - y/x}{1 + y/x}$

en la cual el lado derecho es una función de y/x, así que la ecuación es homogénea. Haciendo $y = vx$, tenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{1 + v}, \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{(1 + v)dv}{1 - 2v - v^2}$$

Así, $\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2v - v^2) + c_1$ ó $\ln[x^2(1 - 2v - v^2)] = c_2$ de modo que $x^2(1 - 2v - v^2) = c$. Remplazando v por y/x y simplificando, encontramos $x^2 - 2xy - y^2 = c$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{y/x} + y}{x}$.

Solución El lado derecho puede escribirse como $(y/x)e^{y/x} + (y/x)$, una función de y/x, de modo que la ecuación es homogénea. Haciendo $y = vx$, obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = ve^v + v \quad 0 \quad \frac{e^{-v}\,dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

De donde
$$\int \frac{e^{-v}\,dv}{v} = \ln x + c$$

La integración no puede desarrollarse en forma cerrada.

Observación El estudiante debería notar que una ecuación $y' = f(x, y)$ es homogénea si al **colocar** $y = vx$ en el lado derecho de la ecuación se **con**vierte en una función sólo de v. Así, en el Ejemplo ilustrativo 1, por ejemplo $(x - y)/(x + y)$ se convierte en $(1 - v)/(1 + v)$.

2.2 OTRAS TRANSFORMACIONES ESPECIALES

Como un ejemplo de una transformación especial sugerida por la forma de una ecuación diferencial dada, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resuelva la ecuación diferencial $y' = \sqrt{x + y}$.

Solución La ecuación no es separable. Sin embargo, la presencia de $x + y$ sugiere que pudiéramos tratar de cambiar la variable dependiente de y a v dada por

$$x + y = v^2 \tag{3}$$

donde hemos usado v^2 en (3) en lugar de v para evitar las raíces cuadradas. De (3) tenemos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v^2 - x) = 2v\frac{dv}{dx} - 1$$

Así la ecuación se convierte en $$2v\frac{dv}{dx} - 1 = v \tag{4}$$

Podemos escribir esto en forma separable como

$$\frac{2v\,dv}{v+1} = dx \quad \text{o} \quad \int \frac{2v\,dv}{v+1} = \int x$$

Desarrollando la integración en el lado izquierdo, tenemos

$$\int \frac{2v\,dv}{v+1} = 2\int \frac{(v+1)-1}{v+1}\,dv = 2\int \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) dv = 2v - 2\ln(v+1)$$

así que la solución general de (4) es $2v - 2\ln(v+1) = x + c$.

Remplazando v por $\sqrt{x+y}$ obtenemos ahora la solución general requerida de la ecuación dada

$$2\sqrt{x+y} - 2\ln(\sqrt{x+y} + 1) = x + c$$

EJERCICIOS A

Resuelva cada uno de los siguientes:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$; $y(1) = 1$.
3. $xy' = 2x + 3y$.
4. $(x^2 \quad y^2)dx - 2xy\,dy = 0$.
5. $(x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$.
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x\cos^2(y/x)}{x}$; $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$
7. $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$.
8. $y\,dx = (2x + 3y)dy$.
9. $(x^3 + y^3)dx - xy^2\,dy = 0$; $y(1) = 0$.
10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$.
11. $y' = \dfrac{y}{x} + \sec^2\dfrac{y}{x}$.
12. $(x \quad 4y)dx + (3x - 2y)dy = 0$.

EJERCICIOS B

Resuelva:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{dx}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 5y}{2x - y}$.
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2 - 5xy - 2y^2}{6x^2 - 8xy + y^2}$
4. $y' = (x + y)^2$.
5. $y' = \sqrt{2x + 3y}$.
6. Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 3y + 1}{3x - 2y - 5}$ si $x = X + h$ y $y = Y + k$, donde X, Y son nuevas variables y h y k son constantes, y luego escoja h y k apropiadamente.
7. Resuelva $(3x - y - 9)y' = (10 - 2x + 2y)$.
8. Muestre que el método del ejercicio 6 falla para la ecuación $(2x + 3y + 4)dx = (4x + 6y + 1)dy$. Sin embargo, muestre que la sustitución $2x + 3y = v$ conduce a la solución.

9. Resuelva $(2x + 2y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

10. Resuelva $\left[2x \operatorname{sen} \frac{y}{x} + 2x \tan \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}\right] dx + \left[x \cos \frac{y}{x} + x \sec^2 \frac{y}{x}\right] dy = 0$.

EJERCICIOS C

1. Resuelva (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$. (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \sqrt{x-y}}{1 - \sqrt{x-y}}$

2. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \tan \frac{y}{x^2}$ por la transformación $y = vx^2$

3. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5 + 3x^2y^2}{2x^3y - 2y^3}$ haciendo $x = u^p$, $y = v^q$ y escoja las constantes p y q apropiadamente. ¿Podría la ecuación ser resuelta haciendo $y = vx^n$ y seleccionando la constante n?

4. Haciendo $y = vx^n$ y escogiendo la constante n apropiadamente, resuelva

$$(2 + 3xy^2)dx - 4x^2y\, dy = 0$$

5. Resuelva (a) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x - 3y - 5}{x + y - 1}\right)^2$. (b) $\sqrt{x+y+1}\, y' = \sqrt{x+y-1}$.

6. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 + xy)}{x(1 - xy)}$.

7. Muestre que $x\,dy - y\,dx = \tan^{-1}(y/x)dx$ puede resolverse por la sustitución $y = vx$ aún cuando la ecuación no es homogénea. Explique.

3 La idea intuitiva de exactitud

Suponga que nos dan una ecuación diferencial de primer orden

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \tag{1}$$

Entonces, por analogía con la ecuación (6), en página 35, podemos esperar que la solución general esté dada por

$$U(x, y) = c \tag{2}$$

donde $U(x, y)$ debe ser determinada y c es una constante arbitraria. En tal caso la ecuación diferencial correspondiente a (2) se obtiene tomando la diferencial de ambos lados de (2), esto es

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0 \tag{3}$$

Así la ecuación diferencial requerida está dada por

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \tag{4}$$

Ahora puesto que la ecuación (4) deberá ser la misma que la ecuación (1), deberemos tener

$$\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{M}{N} \qquad 0 \qquad \frac{\partial U/\partial x}{M} = \frac{\partial U/\partial y}{N}$$

Llamando cada uno de estos últimos cocientes μ, el cual puede ser una función de x y y, tenemos

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N \tag{5}$$

Sustituyendo estos valores en (3) encontramos que

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = dU = 0 \tag{6}$$

De (6) vemos que $\mu\,(Mdx + Ndy)$ es la diferencial de una función U de x y y. Llamamos a esto una ***diferencial exacta 0 perfecta.*** Si comenzamos con la ecuación diferencial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{7}$$

y multiplicamos por μ para obtener $\mu(M\,x + N\,dy) = 0$ (8)

donde el lado izquierdo es una diferencial exacta, decimos que hemos hecho exacta la ecuación (7) y llamamos (8) una ecuación ***diferencial exacta.*** En tal caso, (8) puede escribirse como

$$dU(x, y) = 0 \tag{9}$$

de la cual

$$U(x, y) = c \tag{10}$$

La función μ, la cual nos permite ir de (7) a (9) y luego por integración a (10), es por obvias razones llamada un ***factor integrante.*** Resumamos estas observaciones en tres definiciones.

Definición 1. La diferencial de una función de una o más variables es llamada una ***diferencial exacta.***

Definición 2. Si $M\,dx + N\,dy = 0$ se multiplica por $u(x, y)$ para obtener $\mu(M\,dx + N\,dy) = 0$, cuyo lado izquierdo es una diferencial exacta, decimos que hemos hecho exacta la ecuación diferencial.*

Definición 3. La función' multiplicadora μ es llamada un ***factor integrante*** de la ecuación diferencial $Mdx + N\,dy = 0$.

En el método de separación de variables, hemos, sin darnos cuenta, hecho uso de las ideas anteriores. Por ejemplo, en el Ejemplo ilustrativo 2, página 36 nos dieron la ecuación diferencial

$$(2x^2y + y)dx - x\,dy = 0$$

*Naturalmente, asumimos $\mu \neq 0$. También, si $\mu \equiv 1$, la ecuación es ya exacta.

Después multiplicamos la **ecuación** por el factor integrante "apropiado" $\mu = 1/xy$ para obtener

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right) dx - \frac{dy}{y} = 0 \tag{11}$$

Esto es, $d(x^2 + \ln|x| - \ln|y|) = 0$ o $x^2 + \ln|x| - \ln|y| = c$

Para una ilustración más dramática de las ideas anteriores, consideremos una ecuación cuyas variables no sean separables como en el siguiente

Ejemplo de motivación. Se requiere resolver la ecuación

$$(2y + 3x)dx + x\, dy = 0 \tag{12}$$

Suponga que "conocemos" que un factor integrante de esta ecuación es x. Multiplicando (12) por x se obtiene

$$(2xy + 3x^2)dx + x^2\, dy = 0 \tag{13}$$

la cual, por definición de factor integrante debería ser exacta. El estudiante puede verificar que esto es así, puesto que podemos escribir (13) como

$$d(x^2y + x^3) = 0 \tag{14}$$

y así, por integración, la solución general es $x^2y + x^3 = c$.

Teóricamente, el ejemplo es perfectamente claro, pero los estudiantes se podrían hacer las siguientes

Preguntas. (1) ¿Cómo hace uno para "conocer" que x es un factor integrante? (2) ¿Cómo hace uno para "conocer" que podemos escribir (13) como (14)?

Pregunta 2 se responde en la próxima sección. Pregunta 1 formará la base para una discusión más adelante de este capítulo.

4 Ecuaciones diferenciales exactas

Si la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta, entonces por definición hay una función $U(x, y)$ tal que

$$M\,dx + N\,dy = dU \tag{1}$$

Pero, del cálculo elemental, $$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \tag{2}$$

y así, al comparar (1) y (2), vemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N \tag{3}$$

Diferenciando la primera de las ecuaciones (3) con respecto a y y la segunda con respecto a x, encontramos*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

Bajo condiciones apropiadas, el orden de la diferenciación es indiferentet†, así que la ecuación (4) lleva a la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

Esto es una condición ***necesaria*** para la exactitud; esto es, si la ecuación diferencial es exacta, entonces de lá necesidad sigue que (5) es verdadera. El teorema recíproco establece que si (5) se cumple, entonces M dx + ***Ndy es*** una diferencial exacta, esto es, podemos encontrar una función U tal que $\partial U/\partial x = M$, $\partial U/\partial y$ = N. Este teorema recíproco puede probarse‡ y se muestra que (5) es también una condición suficiente para la exactitud. Resumimos estas observaciones en el siguiente

Teorema. Una condición necesaria y suficiente para la exactitud de la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ es $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Esto significa que (1) si $M dx + N dy = dU = 0$ (esto es, la ecuación es exacta), entonces $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, (necesidad); *(2)* si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ entonces U existe tal que $M\,dx + N\,dy = dU$ o, lo que es equivalente, U **existe** tal que $\partial U/\partial x = M$ y $\partial U/\partial y = N$ (suficiencia).

Para ilustrar el teorema, considere la ecuación (13) de la página 43, esto es,

$$(2xy + 3x^2)dx + x^2\,dy = 0$$

Aquí, $\quad M = 2xy + 3x^2, \quad N = x^2, \quad \dfrac{\partial M}{ay} = 2x, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Así, por la parte de suficiencia del teorema, se nos garantiza una función U tal que

$$(2xy + 3x^2)dx + x^2\,\mathrm{dy} = dU \tag{6}$$

0, lo que equivale a lo mismo, existe una función U tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3x2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \tag{7}$$

*Estamos suponiendo naturalmente que estas derivadas existen; de otro modo no tenemos derecho a tomarlas.

†Una condición suficiente bajo la cual el orden de la diferenciación es indiferente es que U y sus derivadas parciales (al menos de orden dos) sean continuas en una región del plano xy tal como se muestra en la Figura 1.6, página 25. En lo que sigue asumiremos que esta condición se satisface a menos que se diga lo contrario.

‡ Ver páginas 45-46.

Nos falta determinar U. Esto no es difícil, ya que la primera **ecuación** en (7) establece solamente que la derivada parcial de U con respecto a x es $2xy + 3x^2$. Deberíamos luego **ser capaces** de encontrar a U por el *recíproco de la diferenciación* con respecto a x, esto *es*, **la** *integración* con respecto a x, manteniendo y constante. La constante de integración que debe añadirse es independiente de x *pero podría* depender de y ; esto es, la constante arbitraria puede realmente ser una función de y. Denote esto por $f(y)$. Así, obtenemos

$$U = \int (2xy + 3x^2)\partial x + f(y) \tag{8}$$

el símbolo ∂x enfatiza que la integración es con respecto a x, manteniendo y constante. Desarrollando esta integración, encontramos

$$U = x^2y + x^3 + f(y) \tag{9}$$

Para hallar $f(y)$, sustituya (9) en la segunda de las ecuaciones (7). Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2y + x^3 + f(y)] = x^2 \quad \text{o} \quad x^2 + f'(y) = x^2$$

de modo que $\qquad f'(y) = 0 \quad \text{o} \quad f(y) = \text{constante} = A$

De donde, $\qquad U = x^2y + x^3 + A$

Así, la ecuación diferencial puede ser escrita $d(x^2y + x^3 + A) = 0$ y la integración produce $x^2y + x^3 + A = B$ ó $x^2y + x^3 = c$ donde hemos escrito $c = B - A$. Se observa que ésta es la misma solución que se obtuvo en la pasada sección. Se observa también que **no** hubo realmente necesidad de añadir la constante de integración, A, para hallar f(y).

Para probar la **parte** de suficiencia del teorema de la página 44, basta mostrar que si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ entonces podemos de hecho producir una función $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N \tag{10}$$

Ciertamente hay funciones U que satisfarán la primera de las ecuaciones (10); de hecho todas estas funciones están dadas por

$$U = \int M\,\partial x + f(y) \tag{11}$$

Todo lo que tenemos que hacer ahora es mostrar que existe una función f(y) tal que (11) también satisfará la segunda de las ecuaciones (10), esto es, debemos mostrar que $f(y)$ existe de modo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,\partial x + f(y)\right] = N \quad \text{o} \quad f'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x$$

Para mostrar esto, necesitamos sólo probar que

$$N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x \tag{12}$$

es una función sólo de y. Esto será realmente cierto si la derivada parcial con respecto a x de la expresión (12) es cero. Pero ésto se muestra fácilmente como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M\,\partial x = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

puesto que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ por hipótesis. La suficiencia está por tanto **probada.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 + \cos y)dy = 0.$

Solución Aqui $M = 2xy$, $N = x^2 + \cos y$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

y la ecuación es exacta. Así U existe tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \cos y \tag{13}$$

Integrando **la primera** ecuación con respecto a x da $U = x^2 y + f(y)$. Sustituyendo en la **segunda** ecuación de (13), encontramos

$$x^2 + f'(y) = x^2 + \cos y, \qquad f'(y) = \cos y, \qquad f(y) = \operatorname{sen} y$$

De donde, $U = x^2 y + \operatorname{sen} y$ y la solución general requerida es $x^2 y + \operatorname{sen} y = c$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $y' = (xy^2 - 1)/(1 - x^2 y)$, dado que $y = 1$ donde $x = 0$.

Solución Escribiendo **la** ecuación como $(xy^2 - 1)dx + (x^2 y - 1)dy = 0$, tenemos

$$M = xy^2 - 1, \qquad N = x^2y - 1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

y la ecuación es exacta. Así, de $\partial U/\partial x = M$ y $\partial U/\partial y = N$ encontramos

$$U = \frac{x^2y^2}{2} - x - y = c$$

Usando la condición de que $y = 1$ donde $x = 0$, tenemos finalmente $\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = -1$.

El estudiante puede encontrar más fácil **resolver ecuaciones** exactas por un **método de** inspección conocido como "agrupación de términos". Este está **basado** en la **habilidad de** reconocer ciertas diferenciales exactas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 + \cos y)\,dy = 0$ por "agrupación de términos".

Solución La ecuación es exacta. Si agrupamos los términos como sigue:

$$(2x4'\,dx + x^2\,dy) + \cos y\,dy = 0$$

entonces $\quad d(x^2y) + d(\text{sen}\,y) = 0 \quad 0 \quad d(x^2y + \text{sen}\,y) = 0$

Así, la solución es $x^2 y + \text{sen}\,y = c$, estando de acuerdo con el Ejemplo ilustrativo 1.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resuelva $y' = (xy^2 - 1)/(1 - x^2y)$ por "agrupación de términos".

Solución La ecuación escrita $(xy^2 - 1)dx + (x^2y - 1)dy = 0$ es exacta. Agrupando se obtiene

$$(xy^2\,dx + x^2y\,dy) - dx - dy = 0$$

o $\quad d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) - dx - dy = 0,$ esto es $d\left(\frac{x^2y^2}{2} - x - y\right) = 0$

De donde, $\quad \dfrac{x^2y^2}{2} - x - y = c$

En general, el método de agrupación produce resultados más rápidos pero requiere más experiencia. El método general requiere menos ingenio

EJERCICIOS A

1. Escriba cada ecuación en la forma $M\,dx + N\,dy = 0$, pruebe la exactitud, resuelva aquellas ecuaciones que son exactas.

(a) $3x\,dx + 4y\,dy = 0.$ (b) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}.$ (c) $2xyy' = x^2 - y^2.$

(d) $y' = \dfrac{x}{x + y}.$ (e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y\cos x}{\text{sen}\,x + y}.$ (f) $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{r^2\,\text{sen}\,\phi}{2r\cos\phi - 1}.$

(g) $(ye^{-x} - \text{sen}\,x)dx - (e^{-x} + 2y)dy = 0.$ (h) $\left(x^2 + \dfrac{y}{x}\right)dx + (\ln x + 2y)dy = 0.$

(i) $y' = \dfrac{y(y - e^x)}{e^x - 2xy}.$ (j) $(x^2 + x)dy + (2xy + 1 + 2\cos x)dx = 0.$

2. Resuelva cada ecuación sujeta a las condiciones indicadas.

(a) $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x};\ y(1) = 2.$ (b) $2xy\,dx + (x^2 + 1)dy = 0;\ y(1) = -3.$

(c) $y' = \dfrac{2x - \text{sen}\,y}{x\cos y};\ y(2) = 0.$ (d) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x\sec^2 y}{\text{sen}\,2x - \tan y};\ y(\pi) = \dfrac{\pi}{4}.$

(e) $(x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0;\ y(0) = 1.$

3. Muestre que cada una de las siguientes ecuaciones no es exacta pero llega a ser exacta al multiplicarla por el factor integrante indicado. Luego, resuelva cada ecuación.
(a) $(y^2 + 2x^2)dx + xy\,dy = 0;\ x.$ (b) $y\,dx + (4x - y^2)dy = 0;\ y^3.$
(c) $\cos x\,dy - (2y \operatorname{sen} x - 3)dx = 0;\ \cos x.$ (d) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0;\ \dfrac{1}{(x^2 + y^2)}.$

EJERCICIOS B

1. Resuelva $\left[\dfrac{y}{(x + y)^2} - 1\right]dx + \left[1 - \dfrac{x}{(x + y)^2}\right]dy = 0.$

2. Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $f(x)dx + g(x)h(y)dy = 0$ sea exacta es que $g(x)$ sea constante.

3. Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $[f_1(x) + g_1(y)]\,dx + [f_2(x) + g_2(y)]\,dy = 0$ sea exacta es que $g_1(y)dx + f_2(x)dy$ sea una diferencial exacta.

4. Determine la ecuación más general $N(x, y)$ tal que $(y \operatorname{sen} x + x^2y - x \sec y)dx + N(x, y)dy = 0$ sea exacta, y obtenga su solución.

5. Resuelva $\left(2x \operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + 2x \tan\dfrac{y}{x} - y \cos\dfrac{y}{x} - y \sec^2\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(x \cos\dfrac{y}{x} + x\sec^2\dfrac{y}{x}\right)dy = 0.$

Compare con el Ejercicio 10-B, página 41.

EJERCICIOS C

1. Muestre que $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ no es exacta en general pero llega a ser exacta al multiplicarla por el factor integrante $\{xy[f(xy) - g(xy)]\}^{-1}$.

2. Use Ejercicio 1 para resolver $(xy^2 + 2y)dx + (3x^2y - 4x)dy = 0.$

3. Si $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$ y $\partial P/\partial y = -\partial Q/\partial x$ muestre que la ecuación $P\,dx + Q\,dy = 0$ no es exacta en general pero llegar a ser exacta al multiplicarla por $1/(P^2 + Q^2)$. Ilustre al considerar $P = x^2 - y^2$, $Q = 2xy$.

4. Sea $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ donde $f(z)$ es un polinomio en la variable compleja $z = x + iy$ y P y Q son reales. (a) Pruebe que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

(b) Discuta la relación de (a) con el Ejercicio 3. (c) Las ecuaciones en (a), frecuentemente llamadas las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, ¿son válidas para otras funciones? Explique.

5 Ecuaciones hechas exactas por un factor integrante apropiado

Si la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta, esto es, si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces la ecuación se puede resolver por los métodos de la sección anterior. En caso de que la ecuación no sea exacta, es posible que la ecuación la podamos hacer exacta al multiplicarla por un factor integrante apropiado μ, de modo que la ecuación resultante

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \tag{1}$$

será exacta, esto es

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{2}$$

Desafortunadamente no hay un solo método para obtener factores integrantes. Si hubiera, nuestra tarea estaría altamente simplificada. Afortunadamente, sin embargo, existen algunos métodos, los cuales discutiremos, que parecen surgir frecuentemente en la práctica. El primer método que debería buscarse siempre en la práctica es por supuesto el método de separación de variables, donde el factor integrante es generalmente aparente puesto que M y N pueden cada una escribirse como el producto de una función de x y una función de y. Veamos uno de tales ejemplos usando las ideas del factor integrante y exactitud.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + xy^2}{y + x^2y}$, si $y(1) = 3$.

Solución Escribiendo la ecuación como $(3x + xy^2)dx - (y + x^2y)dy = 0$

tenemos $M = 3x + xy^2,\ N = -y - x^2y,\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy,\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2xy$

de modo que la ecuación no es exacta. Notando que M y N cada una puede ser factorizada en un producto de una función de x y una función de y, esto es,

$$x(3 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0 \tag{3}$$

un factor integrante es

$$\mu = \frac{1}{(3 + y^2)(1 + x^2)} \tag{4}$$

Multiplicando (3) por este factor integrante se tiene

$$\frac{x}{1 + x^2}dx - \frac{y}{3 + y^2}dy = 0 \tag{5}$$

la cual es separable y la ecuación es exacta. La integración de (5) produce entonces

$$\tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \tfrac{1}{2}\ln(3 + y^2) = c \quad \text{o} \quad (1 + x^2) = A(3 + y^2)$$

Puesto que y = 3 cuando $x = 1$, encontramos $A = \frac{1}{6}$.
Así, la solución requerida es

$$(1 + x^2) = \tfrac{1}{6}(3 + y^2) \quad \text{o} \quad y^2 - 6x^2 = 3 \tag{6}$$

5.1 ECUACIONES HECHAS EXACTAS POR FACTORES INTEGRANTES QUE INVOLUCRAN UNA VARIABLE

Supóngase que se desea resolver la ecuación diferencial

$$(2y^2x - y)dx + x\,dy = 0 \tag{7}$$

Es fácil mostrar que la ecuación no es separable y no es exacta: Agrupando apropiadamente los términos en la forma

$$(xdy - ydx) + 2y^2x\,dx = 0$$

y dividiendo por y^2 podemos escribir la ecuación como

$$-d\left(\frac{x}{y}\right) + d(x^2) = 0 \quad \text{o} \quad -\frac{x}{y} + x^2 = c$$

lo cual da la solución general.

El método es comúnmente conocido como el ***método de inspección*** y está basado en la ingenuidad en muchos casos. El estudiante puede observar del método anterior que $1/y^2$ es un factor integrante de la ecuación (7). La multiplicación por este factor hace exacta la ecuación (7), y podemos luego usar nuestro procedimiento estándar. Pero ¿cómo podemos decir que $1/y^2$ es un factor integrante? Consideremos este problema.

Considere el caso donde $M\,dx + N\,dy = 0$ no es separable o exacta. Multipliquemos nuestra ecuación por el factor integrante μ (aún desconocido). Por definición de un factor integrante, la ecuación $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ es ahora exacta, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{8}$$

Simplificaremos nuestro trabajo al considerar dos casos:

Cuso 1, μ es una función sólo de x. En este caso podemos escribir (8) como

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{d\mu}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx \tag{9}$$

Si el coeficiente de dx a la derecha de (9) es una función sólo de x [digamos $f(x)$], entonces tenemos $d\mu/\mu = f(x)dx$ y así

$$\ln\mu = \int f(x)dx \quad \text{o} \quad \mu = e^{\int f(x)dx}$$

omitiendo la constante de integración. Podemos enunciar este resultado como sigue:

Teorema. Si $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$, entonces $e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante.

Caso 2, μ es una función sólo de y. En este caso, (8) puede ser escrita como

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy$$

y podemos probar el

Teorema. Si $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces $e^{\int g(y)dy}$ es un factor integrante.

Un esquema nemotécnico para resumir el procedimiento es el siguiente. Considere

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

calcule $$\frac{\partial M}{\partial y} = (1), \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = (2)$$

Si (1) = (2), la ecuación es exacta y puede fácilmente resolverse.
Si (1) $\neq$ (2), calcule (1) menos (2), dividida por N; llame el resultado f.
Si f es una función sólo de x, entonces $e^{\int f\,dx}$ es un factor integrante.
Si no, calcule (2) menos (1), divida por M; llame el resultado g.
Si g es una función sólo de y, entonces $e^{\int g\,dy}$ es un factor integrante.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $y\,dx + (3 + 3x - y)dy = 0$.

Solución Aquí $$M = y, N = 3 + 3x - y, \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

de modo que la ecuación no es exacta.

Ahora $$\frac{1 - 3}{3 + 3x - y}$$

no es una función sólo de x. Pero $\frac{3-1}{y} = \frac{2}{y}$

es una función sólo de y. Por tanto $e^{\int (2/y)dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$ es un factor integrante.

Multiplicando la ecuación dada por y^2, el estudiante puede ahora mostrar, realmente, que llega a ser exacta y la solución es

$$xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Una curva que tiene una pendiente dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ pasa por el punto (2, 1). Encuentre su ecuación.

Solución La ecuación diferencial puede escribirse $2xy\,dx + (y^2 - x^2)dx = 0$.

Así, $$M = 2xy, \qquad N = y^2 - x^2, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

de modo que la ecuación no es exacta. Ahora $\frac{2x - (-2x)}{y^2 - x^2} = \frac{4x}{y^2 - x^2}$

no es una función sólo de x, pero $\frac{-2x - 2x}{2xy} = \frac{-2}{4}$

es una función sólo de y. Por tanto, un factor integrante está dado por

$$e^{\int (-2/y)dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$$

Usando el factor integrante, encontramos la solución general

$$x^2 + y^2 = cy$$

Para la curva particular que pasa por (2, 1) hallamos c = 5, y la ecuación requerida es $x^2 + y^2 = 5y$, o en forma explícita, $y = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{25 - 4x^2})$.

Observación. La ecuación también puede resolverse como una ecuación homogénea.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resuelva $y' = x - y$, dado que $y = 2$ donde $x = 0$.

Solución Escribiendo la ecuación diferencial como $(x - y)dx - dy = 0$

tenemos $M = x - y, \quad N = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

de modo que la ecuación no es exacta. Ahora $(-1 - 0)/-1 = 1$ es una función de x. Por tanto, $e^{\int 1\, dx} = e^x$ es un factor integrante. Como el estudiante puede mostrarlo, la solución requerida es $(x - 1)e^x - ye^x = -3$.

EJERCICIOS A

1. Resuelva:
   (a) $(3x + 2y^2)dx + 2xy\, dy = 0$.
   (b) $(2x^3 - y)dx + x\, dy = 0;\ y(1) = 1$.
   (c) $(y^2 \cos x - y)dx + (x + y^2)dy = 0$.
   (d) $(x + x^3 \operatorname{sen} 2y)dy - 2y\, dx = 0$.
   (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} y}{x \cos y - \operatorname{sen}^2 y};\ y(0) = \frac{\pi}{2}$.
   (f) $(2y \operatorname{sen} x - \cos^3 x)dx + \cos x\, dy = 0$.
   (g) $\frac{dy}{dx} + \frac{4y}{x} = x$.
   (h) $\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 3x}{y}$.
   (i) $\frac{dI}{dt} = \frac{t - tI}{t^2 + 1};\ I(0) = 0$.
   (j) $(y^3 + 2e^x y)dx + (e^x + 3y^2)dy = 0$.
2. La ecuación diferencial de una familia es $y' = (x + y)/x$. Encuentre la ecuación de una curva de esta familia que pasa por $(3, 0)$.
3. Complete las soluciones de las ecuaciones diferenciales en los Ejemplos ilustrativos 3 y 4.

EJERCICIOS B

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 \cot x + \operatorname{sen} x \cos x}{2y}$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 y + y^3}$.
3. $(3x^2 + y + 3x^3 y)dx + x\, dy = 0$.
4. $(2x + 2xy^2)dx + (x^2 y + 2y + 3y^3)dy = 0$.

EJERCICIOS C

1. Muestre que si la ecuación $M\, dx + N\, dy = 0$ es tal que $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F(xy)$

   esto es, una función del producto xy, entonces un factor integrante es $e^{\int F(u)du}$, donde $u = xy$.

2. Use el método del Ejercicio 1 para resolver $(y^2 + ny + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$.

3. Resuelva $(2y^2 + 4x^2y)dx + (4xy + 3x^3)dy = 0$, dado que existe un factor integrante de la forma $x^p y^p$, donde p y q son constantes.

4. En el Ejercicio 2A, ¿hay algún miembro de la familia que pasa por (0, O)?

5.2 LA ECUACION DE PRIMER ORDEN LINEAL

Una ecuación que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{10}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones dadas de x se llama una *ecuación diferencial de primer orden lineal.** Es fácil verificar que la ecuación tiene como factor integrante a $e^{\int P\,dx}$, puesto que al multiplicar ambos lados de (10) por este factor se obtiene

$$e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + Pye^{\int P\,dx} = Qe^{\int P\,dx} \tag{11}$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P\,dx}) = Qe^{\int P\,dx} \tag{12}$$

Esto es cierto debido a que si usamos la regla del cálculo para la diferenciación de un producto, el lado izquierdo de (12) es

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P\,dx}) = y\frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx}) + e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx}$$

$$= y(e^{\int P\,dx}P) + e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} = e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + Pye^{\int P\,dx}$$

esto es, el lado izquierdo de (ll). De (12) obtenemos por integración la solución.?

$$ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c \tag{13}$$

Observación. No hay necesidad de memorizar (13). Es mucho mejor usar el factor integrante $\mu = e^{\int P\,dx}$, multiplicar la ecuación dada (10) por este factor y luego escribir el lado izquierdo como la derivada del producto de μ con y como en (12).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 50.$

*Una ecuación que no puede ser escrita en esta forma, como por ejemplo $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = \text{sen } x$, se llama una *ecuación de primer orden no-lineal.*

†Es interesante notar que (13) proporciona la solución única de una ecuación diferencial de primer orden lineal predicha en el Ejemplo ilustrativo 3 en la página 27

Solución Esto está en la forma (10) con $P = 5$, $Q = 50$. Un factor integrante es $e^{\int 5\,dx} = e^{5x}$. Multiplicando por e^{5x}, podemos escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dx}(ye^{5x}) = 50e^{5x} \quad \text{esto es,} \quad ye^{5x} = 10e^{5x} + c \quad \text{o} \quad y = 10 + ce^{-5x}$$

Se podría haber usado también el método de separación de variables.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Resuelva $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{10I}{2t+5} = 10$, dado que $I = 0$ donde $t = 0$.

Solución La ecuación tiene la forma (10), remplazando I con y y t con x. Un factor integrante es $e^{\int 10\,dt/(2t+5)} = e^{5\ln(2t+5)} = e^{\ln(2t+5)^5} = (2t+5)^5$. Multiplicando por $(2t+5)^5$, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left[(2t+5)^5 I\right] = 10(2t+5)^5 \quad \text{o} \quad I(2t+5)^5 = \tfrac{5}{6}(2t+5)^6 + c$$

Colocando $I = 0$ y $t = 0$ en la ecuación, tenemos $c = -78.125/6$.

Así
$$I = \tfrac{5}{6}(2t+5) - \frac{78.125}{6(2t+5)^5}$$

Realmente no hay necesidad de considerar (10) como una nueva ecuación puesto que pertenece a. una categoría ya considerada, la categoría de ecuaciones con un factor integrante el cual es una función de sólo una variable. A pesar de esto, la forma en la cual (10) aparece ocurre tan frecuentemente en aplicaciones prácticas, y el método de solución es tan simple, que vale la pena llegar a estar familiarizado con ella. Sin embargo, si el estudiante no puede reconocer que una ecuación particular tiene la forma (10) puede estar seguro que el método de los factores integrantes de una variable si funcionará. Por ejemplo, considere la ecuación

$$y\,dx + (3 + 3x - y)dy = 0$$

la cual discutimos en el Ejemplo ilustrativo 2, página 51. Si se nos ocurre reconocer que esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3x}{y} = \frac{y-3}{y}$$

la cual está en la forma (LO) con x y y intercambiados, podemos resolverla como una ecuación lineal. (Ver Ejercicio 3A). En otro caso podemos buscar un factor integrante que involucre una sola variable. Para mostrar que este método es aplicable escribimos (10) como

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

Entonces $M = P(x)y - Q(x)$, $N = 1$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = P(x)$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$

Ahora $(P(x) - 0) / 1 = P(x)$ es una función de x sólo, y así $e^{\int P(x)\,dx}$ es un factor integrante.

EJERCICIOS A

1. Resuelva

(a) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1.$ (b) $xy' + 3y = x^2.$

(c) $y^2 \frac{dx}{dy} + xy = 2y^2 + 1$ (d) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2 \operatorname{sen} 3x.$

(e) $I' + 3I = e^{-2t}$; $I(0) = 5.$ (f) $y' + y \cot x = \cos x$

(g) $y' = \frac{1}{x - 3y}.$ (h) $\frac{dr}{d\phi} = \phi - \frac{r}{3\phi}$; $r = 1,\ \phi = 1.$

2. La corriente Z, en amperios, en un cierto circuito eléctrico satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} + 2I = 10e^{-2t}$$

donde t es el tiempo. Si Z= 0 donde $t = 0$, encuentre Z como una función de t.

3. Resuelva la ecuación diferencial de la página 54 como una ecuación lineal.

EJERCICIOS B

1. La ecuación $dy/dx + Py = Qy^n$, donde P y Q son funciones de x sólo y n es una constante, se llama la ecuación *diferencial de Bernoulli* y surge en varias aplicaciones. Muestre cómo se resuelve con $n = 0$ ó 1.
2. Si $n \neq 0$, 1, ninguno de los métodos discutidos hasta ahora sirve. Muestre, sin embargo, que al cambiar la variable dependiente de y a v de acuerdo a la transformación $v = y^{1-n}$ la ecuación puede resolverse.
3. Resuelva $y' - y = xy^2$ por el método del Ejercicio 2.
4. Resuelva $y^2\,dx + (xy - x^3)dy = 0.$
5. Resuelva $xy'' - 3y' = 4x^2$. (*Sugerencia:* Haga $y' = v$.)
6. Resuelva el Ejercicio 4 buscando un factor integrante de la forma $x^p y^p$, donde p y q *son* constantes apropiadamente escogidas.
7. Resuelva la ecuación $y' = \alpha y - \beta y^n$, donde α, β y $n \neq 0$, 1 son constantes, como (a) una ecuación de Bernoulli; (b) como una ecuación separable.

EJERCICIOS C

1. Muestre que la ecuación diferencial $y' + Py = Qy \ln y$, donde P y Q son funciones de x, puede resolverse al hacer $\ln y = v$.
2. Resuelva $xy' = 2x^2 y + y \ln y.$
3. Muestre que una ecuación lineal con variable independiente x se transforma en otra ecuación lineal cuando x sufre la transformación $x = f(u)$, donde u es una nueva variable independiente y f es cualquier función diferenciable.
4. Resuelva $xy' + 3 = 4xe^{-y}$; $y(2) = 0.$

5.3 EL METODO DE INSPECCION

En la página 50, se mencionó que un factor integrante de una ecuación diferencial podía algunas veces encontrarse por inspección, un proceso basado en el ingenio y la experiencia. En esa sección evitamos usar el método de inspección para los casos donde el factor integrante involucraba sólo una variable. Sin embargo, en algunos casos los factores integrantes dependen de ambas variables y la "inspección" puede ser útil. El método de inspección generalmente se aplica cuando uno nota ciertos aspectos especiales en la ecuación.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Resuelva $(x^2+y^2-y)dx - x\,dy = 0$.

Solución Todos los métodos estándar discutidos hasta ahora no funcionan para esta ecuación. Sin embargo si escribimos la ecuación como

$$(x^2+y^2)dx + y\,dx - x\,dy = 0$$

y "se nos ocurre notar" que esto puede escribirse

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{o} \quad dx - d\left[\tan^{-1}\frac{y}{x}\right] = 0$$

inmediatamente obtenemos por integración la solución $x - \tan^{-1}\frac{y}{x} = c$.

El estudiante observará que un factor integrante para esta ecuación es $1/(x^2+y^2)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Resuelva $x\,dx + (y - \sqrt{x^2+y^2})dy = 0$.

Solución Escribiendo esto como $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dy$

podemos notar que el lado izquierdo puede escribirse $d(\sqrt{x^2+y^2})$, y así la ecuación puede escribirse $d(\sqrt{x^2+y^2}) = dy$. La integración nos lleva a

$$\sqrt{x^2+y^2} = y + c \quad \text{o} \quad x^2 = 2cy + c^2$$

El estudiante también podría haber resuelto este problema a l escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-y}.$$

y luego usar la transformación $y = vx$.

Los siguientes resultados fácilmente establecidos pueden ayudar en la solución de ecuaciones diferenciales por "inspección".

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right], \qquad \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right]$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2}), \qquad \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = d(\sqrt{x^2 - y^2})$$

EJERCICIOS A

Resuelva cada ecuación por el método de inspección o por cualquier otro método

1. $y\,dx + (2x^2y - x)dy = 0.$
2. $y\,dx + (y^3 - x)dy = 0.$
3. $(x^3 + xy^2 + y)dx - x\,dy = 0.$
4. $(x^3 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0.$
5. $(x - \sqrt{x^2 + y^2})dx + (y - \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$
6. $(x^2 + y^2 + y)dx + (x^2 + y^2 - x)dy = 0.$
7. $(x - x^2 - y^2)dx + (y + x^2 + y^2)dy = 0.$
8. $(x^2y + y^3 - x)dx + (x^3 + xy^2 - y)dy = 0.$

EJERCICIOS B

1. Muestre que $\sqrt{x^2 + y^2}(x\,dx + y\,dy) = \frac{1}{3}d[(x^2 + y^2)^{3/2}]$. Ahora, resuelva

$$(y - x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (x - y\sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$$

2. Muestre que $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{(xy)^4} = -\frac{1}{3}d[(xy)^{-3}]$. Ahora, resuelva

$$(y - x^5y^4)dx + (x - x^4y^5)dy = 0$$

3. Muestre que $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{2}\,d\left[\ln\left|\dfrac{x - y}{x + y}\right|\right]$. Ahora, resuelva

$$(x^3 - xy^2 + y)dx + (y^3 - x^2y - x)dy = 0$$

EJERCICIOS C

Resuelva

1. $(x^3 + 2xy^2 - x)dx + (x^2y + 2y^3 - 2y)dy = 0.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 2y}{x^3 + x}.$
3. $(xy^2 + x\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,2x)dx - 2y\,dy = 0.$
4. $\left[x^2 + y(x - y)^2 \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]dx - \left[x^2 + x(x - y)^2 \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]dy = 0.$

6 Ecuaciones de orden superior al primero que se resuelven fácilmente

Ahora ya hemos aprendido cómo resolver algunas ecuaciones de primer orden. Para resolver ecuaciones de orden superior, es natural preguntar si ellas pueden de alguna manera ser reducidas a ecuaciones de primer orden, las cuales puedan luego resolverse. Realmente hay dos tipos importantes de ecuaciones de alto orden que pueden resolverse fácilmente de esta manera.

6.1 ECUACIONES INMEDIATAMENTE INTEGRABLES

Como ya hemos encontrado en el Capítulo uno, la ecuación diferencial más simple que puede surgir es aquella que puede integrarse directamente. Revisemos esto brevemente en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $y^{(IV)} = x$, dado que $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$ donde $x = 0$.

Solución Con una integración de la ecuación dada tenemos $y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$

Puesto que $y''' = 0$ donde $x = 0$, implica que $c_1 = 0$. Así, $y''' = \frac{x^2}{2}$.

Integrando de nuevo, obtenemos $y'' = \frac{x^3}{6} + c_2$.

Usando $y'' = 0$ donde $x = 0$, tenemos $c_2 = 0$. De donde $y'' = \frac{x^3}{6}$.

Integrando de nuevo, encontramos $y' = \frac{x^4}{24} + c_3$.

Usando $y' = 1$ donde $x = 0$, tenemos $c_3 = 1$. Así, $y' = \frac{x^4}{24} + 1$.

Integrando de nuevo, obtenemos $y = \frac{x^5}{120} + x + c_4$.

Puesto que $y = 0$ donde $x = 0$, $c_4 = 0$. Así, $y = \frac{x^5}{120} + x$.

Note que la ecuación dada se consideró como una de primer orden en y''' la segunda ecuación como una de primer orden en y'', etc. Note también que en el resultado final hemos evaluado cuatro constantes arbitrarias estando de acuerdo con el hecho de que empezarnos con una ecuación de cuarto orden.

6.2 ECUACIONES CON UNA VARIABLE AUSENTE

Nuestro próximo método se aplica cuando una de las variables no aparece en la ecuación. El método es con frecuencia útil en aplicaciones.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resolver $xy'' + y' = 4x$.

Solución Aquí una de las variables, y, está ausente de la ecuación. El método en este caso es hacer $y' = v$.' Entonces $y'' = v'$, y la ecuación puede escribirse

$$xv' + v = 4x \quad 0 \quad \frac{d}{dx}(xv) = 4x$$

La integración da $xv = 2x^2 + c_1$, $v = 2x + (c_1/x)$.

Remplazando v por y', tenemos $y' = 2x + \dfrac{c_1}{x}$ o $y = x^2 + c_1 \ln x + c_2$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resolver $2yy'' = 1 + (y')^2$.

Solución **En este caso falta** x. **Haciendo** $y' = v$ como antes, encontramos

$$2yv' = 1 + v^2 \quad o \quad 2y\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 \tag{1}$$

Desafortunadamente tenemos ahora tres variables x, v y y. Sin embargo, podemos escribir

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot v$$

así (1) se convierte en $\qquad 2yv\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\int \frac{2v\,dv}{1 + v^2} = \int \frac{dy}{y}, \qquad \ln(1 + v^2) = \ln y + c$$

Así, $\qquad \dfrac{1 + v^2}{y} = c_1 \quad o \quad v = \pm\sqrt{c_1 y - 1}$

esto es, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 y - 1} \quad o \quad \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = \pm\int dx$

La integración da $2\sqrt{c_1 y - 1} = \pm c_1 x + c_2$, de donde y puede obtenerse.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resolver $y'' + y = 0$.

Solución Haciendo $y' = v$, podemos escribir la ecuación dada como

$$\frac{dv}{dx} + y = 0, \qquad \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad o \quad v\frac{dv}{dy} + y = 0$$

Separando las variables e integrando, encontramos

$$\int v\,dv + \int y\,dy = c \quad o \quad \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = c$$

Luego escogiendo $2c = c_1^2$, tenemos $v = \pm\sqrt{c_1^2 - y^2}$

esto es, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1^2 - y^2} \quad o \quad \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} = \pm\int dx$

La integración produce $\qquad \operatorname{sen}^{-1}(y/c_1) = \pm x + c_2$

o $$y = c_1 \operatorname{sen}(\pm x + c_2) = c_1 \operatorname{sen} c_2 \cos x \pm c_1 \cos c_2 \operatorname{sen} x$$

lo cual puede escribirse $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

EJERCICIOS A

Resolver cada uno de las siguientes ecuaciones sujetas a las condiciones dadas.

1. $y'' = 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.
2. $y^{(IV)} = \frac{x}{3}$.
3. $y''' = 3 \operatorname{sen} x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.
4. $2y^{(IV)} = e^x - e^{-x}$; $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.
5. $I''(t) = t^2 + 1$; $I(0) = 2$, $I'(0) = 3$.
6. $x^2y'' = x^2 + 1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
7. $x^3y''' = 1 + \sqrt{x}$.
8. $y''y' = 1$; $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.
9. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
10. $xy'' + 2y' = 0$.
11. $y'' \quad y = 0$.
12. $yy'' = y'$.
13. $y'' + (y')^2 = 1$.
14. $y'' = y'(1 + y)$.
15. $y'' + xy' = x$.

EJERCICIOS B

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones sujetas a las condiciones indicadas

1. $y^{(IV)} = \ln x$; $y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0$.
2. $y^{(V)} + 2y^{(IV)} = x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(IV)}(0) = 0$.
3. $xy''' + y'' = 1$.
4. $(y''')^2 = (y'')^3$.
5. $y''' - y' = 0$.
6. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.
7. $x^2y''' + 2xy'' = 1$.

EJERCICIOS C

1. Si $y'' = -4/y^3$ y $y(2) = 4$, $y''(2) = 0$, halle $y(4)$.
2. Resolver $y'' = [1 + (y')^2]^{3/2}$ e intreprete geométricamente.
3. Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 1$.
4. Una curva en el plano ny tiene la propiedad de que su curvatura en cualquier punto (x, y) es siempre igual a $\operatorname{sen} x$. Si la curva tiene pendiente cero en el punto (0, 0), ¿cuál es su ecuación?
5. Trabaje el Ejercicio 4 si $\operatorname{sen} x$ se remplaza por $2x$.

La ecuación de Clairaut

Una ecuación de primer orden que presenta propiedades interesantes está dada por

$$y = xy' + f(y') \tag{1}$$

y es conocida como la *ecuación diferencial de Clairaut en* nombre del matemático quién primero investigó estas propiedades. Supondremos que $f(y')$ define una función diferenciable de y'.

Ejemplo. $y = xy' + (y')^2$, $y = xy' + \tan y'$, $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$ son todas ecuaciones de Clairaut.

Para resolver (1), hagamos primero $y' = v$ para obtener

$$y = xv + f(v) \tag{2}$$

luego diferenciando ambos lados de (2) con respecto a x se obtiene

$$y' = xv' + v + f'(v)v' \quad 0 \quad v'[x + f'(v)] = 0$$

Dos casos surgen de la última ecuación.

Cuso *1*, $v' = 0$. En este caso tenemos, al integrar, $v = c$, donde c es cualquier constante. Luego remplazando v por c en (2) obtenemos

$$y = cx + f(c) \tag{3}$$

Es llamativo que (3), la cual se obtiene directamente de la ecuación diferencial dada (1) al remplazar simplemente y' por c, produzca la solución general de (1), como se puede verificar por sustitución.

Caso 2, $x + f'(u) = 0$. En este caso tenemos, usando (2),

$$x + f'(u) = 0, \qquad y = xv + f(v)$$

de lo cual $$x = -f'(u), \qquad Y = -vf'(v) + f(v) \tag{4}$$

Las ecuaciones (4) son ecuaciones paramétricas para una curva donde v es el parámetro. Esta curva da una solución a (1), como se ve en el Ejercicio 4B, página 64. Sin embargo, puesto que ésta no es un caso especial de la solución general (3), es una solución singular.

Para ilustrar el procedimiento y obtener alguna idea concerniente a la relación entre la solución singular y la general, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Resolver $y = xy' + (y')^2$.

Solución Como antes, sea $y' = v$ de modo que $y = xv + v^2$. Luego derivando con respecto a x se obtiene

$$y' = xv' + v + 2vv' \quad 0 \quad v'(x + 2v) = 0$$

Entonces hay dos casos.

Cuso *1*, $v' = 0$. En este caso $v = c$, el cual sustituido en $y = xv + v^2$ da la solución general

$$y = cx + c^2 \tag{5}$$

Caso 2, $x + 2v = 0$. En este caso obtenemos de $x + 2v = 0$ y $y = xv + v^2$ las ecuaciones paramétricas

$$x = -2v, \qquad y = -v^2 \quad 0 \quad y = -\frac{x^2}{4} \tag{6}$$

eliminando v. Puesto que esto satisface la ecuación diferencial dada y no es un caso especial de (5), es una solución singular.

La relación entre la solución singular y la solución general puede ser vista en la Figura 2.1. En esta figura hemos mostrado el gráfico de $y = -x^2/4$, la cual es una parábola, junto con gráficos de $y = cx + c^2$ para varios valores de c, las cuales representan líneas tangentes a $y = -x^2/4$ (ver Ejercicio 3B). La parábola $y = -x^2/4$, la cual "envuelve" todas las tangentes $y = cx + c^2$, es por obvias razones llamada *envolvente* de la familia de líneas tangentes.

Por la ecuación general de Clairaut (1), la solución singular (4) representa la envolvente de la familia de líneas rectas (3), las cuales a su vez son líneas tangentes a la envolvente. Es posible obtener la envolvente directamente de esta familia, como se indica en Ejercicio 1B.

El teorema fundamental de existencia-unicidad del Capítulo uno también puede proporcionar guías a la presencia de soluciones singulares y sus conexiones con soluciones generales. Refiriéndonos a la ecuación de Clairaut en el Ejemplo ilustrativo de la página 61, por ejemplo, vemos al resolver para y' que hay dos valores,

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2}, \qquad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \tag{7}$$

Considerando la primera ecuación en (7), notamos que la derivada parcial con respecto a y del lado derecho es $1/\sqrt{x^2 + 4y}$, y es real, simple valorada y continua sí y sólo sí $y > -x^2/4$, la cual describe geométricamente la región por encima de la parábola de la Figura 2.2. Dado un punto, diagamos (1, 2), en esta región, vemos de la solución general $y = cx + c^2$ que $c^2 + c \quad 2 = 0$

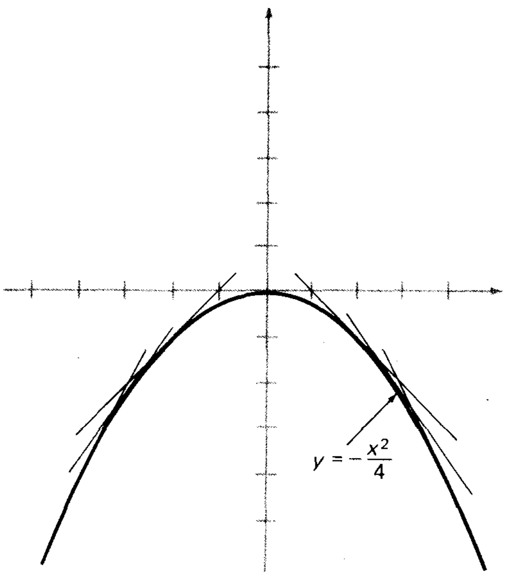


Figura 2.1

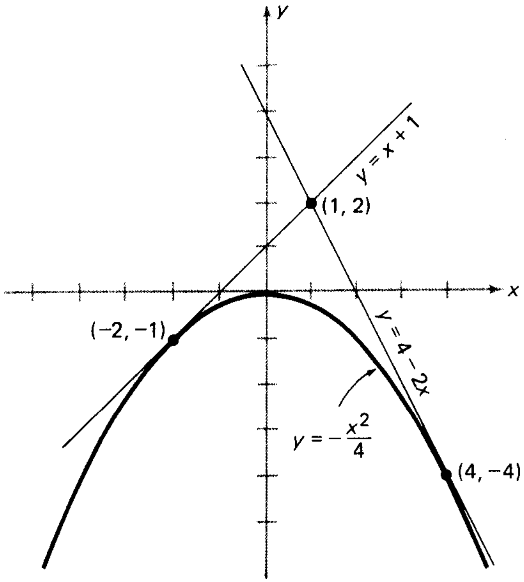


Figura 2.2

ó $c = 1, -2$; esto es, $y = x + 1$, $y = 4 - 2x$. De éstas, solamente $y = x + 1$, $x \geq -2$, satisface la primera ecuación de (7), mientras que $y = x + 1$, $x \leqq -2$, satisface la segunda ecuación de (7) acorde con el teorema de existencia-unicidad.

De manera similar podemos mostrar que $y = 4 - 2x$, $x \leqq 4$, es la única solución de la segunda ecuación en (7) que pasa por (1, 2), mientras $y = 4 \quad 2x$, $x \geq 4$, es la única solución de la primera ecuación. La situación se indica en la-Figura 2.2.

Los conceptos descritos anteriormente para la ecuación de Clairaut sirven para indicar algunos principios guías en relación a las soluciones para tipos más generales de ecuaciones. Para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, habrá usualmente una solución general en ciertas regiones restringidas como lo garantiza el teorema de existencia-unicidad. Soluciones singulares, si ellas ocurren, deben manifestarse ellas mismas en las fronteras de tales regiones. En algunos casos ellas pueden ser vistas desde ciertos factores que pueden llegar a ser cero o infinito.*

EJERCICIOS A

Obtenga la solución general y singular para cada uno de los siguientes

1. $y = xy' - (y')^2$.

2. $y = xy' + 1 + 4(y')^2$.

3. $y = xy' - \tan y'$.

4. $4' = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

*Para futuras discusiones de envolventes y soluciones singulares, junto con tópicos relacionados, vea los ejercicios avanzados en la página 64 y también la referencia [13].

EJERCICIOS B

1. (a) Muestre que la ecuación diferencial para la familia de líneas rectas $y = cx - c^3$ es $y = xy' - (y')^3$. (b) Muestre que la envolvente de la familia $y = cx - c^3$ es también una solución de la ecuación diferencial en (a). ¿De qué clase es? [Sugerencia: La envolvente de una familia de un parámetro $F(x, y, c) = 0$, si existe, se puede encontrar de la solución simultánea de $F(x, y, c) = 0$ y $\partial F(x, y, c)/\partial c = 0$.] (c) ¿Se puede obtener la envolvente directamente de la ecuación diferencial?
2. Use el método del Ejercicio 1 para obtener las envolventes en (a) Ejemplo ilustrativo en la página 61. (b) Ejercicio 1A. (c) Ejercicio 2A. (d) Ejercicio 3A. (e) Ejercicio 4A.
3. Muestre que $y = cx + c^2$ es tangente a $y = -x^2/4$.
4. Muestre que la curva definida por las ecuaciones parámetricas (4) en la página 61 representa una solución de (1), página 110. También muestre que las líneas $y = cx + f(c)$ representan líneas tangentes a esta curva; esto es, la curva es la envolvente de la familia de líneas tangentes.
5. La solución general de $y' = 3y^{2/3}$ está dada por $y = (x + c)^3$ y la solución singular es $y = 0$. Examine la relación entre estas soluciones desde el punto de vista de las envolventes. Compare con el Capítulo uno, páginas 16, 20 y 27.
6. Encuentre la solución general y singular de $y' = \sqrt{y}$.

EJERCICIOS C

1. Muestre que la ecuación $y = y' \tan x - (y')^2 \sec^2 x$ se puede reducir a la ecuación de Clairaut con el uso de la transformación $z = \operatorname{sen} x$, y resuelva así la ecuación.
2. Resolver $y = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dx}{dy}\right)$.
3. Trabaje el Ejercicio 4C, página 33, usando el concepto de una *envolvente* (ver Ejercicio 1B).

8 Revisión de métodos importantes

En este capítulo hemos encontrado varios métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Es natural para los estudiantes preguntarse cuál de estos métodos se espera encontrar más a menudo en la práctica para que así se pueda dar un apropiado énfasis.

La siguiente lista, en la cual presentamos esos métodos de importancia primaria y otros de importancia secundaria, puede servir como una ayuda útil.

A. *Importancia primaria*

1. ***Separación de variables:*** $f(x)dx + g(y)dy = 0$.
   Integre para obtener la solución requerida $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$.
2. ***Ecuaciones homogéneas:*** $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

   Haga $y = vx$, donde v es una nueva variable dependiente dependiendo de x, y así reduzca la ecuación al tipo de variables separables.

3. ***Ecuaciones lineales:*** $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

Multiplique ambos lados por el factor integrante $\mu = e^{\int P\,dx}$ de modo que la ecuación se pueda escribir $\dfrac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q$. Luego integre para obtener la solución requerida $\mu y = \int \mu Q\, dx + c$.

4. ***Ecuaciones exactas:*** $M\,dx + N\,dy = 0$, donde $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Escriba la ecuación como $dU = 0$ e integre para obtener la solución requerida $U(x, y) = c$.

B. *Importancia secundaria*

1. ***Ecuaciones que pueden ser hechas exactas:*** Vea páginas 48-54. Esto incluye 1 y 3 de lo anterior.
2. ***Transformación de variables:*** Esto incluye artificios especiales sugeridos por la forma particular de la ecuación diferencial y a menudo cae en la categoría de "artificios ingeniosos". El método 2 'dado anteriormente está incluido aquí.
3. ***Técnicas varias,*** tales como el método de inspección y la ecuación de Clairaut.

Los siguientes ejercicios intentan servir como un repaso a los varios métodos.

EJERCICIOS MISCELANEOS SOBRE CAPITULO 2

EJERCICIOS A

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas, si hay alguna.

1. $(x^2 + 1)(y^3 \quad 1)dx = x^2y^2\,dy$.
2. $(y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$.
3. $(x^2 + 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy = 0$.
4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^2$.
5. $(3 - y)dx + 2x\,dy = 0;\ y(1) = 1$.
6. $\dfrac{dy}{dx} + 2x = 2$.
7. $s^2t\,ds + (t^2 + 4)dt = 0$.
8. $2xyy' + x^2 + y^2 = 0$.
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x2 \quad ye"}{e^x}$
10. $x^2y' + xy = x + 1$.
11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$.
12. $\dfrac{dy}{dx} = x + y$.
13. $y' + xy = x^3$.
14. $(3 - x^2y)y' = xy^2 + 4$.
15. $r^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi = (2r\cos\phi + 10)dr$.
16. $y' = x^2 + 2y$.
17. $y' = \dfrac{2xy - y^4}{3x^2}$.
18. $(x^2 + y^2)dx + 2y\,dy = 0;\ y(0) = 2$.
19. $(x^2 + y^2)dx + (2xy - 3)dy = 0$.
20. $y'(2x + y^2) = y$

21. $u^2v\,du - (u^3 + v^3)dv = 0$.

22. $(\tan y - \tan^2 y \cos x)dx - x \sec^2 y\, dy = 0$.

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y}{y - 2x}$.

24. $y'\operatorname{sen}x = y \cos x + \operatorname{sen}^2 x$.

25. $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.

26. $(2x2 - ye^x)dx - e^x\,dy = 0$.

27. $(x + y)y' = 1$.

28. $(x + 2y)dx + x\,dy = 0$.

29. $\operatorname{sen} y\, dx + (x \cos y - y)dy = 0$.

30. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

31. $\operatorname{sen} x \cos y\, dx + \cos x \operatorname{sen} y\, dy = 0$.

32. $xy' = x^3 + 2y$.

33. $(3xy^2 + 2)dx + 2x^2y\,dy = 0$.

34. $(2y^2 - x)dy + y\,dx = 0$.

35. $y'' = y' + 2x$.

36. $(1 + y)y' = x\sqrt{y}$.

37. $\tan x \operatorname{sen} y\, dx + 3dy = 0$.

38. $x\,dy - y\,dx = x \cos \dfrac{y}{x}\, dx$.

39. $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dfrac{1 - t}{1 - s}}$; $s = 0$ donde $t = 1$.

40. $(2y + 3x)dx + x\,dy = 0$.

41. $x^2y\,dx + (1 + x^3)dy = 0$.

42. $(\operatorname{sen} y \quad x)y' = 2x + y$; $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

43. $\dfrac{dN}{dt} = -\alpha N$; $N = N_0$ en $t = 0$.

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x + y)}{x(x - y)}$

45. $\dfrac{dI}{dt} + I = e^t$.

46. $xy' + y = x^2$; $y(1) = 2$.

47. $x\,dy - y\,dx = x^2y\,dy$.

48. $\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{p}{q} e^{p^2 - q^2}$.

49. $(3y \cos x + 2)y' = y^2 \operatorname{sen} x$; $y(0) = -4$.

50. $(x + x \cos y)dy - (y + \operatorname{sen} y)dx = 0$.

51. $4'' = 3x + 2y$.

52. $y^2\,dx = (2xy + x^2)dy$.

53. $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{r(1 + \ln \phi)}{\phi(1 + \ln r)}$; $\phi = e^2$ donde $r = e$.

54. $\dfrac{dU}{dt} = -a(U - 100t)$; $U(0) = 0$.

55. $(uv - 2v)du + (u - u^2)dv = 0$.

56. $\dfrac{dI}{dt} + 3I = 10 \operatorname{sen} t$; $I(0) = 0$.

57. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{s + t + 1}$.

58. $yy'' + (y')^2 = 0$.

59. $x\sqrt{1 - y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0$.

60. $y' + (\cot x)y = \cos x$.

61. $y' = \left(\dfrac{y + 3}{2x}\right)^2$.

62. $xy' - 3y = x^4e^{-x}$.

63. $y' = \operatorname{sen} x \tan y$.

64. $y' = \dfrac{x}{Y} + \dfrac{y}{x}$.

65. $x\,dy - y\,dx = 2x^2y^2\,dy$.

66. $xy' + y \ln x = y \ln y + y$.

67. $y' = 2 - \frac{y}{x}$.

68. $xy'' + y' = 1$.

69. $\frac{dI}{dt} = \frac{It^2}{t^3 - I^3}$.

70. $(e^y + x + 3)y' = 1$.

71. $\frac{dr}{d\phi} = e^\phi - 3r$; $r = 1$ en $\phi = 0$.

72. $yy'' = (y')^2$.

73. $x^4 y''' + 1 = 0$.

74. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - 3y}$.

75. $y' \cos x = y - \operatorname{sen} 2x$.

76. $e^{2x-y}\,dx + e^{y-2x}\,dy = 0$.

77. $r^3 \frac{dr}{d\phi} = \sqrt{a^8 - r^8}$.

78. $(2x^2 - ye^x)dx - e^x\,dy = 0$.

79. $x\,dy + 2y\,dx - x \cos x\,dx = 0$.

80. $\sqrt{1 + x^3}\,\frac{dy}{dx} = x^2y + x^2$.

81. $(3y^2 + 4xy)dx + (2xy + x^2)dy = 0$.

82. $y' = y(x + y)$.

83. $y' = x(x + y)$.

84. $\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} = 4(1 - r)$; $U = 15$, $\frac{dU}{dr} = 0$ en $r = 1$.

85. $\frac{dy}{dx} = 1 - (x - y)^2$; $y(0) = 1$.

86. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y}}{y}$.

EJERCICIOS B

1. Resuelva $xyy' + y^2 = \operatorname{sen} x$ haciendo $y^2 = u$.

2. Muestre que $\operatorname{sen}^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} y = c$ y $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c_2$ son soluciones generales de

$$\sqrt{1 - y^2}\,dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$$

¿Puede una de estas soluciones ser obtenida de la otra?

3. (a) Resuelva $(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$, dado que $y(0) = 1$. (b) Muestre que $y = (1-x)/(1+x)$ es una solución. Relacione esto con la solución obtenida en (a).

4. Resolver $y = 2/(x + 2y - 3)$ haciendo $x + 2y - 3 = v$.

5. Resuelva $y' = \sqrt{y + \operatorname{sen} x} - \cos x$. *(Sugerencia:* Haga $\sqrt{y + \operatorname{sen} x} = v$.)

6. Resuelva $y' = \tan(x + y)$.

7. Resuelva $y' = e^{x+3y} + 1$.

8. Resuelva $y^{(IV)} = 2y''' + 242$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

9. Muestre que la ecuación $yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0$ puede resolverse por la transformación $xy = u$. Así resuelva $(x^2y^3 + 2xy^2 + y)dx + (x^3y^2 - 2x^2y + x)dy = 0$.

10. Resuelva $(y')^2 + (3y - 2x)y' - 6xy = 0$.

11. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^2}{2y}$; $y(0) = 1$.

12. Resuelva $y' = x + \sqrt{y}$.

EJERCICIOS C

1. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{5x - 6y}{5x + 6y}}$.

2. Muestre que si y_1 y y_2 son dos soluciones diferentes de $y' + P(x)y = Q(x)$ entonces ellas deben estar relacionadas per $y_2 = y_1(1 + ce^{-\int Q\, dx/y_1})$. Por tanto, observando que $y = x$ es una solución de $y' + xy = x^2 + 1$, encuentre la solución general.

3. Muestre que $x^p y^q(\alpha y\,dx + \beta x\,dy) + r^r y^s(\gamma dx + \delta x\, dy) = 0$ donde $p, q, r, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes dadas, tiene un factor integrante de la forma $x^a y^b$, donde a y b son constantes adecuadas.

4. Resuelva $(x^2y + 2y^4)dx + (x^3 + 3xy^3)dy = 0$, usando el método del Ejercicio 3.

5. Muestre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y^2 - x^2 - 1)}{x(y^2 - x^2 + 1)}$ se puede resolver por transformación a coordenadas polares r, ϕ, donde $x = r\cos\phi$, $y = r \operatorname{sen}\phi$. Luego determine su solución.

6. Muestre que, si μ es un factor integrante de la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ tal como $\mu M\,dx + \mu N\,dy = dU(x, y)$, entonces $\mu\psi(U)$, donde ψ es una función arbitraria, es también un factor integrante. Ilustre esto con algunos ejemplos.

7. Muestre que la ecuación diferencial $y' = P(x)F(y) + Q(x)G(y)$ se puede reducir a una ecuación lineal por la transformación

$$u = \frac{F(y)}{G(y)} \quad \text{o} \quad u = \frac{G(y)}{F(y)}$$

siempre que $\dfrac{FG' - GF'}{G}$ ó $\dfrac{FG' - GF}{F}$ sea una constante.

8. Usando los resultados del Ejercicio 7, obtenga la solución general de:
(a) $y' = \sec y + x\tan y$. (b) $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ (Ecuación de Bernoulli).

9. Muestre que si la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ es tal que

$$\frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

entonces un factor integrante está dado por $e^{\int F(u)du}$, donde $u = y/x$.

10. Pruebe que si una ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta y homogénea, entonces su solución es $Mx + Ny = c$. Ilustre usando la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

11. (a) Pruebe que si μ y υ son dos factores integrantes diferentes de la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ entonces su solución general es $\mu = c\upsilon$. (b) Ilustre parte (a) encontrando dos factores integrantes de $x\,dy - y\,dx = 0$.

12. La ***ecuación de Riccati*** está dada por $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$.
(a) Muestre que si una solución de esta ecuación, digamos $y_1(x)$, es conocida, entonces la solución general puede encontrarse usando la transformación $y = y_1 + 1/u$ donde u es una nueva variable dependiente.

(b) Muestre que si se conocen dos soluciones, digamos $y_1(x)$ y $y_2(x)$, la solución general es

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = ce^{\int P(y_1 - y_2)dx}$$

(c) Muestre que sí se conocen tres soluciones digamos $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$, entonces la solución general es

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_2)(y_1 - y_3)} = c$$

13. Resuelva la ecuación $y' = xy^2 - 2y + 4 - 4x$ notando que $y = 2$ es una solución particular.

14. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 + x^2$.

15. Resuelva la ecuación $y' = \dfrac{y^2}{x - 1} - \dfrac{xy}{x - 1} + 1$ notando que $y = 1$ y $y = x$ son soluciones.

tres

aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden y simples de orden superior

En este capítulo discutiremos aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden y simples de orden superior a problemas de la mecánica, economía, química, doblamiento de vigas, y otros. Las secciones están organizadas de modo que los estudiantes puedan hacer énfasis en aquellos tópicos que se adaptan particularmente a sus intereses o necesidades.

1 Aplicaciones a la mecánica

1.1 INTRODUCCION

El tema de la física trata de la investigación de las leyes que gobiernan el comportamiento del universo físico. Por universo físico entendemos la totalidad de objetos alrededor nuestro, no sólo las cosas que observamos, sino las que no observamos, tales como los átomos y moléculas. El estudio del movimiento de los objetos en nuestro universo es una rama de la mecánica llamada ***dinámica.*** Las leyes del movimiento de Newton, conocidas por los estudiantes en física elemental, forman la base fundamental para su estudio. Resulta, sin embargo, que para los objetos que se mueven muy rápido (por ejemplo, cerca a la velocidad de la luz, 186.000 millas por segundo) no podemos usar las leyes de Newton. En vez debemos usar una versión revisada de estas leyes, desarrolladas por Einstein y conocidas como ***mecánica relativista,*** o mecánica de la relatividad. Para objetos de dimensiones atómicas, las leyes de Newton tampoco son válidas. De hecho, para obtener descripciones precisas del movimiento de objetos de dimensiones atómicas, necesitamos establecer un conjunto de leyes estudiadas en un tema avanzado conocido como ***mecánica cuántica.*** Mecánica cuántica y relativista son muy complicadas para ser investigadas en este libro, puesto que el estudiante necesitaría conocimientos previos más extensos en matemáticas y física para empezar a estudiar estos temas.

Afortunadamente, para estudiar el movimiento de los objetos que encontramos en nuestra vida diaria, objetos que ni alcanzan velocidades cercanas a la de la luz ni objetos con dimensiones atómicas, no necesitamos mecánica cuántica o relativista. Las leyes de Newton son lo suficientemente precisas en estos casos y por tanto emprenderemos una discusión de estas leyes y sus aplicaciones.

1.2 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

Las tres leyes del movimiento primero desarrolladas por Newton son:

1. Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo, mientras que un cuerpo en movimiento tiende a persistir en movimiento en una línea recta con velocidad constante a menos que fuerzas externas actúen sobre él.

2. ***La tasa de cambio en momentum de un cuerpo en el tiempo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y tiene la misma dirección a la fuerza.***

3. A cada acción existe una reacción igual y opuesta.

La segunda ley nos proporciona una relación importante conocida a los estudiantes de física elemental y nos referiremos a ella brevemente como la ***ley de Newton.***

El momentum de un objeto se define como su masa m multiplicada por su velocidad v. La tasa de cambio en momentum en el tiempo es así d/dt (mu). Si denotamos por F la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo la segunda ley dice que

$$\frac{d}{dt}(mv) \propto F \tag{1}$$

donde el símbolo $\propto$ denota proporcionalidad. Introduciendo la constante de proporcionalidad k, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(mv) = kF$$

Si m es una constante, $m\frac{dv}{dt} = kF$ o $ma = kF$

donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Así vemos que

$$F = \frac{ma}{k} \tag{2}$$

El valor de k depende de las unidades que deseemos usar. Hasta el momento se usan dos sistemas principales.

(a) ***El sistema CGS o sistema Centímetro, Gramo, Segando.*** En este sistema la longitud se mide en centímetros (cm), la masa en gramos (g), y el tiempo en segundos (seg). El valor más simple para k es $k = 1$, de modo que la ley (2) es

$$F = ma \tag{3}$$

Si una cierta fuerza produce una aceleración de un centímetro por segundo por segundo (1 cm/seg^2) en una masa de 1 g, entonces de (3)

$$F = 1\text{ g} \cdot 1\text{ cm/seg}^2 = 1\text{ g cm/seg}^2$$

Llamamos tal fuerza una ***dina.*** El sistema cgs también se llama ***sistema métrico***.

(b) ***El sistema PLS, o sistema Pie, Libra, Segundo.*** En este sistema también podemos usar $k = 1$, de modo que la ley es $F = ma$. Si una cierta fuerza produce una aceleración de un pie por segundo por segundo (1 pie/seg^2) en una masa de una libra (Ib), llamamos esta fuerza un *poundal*. ***Así,*** de $F = ma$ tenemos 1 poundal = 1 lb pies/seg^2.

Otra manera de expresar la ley de Newton es usar el peso en vez de la masa del objeto. Mientras que la masa de un objeto es la misma en toda parte de la tierra (o realmente en cualquier parte del universo)* el peso cambia de lugar a lugar.† Se observará que para que un cuerpo actúe sólo por su peso W, la aceleración correspondiente es aquella debida a la gravedad g. La fuerza es W, y la ley de Newton es

$$W = mg \tag{4}$$

Dividiendo la ecuación (3) por la ecuación (4), tenemos

*Realmente, estamos hablando aquí sobre "masa en reposo", porque en la teoría de la relatividad cuando un objeto está en movimiento su masa cambia.

†En la superficie de la Tierra este cambio no excede el 2 por ciento.

$$\frac{F}{W}=\frac{a}{g} \quad \text{o} \quad F=\frac{Wa}{g} \tag{5}$$

Podemos usar la ecuación (5) ya sea con unidades cgs o pls. En tal caso es claro que F y W tienen las mismas unidades si a y g las tienen.

Con unidades CGS: Si W está en gramos peso, a y g en cm/seg², entonces F está en gramos peso. Si W está en dinas, a y g en cm/seg², entonces F está en dinas. En la superficie de la Tierra g = 980 cm/seg², aproximadamente.

Con unidades PLS: Si W está en libras peso, a y g en pie/seg², entonces F está en libras peso. En la superficie de la Tierra g= 32 pies/seg², aproximadamente.

En ciertos campos es costumbre usar el sistema cgs junto con la ley $F = ma$, y usar el sistema pls junto con la ley $F = Wa/g$. Algunas veces se hace uso de masa en términos de *slugs*.*

Nota: Será costumbre en este libro usar

1. $F = ma$, donde F está en dinas, m en gramos, a en cm/seg².
2. $F = Wa/g$, donde F y W están en libras, a y g en pie/seg².†

Cuando se desean otras unidades, se pueden hacer los cambios apropiados. Si en un problema las unidades no se especifican, cualquier sistema se puede usar siempre y cuando se mantenga la consistencia.‡

En la simbología del cálculo podemos escribir las leyes de Newton en formas diferentes al notar que la aceleración puede expresarse como la primera derivada de la velocidad v (esto es, dv/dt) ó como la segunda derivada de un desplazamiento s (esto es, d^2s/dt^2). Así

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{(cgs)}$$

$$F = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{W}{g}\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{(pls)}$$

Consideremos ahora las formulaciones matemáticas de varios problemas en mecánica que involucran los conceptos anteriores, y la solución e interpretación de tales problemas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Una masa de m gramos cae verticalmente hacia abajo, bajo la influencia de la gravedad partiendo del reposo. Asumiendo despreciable la resistencia del aire establezca la ecuación diferencial y las condiciones asociadas que describen el movimiento y resuélvala.

*El número de libras peso dividido por g (lo cual es aproximadamente 32) se conoce como el número de *slugs*. Así, la masa de un peso de 64 lb es 2 slugs.

†Cuando se use la abreviación lb nos referimos a libras peso.

‡Para algunos propósitos se puede usar una variación del sistema cgs conocido como sistema metro, *kilogramo, segundo o sistema mks*. Aquí la longitud está en metros (100 cm), la masa en kilogramos (1000 g) y el tiempo en segundos. La fuerza requerida para mover una masa de 1 kilogramo a una aceleración de 1 metro/seg² se llama un *newton*. La abreviación de metro, kilogramo, y newton son m, kg, y n respectivamente.

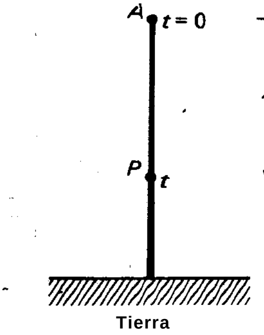


Figura 3.1

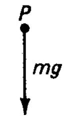


Diagrama de fuerza

Figura 3.2

Formulación mutemática. En la formulación matemática de problemas de física (o para tal propósito, cualquier problema) es útil dibujar diagramas cuando sea posible. Estos ayudan a fijar ideas y consecuentemente ayudan a traducir las ideas de física en ecuaciones matemáticas. Sea A (Figura 3.1) la posición de la masa m en el tiempo $t = 0$, y sea P la posición de m en cualquier tiempo posterior t. En cualquier problema de física que involucre cantidades vectoriales tales como fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleración, las cuales necesariamente requieren un conocimiento de dirección, es conveniente establecer un sistema de coordenadas, junto con la asignación de direcciones positivas y negativas. En el presente problema sea A el origen de nuestro sistema de coordenadas y escojamos el eje x como la vertical con "abajo" como la dirección positiva (y por consiguiente con "arriba" como la dirección negativa). La velocidad instantánea en P es $v = dx/dt$. La aceleración instantánea en P es $a = dv/dt$ ó $a = d^2x/dt^2$. La fuerza neta actúa verticalmente hacia abajo (considerada positiva como se muestra en el diagrama de fuerzas de la Figura 3.2). Su magnitud es mg. Por la ley de Newton tenemos

$$m\frac{dv}{dt} = mg \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = g$$

Puesto que la masa cae desde el reposo vemos que $v = 0$ cuando $t = 0$, ó en otras palabras $v(0) = 0$. Nuestra formulación matemática es el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = g, \qquad v(0) = 0 \tag{6}$$

Aquí tenemos una ecuación de primer orden y su condición requerida.

Otra manera de formular el problema es escribir

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

En tal caso tenemos una ecuación de segundo orden en las variables x y t, y necesitamos dos condiciones para determinar x. Una de ellas es $v = 0$ ó $dx/dt = 0$ en $t = 0$. La segunda puede obtenerse al notar que $x = 0$ en $t = 0$ (puesto que escogimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en A). La formulación matemática es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g, \qquad x = 0 \quad y \quad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ en } t = 0 \tag{7}$$

El procedimiento será típico en las formulaciones matemáticas de problemas. Cuando establezcamos ecuaciones diferenciales. para describir algún fenómeno o ley, siempre las acompañaremos de suficientes condiciones necesarias para la determinación de las constantes arbitrarias en la solución general.

Solución Empezando con $dv/dt = g$, obtenemos por integración $v = gt + c_1$. Puestoque $v = 0$ cuando $t = 0$, $c_1 = 0$, ó $v = gt$, esto es, $\frac{dx}{dt} = gt$. Otra integración produce $x = \frac{1}{2}gt^2 + c_2$. Puesto que $x = 0$ en $t = 0$, $c_2 = 0$. Por tanto $x = \frac{1}{2}gt^2$. Podríamos haber llegado al mismo resultado al empezar con (7).

Como una aplicación, supóngase que deseamos conocer dónde está el objeto después de 2 seg. Entonces, por el sistema cgs $x = \frac{1}{2}(980\text{ cm/seg}^2)(2\text{ seg})^2 = 1960$ cm. Por el sistema pls, $x = \frac{1}{2}(32\text{ pies/seg}^2)(2\text{ seg})^2 = 64$ pies.

Para encontrar la velocidad después de 2 seg escribimos (en el sistema pls)

$$\frac{dx}{dt} = gt = 32\text{ pies/seg}^2 \times 2\text{ seg} = +64\text{ pies/seg}$$

El signo más indica que el objeto se está moviendo en la dirección positiva, esto es, hacia abajo. Se debería notar que si hubiéramos tomado la dirección positiva hacia arriba la ecuación diferencial hubiera sido $m(dv/dt) = -mg$, esto es,

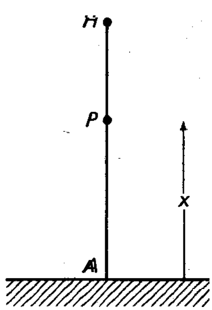
$$\frac{dv}{dt} = -g \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Esto conduciría, por supuesto, a resultados equivalentes a los obtenidos.

[redacted]

Una bola se lanza hacia arriba con una velocidad de 128 pies/seg. ¿ Cuál es su velocidad después de 2,4 y 6 seg? ¿Cuándo regresará a su posición de partida? ¿Cuál es la máxima altura que alcanza antes de regresar?

Formulación matemática. Aquí tomaremos el eje x como la vertical, con su origen en la tierra en A de modo que $x = 0$ cuando $t = 0$ (Figura 3.3). Consideremos "arriba" como positivo. La fuerza que actúa sobre la bola (Fi-



Tierra

Figura 3.3

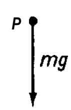


Diagrama de fuerza

Figura 3.4

gura 3.4) es su peso y debemos considerar por tanto que es $-mg$ (el signo menos significa abajo). La ecuación diferencial para el movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Se necesitan dos condiciones para determinar x. Una se obtiene del hecho de que $x = 0$ en $t = 0$. La otra se obtiene del hecho de que la velocidad inicial es 128 pies/seg. Esta velocidad está en la dirección hacia arriba y por tanto es positiva. Así

$$v = \frac{dx}{dt} = +128 \text{ en } t = 0$$

La formulación matemática completa es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \qquad x = 0 \quad y \quad \frac{dx}{dt} = 128 \text{ en } t = 0 \tag{8}$$

Solución La integración de la ecuación diferencial en (8) produce $\frac{dx}{dt} = -gt + c_1$ y puesto que $dx/dt = 128$ donde $t = 0$, $c_1 = 128$, de modo que $\frac{dx}{dt} = -gt + 128$.

Otra integración produce $x = \frac{1}{2}gt^2 + 128t + c_2$ y puesto que $x = 0$ donde $t = 0$, $c_2 = 0$. De donde,

$$x = -\tfrac{1}{2}gt^2 + 128t \quad o \quad x = 128t - 16t^2.$$

Velocidad después de 2, 4, 6seg. Tenemos para la velocidad en tiempo t

$$v = \frac{dx}{dt} = 128 - 32t$$

Haciendo $t = 2$, encontramos $v = 64$, lo que significa que la bola se está elevando a la tasa de 64 pies/seg. Haciendo $t = 4$, encontramos $v = 0$, lo que significa que la bola se ha detenido. Haciendo $t = 6$, encontramos $v = -64$, lo que significa que la bola se ha devuelto y baja a la tasa de 64 pies/seg.

Tiempo para el retorno. La bola está en la posición A, el punto de partida, cuando x =O. Esto ocurre cuando $-16t^2 + 128t = 0$ ó $-16t(t-8) = 0$, esto es, $t = 0$ ó $t = 8$. El valor $t = 0$ es trivial, puesto que ya sabemos que $x = 0$ en $t = 0$. El otro valor $t = 8$ indica que la bola regresa después de 8seg.

Máxima altura de elevación. El valor máximo de x puede hallarse haciendo $dx/dt = 0$, lo cual equivale a hallarlo cuando $v = 0$. Tenemos

$$v = \frac{dx}{dt} = 128 - 32t = 0 \qquad \text{donde } t = 4$$

Puesto que d^2x/dt^2 es negativa, x es realmente un máximo para $t = 4$. El valor de x para $t = 4$ es 256. De donde, la altura máxima que alcanza la bpla es 256 pies.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Un paracaidista (y por supuesto su paracaídas) cae desde el reposo. El peso combinado del paracaidista y su paracaídas es W. El paracaídas tiene una fuerza actuando sobre él (debido a la resistencia del aire) la cual es proporcional a la velocidad en cualquier instante durante la caída. Asumiendo que el paracaidista cae verticalmente hacia abajo y que el paracaídas ya está abierto cuando el salto ocurre, describa el movimiento resultante.

Formulación matemática. Dibujamos, como de costumbre, un diagrama físico y de fuerzas (Figuras 3.5 y 3.6). Asuma A como el origen y AB la dirección del eje x positivo. Las fuerzas actuantes son: (a) el peso combinado W hacia abajo; (b) la fuerza de resistencia R del aire actuando hacia arriba. La fuerza neta en la dirección positiva (hacia abajo) es W-R. Puesto que la resistencia es proporcional a la velocidad tenemos

$$R \quad \propto |v| \text{ o } \quad R = \beta|v|$$

donde β es la constante de proporcionalidad. Puesto que v es siempre positiva, no necesitamos el signo de valor absoluto, y podemos escribir simplemente $R = \beta v$. De donde la fuerza neta es *W-pu,* y obtenemos por la ley de Newton

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \beta v$$

Puesto que el paracaidista empieza en el reposo, v = 0 en $t = 0$. Así la formulación matemática completa está dada por el problema de valor inicial

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = W - \beta v, \qquad v = 0 \text{ en } \quad t = 0$$

Solución La ecuación diferencial tiene sus variables separables. Así,

$$\int \frac{W\,dv}{W - \beta v} = \int g\,dt \quad \text{ó} \quad -\frac{W}{\beta} \ln (W - \beta v) = gt + c_1$$

Puesto que $v = 0$ en $t = 0$, $c_1 = -\frac{W \ln W}{\beta}$ y así,

$$\frac{W}{\beta} \ln (W - \beta v) = gt - \frac{W}{\beta} \ln W, \qquad \ln\left(\frac{W}{W - \beta v}\right) = \frac{\beta g t}{W}$$

De donde
$$v = \frac{W}{\beta}(1 - e^{-\beta g t/W})$$

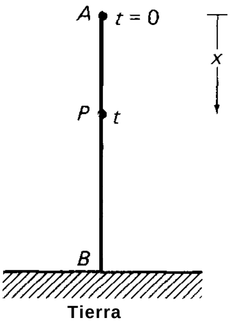


Figura 3.5

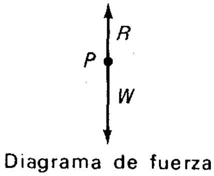


Figura 3.6

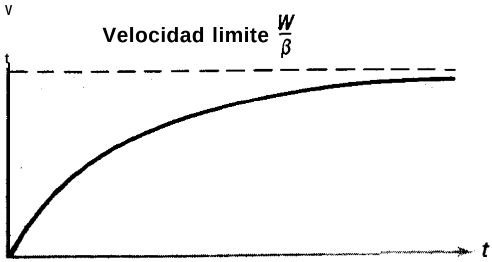


Figura 3.7

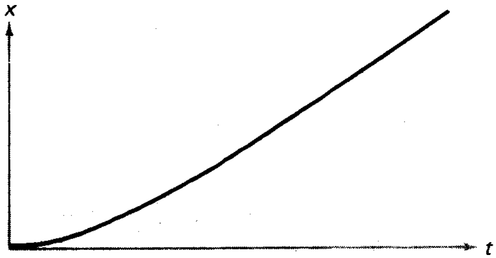


Figura 3.8

Se notará que a medida que $t \to \infty$, v tiende a W/β, una velocidad constante límite. Esto registra lo que observamos en los paracaídas que viajan a velocidades muy aproximadamente uniformes después de transcurrido cierto tiempo. También podemos determinar la distancia recorrida por el paracaidista como una función del tiempo.

De
$$\frac{dx}{dt} = \frac{W}{\beta}(1 - e^{-\beta gt/W})$$

tenemos
$$x = \frac{W}{\beta}\left(t + \frac{W}{\beta g}e^{-\beta gt/W}\right) + c_2$$

Usando el hecho de que $x = 0$ en $t = 0$, encontramos $c_2 = -W^2/\beta^2 g$. De donde,
$$x = \frac{W}{\beta}\left(t + \frac{W}{\beta g}e^{-\beta gt/W} - \frac{W}{\beta g}\right)$$

Los gráficos de v y x como funciones de t se muestran en las Figuras 3.7 y **3.8.**

EJERCICIOS A

1. Una masa de 25 g cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad. (a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones para el movimiento. (b) Encuentre la distancia viajada y la velocidad conseguida 3 seg después de empezar su movimiento. (c) ¿Cuánta distancia recorre la masa entre el 30. y 40. seg? ¿entre el 4o. y 50. seg?

2. Una masa de 200 g se lanza hacia arriba con una velocidad de 2450 cm/seg. (a) Encuentre las distancias desde el punto de partida y las velocidades conseguidas 2 y 4 seg después de empezar el movimiento. (b) Encuentre el punto más alto alcanzado y el tiempo requerido. (c) ¿Cuáles son las distancias totales recorridas después de 2 seg? ¿después de 4 seg?

3. Un peso de 6 lb se deja caer desde una cima de $\frac{1}{4}$ millas de alto. Asumiendo ninguna resistencia del aire, ¿en qué tiempo y con qué velocidad llega a la Tierra?

4. Una pequeña gota de aceite, de 0,2 g de masa, cae en el aire desde el'reposo. Para una velocidad de 40 cm/seg, la fuerza debida a la resistencia del aire es 160 dinas. Asumiendo que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad: (a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad límite.

5. La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea, y es tal que a 20 pies/seg la resistencia del agua es 40 lb. Si el bote pesa 320 lb y el único pasajero pesa 160 lb, y si el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 lb en la dirección del movimiento: (a) Encuentre la máxima velocidad a la cual el bote puede viajar. (b) Encuentre la distancia recorrida y la velocidad a cualquier tiempo, asumiendo que el bote parte del reposo.

6. Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 40 pies/seg. Si la resistencia del aire varía directamente proporcional a la velocidad instantánea y la resistencia del aire es de 80 lb cuando la velocidad es 20 pies/seg: (a) Encuentre la velocidad límite. (b) Determine la posición y la velocidad a cualquier tiempo.

7. Un peso de 192 lb tiene la velocidad límite de 16 pies/seg cuando cae en el aire. el cual ofrece una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad instantánea del peso. Si el peso parte del reposo: (a) Encuentre la velocidad del peso después de 1 seg. (b) ¿A qué distancia se encuentra antes de que la velocidad sea de 15 pies/seg?

8. Resuelva el problema anterior si la fuerza de resistencia del aire varía proporcionalmente al cuadrado de la velocidad instantánea.

9. Una partícula se mueve a lo largo del eje x estimulada solamente por una fuerza opuesta proporcional a su velocidad instantánea. La partícula empieza en el origen con una velocidad de 10 pies/seg, la cual se reduce a 5 pies/seg después de moverse 2,5 pies. Encuentre su velocidad cuando esté a 4 pies del origen.

EJERCICIOS B

1. Muestre que una bola lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 toma para regresar el doble del tiempo requerido para alcanzar su punto más alto. Encuentre la velocidad al regreso. La resistencia del aire se asume despreciable.

2. Un cuerpo se mueve en una línea recta con aceleración constante a. Si v_0 es la velocidad inicial, v la velocidad, y s la distancia viajada después de tiempo t, muestre que:

(a) $v = v_0 + at$. (b) $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$. (c) $v^2 = v_0^2 + 2as$.

3. Una masa m se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0. La resistencia del aire es proporcional a su velocidad instantánea, siendo k la constante de proporcionalidad. Muestre que la máxima altura conseguida es

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

4. Un paracaidista y su paracaídas pesan Wlb. Cuando el paracaídas se abre él está viajando verticalmente hacia abajo a v_0 pies/seg. Si la fuerza de resistencia del aire varía proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y si la resistencia del aire es F lb, donde la velocidad es V pies/seg: (a) Escriba las ecuaciones diferenciales para la velocidad y el desplazamiento como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad t seg después de abrirse el paracaídas y la velocidad límite. ¿Qué simplificaciones resultan si $v_0 = O$? (c) Encuentre la velocidad como una función de la distancia recorrida.

5. Un objeto con peso de 1.000 Ib se hunde en el agua empezando desde el reposo. Dos fuerzas actúan sobre él, una fuerza de flotación de 200 lb, y una fuerza de resistencia del agua la cual es numéricamente igual a 100 v Ib, donde v está en pies seg. Encuentre la distancia recorrida después de 5 seg y su velocidad límite.

6. Un objeto de 10 lb se deja caer verticalmente hacia abajo desde una cima muy alta. La ley de resistencia en el sistema pls está dada por 0,001 v^2, donde v es la velocidad instantánea. Determine (a) la velocidad como una función de la distancia, (b) la velocidad como una función del tiempo, (c) la velocidad del objeto después de haber caído 500 pies, (d) la velocidad límite, (e) la distancia recorrida después de 10 seg.

7. Una partícula se mueve en una línea recta hacia un punto fijo 0 en la línea con una velocidad instantánea proporcional a la n-ésima potencia de su distancia instantánea de 0. (a) Muestre que si $n \geqq 1$ la partícula nunca alcanzará 0. (b) Discuta los casos de $n < 1$.

8. Cuando una bola se lanza hacia arriba, ésta alcanza una altura particular después de un tiempo T_1 cuando asciende y en el tiempo T_2 cuando desciende. (a) Asumiendo que la resistencia del aire es despreciable, muestre que la altura está dada por $\frac{1}{2}gT_1T_2$. (b) ¿Cómo se puede usar este resultado para medir la altura de un árbol sin subirse a él?

9. Muestre que la bola en el Ejercicio 8 fue lanzada hacia arriba con una velocidad de $\frac{1}{2}g(T_1 + T_2)$.

10. ¿Cuánto tiempo tomará para solo deslizar una cadena de longitud L sobre una mesa sin fricción si inicialmente una parte de ella de longitud a cuelga sobre el lado?

11. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza dada por F(x). Si v es la velocidad instantánea, muestre que

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$$

donde E es una constante y
$$V(x) = \int_x^a F(u)du$$

asumiendo que a es tal que $V(a) = 0$. El resultado se conoce como el principio de ***la conservación de energía,*** donde $\frac{1}{2}mv^2$ se llama la ***energía cinética,*** $V(x)$ la ***energía potencial*** y E la ***energía total.***

EJERCICIOS C

1. Un peso de 100 lb se desliza hacia abajo desde el reposo en un plano inclinado (Figura 3.9) el cual forma un ángulo de 30” con la horizontal. Asumiendo la ausencia de fricción: (a) Establezca la ecuación diferencial y’condiciones que describan el movimiento. (b) ¿Qué distancia recorrerá el peso 5 seg después de empezar y cuál será su velocidad y aceleración en ese instante? ***(Sugerencia:*** Descomponga la fuerza debida al peso en dos componentes, una paralela y otra perpendicular al plano. La componente P paralela al plano es la fuerza neta que produce el movimiento.)

2. Muestre que un peso W, dada una velocidad incial v_0, se desliza una distancia s hacia abajo por un plano inclinado sin fricción de inclinación α en el tiempo

$$\frac{\sqrt{v_0^2 + 2gs \operatorname{sen} \alpha} - v_0}{g \operatorname{sen} \alpha}$$

3. Un objeto de masa m se lanza hacia arriba por un plano con inclinación α. Asumiendo que no hay fricción, muestre que la máxima distancia alcanzada es $v_0/(2\,g \operatorname{sen} \alpha)$.

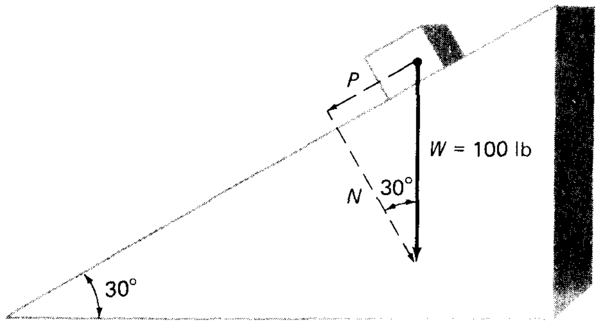


Figura 3 9

4. Si se tiene en cuenta la resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea (constante de proporcionalidad k), muestre que el objeto en el Ejercicio 3, alcanza una distancia máxima hacia arriba en el plano inclinado dada por

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \operatorname{sen} \alpha \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg \operatorname{sen} \alpha}\right).$$

Verifique que esta distancia tiende a la del Ejercicio 3 a medida que k-0.

5. Un peso de 100 lb parte del reposo hacia abajo por un plano con 30” de inciinación. Si el coeficiente de fricción entre el peso y el plano es 0,2 ¿qué distancia bajará el peso después de 5 seg? Encuentre su velocidad y aceleración en ese instante (asuma que el peso sí arranca). (*Sugerencia:* Refiriéndose a la Figura 3.9, la fuerza de fricción que actúa está dada por la componente normal N multiplicada por el coeficiente de fricción.)

6. Un peso W se le da una velocidad inicial v_0 hacia abajo en un plano inclinado de ángulo α. Si el coeficiente de fricción entre el peso y el plano es μ, muestre que después de un tiempo T el peso viaja a una distancia

$$v_0 T + \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen}\alpha - \mu g \cos \alpha)T^2 \text{ si } \tan \alpha > \mu$$

7. De acuerdo a la teoría especial de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula varía con su velocidad v de acuerdo a la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en el reposo y c es la velocidad de la luz (186.000 millas/seg). La ecuación diferencial del movimiento es

$$F = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

Si una partícula parte del reposo en $t = 0$ y se mueve en una línea recta estimulada sólo por una fuerza constante F, ¿qué distancia cubrirá y cuál será su velocidad en tiempo t? Muestre que a medida que transcurre el tiempo, la velocidad de la partícula se acerca a la velocidad de la luz.

8. Un objeto con una masa en el reposo m_0 de 10.000 g se mueve en el eje x bajo una fuerza constante de 50.000 dinas. Si empieza del reposo en x = 0 en tiempo $t = 0$, determine dónde estará en cualquier tiempo asumiendo: (a) La masa del objeto es constante e igual a m,,. (b) La masa varía de acuerdo a ley de la relatividad especial.

9. Objetos que parten del reposo caen sin fricción a lo largo de cuerdas de un círculo vertical terminan todos en el punto más bajo. Muestre que ellos alcanzan el punto en el mismo tiempo.

10. ¿El resultado del Ejercicio 9 es cierto si el círculo está inclinado a un ángulo con la vertical? Explique.
11. ¿Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba y si la resistencia del aire está presente, tomará para regresar al punto de partida un tiempo igual al doble del requerido para alcanzar su punto más alto? Explique (vea Ejercicio 1B).
12. ¿En el Ejercicio 11 la velocidad de retorno del objeto será la misma a la cual es lanzado? Explique.
13. Un satélite gira en una órbita circular actuado sólo por una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. (a) Si la velocidad es v_0 en tiempo $t = 0$ y v_1 en el tiempo $t = T_1$ muestre que la velocidad en cualquier tiempo es

$$v = \frac{v_0 v_1 T_1}{v_1 T_1 + (v_0 - v_1)t}$$

(b) Muestre que el número de revoluciones hechas entre los tiempos $t = 0$ y $t = T$, es

$$\frac{v_0 v_1 T_1}{\pi(v_0 - v_1)} \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$$

(c) Muestre que aunque la velocidad se mantiene decreciendo el satélite gira indefinidamente.
(d) ¿Piensa usted que el problema representa una situación física posible? Explique.
14. Trabaje el Ejercicio 13 si la fuerza de resistencia es proporcional a la n-ésima potencia de la velocidad instantánea y examine el caso especial donde $n = 3$.
15. Trabaje el Ejercicio 10B si la mesa está inclinada un ángulo α con la horizontal y el segmento de longitud a cuelga sobre el lado más alto. ¿Hay alguna restricción en α? Explique.

2 Aplicaciones a los circuitos eléctricos

2.1 INTRODUCCION

Así como la mecánica tiene como base fundamental las leyes de Newton, el tema de la electricidad también tiene una ley que describe el comportamiento de los circuitos eléctricos conocida como la ley de *Kirchhoff,* la cual se describirá y usará en esta sección. Realmente, la teoría de la electricidad está gobernada por un cierto conjunto de ecuaciones conocidas en la teoría electromagnética como las ecuaciones de Maxwell. Así como no podemos entrar en una discusión de la mecánica relativista o cuántica debido a la insuficiencia de conocimientos previos de los estudiantes tampoco podemos entrar en la discusión de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, así como las leyes de Newton son suficientes para el movimiento de los “objetos de diario”, la ley de Kirchhoff es ampliamente adecuada para estudiar las propiedades simples de los circuitos eléctricos. Para un completo estudio de los circuitos eléctricos el estudiante debe, por supuesto, hacer prácticas de laboratorio y observar demostraciones en la clase. En un libro de matemáticas podemos presentar sólo una breve discusión.

El circuito eléctrico más simple es un circuito en serie en el cual tenemos una fem *(fuerza electromotriz),* la cual actúa como una fuente de energía tal como una batería o generador, y una *resistencia,* la cual usa energía, tal como una bombilla eléctrica, tostador, u otro electrodoméstico.

En física elemental encontramos que la fem está relacionada con el flujo de corriente en el circuito. En forma simple, la ley dice que la corriente instantánea I (en un circuito que contiene sólo una fem E y una resistencia) es directamente proporcional a la fem. En símbolos,

$$I \propto E \quad o \quad E \propto I \tag{1}$$

De donde,

$$E = IR$$

donde R es una constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de resistencia 0, simplemente, resistencia. Las unidades, generalmente conocidas como "unidades prácticas" son tales que E está en *voltios*, I está en *amperios* y R en *ohmios*. La ecuación (1) es familiar al estudiante de física elemental bajo el nombre de la ley de *Ohm*.

Circuitos más complicados, pero para muchos casos más prácticos, son circuitos que contienen otros elementos distintos a resistencias. Dos elementos importantes son *inductores y condensadores*. Un inductor se opone a cambios en corriente. Tiene un efecto de inercia en electricidad de la misma manera que una masa tiene un efecto de inercia en mecánica. De hecho la analogía es bastante, y se podría decir mucho acerca de esto. Un condensador es un elemento que almacena energía.

En física hablamos de una caída de voltaje a través de un elemento. En la práctica podemos determinar esta caída de voltaje, o como se llama comúnmente, *caída de potencial o diferencia de potencial,* por medio de un instrumento llamado un voltímetro. Experimentalmente las siguientes leyes se cumplen.

1. *La caída de voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que pasa a través de la resistencia.*

Si E_R es la caída de voltaje a través de una resistencia e I es la corriente, entonces

$$E_R \propto I \quad o \quad E_R = RI$$

donde R es la constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de resistencia 0 simplemente resistencia.

2. *La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la tasa de tiempo instantánea de cambio de la corriente.*

Si E_L es la caída de voltaje a través del inductor, entonces

$$E_L \propto \frac{dI}{dt} \quad o \quad E_L = L\frac{dI}{dt}$$

donde L es la constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de inductancia o simplemente la inductancia.

3. *La caída de voltaje a través de un condensador es proporcional a la carga eléctrica instantánea en el condensador.*

Si E_C es la caída de voltaje a través del condensador y Q la carga instantánea, entonces

$$E_C \propto Q \quad o \quad E_C = \frac{Q}{C}$$

donde hemos tomado $1/C$ como la constante de proporcionalidad, C se conoce como el coeficiente de capacitancia o simplemente capacitancia.

2.2 UNIDADES

En electricidad, como en mecánica, existe más de un sistema de unidades. En este libro consideramos y usamos solamente uno de tales sistemas. La Tabla 3.1 resume las cantidades eléctricas importantes con sus símbolos y unidades. Como en mecánica, el tiempo está en segundos.

Tabla 3.1

Cantidad	Símbolo	Unidad
Voltaje, fem, o potencial	E ó v	Voltio
Resistencia	R	Ohmio
Inductancia	L	Henrio
Capacitancia	C	Faradio
Corriente	I	Amperio
Carga	Q	Culombio

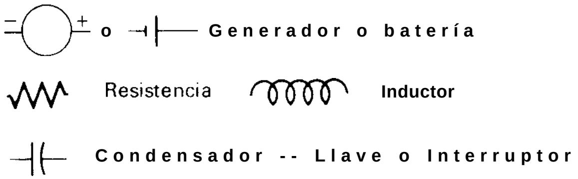
La unidad de corriente, el amperio (abreviado con frecuencia *amp), co*rresponde a una carga de un culombio que pasa por un punto dado del circuito por segundo.

2.3 LA LEY DE KIRCHHOFF

El siguiente es un enunciado de la ley de Kirchhoff:

> *La suma algebraica de todas las caídas de voltaje alrededor de un circuito eléctrico* es *cero.* [Otra manera de enunciar esto es decir que el voltaje suministrado (fem) es igual a la suma de las caídas de voltaje.]

Se acostumbra indicar los diferentes elementos de un circuito como se ilustra:



Como un ejemplo, considere un circuito eléctrico consistente de una fuente de voltaje E (batería o generador), una resistencia R, un inductor L conectados en serie como se muestra en la Figura 3.10.* Adoptamos la siguiente

> **Convención.** La corriente fluye del lado positivo (+) de la batería o generador a través del circuito hacia el lado negativo (—), como se muestra en la Figura 3.10.

*Algunas veces, por brevedad, hablaremos de una batería E, resistencia R, condensador C, etc., en vez de una batería con una fem de E voltios, una resistencia de R ohmios, un condensador con una capacitancia de C faradios, etc.

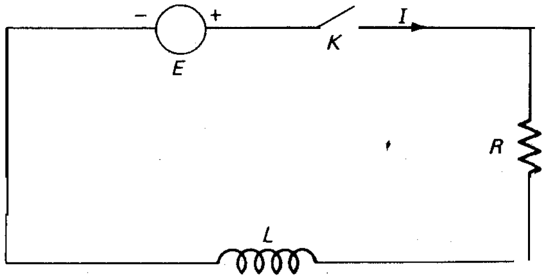


Figura 3.10

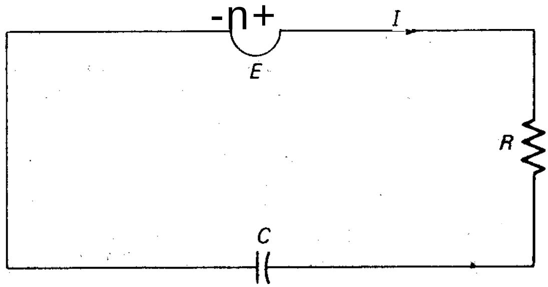


Figura 3. 11

Puesto que, por la ley de Kirchhoff, la fem suministrada (E) es igual a la caída de voltaje a través del inductor $(L\, dI/dt)$ más la caída de voltaje a través de la resistencia (RI), tenemos como la ecuación diferencial requerida para el circuito

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

Como otro ejemplo, suponga que nos dan un circuito eléctrico consistente de una batería o generador de E voltios en serie con una resistencia de R ohmios y un condensador de C faradios como en la Figura 3.11. Aquí la caída de voltaje a través de la resistencia es RI y la caída de voltaje a través del condensador es Q/C, de modo que por la ley de Kirchhoff

$$RI + \frac{Q}{C} = E \tag{2}$$

tal como aparece esto no es una ecuación diferencial. Sin embargo al notar que la corriente es la tasa de tiempo de cambio en la carga, esto es, Z= dQ/dt, (2) se convierte en

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

la cual es una ecuación diferencial para la carga instantánea. Acompañando a las ecuaciones diferenciales obtenidas están las condiciones que se derivan, por supuesto, del problema especifico considerado.

[redacted]

Un generador con una fem de 100 voltios se conecta en serie con una resistencia de 10 ohmios y un inductor de 2 henrios. Si el interruptor K se cierra en tiempo $t = 0$, establezca una ecuación diferencial para la corriente y determine la corriente en tiempo t.

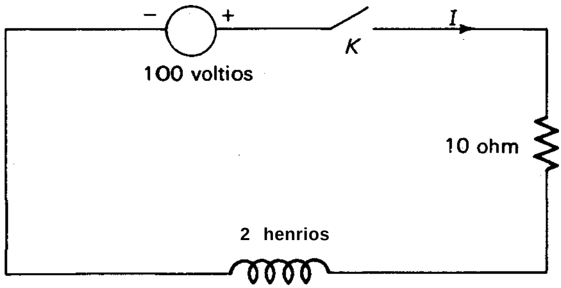


Figura 3.12

Formulación matemática. Como es costumbre dibujamos el diagrama físico (Figura 3.12). Llamándo Z la corriente en amperios que fluye como se ilustra, tenemos: (1) voltaje suministrado = 100 voltios, (2) caída de voltaje a través de la resistencia (RZ) = 10 Z, (3) caída de voltaje a través del inductor $(L\, dI/dt) = 2\, dI/dt$. De donde, por la ley de Kirchhoff,

$$100 = 10I + 2\frac{dI}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{dI}{dt} + 5I = 50 \tag{3}$$

Puesto que el interruptor se cierra en $t = 0$, debemos tener $I = 0$ en $t = 0$.

Solución La ecuación diferencial (3) es una ecuación de primer orden lineal con factor integrante e^{5t}. Multiplicado por este factor da

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}I) = 50e^{5t} \quad \text{ó} \quad e^{5t}I = 10e^{5t} + c \text{ esto es,} \quad I = 10 + ce^{-5t}.$$

Puesto que $I = 0$ en $t = 0$, $c = -10$. Así $I = 10(1 - e^{-5t})$.

Otro método. La ecuación (3) puede también resolverse por separación de variables.

El gráfico de Z contra t se muestra en la Figura 3.13. Note que la corriente es cero en $t = 0$ y crece hacia un máximo de 10 amperios aunque teóricamente nunca lo alcanza. El estudiante debería notar la similitud entre este problema y el problema de la caída del paracaidista en el Ejemplo ilustrativo 3 de la sección pasada.

Establezca y resuelva una ecuación diferencial para el circuito eléctrico del Ejemplo ilustrativo 1 si el generador de 100 voltios se remplaza por otro con una fem de 20 $\cos 5t$ voltios.

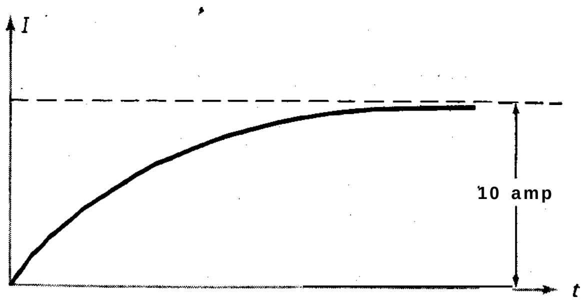


Figura 3.13

Formulación matemática. La única diferencia es que 20 cos $5t$ remplaza a 100 en la ecuación (3). De donde, la ecuación requerida es

$$10I + 2\frac{dI}{dt} = 20\cos 5t \quad 0 \quad \frac{dI}{dt} + 5I = 10\cos 5t \tag{4}$$

Solución Multiplique la segunda ecuación en (4) por el factor integrante e^{5t}. Luego

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}I) = 10e^{5t}\cos 5t \quad \text{y} \quad e^{5t}I = 10\int e^{5t}\cos 5t\,dt = e^{5t}(\cos 5t + \operatorname{sen} 5t) + c$$

o

$$I = \cos 5t + \operatorname{sen} 5t + ce^{-5t}$$

Puesto que $I = 0$ en $t = 0$, tenemos $c = -1$. Así, $I = \cos 5t + \operatorname{sen} 5t - e^{-5t}$.

[redacted]

Una fem decayente $E = 200e^{-5t}$ se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0,01 faradios. Asumiendo Q = 0 en t = 0, encuentre la carga y la corriente en cualquier tiempo. Muestre,que la carga alcanza un máximo, calcúlelo y halle cuándo se obtiene.

Formulación matemática. Refiriéndonos a la Figura 3.14 tenemos (1) voltaje suministrado $(E) = 200e^{-5t}$, (2) caída de voltaje en la resistencia (RI) = 20I, (3) caída de voltaje a través del condensador $(Q/C) = Q/0{,}001 = 100Q$. De donde, por la ley de Kirchhoff, $20I + 100Q = 200e^{-5t}$ y, puesto que $I = dQ/dt$,

$$20\frac{dQ}{dt} + 100Q = 200e^{-5t} \quad 0 \quad \frac{dQ}{dt} + 5Q = 10e^{-5t}$$

Solución Un factor integrante es e^{5t}. De donde, $\frac{d}{dt}(Qe^{5t}) = 10$, $Qe^{5t} = 10t + c$.

Puesto que Q $= 0$ en $t = 0$, c = 0. De donde, Q = $10te^{-5t}$.

La corriente en cualquier tiempo. Puesto que

$$I = dQ/dt,\; I = \frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}.$$

Máxima carga. Para hallar cuándo Q es máxiina, haga $dQ/dt = 0$, esto es, $I = 0$.

$$10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 0. \text{ esto es, } t = \tfrac{1}{5}\text{ seg}$$

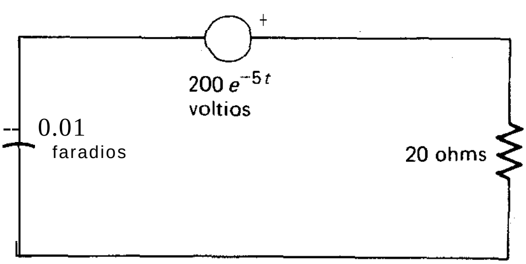


Figura 3.14

El estudiante debería mostrar que este valor de t realmente da un máximo. El valor de la carga máxima es el valor de Q cuando $t = \frac{1}{5}$, esto es,

$$Q = 10 \times \tfrac{1}{5}e^{-1} = \frac{2}{e} \sim 0{,}74 \text{ culombio}$$

EJERCICIOS A

1. En $t = 0$ una fem de 20 voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 40ohmios. Si la corriente es cero en $t = 0$, ¿cuál es en cualquier tiempo $t \geqq 0$?
2. Trabaje el ejercicio anterior si la fem es 100 sen $10t$.
3. Una resistencia de 20 ohmios y un inductor de 5 henrios se conectan en serie en un circuito eléctrico en el cual hay un flujo de corriente de 20 amperios en tiempo $t = 0$. Encuentre la corriente para $t \geqq 0$ si la fem es cero para $t > 0$.
4. Un condensador de 5×10^{-3} faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de 50 voltios. El interruptor se cierra en $t = 0$. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en $t = 0$, determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.
5. Trabaje el ejercicio anterior si la fem es de 50 $\cos 6t$, $t \geqq 0$.
6. Un circuito consiste de una resistencia de 10 ohmios y un condensador de 0,01 faradios en serie. La carga en el condensador es de 0,05 culombios. Encontrar la carga y la corriente en tiempo t después de cerrar el interruptor.
7. Una resistencia de 4ohmios y un inductor de 1 henrio se conecta en serie con un voltaje dado por $100e^{-4t}\cos 50t$, $t \geqq 0$. Encontrar $Z(t)$ si Z= 0 en $t = 0$.
8. Una resistencia de 20ohmios se conecta en serie con un condensador de 0,01 faradios y una fem en voltios dada por $40e^{-3t} + 20e^{-6t}$. Si Q = 0 en $t = 0$, muestre que la caída máxima en el condensador es de 0,25 culombios.

EJERCICIOS B

1. Un circuito consiste de una resistencia constante de R ohmios en serie con una fem constante de E voltios y una inductancia constante de L henrios. Si la corriente inicial es cero, muestre que la corriente crece a la mitad de su valor teórico máximo en $(L \ln 2)/R$ segundos.
2. Una fem de $E_0 \cos wt$ voltios, donde E_0, w son constantes, se aplica en $t = 0$ a un circuito en serie consistente de R ohmios y C faradios, donde R y C son constantes. Si Q = 0 en $t = 0$, muestre que la carga en $t > 0$ es

$$Q = \frac{CE_0}{R^2C^2\omega^2 + 1}(\cos \omega t + \omega RC \operatorname{sen} \omega t - e^{-t/RC})$$

3. Una resistencia de R ohmios varía con el tiempo t (segundos) de acuerdo a $R = 1 + 0{,}01t$, $0 \leqq 1.000$. Se conecta en serie con un condensador de 0,1 faradios y una fem de 100 voltios. La carga inicial en el condensador es de 5 culombios. Encuentre (a) la carga y la corriente como una función del tiempo, (b) la carga máxima teórica.
4. Un inductor de L henrios varía con el tiempo t (segundos) de acuerdo a $L = 0{,}05 + 0{,}001t$, $0 \leqq t \leqq 1.003$. Se conecta en serie con una fem de 40 voltios y una resistencia de 10 ohmios. Si $I = 0$ en $t = 0$, encuentre (a) $I(t)$, $t > 0$; (b) la corriente máxima teórica.
5. Un circuito tiene R ohmios C faradios, y E voltios en serie con un interruptor, siendo R, C, E constantes. La carga inicial en el condensador es cero. Si el interruptor está cerrado hasta que la carga sea el 99 por ciento de su máximo teórico y luego E se reduce repentinamente a cero, encuentre Q de ahí en adelante.

1. Un inductor de 0,1 henrios, una resistencia de 10 ohmios y una fem de E(t) voltios, donde

$$E(t) = \begin{cases} 10, & 0 < t \leqq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

se conecta en serie. Encuentre la corriente Z(t), asumiendo Z(0) = 0.

2. Una fem periódica E(t) mostrada gráficamente en la Figura 3.15 se aplica en $t = 0$ a un circuito consistente de R ohmios y C faradios en serie, donde R y C son constantes. Encuentre la carga cuando $t = 4T$, asumiendo que en $t = 0$ la carga es cero.

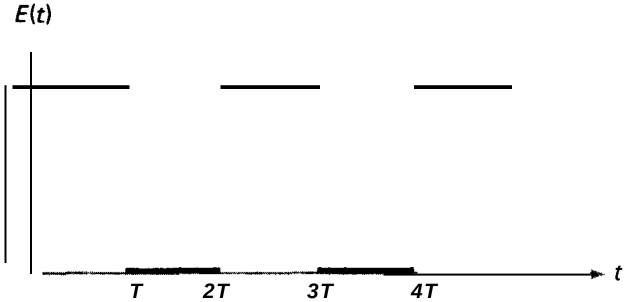


Figura 3.15

3. Una fem $E_0 \cos \omega t$, $t \geqq 0$ se aplica a un circuito consistente de L henrios y R ohmios en serie. Las cantidades E_0, ω, L, R son constantes dadas. Si la corriente es cero en $t = 0$; (a) Muestre que la corriente *se* compone de ***términos transientes*** los cuales llegan a ser insignificantes después de algún tiempo y ***términos de estado estacionario*** los cuales tienen el mismo período de la fem aplicada. (b) Muestre que la corriente media cuadrática definida por

$$\sqrt{\frac{\int_a^b I^2\,dt}{b - a}}$$

donde $(b - a)$ es el período $2\pi/\omega$ de la fem, tiende a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

3 Trayectorias ortogonales y sus aplicaciones

Suponga que nos dan una familia de curvas como en la Figura 3.16 (líneas **gruesas).** Podemos pensar en otra familia de curvas (líneas puxiteadas). tal que cada miembro de esta familia corte a cada miembro de la primera familia en ángulos rectos. Por ejemplo, la curva *AB* se encuentra con varios miembros de la familia punteada en ángulos rectos en los puntos *L, M, N, 0,* P. Decimos que las ‘familias son *mutuamente* ortogonales, o que una familia forma un conjunto de *trayectorias* ‘ortogonales de la otra familia. Como una ilustración, considere la familia de todos los círculos con centro en el origen; unos cuantos círculos aparecen en, la Figura 3.17. Las trayectorias ortogonales para esta familia de círculos podrían ser miembros de la familia de las

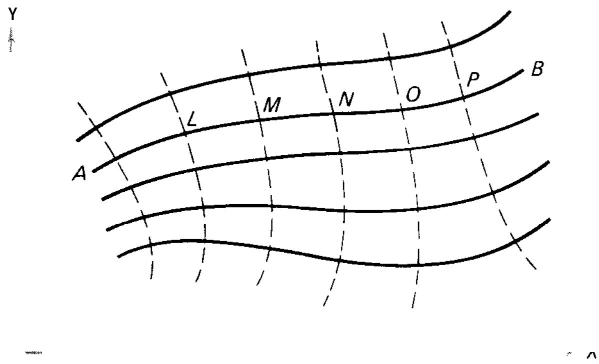


Figura 3.16

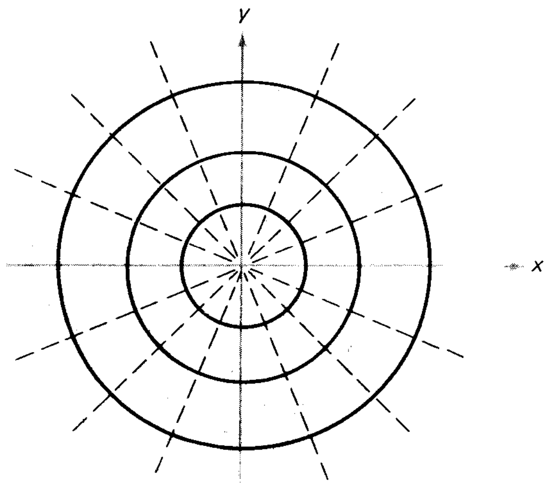


Figura 3.17

líneas rectas (líneas punteadas). Similarmente las trayectorias ortogonales de la familia de líneas rectas que pasan por el origen son los círculos con centro en el origen.

Como una situación más complicada, considere la familia de elipses (Figura 3.18) y la familia de curvas ortogonales a ellas. Las curvas de una familia son las trayectorias ortogonales de la otra familia. Las aplicaciones de trayectorias ortogonales son numerosas en física e ingeniería. Como una aplicación muy elemental, considere la Figura 3.19. Aquí NS representa una barra magnética, siendo N su polo norte, y S su polo sur. Si limaduras de hierro se esparcen alrededor del magneto encontramos que ellas se ordenan así mismas como las curvas punteadas de la Figura 3.19. Estas curvas se llaman ***líneas de fuerza.**** Las curvas perpendiculares a estas (líneas gruesas) se

*El estudiante que ha leído la sección de campos de direcciones (pág. 28) debería notar la similitud entre las limaduras de hierro y los elementos de linea.

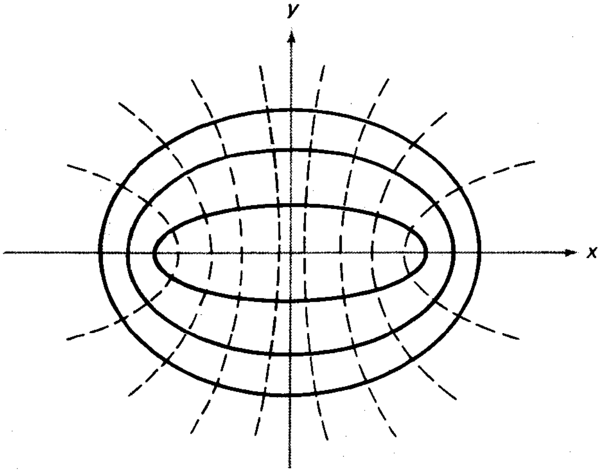


Figura 3.18

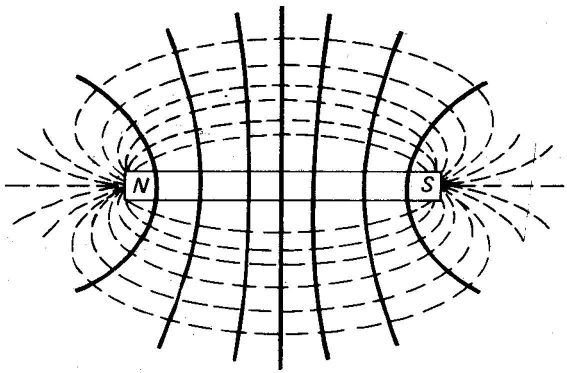


Figura 3.19

llaman ***líneas equipotenciales,*** o ***curvas de igual potencial.*** Aquí, también los miembros de una familia constituyen las trayectorias ortogonales de la otra familia.

Como otro ejemplo de física considere la Figura 3.20, la cual representa un mapa del clima tan familiar en muchos de nuestros periódicos diarios. Las curvas representan ***isobaras,*** las cuales son curvas que conectan todas las ciudades que reportan la misma presión barométrica a la oficina metereológica. Las trayectorias ortogonales de la familia de isobaras podrían indicar la dirección general del viento desde áreas de alta a baja presión. En vez de isobaras, la Figura 3.20 podría representar curvas isotérmicas las cuales son curvas que conectan puntos que tienen la misma temperatura. En tal caso las trayectorias ortogonales representan la dirección general del flujo de calor.

Considere el ejemplo de las isobaras. Dado un punto (x, y), teóricamente podemos encontrar la presión en ese punto. Así podemos decir que $P = f(x, y)$, esto es, la presión es una función de la posición. Haciendo P igual a un valor definido, digamos P_1, vemos que $f(x, y) = P_1$ representa una

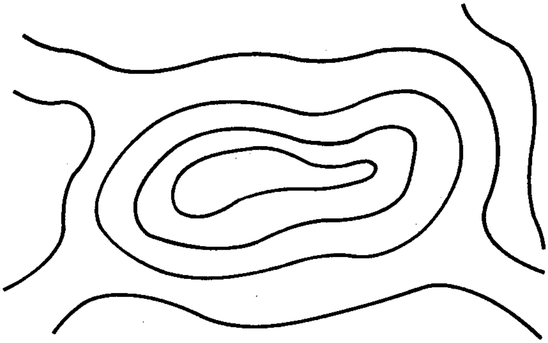


Figura 3.20

curva, todos los puntos que tienen presión P_1 siendo así una isobara. Dando otros valores a P, se obtienen otras isobaras. Es claro que estas isobaras no se podrían intersectar, puesto que si lo hicieran, entonces los puntos de intersección tendrían dos presiones diferentes, y esto sería imposible. Si usamos c en vez de P vemos que

$$f(x, y) = c \tag{1}$$

donde c puede tomar valores dentro de un conjunto dado, representa una familia de isobaras. En el primer capítulo aprendimos cómo encontrar una ecuación diferencial para una familia de curvas derivando hasta eliminar las constantes arbitrarias (c en nuestro caso). El problema que enfrentamos ahora es cómo obtener la familia de trayectorias ortogonales. Realmente esto es sencillo puesto que la ecuación diferencial de la familia (1) está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad o \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \tag{2}$$

Ahora la pendiente de las trayectorias ortogonales debería ser el recíproco negativo de la pendiente en (2), esto es,

$$\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}$$

Así, la ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x} \tag{3}$$

Al resolver esta ecuación se obtienen las trayectorias ortogonales. Ahora se darán algunas ilustraciones al procedimiento., Un error común de los estudiantes es olvidarse de eliminar las constantes arbitrarias al hallar la ecuación diferencial de la familia.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encuentre las trayectorias ortogonales de $x^2 + y^2 = cx$.

Formulación matemática. Hay dos maneras de determinar la ecuación diferencial de la familia.

Primera manera. Resuelva c para obtener $c = (x^2 + y^2)/x$. Derivando con respecto a x, tenemos

$$\frac{x(2x + 2yy') - (x^2 + y^2)(1)}{x^2} = 0 \quad \text{o} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Segunda manera. Derivando $x^2 + y^2 = cx$ con respecto a x, encontramos

$$2x + 2yy' = c$$

Eliminando c entre esta última ecuación y la dada, encontramos la ecuación como antes.

La familia de las trayectorias ortogonales tiene así la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \tag{4}$$

Solución Para resolver (4), note que es una ecuación homogénea. Haciendo y = vx, el estudiante puede mostrar que $x^2 + y^2 = c_1 y$. La solución también se obtiene al notar que (4), sin fracciones, tiene un factor integrante dependiendo de una variable $(1/y^2)$.

Las dos familias ortogonales se muestran en la Figura 3.21. La familia dada originalmente se muestra punteada.

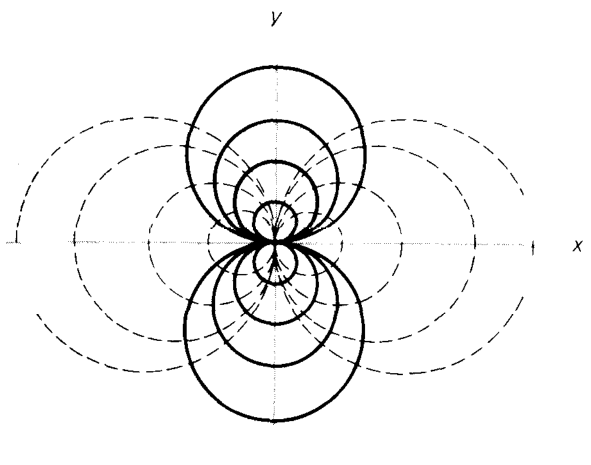


Figura 3.21

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $y = x + ce^{-x}$ y determine aquel miembro particular de cada familia que pasa por (0, 3).

Formulación matemática. Por diferenciación de la relación dada tenemos

$$y' = 1 - ce^{-x}$$

Eliminando c da

$$y' = 1 + x - y$$

Así, la ecuación diferencialde la familia de trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + x - y} \tag{5}$$

Solución Escriba (5) en la forma $dx + (1 + x - y)dy = 0$.

Aquí $$M = 1, N = 1 + x - y, \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

así que la ecuación no es exacta. Ahora $\dfrac{0 - 1}{1 + x - y}$ no es una función sólo de x. Pero $\dfrac{1 - 0}{1} = 1$ es una función de y. De donde $e^{\int 1\, dy} = e^y$ es un factor integrante. Multiplicando por este factor y procediendo como de costumbre para ecuaciones exactas, obtenemos

$$xe^y - e^y(y - 2) = c_1$$

Las curvas referidas que pasan por (0, 3) son

$$y = x + 3e^{-x}, \qquad x - y + 2 + e^{3-y} = 0 \tag{6}$$

El estudiante lo puede encontrar instructivo obtener los gráficos de las ecuaciones (6). También lo puede encontrar instructivo resolver (5) al escribirla como

$$\frac{dx}{dy} + x = y - 1$$

una ecuación lineal con x como variable dependiente.

EJERCICIOS A

1. La ecuación $y^2 = cx$ define una familia de parábolas. (a) Encuentre una ecuación diferencial para la familia. (b) Encuentre una ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales y resuelva. (c) Grafique varios miembros de cada familia en el mismo conjunto de ejes.
2. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $y^3 = cx^2$ y dibuje un gráfico de las familias.
3. Determine las trayectorias ortogonales de **cada** familia y encuentre miembros particulares de cada una que pasen por los puntos indicados.
   (a) $x^2 + cy^2 = 1$; $(2, 1)$. (b) $x^2 = cy + y^2$; $(3, -1)$. (c) $y = c \tan 2x + 1$; $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$
   (d) $y = ce^{-2x} + 3x$; $(0, 3)$ (e) $y^2 = c(1 + x^2)$; $(-2, 5)$.
4. Muestre que las familias $x^2 + 4y^2 = c_1$ y $y = c_2 x^4$ son ortogonales.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la constante a para que las familias $y^3 = c_1 x$ y $x^2 + ay^2 = c^2$ sean ortogonales.
2. Muestre que la familia de parábolas $y^2 = 4cx + 4c^2$ es "así mismo ortogonal". Grafique algunos miembros.
3. Muestre que la familia $$\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$$

donde a y b son constantes dadas, es "así mismo ortogonal". Esta se llama una familia de "cónicas confocales". Grafique algunos miembros de la familia.

4. Determine las trayectorias ortogonales de (a) $x^p + cy^p = 1$; p = constante, (b) $x^2 + cxy + y^2 = 1$.

EJERCICIOS C

1. Determine la familia de curvas en la cual cada uno de sus miembros corta a cada miembro de la familia de líneas rectas $y = mx$ a un ángulo de 45°.
2. Determine la curva que pasa por $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ y corta cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ a un ángulo de 60°.
3. Encuentre todas las curvas que cortan la familia $y = ce^x$ a un ángulo α constante.
4. Muestre que si una ecuación diferencial de una familia de curvas en coordenadas polares (r, ϕ) está dada por
$$\frac{dr}{d\phi} = F(r, \phi)$$
entonces una ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es
$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{r^2}{F(r, \phi)}.$$
(Sugerencia: Use el resultado del cálculo elemental que en coordenadas polares la tangente del ángulo formado por el radio vector y la línea tangente a la curva es $r\,d\phi/dr$.)
5. Encuentre las trayectorias ortogonales de $r = c \cos \phi$ y grafique.
6. Determine las trayectorias ortogonales de las espirales $r = e^{r\phi}$
7. Encuentre las trayectorias ortogonales de la cardioide $r = c(1 - \cos \phi)$.
8. Sea $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $z = x + iy$ y las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son reales. (a) Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ correspondiente a $F(z) = z^2$ y muestre que las familias $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son ortogonales. (b) Trabaje parte (a) para las funciones $F(z) = z^3$ y $F(z) = 2x^2 - iz$ 3. (c) ¿Piensa usted que los resultados indicados para estos casos especiales se cumplen en general? Explique (compare con Ejercicio 4C, página 48).

4 Aplicaciones a química y mezclas químicas

Hay muchas aplicaciones de ecuaciones diferenciales a los procesos químicos. Algunas de 'éstas serán indicadas en los siguientes ejemplos ilustrativos. Otras son presentadas en los ejercicios.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un tanque está lleno con 10 galones (abreviación gal) de agua salada en la cual están disueltas 5 lb de sal. Agua salada conteniendo 3 lb de sal por gal entra al tanque a 2 gal por minuto, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.

(a) Encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo.
(b) ¿Cuánta sal está presente después de 10 min?
(c) ¿Cuánta sal está presente después de un tiempo largo?

Formulación matemática. Sea A el número de libras de sal en el tanque después de t minutos. Luego dA/dt es la tasa de cambio de esta cantidad de sal en el tiempo y está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \text{tasa de cantidad ganada} - \text{tasa de cantidad perdida} \tag{1}$$

Puesto que entran 2 gal/min conteniendo 3 lb/gal de sal tenemos que la cantidad de sal que entra por minuto es

$$\frac{2\text{ gal}}{\text{min}} \cdot \frac{3\text{ lb}}{\text{gal}} = \frac{6\text{ lb}}{\text{min}} \tag{2}$$

lo cual es la tasa a la cual se gana sal. Puesto que siempre hay 10 gal en el tanque y debido a que hay A libras de sal en cualquier tiempo t, la concentración de sal al tiempo t es A libras por 10 gal. La cantidad de sal que sale por minuto es, por tanto,

$$\frac{A\text{ lb}}{10\text{ gal}} \cdot \frac{2\text{ gal}}{\text{min}} = \frac{2A\text{ lb}}{10\text{ min}} = \frac{A\text{ lb}}{5\text{ min}} \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) tenemos $$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{5}$$

Puesto que inicialmente hay 5 lb de sal, tenemos $A = 5$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{5}, \qquad A = 5 \text{ en } t = 0$$

Solución Usando el método de separación de variables, tenemos

$$\int \frac{dA}{30 - A} = \int \frac{dt}{5} \quad \text{o} \quad -\ln(30 - A) = \frac{t}{5} + c$$

Puesto que $A = 5$ en $t = 0$, $c = -\ln 25$. Así,

$$-\ln(30 - A) = \frac{t}{5} - \ln 25, \qquad \ln \frac{30 - A}{25} = -\frac{t}{5} \quad \text{o} \quad A = 30 - 25e^{-t/5}$$

la cual es la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

Al final de los 10 minutos la cantidad de sal es $A = 30 - 25e^{-2} = 26{,}6$ lb.

Después de un tiempo largo, esto es, cuando $t \to \infty$, vemos que $A \to$ 30 lb. Esto también podría ser visto desde la ecuación diferencial haciendo $dA/dt = 0$, puesto que A es una constante cuando se alcanza el equilibrio.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Dos químicos, A y B, reaccionan para formar otro químico C. Se encuentra que la tasa a la cual C se forma varía con las cantidades instantáneas de los químicos A y B presentes. La formación requiere 2 lb de A por cada libra de B. Si 10 lb de A y 20 lb de B están presentes inicialmente, y si 6 lb de C se forman en 20 min, encontrar la cantidad del químico C en cualquier tiempo.

Formulación matemática. Sea x la cantidad en libras de C formadas en el tiempo t en horas. Luego dx/dt es la tasa de su formación. Para formar x lb de C, necesitamos $2x/3$ lb de A y $x/3$ lb de B, puesto que se necesita que el químico A sea el doble de B. Por tanto, la cantidad de A presente al tiempo t cuando se forman x lb de C es $10 - 2x/3$, y la cantidad de B en este tiempo es $20 - x/3$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} \propto \left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right) \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dt} = K\left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right)$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación puede escribirse

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$$

donde k es otra constante. Hay dos condiciones. Puesto que el químico C inicialmente no está presente, tenemos $x = 0$ en $t = 0$. También $x = 6$ en $t = 1/3$. Necesitamos dos condiciones, una para determinar k, la otra para determinar la constante arbitraria de la solución de la ecuación diferencial. La formulación completa es

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x), \qquad x = 0 \text{ en } t = 0, \qquad x = 6 \text{ en } t = \tfrac{1}{3}$$

Solución La separación de variables produce

$$\int \frac{dx}{(15 - x)(60 - x)} = \int k\, dt = kt + c_1$$

Ahora $\displaystyle\int \frac{dx}{(15 - x)(60 - x)} = \int \frac{1}{45}\left(\frac{1}{15 - x} - \frac{1}{60 - x}\right) dx = \frac{1}{45}\ln\left(\frac{60 - x}{15 - x}\right).$

Así, podemos mostrar que $\displaystyle\frac{60 - x}{15 - x} = ce^{45kt}$

Puesto que $x = 0$ en $t = 0$, encontramos $c = 4$. Así, $\displaystyle\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt}$

Puesto que $x = 6$ en $t = 1/3$, tenemos $e^{15k} = \frac{3}{2}$. Así,

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4(e^{15k})^{3t} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} \quad \text{o} \quad x = \frac{15[1 - (\frac{2}{3})^{3t}]}{1 - \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^{3t}}$$

Cuando $t \to \infty$, $x \to 15$ lb.

El problema anterior es un caso especial de la ley de *acción de masa*, la cual es fundamental en la teoría de tasas de las reacciones químicas. Para problemas que tratan con la descripción y aplicación de esta ley ver los Ejercicios C.

EJERCICIOS A

1. Un tanque está lleno con 8 gal de agua salada en la cual 2 lb de sal están disueltas. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a 4 gal/min, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa. (a) Establezca una ecuación diferencial para la cantidad de sal como una función del tiempo t. (b) Encuentre la cantidad de sal como una función del tiempo. (c) Encuentre la concentración de sal después de 8 min. (d) ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?

2. Un tanque tiene 40 gal de agua pura. Una solución de agua salada,con 1 lb de sal por galón entra a 2 gal/min, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa. (a) ¿Cuánta sal hay en el tanque en cualquier tiempo? (b) ¿Cuándo el agua que sale tendrá $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón?

3. Un tanque tiene 60 gal de agua salada con 2 lb de sal por galón. Una solución con 3 lb de sal por galón entra a 2 gal/min, y la mezcla sale a la misma tasa. ¿Cuándo habrá 150 lb de sal en el tanque?

4. Un tanque tiene 100 gal de agua salada con 40 lb de sal disuelta. Agua pura entra a 2 gal/min y sale con la misma tasa. ¿Cuándo la concentración de sal será 0,2 lb/gal? ¿Cuándo la concentración será menor que 0,01 lb/gal?

5. El químico A es transformado en el químico B. La tasa a la cual B se forma varía directamente con la cantidad de A presente en cualquier instante. Si 10 lb de A están presentes inicialmente y si 3 lb se transforman en B en una hora: (a) ¿Qué cantidad de A se transforma después de 2, 3 y 4 horas? (b) ¿En cuánto tiempo se transforma el 75% del químico A? (Este tipo de reacción se llama ***reacción de primer orden*** .)

6. El químico C se produce de una reacción que involucra los químicos A y B. La tasa de producción de C varía con el producto de las cantidades instantáneas de A y B presentes. La formación requiere 3 lb de A por cada 2 lb de B. Si inicialmente están presentes 60 lb de cada químico A y B y se forman 15 lb de C en 1 hora encontrar: (a) la cantidad de C en cualquier tiempo; (b) la cantidad de C después de 2 horas; la máxima cantidad de C que se puede formar.

EJERCICIOS B

1. Un tanque tiene 10 gal de agua salada con 2 lb de sal disuelta. Agua salada con 1,5 lb de sal por galón entra a 3 gal/min, y la mezcla bien agitada sale a 4 gal/min. (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo. (b) Encuentre la concentración de sal después de 10 min. (c) Dibuje gráficas de la cantidad y concentración de sal contra el tiempo y obtenga el máximo en cada caso.

2. Un tanque tiene 60gal de agua pura. Una solución con 3 lb de sal por galón entra a 2 gal/min y sale a 2,5 lb/min. (a) Encuentre la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo. (b) Encuentre la concentración de sal cuando el tanque tenga 30gal de agua salada. (c) Encuentre la cantidad de agua en el tanque cuando se tenga la máxima concentración. (d) Determine la máxima cantidad de sal presente en cualquier tiempo.

3. Un químico C se va a disolver en agua. Experimentalmente la tasa a la cual C entra en la solución varía con el producto de (i) la cantidad instantánea de C que permanece sin disolverse, (ii) la diferencia entre la concentración instantánea del químico disuelto y la máxima concentración posible a las condiciones dadas de temperatura y presión (este máximo ocurre cuando la solución está saturado y no es posible tener un incremento adicional de químico disuelto).

   Si se colocan 5 lb de C en 2 gal de agua, se encuentra que 1 lb se disuelve en 1 hora. Asumiendo una solución saturada con una concentración de 4 lb/gal: (a) ¿Cuánto de químico C permanece sin disolverse después de 4 horas? (b) ¿Cuál es la concentración de la solución después de 3 horas? (c) ¿Cuándo la concentración será de 2 lb/gal?

4. Cuando a lb de un químico se colocan en b galones de agua, A libras del químico se disuelven en tiempo T. Si una solución saturada contiene S libras del químico por galón (S es constante), muestre que la cantidad de químico no disuelto en tiempo t es

$$\frac{aR(bS - a)}{bS - aR} \quad \text{donde } R = \left[\frac{AbS}{a(A + bS - a)}\right]^{t/T}$$

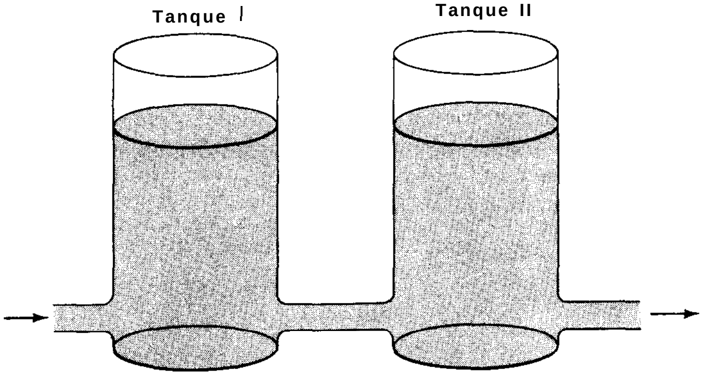


Figura 3.22

Muestre que si $S \to \infty$ la cantidad de químico que permanece sin disolverse tiende a $a \mid A/a \mid^{t/T}$

5. DOS tanques (Figura 3.22) contienen cada uno v galones de agua. Empezando en tiempo $t = 0$, una solución con a lb/gal de un solvente químico fluye dentro del tanque 1 a la tasa de b gal/min. La mezcla luego entra y sale del tanque Il a la misma tasa. Asumiendo agitación completa en ambos tanques, muestre que la cantidad de químico en el tanque II después de tiempo $t > 0$ es $av(1 - e^{-bt/v}) - abte^{-bt/v}$.

EJERCICIOS C

Velocidad de las reacciones químicas y la ley de acción de masa

Una ecuación química describe cómo las moléculas de varias sustancias se combinan para producir otras sustancias. Por ejemplo, $2H_2 + O_2 \to 2H_2O$

dice que 2 moléculas de hidrógeno se combinan con una molécula de oxígeno para producir dos moléculas de agua. En general, una ecuación química se lee

$$aA + bB + cC + \cdots \to mM + nN + pP + \cdots$$

donde A, B, C, representan moléculas de las sustancias reactivas, M, N, P, representan moléculas de las sustancias formadas por la reacción, y $a, b, c,$, m, n, p son enteros positivos significando el número de moléculas que toman parte en la reacción. La tasa a la cual se forma una sustancia se llama la *velocidad de reacción*. Aunque ninguna regla general se aplica en todos los casos, la ley de acción de masa se puede aplicar en la determinación de esta tasa.

Ley de acción de masa. *Si la temperatura se mantiene constante, la velocidad de una reacción química es proporcional al producto de las concentraciones de las sustancias que están reaccionando.*

Si $[A]$, $[B]$, $[C]$, denotan las concentraciones de A, B, C,. en tiempo t, estas concentraciones expresadas en moles por litro,* y si x es el número de moles por litro que han reaccionado después de tiempo t, la tasa dx/dt de la reacción está dada por

$$\frac{dx}{dt} = k\,[A]^a[B]^b[C]^c$$

*Un mol es el peso molecular de una sustancia en gramos, tomando el peso atómico del oxígeno como 16 g; hidrógeno. H, como 1,008 g; carbón, C, como 12,01 g, etc. Así, 1 mol $O_2 = 2(16) = 32$ g; 1 mol $H_2O = 16 + 2(1{,}008) = 18{,}016$ g; 1 mol $C_2H_6 = 2(12{,}01) + 6(1{,}008) = 30{,}068$ g.

donde la constante de proporcionalidad k se llama la *constante de velocidad.* El orden de la reacción es la suma de los exponentes. Las reacciones se llaman unimolecular, bimolecular, trimolecular, etc., de acuerdo a si el orden es uno, dos, tres, etc.

1. En la reacción bimolecular A+ B-M, α moles por litro de A y β moles por litro de B se combinan. Si x denota el número de moles por litro que han reaccionado después de tiempo t, la tasa de la reacción está dada por

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)$$

   (a) Mostrar que si $\alpha \neq \beta$, $$x = \frac{\alpha\beta[1 - e^{(\beta-\alpha)kt}]}{\alpha - \beta e^{(\beta-\alpha)kt}}$$

   y encuentre $\lim_{t\to\infty} x$, considerando los 2 casos $\alpha > \beta$, $\beta > \alpha$.

   (b) Si $\alpha = \beta$, muestre que $x = \alpha^2 kt/(1 + \alpha kt)$ y encuentre $\lim_{t\to\infty} x$.

2. En la reacción de tercer orden o trimolecular A+ B+ C-M + N, α, β y γ moles por litro de A, B y C se combinan. Si x denota el número de moles por litro de A, B o C que han reaccionado después de tiempo t (o el número de moles por litro de M o N que se han formado), entonces la tasa de la reacción está dada por

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha \quad x)(\beta \quad x)(\gamma - x)$$

   Resuelva la ecuación, considerando que $x = 0$ en $t = 0$ y tratando los casos: (a) α, β, γ son iguales; (b) α, β, γ no son iguales; (c) solo dos de α, β, γ son iguales.

3. Las sustancias A y B reaccionan químicamente para producir P y Q de acuerdo a la reacción de segundo orden A+ B→P+Q. En tiempo $t = 0$, M_A g de A y M_B g de B se combinan. Si x g reaccionan en tiempo t y si la ley de reacción de masa se cumple: (a) Muestre que

$$\frac{dx}{dt} = K\left(M_A - \frac{m_A}{m_A + m_B}x\right)\left(M_B - \frac{m_B}{m_A + m_B}x\right)$$

   donde m_A y m_B son los pesos moleculares de A y B, respectivamente. (b) Muestre que el número de gramos de P y Q producidos después de tiempo t son $m_P s$ y $m_Q s$, donde

$$s = \frac{1 - e^{rt}}{M_A m_B - M_B m_A e^{rt}}, \qquad r = \frac{K M_A M_B (M_B m_A - M_A m_B)(m_A + m_B)}{(M_A + m_B)^2 m_A m_B}$$

   y donde se asume que $M_B/m_B \neq M_A/m_A$. Note que $m_A + m_B = m_P + m_Q$. Derive un resultado similar par el caso $M_B/m_B = M_A/m_A$.

4. Una cantidad de 260 g de CH, $COOC_2H_5$ (acetato etílico) se combina con 175 g de NaOH (hidróxido de sodio) en una solución de agua para producir CH, COONa (acetato de sodio) y C_2H_5 OH (alcohol etílico), de acuerdo a la ecuación

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \rightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

   Al Cabo de 10 min, 60 g de acetato de sodio se han formado. Si la reacción obedece la ley de acción de masa, (a) calcule la constante de velocidad; (b) encuentre el número de gramos de acetato de sodio y alcohol etílico presente después de $\frac{1}{2}$ hora. *(Sugerencia:* use los pesos atómicos C = 12,01, H = 1,008, 0 = 16, Na = 22,997.)

5 Aplicaciones a flujo de calor en estado estacionario

Considere una pieza de material de longitud indefinida acotada por dos planos paralelos A y B, como en la Figura 3.23. Asuma que el material es uniforme en todas sus propiedades, por ejemplo, calor específico, densidad, etc. Supóngase que los planos *A* y *B* se mantienen a 50° C y 100" C, respectivamente. Todo punto en la región entre *A* y *B* alcanza cierta temperatura que no cambia posteriormente. Así todos los puntos en el plano C en la mitad entre A y *B* estarán a 75" C; el plano *E* a 90" C. Cuando la temperatura en cada punto de un cuerpo no varía con el tiempo, decimos que prevalecen las ***condiciones de estado estacionario*** o que tenemos un ***flujo de calor en estado estacionario.***

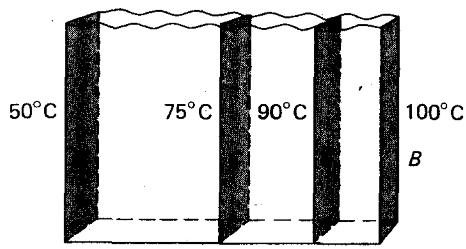


Figura 3.23

Como otro ejemplo considere un tubo de material uniforme, cuyo corte seccional aparece en la Figura 3.24. Suponga que la parte exterior se mantiene a 80" C y la interna a 40" C. Habrá una superficie (línea punteada) en la cual cada punto estará a 60" C. Sin embargo, ésta no está en- la mitad entre las superficies interna y externa. Líneas paralelas a *A* y en un plano perpendicular a *A* (Figura 3.23) se llaman ***líneas isotérmicas.*** La curva punteada de la Figura 3.24 es una curva *isotérmica*. Los planos correspondientes de la Figura 3.23 y los cilindros de la Figura 3.24 se llaman ***superficies isotérmicas.*** En el caso general, las curvas isotérmicas no serán líneas o círculos, como en la Figura 3.23 o 3.24, pero pueden ser una familia de curvas como se muestra en la Figura 3.25 (curvas punteadas). Las trayectorias ortogonales de la

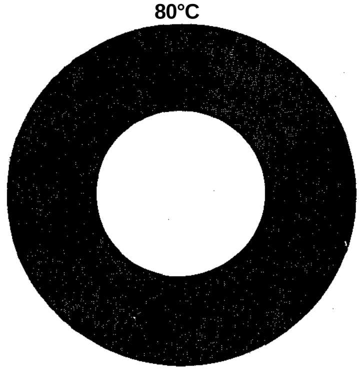


Figura 3.24

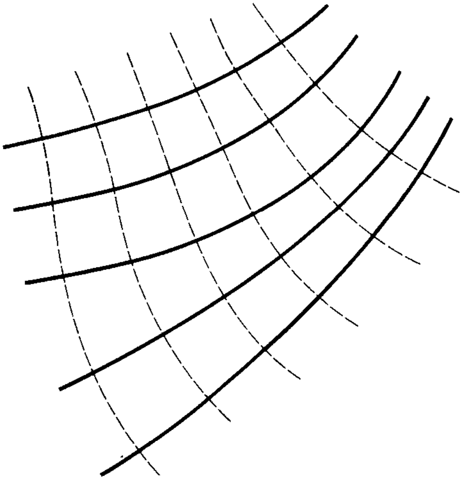


Figura 3.25

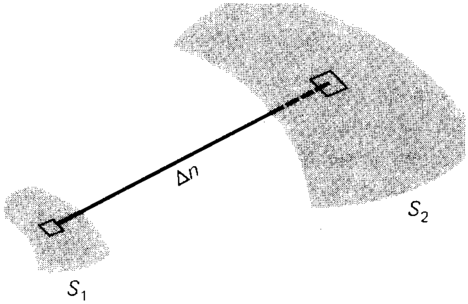


Figura 3.26

familia se llaman ***líneas*** de *flujo* (vea la sección 3 sobre trayectorias ortogonales).

Considere pequeñas porciones de dos superficies isotérmicas contiguas (Figura 3.26) separadas por una distancia Δn. Asuma que la temperatura correspondiente a la superficie S_1 es U_1, y la correspondiente a S_2 es U_2. Llame la diferencia de temperatura $U_2 - U_1 = \Delta U$. Experimentalmente se encuentra que la cantidad de calor que fluye de S_1 a S_2 por unidad aérea y por unidad de tiempo es aproximadamente proporcional a $\Delta U/\Delta n$. La aproximación llega a ser más precisa a medida que Δn ***(y*** desde luego ΔU) se hace más pequeño. En el caso límite a medida que $\Delta n \to 0$, $\Delta U/\Delta n \to dU/dn$* lo cual se llama el ***gradiente*** de U (tasa de cambio de U en la dirección normal a la superficie o curva isotérmica). Si H es la cantidad de flujo de calor por unidad de área y unidad de tiempo, tomamos como nuestra ley física:

$$H \propto \frac{dU}{dn} \quad \textbf{o} \quad H = K\frac{dU}{dn} \tag{1}$$

*En el caso que U depende de otros factores además de n, entonces dU/dn se remplaza por $\partial U/\partial n$.

Si deseamos considerar a U como una cantidad vectorial (teniendo dirección y magnitud), nuestro razonamiento es el siguiente. Considere como positiva la dirección de S, a S,. Si dU/dn es positiva, entonces U aumenta y, por tanto, debemos tener $U_2 > U_1$. Así, el calor realmente fluye de S_2 a S_1 (de mayor a menor temperatura); esto es, el flujo de calor está en la dirección negativa. Similarmente, si dU/dn es negativa, U disminuye, $U_2 < U_1$, *y el* flujo es de S, a S,; esto es, el flujo de calor está en la dirección positiva. La dirección del flujo de' calor puede tenerse en cuenta por un signo menos en (1); esto es,

$$H \text{ (cantidad vectorial)} = -K \frac{dU}{dn} \tag{2}$$

La cantidad de calor por unidad de tiempo que fluye a través de un área A está dada por

$$q = -KA \frac{dU}{dn} \tag{3}$$

La anterior constante de proporcional K depende del material usado y se llama la *conductividad térmica*. La cantidad de calor se expresa en *calorías* en el sistema cgs, *y* en *unidades térmicas británicas, Btu*, en el sistema pls. Considere ahora una ilustración usando los principios anteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un tubo largo de acero, de conductividad térmica $k = 0{,}15$ unidades cgs, tiene un radio interior de 10 cm y un radio exterior de 20 cm. La superficie interna se mantiene a 20" C y la superficie exterior se mantiene a 50" C. (a) Encuentre la temperatura como una función de la distancia r del eje común de los cilindros concéntricos. (b) Encuentre la temperatura cuando r = 15 cm. (c) ¿Cuánto calor se pierde por minuto en una parte del tubo de 20 m de largo?

Formulación matemática. Es claro que las superficies isotérmicas son cilindros concéntricos con los cilindros dados. El área de tal superficie con radio r y longitud 1 es $2\pi r l$. La distancia dn en este caso es dr. Así, la ecuación (3) puede escribirse

$$q = -K(2\pi r l) \frac{dU}{dr} \tag{4}$$

Puesto que $K = 0{,}15$, $l = 20$ m $= 2.000$ cm, tenemos

$$q = -600\pi r \frac{dU}{dr} \tag{5}$$

En esta ecuación, q es por supuesto una constante. Las condiciones son

$$U = 200°\text{C en } r = 10, \qquad U = 50°\text{C en } r = 20 \tag{6}$$

Solución Separando las variables en (5) e integrando se obtiene

$$-600\pi U = q \text{ In } r + c \tag{7}$$

Usando las condiciones (6), tenemos $-600\pi(200) = q \ln 10 + c$, $-600\pi(50) = q \ln 20 + c$ de donde obtenemos $q = 408.000$, $c = -1.317.000$. Por tanto, de (7) encontramos

$$U = 699 - 216 \text{ In } r \tag{8}$$

Si r = 15, encontramos por sustitución que $U = 114°$ C. Del valor anterior de 9, el cual está en calorías por segundo, es claro que la respuesta a la parte (c) es

$$q = 408.000 \times 60 \text{ cal/min} = 24.480.000 \text{ cal/min}$$

En el caso de conducción de calor, el calor fluye de lugares de más alta temperatura a lugares de más baja temperatura. Físicamente, cuando un extremo de una barra aumenta de temperatura, el movimiento aleatorio de las moléculas en este extremo se aumenta con un incremento resultante en velocidad y número de colisiones entre moléculas. Las moléculas con más alta velocidad tienden a moverse hacia el otro extremo de la barra dando lugar a colisiones adicionales y a un consecuente incremento gradual en temperatura en el resto de la barra.

Podemos considerar una conducción de calor como un esparcimiento o *difusión* de moléculas. Tal difusión, sin embargo, no está limitada a la conducción de calor. Así, por ejemplo, si una barra está hecha de un material poroso y cubrimos un extremo con un químico, encontramos que después de un cierto tiempo el químico se esparce o difunde dentro de la barra. Así como el calor fluye de lugares con temperaturas más altas a aquellos con temperaturas más bajas, las sustancias tienden a difundirse de lugares con concentraciones o densidades más altas a aquellos con concentraciones o densidades más bajas. La analogía nos permite usar la formulación matemática dada anteriormente para conducción de calor en problemas de difusión, de modo que U en tales problemas representa la concentración o densidad (en g/cm^3, lb/pie^3, etc.) en vez de temperatura. Problemas de difusión ocurren no sólo en química sino en biología, como en el transporte de sustancias a través de membranas celulares (un fenómeno llamado con frecuencia *ósmosis*), o en física atómica como en la difusión de neutrones para energía atómica.

EJERCICIOS A

1. Una pieza de metal tiene un espesor de *200* cm, y sus otras dos dimensiones son mucho más grandes. Las caras planas de la pieza se mantienen a 75° C y 25° C, respectivamente. (a) Encuentre la temperatura de estado estacionario en un plano a una distancia x de la cara de 75° C. (b) Construya un gráfico que muestre la distribución de la temperatura de estado estacionario. (c) ¿Cuánto calor atraviesa un centímetro cuadrado del plano por segundo, asumiendo que la conductividad térmica del plano es 0,15 unidades cgs?

2. Trabaje el Ejercicio 1 si la pieza tiene un espesor L, una conductividad térmica K, y las temperaturas de las caras planas son U_0 y U_1, respectivamente.

3. Un tubo largo de acero, de conductividad térmica $K = 0,15$ unidades cgs, tiene un radio interior de 20 cm y un radio exterior de 30 cm. La superficie exterior se mantiene a 400° C, y la superficie interior a 100° C. (a) Encuentre la temperatura como una función de la distancia r del eje común de los cilindros concéntricos. (b) Encuentre la temperatura donde r = *25* cm. (c) ¿Cuánto calor se pierde por minuto en una parte del tubo de 10 m de largo?

4. Un tubo largo tiene un diámetro interior de 10 cm y un diámetro exterior de 20 cm. La superficie interna se mantiene a 200° C, y la superficie exterior se mantiene a 50° C. La conductividad térmica es de 0,12 unidades cgs. (a) Encuentre la temperatura como *una* función de la distancia r del eje común de los cilindros concéntricos. (b) Encuentre la temperatura donde $r = 7,5$ cm. (c) ¿Cuánto calor se pierde por minuto en un segmento del tubo de 20 m de largo?

5. Una pieza de metal de 500 cm de espesor y con sus otras dos dimensiones mucho más grandes tiene una cara a 25" C y la cara opuesta a 65" C. Si la conducción térmica es 0,005 unidades cgs, (a) Encuentre la temperatura en la pieza como una función de la distancia x desde la cara con la temperatura más baja. (b) ¿Cuánto calor se transmite por hora a través de una sección transversal paralela a las caras y con una área de 100 cm^2 ?

6. Un cilindro de longitud L está hecho de un material poroso a través del cual un cierto químico es capaz de difundirse. Un extremo del cilindro se cubre con el químico a una concentración de C,, (g/cm^3) y se mantiene el suministro del químico a esta concentración. El otro extremo del cilindro se coloca de modo que esté justo en contacto con agua, y tan pronto como el químico se difunde a este extremo, se disuelve en el agua. Asumiendo que la superficie convexa del cilindro está cubierta con una sustancia a través de la cual el químico no puede difundirse, (a) encuentre la concentración de estado estacionario del químico en cualquier punto x desde la fuente de suministro, y (b) construya su gráfico.

7. Describa la analogía del Ejercicio 6 con los Ejercicios 1 y 2. ¿Hay alguna analogía en el problema de difusión con la parte (c) que involucra conductividad térmica? Explique.

EJERCICIOS B

1. Muestre que la ecuación diferencial para la temperatura de estado estacionario en una región acotada por dos cilindros coaxiales es

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dU}{dr} = 0$$

donde U es la temperatura a una distancia r del eje común.

2. Muestre que la temperatura U a una distancia r del eje común de dos cilindros coaxiales de radios a y b $(a < b)$ mantenidos a temperaturas constantes U_1 y U_2 respectivamente, es

$$U = \frac{U_1 \ln b/r + U_2 \ln r/a}{\ln b/a}$$

3. Muestre que la ecuación diferencial para la temperatura de estado estacionario en una región acotada por dos esferas concéntricas es

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dU}{dr} = 0$$

donde U es la temperatura a una distancia r del centro común.

4. Muestre que la temperatura U a una distancia r del centro común de dos esferas concéntricas de radios a y b $(a < b)$ mantenidas a temperaturas constantes U_1 y U_2, respectivamente, es

$$U = \frac{bU_2 - aU_1}{b - a} + \frac{ab(U_1 - U_2)}{(b - a)r}$$

5. Dé una interpretación que involucre difusión a los (a) Ejercicios 1 y 2; (b) Ejercicios 3 y 4.

EJERCICIOS C

1. Un tubo cilíndrico largo de longitud L que contiene vapor a temperatura U_1 tiene un radio igual a a. Se cubre con un material aislante de espesor b y conductividad térmica K. Muestre que si la temperatura externa del aislante es U_2, entonces la perdida de calor está dada por

$$\frac{2\pi LK(U_1 - U_2)}{\ln(1 + b/a)}$$

2. Supóngase que un tubo tiene dos capas de material aislante de igual espesor, pero de diferente conductividad térmica. Pruebe que hay menos pérdida de calor cuando la capa externa tiene la mayor conductividad térmica.

3. Una pieza de ancho L (cuyas otras dimensiones pueden considerarse infinitas) está, compuesta de un material radioactivo. Debido a las reacciones que ocurren en este material, el calor que se genera continuamente fluye hacia afuera desde las caras de la pieza. (a) Tomando el eje x perpendicular a las caras de modo que las caras estén localizadas en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente, muestre que la temperatura de estado estacionario en la pieza está descrita por la ecuación

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -Q$$

donde Q es una constante positiva que depende de la tasa a la cual el calor se genera y las constantes físicas del material. (b) Asumiendo que las caras de la pieza se mantienen a 0° C, muestre que la temperatura en el plano de la mitad de la pieza es $\frac{1}{8}QL^2$.

4. Trabaje un problema similar al del Ejercicio 3 con material radioactivo contenido entre dos cilindros concéntricos de radios a y b, respectivamente.

Aplicaciones a problemas misceláneos de crecimiento y decaimiento

La ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = ay \tag{1}$$

dice que la tasa de cambio en el tiempo de una cantidad y es proporcional a y. Si la constante de proporcionalidad a es positiva y y es positivo, entonces dy/dt es positivo y y aumenta. En este caso hablamos de que y crece, y el problema es uno de crecimiento. Por otro lado, si a es negativo y y es positivo, entonces dy/dt es negativo y y decrece. Aquí el problema es uno que involucra decaimiento.

Puesto que la solución de (1) está dada por la función exponencial $y = ce^{at}$ frecuentemente nos referimos a (1) como la ley ***de crecimiento exponencial*** si $a > 0$ y la ***ley de decaimiento exponencial*** si $a < 0$. Ecuaciones muy similares a (1) surgen de muchos campos aparentemente no relacionados. En lo que sigue consideramos dos ejemplos ilustrativos, uno relacionado con temperatura, y el otro con el fenómeno de desintegración radioactiva.

[redacted]

Se calienta agua a la temperatura del punto de ebullición de 100° C. El agua se remueve, luego del calor y se guarda en un cuarto el cual está a una temperatura constante de 60° C. Después de 3 min la temperatura del agua es 90° C. (a) Encuentre la temperatura del agua después de 6 min. (b) ¿Cuándo la temperatura del agua será de 75° C? ¿61° C?

Formulación matemática. Denote por U la temperatura del agua t minutos después de remover la fuente de calor. La diferencia de temperatura entre el agua y el cuarto es $U - 60$. La tasa de cambio en U es dU/dt. Con base en la experiencia, uno espera que la temperatura cambie más rápidamente cuando $(U-60)$ es grande y más lentamente cuando $(U-60)$ es pequeño.

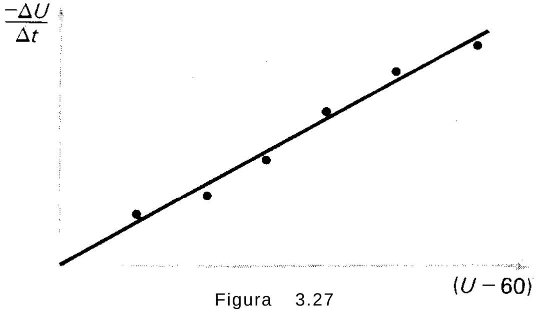


Figura 3.27

Desarrollemos un experimento en el cual tomamos temperaturas en varios intervalos de tiempo, siendo ΔU el cambio en temperatura y Δt el tiempo para producir este cambio. Tomando a Δt pequeño esperamos que $\Delta U/\Delta t$ será muy cercano a dU/dt. Si graficamos $\Delta U/\Delta t$ contra (U- 60), podríamos producir un gráfico similar al de la Figura 3.27. Los puntos marcados están determinados por el experimento. Puesto que el gráfico es, aproximadamente, una línea recta asumimos que dU/dt es proporcional a $(U - 60)$, esto es.

$$\frac{dU}{dt} = a(U - 60)$$

donde a es una constante de proporcionalidad. Ahora dU/dt es negativo cuando $(U-60)$ es positivo, y así escribiremos $a = -k$ donde $k > 0$. La ecuación es

$$\frac{dU}{dt} = -k(U - 60)$$

Esta ecuación se conoce en física como la ley *de enfriamiento de Newton y* es de importancia en muchos problemas de temperatura. Realmente, es solo una aproximación a la situación física. Las condiciones que acompañan esta ecuación se obtienen de

$$U = 100\ C \text{ donde } t = 0, \qquad U = 90\ C \text{ donde } t = 3 \text{ (minutos)}$$

Solución Resolviendo la ecuación por separación de variables tenemos

$$\int \frac{dU}{U-60} = \int -k\,dt, \qquad \ln(U-60) = -kt + c_1 \quad \text{ó} \quad U - 60 = ce^{-kt}$$

Donde $t = 0$, $U = 100$, así que c = 40. De donde, $U - 60 = 40e^{-kt}$. Donde $t = 3$, $U = 90$, así que $e^{-3k} = \frac{3}{4}$ ó $e^{-k} = (\frac{3}{4})^{1/3}$. De donde

$$U - 60 = 40(e^{-k})^t = 40(\tfrac{3}{4})^{t/3} \text{ esto es, } \quad U = 60 + 40(\tfrac{3}{4})^{t/3} \tag{2}$$

Temperatura después de 6 minutos. Haga $t = 6$ en (2), y obtenga $U = 82{,}5°$ C.

Tiempos donde la temperatura es 75” C, 61” C. Si $U = 75”$ C, entonces $75 = 60 + 40(\frac{3}{4})^{t/3}$, $(\frac{3}{4})^{t/3} = \frac{3}{8}$ y $t = 10{,}2$. Si $U = 61°$ C, entonces $(\frac{3}{4})^{t/3} = \frac{1}{40}$ y $t = 38{,}5$.

Así, toma 10,2 min para que el agua a 100” C baje en temperatura a 75” C, y 38,5 min para que baje de 100” C a 61” C.

Por métodos experimentales similares a los indicados en el problema de temperatura obtenemos la siguiente:

> **Ley de desintegración radioactiva.** *La tasa de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional, en cualquier instante a la cantidad de sustancia que está presente.*

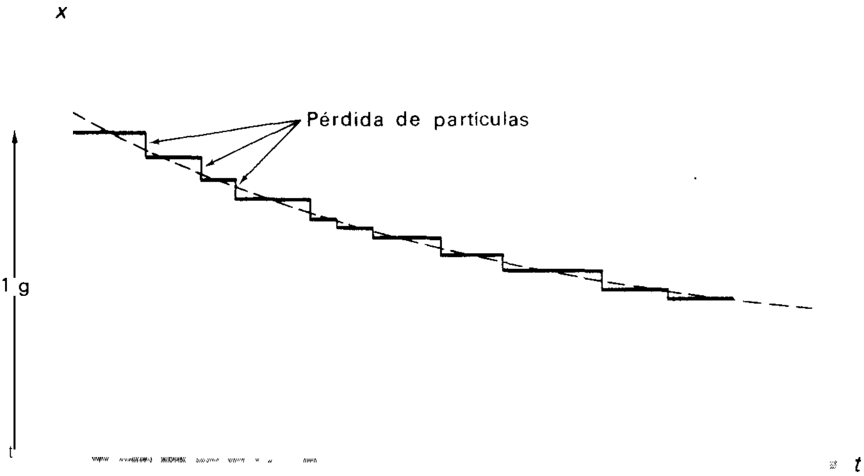


Figura 3 28

Antes de formular matemáticamente esta ley, consideremos el fenómeno de radioactividad con algún detalle. Cuando un elemento radioactivo como el radio o el uranio se desintegra, emite partículas de una manera aleatoria. Cada una de estas partículas tiene una masa definida, la cual es pequeña. Si empezamos con una masa de 1 g del material radioactivo y consideramos lo que sucede cuando se emiten las partículas, encontramos una situación similar a la que muestra en la Figura 3.28. Aquí, x es la cantidad de sustancia que queda después de tiempo t, asumiendo que empezamos con 1 g en $t = 0$. Cada vez que hay una baja en el valor de x significa que se han emitido partículas; entre más grande sea la baja, mayor será el número de partículas emitidas. Así, la cantidad de la sustancia radioactiva es, en realidad, una función discontinua en t. Entonces, ¿qué se quiere decir con dx/dt? Para obviar esta dificultad matemática aproximamos la curva verdadera por una curva continua (punteada en Figura 3.28). Así, no cometemos mucho error, y al mismo tiempo aseguramos tener un gráfico para el cual dx/dt existirá en toda parte. Aquí estamos construyendo una abstracción matemática de una situación física. Las ideas presentadas aquí ocurren frecuentemente en física debido al tamaño finito aún de la partícula más pequeña, en otras palabras debido a la teoría atómica. Aún en los problemas de circuitos eléctricos, ocurre la abstracción matemática (el estudiante debería tratar de ver cómo). Como una consecuencia uno debe siempre estar alerta en casos donde estas ideas sean importantes. Consideremos ahora un ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Se han encontrado que el 0,5 por ciento de radio desaparece en 12 años. (a) ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1.000 años? (b) ¿Cuál es la vida media del radio?

Formulación matemática. Sea A la cantidad de radio, en gramos, presente después de t años. Entonces dA/dt (la cual existe en virtud de nuestra abstracción matemática) representa la tasa de desintegración del radio. De acuerdo con la ley en la página 107,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad o \quad \frac{dA}{dt} = \alpha A$$

donde α es una constante de proporcionalidad. Puesto que $A > 0$ y decreciente, entonces $dA/dt < 0$ y vemos que α debe ser positiva. Escribiendo $\alpha = -k$,

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

Sea A_0 la cantidad, en gramos, del radio presente inicialmente. Entonces $0{,}005A_0$ gramos desaparecen en 12 años, quedando $0{,}995A_0$ gramos. Así

$$A = A_0 \text{ en } t = 0, \qquad A = 0{,}995A_0 \text{ en } t = 12 \text{ (años)}$$

Solución Separando las variables, tenemos al integrar

$$\ln A = -kt + c_1 \quad o \quad A = ce^{-kt}$$

Puesto que $A = A_0$ en $t = 0$, $c = A_0$. De donde, $A = A_0e^{-kt}$. Puesto que $A = 0{,}995A_0$ en $t = 12$,

$$0.995A_0 = A_0e^{-12k}, \qquad e^{-12k} = 0{,}995, \qquad e^{-k} = (0{,}995)^{1/12} \tag{3}$$

De donde,
$$A = A_0e^{-kt} = A_0(e^{-k})^t = A_0(0{,}995)^{t/12} \tag{4}$$

o, si resolvemos para k en (3), hallamos $k = 0{,}000418$, de modo que

$$A = A_0e^{-0{,}000418t} \tag{5}$$

Porcentaje desaparecido en 1.000 años. Con $t = 1.000$ tenemos, de (4) ó (5), $A = 0{,}658A_0$, así que el 34,2 por ciento desaparece en 1.000 años.

Vida media del radio. La vida media de una sustancia radioactiva se define como el tiempo que toma para que se desaparezca el 50 por ciento de la sustancia. Así, para nuestro problema, deseamos hallar el tiempo cuando $A = \frac{1}{2}A_0$. Usando (5) encontramos $e^{-0{,}000418t} = \frac{1}{2}$ ó $t = 1.660$ años, aproximadamente.

EJERCICIOS A

1. Agua a una temperatura de 100° C se enfría en 10 min a 80° C en un cuarto con temperatura de 25° C. (a) Encuentre la temperatura del agua después de 20 min. (b) ¿Cuándo la temperatura será de 40° C? ¿26° C?

2. Agua a una temperatura de 10° C toma 5 min para calentarse a 20° C en un cuarto con temperatura de 40° C. (a) Encuentre la temperatura después de 20 min; después de $\frac{1}{2}$ h. (b) ¿Cuándo la temperatura será de 25° C?

3. Si la vida media del radio es de 1.700 años, ¿qué porcentaje de radio se puede esperar que quede después de 50, 100, y 200 años?

4. Encuentre la vida media de una sustancia radioactiva si el 25 por ciento de ésta desaparece en 10 años.

5. Si el 30 por ciento de una sustancia radioactiva desaparece en 10 días, ¿en cuánto tiempo desaparecerá el 90 por ciento?

6. La carga eléctrica, en culombios, en una superficie esférica se escapa a una tasa proporcional a la carga instantánea. Inicialmente, la carga es de 5 culombios, y en 20 min se escapa un tercio. ¿Cuándo quedará 1 culombio?

7. Bacterias en un cierto cultivo incrementan a una tasa proporcional al número presente. Si el número original se incrementa en un 50 por ciento en $\frac{1}{2}$ h, ¿en cuanto tiempo se espera tener tres veces el número original? ¿Cinco veces el número original?

8. Un cultivo de bacteria “enferma” crece a una tasa que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número presente. Si hay inicialmente 9 unidades y 16 unidades están presentes después de 2 días, ¿después de cuántos días habrá 36 unidades?

9. En una cierta solución hay 2 g de un químico. Después de 1 hora hay 3 g del químico. Si la tasa de incremento del químico es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo que ha estado en la solución, ¿cuántos gramos habrá después de 4 horas?

10. Suponga que una sustancia decrece a una tasa que es inversamente proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 12 unidades presentes y 8 unidades están presentes después de 2 días, ¿cuánto tiempo tomará para desaparecer la sustancia?

11. La temperatura máxima que puede leerse en un cierto termómetro es 110” F. Cuando el termómetro marca 36” F, se coloca en un horno. Después de 1 y 2 minutos, respectivamente, marca 60” F y 82” F. ¿Cuál es la temperatura del horno?

EJERCICIOS B

1. Los neutrones en una pila atómica incrementan a una tasa proporcional al número de neutrones presente en cualquier instante (debido a la fisión nuclear). Si inicialmente hay presente N_0 neutrones, y N, y N_2 neutrones están presentes en tiempos T_1 y T_2, respectivamente, muestre que

$$\left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{T_1} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{T_2}$$

2. Uranio se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si M_1 y M_2 gramos están presentes en tiempos T, y T_2, respectivamente, muestre que la vida media es

$$\frac{(T_2 - T_1)\ln 2}{\ln(M_1/M_2)}$$

3. Un hombre presta $1.000 sujeto a la condición de que el interés se computa continuamente. Si la tasa de interés es del 4% por año, ¿cuánto tendrá que pagar en 10 años? ¿Cuál es la tasa de interés simple equivalente?

4. Muestre que el tiempo requerido, en años, para que una suma de dinero se doble si el interés se computa continuamente a una tasa r por ciento por año es $(100 \ln 2)/r$.

5. En un cierto cultivo, una bacteria crece a una tasa que es proporcional a la p-ésima potencia del número presente. Si inicialmente el número es N_0, y si después de tiempo T, el número es N_1, muestre que el número es N_2 en un tiempo dado por

$$T_2 = \frac{N_2^{1-p} - N_0^{1-p}}{N_1^{1-p} - N_0^{1-p}}$$

Discuta los casos $p = 1$ y $p = 0$.

6. Un isótopo radioactivo con vida media de T minutos se produce en un reactor nuclear a úna tasa de a gramos por minuto. Muestre que el número de gramos de isótopo presente después de un tiempo largo está dado por $aT/\ln 2$.

EJERCICIOS C

1. Cuando la luz pasa a través’ de un vidrio se absorbe algo de ella. Experimentalmente, la cantidad de luz absorbida por un vidrio de espesor pequeño es proporcional al espesor del vidrio y a la cantidad de luz incidente. Muestre que si r por ciento de luz se absorbe por un vidrio de espesor w, entonces el porcentaje de luz absorbida por un espesor de nw está dado por

$$100\left[1-\left(1-\frac{r}{100}\right)^n\right], \qquad 0 \leqq r \leqq 100$$

2. La cantidad del isótopo radioactivo C^{14} (carbono 14) presente en toda la materia orgánica viviente presenta una razón constante a la cantidad del isótopo estable C^{12}. Un análisis de los restos fósiles de un dinosaurio muestra que la razón es solamente 6,24 por ciento de aquella para materia viviente. Asumiendo que la vida media del C^{14} es aproximadamente 5.600 años, determine cuándo estuvo vivo el dinosaurio. Este método de ***fecha de carbono se*** usa con frecuencia por científicos, tales como físicos, químicos, biólogos, geólogos y arqueólogos quienes están interesados en determinar la edad de varios materiales, tales como rocas, reliquias antiguas, pinturas, etc.

7 El cable colgante

Considere un cable o una cuerda que cuelga de dos puntos, A y B (Figura 3.29), no necesariamente al mismo nivel. Asuma que el cable es flexible de modo que debido a su carga (la cual puede ser debida a su propio peso, o a fuerzas externas actuantes, o a una combinación de éstas) toma la forma como en la figura. Sea C la posición más baja del cable, y escoja los ejes x y y como en la figura, donde el eje y pasa por C.

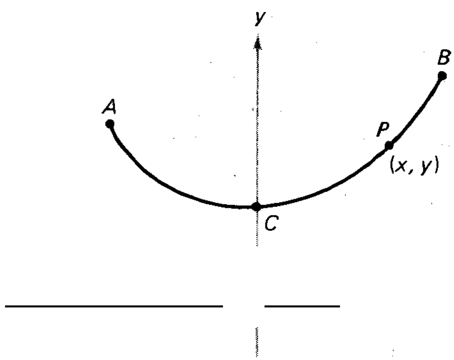


Figura 3.29

Considere aquella parte del cable entre el punto más bajo y cualquier punto P en el cable con coordenadas (x, y). Esta parte estará en equilibrio debido a la tensión T en P (Figura 3.30), la fuerza horizontal H en C, y la carga vertical total en el segmento CP del cable denotada por $W(x)$ la cual se asume que actúa en algún punto Q, no necesariamente en el centro del arco CP. Para el equilibrio, la suma algebraica de las fuerzas en la dirección x (u horizontal) debe ser igual a cero, y la suma algebraica de fuerzas en el eje y (o vertical) debe ser igual a cero. Otra manera de decir lo mismo es que la suma de fuerzas hacia la derecha debe ser igual a la suma de las fuerzas hacia la izquierda, y la suma de fuerzas hacia arriba debe ser igual a la suma de fuerzas hacia abajo.

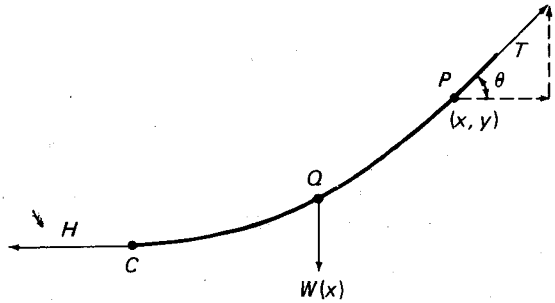


Figura 3.30

Descompongamos la tensión T en dos componentes (líneas punteadas en la Figura 3.30), la componente horizontal con magnitud $T \cos\theta$, y la componente vertical con magnitud T sen θ.

Las fuerzas en la dirección x son H hacia la izquierda y $T \cos\theta$ hacia la derecha, mientras que las fuerzas en la dirección y son W hacia abajo y T sen θ hacia arriba. De donde,

$$T \operatorname{sen} \theta = W, \qquad T \cos \theta = H \tag{1}$$

Dividiendo, y usando el hecho que $\tan\theta = dy/dx =$ pendiente de la tangente en P, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \tag{2}$$

En esta ecuación, H es una constante, puesto que es la tensión en el punto más bajo, pero W puede depender de x. Por diferenciación de (2) con respecto a x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{dW}{dx} \tag{3}$$

Ahora dW/dx representa el incremento en W por unidad de incremento en x; ésto es, la carga por unidad de distancia en la dirección horizontal.

La ecuación (3) es fundamental. En los siguientes ejemplos ilustrativos y en los ejercicios veremos que para diferentes cargas por unidad de distancia horizontal obtenemos varias ecuaciones diferenciales las cuales producen varias formas del cable.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un cable flexible de poco peso (despreciable) soporta un puente uniforme (Figura 3.31). Determine la forma del cable. (Este es el problema de determinar la forma del cable en un *puente colgante*, el cual es de gran uso en la construcción moderna de puentes.)

Formulación matemática. La ecuación (3) se cumple aquí y nos resta determinar dW/dx, la carga por unidad de incremento en la dirección horizontal. En este caso dW/dx es una constante, llamada el peso por unidad de longitud del puente. Llamando esta constante w, tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \tag{4}$$

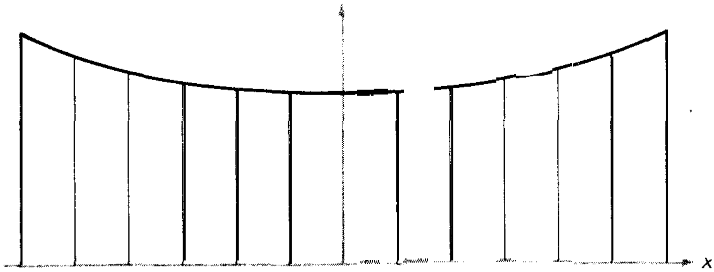


Figura 3.31

Denotando por b la distancia del punto más bajo del cable desde el puente, tenemos

$$y = b \text{ donde } x = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ donde } x = 0$$

la segunda condición debido a que el punto donde $x = 0$ es un punto mínimo.

Integrando *(4)* dos veces, y haciendo uso de las condiciones dadas, encontramos que

$$y = \frac{wx^2}{2H} + b$$

El cable asume así la forma de una parábola.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Una cuerda flexible con densidad constante cuelga entre dos puntos fijos. Determine la forma de la cuerda.

Formulación matemática. Aquí también se cumple la ecuación diferencial (3) y sólo tenemos que determinar dW/dx. Para ello, considere un segmento de la cuerda (Figura. 3.32). Este segmento, supuestamente infinitesimal, está ampliado en la figura. El peso está uniformemente distribuido sobre el arco PQ en la figura. Es fácil ver que si la densidad de la cuerda es w (una constante) entonces $dW/ds = w$. Sin embargo, deseamos dW/dx.

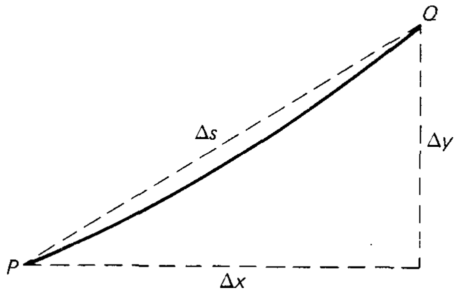


Figura 3.32

Esto se consigue al escribir

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = w \quad \text{o} \quad \frac{dW}{dx} = w\frac{ds}{dx}$$

Puesto que $\quad \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \dfrac{dW}{dx} = w\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{5}$$

Las mismas condiciones se mantienen aquí como en el Ejemplo ilustrativo 1, esto es $y = b$ donde $x = 0$, $dy/dx = 0$ donde $x = 0$.

Solución La ecuación (5) carece de x y y. Haciendo $dy/dx = p$, tenemos

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + p^2}$$

Y

$$\int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \int \frac{w}{H}\,dx \quad \text{o} \quad \ln\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right) = \frac{wx}{H} + c_1$$

esto es,

$$p + \sqrt{p^2 + 1} = c_2 e^{wx/H}$$

Puesto que $p = dy/dx = 0$ donde $x = 0$, tenemos $c_2 = 1$, así que

$$p + \sqrt{p^2 + 1} = e^{wx/H} \tag{6}$$

Resolviendo para p al aislar el radical y elevando al cuadrado tenemos

$$p = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{wx/H} - e^{-wx/H}\right)$$

De donde, por integración

$$y = \frac{H}{2w}\left(e^{wx/H} + e^{-wx/H}\right) + c_3 \tag{7}$$

Usando $y = b$ donde $x = 0$, hallamos $c_3 = b - H/w$. Si escogemos $b = H/w$, por un cambio apropiado del eje x, entonces $c_3 = 0$ y tenemos

$$y = \frac{H}{2w}\left(e^{wx/H} + e^{-wx/H}\right) \tag{8}$$

Si usamos la notación de funciones hiperbólicas, $\frac{1}{2}\left(e^{wx/H} + e^{-wx/H}\right) = \cosh wx/H$ se obtiene

$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{wx}{H} \tag{9}$$

El gráfico de (8) o (9) se llama una ***catenaria*** (del latín, significando "cadena").

EJERCICIOS A

1. Un cable flexible de peso despreciable soporta un puente uniforme, como se muestra en la Figura 3.33. Las dimensiones son como se indican: P el punto mínimo de la curva APB. Usando un conjunto apropiado de ejes, determine una ecuación para la curva APB.

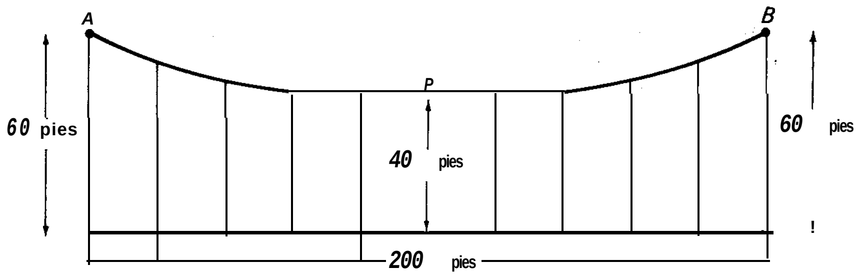


Figura 3.33

2. Un cable de un puente colgante tiene sus soportes al mismo nivel, separados a una distancia de 500pies. Si los soportes están a 100 pies más altos que el punto mínimo del cable, use un conjunto apropiado de ejes para determinar una ecuación para la curva en la cual el cable cuelga, asumiendo que el puente es de peso uniforme y que el peso del cable es despreciable. Encuentre la pendiente del cable en los soportes..
3. El puente de la Figura 3.33 tiene un peso variable de $400 + 0{,}001x^2$ libras por pie de longitud, donde x es la distancia en pies desde el centro del puente. Encuentre una ecuación para la curva ***APB*** del cable.

EJERCICIOS B

1. Un cable pesa 0,5 lb/pie. Cuelga de dos soportes que están a un mismo nivel y a 100 pies de separación. Si la pendiente del cable en uno de los soportes es $12/5$, (a) encuentre la tensión del cable en su punto más bajo; (b) determine una ecuación para la curva en la cual el cable cuelga.
2. Un cable de un puente colgante tiene sus soportes en el mismo nivel, separados a una distancia de L pies. Los soportes están a pies por encima del punto mínimo del cable. Si el peso del cable es despreciable pero el puente tiene un peso uniforme de w libras por pie muestre que, (a) la tensión en el cable en el punto más bajo es $wL^2/8a$ lb; (b) la tensión en los soportes es $(wL/8a)\sqrt{L^2 + 16a^2}$ lb.
3. Un cable tiene una densidad constante de w libras por pie y cuelga de dos soportes al mismo nivel separados L pies. Si la tensión en el punto más bajo del cable es H libras, muestre que la tensión del cable en los soportes está dada, en libras, por $H \cosh(wL/2H)$.
4. Muestre que el peso total del cable en el Ejercicio 3 es $2H$ senh $(wL/2H)$.

EJERCICIOS C

1. Un cable de P pies de largo tiene una densidad constante de w libras por pie. Cuelga de dos soportes que están a un mismo nivel y separados L pies. Los soportes están a pies por encima del punto más bajo del cable. Muestre que la tensión H en el punto más bajo del cable está dada por

$$H = \frac{wL}{2 \ln[(P + 2a)/(P - 2a)]}$$

2. Un cable de densidad 0.4 lb/pie tiene 250pies de largo. Cuelga de dos soportes que están al mismo nivel y separados 200pies. Calcule (a) la distancia de los soportes por encima del punto más bajo del cable, (b) la tensión en ese punto.

3. Un cable de densidad 0,5 lb/pie cuelga de dos soportes que están al mismo nivel y separados 50pies. Los soportes están a 10 pies por encima del punto más bajo del cable. Encuentre (a) la longitud del cable, (b) la tensión en el punto más bajo del cable, (c) la tensión en los soportes del cable.

8 Un viaje a la Luna

Desde tiempo inmemorial, la humanidad ha contemplado la Luna, preguntándose muchas cosas, entre ellas si algún día los hombres podrían viajar a ella. Julio Verne escribió una novela fantástica sobre estas posibilidades. Con el advenimiento de la tecnología moderna este sueño finalmente se ha hecho realidad debido a la invención de los cohetes, los cuales discutiremos en la próxima sección.

Por el tiempo en que se enunció la famosa ley gravitacional de Newton fue cuando aquellas especulaciones sobre las posibilidades del viaje por el espacio se les dió por primera vez una base matemática.

> **Ley de la gravitación universal de Newton.** ***Dos objetos cualesquiera en el universo están atraídos entre sí con una fuerza que varía directamente al producto de sus masas e inversamente al cuadrado de la distancia entre ellos.*** En símbolos
>
> $$F = \frac{GM_1M_2}{d^2} \tag{1}$$
>
> donde M_1, M_2 son las masas de los objetos; d es la distancia entre ellos; F es la fuerza de atracción; y G es la constante de proporcionalidad.

En esta sección usamos esta ley para investigar la posibilidad de disparar un proyectil con un gran cañón, por ejemplo, verticalmente hacia la Luna. Aunque este medio de transporte es prácticamente inapropiado, a menos que por alguna razón no deseemos regresar, el problema es interesante por una variedad de razones, una de ellas es estimar la velocidad de salida que este cañón debiera tener. Al intentar resolver este problema hacemos los siguientes supuestos:

1. La Tierra y la Luna son esferas perfectas con radios respectivamente R_e y R_m, con masas M_e y M_m, y con la distancia entre sus superficies igual a a.

2. El proyectil (o nave) de masa m se dispara verticalmente hacia arriba hacia el centro de la Luna con velocidad inicial v_0.

3. Las rotaciones de la Tierra y de la Luna no se tienen en cuenta.

4. La influencia del Sol y otros planetas no se considera.

5. La resistencia del aire no se tiene en cuenta.

Refiriéndonos a la Figura 3.34, tomando la dirección de la Tierra hacia la Luna como positiva y r como la distancia de m a la superficie de la Tierra en el tiempo t, tenemos por la ley de Newton y (1),

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_em}{(r+R_e)^2} + \frac{GM_mm}{(a+R_m-r)^2}$$

o

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_e}{(r+R_e)^2} + \frac{GM_m}{(a+R_m-r)^2} \tag{2}$$

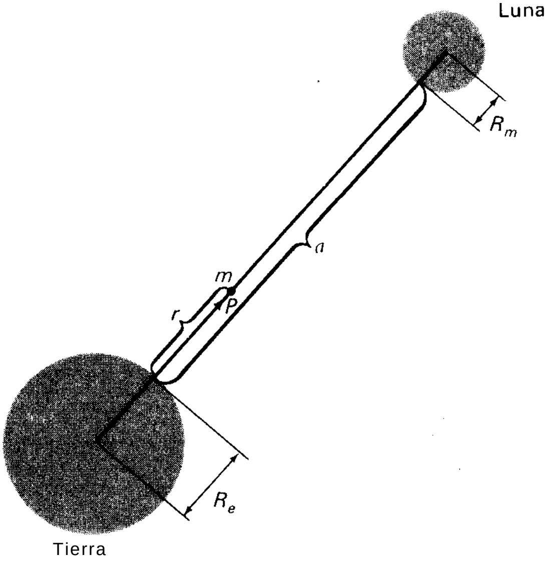


Figura 3.34

mostrando que los resultados son independientes de la masa del proyectil. Es posible remplazar GM_e por cantidades más familiares. Para ver esto, note que la atracción de una masa m a la Tierra es su peso mg. Así, de (1),

$$\frac{GM_e m}{R_e^2} = mg \quad \text{o} \quad GM_e = gR_e^2 \tag{3}$$

De manera similar, denotando por g_m la aceleración debida a la gravedad en la Luna

$$GM_m = g_m R_m^2 \tag{4}$$

usando (3) y (4) en (2), se tiene

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{gR_e^2}{(r + R_e)^2} + \frac{g_m R_m^2}{(a + R_m - r)^2} \tag{5}$$

Las condiciones iniciales son $r = 0$ y $dr/dt = v_0$, donde $t = 0$. Puesto que la ecuación (5) no contiene a t, sea $dr/dt = v$. Entonces

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR_e^2}{(r + R_e)^2} + \frac{g_m R_m^2}{(a + R_m - r)^2}$$

Integrando y usando las condiciones en $t = 0$, encontramos

$$v^2 = \frac{2gR_e^2}{r + R_e} + \frac{2g_m R_m^2}{a + R_m - r} + v_0^2 - 2gR_e - \frac{2g_m R_m^2}{a + R_m} \tag{6}$$

la cual nos permite determinar la velocidad instantánea v. Al remplazar v por dr/dt, podemos determinar r como una función de t. De esto podemos teóricamente calcular el tiempo empleado para llegar a la Luna. Realmente las integraciones que surgen no pueden desarrollarse en forma cerrada, y deben emplearse técnicas aproximadas.*

Determinemos la velocidad de salida de nuestro cañón que se necesita para alcanzar el ***punto neutral*** (el lugar entre la Tierra y la Luna donde la gravedad es cero) con velocidad cero. La posición neutral denotada por $r = r_n$ se determina de la ecuación

$$\frac{M_e}{(r_n + R_e)^2} = \frac{M_m}{(a + R_m - r_n)^2} \tag{7}$$

obtenida al hacer el lado derecho de (2) igual a cero. Puesto que deseamos $v = 0$ cuando $r = r_n$, tenemos de (6),

$$v_0^2 = 2gR_e - \frac{2g_m R_m^2}{a + R_m - r_n} + \frac{2g_m R_m^2}{a + R_m} - \frac{2gR_e^2}{r_n + R_e} \tag{8}$$

Para tener alguna idea de la magnitud de v_0, empleemos las siguientes cifras aproximadas en astronomía:

$$a = 240.000 \text{ millas}, \qquad R_e = 4.000 \text{ millas}, \qquad g = 32 \text{ pies/seg}^2$$

$$g_m = 5{,}3 \text{ pies/seg}^2 \text{ (cerca de } \tfrac{1}{6}\, g), \qquad M_e = 81 M_m$$

Puesto que $M_e = 81\, M_m$, aproximadamente, la ecuación (7) se puede escribir

$$\frac{81 M_m}{(r_n + R_e)^2} = \frac{M_m}{(a + R_m - r_n)^2} \quad \text{o} \quad \frac{81}{(r_n + R_e)^2} = \frac{1}{(a + R_m - r_n)^2}$$

esto es,

$$r_n = \frac{9a + 9R_m - R_e}{10}$$

Usando esto en (8), tenemos

$$v_0^2 = 2gR_e - \frac{20 g_m R_m^2}{a + R_m + R_e} + \frac{2g_m R_m^2}{a + R_m} - \frac{20 g R_e^2}{9(a + R_m + R_e)} \tag{9}$$

De (3) y (4) y con $M_e = 81\, M_m$, tenemos

$$gR_e^2 = 81 g_m R_m^2 \tag{10}$$

y puesto que $g_m = g/6$, aproximadamente, sigue de (10) que

$$R_m = \frac{\sqrt{6}}{9} R_e \tag{11}$$

aproximadamente. Usando (10) en (9), tenemos

$$v_0^2 = 2gR_e - \frac{200 g R_e^2}{81(a + R_m + R_e)} + \frac{2gR_e^2}{81(a + R_m)} \tag{12}$$

*Sin embargo, las integrales se pueden evaluar en términos de integrales elípticas.

Ahora a es aproximadamente 60 R_e, y, de (11), R_m es aproximadamente $\frac{1}{4}$ R_e. Por tanto, (12) se puede escribir

$$v_0^2 = 2gR_e - \frac{200gR_e}{81 \times 61,25} + \frac{2gR_e}{81 \times 60,25}$$

así que $v_0^2 = 2gR_e(1 - 0,02 + 0,0002)$ aproximadamente, ó $v_0 = \sqrt{2gR_e}(1 - 0,01) = 0,99\sqrt{2gR_e}$ por el teorema del binomio. Usando los valores g y R_e, encontramos que $v_0 = 6,9$ millas/seg, aproximadamente. Actualmente esta velocidad es bastante factible de conseguirse. El cañón "Gran Berta" de la primera guerra mundial tenía una velocidad de salida de 1 milla/seg, así que tal vez todavía puede haber chance.

De la ecuación. (9) podemos determinar la así llamada "velocidad de escape", la cual es la velocidad que el proyectil debería tener para abandonar la Tierra para nunca regresar, asumiendo que los otros planetas, soles, y otros astros no entran en consideración. Para hallar esta velocidad sólo tenemos que hacer $a \to \infty$ en (9). El resultado es $v_0 = \sqrt{2gR_e}$, la cual es aproximadamente 1% mayor que la velocidad requerida para alcanzar el punto neutral. Realmente, la velocidad de escape podría haber sido hallada más fácilmente empezando con (2) y eliminando el segundo término de la derecha (ver Ejercicio 4A).

EJERCICIOS A

1. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0 igual a la velocidad de escape. Despreciando la influencia de la Luna y otros planetas: (a) Muestre que la velocidad del proyectil a la distancia r de su punto de partida es

$$v = \sqrt{\frac{2gR_e^2}{r + R_e}}$$

donde R_e es el radio de la Tierra. (b) Calcule la velocidad del proyectil después de viajar 120.000 millas.

2. Muestre que el tiempo empleado por el proyectil del Ejercicio 1 para viajar la distancia r es

$$\frac{2}{3R_e\sqrt{2g}}[(r + R_e)^{3/2} - R_e^{3/2}]$$

3. Desconociendo la influencia de la Luna y planetas distintos a la Tierra, ¿cuánto tiempo le tomaría al proyectil del Ejercicio 1 para cubrir las distancias 120.000 millas y 240.000 millas?

4. Explique cómo se puede encontrar la velocidad de escape de un objeto desde la superficie de la Tierra a partir de la ecuación (2), página 116, al eliminar el segundo término de la derecha.

5. (a) Determine la distancia aproximada desde la superficie de la Tierra al punto neutral entre la Tierra y la Luna. (b) Asumiendo que un proyectil se lanza desde la superficie de la Tierra con la velocidad de escape, ¿cuál sería su velocidad al alcanzar el punto neutral?

EJERCICIOS B

1. Un objeto se proyecta verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de v_0 de magnitud menor a la velocidad de escape. Si solamente se tiene en cuenta la influencia de la Tierra, muestre que la máxima altura alcanzada es $v_0^2R_e/(2gR_e - v_0^2)$.

2. Asumiendo constante la aceleración gravitacional en todo lugar, muestre que un objeto proyectado desde la superficie de la Tierra con velocidad v_0 alcanza una altura máxima $v_0^2/2g$. Obtenga esto también al hacer $R_e \rightarrow \infty$ en el Ejercicio 1.

3. Compare las alturas máximas alcanzadas de acuerdo a los Ejercicios 1 y 2 para un objeto proyectado hacia arriba con velocidad de 50 pies/seg, 6 millas/seg.

4. ¿Cuál es la velocidad a partir de la cual las alturas en Ejercicios 1 y 2 difieren en más de un 5%? ¿50%?

EJERCICIOS C

1. Muestre que el tiempo requerido para que el proyectil del Ejercicio 1B alcance la altura máxima es

$$\frac{2gR_e^2}{(2gR_e - v_0^2)^{3/2}}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{v_0}{\sqrt{2gR_e}} + \frac{v_0\sqrt{2gR_e - v_0^2}}{2gR_e}\right)$$

2. Muestre, por series u otro medio, que si $v_0^2 \ll 2gR_e$ (esto es, la velocidad inicial es mucho menor que la velocidad de escape), entonces el tiempo para alcanzar la altura máxima es aproximadamente v_0/g. Este es el resultado que se obtiene si la aceleración de la gravedad se asume constante en todo lugar.

3. Un objeto cae a una distancia a del centro de la Tierra (radio R_e). Muestre que (a) toca la superficie de la Tierra con una velocidad igual a $\sqrt{2gR_e(1 - R_e/a)}$; (b) alcanza la superficie de la Tierra en un tiempo dado por

$$\frac{a}{2gR_e^2}\left\{\sqrt{R_e(a - R_e)} + \tfrac{1}{2}a\cos^{-1}\left(\frac{2R_e - a}{a}\right)\right\}$$

asumiendo despreciable la resistencia del aire.

4. Muestre que la velocidad de escape desde la superficie de la Luna es aproximadamente 1,5 millas/seg.

9 Aplicaciones a cohetes

Un cohete se mueve por la expulsión hacia atrás de una masa de gas formada al quemar un combustible. Este rechazo de masa tiene el efecto de aumentar la velocidad hacia adelante del cohete, permitiendo así continuar hacia adelante. Para considerar el movimiento de cohetes, debemos tratar la noción de un objeto cuya masa es cambiante. En la Sección 1 de este capítulo indicamos que la fuerza neta actuando sobre un objeto es igual a la tasa de cambio en momentum (segunda ley de Newton). Usaremos esto para encontrar la ley de movimiento de un cohete.

Suponga que la masa total de un cohete en un tiempo t es M y que en un tiempo más tarde $t + \Delta t$ la masa es $M + \Delta M$, esto es, una masa $-\Delta M$ de gas se ha expelido por la parte de atrás del cohete (note que la masa de gas expelido en el tiempo Δt es $-\Delta M$, puesto que ΔM es una cantidad negativa). Suponga que la velocidad del cohete relativa a la Tierra en tiempo t es V y en tiempo $t + \Delta t$ es $V + \Delta V$, y tomemos la dirección hacia arriba del cohete como positiva. El gas expelido tendrá velocidad $V + v$ relativa a la Tierra, donde v es una cantidad negativa, de modo que $-v$ representa la magnitud real de la velocidad del gas relativa al cohete, la cual para nuestros propósitos se considerará constante. El momentum total del cohete antes de la pérdida de gas es MV. Después de la pérdida de gas, el cohete tiene un momentum $(M+\Delta M)(V+$ AV), y el gas tiene momentum $-\Delta M(V+v)$, de modo que el momentum total después de la pérdida es $(M+\Delta M)(V+\Delta V)-\Delta M(V$ + u). El cambio de momentum, esto es, el momentum total después de la perdida de gas menos el momentum total antes de la perdida, es

$$(M+\Delta M)(V+\text{AL'})-\Delta M(V+v)-MV = M\,\Delta V - v\,\text{AM} + \text{AMAV}$$

La tasa instantánea de cambio en momentum es el límite del cambio en momentum dividido por At a medida que $\Delta t \to 0$, esto es,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(M\frac{\Delta V}{\Delta t} - v\frac{\Delta M}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta V\right) \tag{1}$$

Observación. Puesto que en tiempo $t +$ At la masa del cohete ha ***decrecido,*** uno podría estar inclinado a expresarla como $M-\Delta M$, donde $\Delta M > 0$, en vez de M + AM donde $\Delta M < 0$. Sin embargo, es mejor usar el método del texto para estar de acuerdo con la idea familiar del cálculo que, si una variable ***es decreciente,*** su derivada (aproximadamente en este caso $\Delta M/\Delta t$) es negativa.

Puesto que AM-O, AV-0, $\Delta M/\Delta t \to dM/dt$, *y* $\Delta V/\Delta t \to dV/dt$ a medida que At-o, (1) llega a ser

$$M\frac{dV}{dt} - v\frac{dM}{dt}$$

Ahora la tasa de cambio en momentum es la fuerza ***F.*** De donde

$$F = M\frac{dV}{dt} - v\frac{dM}{dt} \tag{2}$$

es nuestra ecuación básica para el movimiento de cohetes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un cohete con masa inicial de M_0 gramos parte radialmente desde la superficie de la Tierra. Expele gas a la tasa constante de ***a*** g/seg, a una velocidad constante ***b*** cm/seg relativa al cohete, donde $a > 0$ y $b > 0$. Asumiendo que ninguna fuerza externa actúa sobre el cohete, encontrar su velocidad y distancia viajada en cualquier tiempo.

Formulación matemática. Refiriéndonos a la ecuación fundamental, tenemos que $F = 0$ puesto que no hay fuerzas externas. Puesto que el cohete pierde ***a*** g/seg, perderá at g en t seg, y por tanto su masa después de t seg está dada por $M = M_0 - at$. También. la velocidad del gas relativa al cohete está dada por v = -b".

Así, (2) se convierte $\quad (M_0 - at)\dfrac{dV}{dt} - ab = 0 \quad$ o $\quad \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{ab}{M_0 - at} \qquad (3)$

con las condiciones iniciales asumidas $V = 0$ en $t = 0$.

Solución Integrando (3), encontramos $V = -b\ln(M_0 - at) + c_1$.

Puesto que $V = 0$ en $t = 0$, $c_1 = b\ln M_0$, y

$$V = b\ln M_0 - b\ln(M_0 - at) \tag{4}$$

la cual es la velocidad requerida del cohete. Si x representa la distancia viajada por el cohete en tiempo t medida desde la superficie de la Tierra, tenemos $V = dx/dt$ de modo que

$$\frac{dx}{dt} = b \ln M_0 - b \ln (M_0 - at) = -b \ln \left(\frac{M_0 - at}{M_0} \right)$$

de la cual se obtiene, al integrar, tomando $x = 0$ en $t = 0$,

$$x = bt + \frac{b}{a}(M_0 - at) \ln \left(\frac{M_0 - at}{M_0} \right) \tag{5}$$

la cual es la distancia viajada requerida. Note que las ecuaciones (4) y (5) son válidas solamente para $t < M_0/a$, el cual es el límite teórico para el tiempo de vuelo. El límite práctico es mucho menos que éste.

EJERCICIOS A

1. Si un campo gravitacional constante actúa sobre el cohete del ejemplo ilustrativo del texto, muestre que

$$(M_0 - at)\frac{dV}{dt} - ab = -g(M_0 - at)$$

Encuentre la velocidad del cohete en cualquier tiempo $t < M_0/a$ después de abandonar la Tierra, asumiendo que su velocidad inicial es cero.

2. Determine la altura del cohete del Ejercicio 1 en tiempo t

EJERCICIOS B

1. Un cohete tiene una masa de 25.000 kilogramos (kg), la cual incluye 20.000 kg de un combustible. Durante el proceso de quema los productos de la combustión se descargan a una velocidad relativa al cohete de 400 m/seg, involucrando una pérdida de 1.000 kg de combustible. El cohete parte de tierra con velocidad cero y viaja verticalmente hacia arriba. Si la única fuerza que actúa es la de la gravitación (variación con la distancia es despreciable): (a) Encuentre la velocidad del cohete después de 15, 20 y 30 segundos. (b) Encuentre la altura alcanzada cuando se ha quemado la mitad del combustible.

2. Un cohete tiene una masa M, la cual incluye una masa m de un combustible. Durante el proceso de quema los productos de la combustión se descargan a una velocidad $q > 0$ relativa al cohete. Este proceso de quema involucra una perdida por segundo de una masa p de combustible. Despreciando todas las fuerzas externas excepto una fuerza gravitacional constante, muestre que la altura máxima teórica alcanzada por el cohete es

$$\frac{qm}{p} + \frac{qM}{p} \ln \left(\frac{M - m}{M} \right) + \frac{q^2}{2g} \ln^2 \left(\frac{M - m}{M} \right)$$

si el cohete parte radialmente de la superficie de la Tierra con velocidad cero.

3. Adicionalmente a la fuerza gravitacional que actúa en el cohete del Ejercicio 2, hay una fuerza debida a la resistencia del aire la cual es proporcional a la velocidad instantánea del cohete. (a) Encuentre la velocidad del cohete en cualquier tiempo asumiendo que su velocidad inicial es cero. (b) Determine la altura del cohete en cualquier tiempo. (c) Encuentre la altura máxima teórica alcanzada.

4. Un objeto de masa M_0, sobre el cual no actúa ninguna fuerza externa, se mueve en una línea recta a través del espacio con velocidad v_0. En $t = 0$ empieza a in-

crementar su masa a la tasa constante de r g/seg. Muestre que la velocidad en cualquier tiempo t es $V = M_0 v_0/(M_0 + rt)$, y encuentre la distancia viajada.

EJERCICIOS C

1. Una masa esférica crece a una tasa proporcional a su área superficial instantánea. Asumiendo que la esfera tiene un radio inicial a y que cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad (no varía con la distancia), muestre que su aceleración instantánea es

$$\frac{g}{4}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)$$

donde r es su radio instantáneo. Así, muestre que una condición necesaria y suficiente para que la aceleración sea constante es que la esfera tenga un radio inicial de cero.

2. En un cohete de dos etapas la masa total inicial, incluyendo el combustible, es M. Después de un tiempo especificado T, la primera etapa del cohete de masa M_0 se separa y la segunda etapa de masa M_1 continúa con el vuelo. Establezca y resuelva las ecuaciones para el movimiento, asumiendo que inicialmente el cohete se proyecta verticalmente desde la superficie de la Tierra con velocidad v_0.

10 Problemas de física que involucran geometría

Muchos tipos de problemas de física dependen de alguna manera de la geometría. Por ejemplo, imagine un cilindro recto circular, lleno hasta la mitad con agua, y rotando con velocidad angular constante alrededor de su eje. La forma de la superficie del agua se determinará por la velocidad angular del cilindro. Aquí la física determina la forma geométrica de la superficie del agua.

Como otro ejemplo, considere el agua que sale a través de un hueco en la base de un tanque cónico. Aquí la forma geométrica del recipiente determina el comportamiento físico del agua.

En los ejemplos ilustrativos siguientes consideramos tres problemas físicos que involucran geometría; a saber, el flujo de agua de un tanque, la forma de la superficie del agua en un cilindro que rota, y la forma de un reflector.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un recipiente con una sección transversal constante A se llena con agua hasta la altura H. El agua fluye del tanque a través de un orificio, de sección transversal B, en la base del recipiente. Encuentre la altura del agua en cualquier tiempo y encuentre el tiempo para vaciar el tanque.

Formulación matemática. Considere el tanque que aparece en la Figura 3.35, donde A es el área de la sección transversal constante, y B el área de la sección transversal del orificio. Sea h la altura del agua en el tanque en tiempo t (nivel 1) y $h + \Delta h$ la altura en tiempo $t + \Delta t$ (nivel 2).

El principio básico que usamos es el principio obvio de que la cantidad de agua que se pierde cuando el nivel baja de 1 a 2 es igual a la cantidad de agua que se escapa por el orificio. Cuando el nivel del agua baja de 1 a 2, el

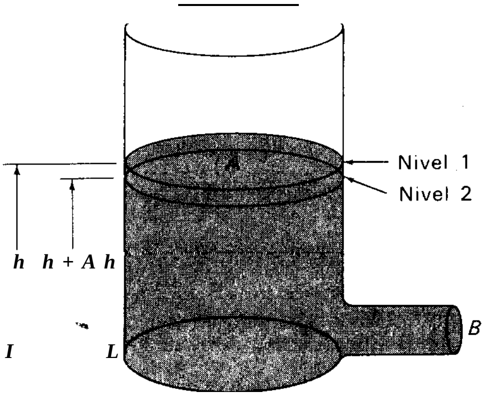


Figura 3.35

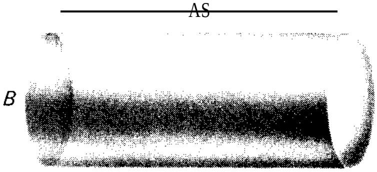


Figura 3.36

volumen perdido es numéricamente igual a $A\Delta h$. Sin embargo, debemos ser cuidadosos con los signos. Puesto que Δh es realmente negativo, tenemos, para el volumen real perdido en tiempo Δt, la cantidad $-A\Delta h$. El volumen de agua que escapa a través del orificio es aquel volumen que contendría un cilindro de sección transversal B y longitud Δs (Figura 3.36), donde Δs es la distancia que el agua viajaría en tiempo Δt si se mantuviera viajando horizontalmente. Tenemos entonces $-A\Delta h = B\Delta s$. Dividiendo por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, encontramos

$$A\frac{dh}{dt} = B\frac{ds}{dt} = Bv \quad \text{o} \quad -A\,dh = Bv\,dt \tag{1}$$

donde $v = ds/dt$ es la velocidad instantánea de evacuación a través del orificio.

Necesitamos tener ahora una expresión para la velocidad v de evacuación del agua. Es claro que a mayor altura del agua, mayor es v. De hecho, no es difícil mostrar que para condiciones ideales* $v = \sqrt{2gh}$. Así, (1) se convierte en

$$-A\,dh = B\sqrt{2gh}\,dt \tag{2}$$

Puesto que la altura es inicialmente H, tenemos $h = H$ en $t = 0$.

*Esto se cumple puesto que la energía potencial mgh de una masa m de agua es igual a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ En la práctica, con pérdidas, $v = c\sqrt{2gh}$, entonces $0 < c < 1$, donde c es el *coeficiente de descarga.*

Solución La separación de variables en (2) produce

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}\int dt, \qquad 2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}t + c$$

usando $h = H$ en $t = 0$, encontramos c = $2\sqrt{H}$, de modo que

$$2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{H} \tag{3}$$

lo cual expresa la altura como una función de t.

El tiempo para vaciarse el tanque se obtiene al encontrar t donde $h = 0$. Obtenemos

$$t = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Si $A = 4$ pies², $B = 1$ pul², $H = 16$ pies, $g = 32$ pies/seg², entonces $t = 576$ seg, ó 9,6 min.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Un cilindro recto circular con eje vertical se llena con agua y se hace rotar alrededor de su eje con una velocidad angular constante ω. ¿Qué forma toma el agua?

Formulación matemática. Cuando el cilindro rota, la superficie del agua toma la forma indicada en la Figura 3.37. Considere una partícula de agua P, de masa m, en la superficie del agua. Cuando prevalecen las condiciones de estado estacionario, esta partícula se mueve'en una trayectoria circular, con centro en el eje de rotación,. Por conveniencia escogemos el sistema de ejes coordenados xy como se indica en la Figura 3.38, donde el eje y es el eje de rotación y el eje x es perpendicular al eje y pasando por el punto más bajo O de la superficie. Es claro que la superficie será simétrica con respecto al eje y. Investiguemos las fuerzas sobre la partícula P cuando se alcanzan

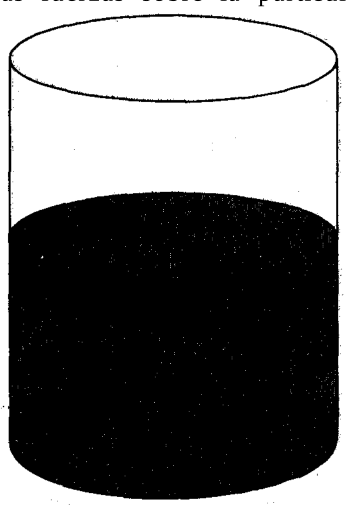


Figura 3.37

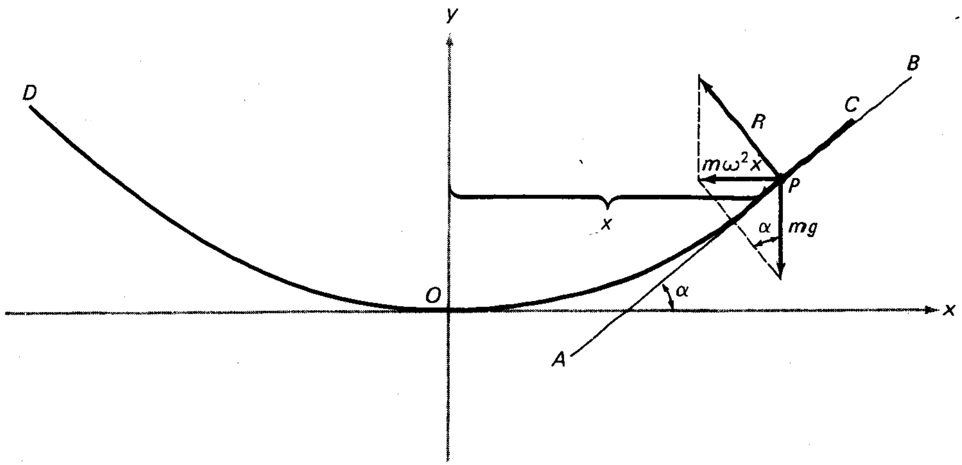


Figura 3.38

las condiciones de estado estacionario. Primero, está la fuerza debido al peso de la partícula dada por mg (Figura 3.38). También está la fuerza sobre P debida a la reacción de las otras partículas en el líquido. Esta fuerza de reacción se denota por R y debe ser normal a la superficie del líquido.* La resultante de R y mg apunta hacia el centro del círculo en el cual P gira. Esta fuerza resultante es la fuerza centrípeta actuando sobre P y tiene magnitud $mw^2\, x$, donde x es la distancia de P al eje de rotación.

De la figura es claro que

$$R \cos \alpha = mg, \qquad R \text{ sen}\alpha = m\omega^2 x$$

Dividiendo estas ecuaciones y notando que la pendiente de la tangente APB es la misma pendiente de la curva $DOPC$ en P e igual a $\tan \alpha$, ó dy/dx, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \tag{4}$$

la cual debemos resolver sujeto a y = 0 donde $x = 0$.

Solución Integrando (4) con $x = 0$ donde y $= 0$, encontrarnos

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} \tag{5}$$

Así, en cualquier plano perpendicular al eje y el nivel del agua asume la forma de uná parábola. En tres dimensiones es un paraboloide de revolución.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encuentre la forma de un reflector para que los rayos de luz emitidos por una fuente puntual se reflejen paralelos a una línea fija.

*Si R no fuera normal a la superficie, habría una componente de R tangencial a la superficie de la particula y la partícula se movería ya sea hacia o alejándose del eje de rotación.

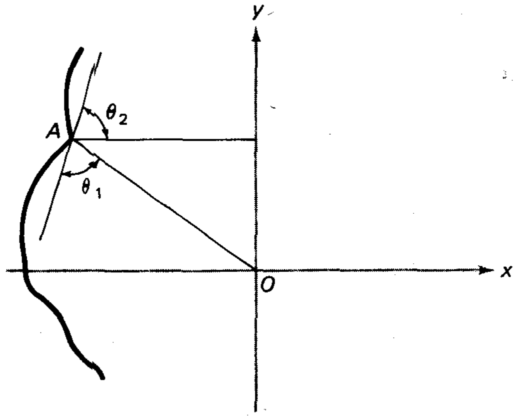


Figura 3.39

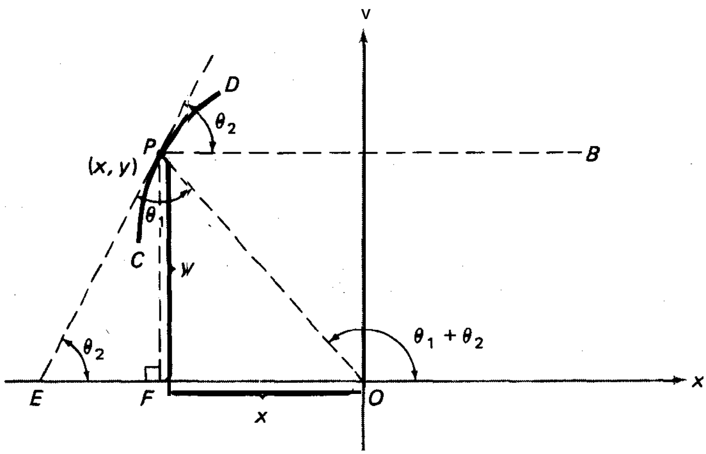


Figura 3.40

Formulación matemática. Sea 0 (el origen del sistema de coordenadas *xy*), Figura 3.39, la fuente puntual de luz. Rayos de luz tales como *OA* emergen de 0, tocan al reflector en *A*, y "rebotan" o se reflectan, y luego viajan en línea recta. Deseamos encontrar la forma del reflector de tal manera que todos los rayos que emerjan de 0 "reboten" del reflector paralelos a la línea Ox.

Sea CD (Figura 3.44) una parte del reflector y considere cualquier punto *P*(*x*, y) en ella. Si θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de reflexión, entonces por un principio elemental de óptica $\theta_1 = \theta_2$*. Deseamos hallar una relación entre la pendiente dy/dx de la curva (reflector) en *P y* las coordenadas (n, y) de P. Esto se puede obtener con el uso de geometría elemental.

*Realmente $90 - \theta_1$, el ángulo con el cual el rayo OP forma con la normal al arco *CD en P*, es el ángulo de incidencia. Similarmente $90 - \theta_2$, el ángulo entre el rayo reflectado y la normal, es el ángulo de reflexión. Claramente si $90 - \theta_1 = 90 - \theta_2$, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

Puesto que BP (Figura 3.40) es paralela a Ox, tenemos que $\measuredangle OEP = \theta_2$. De donde $\measuredangle xOP = \theta_1 + \theta_2 = 2\theta_1$ puesto que $\theta_1 = \theta_2$. La pendiente de OP es $\tan 2\theta_1$ pero por el triángulo OPF se ve que es y/x. Por tanto $\tan 2\theta_1 = y/x$. Pero por trigonometría elemental,

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 - \tan^2 \theta_1} \tag{6}$$

Puesto que $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = dy/dx = y'$, tenemos

$$\frac{2y'}{1 - (y')^2} = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \tag{7}$$

Solución La ecuación (7) es homogénea; por tanto, haciendo $y = vx$ encontramos

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - v^2 \pm \sqrt{v^2 + 1}}{v} \quad \text{de modo que} \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{v\,dv}{v^2 + 1 \pm \sqrt{v^2 + 1}}$$

Haciendo $v^2 + 1 = u^2$ en la segunda integral para que $v\,dv = u\,du$, encontramos

$$\ln x + c_1 = -\int \frac{du}{u \pm 1} = -\ln (u \pm 1) = -\ln (\sqrt{v^2 + 1} \pm 1)$$

Sigue que $\qquad x(\sqrt{v^2 + 1} \pm 1) = c \quad$ o $\quad \sqrt{x^2 + y^2} = c \pm x$

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene

$$y^2 = \pm 2cx + c^2 \tag{8}$$

Para un valor dado c ($c \neq 0$) la ecuación (8) representa dos parábolas simétricas con respecto al eje x como se muestra en la Figura 3.41. La curva grue-

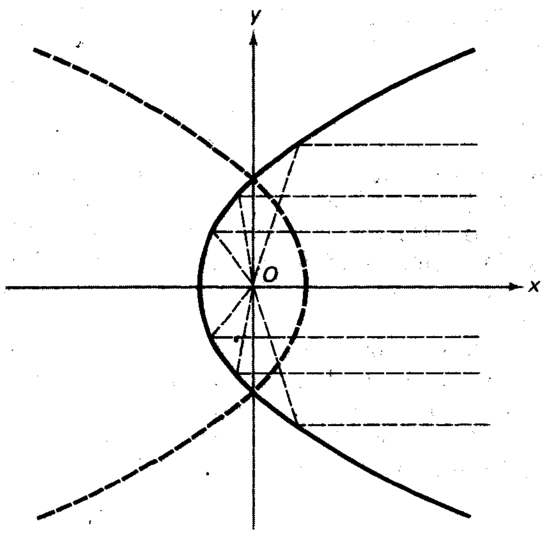


Figura 3.41

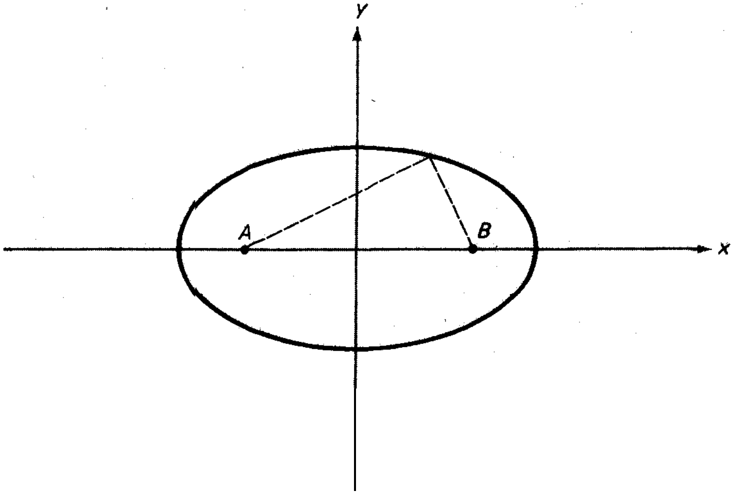


Figura 3.42

sa tiene la ecuación $y^2 = 2cx + c^2$, $c > 0$. La curva punteada tiene la ecuación

$$y^2 = -2cx + c^2, \qquad c > 0 \quad 0 \quad y^2 = 2cx + c^2, \qquad c < 0$$

El foco para la familia de parábolas están en el origen. En la Figura 3.41 se muestran también varios rayos emanando del foco y "rebotando" del reflector paralelamente al eje x.

Si giramos la parábola alrededor del eje x, obtenemos un paraboloide de revolución. Una bombilla eléctrica que se coloque en el origen enviará rayos de luz que "rebotarán" del reflector para producir un haz directo de rayos de luz lo cual es, por supuesto, la manera mas eficiente de iluminar. Esta propiedad importante se tiene en cuenta en la forma paraboloide de las farolas delanteras de un automóvil.

Observación. Otro problema interesante es el hallar una curva en el plano xy que tenga la propiedad de que las ondas de sonido (o rayos de luz) emitidos por una fuente puntual A se reflejen por la curva hacia un punto B (ver Figura 3.42). La curva solución es una elipse con los dos puntos como sus focos. Si giramos la elipse alrededor del eje mayor, x, obtenemos una superficie en la forma de una elipsoide de revolución. Las ondas de sonido emitidas de A se reflejarán todas por la superficie hacia el punto B. Esto tiene aplicaciones en *acústica*, puesto que podemos diseñar un auditorio con esta forma de modo que el conferenciante o la orquesta se localice en el punto A y la audiencia se localice en B.

EJERCICIOS A

1. Un cilindro rector circular de 10 pies de radio y 20pies de altura está lleno con agua. Tiene un pequeño orificio en el fondo de 1 pul de diámetro. ¿Cuándo se vaciará toda el agua si (a) $v = \sqrt{2gh}$; (b) $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$?

2. Un tanque tiene la fornia de un cubo de 12 pies. Debido a un pequeño orificio en el fondo de 2 pul² de área presenta un escape. Si el tanque está inicialmente lleno hasta las $\frac{3}{4}$ partes, ¿cuándo estará (a) a la mitad?; (b) ¿vacío? Asuma $v = \sqrt{2gh}$.

3. Un tanque en forma de un cono circular rector de altura H, radio R, con su vértice por debajo de la base está lleno con agua. Un orificio, de sección transversal a en el vértice, es la causa del escape de agua. Asumiendo $v = c\sqrt{2gh}$, donde c es el coeficiente de descarga, muestre que el cono se vaciará en tiempo

$$T = \frac{2\pi R^2}{5ac}\sqrt{\frac{H}{2g}} = \frac{2A}{5ac}\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

donde $A = \pi R^2$ es el área de la base del cono. Si $H = 16$ pies, $a = 1$ pul^2, $R = 5$ pies, encuentre T para los casos c = 1, c = 0,6.

4. El tanque cónico del Ejercicio 3 está ahora invertido con el vértice por encima de la base y tiene un orificio de área a en la base. Encuentre el tiempo requerido para vaciar el tanque. Compare con el Ejercicio 3.

EJERCICIOS B

1. Una caneca cilíndrica está llena con un líquido de densidad ρ y se rota alrededor de su eje a una velocidad angular constante ω. Muestre que la presión a una distancia r del eje excede a la presión en el eje en $\frac{1}{3}\rho\omega^2 r^2$.

2. Si el líquido en el Ejercicio 1 se remplaza por un gas ideal que obedece la ley de Doyle (la presión de un gas varía inversamente al volumen a temperatura constante), encuentre la presión como una función de la distancia del eje.

3. Si la ley de Doyle del Ejercicio 2 se remplaza por la ley $\rho = kP^\alpha$ donde P y ρ son, respectivamente la presión y la densidad del gas, y α y k son constantes, muestre que la presión a la distancia r del eje es

$$P = \left[\frac{k(1-\alpha)\omega^2 r^2}{2} + P_0^{1-\alpha}\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad \alpha \neq 1$$

Obtenga el resultado del Ejercicio 2 al hacer $\alpha \to 1$.

4. Verifique la observación de la página 129 al establecer y resolver una ecuación diferencial apropiada.

5. La presión p y la densidad ρ de la atmósfera por encima de la superficie de la. Tierra están relacionadas por la fórmula $p = k\rho^\gamma$ donde k y Y son constantes positivas. Si la presión y (densidad al nivel del mar son respectivamente p_0 y ρ_0, muestre que (a) la variación de presión con la altura h está dada por $p^{1-1/\gamma} = p_0^{1-1/\gamma} - (1-1/\gamma)\rho_0 p_0^{-1/\gamma} h$ y (b) la altura de la atmósfera puede considerarse como $\gamma p_0(\gamma-1)\rho_0$. (c) Discuta el caso $\gamma = 1$ y $\gamma > 1$.

6. Una taza hemisférica de radio R está llena con agua. Si hay un pequeño orificio de radio r en el fondo de la superficie convexa, muestre que la taza se vaciará en tiempo

$$T = \frac{14}{15c}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{\frac{R}{2g}}$$

asumiendo que $v = c\sqrt{2gh}$, donde v es la velocidad de evacuación del agua cuando el nivel del agua está a la altura h y c es el coeficiente de descarga.

EJERCICIOS C

1. Un problema famoso estudiado en una parte avanzada de matemáticas llamada el cálculo *de variaciones* es el de determinar la forma de un alambre para que una pequeña bolilla colocada en él viaje, bajo la influencia de la gravedad, de un punto dado a otro punto dado más bajo en el tiempo más corto, sin considerar la fricción.

Tomando un sistema de coordenadas rectangulares con el eje y positivo hacia abajo y el eje x positivo hacia la derecha y asumiendo que la bolilla parte de (0, 0) y viaja a (a, b) se puede mostrar que la forma del alambre está dada por la ecuación diferencial

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$$

Muestre que la curva es una parte de un cicloide. Este problema se llama el problema de la braquistócrona (tiempo más corto) y fue propuesto por John Bernoulli en 1696.

2. Otro problema de cálculo de variaciones es la determinación de una curva que pase por los puntos (a, b) y (c, d) con la propiedad de que la superficie generada al rotar la curva alrededor del eje x sea mínima. La curva requerida se puede obtener de la ecuación diferencial

$$1 + (y')^2 = yy''$$

Muestre que la curva es una parte de una catenaria.

La propiedad de superficie mínima tiene un interesante significado físico. Si dos anillos circulares delgados inicialmente en contacto se colocan en una solución jabonosa y luego se separan cuidadosamente de modo que se forme una superficie de una película de jabón, la superficie tiene la propiedad de que su área es mínima.

3. Un hombre inicialmente en 0 (ver Figura 3.43) camina a lo largo de la playa recta Ox de un lago halando un bote de remos, inicialmente en A, por medio de una cuerda de longitud a, la cual se mantiene siempre tensa. Muestre que el bote describe una trayectoria (llamado una *tractrix*) con ecuaciones paramétricas.

$$x = a \ln\left[\cot\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right], \qquad y = a \operatorname{sen}\theta$$

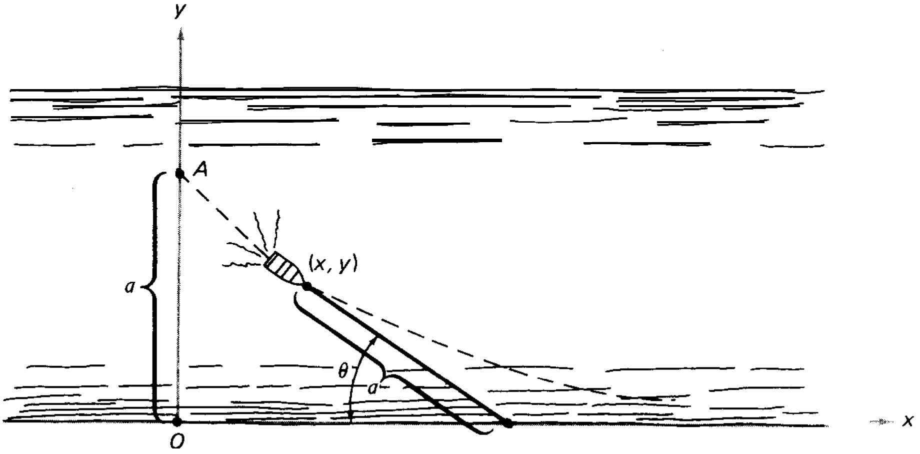


Figura 3.43

4. Los pueblos A y B (Figura 3.44) están directamente opuestos el uno del otro en las riberas de un río de ancho D el cual corre hacia el oriente con velocidad constante U. Un bote que sale del pueblo A viaja con velocidad constante V siempre dirigido hacia el pueblo B. Muestre que (a) su trayectoria está dada por

$$x = \tfrac{1}{2}D\left[t^{1-U/V} - t^{1+U/V}\right], \qquad y = Dt$$

y (b) no llegará al pueblo B a menos que $V > U$.

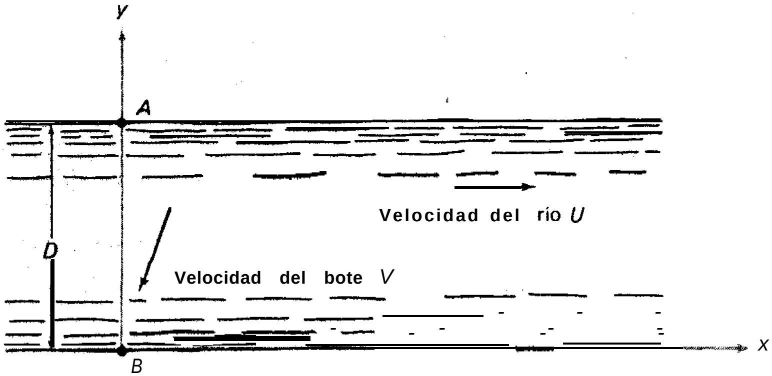


Figura 3.44

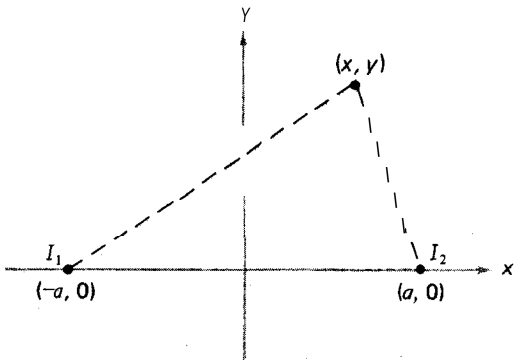


Figura 3.45

5. Dos bombillas eléctricas con intensidades I_1 y I_2 están situadas en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ de un sistema de coordenadas rectangulares (ver Figura 3.45). Muestre que el lugar geométrico de todos los puntos en el plano en el cual las intensidades de iluminación desde ambas bombillas son iguales está dado por

$$\frac{I_1(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{I_2(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = I_1 - I_2$$

(Sugerencia: La intensidad de iluminación varía inversamente con el cuadrado de la distancia de la fuente de luz.)

1 Problemas misceláneos en geometría

Los problemas geométricos ofrecen una fuente fértil de ecuaciones diferenciales. Ya hemos visto cómo las ecuaciones diferenciales surgen en relación con las trayectorias ortogonales. En esta sección consideramos varios otros problemas geométricos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La pendiente en cualquier punto de una curva es $2x + 3y$. Si la curva pasa por el origen, determine su ecuación.

Formulación matemática. La pendiente en (x, y) es dy/dx. *Luego*

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \tag{1}$$

es la ecuación diferencial requerida, la cual se resuelve sujeta a $y(0) = 0$.

Solución La ecuación (1) escrita como una ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 2x$$

tiene el factor integrante e^{-3x}. De donde,

$$\frac{d}{dx}(ye^{-3x}) = 2xe^{-3x} \quad \text{o} \quad ye^{-3x} = \frac{-2xe^{-3x}}{3} - \frac{2e^{-3x}}{9} + c$$

Así, puesto que $y(0) = 0$, $c = \frac{2}{9}$ y encontramos $y = \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La línea tangente a una curva en cualquier punto (x, y) de ella tiene su intercepto en el eje x siempre igual a $\frac{1}{2}x$. Si la curva pasa por $(1, 2)$ encuentre su ecuación.

Formulación matemática. Para resolver este problema debemos hallar una expresión para el intercepto OA en el eje x de la línea tangente AP a la curva QPR (Figura 3.46). Para conseguir esto, sea (X, Y) cualquier punto en AP. Puesto que y' es la pendiente de la recta, su ecuación es

$$Y - y = y'(X - x)$$

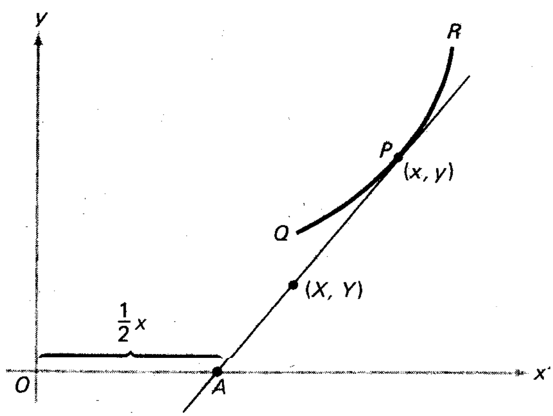


Figura 3.46

El intercepto buscado es el valor de X, donde Y = 0. Esto resulta ser

$$X = x - \frac{y}{y'}$$

Así debemos resolver $x - \dfrac{y}{y'} = \tfrac{1}{2}x$, $y = 2$ donde $x = 1$ **(2)**

Solución La ecuación (2) puede escribirse $\dfrac{y}{y'} = \tfrac{1}{2}x$ o $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$.

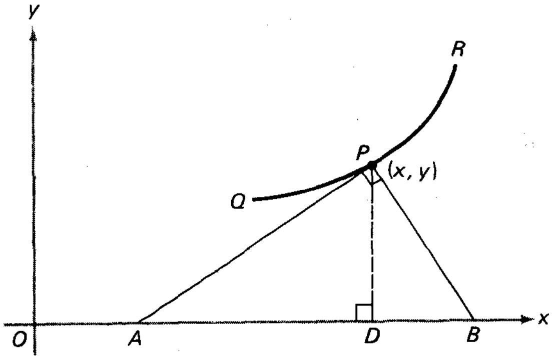


Figura 3.47

Tabla 3.2

Intercepto de la línea tangente:	En eje x:	$x - \dfrac{y}{y'}$
	En eje y:	$y - xy'$
Intercepto de la línea normal:	En eje x:	$x + yy'$
	En eje y:	$y + \dfrac{x}{y'}$
Longitud de la línea tangente desde P:	Al *eje* x:	$\left\lvert \dfrac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'} \right\rvert$
	Al eje y:	$\lvert x\sqrt{1+(y')^2} \rvert$
Longitud de la linea normal desde ***P:***	Al eje x:	$\lvert y\sqrt{1+(y')^2} \rvert$
	Al eje y:	$\left\lvert \dfrac{x\sqrt{1+(y')^2}}{y'} \right\rvert$
Longitud de la subtangente:		$\left\lvert \dfrac{y}{y'} \right\rvert$
Longitud de la subnormal:		$\lvert yy' \rvert$

Separahdo las variables, integrando, y usando la condición $y(1) = 2$, encontramos

$$y = 2x^2$$

En el Ejemplo ilustrativo 2 se nos pidió determinar el intercepto x, de la línea tangente a una curva. Se nos podría también haber solicitado determinar el intercepto en el eje y de la línea tangente o la longitud de la línea tangente definida entre el punto P y los ejes x o y. Puesto que muchos problemas geométricos están basados en tales consideraciones, las discutimos brevemente. En la Figura 3.47, P es cualquier punto (x; y) en la curva QPR. Es costumbre llamar la línea tangente desde P al punto A en el eje x simplemente la "tangente". Similarmente PB se llama la "normal". Las proyecciones de AP y PB en el eje x se llaman la "subtangente" y "subnormal", respectivamente. Por procedimientos análogos a los usados en el Ejemplo ilustrativo 2 el estudiante puede verificar las entradas en la Tabla 3.2.

Se debería observar que en la tabla hemos usado los signos de valor absoluto para la distancia puesto que ésta es una ca.ntidad positiva. También hemos usado coordenadas rectangulares. Consideraciones similares que involucran coordenadas polares pueden formularse. Vea los Ejercicios C.

EJERCICIOS A

1. La pendiente en cualquier punto (x, y) de una curva es $1 + y/x$. Si la curva pasa por (1, 1) encuentre su ecuación.
2. Encuentre una ecuación para la familia de curvas tal que la pendiente en cualquier punto es la suma de la mitad de la ordenada y dos veces la abscisa del punto.
3. El intercepto en el eje y de la línea normal a una curva en cualquier punto es 2. Si la curva pasa por (3,4) encuentre su ecuación.
4. El intercepto en el eje y de la línea tangente a una curva en cualquier punto es siempre igual a la pendiente en ese punto. Si la curva pasa por (2, 1) encuentre su ecuación.
5. La longitud de la línea normal desde cualquier punto de una curva al eje x es siempre igual a una constante $a > 0$. Muestre que la curva es un círculo de radio a.
6. Encuentre la ecuación de una curva que pasa por (1, 1) con la propiedad de que el intercepto en el eje x de su línea tangente es igual al intercepto en el eje y de su línea normal.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por (3, 4) tal que la longitud de su subtangente a cualquier punto es igual a la distancia del punto al origen.
2. Muestre que las longitudes de las líneas tangentes y normales de P (Figura 3.47) a los ejes x y y son las que aparecen en la Tabla 3.2.
3. La diferencia entre las longitudes de la "subtangente" y "subnormal" de una familia de curvas es 2. Encuentre la ecuación de la familia.
4. Una curva en el primer cuadrante pasa por (0, 1). Si la longitud del arco de (0, 1) a cualquier punto (x, y) es. numéricamente igual al área limitada por la curva, el eje x, el eje y, y la ordenada en (x, y) muestre que la curva es una parte de una catenaria.

5. **Un** punto se mueve en el primer cuadrante del plano xy de modo que la tangente a su trayectoria forma con los ejes coordenados un triángulo cuya área es igual a la constante a^2. Encuentre la trayectoria.

6. Encuentre la trayectoria del punto en el Ejercicio 5 si la tangente cortada por los ejes coordenados es de longitud a.

7. Una familia de curvas tiene la propiedad de que la línea tangente a cada curva en el punto (x, y), el eje x, y la línea que une (x, y) con el origen forma un triángulo isósceles con la línea tangente como base. (a) Determine una ecuación para la familia y (b) aquel miembro particular que pasa por el punto (2, 0).

EJERCICIOS C

1. Sea (r, ϕ) las coordenadas polares de cualquier punto en la curva ***APB*** (Figura 3.48). El punto O es el polo del sistema de coordenadas, Ox es la línea inicial, y ***OP*** es el radio vector. Sea ***COD*** una línea perpendicular a ***OP*** en 0. Definimos ***CP*** como la ***tangente polar, PD*** como la ***normal polar, CO*** como la ***subtangente polar, y OD*** como la ***subnormal polar.*** Demuestre la validez de lo siguiente, donde $r' = dr/d\phi$.

Longitud de la ***subtangente*** $= \left|\dfrac{r^2}{r'}\right|$, Longitud de la ***tangente*** $= \left|\dfrac{r}{r'}\sqrt{r^2 + (r')^2}\right|$

Longitud de la ***subnormal*** $= |r'|$, Longitud de la ***normal*** $= \left|\sqrt{r^2 + (r')^2}\right|$

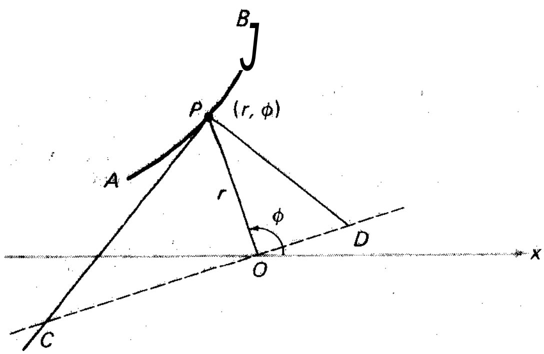


Figura 3.48

2. Encuentre la familia de curvas cuyas subtangentes polares son de longitud constante.

3. Encuentre la familia de curvas cuyas normales polares son de longitud constante.

4. Encuentre la familia de curvas cuyas subtangentes y normales polares tienen igual longitud.

5. Encuentre la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $(1, \pi/3)$ y tal que la longitud de su subtangente polar en cualquier punto es igual a la distancia del punto a la línea inicial.

6. (a) Muestre que la longitud de la perpendicular desde el polo a la línea tangente de cualquier curva es $r^2 / \sqrt{r^2 + (r')^2}$.
(b) Encuentre todas las curvas tales que la longitud de la perpendicular desde el polo a sus líneas tangentes es constante e igual a $a > 0$.

2 La deflexión de vigas

Considere una viga horizontal *AB* de la Figura 3.49(a). Se asume que la viga es uniforme en su sección transversal y de material homogéneo. El eje de simetría se indica por la línea punteada. Cuando está sometida a fuerzas, las cuales se asumen que están en un plano que contiene el eje de simetría, la viga, debido a su elasticidad, puede distorcionarse en su forma como se muestra en la Figura 3.49(b). Estas fuerzas pueden ser debidas al peso de la viga, a cargas aplicadas externamente, o a una combinación de ambas. El eje de simetría distorcionado resultante, punteado en la Figura 3.49(b), se llama la *curva* elástica. La determinación de esta curva es de importancia en la teoría de elasticidad y será parte del propósito de esta sección mostrar cómo se hace esto.

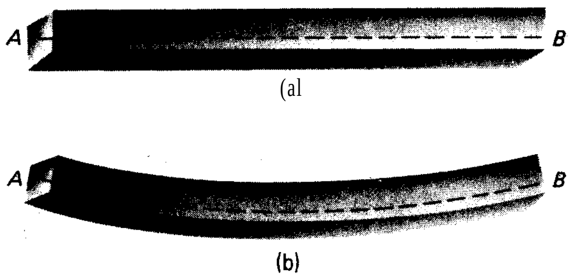


Figura 3.49

Hay muchas maneras de apoyar vigas. Por ejemplo, la Figura 3.50(a) muestra una viga en la cual el extremo *A* está rígidamente fijo, mientras que el extremo *B* está libre para moverse. Esto se llama una *viga en voladizo*. En la Figura 3.50(b) la viga está apoyada en los extremos *A* y B. Esta se llama una ***viga simplemente apoyada.*** En tales casos la viga está asegurada en los extremos ***A y B*** de modo que aunque esté fija en estos extremos, la rotación se puede dar alrededor de los extremos. La Figura 3.50(c) muestra aún otra manera de apoyar vigas.

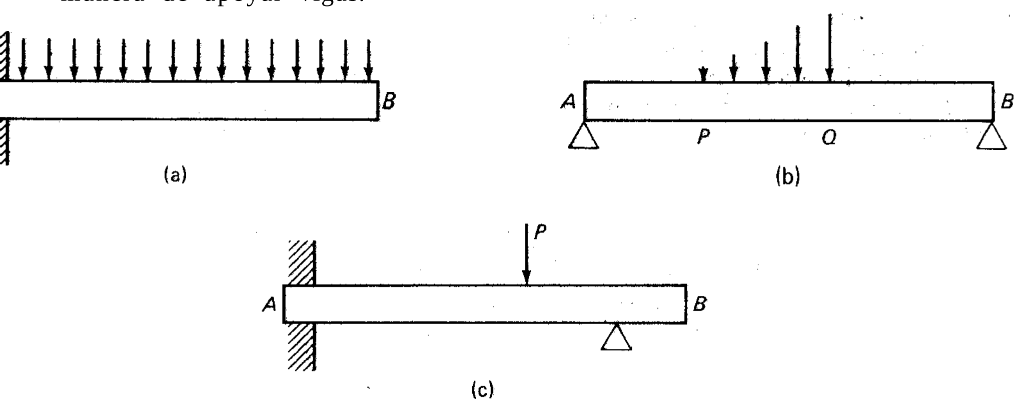


Figura 3.50

Así como hay diferentes maneras de apoyar vigas, también hay diferentes maneras de aplicar fuerzas de carga externa. Por ejemplo, en la Figura 3.50(a) hay una carga *uniformemente* ***distribuida*** sobre toda la viga. Puede haber una ***carga variable*** sobre toda la viga o sólo en una parte de ella como en la Figura 3.50(b). Por otro lado puede haber una ***carga concentrada*** como se indica en la Figura 3.50(c).

Considere la viga horizontal OB de la Figura 3.51(a). Coloque el eje de simetría (línea punteada) en el eje x tomado como positivo a la derecha y con origen en 0. Escoja el eje y como positivo hacia abajo. Debido a la acción de las fuerzas externas F_1, F_2, (y si es apreciable el peso de la viga) el eje de simetría se distorciona en la curva elástica que se muestra punteada en la Figura 3.51(b), donde hemos tomado la viga como fija en 0. El desplazamiento y de la curva elástica desde el eje x se llama la *deflexión* de la viga en la posición x. Así si determinamos la ecuación de la curva elástica, se conocerá la deflexión de la viga. Mostramos ahora cómo se puede obtener esto.

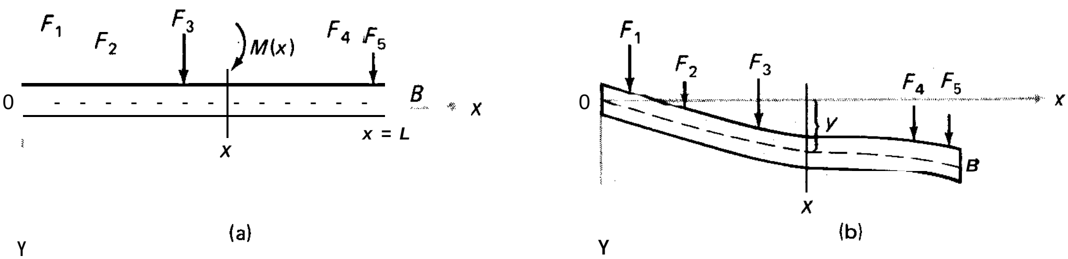


Figura 3.51

Sea ***M(x)*** el ***momento flexionante*** en una sección transversal vertical de la viga en x. Este momento flexionante se define como la suma algebraica de los momentos de esas fuerzas que actúan ***sobre un lado de*** x, los momentos se toman sobre una línea horizontal en la sección transversal en x. Al calcular los momentos adoptaremos la convención de que fuerzas ***hacia arriba*** producen momentos ***negativos*** y fuerzas ***hacia abajo*** producen momentos ***positivos,*** asumiendo por supuesto que el eje y se toma hacia abajo como se mencionó antes. Como se mostrará en el Ejemplo ilustrativo 1, no importa cuál lado de x se tome puesto que los momentos flexionantes calculados desde cualquier lado son iguales.*

Mostraremos más tarde (ver página 143) que el momento flexionante en x está simplemente relacionado con el radio de curvatura de la curva elástica en x, siendo la relación

$$EI\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = M(x) \tag{1}$$

donde ***E*** es el módulo de elasticidad de Young y depende del material usado en el diseño de la viga, e Z es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. El producto ***EZ*** se llama la ***rigidez flexural,*** y se considerará como una constante.

*Esto es cierto porque la viga está en equilibrio.

Si asumimos que la viga se dobla sólo levemente, lo cual es válido para muchos propósitos prácticos, la pendiente y' de la curva elástica es tan pequeña que su cuadrado es despreciable comparado con 1, y la ecuación (1) se puede remplazar por la buena aproximación

$$EIy'' = M(x) \tag{2}$$

Antes de presentar una derivación del resultado (1) del cual se obtiene la aproximación (2), veamos cómo la ecuación (2) se puede usar.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Una viga horizontal, simplemente apoyada, de longitud L se dobla bajo su propio peso, el cual es w por unidad de longitud. Encuentre la ecuación de su curva elástica.

Formulación matemática. En la Figura 3.52 se muestra la curva elástica de la viga (línea punteada) relativa a un conjunto de ejes coordenados con origen en 0 y direcciones positivas indicadas. Puesto que la viga está simplemente soportada en 0 y en B, cada uno de estos soportes lleva la mitad del peso de la viga, o sea $wL/2$. El momento flexionante $M(x)$ es la suma algebraica de los momentos de estas fuerzas actuando a un lado del punto P. Escojamos primero el lado *izquierdo* de P. En este caso actúan dos fuerzas:

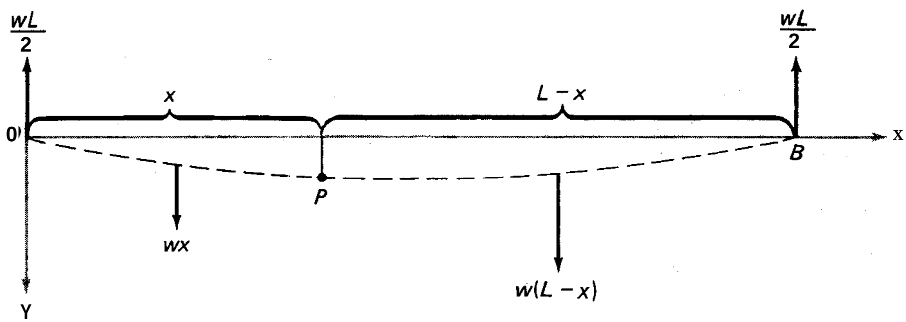
1. La fuerza hacia arriba $wL/2$, a una distancia x de P, produciendo un momento negativo.
2. La fuerza hacia abajo wx, a una distancia de x/2 (centro de gravedad de OP) de P, produciendo un momento positivo.

El momento flexionante total en P es así

$$M(x) = -\frac{wL}{2}x + wx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2} \tag{3}$$

Si hubiéramos escogido el lado *derecho* de P, actuarían dos fuerzas:

1. La fuerza hacia abajo w $(L - x)$, a una distancia $(L$ -x)/2 de P, produciendo un momento positivo.
2. La fuerza hacia arriba $wL/2$, a una distancia L-x de P, produciendo un momento negativo.



Figu ra 3.52

En este caso el momento flexionante es

$$M(x) = w(L - x)\left(\frac{L - x}{2}\right) - \frac{wL}{2}(L - x) = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2} \tag{4}$$

lo cual concuerda con (3) y muestra que al calcular el momento flexionante no importa cuál lado de P *se use.*

Con el valor de M(x), la ecuación fundamental (2) es

$$EIy'' = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2} \tag{5}$$

Dos condiciones son necesarias para determinar y. Estas son

$$y = o \quad \text{dondex} = 0 \text{ y donde } x = L$$

puesto que la viga no se deflecta en los extremos.

Solución Integrando (5) dos veces se obtiene $EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x + c_2$.

Puesto que $y = 0$ cuando $x = 0$, tenemos $c_2 = 0$. De donde,

$$EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x.$$

Puesto que $y = 0$ cuando $x = L$, $c_1 = wL^3/24$ y tenemos, finalmente,

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \tag{6}$$

como la ecuación requerida de la curva elástica. Es de interés práctico usar (6) para hallar la máxima deflexión. De la simetría o por el cálculo, el máximo ocurre en $x = L/2$. De donde,

$$\text{deflexión máxima} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encontrar la curva elástica de una viga en voladizo uniforme de longitud L con un, peso constante w por unidad de longitud y determine la deflexión en el extremo libre.

Formulación matemática. La curva punteada en la Figura 3.53 es la curva elástica de la viga en voladizo. El origen 0 del sistema de coordenadas se toma en el extremo fijo, y los ejes positivos x y y como se 'muestran. Para calcular $M(x)$ es más sencillo considerar la parte de la viga a la derecha de P, puesto que sólo una fuerza actúa, a saber, la fuerza hacia abajo $w(L - x)$, produciendo un momento positivo dado por

$$M(x) = w(L - x)\left(\frac{L - K}{2}\right) = \frac{w(L - x)^2}{2} \quad \text{de modo que } EIy'' = \frac{w(L - x)^2}{2}$$

el cual debemos resolver sujeto a las condiciones $y = y' = 0$ donde $x = 0$,

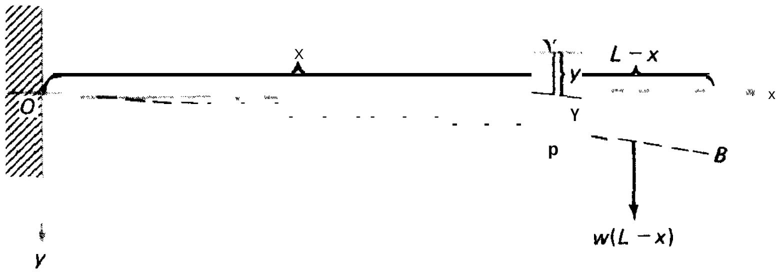


Figura 3.53

puesto que no hay deflexión en x = 0, y puesto que la pendiente de la tangente a la curva elástica en $x = 0$ es cero.

Solución Integrando dos veces y usando las condiciones es fácil mostrar que

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

es la ecuación de la curva elástica. Colocando x = L, encontramos

$$\text{deflexión en el extremo libre} = \frac{wL^4}{8EI}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Una viga uniforme horizontal, simplemente apoyada de longitud L y de peso despreciable se dobla bajo la influencia de una carga concentrada S a una distancia $L/3$ de un extremo. Encuentre la ecuación de la curva elástica.

Formulación matemática. La curva elástica se muestra punteada en la Figura 3.54. Los soportes en 0 y en B están a distancias con una razón 1:2 de la carga S. Por tanto, ellos soportan cargas con razón 2:1, así que en 0 se soporta la cantidad $2S/3$, mientras que en B se soporta $S/3$.

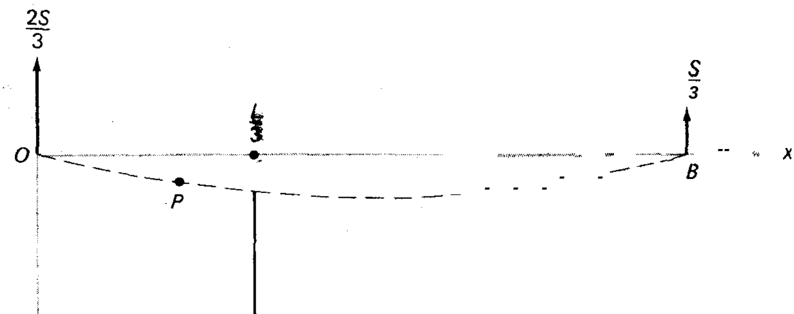


Figura 3.54

Para determinar el momento flexionante en P se deben considerar tres casos:

Caso 1. P está a la izquierda de S, esto es, $0 \leqq x < L/3$. El segmento OP tiene sólo una fuerza (hacia arriba) actuando a una distancia x de P. El momento flexionante es $-2Sx/3$. De donde,

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3}, \qquad 0 \leqq x < \frac{L}{3} \tag{7}$$

Caso 2. P está a la derecha de S, esto es, $L/3 < x \leqq L$. El segmento OP tiene dos fuerzas, una fuerza $2S/3$ hacia arriba, a una distancia x de P, y una fuerza S hacia abajo, a una distancia $x - L/3$ de P. El momento flexionante es $-2Sx/3 + S(x - L/3)$. De donde

$$EIy'' = -\frac{2Sx}{3} + S\left(x - \frac{L}{3}\right), \qquad \frac{L}{3} < x \leqq L \tag{8}$$

Caso 3. P está en S. En este caso el segmento OP tiene dos fuerzas, una fuerza $2S/3$ hacia arriba, a una distancia $L/3$ de P, y una fuerza S hacia abajo, a una distancia cero de P. El momento flexionante es

$$-\frac{2S}{3}\left(\frac{L}{3}\right) + S(0) = -\frac{2SL}{9}$$

Puesto que esto concuerda con los momentos flexionantes en ecuaciones (7) y (8) podemos combinar el Caso 3 con esos casos simplemente al escribir las ecuaciones como

$$\begin{aligned} EIy'' &= -\frac{2Sx}{3}, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{L}{3} \\ EIy'' &= -\frac{2Sx}{3} + S\left(x - \frac{L}{3}\right), \qquad \frac{L}{3} \leqq x \leqq L \end{aligned} \tag{9}$$

Puesto que cada ecuación es de segundo orden, esperamos necesitar cuatro condiciones. Dos de éstas son claras

$$y = 0 \text{ en } x = 0. \qquad y = 0 \text{ en } x = L \tag{10}$$

Una tercera condición se obtiene al notar que los dos valores de y obtenidos de las ecuaciones (9) deben ser iguales en $x = L/3$. Esto es la *condición de continuidad*. Una cuarta condición se obtiene al notar que debe haber una tangente en $x = L/3$. Esta es la *condición para la continuidad en la derivada.*

Solución Integrando las ecuaciones (9) una vez cada una, tenemos

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{Sx^2}{3} + c_1, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{L}{3} \\ EIy' &= -\frac{Sx^2}{3} + \frac{S}{2}\left(x - \frac{L}{3}\right)^2 + c_2, \qquad \frac{L}{3} \leqq x \leqq L \end{aligned} \tag{11}$$

Puesto que estos dos valores de y' deben ser iguales en $x = L/3$, tenemos $c_1 = c_2$. Así,

$$EIy' = -\frac{Sx^2}{3} + c_1, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{L}{3}$$

$$\text{———} \frac{}{2}\left(x - \frac{}{3}\right) + c_1. \tag{12}$$

Integrando estos una vez cada uno, tenemos

$$EIy = -\frac{Sx^3}{9} + c_1 x + c_3, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{L}{3}$$

$$EIy = -\frac{Sx^3}{9} + \frac{S}{6}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 + c_1 x + c_4, \qquad \frac{L}{3} \leqq x \leqq L \tag{13}$$

Usando la primera y la segunda condiciones de (10) en la primera y segunda ecuaciones de (13), respectivamente, y también usando la condición para continuidad, encontramos

$$c_3 = 0, \qquad c_4 = 0, \qquad c_1 = \frac{5SL^2}{81}$$

o

$$y = \begin{cases} \dfrac{S}{81EI}(5L^2x - 9x^3), & 0 \leqq x \leqq \dfrac{L}{3} \\[2ex] \dfrac{S}{81EI}\left[5L^2x - 9x^3 + \dfrac{27}{2}\left(x - \dfrac{L}{3}\right)^3\right], & \dfrac{L}{3} \leqq x \leqq L \end{cases} \tag{14}$$

Obtengamos ahora la ecuación (1). Para ello consideramos un elemento pequeño de una viga curvada entre x y $x + dx$, como se indica, con gran aumento en la Figura 3.55. En esta figura, ***ABCDA*** representa la sección media la cual contiene la curva elástica. Una fibra tal como GH, ilustrada debajo de la sección media, se estira debido al doblamiento de la viga, mientras que fibras por encima de la sección media se contraen. Las fibras en la sección media, sin embargo, no se estiran ni se contraen. El elemento de viga de la Figura 3.55 se muestra en una sección transversal longitudinal en la Figura 3.56. En esta figura ***AB*** representa una parte de la curva elástica de longitud l. La curva GH, la cual representa una fibra estirada, tiene longitud $l + dl$, donde $dl = JH$ es la magnitud del estiramiento. La distancia entre ***AB*** y ***GH*** se denota por $u = AG = BJ = BH$. Hacemos ahora uso de una generalización

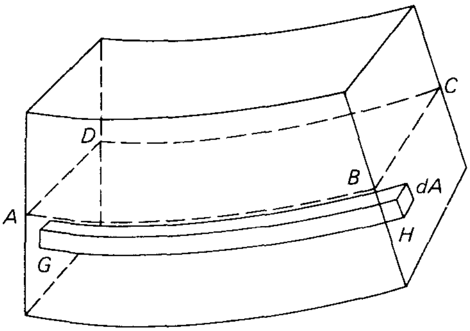


Figura 3 55

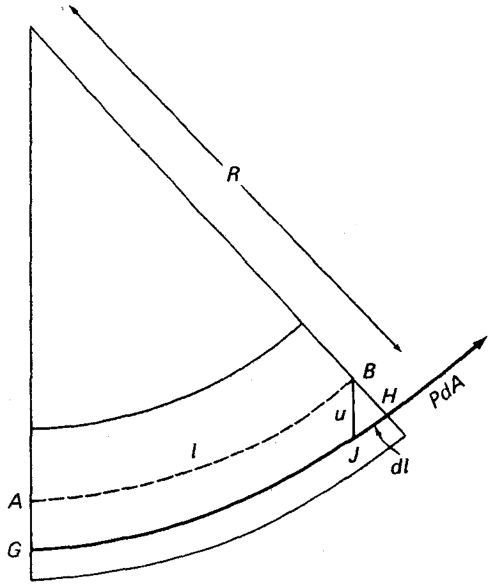


Figura 3.56

de la ley de Hooke debido a los varios casos especiales que pueden surgir (por ejemplo, página 111).

Ley generalizada de Hooke. Suponga que en un material elástico una fuerza actúa perpendicular a una área y que la fuerza por unidad de área, llamado el esfuerzo, se denota por P. Suponga que debido a este esfuerzo, un elemento de longitud 1 se estira en la dirección de la fuerza en una cantidad dl. La razón dl/l se llama la tensión. Entonces, asumiendo que no se excede el límite elástico del material, el ***esfuerzo será proporcional a la tensión.*** En símbolos esto se expresa por

$$P = E\frac{dl}{l} \tag{15}$$

donde la constante de proporcionalidad, denotada por E, se llama el ***módulo de elasticidad de Young.****

Ahora, si la fibra tiene una sección transversal dA (ver Figura 3.55), entonces la fuerza que actúa sobre la fibra es $P\,dA$. El momento dM de esta fuerza alrededor de la sección media es igual a esta fuerza multiplicada por la distancia u a la sección media, esto es,

$$dM = uP\,dA \tag{16}$$

Si R denota el radio de curvatura de la viga, vemos de la Figura 3.56 que

*Note que tenemos estiramiento si $dl > 0$ y contracción si $dl < 0$. Un ejemplo de un caso donde se excede el límite elástico sería el de un resorte que se estira tanto que sus propiedades cambian (y como resultado, el módulo de Young). Si ocurre demasiada fuerza y estiramiento resultante el resorte finalmente se romperá.

$$\frac{dl}{u} = \frac{l}{R} \quad \text{o} \quad \frac{dl}{l} = \frac{u}{R} \tag{17}$$

así que (15) se convierte en $$P = \frac{Eu}{R} \tag{18}$$

Usando (18) en (16), encontramos $$dM = \frac{Eu^2}{R}\, dA \tag{19}$$

Así el momento total es $$M = \frac{E}{R}\int u^2\, dA \tag{20}$$

donde la integral se toma sobre la sección transversal completa de la viga, incluyendo las fibras por encima y por debajo de la sección media.*

La integral en (20) es el momento de inercia de la viga alrededor de la sección media, el cual se denota por I. Así, (20) se puede escribir

$$M = \frac{EI}{R} \tag{21}$$

Pero el radio de curvatura se conoce del cálculo como

$$R = \frac{(1 + y'^2)}{y''} \tag{22}$$

Usando esto en (21) se obtiene la ecuación requerida (1), y como ya se ha mencionado, (2) se cumple bajo el supuesto de que la pendiente de la viga es pequeña de modo que y'^2 es despreciable comparado con 1.

EJERCICIOS A

1. Una viga en voladizo uniforme de longitud L y de peso despreciable tiene una carga concentrada S en el extremo libre. Encontrar (a) la ecuación de la curva elástica, (b) la deflexión máxima.
2. Una viga de longitud L y de peso despreciable está apoyada simplemente en ambos extremos. Una carga concentrada S actúa en su centro. Encuentre (a) la ecuación de la curva elástica, (b) la deflexión máxima, (c) el valor numérico de la pendiente en los extremos.
3. Asuma que, además de la carga concentrada, la viga del Ejercicio 1 pesa w por unidad de longitud, donde w es constante. (a) Encuentre la ecuación de la curva elástica. (b) Encuentre la deflexión máxima. (c) Muestre que al hacer $S = 0$, se obtienen los resultados del Ejemplo ilustrativo 2.
4. Asuma que, además de la carga concentrada, la viga del Ejercicio 2 pesa w por unidad de longitud, donde w es constante. (a) Encuentre la ecuación de la curva elástica. (b) Encuentre la deflexión máxima. (c) Haciendo $S = 0$, obtenga los resultados del Ejercicio ilustrativo 1. (d) Al hacer $w = 0$, muestre que se obtienen los resultados del Ejercicio 2.

*Note que para fibras por encima de la sección media, dl y u son negativas. Puesto que aquí P es también negativa (esto es, una fuerza a compresión) todo anda bien así que (20) es correcta.

5. Una viga en voladizo de longitud L y peso despreciable tiene una carga concentrada en su centro. Encuentre la ecuación de la curva elástica, y determine la deflexión máxima.

6. Determine la curva elástica para la viga del Ejercicio 5 si se asume que la viga tiene además un peso uniforme w por unidad de longitud.

EJERCICIOS B

1. Una viga de longitud L y peso uniforme w por unidad de longitud tiene sus dos extremos horizontalmente fijos empotrados. Determine la ecuación de la curva elástica y encuentre la deflexión máxima. (Sugerencia: Asuma que el momento desconocido en cualquier extremo es A, y determine A de las condiciones de frontera.)

2. Resuelva el problema anterior si una carga concentrada S actúa en el centro de la viga, además del peso uniforme.

3. Un extremo de una viga de longitud L y de peso uniforme w por unidad de longitud está simplemente apoyado, mientras que el otro extremo está horizontalmente fijo. (a) Encuentre la ecuación de la curva elástica. (b) Muestre que la deflexión máxima ocurre a una distancia $(15-\sqrt{33})L/16 = 0{,}578L$, aproximadamente, del extremo fijo y tiene una magnitud aproximada de $0{,}00542\ wL^4/EI$.

4. Una viga de longitud L y peso despreciable está simplemente apoyada en ambos extremos y en el centro. Soporta un peso uniforme de w por unidad de longitud. Determine la ecuación de la curva elástica.

EJERCICIOS C

1. Si $y_1(x)$ es la deflexión en el punto x de una viga, debido a una carga concentrada S_1 en el punto P_1 de la viga, y $y_2(x)$ es la deflexión en el punto x, debido a una carga concentrada S_2 en el punto P_2 de la viga, muestre que la deflexión en el punto x, debido a ambas cargas concentradas, está dada por $y_1(x) + y_2(x)$. Este es el "principio de superposición" para vigas.

2. Generalice el Ejercicio 1 a n cargas concentradas $S_1, \ldots, S_n$ en los puntos $P_1, \ldots, P_n$.

3. Usando los resultados de los Ejercicios 1 y 2 y del Ejemplo ilustrativo 3, encuentre la curva elástica formada por una viga de longitud L, la cual está simplemente apoyada en ambos extremos y tiene cargas concentradas S a distancias de $L/3$ de cada extremo.

4. Una viga de longitud L está simplemente apoyada en ambos extremos. Soporta una carga variable dada por w(x) por unidad de longitud, donde x es la distancia medida desde un extremo de la viga. (a) Muestre que la ecuación diferencial para determinar la curva elástica es

$$EIy'' = -\int_0^x \frac{u}{L} w(u)(L-x)du + \int_x^L w(u)(u-x)du \tag{23}$$

(*Sugerencia:* Asuma el intervalo $0 \leqq x \leqq L$, subdividido en n partes iguales por los puntos

$$\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{(n-1)L}{n}$$

en los cuales actúan respectivamente las cargas

$$\frac{L}{n} w\left(\frac{L}{n}\right), \frac{L}{n} w\left(\frac{2L}{n}\right), \ldots, \frac{L}{n} w\left(\frac{(n-1)L}{n}\right)$$

Considere el límite cuando $n \to \infty$, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral. Note que las subdivisiones no necesitan ser iguales,) (b) Por diferenciación de (23) con respecto a x, obtenga

$$\text{(A)}\quad EIy''' = -\left[\int_x^L w(u)du - \int_0^L \frac{u}{L} w(u)du\right]. \qquad \text{(B)}\quad EIy^{(IV)} = w(x) \tag{24}$$

asumiendo EI constante. La ecuación (24) es de gran importancia en la teoría de vigas. La cantidad a la derecha de (24)A es el negativo de la carga total a la derecha de x y se llama el *esfuerzo cortante vertical en* x. Las ecuaciones (24) son válidas para vigas diferentes a las simplemente apoyadas (vea Ejercicio 8).

5. Usando la ecuación (24)B del Ejercicio 4(b) con $w(x)$ constante, obtenga el resultado del Ejemplo ilustrativo 1.

6. Usando la ecuación (24)B del Ejercicio 4(b), determine la curva elástica de una viga de longitud L, la cual está simplemente apoyada en ambos extremos y tiene una carga proporcional a (a) la distancia de un extremo, (b) al cuadrado de la distancia de un extremo.

7. Una viga de longitud L y de peso despreciable está simplemente apoyada en ambos extremos. Una carga concentrada S actúa a una distancia p de un extremo. Muestre que la deflexión máxima de la viga nunca excederá la deflexión en el centro por más de un 3 por ciento.

8. Considere un segmento de una viga entre las secciones en x y en x + Δx (Figura 3.51). Denote por M y $M + \Delta M$ los momentos flexionantes respectivos en estas secciones. Sea $w(x)$ la carga por unidad de longitud en x, de modo que $w(x)\Delta x$ representa la carga en el segmento entre x y x + Δx, además de infinitesimales de orden superior a Δx. Sea V el esfuerzo cortante vertical en x (esto es, la suma algebraica de las fuerzas verticales a un lado de x, digamos a la derecha), y $V + \Delta V$ el correspondiente esfuerzo cortante vertical en x $+\Delta x$. (a) De las consideraciones de equilibrio de este segmento **de** la viga muestre que

$$\Delta V + w(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)^2 = 0 \qquad \textit{(suma de fuerzas = 0)}$$

$$\Delta M + (V + \Delta V)\Delta x + w(x)\Delta x\theta\,\Delta x = 0\ . \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1 \qquad \textit{(suma de momentos = 0)}$$

y así dividiendo por Δx y haciendo $\Delta x \to 0$, **muestre** que

$$\frac{dV}{dx} = w(x), \qquad \frac{dM}{dx} \qquad V$$

(b) Usando los resultados en (a), muestre que la ecuación $EIy'' = M(x)$ se convierte en

$$EIy^{(IV)} = w(x)$$

asumiendo EI constante. Compare con el Ejercicio 4.

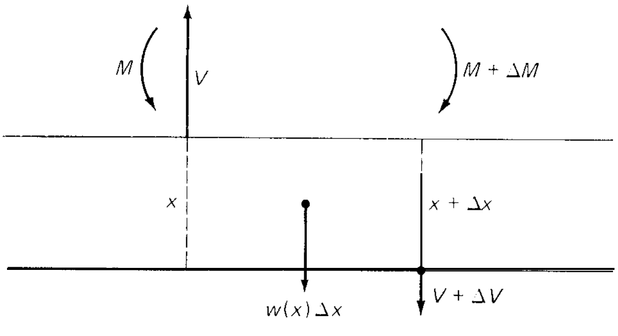


Figura 3 5 7

13 Aplicaciones a biología

Uno de los campos más fascinantes del conocimiento al cual los métodos matemáticos han sido aplicados es el de la biología. La posibilidad de que las matemáticas pudieran aún ser aplicadas exitosamente en el estudio de varios procesos naturales de los seres vivos desde los microorganismos más elementales hasta la misma humanidad ‘sorprende a la imaginación. ¿Qué beneficios podrían resultar si uno pudiera entender aquellos problemas relacionados con el cerebro y el sistema nervioso, el corazón, el proceso de digestión, la producción celular, y aún el origen de la vida mediante la formulación matemática y solución de tales problemas?

La explicación para intentar tal estudio es que si las matemáticas son capaces de manejar problemas que involucran objetos inanimados tales como máquinas, ¿por qué no puede también manejar problemas que involucran seres vivientes, de los cuales se puede pensar que son máquinas muy complejas?

Aunque no es posible en un libro de este tipo presentar muchas aplicaciones interesantes en biología, presentaremos unas pocas y se espera que el estudiante pueda motivarse para proseguir un estudio adicional de este fascinante tema.

13.1 CRECIMIENTO BIOLOGICO

Un problema fundamental en biología es el crecimiento, sea este el crecimiento de una célula, un órgano, un ser humano, una planta o una población. Ya hemos tratado algunos problemas relacionados con crecimiento en la Sección 6, páginas 106-111. En esa sección la ecuación diferencial fundamental era

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \tag{1}$$

con solución

$$y = ce^{\alpha t} \tag{2}$$

donde c es una constante arbitraria. De esto vemos que el crecimiento ocurre si $\alpha > 0$ mientras que el decaimiento (o encogimiento) ocurre si $\alpha < 0$.

Un defecto obvio de la ecuación (1) y de la solución correspondiente (2) es que si $\alpha > 0$ entonces tenemos que $y \to \infty$ si $t \to \infty$, así que a medida que el tiempo transcurre el crecimiento es ilimitado. Esto está en conflicto con la realidad, ya que después de transcurrir cierto tiempo sabemos que una célula o individuo deja de crecer, habiendo conseguido un tamaño máximo. La pregunta que naturalmente surge es de si podemos modificar la ecuación (1) para que corresponda a estos hechos biológicos. Veamos si podemos formular el problema matemáticamente.

Formulación matemática. Para fijar ideas, supongamos que y denota la altura de un ser humano (aunque como ya se ha mencionado esto podría referirse a otras cosas, tales como el tamaño de células). Es natural asumir que la tasa de cambio de la altura dependa de la altura de una manera más complicada que la simple proporcionalidad como en (1). Así, tendríamos

$$\frac{dy}{dt} = F(y), \qquad y = y_0 \text{ para } t = 0 \tag{3}$$

donde y_0 representa la' altura en algún tiempo especificado $t = 0$, y donde F es una función apropiada pero aún desconocida. Puesto que la función lineal $F(y) = \alpha y$ no es apropiada, ensayemos con una aproximación de orden superior dada por una función cuadrática $F(y) = \alpha y - \beta y^2$, donde seleccionamos $\beta > 0$ para restringir el crecimiento de y como lo exige la realidad. La ecuación diferencial (3) se convierte así en

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2, \qquad y = y_0 \text{ para } \quad t = 0 \tag{4}$$

Se debería enfatizar que esta ecuación sólo proporciona un modelo matemático el cual esperamos describa los hechos biológicos del crecimiento, y si el modelo produce resultados que no están de acuerdo con la realidad éste se debe revisar.

Solución Puesto que en la ecuación (4) las variables son separables, tenemos

$$\frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = dt \quad o \quad \int \frac{dy}{y(\alpha - \beta y)} = t + c$$

esto es, $$\int \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y}\right] dy = t + c \quad o \quad \frac{1}{\alpha}[\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + c \tag{5}$$

Usando la condición $y = y_0$ en $t = 0$, vemos que $c = \frac{1}{\alpha}[\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$.

Así, (5) se convierte en $\frac{1}{\alpha}[\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + \frac{1}{\alpha}[\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$

Resolviendo para y se obtiene $$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha t}} \tag{6}$$

Si tomamos el límite de (6) cuando $t \to \infty$, vemos, ya que $\alpha > 0$, que

$$y_{\text{máx}} = \lim_{t \to \infty} y = \frac{\alpha}{\beta} \tag{7}$$

Esto muestra que hay un límite al crecimiento de y como lo requieren los hechos biológicos, y tiende a indicar la validez de nuestro modelo matemático. Como se indicó en (7), este máximo se denotó por $y_{\text{máx}}$.

Para aplicar al resultado (6), supongamos que los valores de y correspondientes a los tiempos $t = 1$ y $t = 2$ (donde usamos alguna unidad de tiempo especificada) están dados por y_1 y y_2 respectivamente. Entonces de (6) vemos que

$$\frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha}} = y_1, \qquad \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-2\alpha}} = y_2$$

o $$\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}) = \frac{1}{y_1} - \frac{e^{-\alpha}}{y_0}, \qquad \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha}) = \frac{1}{y_2} - \frac{e^{-2\alpha}}{y_0} \tag{8}$$

Para determinar β/α y α en términos de y_0, y_1 y y_2, podemos proceder así. Divida los miembros de la segunda ecuación en (8) por los correspondientes miembros de la primera ecuación para así eliminar β/α. Esto produce

$$1 + e^{-\alpha} = \frac{\dfrac{1}{y_2} - \dfrac{e^{-2\alpha}}{y_0}}{\dfrac{1}{y_1} - \dfrac{e^{-\alpha}}{y_0}} \tag{9}$$

Por simple álgebra
$$e^{-\alpha} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)} \tag{10}$$

Si ahora sustituimos en la primera de las ecuaciones en (8), encontramos

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_1^2 - y_0 y_2}{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)} \tag{11}$$

Los valores (10) y (ll) se pueden usar para escribir la ecuación (6) en términos de valores apropiados de y_0, y_1 y y_2. También es de interés notar que el valor límite de y es

$$y_{\text{máx}} = \lim_{t \to \infty} y = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)}{y_1^2 - y_0 y_2} \tag{12}$$

Ilustremos con algunos ejemplos cómo estos resultados se pueden aplicar.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Las alturas promedio de niños varones de varias edades se muestran en la Tabla 3.3. Use estos datos para predecir la altura media de varones adultos con pleno crecimiento.

Tabla 3.3 Altura media de niños varones de varias edades

Edad	Altura (pul)
Nacimiento	19,4
1 año	31,3
2 años	34,5
3 años	37,2
4 años	40,3
5 años	43,9
6 años	48,1
7 años	52,5
8 años	56,8

Solución Para cubrir el conjunto completo de datos dado en la tabla, sea $t =$ 0, 1, 2 las edades al nacimiento, 4 años y 8 años, respectivamente. Así tenemos

$$y_0 = 19{,}4, \qquad y_1 = 40{,}3, \qquad y_2 = 56{,}8$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (12) se obtiene el valor de 66,9 pul o 5 pies con 7 pul como la altura media máxima requerida.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

De acuerdo a la Oficina de censos, la población de los Estados Unidos en el, período 1900-1960 está dada en la Tabla 3.4. Usando estos datos, determine (a) la población máxima teórica de E.U., (b) la población esperada en 1990, y (c) la población de 1870.

Tabla 3.4 Población de los Estados Unidos

Año	Población (en millones)
1900	76,0
1910	92,0
1920	105,7
1930	122,8
1940	131,7
1950	151,1
1960	179,3

Solución Para cubrir el conjunto completo de datos dado en la tabla, hagamos que $t = 0$, 1, 2 corresponda a los años 1900, 1930 y 1960 respectivamente. Entonces tenemos

$$y_0 = 76{,}0, \qquad y_1 = 122{,}8, \qquad y_2 = 179{,}3 \tag{13}$$

(a) Sustituyendo estos valores en (12) produce $y_{\text{máx}} = 346{,}3$; esto es, la población máxima de los Estados Unidos será cerca de 346 millones.

(b) Sustituyendo los valores (13) en (10) produce $e^{-\alpha} = 0{,}5117$. Usando esto y el resultado $\alpha/\beta = 346{,}3$ de la parte (a), encontramos de (6) que

$$y = \frac{346{,}3}{1 + (3{,}557)(0{,}5117)^t} \quad \text{o} \quad y = \frac{346{,}3}{1 + 3{,}557e^{-0{,}6678t}} \tag{14}$$

Puesto que el año 1990 corresponde a $t = 3$, obtenemos al colocar este valor t en (14) el resultado $y = 234{,}5$. Así, la población esperada en 1990 es cerca de 235 millones.

(c) El año 1870 corresponde a $t = -1$. Colocando este valor t en (14) encontramos $y = 43{,}6$. Es interesante que la población real de los Estados Unidos, de acuerdo a la Oficina de censos, fue de 39,8 millones.

Los ejemplos anteriores sirven para mostrar que el modelo matemático (4) y expresado por la ecuación (6) sí tiene mérito como una posible ley de crecimiento biológico (o aún crecimiento en otros campos, tales como física, química y economía). Como ya lo hemos subrayado, sin embargo, como cualquier ley destinada para la descripción matemática de la naturaleza (tales como la ley de Newton, o la ley de Kirchhoff), debe estar de acuerdo con la evidencia experimental o tendrá que modificarse. En este respecto es útil tener algunos criterios con los cuales se puede esperar que la ecuación (6) concuerde con la realidad. Uno de estos se obtiene al notar que el gráfico de (6) tiene el aspecto general que se muestra en la Figura 3.58. Este gráfico indica

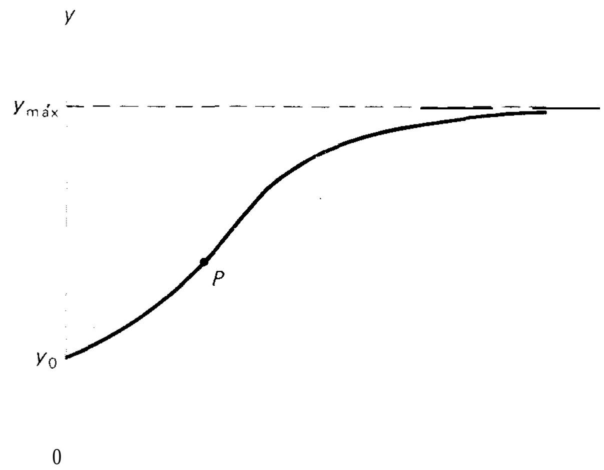


Figura 3.58

que a medida que t crece de 0, y crece de y_0 y se aproxima más y más a $y_{máx}$. La curva tiene una pendiente creciente de $t = 0$ a un tiempo correspondiente al punto P, y de ahí en adelante tiene pendiente decreciente. Así, P es un punto de inflexión y se obtiene de acuerdo al método usual del cálculo al hacer la segunda derivada $d^2y/dt^2 = 0$.

Esta curva en forma de S se llama con frecuencia la *curva logística* (de la palabra griega *logistikos,* que significa *racional)* y es ampliamente usada en las ciencias de la vida.

EJERCICIOS A

1. Escriba la ecuación de la curva logística correspondiente a los datos de la Tabla 3.3.
2. Chequee la precisión de los resultados en (a) el Ejemplo ilustrativo 1 y (b) el Ejemplo ilustrativo 2 comparando los datos calculados con los datos reales.
3. La Tabla 3.5 muestra el crecimiento de una colonia de bacterias sobre un período de un número de días medido por su tamaño en centímetros cuadrados. (a) Encuentre una ecuación para el área y en términos del tiempo t. (b) Usando la ecuación hallada en (a), compare los valores calculados del área con los valores reales. (c) ¿Cuál es el tamaño máximo teórico de la colonia? ¿Esperaría usted que tal máximo exista en la realidad? Explique.

Tabla 3.5 Crecimiento de una colonia de bacterias

Edad t (días)	0	1	2		4	5	6
Area y (cm^2)	1,20	3,43	9,64	19,8	27,2	33,8	37,4

4. La altura promedio de un cierto tipo de planta después de 16, 32 y 48 días está dado respectivamente, por 21,6, 43,8 y 54,2 cm. Asumiendo que el patrón de crecimiento sigue la curva logística, determine (a) la altura máxima teórica esperada, (b) la ecuación de la curva logística, y (c) las alturas teóricas después de 8, 24 y 60 días.

EJERCICIOS B

1. Derive los resultados (10) y (ll) en la página 150 y así obtenga (12).

2. Obtenga el resultado (7), página 149, directamente de la ecuación diferencial (4), página 149

3. Muestre que el punto de inflexión de la curva logística ocurre donde $y = \alpha/2\beta$ y que el correspondiente valor de t es

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1\right)$$

4. Muestre que la ecuación de la curva logística se puede escribir como

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

donde t_0 es el tiempo correspondiente al punto de inflexión.

5. Suponga que la "ecuación de crecimiento" en (4) está dada por $\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^n$ donde α, β y n son constantes. Resuelva esto y verifique que la curva logística se obtiene en el caso especial donde $n = 2$.

6. Muestre que el máximo valor de y en el Ejercicio 5 está dado por $(\alpha/\beta)^{1/(1-n)}$.

7. Muestre cómo modificar (4), página 149, en el caso de representar el crecimiento de la población de un país si la inmigración al país se presenta a una tasa constante. Resuelva el problema de valor inicial resultante.

8. Trabaje el Ejercicio 7 si hay inmigración y emigración.

EJERCICIOS C

1. Suponga que la "ecuación de crecimiento" está dada por $\frac{dy}{di} = \alpha y - \beta y^2 + \gamma y^3$ donde α, β y γ son constantes. (a) Resuelva esto y verifique que la curva logística se obtiene en el caso especial donde $\gamma = 0$. (b) Determine si existe un valor máximo de y. (c) ¿Cree usted que esta ecuación proporcionaría un modelo mejor para el crecimiento biológico que aquel de la página 149? Explique.

2. Muestre que si $\alpha/\beta y - 1$ se grafica en una escala logarítmica contra t el gráfico resultante de la. curva logística es una línea recta. Discuta cómo esta observación puede ayudar a obtener valores de las constantes en la ecuación de la curva lo cual podría dar mayor precisión. *(Sugerencia:* Use el Ejercicio 4B.)

3. Demuestre el uso del Ejercicio 2 al aplicarlo al (a) Ejemplo ilustrativo 1; (b) Ejemplo ilustrativo 2; (c) Ejercicio 3A.

13.2 UN PROBLEMA EN EPIDEMIOLOGIA

Un problema importante de biología y medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa, esto es. una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otro. La ciencia que estudia este problema se llama *epidemiología, y* si un porcentaje grande no común de una población adquiere la enfermedad, decimos que hay una *epidemia.*

Los problemas que contemplan la propagación de una enfermedad pueden ser algo complicados. Por ejemplo, se sabe que algunos individuos pueden no adquirir realmente una enfermedad aún cuando estén en contacto con personas enfermas por un período largo de tiempo. Se dice en tales casos que el individuo tiene una ***inmunidad*** a la enfermedad ya sea porque ha adquirido la enfermedad antes desarrollando defensas contra la recurrencia o porque tenga una resistencia inicial ***(inmunidad natural)*** para no adquirir la enfermedad de ninguna manera. En algunos casos hay individuos que son inmunes a la enfermedad pero aún son capaces de transmitirla a otros; en tales casos ellos se llaman "transmisores". Un ejemplo bien conocido de esto es el caso de la fiebre tifoidea.

Para presentar un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad, asumamos que tenemos una población grande pero finita. Para fijar ideas, supongamos que nos restringimos a los estudiantes de algún colegio o universidad grande quienes permanecen en los predios universitarios por un período relativamente largo y que no tienen acceso a otras comunidades. Supondremos que hay sólo dos tipos de estudiantes, unos que tienen la enfermedad contagiosa, llamados ***infectados,*** y otros que no tienen la enfermedad, esto ***es, no infectados,*** pero que son capaces de adquirirla al primer contacto con un estudiante infectado. Deseamos obtener una fórmula para el número de estudiantes infectados en cualquier tiempo, dado que inicialmente hay un número especificado de estudiantes infectados.

Formulación matemática. Supóngase que en cualquier tiempo t hay N_i estudiantes infectados y N_u estudiantes no infectados. Entonces si N es el número total de estudiantes, asumido constante, tenemos

$$N = N_i + N_u \tag{16}$$

La tasa de cambio en el número de estudiantes infectados está dada entonces por la derivada dN_i/dt, donde al escribir tal derivada debemos suponer ideas similares a aquellas consideradas en el problema de la radioactividad en la página 108. Esta derivada debería depender de alguna manera de N_i y así de N_u en virtud de (16). Asumiendo que dN_i/dt, como una aproximación, es una función cuadrática de N_i tenemos

$$\frac{dN_i}{dt} = a_0 + a_1 N_i + a_2 N_i^2 \tag{17}$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes. Ahora esperaríamos que la tasa de cambio de N_i, esto ***es,*** dN_i/dt sea cero donde $N_i = 0$, esto es, no hay estudiantes infectados, y donde $N_i = N$, esto es, todos los estudiantes estén infectados. Entonces de (17) tenemos

$$a_0 = 0 \quad \text{y} \quad a_1 N + a_2 N^2 = 0 \quad \text{o} \quad a_2 = -\frac{a_1}{N}$$

así que (17) se convierte en $\dfrac{dN_i}{dt} = a_1 N_i - \dfrac{a_1 N_i^2}{N}$ o $\dfrac{dN_i}{dt} = \dfrac{a_1}{N} N_i(N - N_i)$

esto es,
$$\frac{dN_i}{dt} = kN_i(N - N_i) \tag{18}$$

donde $k = a_1/N$ es una constante. Si suponemos que, inicialmente, $t = 0$, hay N_0 estudiantes infectados, entonces

$$N_i = N_0 \text{ en } t = 0 \tag{19}$$

Así, nuestra formulación matemática corresponde a un problema de valor inicial dado por (18) y (19).

Solución La ecuación diferencial (18) es separable de fácil solución. De hecho podemos notar que la ecuación (18) y la condición inicial (19) son **idén**ticas a la "**ecuación** de crecimiento" y su condición inicial dada en **(4), pá**gina 149, donde

$$x = kN, \qquad \beta = k, \qquad \text{Yo} = N_0 \tag{20}$$

Así de (6), página 149,

$$\frac{\qquad\qquad\qquad}{\text{———}\ 1 \setminus e^{-kNt}} \tag{21}$$

Interpretación. El gráfico de (21) es la *curva logística*, esto es, la curva en forma de S ya descrita en la página 152. Se desprende que los resultados ya obtenidos en la discusión y ejercicios relacionados con la "ecuación de crecimiento" se aplican también a la "ecuación de enfermedad" (18) o (21). En particular, vemos de la forma de la curva logística que inicialmente hay un incremento gradual en el número de estudiantes infectados, seguido de un incremento más o menos pronunciado en el número cerca al punto de inflexión, y finalmente una disminución gradual. El caso límite ocurre cuando todos los estudiantes llegan a estar infectados, como se ve al notar de (21) que $N_i \rightarrow N$ a medida que $t \rightarrow \infty$. Desde el punto de vista práctico, esto afortunadamente no ocurre en la realidad puesto que una vez se descubran estudiantes infectados éstos son aislados y puestos en *cuarentena* para prevenir el contacto con los otros. El problema de epidemias donde se considera la cuarentena es más complicado y se discute en el Capítulo diez.

En los casos donde se involucran grandes poblaciones, **tales** como una ciudad o un país, es fácil ver por qué el desastre puede prevalecer aún con intentos de cuarentena. Tal fue el caso por ejemplo en la enfermedad frecuentemente llamada la "plaga negra", la cual devastó mucho de Europa por varios años en la mitad del siglo XIV.

EJERCICIOS A

1. Suponga que en tiempo t los porcentajes de estudiantes infectados y no infectados son $100p_i$ Y $100p_u$, respectivamente, mientras que el porcentaje inicial de estudiantes infectados es $100p_0$. Muestre que

$$p_i = \frac{p_0}{p_0 + (1 - p_0)e^{-\alpha t}}$$

2. Si el 5% de los estudiantes de una universidad tienen una enfermedad contagiosa y 1 semana más tarde un total de 15% han adquirido la enfermedad, **¿qué** porcentajes la habrán adquirido 2, 3, 4 y 5 semanas más tarde asumiendo que no hay **cuarentena?** Grafique los resultados.

3. Muestre que la curva logística (21) tiene un punto de inflexión en el punto donde la mitad de los estudiantes están infectados.

4. Se puede trabajar el Ejercicio 2 **si** se hace el supuesto de que la tasa a la cual los estudiantes se infectan es proporcional al número de infectados? Justifique su respuesta.

5. Muestre que el modelo matemático para la enfermedad contagiosa usado en la página 154 es el mismo a aquel en el cual se asume que la tasa a la cual los estudiantes se infectan es proporcional al producto de los números que están y no **están** infectados. **¿Puede** usted justificar este razonamiento?

1. Un animal de laboratorio infectado se introduce en una población de 24 animales no infectados. Después de 3 días *otro* animal resulta infectado. ¿En cuántos días más se puede esperar que todos los animales estén infectados excepto uno? ¿Qué supuestos hace usted?
2. ¿Es posible determinar el menor número de días en el cual podamos esperar que todos los animales del Ejercicio 1 estén infectados? Explique.
3. Suponga que los porcentajes acumulados de animales infectados en alguna población en los extremos de tres intervalos iguales de tiempo son $100p_0$, $100p_1$ y $100p_2$, respectivamente, donde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < 1$. (a) Muestre que
$$\frac{1 - 2p_1}{p_1^2} = \frac{1 - (p_0 + p_2)}{p_0 p_2}$$
(b) Use esto para mostrar que $p_1 = \frac{1}{2}$ si y sólo si $p_0 + p_2 = 1$, y explique el significado. (c) Muestre que si $p_1^2 = p_0 p_2$ entonces debemos tener $p_0 = p_1 = p_2$ y dé una interpretación de estos resultados.
4. Suponga que el porcentaje de animales infectados en algún tiempo es $100p_0$, mientras que en tiempos t_1 y t_2 posteriores los porcentajes son $100p_1$ y $100p_2$ respectivamente. Muestre que
$$\left[\frac{p_0(1 - p_1)}{p_1(1 - p_0)}\right]^{t_2} = \left[\frac{p_0(1 - p_2)}{p_2(1 - p_0)}\right]^{t_1}$$

EJERCICIOS C

1. En una cierta comunidad el número de individuos está creciendo a una tasa constante r. Suponga que en tiempo $t = 0$ hay un número N_0 de individuos infectados y que la población en este tiempo es N. Usando un modelo matemático análogo al dado en el texto, muestre que un problema de valor inicial para el número de individuos infectados N_i en la comunidad en cualquier tiempo $t > 0$ está dado por
$$\frac{dN_i}{dt} - k(N + rt)N_i = kN_i^2, \qquad N_i(0) = N_0 \text{ donde } k \text{ es una constante}$$
2. Al resolver el problema de valor inicial en el Ejercicio 1, muestre que
$$N_i = e^{kNt + (1/2)krt^2}\left[N_0^{-1} + k\int_0^t e^{kNv + (1/2)krv^2}\,dv\right]^{-1}$$
(Sugerencia: La ecuación diferencial ***es una ecuación de Bernoulli*** como se discutió en los Ejercicios 1-7B de la página 55.)

13.3 ABSORCION DE DROGAS EN ORGANOS O CELULAS

Para propósitos de análisis matemático en biología, a menudo es conveniente considerar un organismo (tal como un humano, animal, o planta) como una colección de componentes individuales llamados ***compartimentos.*** Un compartimento puede ser un órgano (tal como el estómago, páncreas o hígado) o un grupo de células las cuales actúan como una unidad. Un problema importante consiste en determinar la absorción de químicos, tales como drogas, por células u órganos. Esto tiene aplicación práctica en el campo de la medicina, puesto que puede suceder que ciertas drogas fatales puedan acumularse en un órgano o un grupo de células llevando finalmente a su destrucción. El tipo más simple de problema trata solamente con un compartimento. Sin embargo, puede ser importante para algunos propósitos tratar con sistemas que involucran dos o más compartimentos los cuales interactúan entre sí. Como se podría esperar, la dificultad del análisis matemático tiende a crecer con el número de compartimentos. Los ejemplos siguientes servirán para ilustrar las clases de problemas que pueden surgir.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen V cm³ a una tasa de a cm³ /seg y sale a una tasa de b cm³ /seg. La concentración de la droga en el líquido que entra es c g/cm³ . (a) Escriba una ecuación diferencial para la concentración de la droga en el órgano en cualquier tiempo junto con las condiciones apropiadas, y (b) resuelva la ecuación.

Solución (a) La situación está descrita esquemáticamente por la Figura 3.59 la cual muestra un compartimento simple de volumen V junto con la entrada y salida. Si x representa la concentración de la droga en el órgano (esto es, el número de gramos de la droga por cm³), la cantidad de droga en el órgano en cualquier tiempo t está dada por

$$(V \text{ cm}^3)(x \text{ g/cm}^3) = xV \text{ g} \tag{22}$$

El número de g/seg que entran al órgano en tiempo t está dado por

$$(a \text{ cm}^3/\text{seg})(c \text{ g/cm}^3) = ac \text{ g/seg} \tag{23}$$

El número de g/seg que salen del órgano está dado por

$$(b \text{ cm}^3/\text{seg})(x \text{ g/cm}^3) = bx \text{ g/seg} \tag{24}$$

Ahora la tasa de cambio de la cantidad de droga en el órgano es igual a la tasa a la cual entra la droga menos la tasa a la cual sale. Así, de (22), (23) y (24)

$$\frac{d}{dt}(xV) = ac - bx \tag{25}$$

Si asumimos que la concentración de la droga en el órgano en $t = 0$ es x_0, entonces

$$x = x_0 \text{ en } t = 0 \tag{26}$$

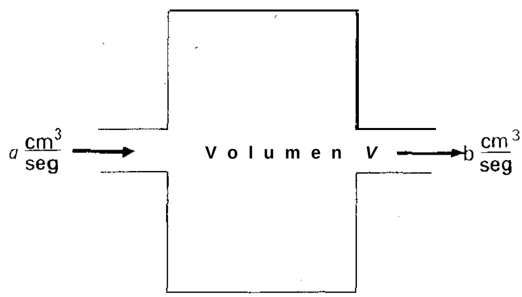


Figura 3.59

(b) Si asumimos que a, b, c y V son constantes, lo cual no se requiere de acuerdo a la formulación en la parte (a), la ecuación (25) se puede escribir

$$V\frac{dx}{dt} = ac - bx \tag{27}$$

Resolviendo (27) por separación de variables usando la condición (26) da

$$x = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-bt/V} \tag{28}$$

Dos casos son de interés.

Caso 1. $a = b$. En este caso la tasa a la cual entra la droga es igual a la tasa a la cual sale y (28) se convierte en

$$x = c + (x_0 - c)e^{-bt/V} \tag{29}$$

Caso 2. $a = b$ y $x_0 = 0$. En este caso las tasas de entrada y de salida son iguales y la concentración inicial de droga en el órgano es 0. Entonces tenemos

$$x = c(1 - e^{-bt/V}) \tag{30}$$

EJERCICIOS A

1. Un líquido transporta una droga dentro de un órgano de 500 cm³ de volumen a una tasa de 10 cm³/seg y sale a la misma tasa. La concentración de la droga en el líquido es de 0,08 g/cm³ Asumiendo que inicialmente la droga no está presente en el órgano, encuentre (a) la concentración de la droga en el órgano después de 30 seg y 120 seg, respectivamente; (b) la concentración de estado estacionario.
2. ¿Cuánto tiempo demoraría para que la concentración de la droga en el órgano del Ejercicio 1 alcance (a) 0,04 g/cm³; (b) 0,06 g/cm³ ?
3. Trabaje el Ejercicio 1 si la concentración inicial de la droga en el órgano es 0,20 g/cm³
4. Obtenga el gráfico de (29) para los casos (a) $x_0 = 0$, (b) $x_0 = c$, (c) $x_0 > c$, (d) $x_0 < c$, e interprete.

EJERCICIOS B

1. Suponga que la concentración máxima de una droga presente en un órgano dado de volumen constante V debe ser $c_{\text{máx}}$. Asumiendo que el órgano inicialmente no contiene la droga, que el líquido que transporta la droga en el órgano tiene una concentración $c > c_{\text{máx}}$, y que las tasas de entrada y de salida son ambas iguales a b, muestre que no se debe permitir entrar el líquido por un tiempo mayor que
$$\frac{V}{b}\ln\left(\frac{c}{c - c_{\text{máx}}}\right)$$
2. Trabaje el Ejercicio 1 si la concentración inicial de la droga en el órgano es x_0.
3. Suponga que en el problema del texto la tasa a a la cual el líquido con concentración de droga constante c entra al órgano es mayor que la tasa b a la cual sale. Como consecuencia, suponga que el volumen del órgano se expande a una tasa constante r de modo que $V = V_0 + rt$. Si la concentración inicial de la droga en el órgano

es x_0, muestre que la concentración en cualquier tiempo $t > 0$ es

$$x = \frac{ac}{b+r} + \left(x_0 - \frac{ac}{b+r}\right)\left(\frac{V_0}{V_0 + rt}\right)^{(b+r)/r}$$

4. Muestre que si $r \to 0$ el resultado del Ejercicio 3 se reduce a (28), en página 158.

EJERCICIOS C

1. Suponga que en el problema del texto el volumen del órgano varía con el tiempo de acuerdo a $V = V_0 + r \operatorname{sen} \omega t$, donde V_0, r y ω son constantes. Muestre que la concentración de la droga en el órgano está dada por el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{b + r\omega \cos \omega t}{V_0 + r \operatorname{sen} \omega t}\right) x = \frac{ca}{V_0 + r \operatorname{sen} \omega t}, \quad x(0) = 0$$

donde se asume que la droga inicialmente no está presente en el órgano.

2. Muestre que la solución al Ejercicio 1 está dada por

$$x = \frac{ace^{-f(t)}}{b(V_0 + r \operatorname{sen} \omega t)} \int_0^t f(u)du \quad \text{donde} \quad f(t) = \frac{2b}{\omega\sqrt{V_0^2 - r^2}} \tan^{-1}\left(\frac{r + V_0 \tan \frac{1}{2}\omega t}{\sqrt{V_0^2 - r^2}}\right)$$

4 Aplicaciones a la economía

En años recientes ha habido un interés creciente por la aplicación de las matemáticas a la economía. Sin embargo, puesto que la economía involucra muchos factores impredecibles, tales como decisiones sicológicas o -políticas, la formulación matemática de sus problemas es difícil. Se debería hacer énfasis que, como en los problemas de ciencia e ingeniería, cualquier resultado obtenido teóricamente debe finalmente ser probado a la luz de la realidad.

14.1 OFERTA Y DEMANDA

Suponga que tenemos un bien tal como trigo o petróleo. Sea p el precio de este bien por alguna unidad especificada (por ejemplo bushel de trigo o barril de petróleo) en cualquier tiempo t. Entonces podemos pensar que p es una función de t así que $p(t)$ es el precio en tiempo t.

El número de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama la demanda y se denota por $D(t)$, o brevemente D. Esta demanda puede depender no sólo de! precio p en cualquier tiempo t, esto es, $p(t)$, sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomarán los precios, esto es, la tasa de cambio del precio o derivada $p'(t)$. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los consumidores creen que pueden subir, la demanda tiende a incrementar. En símbolos esta dependencia de D en $p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse

$$D = f(p(t), p'(t)) \tag{1}$$

Llamamos f la función de demanda.

Similarmente, el número de unidades del bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama la oferta y se denota por S(t), o brevemente S. Como en el caso de la demanda, S también depende de p(t) y $p'(t)$. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los productores creen que éstos pueden subir más, la oferta disponible tiende a incrementar anticipándose a los precios mas altos. En símbolos esta dependencia de S en $p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse

$$S = g(p(t), p'(t)) \tag{2}$$

Llamamos g la función ***oferta.***

Al hacer las observaciones anteriores implícitamente hemos asumido lo siguiente.

(a) ***Una economía competitiva*** o ***libre.*** El sitio de mercado es aquel en el cual los consumidores y productores compiten para determinar los precios. Debido a esto, los productores se preocupan de hasta dónde deben subir los precios, puesto que los consumidores pueden negociar con otros que ofrezcan precios más bajos o pueden reducir su demanda.

(b) No ***hay demora en el suministro.*** La ecuación (2) asume que los productores usan la tasa de cambio de precio en tiempo t, esto es, $p'(t)$, para decidir sobre la oferta que esté disponible. Esto es una aproximación a la realidad, puesto que en la práctica hay una demora τ entre el tiempo de producción real y el mercadeo al consumidor. En tal caso, (2) se remplazaría por

$$S = g(p(t - \tau), p'(t - \tau)) \tag{3}$$

(c) No se considera los precios de otros bienes o el ingreso. Los precios de otros bienes en el mercado además de aquel bajo consideración o el ingreso promedio de los consumidores en varios tiempos pueden afectar la oferta o la demanda. En el modelo económico anterior esto no se tiene en cuenta.

(d) ***Los precios, demanda, y oferta son continuos.*** En la práctica, no podemos subdividir indefinidamente los precios o los números de un bien. Por ejemplo, no tiene sentido hablar del número de bananos entre 240 y 241, o que el precio de un bien asumirá todos los valores entre dos valores dados. A pesar de esto, adoptamos el supuesto de que tales variables discretas se pueden aproximar con un buen grado de precisión por variables continuas de la misma manera como se indicó en el problema de la radioactividad de la página 108.

Ahora si la oferta S excede a la demanda ***D,*** hay una tendencia para que los precios se ajusten a sí mismos en el sitio de mercado hasta que la oferta se reduzca para igualar la demanda, esto es, hasta que S = ***D.*** Esto es especialmehte cierto, por ejemplo, cuando existe la posibilidad que un bien se deteriore, como los bananos. Similarmente, si la demanda ***D*** excede la oferta S, los precios tenderán a ajustarse hasta que la oferta iguale a la demanda, esto es, S = ***D.*** Esto nos lleva a adoptar el siguiente

> **Principio económico de la oferta y la demanda.** ***El precio de un bien en cualquier tiempo t, esto es, p(t), está determinado por la condición de que la demanda en t sea igual a la oferta en t,*** o usando (1) y (2)

$$f(p(t), p'(t)) = g(p(t), p'(t)) \tag{4}$$

La ecuación (4) es una ***ecuación diferencial de primer orden*** para determinar $p(t)$ si se conocen las formas de las funciones ***f y g. Si*** se ***usa (3)*** en vez del lado derecho de (4), la ecuación resultante se llama una ***ecuación diferencial de diferencia de primer orden.***

Naturalmente surge ahora la pregunta sobre qué formas deberían tomar f y g en (4). Las más simples son funciones lineales en ***p(t) y p'(t),*** esto es,

$$\left.\begin{aligned} D &= f(p(t), p'(t)) = a_1p(t) + a_2p'(t) + a_3, \\ S &= g(p(t), p'(t)) = b_1p(t) + b_2p'(t) + b_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

donde los a's y ***b*** 's son constantes. En tal caso (4) se convierte en

$$a_1p(t) + a_2p'(t) + a_3 = b_1p(t) + b_2p'(t) + b_3 \tag{6}$$

o
$$(a_2 - b_2)p'(t) + (a_1 - b_1)p(t) = b_3 - a_3 \tag{7}$$

Asumamos que $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_3 \neq b_3$. Entonces podemos escribir (7) como

$$p'(t) + \left(\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}\right) p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} \tag{8}$$

Resolviendo esta ecuación lineal de primer orden sujeta a $p = p_0$ en $t = 0$ da

$$p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} + \left(p_0 - \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}\right) e^{-(a_1 - b_2)t/(a_2 - b_2)} \tag{9}$$

Cuso ***1,*** $p_0 = (b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$. En este caso vemos de (9) que ***p(t)*** $= p_0$ ***y*** que los precios permanecen constantes en todo tiempo.

Cuso *2,* $(a_1 - b_1)/(a_2 - b_2) > 0$. En este caso vemos de (9) que el precio ***p(t)*** tiende a $(b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$ como el límite cuando t crece, asumiendo por supuesto que este límite es positivo. En este caso tenemos ***estabilidad de precio, y*** el límite $(b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$ se llama el ***precio de equilibrio.***

Cuso 3, $(a_1 - b_1)/(a_2 - b_2) < 0$. En este caso vemos de (9) que el precio ***p(t)*** crece indefinidamente a medida que t crece, asumiendo que $p_0 > (b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$, esto es, tenemos inflación continuada ***o inestabilidad de precio.*** Este proceso puede continuar hasta que los factores económicos cambien, lo cual puede resultar en un cambio en la ecuación (7).

Es posible por supuesto que de vez en cuando las constantes en (5) cambien de tal manera que sobre un intervalo de tiempo tengamos un conjunto de constantes, sobre otro intervalo un conjunto diferente, etc. Más general, los ***as*** y ***b*** 's podrían ser en sí mismos funciones de t . Consideremos estos y otros casos interesantes en los ejercicios.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La demanda y oferta de un cierto bien están dadas en miles de unidades por $D = 48 - 2p(t) + 3p'(t)$, $S = 30 + p(t) + 4p'(t)$, respectivamente. Si en $t = 0$ el precio del bien es 10 unidades, encuentre (a) el precio en cualquier tiempo $t > 0$ y (b) si hay estabilidad o inestabilidad de precio.

Solución El precio ***p(t)*** está determinado al igualar la oferta y la demanda, esto es,

$$48 - 2p(t) + 3p'(t) = 30 + p(t) + 4p'(t) \quad o \quad p'(r) + 3p(t) = 18 \tag{10}$$

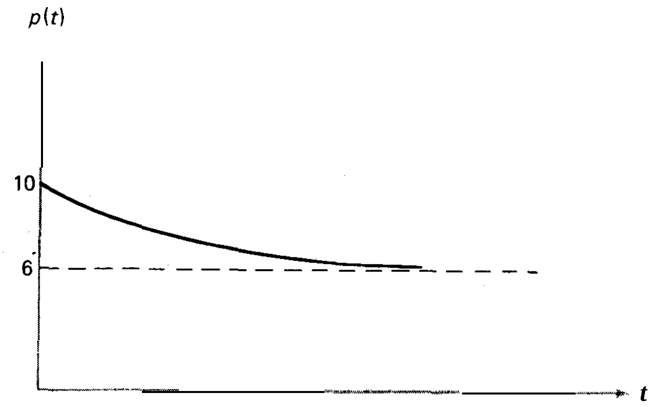


Figura 3.60

Resolviendo la ecuación de primer orden lineal sujeta a $p = 10$ en $t = 0$ da

$$p(t) = 6 + 4e^{-3t} \tag{11}$$

(b) De (ll) vemos que, si $t \to \infty$, p-6. Por tanto tenemos estabilidad de precio, y el precio de equilibrio es 6 unidades.

El gráfico de precio contra el tiempo se muestra en la Figura 3.60.

14.2 INVENTARIOS

El análisis anterior examinó la situación donde la oferta y la demanda son ya iguales para determinar un precio. Sin embargo, éste no examinó la situación dinámica donde la oferta y la demanda no son iguales pero la oferta cambia con el tiempo para satisfacer la demanda. Si, por ejemplo, la oferta es mayor que la demanda, entonces los productores tienen una cierta cantidad de bien en su posesión, la cual se llama su *inventario* del bien, el cual esperan vender. Por otro lado, si la demanda es mayor que la oferta, entonces los productores deben adquirir inventario. Nuestro problema es formular matemáticamente cómo el inventario cambia con el tiempo como un resultado de la oferta y la demanda.

Formulación matemática. Para conseguir esto, sea q(t) la cantidad o número de unidades de un bien C disponible en tiempo t. Entonces $q(t + \Delta t) = q(t) + Aq$ es la cantidad disponible en tiempo $t + At$. Así, tenemos

$$\text{cantidad acumulada en intervalo } t \text{ a } t + A\,t = \Delta q = q\,(t + A\,t) - q(t) \tag{12}$$

Ahóra de las definiciones en páginas 159-160, tenemos

S = número de unidades de C ofrecidas por unidad de tiempo por los productores en tiempo t.

D = número de unidades de C demandadas por unidad de tiempo por los consumidores en tiempo t.

Entonces el número de unidades ofrecidas por los productores y demandadas por los consumidores entre t y $t + \Delta t$ están dados aproximadamente por

$S\Delta t$ y $D\Delta t$ respectivamente, donde los resultados son precisos excepto por términos que involucran $(\Delta t)^2$ y mayores.

Así, cantidad acumulada en intervalo t a $t + \Delta t$

$$= S\,\Delta t - D\,\Delta t + \text{términos con } (\Delta t)^2 \text{ o mayores} \tag{13}$$

De (12) y (13) $\Delta q = S\,\text{At} - D\,\Delta t$ $-términos con $(\Delta t)^2$ o mayores (14)

Así, $$\frac{\Delta q}{\Delta t} = S - D + \text{términos con } (\Delta t)^2 \text{ 0 mayores} \tag{15}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $$\frac{dq}{dt} = S - D \tag{16}$$

En el caso especial donde q es constante, tenemos $S = D$.

La ecuación (16) forma la base para análisis posteriores sobre precios. Como una ilustración, supongamos que un productor desea proteger sus utilidrdes al requerir que la tasa a la cual incrementará el **precio** sea proporcional a la tasa a la cual declina el inventario. En este caso

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha\frac{dq}{dt} \tag{17}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de proporcionalidad que se asume conocida, de modo que usando (16)

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha(S - D) \tag{18}$$

Puesto que S y D se pueden expresar en términos de p, la ecuación (18) es una ecuación diferencial para p. Considere el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Suponga que la oferta y la demanda están dadas en términos de precios p por S = 60 + $2p$, D = 120 $-$ $3p$, respectivamente, la constante de proporcionalidad en (17) es α = 4. (a) Escriba la ecuación diferencial para p, y (b) determine el precio en cualquier tiempo $t > 0$ asumiendo que $p = 8$ en $t = 0$.

Solución (a) De (18) la ecuación diferencial requerida para p *es*

$$\frac{dp}{dt} = -4(60 + 2p - 130 + 3p) \quad \text{o} \quad \frac{dp}{dt} + 20p = 240 \tag{19}$$

(b) Resolviendo (19) como una ecuación diferencial lineal de primer orden (o una con variables separables) se obtiene

$$p = 12 + ce^{-20t}$$

Usando $p = 8$ en $t = 0$ da $c =$ -4, y así

$$p = 12 - 4e^{-20t} \tag{20}$$

El gráfico de (20) está dado en la Figura 3.61. Note que el precio se incrementa de 8 al precio de equilibrio 12. Este precio de equilibrio también se obtiene al igualar la oferta y la demanda, esto es 60 + $2p = 120 - 3p$ o $p = 12$.

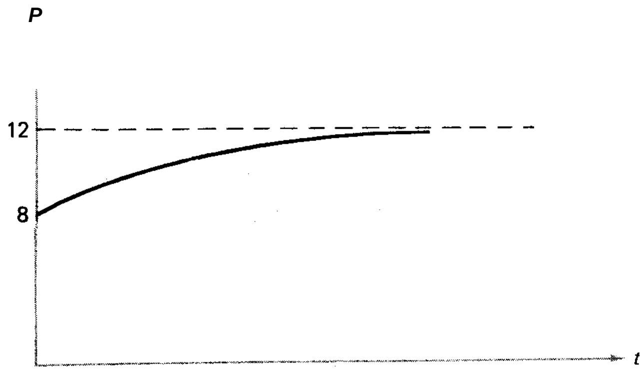


Figura 3.61

EJERCICIOS A

1. La oferta y la demanda de un cierto bien están dadas en miles de unidades, respectivamente, por $D = 120 + p(t) - 5p'(t)$, $S = 60 - 2p(t) - 3p'(t)$. En $t = 0$ el precio del bien es 5 unidades. (a) Encontrar el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico. (b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.
2. La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades, respectivamentepor $D = 40 + 3p(t) + p'(t)$, $S = 160 - 5p(t) - 3p'(t)$. En $t = 0$ el preciodel bien es 20 unidades. (a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico. (b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.
3. Trabaje el Ejercicio 2 si $D = 40 + p'(t)$, $S = 160 - 3p'(t)$.
4. Para proteger sus ganancias, un productor decide que la tasa a la cual incrementará los precios debería ser numéricamente igual a tres veces la tasa a la cual decrece su inventario. Asumiendo que la oferta y la demanda están dadas en términos del precio p por $S = 80 + 3p$, $D = 150 - 2p$ y que $p = 20$ en $t = 0$, encuentre el precio en cualquier tiempo.
5. Determine el inventario del productor en el Ejercicio 4 en cualquier tiempo t si tiene 2.800 unidades del bien en $t = 0$.

EJERCICIOS B

1. La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades por $S = 24(2 - e^{-2t}) + 16p(t) + 10p'(t)$, $D = 240 - 8p(t) - 2p'(t)$, respectivamente. En $t = 0$ el precio del bien es 12 unidades. (a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico. (b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe alguno.
2. Suponga que el productor del Ejercicio 1 decide que para proteger sus utilidades la tasa a la cual incrementari precios debería ser numéricamente igual a un cuarto de la tasa a la cual su inventario decrece. Encuentre el precio en cualquier tiempo si el precio en $t = 0$ es 12 unidades.
3. Si la oferta y la demanda de un bien están dadas por (5) en la página 161, discuta los casos (a) $a_2 = b_2$, (b) $a_1 = b_1$, $a_2 \neq b_2$, (c) $a_3 = b_3$, $a_2 \neq b_2$.

EJERCICIOS C

1. Resuelva completamente el caso donde la oferta y la demanda están dadas por $S = k_1 + k_2 p$, $D = k_3 + k_4 p$, y donde $dp/dt = -\alpha dq/dt$. Se asume que k_1, k_2, k_3, k_4 y α son constantes. Discuta las implicaciones económicas al tratar todas las situaciones que surjan.

2. La demanda y la oferta de un bien están dadas en miles de unidades respectivamente por $D = 80 - 4p(t) \operatorname{sen} 4t + 5p'(t) \cos 4t$, $S = 120 + 8p(t) \operatorname{sen} 4t + 4p'(t) \cos 4t$. En $t = 0$ el precio del bien es 25 unidades. Encuentre el precio en cualquier tiempo y discuta las implicaciones económicas.

cuatro
ecuaciones diferenciales lineales

1 La ecuación diferencial lineal general de orden n

En el Capítulo dos se encontró que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{1}$$

donde P y Q son funciones de x podía resolverse exactamente por el uso de un factor integrante. En este capítulo nos concentraremos en ecuaciones diferenciales lineales de orden superior al primero. Recordemos la siguiente

Definición. Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{2}$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, , a,(x), con frecuencia abreviados por $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $F(x)$ dependen solo de x y no de y.*

Si $n = 1$, las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes. Si $n = 2$, entonces (2) se convierte en

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{3}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Si todos los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en (2) son constantes, esto es, no dependen de x, la ecuación se llama *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.* Sin embargo, si no todos los coeficientes son constantes, la ecuación se llama *ecuación diferencial lineal con coeficientes variables*

Ejemplo 1. Las ecuaciones

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4 \text{ sen } 3s \quad \text{and} \quad 3y''' + 2y'' - 4y' + 8y = 3e^{-x} + 5x^2$$

son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden 2 *Y 3.*

Ejemplo 2. Las ecuaciones $xy'' - 2y' + x^2y = x^3 - 2$ y $\dfrac{d^4y}{dx^4} + xy = 0$ son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables de órdenes 2 y 4.

Observación. Ya hemos visto en el Capítulo dos que la ecuación diferencial lineal (1), o su equivalente (2) con $n = 1$, siempre se puede resolver exactamente por el uso de un factor integrante apropiado. Así, la solución de (1) está dada pot

$$Y = e^{-\int P\,dx}\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + ce^{-\int P\,dx} \tag{4}$$

*Una ecuación diferencial de orden n que no puede escribirse en esta forma se llama no-lineal.

y decimos que esta solución es exacta aún cuando no seamos capaces de expresar las integrales indicadas en forma cerrada. La pregunta que naturalmente surge es si *(2)* puede resolverse exactamente, esto es, en términos de integrales tales como en (4), para el caso donde $n \geqq 2$. La respuesta es que no se ha encontrado un resultado tal como (4) para la ecuación (2) si $n \geqq 2$. Sin embargo, (2) con $n \geqq 2$ se puede resolver exactamente en varios casos especiales, los cuales se examinarán en este y en próximos capítulos. Una clase de ecuaciones diferenciales lineales que siempre pueden resolverse y que también surgen frecuentemente en aplicaciones es aquella con ***coeficientes constantes.*** Una gran parte de este capítulo se dedicará a este caso.

Al discutir la ecuación (2) es conveniente usar los símbolos D, D^2, D^3, para indicar las ***operaciones,*** de tomar la primera, segunda, tercera, derivadas de aquello que les sigue. Así, Dy es lo mismo que dy/dx, D^2y es lo mismo que d^2y/dx^2, Los símbolos $D, D^2, .$ se llaman ***operadores*** debido a que ellos definen una operación a ser desarrollada. En forma similar xD^2 es un operador para denotar la operación de tomar la segunda derivada y luego multiplicar por x.

Con esta simbología (2) puede escribirse

$$a_0D^ny + a_1D^{n-1}y + a_2D^{n-2}y + \cdots + a_{n-1}Dy + a_ny = F \tag{5}$$

o

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + . + a_{n-1}D + a_n)y = F \tag{6}$$

en la cual se entiende que cada término en los paréntesis esta operando sobre y y los resultados se suman. Si escribimos por brevedad

$$\phi(D) \equiv a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + . + a_{n-1}D + a_n \tag{7}$$

la ecuación (6) puede escribirse convenientemente como $\phi(D)y = F$.

Ejemplo 3. La ecuación diferencial $\phi(D)y = F$, donde $F = x^2 + e^x$, y $\phi(D) \equiv D^3 + 5D^2 + 6D - 8$ realmente es una manera abreviada de escribir

$$\frac{d^3y}{dx} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - 8y = x^2 + e^x$$

Ejemplo **4.** La ecuación diferencial $\phi(D)y = F$, donde $F = 4$ sen 2x y $\phi(D) \equiv xD^2 - 2D + 3x^2$ es una manera abreviada de escribir

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 4 \operatorname{sen} 2x$$

Al considerar lo que representan los símbolos, deberá ser claro al estudiante que

$$D^n(u + v) = D^nu + D^nv, \qquad D^n(au) = aD^nu \tag{8}$$

donde u y v son funciones diferenciables, a es cualquier constante, y n es cualquier entero positivo. Cualquier operador tal como D^n que tiene las propiedades mostradas en (8) se llama un ***operador lineal.**** Es fácil mostrar que $\phi(D)$ dado por (7) es un operador lineal, esto es,

$$\phi(D)(u + v) = \phi(D)u + \phi(D)v, \qquad \phi(D)(au) = a\phi(D)u \tag{9}$$

Los resultados se obtienen directamente al interpretar ambos lados y mostrar que son iguales.†

Consideremos la ecuación lineal general de orden n dada en (2). Estamos particularmente interesados en saber cómo podemos obtener su solución general. Para hacer esto asociamos con la ecuación general

$$\phi(D)y = F(x) \tag{10}$$

otra ecuación

$$\phi(D)y = 0 \tag{11}$$

obtenida al remplazar $F(x)$ por cero. Por supuesto que, si $F(x)$ ya es cero, entonces (10) y (ll) son realmente las mismas. Asumimos $F(x) \not\equiv 0$.

Terminología Nos referimos a la ecuación (10) con $F(x)$ no idéntico a cero como la ecuación dada, o la ecuación con miembro no cero al lado derecho, y nos referiremos a la ecuación asociada (ll) como la ecuación complementaria, la ecuación reducida, o la ecuación con miembro cero al lado derecho.‡

Teorema fundamental 1. Si $y = u(x)$ es cualquier solución de la ecuación dada (10), y $y = v(x)$ es cualquier solución de la ecuación complementaria (ll), entonces $y = u(x) + v(x)$ es una solución de (10).

Demostración. Puesto que u es una solución de (10), tenemos

$$\phi(D)u = F(x) \tag{12}$$

Puesto que v es una solución de (ll), $\phi(D)v = 0$ (13)

Sumando (12) y (13), $\phi(D)(u + v) = F(x)$ **10** cual es otra manera de decir que $y = u + v$ es una solución

En el Capítulo uno definimos la solución general de una ecuación diferencial de orden n como una solución que contiene n constantes arbitrarias. Del Teorema fundamental 1 anterior sigue que $y = u(x) + v(x)$ será la solución general si $u(x)$ no tiene constantes arbitrarias y $v(x)$ tiene n constantes arbitrarias. Si $v(x)$ tiene n constantes arbitrarias, entonces es la solución general a la ecuación complementaria (ll). Si $u(x)$ no tiene constantes arbitrarias es una solución particular a la ecuación dada (10).

‘Es posible extender estas ideas a los casos donde n es un entero negativo o una fracción. Por ejemplo, podemos definir un operador de “media derivada” $D^{1/2} \equiv d^{1/2}/dx^{1/2}$ como aquel que, cuando opere dos veces sobre una función, produzca la primera derivada de la función. Para una interesante discusión de tales operadores vea [21]. También vea Ejercicios 10 y 11C, página 290.

†Debido a que $\phi(D)$ es un operador lineal el símbolo L algunas veces se usa en lugar de $\phi(D)$. No usaremos esto sin embargo porque L se usa en muchos otros tópicos, por ejemplo, inductancia, longitud, etc.

‡ En muchos textos se usa el término homogéneo. Sin embargo, esta palabra se usa también en muchos, diferentes y no relacionados tópicos en matemáticas. En este texto le damos a esta palabra un descanso.

Terminología Llamaremos a la solución general de la ecuación complementaria o reducida (11) la ***solución complementaria**** y algunas veces se denotará por y_c. Llamaremos a una solución seleccionada de la ecuación dada (sin constante arbitraria) como una ***solución particular***† de la ecuación dada y algunas veces se denotará por y_p. Las observaciones anteriores son de tal importancia para lo que se discutirá en este capítulo que las resumimos en el siguiente

Teorema fundamental II. La solución general $\phi(D)y = F(x)$ se puede obtener al encontrar una solución particular y_p de esta ecuación y añadirle la solución complementaria y_c, la cual es la solución general de $\phi(D)y = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encontrar la solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3x$.

Solución En notación de operadores esto se puede escribir

$$(D^2 - 5D + 6)y = 3x \tag{14}$$

La ecuación complementaria o reducida es

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0 \tag{15}$$

Se puede verificar que $y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$ es la solución complementaria de (14) puesto que tiene dos constantes arbitrarias y por tanto la solución general de (15).

También se puede verificar que $y_p = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}$ satisface (14) y por tanto es una solución particular.

Del Teorema fundamental II vemos que la solución requerida es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{12}$$

La ecuación diferencial del Ejemplo ilustrativo 1 es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Como otro ejemplo de una ecuación diferencial que involucra ***coeficientes variables,*** consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre la solución general de $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln x$.

Solución En notación de operadores esto se puede escribir

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = \ln x \tag{16}$$

La ecuación complementaria o reducida es

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 0 \tag{17}$$

Podemos verificar que $y_c = c_1x^2 + c_2x$ es la solución complementaria de (16) puesto que tiene las dos constantes requeridas y por tanto la solución general de (17).

*También se usa el término ***función complementaria o integral*** *complementaria*.

†También se usa el término ***integral particular.***

También podemos verificar que $y_p = \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{4}$ satisface (16), y por tanto es una solución particular.

Así, del Teorema fundamental II, la solución general requerida es

$$y = y_c + y_p = c_1x^2 + c_2x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{4}$$

De estos ejemplos ilustrativos es claro que para obtener la solución general de $\phi(D)y = F(n)$, se deben responder las siguientes preguntas.

Preguntas

1. ¿Cómo encontramos la solución complementaria?
2. ¿Cómo encontramos una solución particular?

Responderemos a estas preguntas en secciones 3 y 4 para el caso muy importante donde las ecuaciones diferenciales tienen coeficientes constantes, el cual afortunadamente resulta relativamente fácil de resolver. El caso de coeficientes variables se puede resolver exactamente sólo en situaciones especiales, y consideramos algunos de estos posteriormente.

2 Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales

En el Capítulo uno, página 24, se enunció un teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora enunciamos sin demostración un teorema correspondiente para la ecuación lineal general de orden n

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x)]y = F(x) \tag{18}$$

Teorema de existencia-unicidad. **Sean** $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $F(x)$ funciones las cuales son continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, y suponga que $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ son constantes dadas. Entonces existe una solución única $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial (18) y también las condiciones

$$y(c) = p_0, \quad y'(c) = p_1, \ldots, y^{(n-1)}(c) = p_{n-1} \tag{19}$$

donde $a \leq c \leq b$.

Como en el Teorema de existencia-unicidad sobre ecuaciones de primer orden, este teorema sólo proporciona condiciones suficientes. Esto es, aún sin las condiciones enunciadas no se satisfacen todas, pueden aún existir soluciones únicas.

EJERCICIOS A

1. Escriba cada una de las siguientes ecuaciones en "notación de operadores".

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$. (b) $3y^{(IV)} - 5y''' + y = e^{-x} + \operatorname{sen} x$.

(c) $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -\beta\dfrac{ds}{dt} - \omega^2 s$. (d) $x^2y'' - 2xy' = y + 1$.

2. Si $y = x^3 - 3x^2 + 2e^{-x}$ y $z = \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x$ evalúe:
(a) $(D^2 + 3D + 1)y$. (b) $(2D^3 - D^2 - 4)z$.
(c) $(D^2 + 2D)(y + z)$. (d) $(x^2D^2 + 3xD - 2)(2y - 32)$.

3. Complete las entradas en la tabla. Verifique que las soluciones generales en la cuarta columna satisfacen las ecuaciones diferenciales en la primera columna.

Ecuación diferencial	Solución complementaria	Solución particular	Solución general
$y'' - 33'' + 2y = x$	$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$	$y_p = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$	
$(D^2 - 1)y = e^{-x}$		$y_p = -\frac{x}{2}e^{-x}$	$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x}$
$(D^3 + D)y = \operatorname{sen} 2x$			$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x + c + \frac{1}{6}\cos 2x$
			$y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + e^x$
$(x^2D^2 + xD - 4)y = x^3$	$y_c = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$	$y_p = \frac{x^3}{5}$	

EJERCICIOS B

1. Evalúe $F(x) \equiv (D - 1)(x^3 + 2x)$, donde $D \equiv d/dx$. Luego evalúe $(D - 2)F(x)$. El resultado puede escribirse (II $- 2)(D - 1)(x^3 + 2x)$. ¿Es esto lo mismo que $(D^2 - 3D + 2)$ (x3 + 2x)? ¿Es el operador $(D - 2)(D - 1)$ igual al operador $D^2 - 3D + 2$ cuando las operaciones se desarrollan en cualquier función diferenciable? Pruebe su respuesta.

2. (a) ¿Es $(D - a)(D - b) = D^2 - (a + b)D + ab$, donde a y b son constantes? (b) Dos operadores $\phi_1(D)$ y $\phi(D)$ se llaman *conmutativos* con respecto a la multiplicación si

$$\phi_1(D)\phi_2(D)u = \phi_2(D)\phi_1(D)u.$$

Son conmutativos los operadores *(D-a)* y (D-b)? (c) Los operadores $\phi_1(D)$, $\phi_2(D)$ Y $\phi_3(D)$ se llaman *asociativos* con respecto a la multiplicación si

$$\phi_1(D)[\phi_2(D)\phi_3(D)]u = [\phi_1(D)\phi_2(D)]\phi_3(D)u$$

Son asociativos los operadores (D-a), (D-b) y (D-c), donde a, ***b, c*** son constantes?

EJERCICIOS C

1. Evalúe $F(x) \equiv (D \quad x)(2x^3 - 3x^2)$. Luego evalúe $(D + x)F(x)$. El resultado puede escribirse $(D + x)(D - x)(2x^3 - 3x^2)$. ¿Este resultado es el mismo que $(D^2 - x^2)$ $(2x^3 - 3x^2)$? ¿$(D - x)(D + x)$ es igual a $(D + x)(D - x)$?

2. Responda a la Pregunta 2 de los Ejercicios B cuando a, ***b,*** c no son todas constantes.

3. Represente $D^3 - 6D^2 + 11D - 6$ como un "producto" de tres factores si esto es posible. ¿Importa el orden? Pruebe sus conclusiones.

4. Discuta la existencia y unicidad de las soluciones de (a) $y'' - 3y' + 2y = x^2$; $y(0) = y'(0) = 0$. (b) $xy'' + y' + xy = 0$; $y(c) = p_1, y'(c) = p_2$.

5. Escriba la ecuación diferencial $(D^2 - 3D + 2)y = x$ como $(D - 1)(D - 2)y = x$. Haciendo $(D - 2)y = v$, escriba la ecuación como $(D - 1)v = x$ y así encuentre v. De esto encuentre y. ¿Tiene usted la solución general? Si es así, escriba las soluciones complementaria y particular. Esto se llama el método de reducción de ***orden.***

6. Use el método del Ejercicio 5 para obtener soluciones generales a cada una de las siguientes ecuaciones y verifique su respuesta en cada caso. (a) $(D^2 + D - 2)y =$ e-*. (b) $(D-3)(D+2)(D-1)y = 3e^x - 2$. (c) $(D-1)^2 y = 1$. (d) $(D - x)(D + 1)y = x$.

3 ¿Cómo obtener la solución complementaria?

3.1 LA ECUACION AUXILIAR

En esta sección concentramos nuestra atención en los métodos para encontrar la solución general de la ecuación $\phi(D)y = 0$ con coeficientes constantes. Considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$? En notación de operadores esta ecuación se puede escribir $(D^2 - 3D + 2)y = 0$. Antes de proseguir con esto, regresemos a la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes, por ejemplo, $(D - 2)y = 0$. Podemos escribir esta ecuación

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \tag{1}$$

Resolviendo esto por uno de los métodos posibles encontramos que $y = ce^{2x}$ es la solución general. Esta solución se pudo haber encontrado asumiendo una solución de la forma $y = e^{mx}$, donde m es una constante aún indeterminada. Para que ésta sea una solución, tenemos al sustituir en (1) $(m - 2)e^{mx} = 0$, esto es, m = 2, puesto que e^{mx} nunca es cero. De -esto es fácil deducir que ce^{2x} es también una solución que da la solución general. Nos preguntamos ahora si la misma técnica funcionará también sobre la ecuación $(D^2 - 3D + 2)y = 0$. Haciendo $y = e^{mx}$, la ecuación se convierte en

$$m^2e^{mx} - 3me^{mx} + 2e^{mx} = 0 \quad o \quad (m^2 \quad 3m + 2)e^{mx} = 0$$

y es claro que ésta será satisfecha si $m^2 - 3m + 2 = 0$ o $m = 1$, 2. Así, sigue que $y = e^x$ y $y = e^{2x}$ son soluciones. Preguntamos ahora: ¿Cuál es la solución general? Sabemos que la solución general tiene dos constantes arbitrarias y el estudiante puede sospechar que un buen pronóstico para esta solución general sería $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Esta sospecha se confirma al sustituir simplemente en la ecuación y mostrar que se satisface. Si el estudiante desea puede reforzar su sospecha con el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Solución Haciendo $y = e^{mx}$, donde m es una constante, vemos que m debe ser tal que $m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$. Las tres raíces de esta ecuación son $m = 1, 2, 3$. Por tanto, las soluciones son e^x, e^{2x} y e^{3x}, y siguiendo con nuestra sospecha pronosticamos que

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

es la solución general requerida. Nuestra sospecha de nuevo se confirma por sustitución.

Podemos confirmar permanentemente nuestra sospecha con el siguiente

Teorema 1. Si y_1 y y_2 son dos soluciones de $\phi(D)y = 0$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es tambien una solución.

Demostración. Puesto que y_1 y y_2 son soluciones, $\phi(D)y_1 = 0$, $\phi(D)y_2 = 0$. Multiplicando estas ecuaciones por c_1 y c_2 respectivamente, y recordando que $\phi(d)$ es un operador lineal, tenemos $\phi(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$, lo cual muestra que $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución y prueba el teorema.

El estudiante debería ser. capaz de extender esto al siguiente

Teorema 2. Si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son k soluciones de $\phi(D)y = 0$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$ es también una solución.

En el caso de que el número de constantes arbitrarias en la solución sea igual al orden de la ecuación diferencial, tenemos la solución general.* Este teorema confirma las sospechas que teníamos anteriormente.

El estudiante probablemente ha notado que la ecuación para determinar m tiene la misma forma de la ecuación diferencial escrita en términos de operadores. Así, para $(D^2 - 3D + 2)y = 0$, la "ecuación de m" es $m^2 - 3m + 2 = 0$. En general para *coeficientes constantes* la ecuación diferencial $\phi(D)y = 0$ tiene la "ecuación de m" $\phi(m) = 0$. Esta "ecuación de m" se llama la *ecuación auxiliar* y nos referimos a ella por su nombre.

Observación. No es difícil mostrar que los Teoremas 1 y 2 anteriores se cumplen para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, como también para aquellas con coeficientes constantes. Como resultado podríamos resolver tales ecuaciones si pudiéramos encontrar las soluciones $y_1, y_2, \ldots,$ de $\phi(D)y = 0$. La dificultad que surge en el caso de los coeficientes variables es la de que soluciones del tipo $y = e^{mx}$ *raramente* existen, de modo que no podemos determinar fácilmente y_1, y_2,. El caso de coeficien-

*El estudiante debería recordar que cuando hablamos de constantes arbitrarias queremos implicar constantes arbitrarias esenciales como se indicó en el pie de página de la página 16.- Este concepto está íntimamente relacionado con aquel de independencia lineal de funciones el cual se discute en la página 181.

tes constantes, soluciones del tipo $y = e^{mx}$ siempre existen y nuestra tarea es mucho más fácil. Vea Ejercicio 2B.

EJERCICIOS A

1. Encuentre las soluciones generales de cada una de las siguientes:
   (a) $y'' + 4y' - 5y = 0$. (b) $(4D^2 - 25)y = 0$. (c) $y'' = 4y$.
   (d) $2y''' - 5y'' + 2y = 0$. (e) $I''(t) - 4I'(t) + 2I(t) = 0$. (f) $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$.
2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas: (a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$. (b) $(D^2 - 3D + 2)y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. (c) $(D^3 - 16D)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 16$.

EJERCICIOS B

1. Resuelva $(D^3 + 5D^2 + 2D - 12)y = 0$.
2. ¿Se puede usar $y = e^{mx}$ con m constante para resolver $y'' - xy' + y = 0$? Explique.
3. Pruebe (a) Teorema 1 y (b) Teorema 2 tanto para coeficientes variables como para coeficientes constantes.
4. (a) Resuelva $[D^2 - (m_1 + m_2)D + m_1 m_2]y = 0$, m_1, m_2 constantes, sujeta a $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si $m_1 \neq m_2$. (b) ¿Cómo llega a ser la solución de (a) si $m_2 \to m_1$? (c) ¿La solución límite de (b) satisface la ecuación de (a) si $m_1 = m_2$? ¿Puede usted idear una regla para raíces repetidas?

EJERCICIOS C

1. Resuelva $(D^4 - 20D^2 + 4)y = 0$. 2. Resuelva $(D^4 - 2D^3 - 16D^2 + 12D + 12)y = 0$.

3.2 EL CASO DE RAICES REPETIDAS

Considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $(D^2 - 6D + 9)y = 0$. Escribiendo la ecuación auxiliar como de costumbre, tenemos $m^2 - 6m + 9 = 0$. Resolviendo ésta tenemos $m = 3,3$; esto es, dos raíces iguales. Sin pensarlo, podríamos escribir $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}$ como la solución general. Sin embargo, aunque aparentemente tenemos dos constantes arbitrarias, en realidad esto no es cierto puesto que podemos escribir $y = (c_1 + c_2)e^{3x}$ o $y = ce^{3x}$, la cual sólo tiene una constante arbitraria. De donde nos preguntamos: ¿Qué se hace en el caso donde las raíces de la ecuación auxiliar están repetidas?

El método siguiente, el cual es de gran generalidad y útil en trabajo futuro, puede ayudarnos ahora. Lo enunciamos como

Teorema 3. Si conocemos una solución, digamos $y = y_1$ de la ecuación de orden n $\phi(D)y = 0$, entonces la sustitución $y = y_1 v$ transformará la ecuación dada en una ecuación de orden $(n - 1)$ en v' esto es, dv/dx.

Observación. Este teorema es válido para coeficientes constantes o variables, y es también válido para la ecuación $\phi(D)y = F(x)$.

Demostración. Probaremos este teorema para el caso $n = 2$. Las extensiones para $n > 2$ siguen el mismo patrón. Para $n = 2$ la ecuación diferencial es

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = 0 \tag{2}$$

Ahora si $y = y_1 v$ tenemos

$$Dy = y_1 Dv + vDy_1, \qquad D^2y = y_1D^2v + 2(Dy_1)(Dv) + vD^2y_1$$

Sustituyendo éstas en (2) y simplificando produce

$$a_0 y_1 D^2 v + (2a_0Dy_1 + a_1 y_1)Dv + (a_0D^2y_1 + a_1Dy_1 + a_2 y_1)v = 0 \tag{3}$$

Puesto que y_1 satisface (2), el último término a la izquierda de (3) es cero de modo que la ecuación es

$$a_0 y_1 D^2 v + (2a_0Dy_1 + a_1 y_1)Dv = 0 \tag{4}$$

la cual prueba el teorema para $n = 2$, puesto que (4) es de orden $n - 1 = 2 - 1 = 1$ en $Dv = v'$.

En el caso especial $n = 2$, el Teorema 3 puede usarse para obtener la solución general. Al hacer $Dv = u$ en (4) y dividiendo por $a_0 y_1 u$, podemos escribir (4) como

$$\frac{du}{u} + \frac{2\,dy_1}{y_1} + \frac{a_1}{a_0}dx = 0$$

La integración lleva entonces a

$$\ln u + 2\ln y_1 + \int \frac{a_1}{a_0}\,dx = \ln c_1 \quad \text{o} \quad u = \frac{c_1 e^{-\int (a_1/a_0)dx}}{y_1^2}$$

Puesto que $Dv = u$, tenemos por otra integración

$$v = c_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0)dx}}{y_1^2}\,dx + c_2$$

Finalmente usando $y = y_1 v$, obtenemos la solución general requerida

$$y = c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0)dx}}{y_1^2}\,dx + c_2 y_1 \tag{5}$$

Ilustremos el teorema al aplicarlo a $(D^2 - 6D + 9)y = 0$. Hemos visto que e^{3x} es una solución. De acuerdo al teorema hacemos $y = ve^{3x}$. Puesto que

$$Dy = v'e^{3x} + 3ve^{3x}, \qquad D^2y = v''e^{3x} + 6v'e^{3x} + 9ve^{3x}$$

tenemos sustituyendo en la ecuación y simplificando,

$$v''e^{3x} = 0$$

Sigue que $v'' = 0$, ó $v = c_1 + c_2x$. De donde, tenemos $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$. Así, la solución general es $y = c_1e^{3x} + c_2\,xe^{3x}$. Así el dilema que surgió en nuestro problema está resuelto. Hacemos ahora una pregunta más o menos obvia de qué pasa cuando tenemos 3 raíces iguales. Por ejemplo, suponga que las raíces son 2, 2, 2. Esto ocurrirá cuando la ecuación auxiliar sea $(m - 2)^3 = 0$, esto es, $m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$. La ecuación diferencial en este caso sería

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$$

Puesto que e^{2x} es una solución, sustituimos $y = ve^{2x}$ de acuerdo al teorema y encontramos que la ecuación dada llége a ser, después de simplificaciones,

$$v'''e^{2x} = 0 \quad o \quad v''' = 0$$

de modo que $v = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ por integración y la solución está dada por

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x}$$

La idea deberá ser ahora aparente al estudiante. Si tenemos 5 raíces todas iguales a -1, la solución requerida sería

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4)e^{-x}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $(D^6 - 6D^5 + 12D^4 - 6D^3 - 9D^2 + 12D - 4)y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar $m^6 - 6m^5 + 12m^4 - 6m^3 - 9m^2 + 12m - 4 = 0$ tiene raíces $m = 1, 1, 1, 2, 2, -1$. Así, hay (a) tres raíces iguales a 1, (b) dos raíces iguales a-2, (c) una raíz igual a -1, y la solución general (con las seis constantes arbitrarias requeridas) es

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x + (c_4 + c_5 x)e^{2x} + c_6 e^{-x}$$

EJERCICIOS A

1. Encuentre las soluciones generales de las siguientes:

(a) $(D^2 - 4D + 4)y = 0$. (b) $16y'' - 8y' + y = 0$. (c) $4I''(t) - 12I'(t) + 9I(t) = 0$.

(d) $(D^6 - 4D^4)y = 0$. (e) $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$. (f) $4y^{(IV)} - 20y'' + 25y = 0$.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas:

(a) $(D^2 - 2D + 1)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

, (b) $(D^3 - D^2)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

(c) $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -16\dfrac{ds}{dt} - 64s$; $s = 0$, $\dfrac{ds}{dt} = -4$ donde $t = 0$.

EJERCICIOS B

1. Si a es constante y u es diferenciable, pruebe lo siguiente: $(D - a)(e^{ax}u) = e^{ax}Du$, $(D - a)^2(e^{ax}u) = e^{ax}D^2u$, $(D - a)^3(e^{ax}u) = e^{ax}D^3u$. ¿Puede usted probar por inducción matemática que $(D - a)^n(e^{ax}u) = e^{ax}D^n u$ donde n es cualquier entero positivo? Esto algunas veces se llama el *teorema de cambio exponencial.*

2. Use el resultado del Ejercicio 1 para mostrar que la ecuación $(D - a)^n y = 0$ tiene la solución general

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \quad + c_n x^{n-1})e^{ax}$$

y así establezca el resultado de esta sección.

3. Pruebe el teorema de la página 175 para (a) $n = 3$ y (b) $n = 4$. ¿Puede usted probarlo para $n > 4$?

EJERCICIOS C

1. Encuentre la solución general de $y'' - xy' + y = 0$, dado que $y = x$ es una solución.
2. Encuentre una constante p tal que $y = x^p$ satisfaga $x^2y'' + 3xy' + y = 0$. Escriba la solución general.
3. Dado que $y = x$ es una solución de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, encuentre su solución general y también encuentre la solución general de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = x$.
4. Si $y = Y_1(x)$ satisface $[a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x)]y = 0$, resuelva $[a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x)]y = R(x)$.

3.3 EL CASO DE RAICES IMAGINARIAS

Considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva la ecuación $y'' + y = 0$. (6)

Si hacemos $y = e^{mx}$ como de costumbre, encontramos $m^2 + 1 = 0$, y las raíces son $m = \pm i$, esto es, las raíces son imaginarias. Formalmente la solución es

$$y = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} \tag{7}$$

pero la pregunta naturalmente surge: ¿Qué queremos decir con e^{ix} y e^{-ix}? Una pista para el posible significado se puede encontrar al notar que la ecuación (6) le falta una de las variables. Esta ecuación de hecho ya ha sido resuelta antes (ver páginas 59-60 y la solución general está dada por

$$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \tag{8}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Ahora se puede mostrar que la ecuación diferencial no puede tener más de una solución general, así que tenemos que aceptar que aunque (7) y (8) luzcan diferentes ellas realmente son lo mismo. Veamos por tanto lo que podemos deducir de esto. Tenemos

$$c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} \equiv A \operatorname{sen} x + B \cos x \tag{9}$$

Colocando $x = 0$ en esta identidad y asumiendo que $e^{\pm i0} = 1$, encontramos

$$c_1 + c_2 = B \tag{10}$$

Diferenciando ambos lados de la identidad (9), asumiendo que las reglas habituales se cumplen cuando hay raíces imaginarias, tenemos

$$c_1ie^{ix} - c_2ie^{-ix} \equiv A \cos x - B \operatorname{sen} x \tag{11}$$

Colocando $x = 0$, tenemos $(c_1 - c_2)i = A$ (12)

Con los valores de A y B de (10) y (12), la ecuación (9) llega a ser

$$c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} \equiv c_1(\cos x + i \operatorname{sen} x) + c_2(\cos x - i \operatorname{sen} x) \tag{13}$$

Puesto que c_1 y c_2 son arbitrarias, podemos colocar $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Luego, de (13)

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \operatorname{sen} x \tag{14}$$

En forma similar, $$e^{-ix} \equiv \cos x - i \operatorname{sen} x \tag{15}$$

lo cual también se podía haber obtenido de (14) al remplazar x por $-x$ o i por $-i$. Usaremos (14) y (15), llamadas las *fórmulas de Euler,* como definiciones de e^{ix} y e^{-ix}, puesto que lo que hemos hecho antes hace plausible, pero no prueba, estos resultados.*

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelve $(D^2 + 2D + 5)y = 0$. La ecuación auxiliar es $m^2 + 2m + 5 = 0$, y $m = -1 \pm 2i$. Entonces formalmente

$$y = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x} \tag{16}$$

esto es, $y = c_1 e^{-x} e^{2ix} + c_2 e^{-x} e^{-2ix}$ ó $y = e^{-x}(c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix})$

Por analogía con los resultados anteriores

$$c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix} \equiv A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$$

de modo que (16) se convierte en

$$y = e^{-x}(A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x)$$

Esto puede, de hecho, verificarse como la solución general requerida. En general, si $a \pm bi$ son raíces de la ecuación auxiliar, una solución correspondiente es

$$e^{ax}(A \operatorname{sen} bx + B \cos bx)$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resuelva $(D^4 - 5D^2 + 12D + 28)y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar $m^4 - 5m^2 + 12m + 28 = 0$ tiene las raíces $m = -2, -2, 2 \pm \sqrt{3}i$.

Puesto que $m = -2$ es una raíz doble, $(c_1 + c_2 x)e^{-2x}$ es una. solución.

Puesto que $2 \pm \sqrt{3}i$ son raíces, $e^{2x}(c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_4 \cos \sqrt{3}x)$ es una solución. De donde,

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + e^{2x}(c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_4 \cos \sqrt{3}x)$$

PROBLEMA PARA DISCUSION

¿Cuál es la solución general de una ecuación diferencial cuya ecuación

*Para aquellos quienes estén familiarizados con series podemos obtener estos resultados al usar la serie

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$$

remplazando u por ix y notando que

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Sin embargo, este método necesita justificación, la cual dejamos para un curso en variable compleja.

auxiliar tiene raíces 2, -1, 0, 0, $3 \pm 5i$, 2, 0, $3 \pm 5i$. Tenemos diez raíces. Estas son:

(1) la raíz triple 0 (2) la raíz -2

(3) la raíz doble 2 (4) las raíces dobles $3 \pm 5i$

De (1) una solución es $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{0x} = c_1 + c_2x + c_3x^2$.
De (2) una solución es c_4e^{-x}.
De (3) una solución es $(c_5 + c_6x)e^{2x}$.

Para obtener una solución correspondiente a (4), note que una solución correspondiente a la pareja simple $3 \pm 5i$ sería $e^{3x}(c_7 \operatorname{sen} 5x + c_8 \cos 5x)$. Puesto que la pareja se repite. otra solución es $xe^{3x}(c_9 \operatorname{sen} 5x + c_{10} \cos 5x)$. Esto es análogo a nuestros resultados sobre raíces repetidas. [Si $3 \pm 5i$ fuera una raíz triple, otra solución sería $x^2e^{3x}(c_{11} \operatorname{sen} 5x + c_{12} \cos 5x)$.] De lo anterior sigue que la solución general con las diez variables arbitrarias sería

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + (c_5 + c_6x)e^{2x}$$
$$+ e^{3x}(c_7 \operatorname{sen} 5x + c_8 \cos 5x) + xe^{3x}(c_9 \operatorname{sen} 5x + c_{10} \cos 5x)$$

Hemos así respondido adecuadamente a la pregunta: ¿Cómo obtener la solución complementaria?

EJERCICIOS A

1. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes:

(a) $y'' + 4y = 0$. (b) $(D^2 + 4D + 5)y = 0$. (c) $4\dfrac{d^2s}{dt^2} = -9s$

(d) $4y'' - 8y' + 7y = 0$. (e) $y^{IV} = -16y''$. (f) $(D^3 + D^2 - 2)y = 0$.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

(a) $(D^2 + 1)y = 0$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$. (b) $U''(t) = -16U(t)$; $U(0) = 0$, $U'(0) = 4$
(c) $I''(t) + 2I'(t) + 5I(t) = 0$; $I(0) = 2$, $I'(0) = 0$.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la solución de $(D^6 - 64)y = 0$; $D = d/dx$.

2. (a) Encuentre la solución de $(D^2 + a^2)(D^2 + b^2)y = 0$, sujeta a $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, si $a \neq b$. (b) ¿Cómo llega a ser la solución en (a) si $b \to a$? ¿Es ésta una solución de la ecuación dada cuando $b = a$? ¿Sus resultados concuerdan con los resultados generales relacionados con raíces repetidas de la ecuación auxiliar?

3. Encuentre la solución general de $(D^4 + 4D^2 + 4)y = 0$.

EJERCICIOS C

1. Resuelva $(D^4 + 4)y = 0$; $D \equiv d/dx$.

2. Resuelva $(D^4 + 6D^2 + 25)y = 0$; $D \equiv d/dx$.

EJERCICIOS DE REPASO MISCELANEOS SOBRE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS

EJERCICIOS A

1. Escriba la solución general de las ecuaciones diferenciales cuyas ecuaciones auxiliares tienen las siguientes raíces:

(a) 3, -1. (b) 4, 0. -2.
(c) 2. 2. 2, 0, 0. (d) -- 1, -i. i, -2.
(e) $2 \pm 3i$, $-1 \pm 2i$, 5, -1. (f) $1 \pm \sqrt{3}i$, -3. -2, 0, -1.
(g) 1, 1. 0, -2. -1, 1, $-1 \pm 2i$. (h) $1 \pm i$, $1 \pm i$.
(i) $\pm\sqrt{3}$, ± 4, $\frac{1}{2} \pm 2i$, $-1 \pm 3i$. (j) 1, 1, 1, 0, 0, $\pm i$, $\pm i$.

2. Encuentre la solución general para cada una de las siguientes:

(a) $(D^2 + D + 1)y = 0$. (b) $(D^4 - 1)y = 0$.
(c) $(D^6 + 2D^4 + D^2)y = 0$. (d) $(D^3 \quad 4D^2 + 4D)y = 0$.
(e) $y''' = y''$. (f) $S^{(IV)}(t) + 2S''(t) - 8S(t) = 0$.

EJERCICIOS B

1. Determine las constantes a, b, c tales que $(D^3 + aD^2 + bD + c)y = 0$ tengan la solución.

$$y = c_1e^{-x} + e^{-2x}(c_2 \operatorname{sen} 4x + c_3 \cos 4x)$$

2. Encuentre una ecuación diferencial cuya ecuación auxiliar tenga las raíces -1, -1, $1 \pm 2i$, $1 \pm 2i$. Escriba la solución general.

EJERCICIOS C

1. Muestre que la solución general de $D^n y = y$, donde n es un entero positivo, es

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{m_k x}$$

donde $m_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 1, \ldots, n$. ¿La solución se puede expresar en forma real?

2. Encuentre las soluciones reales de (a) $D^3 y = y$; (b) $D^5 y = y$.

3. Resuelva $D^3 y = 4y$.

4. Sea X, y X_2 dos soluciones cualesquiera de la ecuación diferencial $\ddot{X} + k^2 X = 0$ tales que $X_1^2 + X_2^2 = 1$, donde los puntos denotan derivadas con respecto a t. Pruebe que $\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 = k^2$ y $\ddot{X}_1^2 + \ddot{X}_2^2 = k^4$. Generalice a derivadas de orden superior.

/ 3.4 INDEPENDENCIA LINEAL Y WRONSKIANOS

En el Ejemplo ilustrativo 1, página 174, consideramos la ecuación diferencial

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0 \tag{17}$$

Por sustitución directa encontramos que e^x, e^{2x}, e^{3x} son soluciones de las cuales se obtenía la solución general

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

Suponga, sin embargo, que de alguna manera obtenemos las tres funciones

$$e^{2x} + 2e^x, \qquad 5e^{2x} + 4e^x, \qquad e^x - e^{2x} \tag{18}$$

las cuales fácilmente se muestra que todas son soluciones. ¿Podríamos decir entonces que

$$y = A(e^{2x} + 2e^x) + B(5e^{2x} + 4e^x) + C(e^x - e^{2x}) \tag{19}$$

con las constantes *A, B,* C es la solución general? El estudiante observador al ver que (19) se puede escribir

$$y = (2A + 4B + C)e^x + (A + 5B - C)e^{2x} \quad \text{o} \quad y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

diría que la solución realmente no tiene tres constantes arbitrarias de modo que no puede ser la solución general. Hacemos ahora la pregunta, ¿"Qué hay en las funciones (18) que nos hubiera permitido prever esta situación? Una clave se obtiene al notar que hay tres constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ no todas cero, tal que

$$\alpha_1(e^{2x} + 2e^x) + \alpha_2(5e^{2x} + 4e^x) + \alpha_3(e^x - e^{2x}) \equiv 0$$

esto es, idénticamente cero; por ejemplo $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -2$. Así llegamos a la idea de que aunque tenemos tres soluciones, éstas son en una manera dependientes. Esto ha llevado a los matemáticos a tener la siguiente

Definición. Un conjunto de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ denotadas por brevedad $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *se* dice que son ***linealmente dependientes*** en un intervalo si existe un conjunto de n constantes, no todas cero, tales que en el intervalo

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \tag{20}$$

en caso contrario se dice que el conjunto ***es linealmente independiente.*** En forma equivalente, podemos decir que el conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ***es linealmente independiente*** en un intervalo si la existencia de la identidad (20) implica que todas las constantes deben ser cero, esto es, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Observación 1. Note que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes entonces podemos expresar una de estas funciones en términos de las otras. Así por ejemplo si suponemos que $\alpha_n \neq 0$, entonces podemos resolver para y_n para obtener

$$y_n = \frac{-(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1})}{\alpha_n} \tag{21}$$

mostrando que y_n depende de $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Cuando no podamos obtener ninguna de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en términos de las restantes tenemos ***independencia lineal.*** En el caso (21) con frecuencia decimos que y_n es una ***combinación lineal*** de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Observación 2. Los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones siempre se refieren a algún intervalo dado. Para no repetir las palabras "en un intervalo", con frecuencia no referiremos simplemente a dependencia o independencia lineal de funciones sin añadir cada vez estas palabras.

De las ideas anteriores creemos, al menos intuitivamente, que las funciones linealmente independientes deben Jugar un papel muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales [que se asumen tienen la forma (2), página 167] y esto de hecho ocurre.

Al resolver ecuaciones diferenciales lineales esencialmente se ha usado hasta ahora este concepto de **independencia** lineal sin realmente **expresarlo.** Por ejemplo, al considerar la ecuación

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

encontramos las soluciones e^x y e^{2x} y de éstas la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Implícitamente ésta contiene el supuesto de la independencia lineal de estas funciones. Para mostrar esto, supongamos que existen dos constantes α_1 y α_2, no ambas cero, tales que

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} \equiv 0$$

esto es, suponemos que las funciones son linealmente dependientes. Entonces, al dividir ambos lados por ex, encontramos

$$\alpha_2 e^x \equiv -\alpha_1$$

lo cual es claramente imposible a menos que α_1 y α_2 sean ambas cero. Así las funciones son linealmente independientes.

Nos gustaría tener una condición para la dependencia ó independencia lineal que no requiera el cálculo de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ contenidas en la definición puesto que esto puede resultar tedioso. Examinemos primero el caso de dos funciones y_1 y y_2. Por definición, si y_1 y y_2 son linealmente dependientes, entonces podemos encontrar constantes α_1 y α_2 no ambas cero, tales que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0 \tag{22}$$

Al diferenciar esta identidad. asumiendo que las derivadas y'_1, y'_2 existan, encontramos

$$\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \equiv 0 \tag{23}$$

Multiplicando (22) por y'_2, (23) por y_2 y restando encontramos

$$\alpha_1(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) \equiv 0 \tag{24}$$

Similarmente multiplicando (22) por y'_1, (23) por y_1 y restando, encontramos

$$\alpha_2(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) \equiv 0 \tag{25}$$

De (24) y (25) vemos que si α_1 y α_2 no son ambas cero entonces

$$W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{26}$$

Llamamos el determinante $W(y_1, y_2)$ en *(26)* el *Wronskiano* de y_1 y y_2, con frecuencia denotada por brevedad W.

Observación 3. Podemos también obtener (26) al considerar (22) y (23) como ecuaciones lineales simultáneas para determinar α_1 y α_2. Esto se hace usando el Teorema 6 en el Apéndice el cual establece que las ecuaciones (22) y (23) producen soluciones α_1 y α_2 no ambas cero si y sólo si el determinante de los coeficientes α_1, α_2 es cero, lo cual conduce a (26).

Hemos probado así el siguiente

Teorema 4. Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo, y si sus derivadas y'_1 y y'_2 existen en el intervalo, entonces el Wronskiano de

y_1 y y_2 dado por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

es idénticamente cero (esto es, $W = 0$) en el intervalo.

Este teorema puede enunciarse en términos de independencia lineal como sigue.

Teorema 5. Si el Wronskiano de y_1 y y_2 no es idénticamente cero (esto es, $W \neq 0$) en un intervalo, entonces y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo.
Esto es cierto puesto que si y_1 y y_2 fueran linealmente dependientes en el intervalo su Wronskiano sería idénticamente cero en el intervalo por el Teorema 4. Esta contradicción muestra que las funciones no son linealmente independientes, esto es, son linealmente dependientes en el intervalo. El resultado también se obtiene de (24) y (25) puesto que si $W = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 \not\equiv 0$, tenemos $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.

Ejemplo. Puesto que el Wronskiano de $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$ es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$$

el cual no es idénticamente cero, las funciones son linealmente independientes en cualquier intervalo.

Es natural hacer la siguiente

Pregunta. Si $W = 0$ idénticamente, se concluye que y_1 y y_2 son linealmente dependientes, esto es, ¿es cierto el recíproco del Teorema 4?

Desafortunadamente, la respuesta a esto es "no", como se muestra en el Siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea $y_1 = x^2$ y $y_2 = x|x|$, donde $|x|$ *es* el *valor absoluto de* x, dos funciones definidas en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. (a) Encuentre el Wronskiano de y_1 y y_2. (b) Muestre que las funciones no son linealmente dependientes, esto es, son linealmente independientes, en el intervalo.

Solución (a) La derivada de $y_1 = x^2$ en el intervalo es claramente $y'_1 = 2x$. Puesto que

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqq 0 \\ -x, & \text{si } x \leqq 0 \end{cases}$$

tenemos
$$y_2 = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x^2, & \text{si } -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

Ahora para $0 \leqq x \leqq 1$ tenemos $y'_2 = 2x$, mientras que para $-1 \leqq x \leqq 0$, tenemos $y'_2 = -2x$.

Así
$$y'_2 = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2x, & \text{si } -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

Para determinar el Wronskiano, debemos calcularlo para $0 \leqq x \leqq 1$ y luego para $-1 \leqq x \leqq 0$, esto es, hay dos casos.

Caso 1. $0 \leqq x \leqq 1$. Aquí $W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0.$

Caso 2. $-1 \leqq x \leqq 0$. Aquí $W = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0.$

De estos dos casos tenemos $W = 0$ idénticamente en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. (b) Si $y_1 = x^2$ y $y_2 = x\,|x|$ son linealmente dependientes en $-1 \leqq x \leqq 1$, entonces deberíamos ser capaces de encontrar las constantes α_1, α_2 no ambas cero tales que

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x|x| = 0$$

idénticamente en $-1 \leqq x \leqq 1$. Esto significa que debemos tener

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 = 0 \text{ para } 0 \leqq x \leqq 1, \qquad \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^2 = 0 \text{ para } -1 \leqq x \leqq 0$$

para constantes α_1, α_2 no ambas cero. Sin embargo, esto es claramente imposible. Sigue entonces que las funciones son linealmente independientes en $-1 \leqq x \leqq 1$.

Al ver este ejemplo involucrando a la función $y_2 = x\,|x|$, el estudiante cauteloso bien podría preguntar, ¿Por qué el matemático tiene que inventarse una función como esta para probar que el recíproco del Teorema 4 no es cierto? La respuesta obvia por supuesto es que, si se usara una "función normal", no produciría el resultado deseado, y para tales funciones el recíproco del teorema sería cierto.

Una pista se obtiene cuando uno nota que, aunque la función $y_2 = x\,|x|$ tiene una primera derivada en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$ (justo para permitirnos calcular el Wronskiano), no tiene una segunda derivada. Tal función no podría satisfacer de ninguna manera una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y = 0 \tag{27}$$

como se da en el Teorema de existencia-unicidad en la página 171 para n= 2. Esto nos conduce a funciones restrictivas consideradas como soluciones de (27).

Ahora si tomamos y_1 y y_2 como soluciones de (27), tenemos

$$a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \qquad a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \tag{28}$$

Multiplicando la primera ecuación de (28) por y_2, la segunda por y_1, y restando, encontramos

$$a_0(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(y_1 y_2' \quad y_2 y_1') = 0 \tag{29}$$

Puesto que el Wronskiano está dado por $W = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$ y puesto que

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) = y_1 y''_2 - y_2 y''_1$$

(29) se convierte en
$$a_0 \frac{dW}{dx} + a_1 W = 0$$

Resolviendo, encontrarnos una relación importante conocida como la identi-*dad de* Abel, dada por

$$W = ce^{-\int (a_1/a_0)dx} \tag{30}$$

Puesto que la función exponencial en (30) nunca es cero, vemos que el Wronskiano W debe ser *idénticamente* cero en el intervalo dado, en cuyo caso $c = 0$, o nunca cero en el intervalo, en cuyo caso $c \neq 0$. No puede haber nada intermedio. Resumimos los resultados en el siguiente

Teorema 6. Sea y_1 y y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$$

donde $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 son funciones continuas de x en algún intervalo. Entonces el Wronskiano de y_1 y y_2 está dado por la ***identidad de Abel.***

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = ce^{-\int (a_0/a_1)dx} \tag{31}$$

y W es ya sea idénticamente cero en el intervalo o nunca cero en el intervalo.

Usando este teorema, podemos probar ahora el siguiente teorema para el caso de que y_1 y y_2 sean soluciones de (27).

Teorema 7. Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial (27) en algún intervalo. Entonces
(a) y_1 y y_2 son linealmente dependientes si y sólo si $W = 0$ en el intervalo.
(b) y_1 y y_2 son linealmente independientes si y sólo si $W \neq 0$ en el intervalo.

No presentaremos una prueba de este teorema pero en vez se dejará para el Ejercicio 9C. Debería notarse que no hay contradicción alguna entre el Teorema 7 y el Ejemplo ilustrativo 4 en la página 184, puesto que la función $y_2 = x|x|$ no puede ser una solución de ninguna ecuación diferencial lineal de segundo orden porque su segunda derivada no existe en $-1 \leq x \leq 1$.

De los Teoremas 6 y 7 podemos obtener el siguiente teorema útil.

Teorema 8. Sea y_1 una solución a la ecuación diferencial (27). Entonces una solución linealmente independiente está dada por

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0)dx}}{y_1^2} dx \tag{32}$$

Una prueba a esto sigue de inmediato de (31) si dividimos ambos lados por y_1^2 asumido distinto de cero. En tal caso obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{ce^{-\int(a_1/a_0)dx}}{y_1^2} \quad o \quad \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{ce^{-\int(a_1/a_0)dx}}{y_1^2}dx$$

al integrar y tomar la constante de integración igual a cero. Luego escogiendo el caso especial c = 1, obtenemos (32).

Observación 4. El estudiante notará que el Teorema 8 está muy relacionado con el Teorema 3 en la página 175.

Terminando con la teoría anterior tenemos el siguiente teorema importante, el cual hemos hecho uso en la parte inicial de este capítulo pero nunca enunciado en forma precisa.

Teorema 9. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación (27), entonces

$$Y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{33}$$

es una solución de (27) para cualesquiera constantes c_1, c_2. Recíprocamente, toda solución de (27) tiene la forma (33) para selecciones apropiadas de las constantes c_1, c_2.

Tenemos también el siguiente teorema

Teorema 10. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de (27) y y_p es una solución particular de

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = F(x) \tag{34}$$

entonces

$$Y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p \tag{35}$$

es una solución de (34) para cualesquiera constantes c_1, c_2. Recíprocamente, toda *solución* de (34) tiene la forma (35) para selecciones apropiadas de las constantes c_1, c_2.

Las demostraciones de los Teoremas 9 y 10 se dejan para el Ejercicio 10C, página 192.

Observación 5. Es importante que el estudiante entienda el significado de los Teoremas 9 y 10. Hemos definido la *solución general* de una ecuación diferencial de orden *n* como aquella solución que involucra *n* constantes arbitrarias. Todas las soluciones que no se podían obtener de esta solución general por *ninguna* selección de estas constantes fueron llamadas *soluciones singulares*. Como ya ha sido mencionado, en la mayoría de los problemas de naturaleza práctica la solución general es la que proporciona la solución significativa después de determinar las constantes de las condiciones dadas, Si surgen soluciones singulares, estas tienen "generalmente" poco o ningún significado práctico.

En lo que nos interesa, el significado de los Teoremas 9 y 10 no es el de que hayamos encontrado la solución que involucra dos constantes arbitrarias (el mismo número como el orden de la ecuación diferencial), la cual hemos llamado la ***solución general,*** sino en realidad ***todas las otras soluciones*** que de existir son soluciones particulares, esto es, casos especiales de la solución general obtenidos por la selección apropiada de las constantes. Así, los Teoremas 9 y 10 de hecho garantizan que no hayan soluciones singulares. Esta propiedad de no tener soluciones singulares es peculiar de las ecuaciones diferenciales ***lineales,*** pero no de todas las ecuaciones diferenciales no-lineales.

Algunos autores usan el término de solución general para significar ***todas las soluciones*** de una ecuación diferencial. Aún otros autores lo usan solamente para el caso de las ecuaciones diferenciales lineales. Así, el estudiante que vea el término de solución general en otros libros debe ser cuidadoso en determinar cuál definición se está usando.

Aunque los teoremas anteriores se refieren a dos funciones y a ecuaciones diferenciales de segundo orden, éstos se pueden generalizar a los casos de n funciones y ecuaciones diferenciales de orden n. Por ejemplo, el Wronskiano en el caso de n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es una generalización natural de (31) y está dado por

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{36}$$

Tenemos los siguientes teoremas correspondientes a los Teoremas 6, 7, 9 y 10, respectivamente.

Teorema 11. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)y = 0 \tag{37}$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son funciones continuas en x en algún intervalo dado. Entonces el Wronskiano (36) denotado por W está dado por la ***identidad de Abel.***

$$W = ce^{-\int (a_1/a_0)dx} \tag{38}$$

y W es ya sea idénticamente cero en el intervalo o nunca cero en el intervalo,

Teorema 12. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones a la ecuación diferencial (37) donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son funciones continuas de x en algún intervalo dado. Entonces

(a) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes si y sólo si $W = 0$ en el intervalo.
(b) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes si y sólo si $W \neq 0$ en el intervalo.

Teorema 13. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (37), entonces

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{39}$$

es una solución de (37) para cualesquiera constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Recíprocamente, ***toda solución*** de (37) tiene la forma (39) para selecciones apropiadas de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Teorema 14. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (37) y y_p es una solución particular de

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)y = F(x) \tag{40}$$

entonces

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p \tag{41}$$

es una solución de (40) para cualesquiera constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Recíprocamente, ***toda solución*** de (40) tiene la forma (41) para selecciones apropiadas de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Consideremos ahora algunos ejemplos que ilustran los teoremas anteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) Determine si las soluciones $y_1 = e^{2x} + 2e^x$, $y_2 = 5e^{2x} + 4e^x$, $y_3 = e^x - e^{2x}$ de la ecuación diferencial $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$ son linealmente dependientes o independientes. (b) ¿Puede usted obtener la solución general de las soluciones dadas? Explique.

Solución (a) El Wronskiano del conjunto de soluciones está dado por

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^{2x} + 2e^x & 5e^{2x} + 4e^x & e^x - e^{2x} \\ 2e^{2x} + 2e^x & 10e^{2x} + 4e^x & e^x - 2e^{2x} \\ 4e^{2x} + 2e^x & 20e^{2x} + 4e^x & e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \tag{42}$$

Puesto que es idénticamente cero en cualquier intervalo, vemos por el Teorema 12 que todas las soluciones son linealmente dependientes (compare con la página 181).

(b) Del Teorema 13 vemos que se necesitan tres soluciones linealmente independientes para hallar la solución requerida. Aunque las tres soluciones dadas son linealmente dependientes, es fácil mostrar que cualesquiera dos son linealmente independientes. Por ejemplo, en el caso de la primera y tercera soluciones, el Wronskiano está dado por

$$W(y_1, y_3) = \begin{vmatrix} e^{2x} + 2e^x & e^x - e^{2x} \\ 2e^{2x} + 2e^x & e^x - 2e^{2x} \end{vmatrix} = -3e^{3x} \neq 0$$

mostrando que y_1, y_3 son lineal independientes.

Para obtener la solución requerida, debemos hallar una solución Y que sea linealmente independiente de y_1 y y_3. Un método para hallar Y es aplicar el Teorema 3, página 175, dos veces (vea el Ejercicio 7B). De esta manera obtenemos la solución requerida $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Verifique la identidad de Abel para la ecuación diferencial $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$.

Solución Comparando la ecuación diferencial dada con (37), página 188, para $n = 3$, tenemos $a_0 = 1$, $a_1 = -6$. Entonces la identidad de Abel (38), página 188, es

$$W(y_1, y_2, y_3) = ce^{-\int (a_1/a_0)dx} = ce^{6x}$$

Para verificar esto, debemos obtener, el Wronskiano para tres soluciones linealmente independientes, y podemos elegir estas como $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Así

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \tag{43}$$

lo cual proporciona la verificación requerida si $c = 2$. Por supuesto que, si hubiéramos elegido soluciones linealmente dependientes, la verificación sería inmediata puesto que $c = 0$ estaría de acuerdo con $W = 0$

EJERCICIOS A

1. Determine cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes y cuáles son linealmente independientes. En cada caso use la definición directa y los teoremas que involucran el Wronskiano.

   (a) e^{-4x}, e^{4x} (b) $2x^n, -3x^n$. (c) $1, \cos x$. (d) $x + 1, 2x, 3$.
   (e) $x^2, x^2 + 1, x^2 - 1$. (f) $(x+1)(x-7), (2x-1)(x+3), (x+2)(x-1)$
   (g) $\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, 2$. (h) $\operatorname{sen} x + \cos x, 3\operatorname{sen} x - 2\cos x, 4\cos x$.

2. (a) Muestre que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $(D^2 - 6D + 9)y = 0$ están dadas por e^{3x} y xe^{3x}. (b) Escriba la solución general de la ecuación en (a).

3. Escriba las soluciones generales de cada una de las siguientes ecuaciones y justifique sus resultados.

   (a) $(D^2 + 2D - 3)y = 0$. (b) $(D^2 - 2D + 5)y = 0$.
   (c) $(D^3 - 3D^2)y = 0$. (d) $(D^4 - 8D^2 + 16)y = 0$.

EJERCICIOS B

1. (a) Pruebe que cualesquiera tres polinomios de primer grado deben ser linealmente dependientes. (b) ¿Cuál es el mayor número de polinomios de segundo grado los cuales serán linealmente independientes? ¿Podrían ser algunos de estos de grado menor? Explique. (c) Generalice los resultados en (a) y (b).

2. Pruebe que si el cero se añade a cualquier conjunto de funciones linealmente independiente, el conjunto resultante es lineaimente dependiente.

3. Sea $P_n(x)$ polinomios de grado n donde n = 1, 2, 3, Pruebe que cualquier conjunto finito de estos polinomios es linealmente independiente.

4. Investigue la dependencia lineal del conjunto de funciones

$$\tan^{-1} x, \tan^{-1}(2x), \tan^{-1}\left(\frac{3x}{1-2x^2}\right)$$

5. (a) Pruebe sin usar Wronskiano que las funciones x^2 y x^3 son linealmente independientes en el intervalo $1 \leqq x \leqq 2$, y también en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. (b) Encuentre el Wronskiano de x^2 y x^3 En vista de que este Wronskiano es cero en algún punto del intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, ¿esto está en conflicto con el resultado en (a)? Explique.

6. Encuentre n soluciones linealmente independientes de la ecuación $D^n y = 0$ y escriba la solución general.

7. Complete la parte (b) del Ejemplo ilustrativo 5, página 189. **(Sugerencia:** Haga primero $y = uy_1$ en la ecuación diferencial dada para obtener una ecuación de segundo orden en v''. Luego haga $v' = wy_2$ en esta nueva ecuación para obtener una ecuación de primer orden en w'.)

8. Muestre que la función $y_2 = x|x|, -1 \leqq x \leqq 1$ de la página 184 no tiene segunda derivada.

EJERCICIOS C

1. Suponga que en la ecuación diferencial (27), página 185, a_0, a_1 y a_2 son funciones continuas de x en un intervalo y $a_0 \neq 0$ en cualquier punto del intervalo. (a) Pruebe que si el Wronskiano correspondiente a dos soluciones y_1 y y_2 es cero en algún punto del intervalo entonces es idénticamente cero en el intervalo y las soluciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes. (b) Muestre que las funciones x^2 y x^3 del Ejercicio 5B son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2y''\quad 4xy' + 6y = 0$. ¿Hay algún conflicto con (a)? Explique.

2. Escriba la identidad de Abel para las ecuaciones (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (b) $x^2y'' + xy'(x^2 - n^2)y = 0$; (c) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

3. Dada una solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, ¿cómo obtendría usted una solución linealmente independiente a partir de la identidad de Abel? ¿Cómo encontraría luego usted la solución general? Ilustre al encontrar la solución general de las ecuaciones (a) $(D^2 - 2D + 1)y = 0$, y (b) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. **[Sugerencia:** Note que en (b) x es una solución.]

4. (a) Muestre que la función $3x^2 - 1$ satisface la ecuación diferencial $(1\quad x^2)y''\quad 2xy' + 6y = 0$ y tiene un mínimo en $x = 0$. (b) Muestre que cualquier solución linealmente independiente de la ecuación en (a) no puede tener un mínimo o máximo en $x = 0$.

5. Generalice el resultado del Ejercicio 4.

6. Pruebe la identidad de ***Abel*** para ecuaciones diferenciales de tercer orden y superiores.

7. Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ donde a_0, a_1 y a_2 son polinomios que no contienen factores comunes excepto una constante pruebe que el Wronskiano es cero si y sólo si $a_0 = 0$, y viceversa.

8. Generalice el resultado del Ejercicio 7.

9. Pruebe el Teorema 7, página 186.

10. Pruebe (a) los Teoremas 9 y 10, página 187, (b) Los Teoremas 11-14, páginas 188-189.

4 ¿Cómo obtener una solución particular?

Para encontrar la solución general de $\phi(D)y = F(x)$ debemos encontrar una solución particular de esta ecuación y adicionarla a la solución general de la ecuación complementaria o reducida $\phi(D)y = 0$. En la última sección encontramos cómo obtener la solución general de $\phi(D)y = 0$. En esta sección encontraremos cómo obtener la solución particular de $\phi(D)y = F(x)$.

Hay muchos métodos por medio de los cuales se pueden obtener soluciones particulares. Un método a menudo usado en física e ingeniería es el método de los coeficientes indeterminados. Este método es simple de entender, donde sea aplicable, pero desafortunadamente no se puede usar en ciertos casos. Sin embargo, tales casos son raros en la práctica. Cuando ellos surjan, otros métodos se deben usar. Debido a su simplicidad y amplio uso, discutiremos este método primero.

4.1 METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

El método de los coeficientes indeterminados se aplica a la ecuación diferencial $\phi(D)y = F(x)$, donde $F(x)$ contiene un polinomio, términos de la forma sen rx, cos rx, e^{rx} donde r es constante, o combinaciones de sumas y productos de estos. Para obtener alguna idea, considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $y'' + 4y = 4e^{2x}$. (1)

Estamos buscando una función cuya segunda derivada adicionada cuatro veces a la función produzca $4e^{2x}$. Puesto que las varias derivadas de e^{2x} involucran e^{2x} nos lleva a considerar $y = ae^{2x}$ donde a es una constante indeterminada, como una posible solución. Sustituyendo en la ecuación dada tenemos

$$4ae^{2x} + 4ae^{2x} = 4e^{2x}, \qquad 8ae^{2x} = 4e^{2x}. \qquad a = \tfrac{1}{2}$$

Así, una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}e^{2x}$. Por los métodos de la última sección, la solución general de $y'' + 4y = 0$ es

$$y = y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

La solución general de la ecuación dada es, por tanto,

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{2}e^{2x}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $(D^2 + 4D + 4)y = 6$ sen 3x.

Solución La solución complementaria es

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

Para encontrar una solución particular nos preguntamos: ¿Qué funciones diferenciadas una o dos veces dan sen 3x o constantes múltiples? La respuesta es que serán términos como sen 3x o cos 3x. Por tanto intentemos como una solución particular

$$y = a \operatorname{sen} 3x + b \cos 3x$$

donde a y b son nuestros coeficientes indeterminados. Sustituyendo en la ecuación dada, encontramos después de simplificar

$$(D^2 + 4D + 4)y = (-5a - 12b) \operatorname{sen} 3x + (12a - 5b) \cos 3x = 6 \operatorname{sen} 3x$$

Esto será una identidad si y sólo si $-5a - 12b = 6$, $12a - 5b = 0$. Resolviendo, $a = -\frac{30}{169}$, $b = -\frac{72}{169}$.

La solución particular es, por tanto, $-\frac{30}{169}$ sen 3x $-\frac{72}{169}$ cos 3x. De donde, la solución general es $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - \frac{30}{169} \operatorname{sen} 3x - \frac{72}{169} \cos 3x$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $(D^2 + 4D + 9)y = x^2 + 3x$.

Solución La solución complementaria es $y_c = e^{-2x}(c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}x)$.

Para encontrar una solución particular nos preguntamos: ¿Qué función al diferenciarla produce un polinomio? Claramente los polinomios cuando se diferencian producen polinomios. Asumamos por esta razón como solución particular $y = y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$, esto es, un polinomio de tercer grado. Sustituyendo esta solución asumida en la ecuación dada y simplificando, encontramos

$$9ax^3 + (12a + 9b)x^2 + (6a + 8b + 9c)x + 2b + 4c + 9d = x^2 + 3x$$

De donde, $9a = 0$, $12a + 9b = 1$, $6a + 8b + 9c = 3$, $2b + 4c + 9d = 0$. Resolviendo, tenemos $a = 0$, $b = \frac{1}{9}$, $c = \frac{19}{81}$, $d = -\frac{94}{729}$. De donde, $y_p = \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}$.

La solución general es, así,

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}x) + \frac{x^2}{9} + \frac{19x}{81} - \frac{94}{729}$$

El hecho de que $a = 0$ significa que no tenemos que usar un polinomio de tercer grado en nuestra solución asumida; un polinomio de segundo grado habría sido adecuado. En general cuando un polinomio de grado n se presenta en la derecha de $\phi(D)y = F(x)$ asumimos como solución particular un polinomio de grado n.*

*En página 196 veremos que hay algunas excepciones a esta regla. El razonamiento en estos casos está, sin embargo, basado en los supuestos usados aquí.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resuelva $(D^2 + 2D + 1)y = 2\cos 2x + 3x + 2 + 3e^x$.

Solución La solución complementaria es $y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x}$.

Tenemos que decidir qué asumir como solución particular.

Para el termino 2 cos 2x, asumimos a sen $x + b\cos 2x$.

Para el término 3x + 2 (polinomio de primer grado) asuma $cx + d$.

Para el término $3e^x$, asuma fe^x.

De donde, asuma como solución particular $y_p = a$ sen $2x + b\cos 2x + cx + d + fe^x$.

Sustituyendo la solución particular en la-ecuación diferencial dada y simplificando, tenemos

$$(-3a - 4b)\,\text{sen}\,2x + (4a - 3b)\cos 2x + cx + d + 2c + 4fe^x$$
$$= 2\cos 2x + 3x + 2 + 3e^x$$

Sigue que $-3a - 46 = 0$, $4a - 36 = 2$, $c = 3$, $2c + d = 2$, $4f = 3$. Resolviendo esto encontramos $a = \frac{8}{25}$, $b = -\frac{6}{25}$, $c = 3$, $d = -4$, $f = \frac{3}{4}$. Así la solución particular es $y_p = \frac{8}{25}\,\text{sen}\,2x - \frac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \frac{3}{4}e^x$ y la solución general de la ecuación dada es

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \tfrac{8}{25}\,\text{sen}\,2x - \tfrac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \tfrac{3}{4}e^x$$

4.2 JUSTIFICACION AL METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS. EL METODO ANIQUILADOR

Es natural buscar razones de por qué el método de los coeficientes indeterminados parece funcionar. Para hacerlo, retornemos a la ecuación diferencial (1) considerada en la página 192, la cual escribimos en forma de operadores como

$$(D^2 + 4)y = 4e^{2x} \tag{2}$$

Puesto que sabemos cómo resolver la ecuación diferencial con el lado derecho remplazado por cero, es natural preguntar si tales métodos se pueden usar directamente para resolver (2). Ahora podemos cambiar (2) en una ecuación con el lado derecho cero como sigue. Primero diferencie ambos lados de (2) o equivalentemente opere en ambos lados con el operador D para obtener

$$D(D^2 + 4)y = 8e^{2x} \tag{3}$$

Podemos ahora eliminar el término que contiene e^{2x} en las ecuaciones (2) y (3) al multiplicar la ecuación (2) por 2 y restar de la ecuación (3). El resultado es

$$(D - 2)(D^2 + 4)y = 0 \tag{4}$$

Suponga ahora que inicialmente se nos haya dado (4). Entonces usando los métodos de las páginas 173-180, obtendríamos la solución

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 e^{2x}$$

Note que ésta contiene la solución complementaria de (2) y también la solución especial particular $y_p = c_3 e^{2x}$ asumida al trabajar el problema en la página 192. Así, no teníamos que adivinar la forma de la solución particular, pero en lugar de esto podríamos haber llegado a ella como una consecuencia natural al resolver (4). Usando $y_p = c_3 e^{2x}$ en (2), encontraríamos como antes $c_3 = \frac{1}{2}$.

El proceso de operar en una ecuación tal como (2) para así obtener una ecuación con el lado derecho cero es apropiadamente llamado el ***método de aniquilación o*** el ***método aniquilador.*** El operador requerido para hacer esto, tal como D-2 en (4), se llama el ***operador de aniquilación*** o brevemente el ***aniquilador.*** Trabajemos otro ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Use el método de aniquilación para trabajar el Ejemplo ilustrativo 1, página 192.

Solución La ecuación a resolver es

$$(D^2 + 4D + 4)y = 6 \operatorname{sen} 3x \tag{5}$$

Debemos encontrar un operador tal que cuando se aplique a (5) haga el lado derecho cero. Puesto que $D(\operatorname{sen} 3x) = 3 \cos 3x$, $D^2 \operatorname{sen} 3x = -9 \operatorname{sen} 3x$ así que

$$(D^2 + 9) \operatorname{sen} 3x = 0$$

vemos que el aniquilador es $D^2 + 9$. Usando esto en (5), tenemos

$$(D^2 + 9)(D^2 + 4D + 4)y = 0 \tag{6}$$

Note que si encontramos la solución de (6) obtenemos

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3 \operatorname{sen} 3x + c_4 \cos 3x$$

los dos últimos términos son justamente lo que sería la solución particular asumida para (5).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 3, página 194, por el método de aniquilación.

Solución Para aniquilar el término 2 cos 2x del lado derecho de la ecuación dada

$$(D^2 + 2D + 1)y = 2 \cos 2x + 3x + 2 + 3e^x \tag{7}$$

debemos usar el aniquilador D^2+4. Similarmente, para aniquilar los términos 3x + 2 y $3e^x$, respectivamente, debemos usar el aniquilador D^2 y $(D-1)$. El aniquilador resultante el cual sirve para eliminar todos los términos es por tanto $D^2(D-1)(D^2+4)$. Aplicando esto a (7) da

$$D^2(D-1)(D^2+4)(D^2+2D+1)y=0 \tag{8}$$

La solución de (8) es

$$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3\operatorname{sen}2x+c_4\cos 2x+c_5e^x+c_6x+c_7$$

la cual está compuesta de las soluciones complementarias y particulares de (7). De aquí el método continúa como en el Ejemplo ilustrativo 3.

EJERCICIOS A

1. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes:

(a) $y''+y=2e^{3x}$.
(b) $(D^2+2D+1)y=4\operatorname{sen}2x$.
(c) $(D^2-4)y=8x^2$.
(d) $(D^2+4D+5)y=e^{-x}+15x$.
(e) $4I''(t)+I(t)=t^2+2\cos 3t$.
(f) $(D^3+4D)y=e^x+\operatorname{sen}x$.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas:

(a) $y''+16y=5\operatorname{sen}x;\ y(0)=y'(0)=0$.
(b) $s''(t)-3s'(t)+2s(t)=8t^2+12e^{-t};\ s(0)=0,\ s'(0)=2$.

3. Demuestre el uso del método de aniquilación trabajando (a) Los Ejercicios 1 (a)-(f); (b) Los Ejercicios 2 (a) y (b); (c) El Ejemplo ilustrativo 2, página 193.

EJERCICIOS B

1. Resuelva $y''+y=6\cos^2 x$, dado que $y(0)=0$, $y(\pi/2)=0$.

2. Resuelva la ecuación diferencial que surge en un problema de un circuito eléctrico:

$$\left(LD^2+RD+\frac{1}{C}\right)Q=E_0\operatorname{sen}\omega t$$

donde $D\equiv d/dt$; L, R, C, E_0 y w son constantes dadas y $Q(0)=Q'(0)=0$.

EJERCICIOS C

1. Encuentre la solución general de $y''-3y'+2y=4\operatorname{sen}^3 3x$.

2. Resuelva $y''+y=F(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqq x\leqq \pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}$$

asumiendo que $y(0)=y'(0)=0$ y que y y y' son continuas en $x=\pi$.

4.3 EXCEPCIONES EN EL METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x}$. La solución complementaria es $y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$. Del hecho de que $4e^{-2x}$ está en la parte derecha de la ecuación dada, el supuesto de costumbre nos conduciría a la solución particular $y = ae^{-2x}$. Sustituyendo

$$4ae^{-2x} - 6ae^{-2x} + 2ae^{-2x} = 4e^{-2x} \text{ o } \quad 0 = 4e^{-2x}$$

una situación ***imposible!*** Si pensamos un poco acerca de lo que hemos hecho, deberíamos ser capaces de ver que esta "catástrofe" podría haberse previsto. Asumimos la solución ae^{-2x}, la cual no es esencialmente diferente del término c_1e^{-2x} de la solución complementaria. Se esperaba por tanto que ae^{-2x} **satisfaciera** $(D^2 + 3D + 2)y = 0$.

Un poco de experimentación muestra que si asumimos como solución particular axe^{-2x} en vez de ae^{-2x} obtenemos resultados. Si $y = axe^{-2x}$,

$$(D^2 + 3D + 2)(axe^{-2x}) = -ae^{-2x} = 4e^{-2x}, \text{ esto es, } \quad a = -4$$

De donde, una solución particular es $-4xe^{-2x}$ y la solución general es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - 4xe^{-2x}$$

Observación. La razón por la cual el supuesto de que una solución particular axe^{-2x} funcione en este problema se obtiene por el método de aniquilación. Para ver esto, notamos que para aniquilar el lado derecho de la ecuación diferencial $(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x}$, debemos usar el aniquilador $D + 2$, obteniendo así

$$(D + 2)(D^2 + 3D + 2)y = 0$$

-Pero debido a las raíces repetidas en la ecuación auxiliar para este caso, la solución general es $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-2x}$ lo cual muestra cómo aparece el término axe^{-2x}.

Antes de pasar a las conclusiones sobre reglas, miremos algunos ejemplos más.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Resuelva $(D^2 + 4)y = 6$ sen $2x + 3x2$.

Solución Normalmente asumiríamos como solución particular a sen $2x$ + $b \cos 2x$ correspondiente al término 6 sen 2x y $cx^2 + dx + f$ correspondiente al término $3x^2$. No caeremos, sin embargo, en la misma trampa como antes porque vemos que la solución particular asumida a sen $2x$ + $b \cos 2x$ está contenida en la solución complementaria. Así estamos inclinados, en virtud de la experiencia previa, a escribir como nuestra solución particular asumida x (a sen $2x$ + $b \cos 2x$), esto es, el resultado asumido previamente, multiplicado por x. Puesto que $cx^2 + dx + f$ no tiene ningún término contenido en la solución complementaria, lo usamos tal cual es. Nuestra solución particular asumida es por trnto

$$y_p = x(a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x) + cx^2 + dx + f$$

Al sustituir en la ecuación diferencial produce

$$4a \cos 2x - 4b \operatorname{sen} 2x + 4cx^2 + 4\,dx + (4f + 2c) = 6 \operatorname{sen} 2x + 3x^2$$

o $\quad 4a = 0, \quad -4b = 6, \quad 4c = 3, \quad 4d = 0, \quad 4f + 2c = 0,$

esto es, $\quad a = 0, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = \frac{3}{4}, \quad d = 0, \quad f = -\frac{3}{8}$

La solución particular es, por tanto, $y_p = -\frac{3}{2}x \cos 2x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}$ y así la solución general es $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x - \frac{3}{2}x \cos 2x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Resuelva $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 2e^x$. (9)

Solución De la ecuación auxiliar $m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = (m-1)^3 = 0$ tenemos $m = 1$, 1, 1. La solución complementaria es, así,

$$(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x$$

Debido al término $2e^x$ en el lado derecho de (9) normalmente tomaríamos como solución particular ae^x. Este, sin embargo está presente en la solución complementaria. Por tanto la experiencia nos lleva a asumir como solución particular axe^x. Puesto que este también está presente, nos lleva a ax^2 ex. Sin embargo, este también está presente y nos lleva a ax^3e^x. Finalmente, este no está en la solución complementaria. Sustituyendo ax^3e^x en la ecuación dada, tenemos $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 6ae^x = 3e^x$. De donde, $6a = 2$, $a = \frac{1}{3}$, y una solución particular es $\frac{1}{3}x^3e^x$. La solución general es $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x$.

De estos dos ejemplos obtenemos la siguiente regla, la cual no es difícil de justificar al usar el método de los aniquiladores.

Regla. Para resolver una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

1. Escriba la solución complementaria y,.
2. Asuma una solución particular correspondiente al lado derecho de la ecuación:
   (a) Para un polinomio de grado n, asuma un polinomio de grado n.
   (b) Para términos sen rx, $\cos rx$, o sumas o diferencias de tales términos, asuma a sen rx + $b \cos rx$.
   (c) Para términos como e^{rx} asuma ae^{rx}.
3. Si algunos de los términos asumidos a 2(a), (b), o (c) ocurren en la solución complementaria, debemos multiplicar estos términos asumi-

dos por una potencia de x suficientemente alta (pero no mas alta) de modo que ninguno de los términos asumidos aparezca en la solución complementaria.
4. Escriba la forma asumida para la solución particular y evalúe los coeficientes, obteniendo así y_p.
5. Sume y_p con y_c para obtener la solución general requerida.

EJERCICIOS A

1. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes:

(a) $(D^2 + 2D - 3)y = 2e^x$.
(b) $(D^2 + 1)y = x^2 + \operatorname{sen} x$.
(c) $(D^2 + D)y = x^2 + 3x + e^{3x}$.
(d) $(D^2 - 2D + 1)y = e^x$.
(e) $y'' + 4y = 8 \cos 2s - 4s$.
(f) $(D^3 + D)y = x + \operatorname{sen} x + \cos x$.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 91 = 12 \cos 3t;\ I(0) = 4,\ I'(0) = 0.$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = t + e^{-t};\ s = 0, \frac{ds}{dt} = \text{Oent} = 0.$$

EJERCICIOS B

1. Encuentre la solución general de $(D^4 - 1)y = \cosh x$.
2. Resuelva. $(D^2 + 1)y = x \operatorname{sen} x$.
3. Trabaje los Ejercicios A 1 (a)-(f) usando el método de aniquilación.

EJERCICIOS C

1. (a) Resuelva $(D^2 + w^2)y = A \cos XX$; w, $\lambda > 0$, $w \neq \lambda$, donde A, w, λ son constantes, sujeta ay(O) $= \alpha$, $y'(0) = \beta$. (b) ¿Cuál es el límite de la solución en (a) cuando $\lambda \to w$? (c) ¿Es la solución límite de (b) una solución de la ecuación diferencial dada cuando $\lambda = w$?
2. Justifique el método descrito en la regla 3 anterior usando el método de aniquilación.
3. Resuelva $y'' + 4y = \operatorname{sen}^4 x$.
4. ¿Cómo se pueden usar los resultados de! Ejercicio 4 de los Ejercicios C, página 178, para resolver los problemas de esta sección? Dé ilustraciones.

4.4 CASOS DONDE FUNCIONES MAS COMPLICADAS APARECEN EN EL LADO DERECHO

En el caso de que el lado derecho contenga productos de términos como e^{rx}, sen rx, cos rx, y polinomios, se puede aún usar el método de los coeficientes indeterminados, pero el método puede llegar a ser difícil de manejar y perder su atractivo. En tales casos otros métodos a discutir en las secciones que siguen producen resultados más fácil y rápidamente. Por complitud demostraremos ahora un procedimiento general para determinar qué usar como solución particular asumida. Para motivar este procedimiento considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $(D^2 + D + 1)y = x^3 e^x$. La solución complementaria es

$$e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

Para ver qué solución particular podría ser preguntamos: ¿Qué funciones al diferenciarlas podrían producir $x^3 e^x$? Si asumimos la solución particular $ax^3 e^x$, como se podría pensar en un principio, obtenemos al sustituir en la ecuación diferencial el resultado

$$6axe^x + 9ax^2e^x + 3ax^3e^x = x^3e^x \tag{10}$$

y es claro que no podemos determinar a, así que ax^3e^x no puede ser una solución. Para eliminar los términos de (10) que involucran x^2e^x, xe^x y e^x, nos podría conducir a tratar como solución particular $ax^3 e^x + bx^2e^x + cxe^x + de^x$. Realmente cuando ésta se sustituye, encontramos

$$(D^2 + D + 1)y = 3ax^3e^x + (9a + 3b)x^2e^x + (6a + 6b + 3c)xe^x$$
$$+ (2b + 3c + 3d)e^x = x^3e^x$$

o $\qquad 3a = 1, \quad 9a + 3b = 0, \quad 6a + b + 3c = 0, \quad 2b + 3c + 3d = 0$

y $\qquad a = \frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = \frac{4}{3}, \quad d = -\frac{2}{3}$

De donde, la solución particular es $y_p = \frac{1}{3} x^3 e^x - x^2 e^x + xe^x - \frac{2}{3}e^x$ y la solución general es

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{3}x^3e^x - x^2e^x + \frac{4}{3}xe^x - \frac{2e^x}{3}$$

En base a lo que se ha observado en los ejemplos, tal como el anterior, estamos en capacidad de formular un método para determinar la solución particular que se debería asumir. El método consiste en diferenciar el lado derecho de la ecuación indefinidamente y registrar todos los términos esencialmente diferentes que ocurran. Si hay un número finito de estos términos se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados y la solución particular a asumir se puede formar al tomar cada uno de estos términos, multiplicándolo por urna constante indeterminada y luego sumar los resultados. Después de obtener esta solución particular, debemos por supuesto modificarla de acuerdo con la regla 3 en la página 198 si alguno de sus términos aparecen en la solución complementaria. Este método también puede justificarse usando el método de aniquilación, pero dejaremos tal justificación para los ejercicios. En vez, presentaremos la siguiente ilustración de su uso.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Resuelva $(D^2+1)y = x^2 \cos 5x$.

Solución La solución complementaria es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Para hallar una solución particular considere el lado derecho $x^2 \cos 5x$. Una diferenciación simple daría lugar a los términos (sin considerar los coeficientes numéricos) como

$$x^2 \operatorname{sen} 5x, \qquad x \cos 5x$$

La diferenciación de cada uno de estos produciría términos como

$$x^2 \cos 5x, \qquad x \operatorname{sen} 5x, \qquad \cos 5x$$

Continuando de esta manera, encontramos que no surgen otros términos diferentes a los del siguiente grupo:

$$x^2 \cos 5x, \quad x^2 \operatorname{sen} 5x, \quad x \cos 5x, \quad x \operatorname{sen} 5x, \quad \cos 5x, \quad \operatorname{sen} 5x$$

Así, asumimos como solución particular,

$$y_p = ax^2 \cos 5s + bx^2 \operatorname{sen} 5x + cx \cos 5x + dx \operatorname{sén} 5x + f \cos 5x + g \operatorname{sen} 5x \qquad (11)$$

puesto que ninguno de estos términos aparece en la solución complementaria. Las constantes en (ll) se pueden encontrar al sustituir y_p en la ecuación diferencial dada e igualando coeficientes de los términos correspondientes.

Si el lado derecho fuera $\ln x$, por ejemplo, las diferenciaciones sucesivas producen el conjunto infinito de funciones $1/x$, $1/x^2$, , y en este caso el método es inaplicable. Para tales casos, se pueden emplear otros métodos -descritos más adelante en este capítulo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Resuelva $(D^2 + 25)y = x^2 \cos 5x$.

Solución Procediendo como en el Ejercicio ilustrativo 8, encontramos la solución particular

$$y_p = ax^2 \cos 5x + bx^2 \operatorname{sen} 5x + cx \cos 5x + dx \operatorname{sen} 5x + f \cos 5x + g \operatorname{sen} 5x$$

Sin embargo, la solución complementaria es $y_c = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$, y vemos que algunos de los términos en la solución particular anterior aparecen en la solución complementaria. Entonces de acuerdo a la regla 3 de la página 198, debemos multiplicar la solución particular en este caso por x para obtener

$$y_p = ax^3 \cos 5x + bx^3 \operatorname{sen} 5x + cx^2 \cos 5x + dx^2 \operatorname{sen} 5x + fx \cos 5x + gx \operatorname{sen} 5x$$

Las constantes $a, b, , f,$ g se puede obtener ahora al sustituir en la ecuación dada e igualar los coeficientes de términos similares.

EJERCICIOS A

1. Para cada uno de los siguientes, escriba la solución complementaria y la expresión en términos de coeficientes indeterminados que usted usaría al intentar encontrar una solución particular. No necesita evaluar estos coeficientes.

(a) $(D^2 + 1)y = xe^{-x} + 3\operatorname{sen} x$.
(b) $(D^2 - 2D - 3)y = x\operatorname{sen}2x + x^3e^{3x}$.
(c) $(D^4 + D^2)y = 3x^2 - 4e^x$.
(d) $(D^2 - 2D + 1)y = x^2e^x$.
(e) $(D^2 + 1)y = e^{-x}\cos x + 2s$.
(f) $(D^2 - 4D + 3)y = 3e^x + 2e^{-x} + x^3e^{-x}$.

2. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes:

(a) $(D^2 - 1)y = xe^x$.
(b) $(D^2 + 4)y = x^2 + 3x\cos 2x$.
(c) $(D^2 + 2D + 1)y = \operatorname{sen}3x + xe^{-x}$.
(d) $Q''(t) + Q(t) = t\operatorname{sen}t + \cos t$.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la solución general de $(D^3 - 5D^2 - 2D + 24)y = x^2e^{3x}$.
2. Resuelva $(D^2 + \omega^2)y = t(\operatorname{sen}\omega t + \cos\omega t)$; $D \equiv d/dt$ sujeto a $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(1 + \cos 2x)$.

EJERCICIOS C

1. Resuelva $y'' + 4y = \cos x \cos 2x \cos 3x$. 2. Resuelva $y''' + 4y'' - 6y' - 12y = (\operatorname{senh} x)^4$.
3. Resuelva $(D^2 + 1)y = x^2\cos 5x$ usando los resultados del Ejercicio 4 de los Ejercicios C, página 178.
4. Justifique el método-de hallar soluciones complementarias descrito en el Ejemplo ilustrativo 8 usando el método de aniquilación.

4.5 EL METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

Ha sido mencionado que el método de los coeficientes indeterminados es efectivo sólo cuando el lado derecho de la ecuación es de un tipo especial. Es natural que nos preocupemos sobre lo que se puede hacer en el caso de que el método de los coeficientes indeterminados sea inaplicable. Afortunadamente se nos ha ahorrado mucha de la preocupación por los esfuerzos de un matemático famoso llamado Lagrange, quien descubrió un método muy ingenioso y poderoso el cual se aplica en los casos donde el método de los coeficientes indeterminados no funciona tan bien como donde lo hace. De hecho conociendo sólo este método uno lo puede hacer muy bien sin el método de los coeficientes indeterminados.

Para mostrar cómo trabaja el método de Lagrange, trataremos de obtener la solución general de la inocente ecuación diferencial

$$y'' + y = \tan x \tag{12}$$

La única cosa que disturba aquí es la presencia del término tan x. La solución complementaria es

$$A\cos x + B\operatorname{sen} x \tag{13}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

El ingenio de Lagrange está en su supuesto, el cual a primera vista (como muchos supuestos no obvios) aparece ridículo. El dijo:

> Asuma que A y B en (13) no son constantes sino en vez funciones de x, denotada por $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente. La pregunta es: ¿Qué funciones deben ser estas para que $A(x) \cos x + B(x) \operatorname{sen} x$ sea una solución de (12)?

Puesto que el método asume que las cantidades A y B varían, el método generalmente se llama el ***método de variación de parámetros o variación de constantes.*** Es claro que puesto que se van a determinar dos funciones $A(x)$ y $B(x)$, esperamos que se deban imponer dos condiciones. Una de estas surge del hecho de que la solución asumida satisface la ecuación diferencial. Estamos por tanto en libertad de imponer ***otra condición.*** Con esto en mente procedamos. Por diferenciación de

$$y = A(x) \cos x + B(x) \operatorname{sen} x \tag{14}$$

tenemos
$$y' = -A(x) \operatorname{sen} x + B(x) \cos x + A'(x) \cos x + B'(x) \operatorname{sen} x \tag{15}$$

Al darnos cuenta que una diferenciación adicional introduciría un poco de términos más, aprovechamos de nuestra libertad para escoger una condición sobre $A(x)$ y $B(x)$. Escogemos una condición que simplifique (15), esto es,

$$A'(x) \cos x + B'(x) \operatorname{sen} x = 0 \tag{16}$$

idénticamente. Así, (15) se convierte en

$$y' = -A(x) \operatorname{sen} x + B(x) \cos x$$

Una diferenciación más produce

$$y'' = -A(x) \cos x - B(x) \operatorname{sen} x - A'(x) \operatorname{sen} x + B'(x) \cos x \tag{17}$$

Sustituyendo (14) y (17) en la ecuación diferencial dada, encontramos

$$-A'(x) \operatorname{sen} x + B'(x) \cos x = \tan x \tag{18}$$

De las dos ecuaciones simultáneas (16) y (18), es fácil obtener

$$A'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}, \qquad B'(x) = \operatorname{sen} x$$

De donde,

$$A(x) = \int \frac{\cos^2 - 1}{\cos x}\, dx = \int (\cos x - \sec x)\,dx = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x) + c_1$$

$$B(x) = -\cos x + c_2$$

Sigue que la solución requerida (14) es

$$y = A(x)\cos x + B(x)\operatorname{sen} x = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

Observación 1. No es difícil mostrar que si $y = Au_1(x) + Bu_2(x)$ es la solución complementaria de la ecuación $y'' + Py' + Qy = F(x)$, donde P y Q pueden depender de x, las dos ecuaciones principales (16) y (18) son

$$A'u_1(x) + B'u_2(x) = 0, \qquad A'u_1'(x) + B'u_2'(x) = F(x) \tag{19}$$

de donde A y B se pueden encontrar. Note que el determinante de los coeficientes en (19) es el Wronskiano dado por

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

el cual se asume diferente de cero.

Se debería enfatizar que el método de variación de parámetros es muy útil y que es aplicable a cualquier ecuación diferencial (con coeficientes constantes o variables) donde podamos escribir la solución complementaria. Por esta razón se puede usar aún en los casos donde se pudiera aplicar el método de los coeficientes indeterminados. De hecho, algunos fanáticos fervientes de este método claman que sólo se debería aplicar este método. Para ilustrar el método en el caso donde el método de los coeficientes indeterminados se puede usar, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2x$.

Solución En este caso la solución complementaria es

$$y = Ae^x + Be^{2x} \tag{20}$$

Si asumimos de acuerdo al método de variación de parámetros que A y B son funciones de x, entonces tenemos por diferenciación $y' = Ae^x + 2Be^{2x} + A'e^x + B'e^{2x}$

Tomando
$$A'e^x + B'e^{2x} = 0 \tag{21}$$

de modo que
$$y' = Ae^x + 2Be^{2x} \tag{22}$$

tenemos al diferenciar de nuevo

$$y'' = Ae^x + 4Be^{2x} + A'e^x + 2B'e^{2x} \tag{23}$$

La sustitución de (20), (22) y (23) en la ecuación diferencial dada produce

$$A'e^x + 2B'e^{2x} = xe^x + 2x \tag{24}$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales simultáneas (21) y (24) para ***A'*** ***y*** ***B'*** da

$$A' = -x - 2xe^{-x}, \qquad B' = xe^{-x} + 2xe^{-2x}$$

Luego por integración

$$A = -\frac{x^2}{2} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1, \qquad B = -xe^{-x} - e^{-x} - xe^{-2x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} + c_2$$

Usando estas en (20) da la solución requerida:

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^x - xe^{-x} - e^x + x + \frac{3}{2}$$

$$= C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^x - xe^{-x} + x + \frac{3}{2}$$

El estudiante debería comparar esto con el método de los coeficientes indeterminados.

Otro método. De la Observación en página 204, las ecuaciones (21) y (24) se pueden escribir de inmediato, y se puede ahorrar algún tiempo en el uso del método.

Observación 2. En la práctica puede ser difícil o imposible expresar las integrales obtenidas de ***A'*** y ***B'*** en forma cerrada. Por ejemplo, suponga que el lado derecho de la ecuación a ser resuelta en el Ejemplo ilustrativo 10 sea sen x^3 en vez de $xe^x + 2x$. En este caso llegaríamos a las ecuaciones simultáneas.

$$A'e^x + B'e^{2x} = 0, \qquad A'e^x + 2B'e^{2x} = \operatorname{sen} x^3$$

con solución $$A' = -e^{-x}\operatorname{sen} x^3, \qquad B' = e^{-2x}\operatorname{sen} x^3$$

de modo que $$A = -\int e^{-x}\operatorname{sen} x^3\,dx + c_1, \quad B = \int e^{-2x}\operatorname{sen} x^3\,dx + c_2$$

La solución requerida es

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - e^x\int e^{-x}\operatorname{sen} x^3\,dx + e^{2x}\int e^{-2x}\operatorname{sen} x^3\,dx$$

aún cuando no podamos desarrollar las integrales. Esto no es una limitación sin embargo, puesto que en un problema aplicado se pueden llevar a cabo integraciones numéricas si fuere necesario.

El método de Lagrange de variación de parámetros puede extenderse a ecuaciones lineales de alto orden. Tal extensión se considera en los ejercicios.

EJERCICIOS A

Resuelva cada uno de los siguientes por variación de parámetros:

1. $y'' + y = \cot x$.

2. $y'' + y = \sec x$.

3. $y'' + 4y = \csc 2x$.

4. $y'' - y = e^x$.

5. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x} + x$.

6. $y'' + y' \quad 2y = \ln x$.

7. $2y'' + 3y' + y = e^{-3x}$.

8. $(D^2 - 1)y = x^2e^x$.

9. $y'' - y = e^{-x^2}$.

10. $y'' - 4y' + 4y = \sqrt{x}$.

EJERCICIOS B

1. Use el método de variación de parámetros para resolver $y' + P(x)y = Q(x)$.

2. Muestre que la solución de $y'' + a^2y = F(x)$ sujeto a $y(0) = y'(0) = 0$ es

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x F(u)\,\mathrm{sen}\,a(x - u)du$$

3. (a) Sea $\phi(D)y = F(x)$ una ecuación diferencial lineal de tercer orden. Asuma que la solución complementaria se conoce de modo que de acuerdo al método de variación de parámetros $y = Au_1(x) + Bu_2(x) + Cu_3(x)$ donde *A, B,* C son funciones apropiadas de x. Muestre que las ecuaciones para determinar *A, B y C* están dadas por

$$\left.\begin{aligned} A'u_1 + B'u_2 + C'u_3 &= 0 \\ A'u_1' + B'u_2' + C'u_3' &= 0 \\ A'u_1'' + B'u_2'' + C'u_3'' &= F(x) \end{aligned}\right\}$$

(b) Resuelva $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x$ por el método en (a) .

4. Resuelva $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^x + e^{-x}$ por variación de parámetros.

5. Muestre que la solución general de $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ es $y = Ax^2 + Bx$. Luego, encuentre la solución general de $x^2y'' - 2xy' + 2y = \text{re}^{-x}$.

6. Pruebe los resultados en la Observación de la página 204.

EJERCICIOS C

1. Si la solución complementaria de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ es $Au_1(x) + Bu_2(x)$, muestre que su solución general es

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + u_2(x)\int \frac{R(x)u_1(x)dx}{W(u_1, u_2)} - u_1(x)\int \frac{R(x)u_2(x)dx}{W(u_1, u_2)}$$

donde
$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$$

es el Wronskiano de $u_1(x)$ y $u_2(x)$ y no es idénticamente cero. Discuta el caso donde $W \equiv 0$.

2. Use la identidad *de Abel* y el Ejercicio 1 para mostrar que la solución general de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ es

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \frac{u_2(x)}{c}\int R(x)u_1(x)e^{\int P(x)dx}\,dx - \frac{u_1(x)}{c}\int R(x)u_2(x)e^{\int P(x)dx}\,dx.$$

3. Aplique los resultados de los Ejercicios 1 y 2 al Ejercicio 5 de los Ejercicios B.

4.6 METODOS ABREVIADOS INVOLUCRANDO OPERADORES

Hemos visto cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros. El primer método se aplica solamente cuando el lado derecho de la ecuación contiene funciones apropiadas (polinomios, exponenciales, etc.) El segundo método sin embargo puede usarse no sólo para tales funciones apropiadas sino también para funciones más complicadas. En este caso pueden existir soluciones que involucren integrales indefinidas (ver Observación 2, página 205). En vista de esto, los así llamados métodos ***de operador u operacionales*** para resolver tales ecuaciones a ser descritos en esta sección pueden aparecer superfluos. Sin embargo, antes de que el estudiante pase rápidamente a la próxima sección, se deberían indicar varias razones para discutirlos. Primero, tales métodos con frecuencia ofrecen soluciones a problemas en una manera más corta, menos tediosa que otros métodos. Segundo, ellos sirven como un preámbulo a los métodos de la transformada de Laplace a ser discutidos en el Capítulo seis,* aunque por sí solos son de interés. Con estos comentarios presentamos ahora una discusión breve de los métodos operacionales.

Considere

$$\phi(D)y = F(x) \tag{25}$$

donde $\phi(D)$ es el operador polinómico lineal en $D \equiv d/x$, esto es,

$$\phi(D) \equiv a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

donde aquí tomaremos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ como constantes dadas. Si "resolvemos" formalmente para y en (25), tratando algebraicamente la ecuación, obtenemos

$$y = \frac{1}{\phi(D)} F(x) \tag{26}$$

Aquí $1/\phi(D)$ representa una operación a ser desarrollada sobre F(x). Una pregunta que se debe responder es: ¿Cuál es la naturaleza de la operación? Para tener alguna idea, considere la simple ecuación $Dy = x$. Aquí simbólicamente tenemos †

$$y = \frac{1}{D} x$$

*Históricamente, el ingeniero eléctrico *Heaviside* usó formalmente métodos operacionales con gran éxito. Los métodos de la transformada de Laplace fueron desarrollados en gran parte en un esfuerzo para colocar sus métodos en-una base metemática sólida.

†Algunos prefieren escribir D^{-1} (inverso de D) en vez de $1/D$. Ambos símbolos serán usados indistintamente.

¿**Qué** queremos significar con esto? Una pista aparece si resolvemos $Dy = x$. Obtenemos,

$$y = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

de donde es natural **hacer** la definición

$$\frac{1}{D}x \equiv \int x\, dx \tag{27}$$

siendo la interpretación que la operación de "multiplicar" una función por $1/D$ corresponde a una integración de la función. Es natural preguntar si $1/D^2$ operando sobre una función corresponde a una doble' **integración** de la función, y en general si $1/D^n$, n un entero, corresponde a n integraciones sucesivas. El estudiante puede convencerse fácilmente de esta interpretación. Operadores **tales** como $1/D$, $1/D^2$, etc., se llaman ***operadores inversos***. Investiguemos otros operadores. Considere

$$(D - p)y = f(x) \tag{28}$$

donde p es una constante. Formalmente, tenemos

$$y = \frac{1}{D - p} f(x) \tag{29}$$

Puesto que la ecuación (28) puede resolverse fácilmente para dar

$$y = e^{px} \int e^{-px} f(x)dx \tag{30}$$

es natural hacer la interpretación

$$\frac{1}{D - p} f(x) \equiv e^{px} \int e^{-px} f(x)dx \tag{31}$$

Note que esto se reduce a (27) si $p = 0$ y $f(x) = x$.

Es de intérés preguntar **qué** podría significar uno por

$$(D - p_1)(D - p_2)y = f(x) \tag{32}$$

donde p_1 y p_2 son constantes. Sabemos que

$$(D - p_2)y \equiv \frac{dy}{dx} - p_2 y$$

Así parece plausible que

$$\begin{aligned}(D - p_1)(D - p_2)y &\equiv \left(\frac{d}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2 y\right)\\ &\equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - p_2 y\right) - p_1\left(\frac{dy}{dx} - p_2 y\right)\\ &\equiv \frac{d^2y}{dx^2} - (p_1 + p_2)\frac{dy}{dx} + p_1 p_2 y\\ &\equiv [D^2 - (p_1 + p_2)D + p_1 p_2]y\end{aligned}$$

Así, el operador $(D-p_1)(D-p_2)$ es equivalente a $D^2-(p_1+p_2)D+p_1p_2$. Lo opuesto puede establecerse en forma similar. Se desprende que los operadores se pueden multiplicar o factorizar como cantidades algebraicas. Esto no es, sin embargo, siempre posible si p_1 y p_2 no son constantes. Se puede mostrar que la factorización de operadores

$$a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n \equiv a_0(D-p_1)(D-p_2)\ldots(D-p_n)$$

siempre es posible (y única) cuando $a_0, \ldots, a_n$, y consecuentemente $p_1, \ldots, p_n$ son constantes. Además no importa el orden de los factores, esto es, los operadores obedecen las leyes conmutativa, asociativa, y distributiva como lo hacen las cantidades algebraicas.* Este hecho importante nos permite tratar la ecuación (32) de la misma manera como se trataron las otras ecuaciones, esto es, podemos escribir (32) formalmente como

$$y = \frac{1}{(D-p_1)(D-p_2)} f(x)$$

La doble aplicación de (31) produce

$$\frac{1}{(D-p_1)(D-p_2)} f(x) \equiv \frac{1}{D-p_1}\left[e^{p_2x}\int e^{-p_2x}f(x)dx\right]$$

$$\equiv e^{p_1x}\int e^{-p_1x}\left[e^{p_2x}\int e^{-p_2x}f(x)dx\right]dx$$

De manera similar podemos escribir

$$\frac{1}{(D-p_1)\cdots(D-p_n)} f(x) \equiv e^{p_1x}\int e^{-p_1x}e^{p_2x}\int e^{-p_2x}e^{p_3x}\int\ldots e^{p_nx}\int e^{-p_nx}f(x)dx^n \tag{33}$$

El método funciona aún en el caso de que algunas o todas las constantes $p_1, \ldots, p_n$ sean iguales.

Puesto que el lado izquierdo de (33) se parece mucho a una fracción algebraica, es natural preguntar si uno puede, descomponerla en fracciones parciales, esto es, podamos escribir por ejemplo, en el caso donde $p_1, \ldots, p_n$ sean constantes distintas, la identidad

$$\frac{1}{(D-p_1)(D-p_2)\cdots(D-p_n)} \equiv \frac{A_1}{D-p_1} + \frac{A_2}{D-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{D-p_n} \tag{34}$$

para constantes determinadas apropiadamente $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si (34) es cierto, entonces

$$\frac{1}{(D-p_1)\ldots(D-p_n)} f(x) \equiv \frac{A_1}{D-p_1} f(x) + \frac{A_2}{D-p_2} f(x) + \cdots + \frac{A_n}{D-p_n} f(x)$$

*Ver los Ejercicios *B* y *C* en las páginas 172 y 173.

y el lado derecho se puede interpretar, usando (31) como

$$A_1e^{p_1x}\int e^{-p_1x}f(x)dx + A_2e^{p_2x}\int e^{-p_2x}f(x)dx + \cdot\,. + A_ne^{p_nx}\int e^{-p_nx}f(x)dx$$

Esto resulta ser correcto y es más fácil que la interpretación (33), puesto que sólo involucra integrales individuales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 11

Encuentre la solución general de $(D^2 - 1)y = e^{-x}$.

Solución Podemos escribir la ecuación como $(D - 1)(D + 1)y = e^{-x}$. De donde,

$$\begin{aligned}
y = \frac{1}{(D - 1)(D + 1)}e^{-x} &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{D - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{D + 1}\right)e^{-x} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{x}\int e^{-x}(e^{-x})dx - \tfrac{1}{2}e^{-x}\int e^{x}(e^{-x})dx \\
&= c_1e^{x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{4}e^{-x} - \tfrac{1}{2}xe^{-x} \\
&= Ae^{x} + Be^{-x} - \tfrac{1}{2}xe^{-x}
\end{aligned}$$

Se debería subrayar que si se omiten las constantes de integración nuestros métodos se pueden usar para obtener soluciones particulares.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 12

Encuentre una solución particular de $(D^2 + 4D + 4)y = x^3 e^{-2x}$.

Solución Escribimos $(D + 2)^2 y = x^3 e^{-2x}$. ***Así,***

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{(D + 2)^2}(x^3e^{-2x}) = \frac{1}{D + 2}\,\frac{1}{D + 2}(x^3e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{D + 2}\left[e^{-2x}\int e^{2x}(x^3e^{-2x})dx\right] = \frac{1}{D + 2}\left(e^{-2x}\int x^3\,dx\right) \\
&= \frac{1}{D + 2}\left[e^{-2x}\left(\frac{x^4}{4}\right)\right] = e^{-2x}\int e^{2x}\cdot e^{-2x}\left(\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{x^5}{20}e^{-2x}
\end{aligned}$$

En este ejemplo el trabajo es mucho más corto al que se hubiera hecho si hubiéramos usado el método de los coeficientes indeterminados.

Los métodos de operador son de gran uso para hallar soluciones particulares. Los métodos empleados pueden no siempre ser fácilmente justificables, como se muestra en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 13

Encuentre una solución particular de $(D^2 - D + 1)y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Solución Escribamos $y = \dfrac{1}{1 - D + D^2}(x^3 - 3x^2 + 1).$

Por división ordinaria en potencias ascendentes de D encontramos

$$\frac{1}{1 - D + D^2} = 1 + D - D^3 \quad D^4 + \dots$$

De donde, formalmente,

$$\begin{aligned} y &= (1 + D - D^3 - D^4 + \dots)(x^3 - 3x^2 + 1) \\ &= 1(x^3 - 3x^2 + 1) + D(x^3 - 3x^2 + 1) - D^3(x^3 - 3x^2 + 1) \\ &\quad - D^4(x^3 - 3x^2 + 1) + \dots \\ &= x^3 - 6x - 5 \end{aligned}$$

El hecho ***sorprendente*** de esto es que $y = x^3 - 6x - 5$ es realmente una solución particular.

Debido al ejemplo anterior, el estudiante no debe adquirir la impresión de que cualquier manipulación de operadores conducirá a resultados exitosos. Aunque hay muchas maneras en las cuales los operadores se pueden manipular, también hay muchas maneras en las cuales no se pueden. En los Ejercicios ***B*** y C hemos presentado algunas de las técnicas más comunes de operadores ***con*** sus demostraciones. El estudiante los puede hallar útiles para obtener resultados rápidamente en muchos casos.

EJERCICIOS A

Usando métodos de operador, encuentre la solución general de cada ecuación.

1. $(D^2 - D)y = 1.$
2. $(D^2 - 2D + 1)y = e^x.$
3. $(D^2 + 3D + 2)y = e^x - e^{-x}.$
4. $(D^2 - 1)y = 2x^4 - 3x + 1.$
5. $(D^2 + D)y = 4x^3 - 2e^{2x}.$
6. $(D^2 + 2D + 1)y = x^2e^{-x} + 1$
7. $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}\operatorname{sen} 3x.$
8. $(D^3 - D)y = 1 + x^5.$

EJERCICIOS B

1. Si $\phi(D)$ es un operador polinómico en D con coeficientes constantes, y m es cualquier constante, muestre que $\phi(D)e^{mx} = \phi(m)e^{mx}$. Luego, muestre que una solución de $\phi(D)y = 0$ es $y = e^{mx}$, donde m puede tomar valores que satisfacen ϕ (n) $=$ 0. Note que $\phi(m) = 0$ es la ecuación auxiliar.
2. Si a y b son constantes y y_1, y_2 son funciones apropiadas de x, muestre que

$$\frac{1}{\phi(D)}(ay_1 + by_2) = a\frac{1}{\phi(D)}y_1 + b\frac{1}{\phi(D)}y_2$$

Esto muestra que $1/\phi(D)$ es un operador lineal.

3. Muestre que si se omiten constantes arbitrarias

$$\frac{1}{\phi(D)}(e^{mx}) = \frac{1}{\phi(m)}(e^{mx}), \qquad \phi(m) \neq 0$$

Así, evalúe $\frac{1}{D^2 - 2D - 3} e^{4x}$ y obtenga la solución general de $(D^2 - 2D - 3)y = e^{4x}$.

4. Obtenga una solución particular de $(D^3 + 3D^2 - 4D - 12)y = 2e^{3x} - 4e^{-5x}$. También encuentre la solución general.

5. (a) Pruebe que si m es una constante y F es diferenciable,

$$D(e^{mx}F) = e^{mx}(D + m)F, \qquad D^2(e^{mx}F) = e^{mx}(D + m)^2F$$

(b) Por inducción matemática, extienda los resultados de (a) a $D_n\,(e^{mx}F) = e^{mx}\,(D + m)^nF$.

6. Use el Ejercicio 5 para mostrar que $\phi\,(D)(e^{mx}F) = e^{mx}\phi(D + m)F$ donde $\phi(D)$ es un polinomio en D con coeficientes constantes. El resultado se llama el ***teorema de cambio de operador.***

7. Use el teorema de cambio de operador del Ejercicio 6 para mostrar que la ecuación $(D-m)^py=0$ tiene la solución general $y=e^{mx}(c_1 + c_2x + \ldots + c_px^{p-1})$.

8. Use el teorema de cambio de operador para mostrar que

$$\frac{1}{\phi(D)}(e^{mx}G) = e^{mx}\frac{1}{\phi(D+m)}G.$$

[Sugerencia: Haga $\phi(D + m)F = G$ en el teorema de cambio de operador del Ejercicio 6.] El resultado ***es*** el ***teorema de cambio de operador inverso.*** Note que por este teorema, $1/\phi(D)$ tiene la misma propiedad de $\phi(D)$ en el Ejercicio 6.

9. Usando el Ejercicio 8, evalúe

(a) $\frac{1}{D^2 - 4D + 3}(x^3e^{2x})$ y obtenga una solución particular de $(D^2 - 4D + 3)y = x^3 e^{2x}$.

(b) $\frac{1}{D^2 + 2D + 1}(2x^2e^{-2x} + 3e^{2x})$ y obtenga una solución particular de $(D^2 + 2D + 1)y = 2x^2e^{-2x} + 3e^{2x}$.

10. Muestre que si ϕ es un polinomio con coeficientes constantes,

$$\phi(D^2)(\operatorname{sen} ax) = \phi(-a^2)(\operatorname{sen} ax), \qquad \phi(D^2)(\cos ax) = \phi(-a^2)(\cos ax)$$

así, derive los resultados,

$$\frac{1}{\phi(D^2)}(\operatorname{sen} ax) = \frac{1}{\phi(-a^2)}(\operatorname{sen} ax), \qquad \frac{1}{\phi(D^2)}(\cos ax) = \frac{1}{\phi(-a^2)}(\cos ax), \qquad \phi(-a^2) \neq 0$$

11. Usando el Ejercicio 10 evalúe

$$\text{(a)}\ \frac{1}{D^2+1}(\operatorname{sen} 3x). \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{D^4-3D^2+2}(2\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x).$$

12. Los resultados del Ejercicio 10 se pueden usar para encontrar soluciones particulares de $\phi(D^2)y = \operatorname{sen} ax$ ó $\phi(D^2)y = \cos ax$, pero no funcionan para las ecuaciones $\phi(D)y = \operatorname{sen} ay$ ó $\phi(D)y = \cos ay$. (a) Muestre que $\phi(D)$ siempre se puede escribir como $F_1(D^2) + DF_2(D^2)$. Considere

$$[F_1(D^2) + DF_2(D^2)]y = \operatorname{sen} ax$$

Opere a ambos lados por $F_1(D^2) - DF_2(D^2)$ para obtener

$$\{[F_1(D^2)]^2 - D^2[F_2(D^2)]^2\}y = F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax$$

y por tanto muestre que una solución particular es

$$\frac{F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax}{[F_1(-a^2)]^2 + a^2[F_2(-a^2)]^2}$$

(b) Finalmente obtenga el resultado en (a) escribiendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(D)}\operatorname{sen} ax &= \frac{1}{F_1(D^2)+DF_2(D^2)}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(D^2) - DF_2(D^2)}{[F_1(D^2)+DF_2(D^2)][F_1(D^2)-DF_2(D^2)]}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(-a^2) - DF_2(-a^2)}{[F_1(-a^2)]^2 + a^2[F_2(-a^2)]^2}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax}{[F_1(-a^2)]^2 + a^2[F_2(-a^2)]^2}
\end{aligned}$$

Llegue a un resultado similar para $\dfrac{1}{\phi(D)}\cos ax$.

13. Use los resultados del Ejercicio 12 para encontrar soluciones particulares de: (a) $(D^2 - 3D + 2)y = \operatorname{sen} 3x$. (b) $(2D^3 + D^2 - 2D - 1)y = 3\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x$.

14. Combinando el teorema de cambio de operador del Ejercicio 8 y los resultados del Ejercicio 12, evalúe

$$\text{(a)}\ \frac{1}{D^2+D-2}(e^{2x}\operatorname{sen} 3x). \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{D^3+2D^2-1}(e^{-x}\cos 2x).$$

15. Muestre cómo las identidades $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

se pueden emplear para obtener los resultados de los Ejercicios 10-14.

16. Usando los métodos de los Ejercicios 1-15 evalúe:

(a) $\dfrac{1}{D^2+2D-5}(e^{3x})$. (b) $\dfrac{1}{D^3-1}(x^5+3x^4-2x^2)$. (c) $\dfrac{1}{D^2+1}(x^2e^{2x})$.

(d) $\dfrac{1}{D^2+D}(8\operatorname{sen}4x)$. (e) $\dfrac{1}{D^3+1}(\operatorname{sen}x+\cos x)$. (f) $\dfrac{1}{(D-3)^3}(e^{3x}\cos 4x)$.

(g) $\dfrac{1}{D^2-4D+3}[e^x(2\operatorname{sen}x-3\cos x)]$. (h) $\dfrac{1}{(D+2)^2(D+1)^3}(x^3e^{-x}+e^{-x}\operatorname{sen}x)$

(i) $\dfrac{1}{D^3+D^2-D-1}(x^2+3\operatorname{sen}x)$. (j) $\dfrac{1}{D^3-D^2+D}(x^2e^x-4x^4)$.

EJERCICIOS C

1. (a) Use fracciones parciales para obtener $\dfrac{1}{(D-2)^2(D+3)}(x^2e^{2x})$

y verifique su resultado por otros métodos. (b) Justifique las manipulaciones en (a) probando que

$$\left(\frac{a}{\phi_1(D)}+\frac{b}{\phi_2(D)}\right)F=a\frac{1}{\phi_1(D)}F+b\frac{1}{\phi_2(D)}F$$

2. (a) Muestre cómo modificar el resultado del Ejercicio 3B en el caso $\phi(m)=0$ pero $\phi'(m)\neq 0$ (esto es, m es una raíz pero no una raíz doble de $\phi(m)=0$), obteniendo

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{mx}=\frac{1}{\phi'(m)}xe^{mx}$$

(b) En el caso $\phi(m)=0$, $\phi'(m)=0$, $\phi''(m)=0, \ldots, \phi^{(p-1)}(m)=0$, $\phi^{(p)}(m)\neq 0$, [esto es, m es una raíz de multiplicidad p de $\phi(m)=0$], muestre que

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{mx}=\frac{1}{\phi^{(p)}(m)}x^pe^{mx}$$

[Sugerencia: Si m es una raíz de multiplicidad p de $\phi(r)=0$, entonces $(r-m)^p$ es un factor de $\phi(r)$; en forma similar $(D-m)^p$ es un factor de $\phi(D)$.]

3. Use los resultados del Ejercicio 2 para investigar el caso del Ejercicio 10B si $\phi(-a^2)=0$.

4. Evalúe

(a) $\dfrac{1}{(D-1)^2}(e^x)$. (b) $\dfrac{1}{D^2-3D+2}(2e^x-e^{2x})$. (c) $\dfrac{1}{(D+2)^4}(e^{-2x})$.

(d) $\dfrac{1}{D^2+9}(\operatorname{sen}3x)$. (e) $\dfrac{1}{D^3+D}(\cos x+\operatorname{sen}x)$. (f) $\dfrac{1}{D^4+2D^2+1}(\operatorname{sen}x)$.

5. Resuelva $(D^2 + 1)y = x^2 \cos x$ escribiendo $\cos x$ como la parte real de e^{ix} y factorizando $(D^2 + 1)$ en $(D - i)(D + i)$.

6. Usando operadores resuelva $(aD^2 + bD + c)y = F(x)$ donde a, b, c son constantes.

Observaciones relacionadas con ecuaciones con coeficientes variables las cuales se pueden transformar en ecuaciones lineales con coeficientes constantes: La ecuación de Euler

El estudiante ha tenido ocasión de ver cómo algunas ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas por el uso de adecuadas y a menudo ingeniosas transformaciones. No debería sorprender que algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables puedan ser resueltas al transformarlas en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La transformación particular usada puede no siempre ser obvia, y el estudiante no debe desarrollar un sentido de inferioridad si no la ve inmediatamente.

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $x^2y'' + ny' + 4y = 1$. (1)

No es tan obvio de cómo proceder a resolver esta ecuación lineal con coeficientes variables. Los matemáticos han encontrado, sin embargo, que esta ecuación pertenece a un tipo especial que puede ser resuelta por la transformación $x = e^z$. Para ver esto note que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz} = e^{-z}\frac{dy}{dz}$$

así que

$$xy' = x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \tag{2}$$

Similarmente,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)\Big/\frac{dx}{dz} = e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

así que

$$x^2y'' = x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad \frac{dy}{dz} \tag{3}$$

Debido a (2) y (3), la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 1 \tag{4}$$

así que

$$y = A\cos 2z + B\operatorname{sen} 2z + \tfrac{1}{4}$$

Puesto que $z = \ln x$, la solución de la ecuación requerida es*

$$y = A\cos(2\ln x) + B\,\text{sen}(2\ln x) + \tfrac{1}{4}$$

La transformación $x = e^z$ transformará

$$(a_0x^nD^n + a_1x^{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}xD + a_n)y = F(x) \tag{5}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes en una ecuación lineal con coeficientes constantes. Esto fue primero descubierto por Euler, y se conoce como la *ecuación diferencial de Euler,* aunque algunas veces se atribuye a **Cauchy.**

Observación. Suponga que los operadores D y $\mathscr{D}$ son definidos por

$$D \equiv \frac{d}{dx}, \qquad \mathscr{D} \equiv \frac{d}{dz} \tag{6}$$

Entonces por (2) y (3), $xDy = \mathscr{D}y, \qquad x^2D^2y = \mathscr{D}(\mathscr{D}-1)y$ (7)

lo cual resulta en la equivalencia de operador

$$xD \equiv \mathscr{D}, \qquad x^2D^2 \equiv \mathscr{D}(\mathscr{D}-1) \tag{8}$$

De esto se puede conjeturar que

$$x^3D^3 \equiv \mathscr{D}(\mathscr{D}-1)(\mathscr{D}-2), \qquad x^4D^4 \equiv \mathscr{D}(\mathscr{D}-1)(\mathscr{D}-2)(\mathscr{D}-3), \ldots \tag{9}$$

Esto realmente resulta ser cierto, como se ve en el Ejercicio 2A y Ejercicio 2B. Estos resultados nos permiten transformar la ecuación de Euler fácilmente.

Ejemplo. Usando (7) u (8), la ecuación (1) se puede escribir inmediatamente como

$$\mathscr{D}(\mathscr{D}-1)y + \mathscr{D}y + 4y = 1 \quad \text{or} \quad (\mathscr{D}^2 + 4)y = 1$$

la cual es la misma (4).

EJERCICIOS A

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones de Euler sujeta a cualquiera de las condiciones dadas.

(a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.
(b) $4x^2y'' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
(c) $x^2y'' = x + 2y$.
(d) $(x^2D^2 - xD + 2)y = \ln x$.
(e) $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2 + 16(\ln x)^2$.
(f) $x^2y'' + y = 16\,\text{sen}(\ln x)$.
(g) $t^2\dfrac{d^2I}{dt^2} + 2t\dfrac{dI}{dt} + I = t\ln t$.
(h) $y'' = \dfrac{4}{25}\left(\dfrac{x-y}{x^2}\right)$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.
(i) $x^2y'' + xy' - 9y = x^{1/2} + x^{-1/2}$.
(j) $x^2y''' - 2xy' = 5\ln x$.

*Hemos asumido tácitamente aqui que $x > 0$. Para $x < 0$ podemos hacer $x = e^{-z}$ y obtener la solución $y = A\cos[2\ln(-x)] + B\,\text{sen}[2\ln(-x)]$.

2. Si $x = e^z$, muestre que $x^3 D^3 y =$

$$\mathscr{D}(\mathscr{D} - 1)(\mathscr{D} - 2)y, \quad x^4 D^4 y = \mathscr{D}(\mathscr{D} - 1)(\mathscr{D} \quad 2)(\mathscr{D} - 3)y,$$

donde los operadores D y $\mathscr{D}$ están dados en (6). Así demuestre los resultados (9). Use los resultados para resolver $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 1 + x$. ${}^2 y'' = 1 + x$.

3. Resuelva (a) $x^3 y''' + xy' - y = x \ln x$; (b) $x^4 y^{(IV)} + 6x^3 y''' + 7x^2 y'' + xy' - y = 1$.

4. Pruebe el resultado de pie de página de la página 216.

EJERCICIOS B

1. Evalúe

$$I = \iint \frac{\ln x}{x^2}\, dx^2$$

de dos maneras diferentes. ¿Puede usted generalizar el resultado? *(Sugerencia:* Para la primera manera, muestre que $x^2 I'' = \ln x$; para la segunda, use cálculo elemental.)

2. Si $x = e^z$, muestre que $x^n y^{(n)} = \mathscr{D}(\mathscr{D} - 1)(\mathscr{D} - 2) \cdots (\mathscr{D} - n + 1)y$ donde $\mathscr{D} \equiv d/dz$.

(Sugerencia: Use inducción matemática.)

3. Determine la constante m para que $y = x^m$ sea la solución de $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$. Luego, obtenga la solución general. ¿Cómo se puede usar esto para encontrar la solución general de $x^2 y'' + 3xy' - 3y = x^2 - 4x + 2$?

4. ¿Se puede usar el método del Ejercicio 3 para determinar soluciones generales de las ecuaciones (a) $x^2 y'' - xy' + y = 0$ y (b) $x^2 y'' - xy' + 4y = 0$? Use el métododel texto para obtener las soluciones. Discuta las ventajas y desventajas del método del Ejercicio 3.

5. Use la transformación $2x + 3 = e^z$ para resolver $(2x + 3)^2 y'' + (2x + 3)y' - 2y = 24x^2$.

6. Resuelva $(x + 2)^2 y'' - y = 4$.

7. Resuelva $r \dfrac{d^2}{dr^2}(rR) - n(n + 1)R = 0$.

EJERCICIOS C

1. Use la transformación $z = \operatorname{sen} x$ para resolver $y'' + (\tan x)y' + (\cos^2 x)y = 0$.

2. Haga $x = z^m$ y escoja la constante m apropiadamente para resolver la ecuación diferencial $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$.

3. Muestre que cuando se hace la transformación $x = F(x)$ en la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

la ecuación resultante es

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = r(z) \quad \text{donde} \quad p(z) \quad \frac{z'' + Pz'}{(z')^2}, \quad q(z) \equiv \frac{Q}{(z')^2}, \quad r(z) = \frac{R}{(z')^2}$$

las primas denotan derivadas con respecto a x. (b) Use el resultado de (a) para mostrar que si z se escoge tal que $q(z)$ sea una constante (digamos 1), esto es, $z' = \sqrt{Q}$, $z = \int \sqrt{Q}\, dx$, y si esta elección hace que $p(z)$ también sea constante, la primera ecuación de (a) se puede resolver. (c) Use el resultado de (a) y muestre que si z se escoge tal que $z'' + Pz' = 0$ y si con esta elección $q(z)$ es una constante, entonces la primera ecuación de (a) se puede resolver.

4. Usando el Ejercicio 3, resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 1 y 2.
5. Use el Ejercicio 3 para resolver la ecuación de Euler $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x - 2$.
6. Resuelva (a) $(\operatorname{sen} x)y'' + (3\operatorname{sen}^2 x - \cos x)y' + 2(\operatorname{sen}^3 x)y = 0$. (b) $x^4y'' + 2x^3y' + y = x^{-2}$.

6 Revisión de métodos importantes

En este capítulo hemos estado trabajando con varios métodos para resolver la ecuación diferencial lineal

$$a_0 \frac{d^ny}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_ny = F(x) \tag{1}$$

o brevemente

$$\phi(D)y = F(x) \tag{2}$$

donde $D \equiv d/dx$ y

$$\phi(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n \tag{3}$$

En (1) los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se asumen reales, pueden ser funciones de x, pero en muchos casos importantes ellos son constantes. La teoría para resolver (1) por (2) se aplica tanto en el caso de coeficientes constantes como en el de coeficientes variables y consiste de los siguientes pasos.

PASO 1

Encuentre la solución general de la ecuación complementaria de (1) o (2), esto es,

$$\phi(D)y = 0 \tag{4}$$

obtenida remplazando el lado derecho por cero. Para hacer esto debemos encontrar n soluciones linealmente independiente, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (las cuales se pueden chequear con la teoría de Wronskianos en las páginas 181-190). Una vez hayamos encontrado éstas la solución general requerida de (4), también llamada la ***solución complementaria*** de (2), está dada por

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{5}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. Obviamente, si $F(x) \equiv 0$, (5) sería la solución requerida. Si $F(x) \not\equiv 0$ debemos proceder con el Paso 2.

Hay dos tipos de ecuaciones (2) las cuales pueden surgir de acuerdo a que los coeficientes sean todos constantes o no todos constantes.

Caso (a). Todos los coeficientes constantes. En este caso hacemos $y = e^{mx}$ en (4) para obtener la ecuación auxiliar.

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{6}$$

con n raíces dadas por m , , m_2, . , m_n. Las siguientes posibilidades pueden ocurrir

(i) ***Raíces reales y distintas.*** Aquí la solución complementaria es

$$y_c = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots + c_ne^{m_nx}$$

(ii) ***Algunas (o todas) las raíces son repetidas.*** Aquí si la raíz m_1, por ejemplo, ocurre p_1 veces entonces los términos de la solución complementaria correspondientes a estas raíces están dados por

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \ldots + c_{p_1}x^{p_1-1}e^{m_1x} = (c_1 + c_2x + \cdots + c_{p_1}x^{p_1-1})e^{m_1x}$$

La suma de todos estos términos para todos las raíces produce y_c.

(iii) ***Algunas (o todas) las raíces son imaginarias.*** Puesto que las constantes a,, a,, ., a_n en (6) se asumen reales, cualesquiera raíces imaginarias deben ocurrir en parejas complejas conjugadas. Si $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ es una de tales parejas la cual es no repetida el término y_c correspondiente a la pareja está dado por $e^{\alpha_1x}(x_1 \cos \beta_1 x + c_2 \operatorname{sen} \beta_1 x)$. Si esta pareja ocurre dos veces el término correspondiente en y_c está dado por

$$e^{\alpha_1x}(c_1 \cos \beta_1x + c_2 \operatorname{sen} \beta_1x) + xe^{\alpha_1x}(c_3 \cos \beta_1x + c_4 \operatorname{sen} \beta_1x)$$

etc.

Caso (b). Coeficientes variables (no todos constantes). Aquí el método de hacer $y = e^{mx}$ no funcionará (excepto en casos muy especiales), así que se deben usar técnicas especializadas para encontrar y $_1$, y_2,. , y_n, como por ejemplo en el caso de la ***ecuación de Euler***, página 215, donde la transformación $x = e^z$ se usa para reducir el caso de coeficientes variables al de coeficientes constantes.

PASO 2

Encuentre una solución particular y_p de la ecuación (2) dada. Para el caso de coeficientes constantes hay tres posibles métodos los cuales pueden ser usados, como sigue:

***(a).* Método de los Coeficientes indeterminados.** Esto es aplicable solamente cuando $F(x)$ consiste de tipos especiales de funciones tales como polinomios de grado n, funciones exponenciales de la forma e^{rx} y funciones trigonométricas de la forma sen rx y $\cos rx$. El procedimiento consiste en asumir una forma apropiada para la solución particular que contenga coeficientes constantes los cuales deben ser determinados por sustitución en (2). Este procedimiento está resumido en la página **198** y no necesitamos repetirlo aquí.

El método es también aplicable en casos en donde ocurren sumas y productos de funciones especiales en F(n). En tales casos usamos el procedimiento resumido en la página 200.

Como una alternativa al procedimiento anterior podemos emplear el método de aniquilación que involucra un operador apropiado que "barre" $F(x)$ del lado derecho de (2) resultando en una ecuación con el lado derecho cero. Entonces el procedimiento dado en el Paso 1 se puede usar para llegar automáticamente a la forma apropiada de la solución particular.

(*b*). Método de Variación de parámetros. Este se puede usar para cualquier función $F(x)$ y en particular para aquellas funciones usadas en el método (a). Así este es un método "más poderoso" que (a). El método usa la solución complementaria (5), asume que las constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$, se remplazan por funciones de x, denotados por $A, B, C, \ldots$, y luego busca determinar estas funciones para que (5) satisfaga a (2). En el caso de una ecuación de segundo orden con solución complementaria $y_c = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ la solución asumida de (2) es $y = Au_1(x) + Bu_2(x)$ que involucra las dos funciones A y B para ser determinadas. Puesto que una restricción se usa en el hecho de que y debe satisfacer la ecuación (2), estamos en libertad de escoger una condición que relaciona A y B. Esto conduce a las ecuaciones para determinar A y B dadas por

$$A'u_1(x) + B'u_2(x) = 0, \qquad A'u_1'(x) + B'u_2'(x) = F(x)$$

donde la segunda ecuación se encuentra a partir de la ecuación diferencial dada. El método puede también usarse para coeficientes variables y puede ser extendido a ecuaciones diferenciales lineales de órdenes superiores.

(c) Métodos abreviados de operador. Estos métodos (ver páginas 207-215) son algunas veces útiles en el sentido de que puede ser posible en algunos casos obtener soluciones más rápidamente que con los métodos (a) ó (b), condicionado a que uno desarrolle habilidades para trabajar con tales métodos de operador. Ciertamente el estudiante debería familiarizarse con los dos primeros métodos anteriores, y considerar como opcional este método de operador.

PASO 3

Una vez hayamos obtenido y_c y y_p, la solución general de (2) está dada por

$$Y = y_c + y_p \tag{7}$$

Observación. El teorema de la página 175 a menudo es útil cuando uno no puede encontrar todas las soluciones independientes que se necesitan en (5).

Los siguientes ejercicios intentan servir como un repaso de los varios métodos.

EJERCICIOS MISCELANEOS SOBRE EL CAPITULO CUATRO

EJERCICIOS A

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones dadas si las hay.

1. $y'' + 3y = x^2 + 1;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$

3. $(D^2 + 2D + 1)y = e^x + e^{-x}.$

4. $y''' - 4y = 4x + 2 + 3e^{-2x}.$

5. $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} + 5I = 34 \cos 2t.$

6. $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 8e^{-t}.$

7. $y'' - 4y = xe^{2x};\ y(0) = y'(0) = 0.$

8. $x^2y'' - 6y = 0;\ y(1) = 2,\ y'(1) = 0.$

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1.$

10. $y^{(IV)} + 16y'' = 64 \cos 4x.$

11. $y'' + 4y = x(1 + \cos x).$

12. $\dfrac{d^2r}{d\phi^2} = 27. - e^{-2\phi}$

13. $y''' - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} + 24x^2.$

14. $y'' + y = \sec x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

15. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 24(x + 1).$

16. $\dfrac{d^4s}{dt^4} - 2\dfrac{d^2s}{dt^2} + s = 100 \cos 3t.$

17. $4y'' - 4y' + y = \ln x.$

18. $D(D^2 - 1)(D^2 - 4)y = x^2 - x + e^x$

19. $\dfrac{d^4I}{dt^4} + 9\dfrac{d^2I}{dt^2} = 20e^{-t};\ I(0) = I'(0) = 0.$

20. $x^2y''' - xy'' + y' = \dfrac{\ln x}{x}.$

EJERCICIOS B

1. Resuelva $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 64 \operatorname{sen} 2x.$

2. Encuentre la solución de $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ la cual está acotada en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ y tiene el valor de 2 para $x = \frac{1}{2}$.

3. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de tal modo que su aceleración instantánea está dada por $a = 16e^{-t} - 20x - 8v$ donde x es su posición instantánea medida del origen, v es su velocidad instantánea y t es el tiempo de viaje. Si la partícula comienza del reposo en el origen encuentre su posición en cualquier tiempo $t > 0$.

4. Resuelva $y'' + (\cos x)y' + (1 + \operatorname{sen} x)y = 0$ notando primero que $\cos x$ es una solución.

5. Resuelva el Ejercicio 4 si el lado derecho se remplaza por 1.

6. Resuelva $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{24(x + y)}{x^3}.$

7. Resuelva $xy''' + 2xy'' - xy' - 2xy = 1.$

EJERCICIOS C

1. Muestre que la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se puede transformar en $u'' + f(x)u = 0$ haciendo $y = u(x)v(x)$ y escogiendo $v(x)$ apropiadamente. Luego, resuelva

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

2. Resuelva $xy'' + 2y' + xy = 0$.

3. Muestre que la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, sujeta a las condiciones $y(0) = y(\pi) = 0$, tiene soluciones no cero solamente para un cierto conjunto de valores del parámetro λ. Estos valores se llaman *valores propios, o valores característicos,* y las soluciones correspondientes se llaman *funciones propias o funciones características.* Las ecuaciones diferenciales que generan valores propios y funciones propias son de importancia en trabajos avanzados. Investigaremos tales problemas en capítulos posteriores.

4. (a) Muestre que por medio de la sustitución $y = -\dfrac{1}{Pu}\dfrac{du}{dx}$ la ecuación de Riccati del Ejercicio 12, página 68, se transforma en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{P'}{P} + Q\right)\frac{du}{dx} + PRu = 0$$

(b) Use el método de (a) para resolver $xy' = x^2y^2 - y + 1$.

5. Resuelva $y'' = (y')^2(2 + xy' - 4y^2y')$. *(Sugerencia:* Use el Ejercicio 4C, página 15.)

6. Resuelva el problema de valor inicial $\dfrac{d^2Q}{dt^2} + kQ = E(t)$, $Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = 0$ donde $E(t)$ es una función dada de t y k es una constante positiva. (b) Trabaje la parte (a) si $E(t)$ está dada por la gráfica del Ejercicio 2C, página 89.

7. (a) Muestre que la solución de $y'' = F(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ es

$$y = \int_0^1 G(x, t)F(t)\,dt$$

donde

$$G(x, t) = \begin{cases} t(x - 1), & 0 \leqq t \leqq x \\ x(t - 1), & x \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

La función $G(x, t)$ a menudo se llama la ***Función de Creen.***

(b) Discuta cómo usted podría obtener $G(x, t)$ si ésta no fuera dada. *[Sugerencia:* Una posibilidad es escribir

$$y = \int_0^x G(x, t)F(t)\,dt + \int_x^1 G(x, t)F(t)\,dt$$

y sustituir en la ecuación y condiciones dadas para encontrar condiciones adecuadas sobre G en las dos regiones $0 \leqq t \leqq x$, $x \leqq t \leqq 1$.]

(c) Aplique su método en (b) para resolver $y'' + y = F(x)$, $y(0) = y(1) = 0$.

cinco

aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales

En el capítulo anterior, se dieron métodos para la solución de

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F(t) \tag{1}$$

donde a, b, c son constantes dadas o funciones de t y $F(t)$ es una función dada de t. Esta ecuación ocurre con tanta frecuencia en aplicaciones de física, ingeniería y otras ciencias que merece un estudio especial. En este capítulo estudiaremos aplicaciones de tales ecuaciones diferenciales a:

1. Movimiento vibratorio u oscilatorio de sistemas mecánicos.
2. Problemas de circuitos eléctricos.
3. Problemas misceláneos.

1 Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos

1.1 EL RESORTE VIBRANTE. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Tal vez el sistema más simple disponible para estudiar el movimiento vibratorio consiste de un resorte ordinario de peso despreciable [Fig. 5.1(a)] suspendido verticalmente de un soporte fijo. Suponga que un peso W se cuelga del resorte [Figura 5.1(b)]. Cuando el peso está en reposo describimos su posición como la *posición de equilibrio.* Si el peso se hala hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio [Figura 5.1(c)]. Nuestro propósito en esta sección es discutir el movimiento del peso en este y similares casos. Para conseguir este propósito, tendremos que conocer las fuerzas que actúan sobre el peso durante su movimiento. Es claro por experiencia que hay una fuerza tendiente a regresar o restaurar un peso desplazado a su posición de equilibrio. Esta fuerza se llama la *fuerza restauradora.*

La ley que gobierna esta fuerza es un caso especial de la ley generalizada de Hooke en la página 144. Nos referiremos a este caso especial como la ley *de Hooke*, la cual se enuncia como sigue:

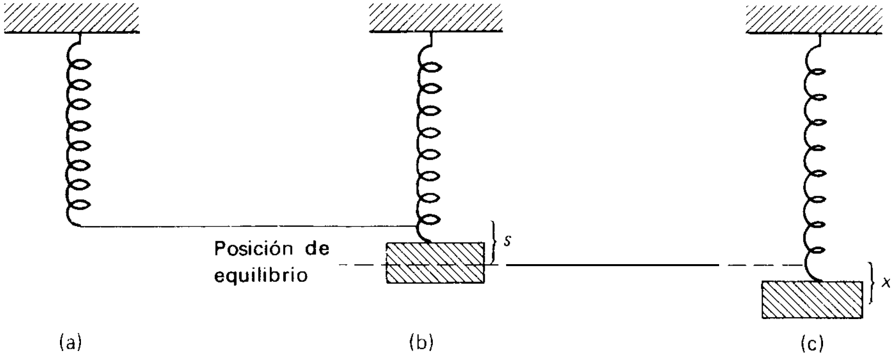


Figura 5.1

Ley de Hooke. ***La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio.*** (Algunas veces se abrevia como "la fuerza es proporcional al alargamiento".)

Denote la magnitud de la fuerza restauradora por $|f|$, y sea x la posición de W medida desde la posición de equilibrio. Asuma la dirección positiva hacia abajo, de modo que x es positivo cuando W está por debajo de la posición de equilibrio y negativo cuando W esté por encima de esta posición. De acuerdo a la ley de Hooke,

$$|f| \propto |x| \text{ esto es } |f| = k|x|$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad que depende de la dureza del resorte y se llama la ***constante del resorte.*** Para determinar la dirección de la fuerza, note que cuando $x > 0$ la fuerza está dirigida hacia arriba y por tanto negativa. Cuando $x < 0$ la fuerza está dirigida hacia abajo y es por tanto positiva. Esto se puede satisfacer sólo si la fuerza está dada tanto en magnitud como dirección por $-kx$, de modo que la ley de Hooke es

$$f = -kx \tag{2}$$

Cuando el peso W se coloca en el resorte, se estira una distancia s como en la Figura 5.1(b). De acuerdo a la ley de Hooke, la tensión T_1 en el resorte es proporcional al estiramiento, y así $T_1 = ks$. Puesto que el resorte y el peso están en equilibrio se tiene que

$$T_1 = ks = W \tag{3}$$

Cuando el peso se hala más y se suelta, su posición en cualquier tiempo se muestra en la Figura 5.1(c). La tensión T_2 en el resorte en este tiempo es, de acuerdo a la ley de Hooke,

$$T_2 = k(s + x) \tag{4}$$

Sigue que la fuerza neta en la dirección positiva está dada por

$$W - T_2 = W - ks - kx = -kx$$

debido a (3). **Así** por la ley de Newton la ecuación del movimiento es

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Así la fuerza neta es simplemente la fuerza restauradora y no depende del peso w.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Se encontró experimentalmente que un peso de 6 lb estira un resorte 6 pul. Si el peso se hala 4 pul por debajo de la posición de equilibrio y se suelta: (a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento; (b) Encuentre la posición del peso como una función del tiempo; y (c) determine la posición, velocidad y aceleración del peso $\frac{1}{2}$ seg después de haberse soltado.

Formulación matemática. Por la ley de Hooke (puesto que 6 pul = $\frac{1}{2}$ pie), $|f| = k|x|$, ó $6 = k \cdot \frac{1}{2}$; esto es, $k = 12$. La ecuación diferencial que describe el movimiento es por tanto

$$\frac{6}{32} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -12x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{5}$$

Puesto que inicialmente ($t = 0$) el peso está 4 pul por debajo de la posición de equiiibrio, tenemos

$$x = \tfrac{1}{3}\text{(pie)} \quad \text{en } t = 0 \tag{6}$$

También, puesto que el peso se suelta (esto es, tiene velocidad cero) en $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \text{en } t = 0 \tag{7}$$

La respuesta a (a) está dada por la ecuación (5) con las condiciones (6) y (7).

Solución La ecuación auxiliar para (5) es $m^2 + 64 = 0$ y tiene raíces $m = \pm 8i$. De donde la ecuación diferencial tiene la solución

$$x = A\cos 8t + B\operatorname{sen} 8t$$

De la condición (6) encontramos $A = \frac{1}{3}$, así que

$$x = \tfrac{1}{3}\cos 8t + B\operatorname{sen} 8t \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} = -\tfrac{8}{3}\operatorname{sen} 8t + 8B\cos 8t$$

Usando la condición (7), encontramos ahora $B = 0$. De donde, la solución requerida es

$$x = \tfrac{1}{3}\cos 8t \tag{8}$$

la cual da la respuesta a la parte (b). Note que en la ecuación (8), x está en pies. Si se desea medir x en pulgadas, la ecuación sería $x = 4\cos 8t$.

Volvamos a la parte (c). Diferenciando (8) con respecto a t, vemos que

$$v = \frac{dx}{dt} = -\tfrac{8}{3}\operatorname{sen} 8t, \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{64}{3}\cos 8t$$

Colocando $t = \frac{1}{2}$ y usando el hecho de que 4 radianes = $4 \times (180/\pi)$ grados = 229 grados, aproximadamente, encontramos

$$x = \tfrac{1}{3}(-0{,}656) = -0{,}219, \qquad v = -\tfrac{8}{3}(-0{,}755) = +2{,}01,$$

$$a = -\tfrac{64}{3}(-0{,}656) = +14{,}0$$

Así después de $\frac{1}{2}$ *seg* el peso está a 0,219 pies por ***encima*** de la posición de equilibrio y está viajando hacia abajo con velocidad 2,01 pies/seg y aceleración 14,0 pies/seg^2.

El gráfico de (8) se muestra en la Figura 5.2. Del gráfico se ve que el peso empieza en $x = \frac{1}{3}$ donde $t = 0$, luego pasa por la posición de equilibrio en $x = 0$ a la posición $x = -\frac{1}{3}$ y luego regresa de nuevo a la posición de equilibrio, la pasa y vuelve a $x = \frac{1}{3}$. Este ciclo se repite una y otra vez. Físicamente el gráfico describe el movimiento periódico hacia arriba y abajo del resorte el cual x

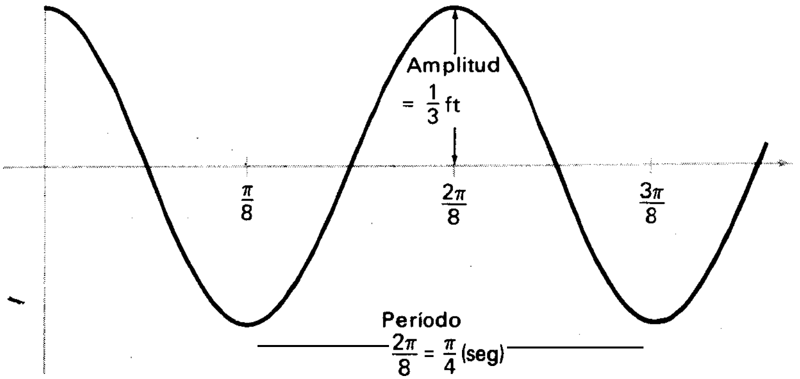


Figura 5.2

se llama *movimiento armónico simple.* En general, cualquier movimiento descrito por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax \tag{9}$$

donde $a > 0$ es una constante, será movimiento armónico simple. Físicamente (9) dice que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento pero en dirección opuesta (indicado por el signo menos).

Llamamos el desplazamiento máximo del peso de su posición de equilibrio (esto *es,* $x = 0$) la *amplitud.* En el ejemplo anterior la amplitud es $\frac{1}{3}$ pie. El tiempo para un ciclo completo se llama el *periodo.* Del gráfico se ve que el período es $\pi/4$ seg. Otra forma de ver que el período es $\pi/4$ sin el gráfico es determinar cuándo el peso está en un extremo de su trayectoria (esto es, ya sea el punto más alto, o más bajo). Suponga por ejemplo, que tomamos el punto más bajo dado por $x = \frac{1}{3}$. De (8) vemos que esto ocurrirá cuando

$$\cos 8t = 1, \text{ esto es, } 8t = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots \text{ o } t = 0; \pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \ldots$$

De donde la primera vez que $x = \frac{1}{3}$ es cuando $t = 0$, la segunda cuando $t = \pi/4$, la tercera cuando $t = 2\pi/4$, etc. La diferencia entre tiempos sucesivos es $\pi/4$, la cual es el período. El número de ciclos por segundos se llama la *frecuencia.* Tenemos

$$\text{Período} = \text{número de segundos por ciclo} = \pi/4$$

$$\text{Frecuencia} = \text{Número de ciclos por segundo} = \frac{1}{\pi/4} = \frac{4}{\pi}$$

En general si T es el período, la frecuencia f está dada por

$$f = \frac{1}{T}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

En el Ejemplo ilustrativo 1, suponga que el peso se hala 4 pul por debajo de la posición de equilibrio y luego se le da una velocidad hacia abajo de 2 pies/seg en vez de soltarlo. Determine la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

Formulación matemática. La ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{10}$$

como en el Ejemplo ilustrativo 1. Las condiciones iniciales son

$$x = \frac{1}{3}, \qquad \frac{dx}{dt} = 2 \qquad \text{en } t = 0 \tag{11}$$

Solución La solución general de (10) es $x = A\cos 8t + B\,\text{sen}\,8t$. De la primera de las condiciones (11), $A = \frac{1}{3}$. Por tanto, $x = \frac{1}{3}\cos 8t + B\,\text{sen}\,8t$. La diferenciación da

$$\frac{dx}{dt} = -\tfrac{8}{3}\,\text{sen}\,8t + 8B\cos 8t$$

y usando la segunda de las condiciones de (11), encontramos $B = \frac{1}{4}$. La solución requerida es

$$x = \tfrac{1}{3}\cos 8t + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,8t \tag{12}$$

Si x se mide en pulgadas, la ecuación es

$$x = 4\cos 8t + 3\,\text{sen}\,8t \tag{13}$$

A veces es útil escribir (12) en una forma equivalente, haciendo uso de la identidad*

$$\left.\begin{aligned} &a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(\omega t + \phi)\\ &\text{donde}\quad \text{sen}\,\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \cos\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

como se indica en la Figura 5.3. El ángulo ϕ a menudo se llama el *ángulo de fase*. Con la ayuda de esta identidad (14) se convierte en

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2}\,\text{sen}\,(8t + \phi) = \tfrac{5}{12}\,\text{sen}(8t + \phi) \tag{15}$$

donde sen $\phi = \frac{4}{5}$, $\cos\phi = \frac{3}{5}$. De tablas, $\phi = 53°\,8'$ ó 0,9274 radianes así que

$$x = \tfrac{5}{12}\,\text{sen}\,(8t + 0{,}9274) \tag{16}$$

si x está en pies, y

$$x = 5\,\text{sen}\,(8t + 0{,}9274)$$

*Esto es fácil de probar, puesto que

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\text{sen}\,\omega t\cos\phi + \cos\omega t\,\text{sen}\,\phi)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[(\text{sen}\,\omega t)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + (\cos\omega t)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$$

si x está en pulgadas. El gráfico de (16) se muestra en la

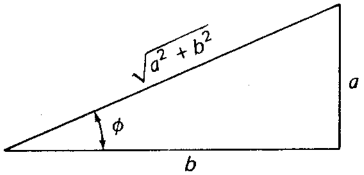


Figura 5.3

Figura 5.4. La amplitud es 5 pul, o $\frac{5}{12}$ pies, el período es $2\pi/8 = \pi/4$ segundos y la frecuencia es el recíproco del período, ó $4/\pi$ ciclos por segundo. En general si un movimiento se puede describir

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{17}$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} \text{amplitud} = A, \ \text{período} = T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \text{frecuencia} = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Del último enunciado, tenemos la relación $\omega = 2\pi f$, la cual a menudo es útil.

El movimiento armónico simple ocurre en muchos otros casos además de las vibraciones de resortes como en el movimiento del péndulo de un reloj de abuelo, el balanceo de un barco o un avión, etc. Discutimos algunos de éstos en los ejercicios y también en secciones posteriores.

EJERCICIOS A

1. Un peso de 2 lb suspendido de un resorte lo estira 1,5 pul. Si el peso se hala 3 pul por debajo de la posición de equilibrio y se suelta: (a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones que describan el movimiento. (b) Encuentre la velocidad y posición del peso como una función del tiempo. (c) Encuentre la amplitud, período y frecuencia del movimiento. (d) Determine la posición, velocidad y aceleración $\pi/64$ seg después de soltar el peso.

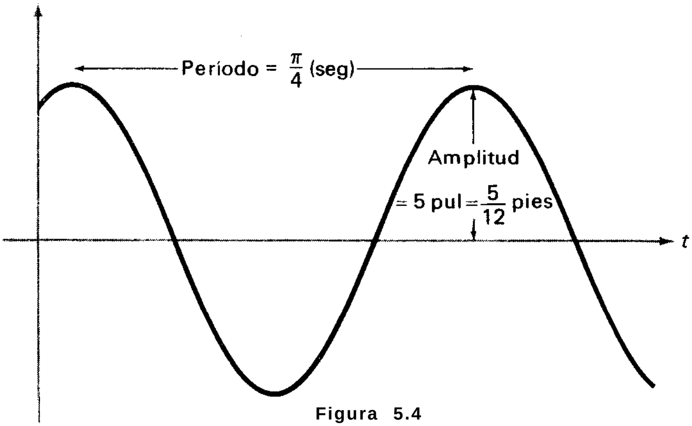


Figura 5.4

2. Un peso de 3 lb en un resorte lo estira 6 pul. Cuando se alcanza el equilibrio el peso se golpea con una velocidad hacia abajo de 2 pies/seg. Encuentre: (a) la velocidad y posición del peso en tiempo t seg después del impacto; (b) la amplitud, período y frecuencia; (c) la velocidad y aceleración cuando el peso está 1 pul por encima de la posición de equilibrio y se mueve hacia arriba.

3. Un resorte suspendido de un techo tiene una constante de 12 lb/pie. Un peso de 8 lb se coloca en el resorte, y cuando se alcanza el equilibrio, el peso se eleva 5 pul por encima de la posición de equilibrio y se suelta. Describa el movimiento dando la amplitud, período y frecuencia.

4. Resuelva el Ejercicio 3 si el peso se eleva 5 pul y luego se golpea hacia arriba con una velocidad de 5 pies/seg.

5. Un resorte se estira 2 cm por una fuerza de 40 dinas. Se coloca una masa de 1 g en el resorte, y cuando se alcanza el equilibrio, la masa se eleva 5 cm por encima de la posición de equilibrio y luego se suelta. (a) Encuentre la amplitud, período y frecuencia de la vibración. (b) ¿En qué tiempos la partícula está 2,5 cm por encima de la posición de equilibrio?

6. Un peso de 256 lb está suspendido de un resorte vertical el cual tiene una constante de 200 lb/pie. Si el peso se eleva 3 pul por encima de su posición de equilibrio y se suelta: (a) Encuentre la posición del peso en un tiempo $\pi/3$ seg después y determine en cuál dirección y qué tan rápido se está moviendo el peso en este tiempo. (b) Encuentre la amplitud, período y frecuencia de la vibración. (c) ¿En qué tiempos está el peso 1,5 pul por debajo de la posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo?

7. Una partícula se mueve a lo largo del eje x hacia el origen 0 bajo la influencia de una fuerza de atracción en 0 la cual varía directamente con la distancia de la partícula de 0. En t = Cl la partícula está a 4 cm de 0 y se mueve hacia 0 con velocidad de 6 cm/seg y aceleración de 16 cm/seg^2 . (a) Encuentre la velocidad y posición como una función del tiempo. (b) Encuentre la amplitud, período y frecuencia del movimiento. (c) Encuentre la velocidad y aceleración máxima.

8. Una partícula de 2 g de masa se mueve en el eje x atraída hacia el origen 0 por una fuerza que es directamente proporcional a su distancia de 0. En $t = 0$ la partícula pasa por 0 con velocidad de 20 cm/seg. La fuerza sobre la partícula es de 100 dinas a 2 cm de 0. (a) Encuentre la posición, velocidad y aceleración como una función del tiempo. (b) Encuentre la amplitud, período y frecuencia de la vibración. (c) Encuentre la fuerza sobre la partícula en $t = \pi/4$.

9. Una partícula parte del reposo a una distancia de 10 cm de un punto fijo 0. Se mueve a lo largo de una recta horizontal hacia 0 bajo la influencia de una fuerza de atracción en 0. Esta fuerza en cualquier tiempo varía con la distancia de la partícula de 0. Si la aceleración de la partícula es 9 cm/seg^2 dirigida hacia 0 cuando la partícula está a 1 cm de 0, describa el movimiento.

10. Una partícula parte del reposo a 1 pie de un punto fijo 0. Se mueve a lo largo de una línea horizontal hacia 0 sujeta a una fuerza de atracción en 0 la cual varía directamente con su distancia de 0. La aceleración de la partícula es de 8 pies/seg^2 hacia 0 cuando está a $\frac{1}{2}$ pie de 0. (a) Encuentre la velocidad cuando la partícula está a $\frac{1}{2}$ pie de 0. (b) Encuentre la amplitud, período y frecuencia del movimiento. (c) Determine la posición, velocidad y aceleración después de $\pi/16$ seg.

11. Una partícula parte del reposo a 20 cm de un punto fijo 0. Se mueve a lo largo de una línea horizontal hacia 0 bajo una fuerza de atracción en 0 la cual varía directamente con su distancia de 0. En 0 su velocidad es 40 cm/seg. (a) Encuentre su velocidad y aceleración a 10 cm de 0. (b) Determine la amplitud, período y

frecuencia del movimiento. (c) Encuentre su posición, velocidad y aceleración después de $\pi/3$ seg. (d) Encuentre los tiempos cuando la partícula pasa por 0.

EJERCICIOS B

1. Un peso W suspendido de un resorte vertical produce un estiramiento de magnitud a. Cuando el peso está en equilibrio se le aplica una fuerza que le da una velocidad v_0 hacia abajo. Muestre que el peso viaja una distancia $v_0\sqrt{a/g}$ por un tiempo $(\pi/2)\sqrt{a/g}$ antes de que empiece a regresar.

2. Un peso W en un resorte vertical con constante k está oscilando con movimiento armónico simple. Cuando el peso alcanza su posición más baja recibe un golpe el cual le imparte una velocidad v_0 hacia abajo. Asumiendo que esto no afecta las propiedades del resorte, muestre que el resorte oscila con el mismo período de antes pero tiene una nueva amplitud dada por $\sqrt{A^2 + (Wv_0^2/gk)}$, donde A_0 *es* la amplitud original.

3. Cuando un peso al extremo de un resorte se pone en movimiento, el período es 1,5 seg. Después de añadirle un peso de 8 lb, el período es de 2,5 seg. ¿Cuánto peso estaba originalmente en el resorte?

4. Un resorte oscila verticalmente. La velocidad y aceleración máximas están dadas respectivamente, por v_m y a_m. Muestre que el período de oscilación es $2\pi v_m/a_m$, y la amplitud es v_m^2/a_m.

5. Un resorte oscila con amplitud A y período T. Muestre que la velocidad máxima ocurre en el centro de la trayectoria y tiene magnitud $2\pi A/T$, mientras que la aceleración máxima ocurre en los extremos de la trayectoria y tiene magnitud $4\pi^2 A/T^2$.

6. Si se taladrara un hueco a través del centro de la Tierra, uno encontraría que un objeto colocado en él está bajo la influencia de una fuerza de atracción que varía directamente con la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra. Asumiendo que la Tierra es una esfera de 400 millas de radio: (a) Encuentre el tiempo para que un objeto que se deja caer en el hueco regrese. (b) Encuentre su velocidad al pasar por el centro de la Tierra.

EJERCICIOS C

1. Un resorte reposa tenso pero sin estirar en una mesa horizontal. Un extremo esta acoplado a un punto 0 en la mesa y el otro a un peso W. El peso se desplaza para que el resorte se estire una distancia a y luego se suelta. Si el coeficiente de fricción entre el peso y la mesa es μ, y si la constante del resorte es k, muestre que cuando el resorte regrese a su posición sin estiramiento la magnitud de su velocidad es

$$\sqrt{\frac{g}{W}(ka^2 - 2\mu W a)}$$

y que esto toma un tiempo dado por $\sqrt{\frac{W}{gk}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\mu W}{ka - \mu W}\right)\right]$

2. Cuando el resorte del ejercicio anterior está en su posición sin estiramiento, al peso W se le da una velocidad v_0 alejándolo de 0. Muestre que viaja una distancia

$$\sqrt{\frac{\mu^2 W^2}{k^2} \quad \frac{W v_0^2}{gk}} \quad \frac{\mu W}{k}$$

antes de empezar a regresar, y que esto toma el tiempo dado por

$$\sqrt{\frac{W}{gk}}\left(\cot^{-1}\frac{\mu}{v_0}\sqrt{\frac{gW}{k}}\right)$$

3. Compare los Ejercicios 1 y 2 con los Ejercicios B1 y 2.
4. Una partícula se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x descrito por la ecuación $x = a$ sen wt. (a) Muestre que la probabilidad de hallar la partícula entre las posiciones x_1 y x_2, donde $-a \leqq x_1 < x_2 \leqq a$, está dada por

$$\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{sen}^{-1}\frac{x_2}{a} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x_1}{a}\right\}$$

(b) ¿Dónde espera usted que estaría la mayor probabilidad de hallar la partícula? Explique.
5. (a) Refiriéndose al Ejercicio 4, muestre que si $F(x)$ es la probabilidad de hallar la partícula a la izquierda de x entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(v)dv \text{ donde } P(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| \leqq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Con frecuencia llamamos F(z) la función de ***distribución y P(n) la función de densidad.*** (b) Muestre que la raíz media cuadrática del desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio es $a/\sqrt{2}$.
6. Trabaje el Ejercicio 6B para el caso donde el hueco conecta dos puntos en la superficie de la Tierra pero no pasa por el centro de la Tierra.

1.2 EL RESORTE VIBRANTE CON AMORTIGUAMIENTO. MOVIMIENTO SOBRE AMORTIGUADO Y CRITICAMENTE AMORTIGUADO

Los resortes vibrantes acabados de considerar no fueron muy reales, puesto que las oscilaciones no disminuían, como uno esperaría por experiencia, sino por el contrario se mantenían por siempre. En la práctica, fuerzas de fricción y otras (tales como la resistencia del aire) actúan para decrecer la amplitud de las oscilaciones y finalmente traer el sistema al reposo. Una manera para obtener una mejor aproximación a la realidad es asumir una fuerza ***amortiguadora.*** La ley exacta para esta fuerza no se conoce, puesto que depende de muchos factores variables, pero se ha encontrado de experimentos que para velocidades pequeñas, la magnitud de la fuerza amortiguadora es aproximadamente proporcional a la velocidad instantánea del peso en el resorte. La magnitud por tanto está dada por

$$\beta\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

donde β es la constante de proporcionalidad llamada la ***constante de amortiguamiento.*** La fuerza amortiguadora se opone al movimiento de modo que cuando el peso va bajando la fuerza amortiguadora actúa hacia arriba, mientras que actúa hacia abajo cuando el peso va subiendo. Asumiendo hacia abajo como la dirección positiva, como lo hicimos antes, vemos que la fuerza amortiguadora debe ser negativa cuando dx/dt sea positiva, y debe ser positiva cuando dx/dt sea negativa. Así, con $\beta > 0$, es claro que la fuerza amortiguadora debe estar dada tanto en magnitud como en dirección por $-\beta\, dx/dt$. Cuando se tienen en cuenta las fuerzas restauradoras ya consideradas, sigue por la ley de Newton que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} - kx \quad \text{o} \quad \frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Asuma que una fuerza amortiguadora, dada en libras numéricamente por 1,5 veces la velocidad instantánea en pies por segundo, actúa sobre el peso en el Ejemplo ilustrativo 1, página 225. (a) Establezca la ecuación diferencial y condiciones asociadas. (b) Encuentre la posición x del peso como una función del tiempo t.

Formulación matemática. Teniendo en cuenta la fuerza amortiguadora $-1{,}5\, dx/dt$ en el Ejemplo ilustrativo 1, encontramos la ecuación del movimiento

$$\frac{6}{32}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 1.5\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 0 \tag{19}$$

Las condiciones iniciales son las del Ejemplo ilustrativo 1:

$$x = \tfrac{1}{3} \text{ en } t = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ en } t = 0 \tag{20}$$

Solución. La ecuación auxiliar correspondiente a (19) tiene raíces $m = -4 \pm 4\sqrt{3}i$, de modo que su solución general es

$$x = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\,\text{sen}\, 4\sqrt{3}t)$$

Determinando las constantes A y B sujetas a las condiciones (20), encontramos

$$x = \tfrac{1}{9}e^{-4t}(3\cos 4\sqrt{3}t + \sqrt{3}\,\text{sen}\, 4\sqrt{3}t) \tag{21}$$

Si hacemos uso de la identidad en (14), página 228, (21) se puede escribir

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}\,\text{sen}\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right) \tag{22}$$

El gráfico de (22), mostrado en la Figura 5.5, está entre los gráficos de

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t} \quad \text{y} \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$$

(líneas punteadas en la Figura 5.5), puesto que el seno varía entre -1 y $+1$.

La diferencia entre los tiempos de los máximos (o mínimos) sucesivos de este gráfico se puede mostrar que es constante e igual a $2\pi/4\sqrt{3}$ (ver Ejercicio 2 de los Ejercicios B). Se debería notar que los máximos (o mínimos) del gráfico no están sobre las curvas punteadas como se podría imaginar (ver Ejercicio 2 y 4 de los Ejercicios B). Así, como se muestra en la Figura 5.5, el punto P representa un mínimo relativo, mientras que el punto Q está sobre la curva punteada. La diferencia constante en tiempos entre máximos (o mínimos) sucesivos se llama cuasi período, aunque algunas veces nos referimos a éste como el período. El adjetivo cuasi se usa, puesto que los valores funcionales no se repiten como lo harían si realmente hubiera periodicidad. El cuasi período es también igual al doble del tiempo tomado entre ceros sucesivos, esto es, el doble del tiempo entre los pasajes sucesivos del peso por la posición de equilibrio (ver el Ejercicio 4 de los Ejercicios B).

El movimiento descrito en este ejemplo se llama movimiento *oscilatorio amortiguado* o movimiento *amortiguado.* Se debería notar que (22) tiene la forma

$$x = \mathscr{A}(t)\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{23}$$

donde $$\mathscr{A}(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}, \qquad \omega = 4\sqrt{3}, \qquad \phi = \frac{\pi}{3}$$

El cuasi período está dado por $2\pi/\omega = 2\pi/4\sqrt{3}$.

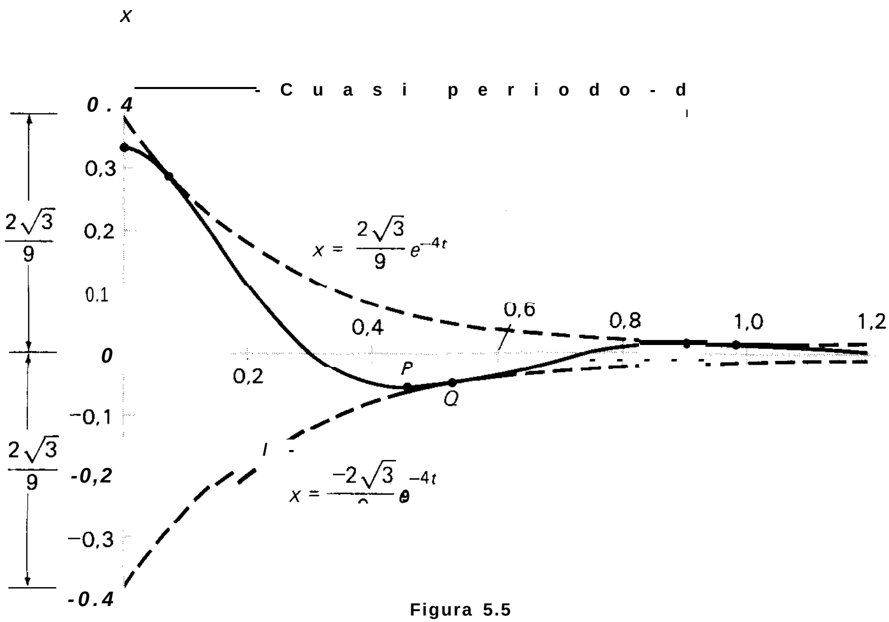


Figura 5.5

Por analogía con el caso no amortiguado, $\mathscr{A}(t)$ se llama la *amplitud, o* más exactamente la *amplitud tiempo variante.* Se ve que la amplitud decrece con el tiempo, estando así de acuerdo con nuestra experiencia. Un hecho que se debería notar es que la frecuencia con amortiguamiento es menor que aquella sin amortiguamiento. Esto es plausible puesto que uno esperaría oposición al movimiento para incrementar el tiempo para un ciclo completo. La frecuencia sin amortiguamiento, esto es, con $\beta = 0$, a menudo se llama la *frecuericia natural.* Esta es de gran importancia en conexión con el fenómeno de resonancia a ser discutido posteriormente.

La fuerza amortiguadora puede ser demasiado grande comparada con la fuerza restauradora para permitir el movimiento oscilatorio. Consideramos esta situación en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

En el Ejemplo ilustrativo 1, página 225, asuma que se tiene en cuenta una fuerza amortiguadora en libras numéricamente igual a 3,75 veces la velocidad instantánea. Encuentre x como una función de t.

Formulación matemática. Teniendo en cuenta la fuerza amortiguadora de $-3{,}75\,dx/dt$ en la ecuación diferencial. encontramos

$$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 3.75\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0 \tag{24}$$

Las condiciones iniciales son como antes dadas por (20).

Solución La ecuación auxiliar tiene raíces $m = -4, -16$. De donde,

$$x = Ae^{-4t} + Be^{-16t} \tag{25}$$

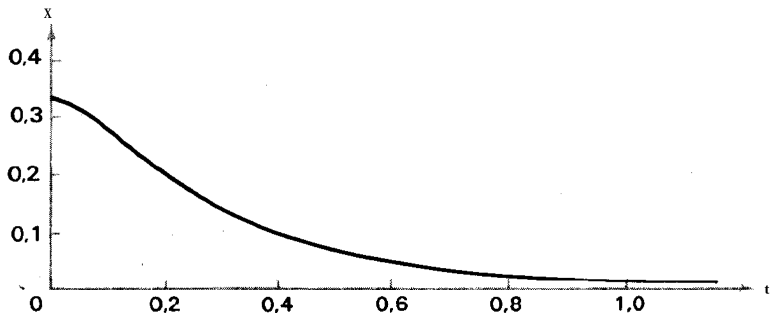


Figura 5.6

Usando las condiciones (20), encontramos $x = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}$. El gráfico aparece en la Figura 5.6. Se ve que no ocurren oscilaciones; el peso tiene tanto amortiguamiento que solo retorna gradualmente a la posición de equilibrio sin pasar por ésta. Este tipo de movimiento se llama ***movimiento sobre amortiguado***.

Un caso interesante ocurre cuando el amortiguamiento es tal que cualquier disminución en éste se producen oscilaciones. El movimiento está entonces ***críticamente amortiguado.***

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En vez de 3,75 en el Ejemplo ilustrativo 4, use 3, y encuentre x como una función de t.

Formulación matemática. La ecuación se convierte en

$$\frac{6}{32}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 3\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 64x = 0 \tag{26}$$

y las condiciones iniciales son todavía $x = \frac{1}{3}$ en $t = 0$ y $dx/dt = 0$ en $t = 0$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar son $-8, -8$. De donde

$$x = Ae^{-8t} + Bte^{-8t}$$

y usando las condiciones en $t = 0$ tenemos

$$x = \tfrac{1}{3}e^{-8t} + \tfrac{8}{3}te^{-8t} \qquad (27)$$

El gráfico aparece en la Figura 5.7 (curva gruesa) y se compara con la curva de la Figura 5.6 (línea punteada en la Figura 5.7). Un pequeño decremento en el amortiguamiento produciría oscilaciones tales como se muestran en la Figura 5.5.

Es interesante investigar lo que pasaría si las condiciones iniciales en los ejemplos ilustrativos anteriores se cambiaran. Será claro sin pensarlo demasiado que tal modificación no podría cambiar un movimiento amortiguado o críticamente amortiguado en movimiento oscilatorio. Sin embargo algunas características del movimiento pueden cambiarse.

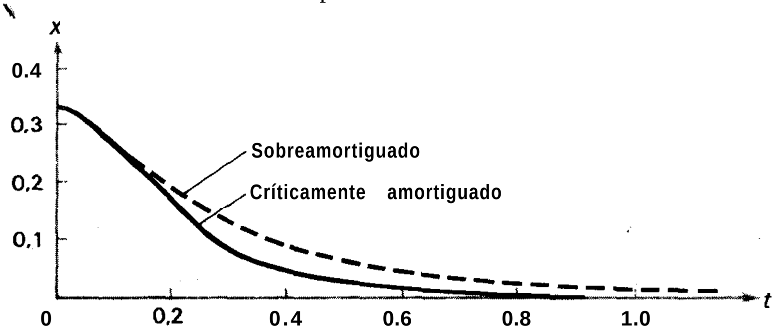


Figura 5.7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Asuma la ecuación diferencial del Ejemplo ilustrativo 5 pero cambie las condiciones iniciales a $x = 0$, $dx/dt = 5$ en $t = 0$.

Solución La solución a la ecuación diferencial es, como en el Ejemplo ilustrativo 5, $x = Ae^{-8t} + Bte^{-8t}$. Usando las condiciones dadas, encontramos

$$x = 5te^{-8t}$$

El gráfico aparece en la Figura 5.8. Para interpretar este movimiento, observe que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio y le es dado una velocidad hacia abajo (dirección positiva) de 5 pies/seg. Viaja hasta que alcanza un desplazamiento máximo (punto P en la figura) y luego regresa lentamente a la posición de equilibrio, nunca sobre pasándolo. El desplazamiento máximo, ocurre después de $\frac{1}{8}$ seg, y se encuentra que aproximadamente es 2,8 pul.

El movimiento amortiguado puede por supuesto ocurrir en muchas otras conexiones. además de los resortes y es la base de variadas aplicaciones importantes. Algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo 1. Los amortiguadores en un automóvil ofrecen la amortiguación que se necesita para reducir vibraciones y así ofrecer una más suave y segura conducción.

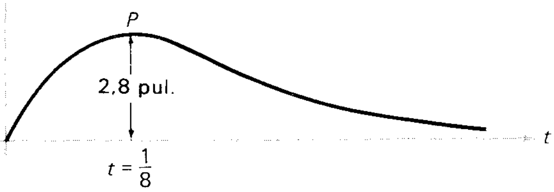


Figura 5.8

Ejemplo 2. En una puerta contravidriera existe un tornillo ajustable el cual ofrece suficiente amortiguación para cerrarla sin golpeteo 0 sin que permanezca abierta.

Ecuaciones análogas a las dadas anteriormente para un resorte sirven de modelos para tales aplicaciones. Como una ilustración de tal ecuación consideremos la puerta contravidriera del Ejemplo 2. Suponga que una vista superior de la puerta abierta está representada por OA en la Figura 5.9, mientras que OB representa la vista superior de la puerta cuando está cerrada. Sea ϕ el ángulo que la puerta OA forma con OB en cualquier tiempo t. Entonces la ecuación diferencial para ϕ está dada por

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\beta\frac{d\phi}{dt} - k\phi \quad \text{o} \quad I\frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta\frac{d\phi}{dt} + k\phi = 0 \tag{28}$$

Podemos llegar a (28) si usamos el resultado de física elemental que

$$\mathscr{T} = Ir \tag{29}$$

donde

1. $\mathscr{T}$ es el *torque* neto o efecto tornante tendiente a producir rotación de un objeto alrededor de un eje.

2. I *es* el *momento de inercia* del objeto alrededor del eje,

3. α *es* la *aceleración angular* del objeto alrededor del eje.

Ahora habrá dos torques actuando sobre la puerta, un *torque restaurador* tendiente a regresar la puerta a la posición de equilibrio OB, el cual es proporcional al ángulo ϕ y dado por $k\phi$, *y* un *torque de amortiguamiento* proporcional a la velocidad angular $d\phi/dt$ y dado por $\beta\, d\phi/dt$. Puesto que estos torques tienden a oponerse al movimiento hacia afuera de la puerta, el torque neto es

$$-\beta\frac{d\phi}{dt} - k\phi \tag{30}$$

Pero puesto que el torque neto es igual al momento de inercia I de la puerta alrededor de su eje multiplicado por la aceleración angular $d^2\phi/dt^2$ de la puerta, esto es,

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} \tag{31}$$

tenemos al igualar (30) y (31) el resultado (28).

La ecuación (28) también puede representar las vibraciones de un barco. o un avión alrededor de su eje a través del centro de gravedad (ver Ejercicio SC).

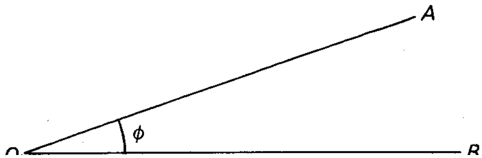


Figura 5.9

EJERCICIOS A

1. Un peso de 4 lb suspendido de un resorte lo estira 3 pul. El peso se hala 6 pul *por* debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Asuma que sobre el peso actúa una fuerza amortiguadora que numéricamente en libras es igual a $2v$, donde v es la velocidad instantánea en pies por segundo. (a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones, que describan el movimiento. (b) Determine la posición del resorte en cualquier tiempo después de haber soltado el peso. (c) Escriba el resultado de (b) en la forma $\mathscr{A}(t)$ sen $(\omega t + \phi)$. Así, determine la amplitud tiempo variante, cuasi período, y el ángulo de fase.
2. Un peso de 2 lb suspendido de un resorte lo estira 6 pul. Una velocidad de 5 pies/seg hacia arriba se le imparte al peso en su posición de equilibrio. Asuma una fuerza amortiguadora numéricamente igual en libras a $0{,}6v$, donde v es la velocidad instantánea en pies por segundo. (a) Encuentre la posición y velocidad del resorte en cualquier tiempo. (b) Escriba el resultado de (a) en la forma $\mathscr{A}(t)$ sen $(\omega t + \phi)$.
3. Un peso de 64 lb está suspendido de un resorte con constante 50 lb/pie. El peso está bajo la influencia de una fuerza resistente numéricamente en libras igual a 12 veces la velocidad instantánea en pies por segundo. Si el peso se hala 6 pul por debajo de la posición de equilibrio y se suelta, describa el movimiento, dando la amplitud tiempo variante y el cuasi período del movimiento.
4. Un resorte se- estira 10 cm por una fuerza de 1.250 dinas. Una masa de 5 g se suspende del resorte y, después de que está en equilibrio, se hala hacia abajo 20 cm y se suelta. Asumiendo que hay una fuerza amortiguadora numéricamente en dinas igual $30v$, donde v es la velocidad instantánea en centímetros por segundo, encuentre (a) la posición, y (b) la velocidad en cualquier tiempo.
5. Trabaje el Ejercicio 4 si la masa se hala hacia abajo 20 cm y luego se le da una velocidad de 120 cm/seg (a) hacia abajo; (b) hacia arriba.
6. Un peso de 2 lb en un resorte lo estira 1,5 pul. El peso se hala 6 pul por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Asuma una fuerza amortiguadora en libras numéricamente igual a $2v$, donde v es la velocidad instantánea en pies por segundo. (a) Encuentre la posición del peso encualquier tiempo. (b) Determine si el movimiento es sobreamortiguado o críticamente amortiguado.
7. En el Ejercicio 6 asume que las condiciones iniciales se modifican de modo que el peso se le da una velocidad 'hacia abajo de 10 pies/seg cuando está en la posición de equilibrio. Encuentre (a) la posición y velocidad en cualquier tiempo, (b) el desplazamiento máximo del peso desde la posición de equilibrio.
8. Un peso de 3 Ib en un resorte lo estira 6 pul. Asumiendo una fuerza amortiguadora en libras numéricamente igual a βv, donde v es la velocidad instantánea en pies por segundo y $\beta > 0$, muestre que el movimiento es (a) críticamente amortiguado si $\beta = 1{,}5$, (b) sobreamortiguado si $\beta > 1{,}5$, (c) oscilatoria si $\beta < 1{,}5$.

EJERCICIOS B

1. La ecuación diferencial para el movimiento de una masa m suspendida de un resorte vertical de constante k, si se tiene en cuenta el amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea, es $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$, donde los puntos denotan diferenciación con respecto a t. Muestre que oscilaciones amortiguadas se presentarán si la constante de amortiguamiento es lo suficientemente pequeña para que $\beta < 2\sqrt{km}$ y que x está dado por x = Ce- $^{\beta t/2m}$ sen $(wt + \phi)$, donde

$$w = \sqrt{k/m - \beta^2/4m^2}$$

y C y ϕ representa dos constantes arbitrarias

2. (a) Muestre que los tiempos en los cuales x = Ce $^{-\alpha t}$ sen (wt $+ \phi$) es un máximo (en valor absoluto) están dados por t_1, t_2, , donde

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left[\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha} + (n-1)\pi - \phi\right]$$

Así muestre que el cuasi período es $2\pi/w$. (b) Muestre que el cuasi período para el movimiento descrito en el Ejercicio 1 es mayor que el período natural (recíproco de la frecuencia natural).

3. Usando el resultado del Ejercicio 2 (a) muestre que las distancias sucesivas máximas desde la posición de equilibrio están dadas por $x_n = Ce^{-\beta t_n/2m}\sqrt{1-\beta^2/4mk}$ donde t_n está dado en el Ejercicio 2(a).

Luego, muestre que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\beta\pi/2m\omega}$ esto es, los vaivenes sucesivos decrecen en progresión geométrica.
En ingeniería, la cantidad $\beta\pi/2mw$ se llama el *decremento logarítmico.*

4. (a) Muestre que los tiempos en los cuales x = Ce- $^{\alpha t}$ sen $(wt + \phi)$ intersecta las curvas $x =$ Ce- $^{\alpha t}$ y $x =$ Ce- $^{\alpha t}$ están dados por

$$\tau_n = \frac{1}{\omega}\left[(2n-1)\frac{\pi}{2} - \phi\right], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

De donde, muestre que el cuasi período puede también obtenerse al considerar la diferencia de los tiempos sucesivos donde $\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 1$ (ó $-$ 1). Compare con el Ejercicio 2(a) anterior. (b) Sea X_1, X,, los valores absolutos de los valores sucesivos de x correspondientes a los tiempos τ_1, τ_2,. Muestre que

$$\frac{X_{n+1}}{X_n}\ e^{-\beta\pi/2m\omega}$$

y compare con el resultado del Ejercicio 3.

5. Compare los tiempos t_n y τ_n de los Ejercicios 2 y 4, respectivamente, y muestre que

$$\omega(\tau_n - t_n) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha} = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\omega}$$

También muestre que $\tau_n > t_n$ y que $\tau_n - t_n$ llega a ser cada vez más pequeño a medida que el amortiguamiento disminuye.

EJERCICIOS C

1. Una masa m está suspendida verticalmente de un resorte con constante k. En $t = 0$ la masa es golpeada para así darle velocidad v_0 hacia abajo. Una fuerza amortiguadora βv, donde v es la velocidad instantánea y β es una constante positiva,

actúa sobre la masa. El amortiguamiento es tan grande que $\beta > 2\sqrt{km}$. (a) Muestre que la posición instantánea de la masa en cualquier tiempo $t > 0$ es

$$x = \frac{v_0}{\gamma} e^{-\beta t/2m} \operatorname{senh} \gamma t \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 - 4km}}{2m}$$

medida desde la posición de equilibrio. (b) Muestre que la **masa** viaja hacia abajo por un tiempo

$$\frac{1}{\gamma} \tanh^{-1} \frac{2m\gamma}{\beta}$$

y luego regresa gradualmente a la posición de equilibrio pero nunca la alcanza. Note que el tiempo es independiente de v_0. (c) Discuta el caso $\gamma \to 0$ y compare con el Ejercicio 1B.

2. Resuelva el problema anterior en el caso de que la masa se hale una distancia x_0 por debajo de su posición de equilibrio y luego se la da la velocidad v_0 hacia abajo.
3. Una masa m está suspendida verticalmente de un resorte con constante k. La masa se hala x_0 por debajo de su posición de equilibrio y se le da una velocidad v_0 hacia abajo. Una fuerza amortiguadora βv, donde v es la velocidad instantánea y β es una constante positiva, actúa sobre la masa. Muestre que si la masa se escoge tal que $m = \beta^2/4k$, entonces viaja hacia abajo por un tiempo dado por

$$\frac{\beta^2 v_0}{2k(2kx_0 + \beta v_0)}$$

y luego regresa gradualmente a la posición de equilibrio.
4. Interprete los resultados del Ejercicio 3 si $\beta v_0 = -2kx_0$.
5. Obtenga la solución general de la ecuación (28), página 237, e interprete físicamente.
6. Sea Z para representar el momento de inercia de un barco (o avión) alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad y en la dirección del frente hacia atrás. Muestre cómo la ecuación (28) se puede usar para describir las oscilaciones que ocurren.
7. Trabaje el Ejercicio 6 si Z es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad pero teniendo la dirección de lado a lado.

1.3 EL RESORTE CON FUERZAS EXTERNAS

En las páginas previas discutirnos el problema de un resorte donde solo se consideraron las fuerzas restauradora y amortiguadora. Consideramos ahora casos donde pueden actuar otras fuerzas externas que varían con el tiempo. Tales fuerzas pueden ocurrir, por ejemplo, cuando el soporte que sostiene el resorte se mueve arriba y abajo en una manera especificada tal como en movimiento periódico, o cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja. Si denotamos la fuerza externa por F(t), la ecuación diferencial para el movimiento es

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F(t) \quad \text{o} \quad \frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

la cual puede escribirse $\quad a \dfrac{d^2x}{dt^2} + b \dfrac{dx}{dt} + cx = F(t) \qquad (32)$

(donde a = W/g, $b = \beta$, c = k), a menudo llamada la ecuación de ***vibraciones forzadas.***

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

En el Ejemplo ilustrativo 3, página 233, asuma que una fuerza externa periódica dada por F(t)= 24 $\cos 8t$ está actuando. Encuentre x en términos de t, usando las condiciones dadas allí.

Formulación matemática. La ecuación diferencial es

$$\frac{6}{32}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 1{,}5\frac{dx}{dt} + 24\cos 8t \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128\cos 8t \tag{33}$$

y las condiciones iniciales son $x = \frac{1}{3}$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$.

Solución La solución complementaria de (33) es

$$x_c = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\operatorname{sen}4\sqrt{3}t)$$

Si asumimos como solución particular a sen $8t + b\cos 8t$, encontramos $a = 2$, $b = 0$. De donde, la solución general de (33) es

$$x = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\operatorname{sen}4\sqrt{3}t) + 2\operatorname{sen}8t$$

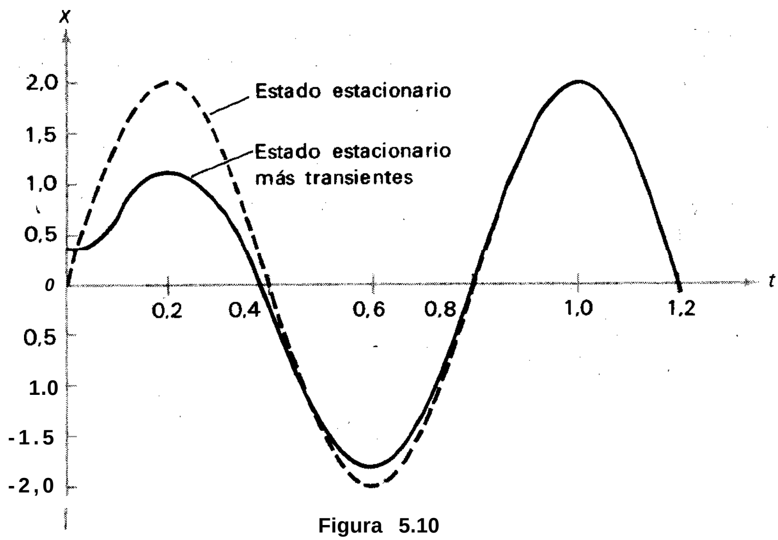


Figura 5.10

Usando las condiciones iniciales, tenemos $A = \frac{1}{3}$, $B = -11\sqrt{3}/9$ y así,

$$x = \frac{e^{-4t}}{9}(3\cos 4\sqrt{3}t - 11\sqrt{3}\operatorname{sen}4\sqrt{3}t) + 2\operatorname{sen}8t \tag{34}$$

El gráfico de (34) aparece en la Figura 5.10. Se observará que el término en (34) que involucra e^{-4t} llega a ser despreciable cuando t es grande. Estos términos se llaman ***términos trunsientes*** y sólo son significativos cuando t está cerca de cero. Estos términos transientes en la solución cuando son significativos, algunas veces se llaman la ***solución transiente.*** Cuando los términos transientes son despreciables el término $2\operatorname{sen} 8t$ permanece. Este se llama el ***término de estado estacionario o solución de estado estacionario,*** puesto que éste indica el comportamiento dèl sistema cuando las condiciones se han estabilizado. Se ve que la solución de estado estacionario (curva punteada en la Figura 5.10) es periódica y tiene el mismo período al de la fuerza externa aplicada.

EJERCICIOS A

1. Un resorte vertical con constante de 5 lb/pie tiene suspendido un peso de 16 lb. Se aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 24$ sen $10t$, $t \geqq 0$. Se asume que actúa una fuerza amortiguadora dada numéricamente en libras por $4v$, donde v es la velocidad instantánea del peso en pies por segundo. Inicialmente el peso está en reposo en su posición de equilibrio. (a) Determine la posición del peso en cualquier tiempo. (b) Indique las soluciones transiente y de estado estacionario. (c) Encuentre la amplitud, período y frecuencia de la solución de estado estacionario.

2. Un resorte vertical con constante de 8 lb/pie tiene suspendido un peso de 64 lb. Se aplica una fuerza dada por $F(t) = 16 \cos 4t$, $t \geqq 0$. Asumiendo que al peso, inicialmente en la posición de equilibrio, se le da una velocidad hacia arriba de 10 pies/seg y que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y velocidad del peso en cualquier tiempo.

3. Un resorte se estira 10 cm por una fuerza de 500 dinas. Una masa de 2 g está suspendida del resorte y se le permite que llegue al equilibrio. Luego se le aplica una fuerza dada en dinas por $F(t) = 200$ sen $5t$, $t \geqq 0$. Asumiendo que hay una fuerza amortiguadora dada numéricamente en dinas por $20v$, donde v es la velocidad instantánea en centímetros por segundo, encuentre la posición de la masa (a) en cualquier tiempo; (b) después de un tiempo largo.

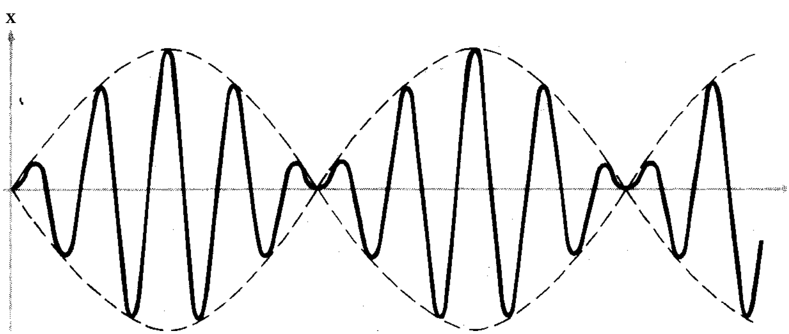


Figura 5.11

EJERCICIOS B

1. El movimiento de una masa en un cierto resorte vertical está descrito por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 36 \cos 8t, \quad x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en } t = 0$$

donde x es la distancia instantánea de la masa desde la posición de equilibrio, la dirección positiva se toma hacia abajo. (a) Dé una interpretación física al problema. (b) Muestre que la solución puede escribirse $x = 2$ sen t sen $9t$. (c) Muestre que el gráfico de x como una función de t es similar al de la Figura 5.11.

La solución puede escribirse $x = \mathscr{A}(t)$ sen $9t$, donde $\mathscr{A}(t)$ = sen t se llama la amplitud tiempo variante y es una función que varía lentamente (período $= 2\pi$) en comparación con la onda sen $9t$ (período $= 2\pi/9$). La onda sen $9t$ se llama la ***amplitud modulada.*** En la teoría de acústica estas fluctuaciones de amplitud se llaman ***pulsaciones,*** los sonidos altos correspondiendo a las amplitudes grandes. Pulsaciones pueden ocurrir cuando dos diapasones que tienen casi igual frecuencia se ponen a vibrar simultáneamente. Un uso práctico de esto está en el afinamiento de pianos (u otros instrumentos) donde el afinamiento exitoso se marca ajustando la frecuencia de una nota a la de una estándar hasta que se eliminen las pulsaciones. El fenómeno es también importante en las teorías de óptica y electricidad.

2. Trabaje el Ejercicio 1 si las condiciones iniciales se cambian de modo que
   (a) $x = 6$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$. (b) $x = 0$, $dx/dt = 10$ en $t = 0$.
   (c) $x = 6$, $dx/dt = 10$ en $t = 0$.

EJERCICIOS C

1. Un resorte de constante k con una masa acoplada m está suspendido de un soporte que oscila alrededor de la línea OP (Fig. 5.12) de modo que la distancia instantánea del soporte de OP es $A \cos\omega t$, $t \geq 0$, donde A es constante. Sea x para representar el estiramiento instantáneo del resorte.

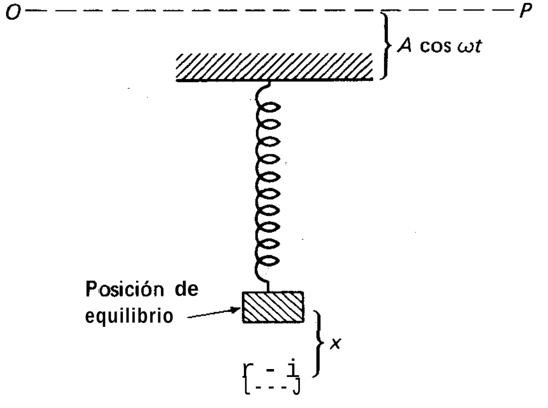


Figura 5.12

(a) Muestre que si el amortiguamiento es despreciable la ecuación diferencial del movimiento de la masa es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mA\omega^2 \cos \omega t$$

(b) Si en $t = 0$, $x = 0$ y $dx/dt = 0$, y si w es casi cercano a $\sqrt{k/m}$, muestre que se producen pulsaciones con amplitudes muy grandes las cuales llegan a ser más grandes entre más cerca esté ω de $\sqrt{k/m}$.
(c) Discuta el caso $\omega = \sqrt{k/m}$.

2. Trabaje el Ejercicio 1 si la fuerza está dada por $At \cos \omega t$.

1.4 EL FENOMENO DE RESONANCIA MECANICA

Cuando la frecuencia de una fuerza externa periódica aplicada a un sistema mecánico está relacionada de una manera sencilla (la cual se describirá) con la frecuencia natural del sistema, puede ocurrir resonancia mecánica la cual eleva las oscilaciones a Mes magnitudes tremendas que el sistema puede desplomarse. Una compañía de soldados marchando en fila a través de un puente puede de esta manera hacer que el puente colapse, (y esto realmente sucedió en un desastre famoso) aún cuando el puente hubiera sido lo suficientemente fuerte para soportar muchos más soldados si hubieran marchado fuera de formación, Por esta razón a los soldados se les exige "romper filas" para cruzar un puente. En una manera análoga, puede ser posible que una nota musical de una frecuencia característica propia estalle un cristal. Debido a los grandes daños que pueden ocurrir, la resonancia mecánica es en general algo que necesita ser evitado, especialmente por el ingeniero al diseñar estructuras o mecanismos vibrantes.

Se debería mencionar, sin embargo, que la resonancia mecánica puede también servir para propósitos útiles. Por ejemplo, si un automóvil se quedara atascado en la nieve (o barro), puede, al "mecerlo", ser puesto a vibrar con su frecuencia natural. Entonces, al aplicarle una fuerza con esta misma frecuencia, la resonancia mecánica resultante puede ser algunas veces suficiente para liberarlo. En un aspecto más placentero, la resonancia mecánica también sirve para producir mucho más amplias oscilaciones para un niño o adulto en un columpio.

Los siguientes casos especiales indican las posibles consecuencias de resonancia.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Suponga que una fuerza externa dada por 3 cos $8t$ se aplica al resorte del Ejemplo ilustrativo 1, página 225. Describa el movimiento que resulta si se asume que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio ($x = 0$) y que su velocidad inicial es cero.

Formulación matemática. La ecuación diferencial es

$$\frac{6}{32} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -12x + 3 \cos 8t \quad \text{or} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 16 \cos 8t \tag{35}$$

y las condiciones iniciales son $x = 0$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$.

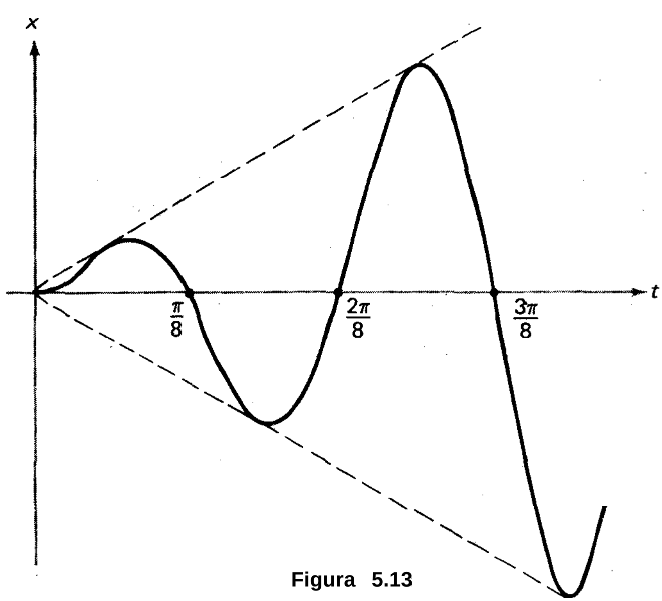


Figura 5.13

Solución La solución complementaria de (35) es $x_c = A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t$. Debemos asumir por solución particular $x_p = t(a \cos 8t + b \operatorname{sen} 8t)$. Sustituyendo en (35) encontramos $a = 0$, $b = 1$. Así, la solución general es

$$x = A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t + t \operatorname{sen} 8t$$

De las condiciones iniciales, rápidamente se encuentra que $A = B = 0$. De donde

$$x = t \operatorname{sen} 8t \tag{36}$$

El gráfico de (36) está entre los gráficos de $x = t$ y $x = -t$ como se muestra en la Figura 5.13. Se ve del gráfico que las oscilaciones van creciendo sin límite. Naturalmente, el resorte está limitado a romperse dentro de un corto tiempo.

Se debería notar que en este ejemplo el amortiguamiento fue ignorado y ocurrió resonancia porque la *frecuencia de la fuerza externa aplicada fue igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado.* Esto es un principio general. En el caso donde ocurre amortiguamiento, las oscilaciones no crecen sin límite pero sin embargo pueden llegar a ser muy grandes. Resonancia en este caso ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa aplicada es ligeramente menor que la frecuencia natural del sistema. Para una mayor discusión de esto vea el Ejercicio 1B.

EJERCICIOS A

1. Un resorte vertical con constante de 4 lb/pie tiene acoplado un peso de 32 lb. Se aplica una fuerza dada por $F(t) = 16 \operatorname{sen} 2t$, $t \geqq 0$. Asumiendo que en $t = 0$ el peso está en reposo en la posición de equilibrio y que la fuerza amortiguadora es despreciable, (a) establezca una ecuación diferencial y condiciones que describan el movimiento; (b) determine la posición y velocidad del peso en cualquier tiempo- (c) muestre que el movimiento es de resonancia.

2. En el problema anterior suponga que en $t = 0$ el peso está 6 pul por debajo de la posición de equilibrio y se golpea para darle una velocidad de 4 pies/seg hacia arriba. Determine la posición y velocidad del peso en cualquier tiempo. ¿El movimiento es de resonancia?

3. Un resorte se estira 20 cm por una fuerza de 8.000 dinas. Una masa de 4 g se suspende del resorte y se le permite llegar al equilibrio. Luego se aplica una fuerza dada por $F(t) = 60 \cos \omega t$, $t \geqq 0$. (a) Asumiendo que el amortiguamiento es despreciable, encuentre la posición de la masa en cualquier tiempo para todo $\omega > 0$. (b) ¿Para qué valores de ω ocurrirá resonancia?

EJERCICIOS B

1. La ecuación de vibración forzada de una masa en un resorte vertical es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = A \cos \omega t, \qquad t \geqq 0$$

donde x es el desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio y m, β, k, A y ω son constantes positivas. (a) Muestre que una oscilación de estado estacionario está dado por

$$x = \frac{A}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + \beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

(b) Muestre que las oscilaciones máximas (resonancia) ocurrirán si ω se escoge tal que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}}$$

con tal que $\beta^2 < 2km$. (c) Muestre que en resonancia, la amplitud de la oscilación varía inversamente con la constante de amortiguamiento β.

2. Discuta el Ejercicio 1 si $\beta^2 \geqq 2km$.

EJERCICIOS C

1. Una masa en un resorte está sometida a vibración forzada dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = A\cos^3\omega t, \qquad t \geqq 0$$

Muestre que hay dos valores de ω en los cuales ocurre resonancia y determínelos.

2. Una masa en un resorte-está sometida a vibración forzada dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \sum_{n=1}^{M} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T}, \qquad t \geqq 0,\ a_n \neq 0$$

(a) Muestre que el período menor de la fuerza externa es T. (b) Muestre que ocurrirá resonancia si T tiene cualquiera de los M valores $2\pi n\sqrt{m/k}$, donde $n = 1, 2, \quad, M$.

Se puede mostrar que una función apropiada $F(t)$ definida en el intervalo $0 \leqq t \leqq T$ y tal que $F(t + T) = F(t)$ fuera del intervalo [esto es, F(t) tiene período T] puede expandirse en una serie

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Tales series se llaman *series de Fourier*. Condiciones bajo las cuales tal expansión es posible y la determinación de las constantes A, a_n, b_n se presentan en el Capítulo ocho.

3. Si $m\, d^2x/dt^2 + kx = F(t)$, $t \geqq 0$ tal que $x = 0$, $dx/dt = 0$ en $t = 0$, muestre que

$$x = \frac{1}{\sqrt{km}}\int_0^t F(u)\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\,du$$

Encuentre x y discuta una posible interpretación física si $F(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqq t \leqq T \\ 0, & t > T \end{cases}$

4. Resuelva el problema anterior si $F(t) = \begin{cases} F_0/\epsilon, & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$

donde F_0 y ϵ son constantes. Discuta el caso $\epsilon \to 0$ e interprete el problema físicamente.

2 Problemas de circuitos eléctricos

En el Capítulo tres, Sección 2, el estudiante aprendió como formular las ecuaciones diferenciales que surgen de ciertos problemas que involucran circuitos eléctricos. El caso donde una resistencia, condensador, e inductor fueran conectados en serie con una batería o generador no fue considerado. En esta sección trataremos este caso.

Considere el circuito de la Figura 5.14. Cuando el interruptor K está cerrado, fluye una corriente instantánea. Si Q es la carga instantánea en el condensador C, entonces por la ley de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) \tag{1}$$

donde $E(t)$, la fem, puede depender del tiempo, pero donde L, R, C son constantes. Puesto que $I = dQ/dt$, (1) se convierte en

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t) \tag{2}$$

La comparación con la ecuación general, de las vibraciones forzadas [ecuación (32), página 240 , muestra la impresionante analogía entre cantidades mecánicas y eléctricas.

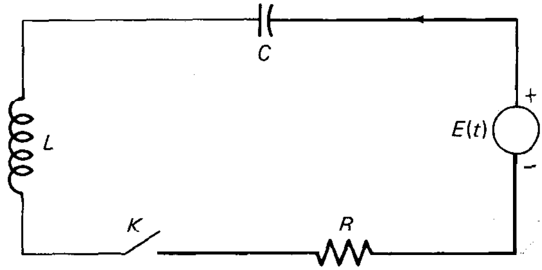


Figura 5.14

La carca Q corresponde a la ***posición x.***
La inductancia L corresponde a la ***masa m o*** W/g.
La resistencia R corresponde a la constante de amortiguamiento β.
La capacitancia inversa $1/C$ corresponde a la ***constante del resorte k.***
La ***fuerza electromotriz E(t)*** corresponde a la fuerza ***externa*** aplica***da F(t).***
La corriente $I = dQ/dt$ corresponde a la velocidad $v = dx/dt$.

Debido a la marcada analogía entre las cantidades mecánicas y eléctricas, la cual se cumple aún en casos más complicados, muchos de los enunciados hechos para sistemas mecánicos se aplican a sistemas eléctricos y viceversa. En efecto, la analogía es a menudo usada en la industria para estudiar sistemas mecánicos los cuales pueden ser muy complicados o costosos de construir, o cuando las consecuencias pueden ser muy peligrosas.

En particular, el fenómeno de resonancia ocurre en sistemas eléctricos. Sin embargo, contrario a los efectos peligrosos que pueden resultar en resonancia mecánica, los efectos de resonancia eléctrica son principalmente muy útiles. Los campos de radio, televisión, radar y comunicaciones serían virtualmente imposibles si no fuese por la resonancia eléctrica. En tales casos la corriente y consecuentemente la potencia generada pueden alcanzar grandes cantidades necesarias en estos campos. Es debido a la resonancia eléctrica que sintonizamos nuestro radio a la frecuencia de la estación de radio transmisor para conseguir la recepción.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un inductor de 0,5 henrios es conectado en serie con una resistencia de 6 ohmios, un condensador de 0,02 faradios, un generador con un voltaje alterno dado por 24 sen $10t$, $t \geqq 0$, y un interruptor K (Figura 5.15).

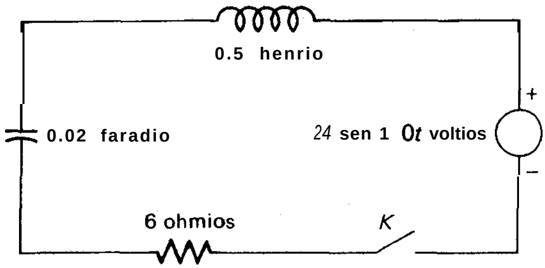


Figura 5.15

(a) Establezca una ecuación diferencial para la carga instantánea en el condensador.

(b) Encuentre la carga y la corriente al tiempo t si la carga en el condensador es cero cuando el interruptor K se cierra en $t = 0$.

Formulación matemática. La caída de voltaje a través de la resistencia es $6I$. La caída de voltaje a través del inductor es $0{,}5\ dI/dt$. La caída de voltaje a través del condensador es $Q/0{,}02 = 50Q$.

Por tanto, por la ley de Kirchhoff,

$$61 + 0{,}5\frac{dI}{dt} + 50Q = 24 \operatorname{sen} 10t$$

o puesto que $I = dQ/dt$, $\quad 0{,}5\dfrac{d^2Q}{dt^2} + 6\dfrac{dQ}{dt} + 50Q = 24 \operatorname{sen} 10t$

o

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 12\frac{dQ}{dt} + 100Q = 48 \operatorname{sen} 10t \tag{3}$$

Las condiciones son $Q = 0$ e $I = dQ/dt = 0$ en $t = 0$.

Solución La solución complementaria de (3) es $e^{-6t}(A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t)$. Asumiendo la solución particular usen $10t + b \cos 10t$, encontramos $a = 0$, $b = -\frac{2}{5}$. Por tanto, la solución general de (3) es

$$Q = e^{-6t}(A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t) - \tfrac{2}{5} \cos 10t$$

De las condiciones iniciales encontramos $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{3}{10}$. De donde, la solución requerida es

$$Q = \tfrac{1}{10} e^{-6t}(4 \cos 8t + 3 \operatorname{sen} 8t) - \tfrac{2}{5} \cos 10t$$

Se notará que el término con e^{-6t} *es* la ***solución transiente;*** que pronto se hace despreciable. El término $-\frac{2}{5} \cos 10t$ es la ***solución de estado estacionario***; permanece después de que el término transiente virtualmente ha desaparecido. El estudiante debería comparar esto con el ejemplo y gráfico en la página 241.

EJERCICIOS A

1. Una fem de 500 voltios está en serie con una resistencia de 20 ohmios, un inductor de 4 henrios y un condensador de 0,008 faradios. En $t = 0$, la carga Q y la corriente Z son cero. (a) Encuentre Q e Z para $t \geqq 0$. (b) Indique los términos transiente y de estado estacionario en Q e Z. (c) Encuentre Q e Z después de un largo tiempo.
2. Un condensador de 10^{-3} faradios está en serie con una fem de 20 voltios y un inductor de 0,4 henrios. En $t = 0$, Q = 0 e Z= 0. (a) Encuentre la frecuencia natural y el período de las oscilaciones eléctricas. (b) Encuentre la carga y corriente máxima.
3. Un inductor de 0,1 henrios, un condensador de 4×10^{-3} faradios, y un generador teniendo una fem dada por 180 $\cos 40t$, $t \geqq 0$, se conectan en serie. Encuentre la carga instantánea Q y la corriente Z si Z= $Q = 0$ en t = 0.
4. Una resistencia de 50 ohmios, un inductor de 2 henrios y un condensador de 0,005 faradios están en serie con una fem de 40 voltios y el interruptor abierto. Encuentre la carga instantánea y la corriente después de que el interruptor se cierre en $t = 0$, asumiendo que a ese tiempo la carga en el condensador es 4 columbios.

EJERCICIOS B

1. Un inductor L, un condensador C, y una resistencia R están conectados en serie. En $t = 0$, la carga en el condensador es Q_0, mientras que la corriente es cero. Mostrar que la carga Q y la corriente Z serán oscilatorias si $R < 2\sqrt{L/C}$ y estarán dadas por

$$Q = \frac{Q_0}{2\omega L} e^{-Rt/2L} \sqrt{R^2 + 4\omega^2 L^2} \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \qquad I = -\frac{Q_0(R^2 + 4\omega^2 L^2)}{4\omega L^2} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen} \omega t$$

donde $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{2\omega L}{R}$$

¿Cuál es el cuasi período de las oscilaciones (ver página 233)?

2. Si $R = 0$ en el Ejercicio 1 mostrar que el período natural de las oscilaciones es $2\pi\sqrt{LC}$. Si $L = 0,5$ henrios y C = 4 microfaradios, encuentre la frecuencia natural.
3. Discuta el Ejercicio 1, si $R \geqq 2\sqrt{L/C}$, mostrando la analogía del movimiento críticamente amortiguado y sobre amortiguado en sistemas mecánicos.
4. Un inductor de 0,5 henrios es conectado en serie con una resistencia de 5 ohmios, y un condensador de 0,08 faradios. En $t = 0$ la corriente es 10 amp, y la carga en el condensador es cero. Muestre que la carga se eleva al máximo en 0,2 seg y determine el valor del máximo.

EJERCICIOS C

1. Un inductor L, una resistencia R y un condensador C se conectan en serie con un generador de c-a con un voltaje dado por $E_0 \cos \omega t$, $t \geqq 0$. Si L, R, C, E_0 y ω son constantes dadas:
(a) Muestre que la ecuación diferencial del circuito es

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d}{dt}(\operatorname{Re} E_0 e^{i\omega t}), \qquad t \geqq 0$$

donde Z es la corriente instantánea y Re denota "la parte real de".

(b) Sea Z= $\text{Re}(Ae^{i\omega t})$, donde A es número complejo constante y muestre que

$$A = \frac{E_0}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{E_0}{R + iX}$$

Escriba $R + iX = Ze^{i\phi}$, tal que $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\phi = \tan^{-1} X/R$. De donde, muestre que

$$I = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \phi)$$

es la corriente en estado estacionario. Aquí Z se llama la ***impedancia*** y X la ***reactancia***.

(c) Pruebe que la corriente llega a ser muy grande (resonancia eléctrica) cuando la frecuencia del voltaje aplicado está dada por $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, mientras que la carga del condensador es un máximo cuando

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

2. Muestre que hay dos frecuencias, una por debajo y otra por encima de la frecuencia de resonancia, a las cuales las amplitudes son $1/n$-ésimo de la amplitud de resonancia. Pruebe que la diferencia de estas frecuencias es independiente de la capacitancia y está dada por $R\sqrt{n^2-1}/2\pi L$. La razón de esta diferencia a la frecuencia de resonancia $f = \omega/2\pi$ es $R\sqrt{n^2-1}/\omega L$. La cantidad $Q = \omega L/R$ se llama la "Q del circuito". Si Q es grande, la resonancia es "nítida" y decimos que tenemos una "sintonía nítida". Esto es importante en radio, televisión y comunicaciones. Para propósitos prácticos n generalmente se toma como 2.

3 Problemas misceláneos

3.1 EL PENDULO SIMPLE

Como una primera ilustración, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un péndulo simple consiste de una partícula de masa m soportada por una cuerda (o un hilo inelástico) de largo l y de masa despreciable. Si la cuerda está siempre derecha y el sistema está libre para vibrar en un plano vertical, encuentre el período de vibración.

Formulación matemática. Denotemos por AB (Figura 5.16) la cuerda, siendo A el punto fijo del soporte, B el otro extremo de la cuerda al cual está acoplada la masa m. Sea θ el ángulo de la cuerda con la vertical AO en cualquier instante. Mientras la masa m está en movimiento dos fuerzas actúan sobre ella, la tensión τ en la cuerda y el peso mg de la masa. Descomponiendo el peso mg en dos componentes, uno paralelo a la trayectoria del movimiento y el otro perpendicular a ésta, vemos que la componente perpendicular a la trayectoria se balancea por la tensión. La magnitud de la fuerza neta tangente a la trayectoria es mg sen θ.
Escojamos signos de modo que $\theta > 0$ cuando la masa está a la derecha en la figura y $\theta < 0$ cuando está a la izquierda. Esto esencialmente significa que

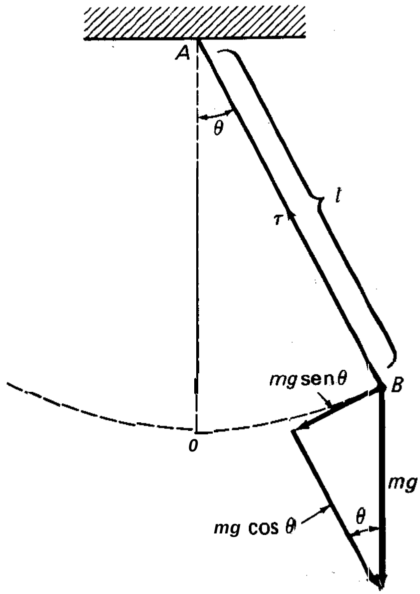


Figura 5.16

estamos escogiendo direcciones a lo largo del arco a la derecha como positiva y a la izquierda como negativa. Cuando $\theta > 0$, la fuerza resultante está a la izquierda, y cuando $\theta < 0$, la fuerza resultante está a la derecha. La fuerza neta en magnitud y dirección está así dada por $-mg \operatorname{sen}\theta$. Puesto que la longitud del arco está dada por $s = l\theta$, tenemos por la ley de Newton,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta \quad \text{o} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

La ecuación (1), la cual es una ecuación no lineal, no puede resolverse en términos de funciones elementales (sin embargo, vea los Ejercicios C 3, 4, 5). Con el objeto de seguir adelante hacemos una aproximación. Para ángulos pequeños (aproximadamente entre $-$ 5" y + 5") podemos escribir $\operatorname{sen}\theta = \theta$, donde θ está en radianes. Así, entre el rango de nuestra aproximación, podemos remplazar (1) por la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0 \tag{2}$$

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar de (2) son $\pm i\sqrt{g/l}$ así que

$$\theta = A\text{sen\&@} + B\cos\sqrt{g/l}t \tag{3}$$

De esto es claro que el período T está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} \quad \text{o} \quad T = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{4}$$

una fórmula familiar en física elemental.

Se debería notar que para encontrar el período aquí, no se necesitan las condiciones iniciales. También se debería notar que nuestra aproximación de sen θ por θ es equivalente a asumir que el movimiento es un movimiento armónico simple.

Si las vibraciones no son pequeñas, no podemos usar la aproximación θ por sen θ. Sin embargo, en este caso podemos resolver (1) en términos de *integrales elípticas,* y el movimiento es todavía periódico. Discusiones adicionales se dan en los ejercicios.

3.2 OSCILACIONES VERTICALES DE UNA CAJA FLOTANDO EN UN LIQUIDO

Como una segunda ilustración consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Una caja cúbica de 10 pies de lado flota en agua quieta (densidad 62,5 lb/pies^3). Se observa que la caja oscila hacia arriba y abajo con período $\frac{1}{2}$ seg. ¿Cuál es su peso?

Formulación matemática. La Figura 5.17 muestra el cubo en su posición de equilibrio, indicado por *ABC.* La Figura 5.18 muestra el cubo muy próximo a estar del todo sumergido en el agua. En esta posición hay una fuerza tendiendo a empujar de nuevo la caja hacia arriba. Para determinar esta fuerza necesitamos la ley física conocida como:

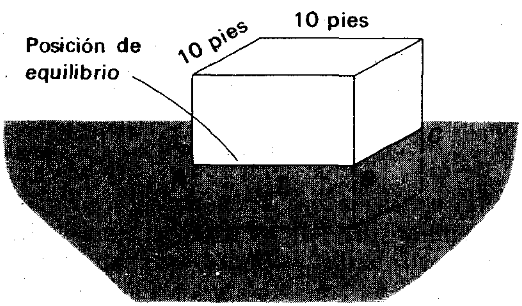


Figura 5.17

Principio de Arquimedes. ***Un objeto parcial o totalmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza igual al peso del fluido que desplaza.***

De **este** principio es claro que el peso del cubo iguala al peso del agua ocupada por la porción del cubo por debajo de la superficie en la Figura 5.17, la cual se indica por 1. La región I necesaria para balancear el peso del cubo también se muestra en la Figura 5.18, de la cual es evidente que hay una fuerza adicional no balanceada igual al peso del agua que ocuparía la región sombreada en esa figura. Puesto que las dimensiones de la región sombreada son x pies por 10 pies por 10 pies y puesto que el agua pesa 62,5 lb/pies^3 , el peso del agua que normalmente ocuparía tal región sería 62,5x $x \times 10 \times 10$ lb, ó $6.250x$ lb. Esto es numéricamente la fuerza neta actuando para mover el cubo. Esto es análogo a la fuerza restauradora del resorte vibrante. Si el peso de la caja en libras es W, la ley de Newton da

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -6.250x \quad o \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{200.000x}{w} = 0 \tag{5}$$

tomando g = 32.

Solución La solución general de (5) es

$$x = A\cos\sqrt{\frac{200.000}{W}}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{\frac{200.000}{W}}\,t \tag{6}$$

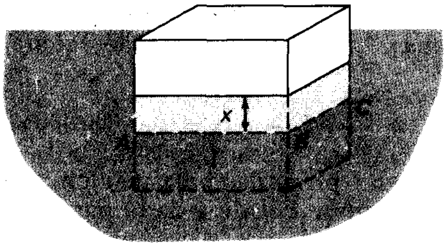


Figura 5.18

de la cual es claro que el período es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{200.000/W}} \quad \text{o} \quad T = \frac{2\pi\sqrt{W}}{200\sqrt{5}} \tag{7}$$

Igualando esto a $\frac{1}{2}$ seg, encontramos $W = 1.270$ lb aproximadamente. Se ve que la caja vibra con movimiento armónico simple.

3.3 PROBLEMA EN CARDIOGRAFIA

La ciencia biológica que se ocupa del estudio del corazón se llama *cardiología.* Como se podría esperar, la naturaleza y efectos de las vibraciones del corazón a medida que bombea sangre a través del sistema circulatorio del cuerpo son una gran fuente de aplicaciones matemáticas. Un aspecto importante involucra el registro de tales vibraciones, lo cual se conoce como *cardiografía.* Un instrumento disponible para el registro de tales vibraciones es un *electrocardiograma,* el cual traduce las vibraciones a impulsos eléctricos los cuales luego se registran.

En vez de traducir las vibraciones del corazón en impulsos eléctricos, es de interés que estas vibraciones se puedan traducir en vibraciones mecánicas. Para ver cómo esto es posible, supongamos que una persona descansa sobre una mesa horizontal, la cual tiene resortes para que pueda vibrar horizontalmente pero no verticalmente. Entonces, debido al bombeo del corazón, la mesa se encontraría sometida a pequeñas vibraciones, la frecuencia y magnitud de las cuales dependerán de varios parámetros asociados con el corazón. Así, investigando el movimiento de la mesa se pueden sacar algunas conclusiones importantes concernientes a las vibraciones del corazón.

Formulación matemática. Sea x para denotar el desplazamiento horizontal de algún punto especificado de la mesa (como por ejemplo un extremo) desde alguna localización fija (tal como una pared). Representemos por M la masa combinada de la persona y del segmento de mesa que se pone en movimiento. Si asumimos que hay una fuerza de amortiguamiento proporcional al desplazamiento instantáneo, entonces la ecuación que describe el movimiento de la mesa es

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \gamma x = F \tag{8}$$

donde β y γ son constantes de proporcionalidad y F es la fuerza sobre el sistema debido a la acción de bombeo del corazón. Suponga que m *es* la masa de sangre bombeada fuera del corazón durante cada vibración y y es el centro intantáneo de masa de esta cantidad de sangre. Entonces por la ley de Newton tenemos

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{9}$$

Se podría suponer como una primera aproximación que y se puede expresar como una simple función senosoidal de t dada por

$$y = a \operatorname{sen} \omega t \tag{10}$$

donde a, ω son constantes. Esto, sin embargo, resulta ser una sobre simplificación, puesto que (10) asume que hay solamente una frecuencia asociada con las vibraciones del corazón, mientras que las evidencias indican que hay muchas frecuencias. Esto nos conduce a remplazar (10) por

$$y = a_1 \operatorname{sen} \omega t + a_2 \operatorname{sen} 2\omega t + a_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \cdots \tag{11}$$

La serie de términos a la derecha frecuentemente se llama una serie de ***Fourier*** en honor al hombre quien primero la investigó en conexión con problemas de flujo de calor, y examinaremos varias propiedades de estas series en capítulos posteriores. Una propiedad importante es que una función periódica adecuada con período $2\pi/\omega$ se puede expresar en términos de tales series con una apropiada elección de los coeficientes $a_1, a_2, a_3,$. El primer término del lado derecho de (ll) representa una primera aproximación a la función, la suma de los primeros dos términos una mejor aproximación, etc. Para nuestros propósitos aquí, necesitamos solamente señalar que la sustitución de (ll) en (9) y luego el resultado en (8) conduce a una ecuación diferencial la cual se puede resolver sujeta a varias condiciones iniciales posibles.

Solución Usando solamente los primeros dos términos de la serie (ll), tenemos

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \gamma x = -m\omega^2 a_1 \operatorname{sen} \omega t - 4m\omega^2 a_2 \operatorname{sen} 2\omega t \tag{12}$$

La solución general de esta ecuación consiste de dos partes, (1) la solución general de la ecuación con el lado derecho remplazado por cero, y (2) una solución particular. La primera parte será la solución *transiente* y desaparecerá rápidamente con tal que $\beta > 0$. La segunda parte será la solución de estado ***estacionario*** en la cual estamos interesados. Esta solución de estado estacionario se encuentra fácilmente como

$$x = \frac{m\omega^2 a_1 [(M\omega^2 - \gamma) \text{ sen } \omega t + \beta\omega \cos \omega t]}{(M\omega^2 - \gamma)^2 + \beta^2\omega^2}$$

$$+ \frac{4m\omega^2 a_2[(4M\omega^2 - \gamma)\text{sen } 2\omega t + 2\beta\omega \cos 2\omega t]}{(4M\omega^2 - \gamma)^2 + 4\beta^2\omega^2} \tag{13}$$

Una solución correspondiente se puede encontrar asumiendo cualquier numero de términos en (ll).

3.4 APLICACION A LA ECONOMIA

Un problema importante en economía concierne al comportamiento del precio P de un bien en algún tiempo t. Obviamente, el problema depende de muchos factores, algunos de los cuales ya han sido descritos en la página 160. En consecuencia, debemos hacer algunos supuestos simplificativos, teniendo presente que podemos incurrir en el riesgo de sobre simplificación y quizás llegando a resultados *en* conflicto con la realidad. Como hemos mencionado muchas veces, debemos en tal caso rechazar los supuestos y buscar otros.

Formulación matemática. No es irreal suponer que el bien es tal que incrementando su precio resulta en un incremento de la oferta S, la cual como consecuencia finalmente resulta en la disminución del precio. Para buscar un modelo posible del comportamiento del precio del bien, busquemos los factores que pueden conducir a cambios del precio. Claramente, los precios cambian con el tiempo como un resultado de la inflación. Asumiremos que el factor inflacionario está dado como una función del tiempo por F(t), la cual no especificamos por el momento. También asumimos que aparte de la inflación la tasa de cambio en el precio es proporcional a la diferencia entre la oferta S en el tiempo t y alguna oferta de equilibrio que denotamos por S_0. Si $S > S_0$, la oferta es demasiado grande y el precio tiende a decrecer, mientras que si $S < S_0$, la oferta es demasiado pequeña y el precio tiende a incrementar, así que la constante de proporcionalidad debe ser negativa y se denota por $-k_1$. Estas observaciones nos conducen. a la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = F(f) - k_1(S - S_0) \tag{14}$$

También asumimos que la tasa de cambio de la oferta es proporcional a la diferencia entre el precio y algún precio de equilibrio, el cual denotamos por P_0. Entonces tenemos, denotando la constante de proporcionalidad por k_2,

$$\frac{dS}{dt} = k_2(P - P_0) \tag{15}$$

Si $P < P_0$, el precio es demasiado bajo, dS/dt es negativa, y la oferta decrece; si $P > P_0$, el precio es demasiado alto, dS/dt es positivo, y la oferta aumenta. Por tanto, $k_2 > 0$.

Solución Si resolvemos para S en **(14)**, encontramos

$$S = S_0 + \frac{1}{k_1}\left[F(t) - \frac{dP}{dt}\right] \tag{16}$$

Sustituyendo esto en (14) y asumiendo que S_0 es constante, tenemos

$$\frac{d^2P}{dt^2} + k_1k_2P = F'(t) + k_1k_2P_0 \tag{17}$$

Varios casos surgen dependiendo del factor inflacionario $F(t)$.

Consideremos el caso especial donde

$$F(t) = \alpha \tag{18}$$

donde α es una constante. En este caso (17) tiene la solución general

$$P = P_0 + A \cos \sqrt{k_1k_2}t + B \operatorname{sen} \sqrt{k_1k_2}t \tag{19}$$

Sustituyendo esto en (14) entonces da

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} + A\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \operatorname{sen} \sqrt{k_1k_2}t - B\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \cos \sqrt{k_1k_2}t \tag{20}$$

Asumiendo que a algún tiempo $t = 0$, $P = P_0$, $S = S_0$, encontramos de (19) y (20) que

$$A = 0, \qquad B = \frac{\alpha}{\sqrt{k_1k_2}} \tag{21}$$

así que

$$P = P_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{k_1k_2}} \operatorname{sen} \sqrt{k_1k_2}t \tag{22}$$

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} - \frac{\alpha}{k_1} \cos \sqrt{k_1k_2}t$$

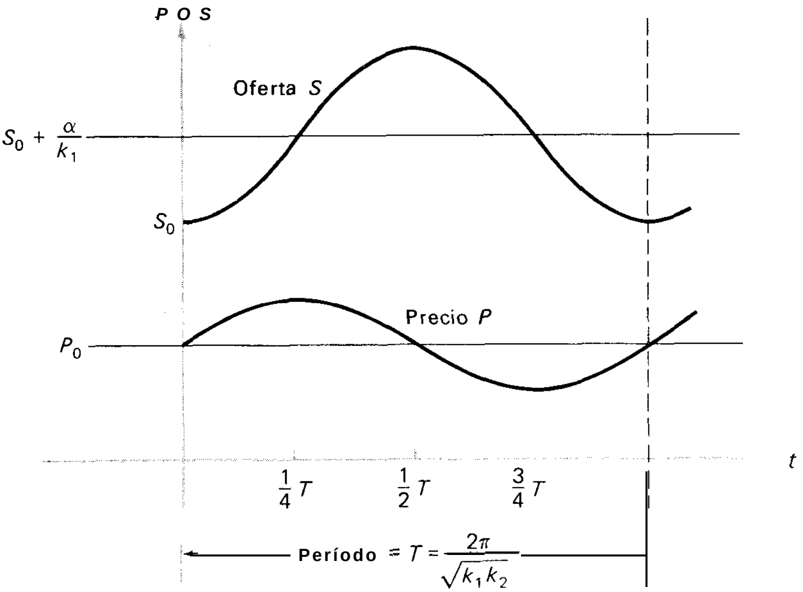


Figura 5.19

Interpretación. Las ecuaciones (21) y (22) muestran que el precio y la oferta oscilan senosoidalmente alrededor de P_0 y $S_0 + \alpha/k_1$, respectivamente, con período

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 k_2}} \tag{23}$$

Si escribimos (22) en la forma

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} + \frac{\alpha}{k_1} \operatorname{sen} \sqrt{k_1 k_2}\left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{k_1 k_2}}\right) \tag{24}$$

vemos que el precio está ***adelante*** de la oferta por un tiempo igual a un cuarto del período, esto es, $\frac{1}{4}$ T, o que la oferta está ***detrás*** del precio por $\frac{1}{4}$ T. Esto significa que si el precio máximo ocurre en algún tiempo particular la oferta máxima ocurre en un tiempo $\frac{1}{4}$ T más tarde cuando el precio ya ha caído. La situación se muestra gráficamente en la Figura 5.19, donde para propósitos de comparación el mismo eje vertical se usa para S y P aunque lógicamente las unidades para estas variables no son las mismas.

EJERCICIOS A

1. Las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple tienen un período de 2 seg. Determine la longitud del péndulo. Encuentre la longitud correspondiente de un péndulo simple que tiene dos veces este período.

2. El medallón de un péndulo simple de 2pies de longitud se desplaza de manera que la cuerda del péndulo forma un ángulo de 5” con la vertical. Si el péndulo se suelta de esta posición: (a) Encuentre el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical en cualquier tiempo. (b) Determine la frecuencia de la vibración. (c) Calcule la distancia recorrida por el medallón del péndulo durante un período. (d) Encuentre la velocidad y aceleración del medallón en el centro de su trayectoria.

3. Un cubo de 5 pies de lado y 500 lb de-peso flota en agua quieta. Se empuja hacia abajo suavemente y se suelta para que ocurran oscilaciones. Encuentre el período y la frecuencia de las vibraciones.

4. Un cilindro de 4gies de radio y 6pies de altura, pesando **1.000** lb, vibra en agua quieta con su eje vertical. Encuentre la frecuencia y período de las vibraciones.

EJERCICIOS B

1. Un cilindro de radio r y de altura h y con peso W flota con su eje vertical en un líquido de densidad ρ. Si se pone a vibrar, muestre que el período es

$$\frac{2}{I}\sqrt{\frac{\pi W}{\rho g}}$$

2. Un cilindro vibra con su eje vertical en un líquido. Se encuentra que la frecuencia de las vibraciones en el líquido es la mitad de aquella en el agua. Determine la densidad del líquido.

3. Un péndulo simple vibra en un medio en el cual el amortiguamiento es proporcional a la velocidad instantánea. Si el medallón del péndulo pasa a través de la posición de equilibrio $\theta = 0$ en $t = 0$ con velocidad v_0, muestre que el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es

$$\theta = \frac{v_0}{\omega l} e^{-\beta t} \operatorname{sen} \omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2}$$

donde β es la constante de amortiguamiento y 1 es la longitud del péndulo. Encuentre β si la distancia recorrida durante un ciclo completo es la mitad de la del ciclo previo. ¿Cuál es el cuasi período y la frecuencia?

4. Usando tres o más términos de (ll) generalice el resultado (13), página 255,

5. , Obtenga el precio y la oferta en el problema de la página 255 para los casos
   (a) $F(t) = \alpha + \beta t$; α, β constantes.
   (b) $F(t) = K \operatorname{sen} \omega t$; K, ω constantes.

EJERCICIOS C

1. Una esfera de radio R que flota la mitad sumergida en un líquido se pone en vibración. Si x es el desplazamiento instantáneo de su plano diametral desde la posición de equilibrio, muestre que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3g}{2}\left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^3\right]$$

De donde, muestre que para vibraciones pequeñas la esfera vibra con una frecuencia igual a la de un péndulo simple de longitud $2R/3$.

2. Si la esfera del problema anterior se empuja hacia abajo hasta que escasamente esté por debajo del líquido y luego se suelta, muestre que la velocidad de la esfera en el instante en que el plano diametral coincide con la superficie es $\frac{1}{2}\sqrt{5gR}$.

3. Usando la ecuación (1) para las vibraciones de un péndulo simple muestre que

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Así, muestre que el período T está dado por

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

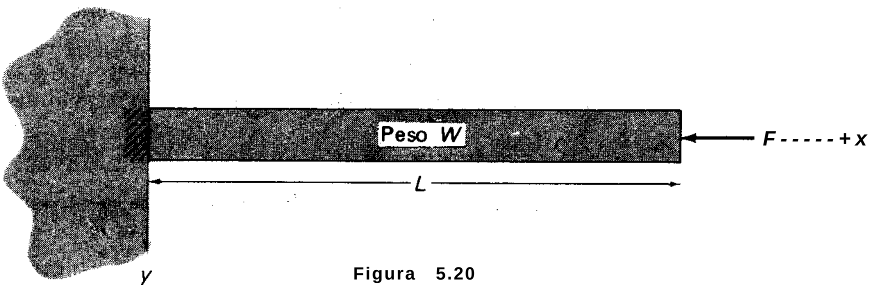


Figura 5.20

4. Use la identidad $\cos u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u/2$ para mostrar que

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

Entonces haciendo $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sen}\phi$, donde ϕ es una nueva variable, muestre que

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}, \qquad k = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}$$

Esta integral es llamada una ***integral elíptica de primera clase.***

5. (a) Usando el resultado $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1$

donde $x = k^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, muestre que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right]$$

(b) Encuentre el período de un péndulo cuando la cuerda forma un ángulo máximo de $30°$, $60°$ con la vertical.

6. Si la esfera del Ejercicio 1 se empuja hacia abajo hasta que el plano diametral esté a una distancia $p(0 < p \leqq R)$ por debajo de la superficie y luego se suelta, muestre que el período T de las vibraciones resultantes es

$$T = 8R\sqrt{\frac{R}{g(6R^2 - p^2)}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}, \qquad k^2 = \frac{p^2}{6R^2 - p^2}$$

Use el resultado del Ejercicio 5 y calcule T en el caso donde $p = R$. Determine T cuando p está cerca a cero. Compare con el Ejercicio 1. ¿Se cumple el resultado cuando $p = 0$?

7. Una fuerza horizontal constante F se aplica al extremo libre de una viga en voladizo de longitud L y peso W como se indica en la Figura 5.20.

(a) Muestre que la deflexión y está dada por la ecuación

$$EIy'' = -Fy - \frac{W(L - x)^2}{2L}.$$

(b) Encuentre la deflexión máxima de la viga.

seis

solución de ecuaciones diferenciales por transformadas de Laplace

1 Introducción al método de las transformadas de Laplace

1.1 MOTIVACION POR LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En los capítulos anteriores el estudiante aprendió cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes sujetas a condiciones dadas llamadas de frontera o condiciones iniciales. Se recordará que el método consiste en encontrar la solución general de las ecuaciones en términos de un número de constantes arbitrarias y luego determinar estas constantes de las condiciones dadas.

Durante el siglo XIX estuvo de moda para científicos e ingenieros, encabezados y motivados por el ingeniero electricista *Heaviside*, usar métodos de operador tales como los descritos en las páginas 207-215 para resolver varios problemas involucrando ecuaciones diferenciales. En estos métodos los operadores fueron tratados como símbolos algebraicos y las ecuaciones resultantes fueron manipuladas de acuerdo a las reglas del álgebra (vea, por ejemplo, el Ejemplo ilustrativo 13, página 210). Admirablemente, los métodos condujeron a respuestas correctas. Estos éxitos motivaron a científicos e ingenieros a usar los métodos aún más, e incitaron a la retórica de parte de algunos matemáticos quienes no gustaban de ver tales ciegas manipulaciones matemáticas gratificadas con el éxito. Comentarios demeritando los procedimientos no rigurosos se contestaban con observaciones tales como "¿Debe uno entender el proceso de la digestión para poder comer?" y "Esta serie es divergente; por tanto debe tener algún uso práctico".

Algunos matemáticos inquietos, viendo que las manipulaciones algebraicas sí conducían a resultados correctos> razonaron que debería haber alguna manera de colocar los procedimientos en una base matemática rigurosa. La investigación hacia este objetivo condujo al poderoso ***método de las transformadas de Laplace***, el cual examinamos en este capítulo. Este método tiene varias ventajas sobre otros métodos. Primero, usando el método podemos, como en el enfoque de Heaviside, transformar ecuaciones diferenciales dadas en ecuaciones algebraicas. Segundo, cualesquiera condiciones iniciales dadas automáticamente se incorporan en el problema algebraico de modo que no se necesita hacer ninguna consideración especial sobre ellas. Finalmente, el uso de tablas de transformadas de Laplace pueden reducir el trabajo de obtener soluciones lo mismo que las tablas de integrales reducen el trabajo de integración.

Las transformadas de Laplace tienen muchas otras aplicaciones además de resolver ecuaciones diferenciales, tales como la evaluación de integrales y la solución de ecuaciones integrales, y examinaremos algunas de ellas, posteriormente en el capítulo.* Con una visión hacia tales aplicaciones, dirigimos nuestra atención a la definición y ejemplos de la transformada de Laplace.

*Las transformadas de Laplace son también de interés teórico en sí mismas. Ver [30] por ejemplo.

1.2 DEFINICION Y EJEMPLOS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea F(t), $t > 0$ dada. La transformada de **Laplace** de F(t) se define como*

$$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (1)$$

donde s es un parámetro real.** El símbolo $\mathscr{L}$ se llama el ***operador de la transformada de Laplace.***

La integral impropia en (1) se define como

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st}F(t)dt \qquad (2)$$

y la transformada de **Laplace** se dice que existe o no de acuerdo a si el límite existe o no. Si (2) existe decimos que la integral converge. Condiciones bajo las cuales la transformada de **Laplace** existe se discuten en la página 267.

Usando la definición (1) podemos encontrar la transformada de **Laplace** de varias funciones como se indica en la tabla en la contraportada posterior. †

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encuentre (a) $\mathscr{L}\{1\}$, (b) $\mathscr{L}\{e^{at}\}$.

Solución a (a) $\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt =$ Mí-“, $\int_0^M e^{-st}\,dt = \lim\limits_{M\to\infty} \left.\dfrac{e^{-st}}{-s}\right|_0^M$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1 - e^{-sM}}{s} = \frac{1}{s}, \qquad \text{si } s > 0$$

Solución a (b) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt = \lim\limits_{M\to\infty} \int_0^M e^{-(s-a)t}\,dt$

$$= \lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^M = \lim_{M\to\infty} \frac{1 - e^{-(s-a)M}}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \qquad \text{si } s > a$$

Estas corresponden a las entradas 1 y 5 de la tabla.

Note que del Ejemplo ilustrativo 1, la existencia de la transformada de **Laplace** de una función $F(t)$ depende de los valores de s. Así la transformada de **Laplace** de 1 existe si $s > 0$ pero no existe si $s \leqq 0$. Similarmente la transformada de **Laplace** de e^{at} existe si $s > a$ pero no existe si $s \leqq a$. Una situación similar surge al considerar cualquier transformada de **Laplace**.† No es difícil mostrar que si la transformada de **Laplace** de una función existe para $s = \alpha$ entonces también existirá para todo $s > \alpha$. Hay funciones cuyas trans-

*En general si las funciones se denotan por letras mayúsculas tales como *F, G* sus transformadas de **Laplace** se denotan por las letras minúsculas correspondientes *f*, g. Alternativamente una sobrebarra se puede usar para denotar la transformada de **Laplace**. Por ejemplo $\mathscr{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$.

En la teoría avanzada de las transformadas de **Laplace es conveniente asumir que *s* es una variable compleja de modo que f(s) es una función de una variable compleja. La letra *p* se usa algunas veces en lugar de s, especialmente por algunos ingenieros y físicos. En otras definiciones algunas veces usadas, la integral en (1) se multiplica por *s* (o p).

†Note que la transformada de **Laplace** de cero es cero, como es claro de la definición, y no ha sido incluido en la tabla.

†Al escribir transformadas de **Laplace** no siempre puede ser conveniente indicar el rango verdadero de valores para los cuales existe la transformada de **Laplace**, y frecuentemente lo omitiremos. Uno debería por supuesto ser capaz de producirlo cuando se solicite.

formadas de Laplace no existen para ningún valor de s. Así, por ejemplo, puesto que la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt$$

no converge para ningún valor de s, la transformada de Laplace de e^{t^2} no existe.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre (a) $\mathscr{L}\{\text{sen }\omega t\}$, (b) $\mathscr{L}\{\cos \omega t\}$.

Soluciones Aunque estas se pueden hallar directamente de la definición (ver Ejercicio 1B) acudiremos al siguiente procedimiento. Remplace a por $i\omega$ en parte (b) del Ejemplo ilustrativo 1. Luego usando la fórmula de Euler $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i$ sen ωt tenemos

$$\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\cos \omega t\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}\text{sen }\omega t\,dt$$

$$= \mathscr{L}\{\cos \omega t\} + i\mathscr{L}\{\text{sen }\omega t\} = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{1}{s - i\omega}\cdot\frac{s + i\omega}{s + i\omega} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Igualando las partes reales e imaginarias obtenemos

$$\mathscr{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathscr{L}\{\text{sen }\omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

las cuales corresponden a las entradas 6 y 7, respectivamente, en la tabla.

Puesto que ya hemos sugerido que las transformadas de Laplace son útiles para resolver ecuaciones diferenciales no debería sorprender que estaríamos interesados en hallar las transformadas de Laplace de derivadas. Podemos conseguir esto directamente de la definición. Así tenemos

$$\mathscr{L}\{Y'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}Y'(t)dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}Y'(t)dt$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{e^{-st}Y(t)\Big|_0^M + s\int_0^M e^{-st}Y(t)dt\right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{e^{-sM}Y(M) - Y(0) + s\int_0^M e^{-st}Y(t)dt\right\}$$

$$= s\int_0^\infty e^{-st}Y(t)dt - Y(0)$$

$$= sy(s) - Y(0)$$

donde hemos asumido que $\mathscr{L}\{Y(t)\} = y(s) = y$ y $\lim_{M\to\infty} e^{-sM}Y(M) = 0$.†

*Se debería notar que el método está basado en la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{s - i\omega}, \qquad s > 0$$

Esto se puede justificar usando métodos de variable compleja.

†También se asume que Y(t) es continua en $t = 0$. Para el caso donde esto no es así, vea el Ejercicio 3C.

Para hallar las transformadas de Laplace de derivadas de alto orden podemos usar la definición y la integración por partes. Sin embargo es más fácil emplear el resultado que acabamos de obtener. Para hacer esto haga $G(t) = Y'(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{Y''(t)\} &= \mathscr{L}\{G'(t)\} = s\mathscr{L}\{G(t)\} - G(0)\\ &= s\mathscr{L}\{Y'(t)\} - Y'(0) = s[sy(s) - Y(0)] - Y'(0)\\ &= s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)\end{aligned}$$

Los resultados corresponden a las entradas 15 y 16 de la tabla. Generalizaciones a derivadas más altas se pueden obtener en forma similar y se indica por la entrada 17 de la tabla.

Observación. Note que las derivadas de Y tienen transformadas de Laplace las cuales son funciones algebraicas de s y contienen los valores iniciales de Y y sus derivadas. Esta observación proporcionó una pista importante a los matemáticos para relacionar las transformadas de Laplace con los métodos operacionales descritos en la página **261,** y la aparente conexión entre el operador D y el símbolo algebraico s. También sirvió para mostrar las ventajas descritas en la página **261.** Ilustraremos el uso de los métodos de la transformada de Laplace en ecuaciones diferenciales en la página 278 después de que hayamos examinado algunas propiedades más de la transformada.

Es de interés e importancia notar que el operador de la transformada de Laplace $\mathscr{L}$ *es* un *operador* lineal como los operadores $D, D^2, \ldots$, del Capítulo cuatro, página 168. Para probar esto sólo necesitamos mostrar que

$$\mathscr{L}\{F(t) + G(t)\} = \mathscr{L}\{F(t)\} + \mathscr{L}\{G(t)\} = f(s) + g(s) \tag{3}$$

$$\mathscr{L}\{cF(t)\} = c\mathscr{L}\{F(t)\} = cf(s) \tag{4}$$

donde $F(t)$ y $G(t)$ tienen transformadas de Laplace f(s) y g(s), respectivamente, y c es cualquier constante. La prueba sigue directamente de las propiedades de las integrales. Puesto que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{F(t) + G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{F(t) + G(t)\}dt = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt\\ &= \mathscr{L}\{F(t)\} + \mathscr{L}\{G(t)\} = f(s) + g(s)\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}\{cF(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{cF(t)\}\,dt = c\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = c\mathscr{L}\{F(t)\} = cf(s)$$

Esta *propiedad lineal* nos permite hallar transformadas de Laplace de sumas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encuentre $\mathscr{L}\{3 - 5e^{2t} + 4\,\text{sen}\,t - 7\cos 3t\}$.

Solución Usando la propiedad lineal tenemos

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\{3 - 5e^{2t} + 4\,\text{sen}\,t - 7\cos 3t\}\\ &= \mathscr{L}\{3\} + \mathscr{L}\{-5e^{2t}\} + \mathscr{L}\{4\,\text{sen}\,t\} + \mathscr{L}\{-7\cos 3t\}\\ &= 3\mathscr{L}\{1\} - 5\mathscr{L}\{e^{2t}\} + 4\mathscr{L}\{\text{sen}\,t\} + \mathscr{L}\{-7\cos 3t\}\\ &= \frac{3}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{4}{s^2+1} - \frac{7s}{s^2+9}, \qquad \text{si } s > 2\end{aligned}$$

Los resultados que involucran transformadas de Laplace de derivadas a menudo son útiles para hallar las transformadas de Laplace sin el uso directo de la definición. Considere el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Encuentre $\mathscr{L}\{t^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Solución Haga Y(t) = t^n de modo que Y'(t) = nt^{n-1}, Y(0) = 0. Entonces tenemos $\mathscr{L}\{Y'(t)\} = s\mathscr{L}\{Y(t)\} - Y(0)$ 0 $\mathscr{L}\{nt^{n-1}\} = s\mathscr{L}\{t^n\}$

Así
$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathscr{L}\{t^{n-1}\}$$

Colocando $n = 1, 2, \ldots$, encontramos para $s > 0$

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\mathscr{L}\{t\} = \frac{2}{s^3}, \quad \mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{3\cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4}$$

y en general
$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n(n-1)\ldots 1}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{5}$$

1.3 PROPIEDADES ADICIONALES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Al construir tablas de transformadas de Laplace ciertas propiedades demuestran ser útiles. Para desarrollar una de tales propiedades escribamos la definición
$$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{6}$$

y formalmente remplace s por $s - a$. Entonces encontramos
$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}dt$$

y así
$$\mathscr{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \tag{7}$$

Otra propiedad importante surge al diferenciar ambos lados de (6) con respecto a s. Encontramos

$$\frac{df}{ds} = f'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st}F(t)dt = -\mathscr{L}\{tF(t)\}$$

asumiendo justificable la diferenciación bajo el signo de la integral.* Así sigue que
$$\mathscr{L}\{tF(t)\} = -f'(s) \tag{8}$$

Diferenciando más tenemos
$$\mathscr{L}\{t^2F(t)\} = f''(s), \qquad \mathscr{L}\{t^3F(t)\} = -f'''(s) \tag{9}$$

*Si a y b son constantes, el resultado $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_a^b G(s,t)dt = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial s}dt$ con frecuencia llamada la regla *de Leibniz* para derivar una integral. Para las condiciones bajo las cuales el resultado se cumple, ver cualquier libro sobre cálculo avanzado (*por* ejemplo [26] de la bibliografía).

o en general $$\mathscr{L}\{t^nF(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{d^nf}{ds^n} \tag{10}$$

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente

Teorema. Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces
1. $\mathscr{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$.
2. $\mathscr{L}\{t^nF(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Para ilustrar estos resultados consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Halle $\mathscr{L}\{e^{3t}\cos 4t\}$.

Solución Puesto que $\mathscr{L}\{\cos 4t\} = \dfrac{s}{s^2+16}$ tenemos

$$\mathscr{L}\{e^{3t}\cos 4t\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16} = \frac{s-3}{s^2-6s+25}$$

Note que esto es válido si $s > 3$. El resultado es un caso especial de la entrada 11 en la tabla.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Halle (a) $\mathscr{L}\{t\operatorname{sen} t\}$, (b) $\mathscr{L}\{t^2\operatorname{sen} t\}$.

Solución Puesto que $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ tenemos

$$\mathscr{L}\{t\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2},$$

$$\mathscr{L}\{t^2\operatorname{sen} t\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

las cuales son válidas para $s > 0$. Compare con la entrada 13 de la tabla.

1.4 LA FUNCION GAMMA

Ya hemos encontrado (en el Ejemplo ilustrativo 4) que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0, n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Una pregunta natural que surge es, ¿cómo se debe modificar (11) si n no es un entero positivo? Para responder a esto notemos primero que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt$$

Haciendo la sustitución $u = st$, $s > 0$, encontramos

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^ne^{-u}\,du \tag{12}$$

Si usamos ahora la notación $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u}\, du$ (13)

entonces (12) llega a ser $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ (14)

Llamamos $\Gamma(n+1)$ la función ***gamma.*** Examinemos esta función un poco más de cerca. Integrando por partes encontramos

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u}\, du = (u^n)(-e^{-u})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (nu^{n-1})(-e^{-u})du$$
$$= n\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\, du = n\Gamma(n)$$

La relación $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ (15)

se llama una ***fórmula de recurrencia para la función gamma.*** Puesto que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\, du = -e^{-u}\Big|_0^\infty = 1 \tag{16}$$

tenemos $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$

y en general cuando n es un entero positivo

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{17}$$

Así (14) concuerda con (11) para este caso.

Sigue que la función gamma es realmente una generalización del factorial. Un resultado interesante es que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

Para indicar una prueba de esto notemos que al hacer $u = x^2$

$$I = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}\, du = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

Entonces $I^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

Cambiando a coordenadas polares (r, ϕ) esta última integral se puede transformar en

$$I^2 = 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\phi = 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty d\phi = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\, d\phi = \pi$$

de la cual $I = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Aunque esto es un enfoque algo "informal", el método se puede hacer matemáticamente riguroso por procedimientos de límites apropiados.

Es de interés notar que

$$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \qquad s > 0 \tag{19}$$

1.5 OBSERVACIONES CONCERNIENTES A LA EXISTENCIA DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En la definición (1) de la transformada de Laplace, el factor e^{-st} es un "factor de amortiguamiento" el cual para cualquier valor fijo positivo de s

tiende a decrecer al crecer t. Intuitivamente hablando, esperaríamos que la integral converja, y así exista la' transformada de Laplace, con tal que F(t) no "crezca tan rápidamente" al crecer t. Los matemáticos hacen esto más preciso al definir una clase de funciones tales que existen constantes K y α para las cuales

$$|F(t)| < Ke^{\alpha t}$$

Tales funciones se dice que son de ***orden exponencial*** α, o brevemente de ***orden exponencial.*** La función $F(t) = t$ es ciertamente de orden exponencial puesto que tenemos (por ejemplo)

$$t < e^t$$

Por otro lado la función e^{t^2} no es de orden exponencial, esto es, crece muy rápidamente para ser de este tipo.

Otra clase de funciones que el matemático encuentra importante es la clase de ***funciones continuas a tramos o seccionalmente continuas.*** Llamamos una función seccionalmente continua en un intervalo si tiene solamente un número finito de discontinuidades en el intervalo y si los límites por la derecha y por la izquierda existen en cada discontinuidad.* Por ejemplo,

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq t < 2 \\ t, & 2 \leqq t \leqq 4 \end{cases}$$

cuyo gráfico se muestra en la Figura 6.1 es seccionalmente continua en el intervalo $0 \leqq t \leqq 4$ puesto que solamente hay una discontinuidad, $t = 2$, en el intervalo y los límites por la derecha y por la izquierda en esta discontinuidad existen (y son iguales a 2 y 1, respectivamente).

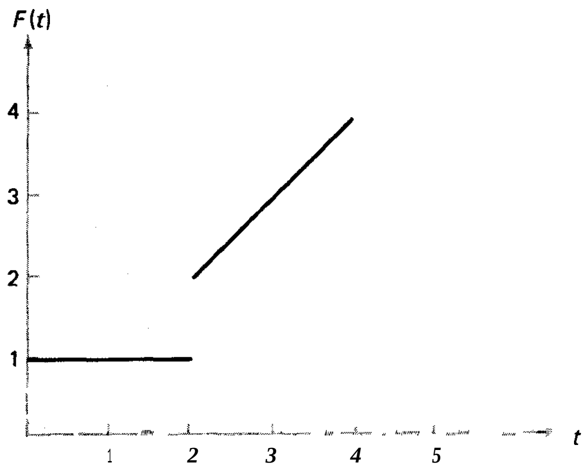


Figura 6.1

*El límite por la derecha de una función $F(t)$ en el punto t_0 se define como $\lim_{\epsilon\to 0} F(t_0 + \epsilon)$ donde ϵ tiende a cero por valores positivos. Similarmente, el límite por la izquierda de $F(t)$ en t_0 es $\lim_{\epsilon\to 0} F(t_0 - \epsilon)$ donde ϵ tiende a cero por valores positivos. Para indicar que ϵ tiende a cero por valores positivos algunas veces escribimos $\lim_{\epsilon\to 0^+} F(t_0 + \epsilon)$ y $\lim_{\epsilon\to 0^+} F(t_0 - \epsilon)$ para los límites por la derecha y por la izquierda, respectivamente, y denotamos estos límites, si existen, por $F(t_0 + 0)$ y $F(t_0 - 0)$ respectivamente.

El siguiente teorema es de importancia fundamental. Para una prueba vea el Ejercicio 5C.

Teorema. Si F(t) es de orden exponencial α y es seccionalmente continua en todo intervalo finito $0 \leqq t \leqq T$ entonces la transformada de Laplace de F(t) existe para todo $s > \alpha$.

Se debería enfatizar que la hipótesis de este teorema garantiza la existencia de la transformada de Laplace. Sin embargo si estas condiciones no se satisfacen no quiere decir que la transformada de Laplace no exista. De hecho puede o no puede existir (vea los Ejercicios 3 y 6B). En situaciones como estas, las condiciones se dicen que son *suficientes* pero no *necesarias* para la validez de las conclusiones.

Ilustremos el teorema anterior en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Encuentre la transformada de Laplace de $F(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leqq t < 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Solución La función es seccionalmente continua y de orden exponencial y por el teorema anterior tiene una transformada de Laplace. Esta está dada por

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^2 e^{-st}(3)dt + \int_2^\infty e^{-st}(0)dt$$

$$= 3\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Bigg|_0^2 = 3\left(\frac{1 - e^{-2s}}{s}\right)$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Encuentre la transformada de Laplace de $e^{\sqrt{t}}$.

Solución La función es seccionalmente continua en cualquier intervalo finito. Podemos también mostrar que es de orden exponencial. Para ello notemos que para $t > 1$, $\sqrt{t} < t$, y así

$$e^{\sqrt{t}} < e^t$$

de la cual vemos que $F(t) = e^{\sqrt{t}}$ es de orden exponencial. Por tanto $\mathscr{L}\{e^{\sqrt{t}}\}$ existe. Sin embargo, aún cuando exista esta transformada de Laplace, no la podemos determinar en forma cerrada porque la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^\infty e^{u-su^2}\,du \tag{20}$$

donde $t = u^2$ no se puede evaluar exactamente. Sin embargo se puede evaluar aproximadamente para cualquier valor de $s > 0$ usando integración numérica o el método del Ejercicio 7(c)C.

Este ejemplo sirve para ilustrar el hecho enfatizado con frecuencia en capítulos previos, de que existe una gran diferencia entre probar que algo existe y el hallarlo.

1.8 LA FUNCION SALTO UNIDAD DE HEAVISIDE

La función definida por $$H(t - a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t \ t \ a \end{cases} \tag{21}$$

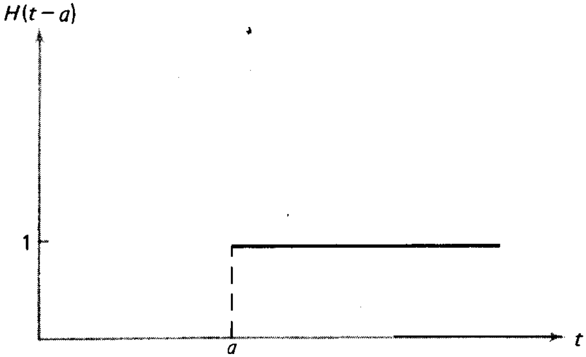


Figura 6.2

llamada la *función* ***salto unidad de Heaviside,*** o más brevemente la ***función de Heaviside o*** la ***función salto unidad,*** es frecuentemente útil en aplicaciones. El gráfico se muestra en la Figura 6.2.

La transformada de Laplace de esta función está dada por

$$\mathscr{L}\{H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)dt = \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

asumiendo que $s > 0$.

Varias funciones discontinuas frecuentemente se pueden expresar en términos de la función de Heaviside como se indica en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Exprese la función $F(t) = \begin{cases} \text{sen}\, t, & t > \pi \\ \cos t, & t < \pi \end{cases}$ en términos de la función salto unidad de Heaviside.

Solución La función dada se puede expresar como

$$F(t) = \cos t + \begin{cases} \text{sen}\, t - \cos t, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases} = \cos t + (\text{sen}\, t - \cos t)\begin{cases} 1, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}$$

$$= \cos t + (\text{sen}\, t - \cos t)H(t-\pi)$$

EJERCICIOS A

1. Usando la definición, encuentre la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones. En cada caso especifique los valores de s para los cuales la transformada existe. Compare con los resultados obtenidos de la tabla de transformadas de Laplace.

(a) $3t - 2$. (b) $4\,\text{sen}\, 3t$. (c) $5 \cos 2t$.
(d) $10e^{-5t}$. (e) $2e^t - 3e^{-t} + 4t^2$. (f) $3\,\text{sen}\, 5t \quad 4 \cos 5t$.
(g) $6 \cosh 3t - 2\, \text{senh}\, 5t$. (h) $t(e^{-3t} - t^2 + 1)$.

2. **Dado que** $\mathscr{L}\{\text{sen } \omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ use la entrada 15 de la tabla para hallar $\mathscr{L}\{\cos \omega t\}$.

3. Halle la transformada de Laplace de cada una de las siguientes
   (a) $t^2 e^{3t}$. (b) $e^{2t}(5 \text{ sen} 2t - 2 \cos 2t)$. (c) $t(\text{sen}\, t + e^{-t})$.
   (d) $(t^2 + 1)^2$. (e) $t(\cosh 2t - 2t)$. (f) $8 \text{ senh}^2 3t$.

*4. Use la función gamma para hallar (a) $\mathscr{L}\{t^{3/2}\}$, (b) $\mathscr{L}\{(t^{1/4} + t^{-1/4})^2\}$, (c) $\mathscr{L}\{t^{2/3}\}$, (d) $\mathscr{L}\{\sqrt{t}e^t\}$ NO

5. (a) Explique cómo puede usted estar seguro que la función $F(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$ tiene una transformada de Laplace sin realmente hallarla. (b) Encuentre $\mathscr{L}\{F(t)\}$.

*6. Verifique las entradas 15 y 16 en la tabla para las funciones (a) $Y(t) = te^t$, (b) NO $Y(t) = t^2$ sen $3t$.

7. Exprese cada una de las siguientes funciones en términos de la función de Heaviside y obtenga sus gráficos.

   (a) $F(t) = \begin{cases} 2, & t > 1 \\ 1, & t < 1 \end{cases}$ (b) $F(t) = \begin{cases} t^2, & t > 3 \\ 2t, & t < 3 \end{cases}$ (c) $F(t) = \begin{cases} 0, & t > 2\pi \\ \cos t, & t < 2\pi \end{cases}$

8. Hallar (a) $\mathscr{L}\{tH(t-1)\}$. (b) $\mathscr{L}\{e^t H(t-2) - e^{-t}H(t-3)\}$.

EJERCICIOS B

1. Obtenga $\mathscr{L}\{\text{sen}\, \omega t\}$ por (a) evaluación directa; (b) usando el hecho de que sen ωt satisface la ecuación diferencial $Y'' + \omega^2 Y = 0$. Haga lo mismo para $\mathscr{L}\{\cos \omega t\}$.

2. Halle $\mathscr{L}\{te^{-t} \text{ sen } t\}$.

3. Pruebe que $\mathscr{L}\{e^{\sqrt[3]{t}}\}$ existe pero $\mathscr{L}\{e^{e^t}\}$ no existe.

4. Si $\mathscr{L}\{F(t)\}$ existe para $s = \alpha$, pruebe que también existe para todo $s > \alpha$.

5. Halle la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la Figura 6.3.

6. Muestre que aunque la función $F(t) = t^{-1/2}$ no satisface las condiciones del teorema en la página 269 aún tiene una transformada de Laplace. ¿Hay alguna contradicción en esto? Explique

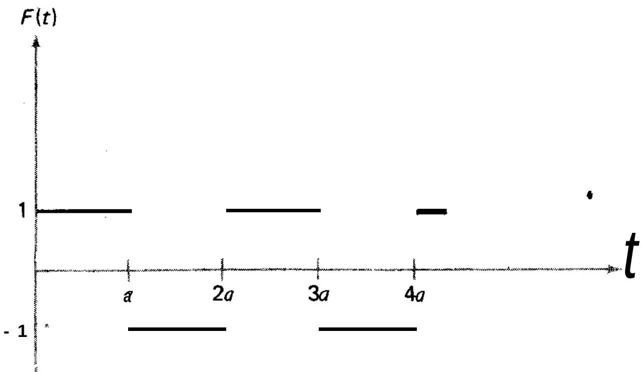


Figura 6.3

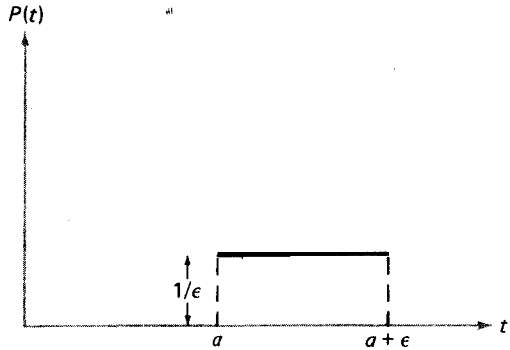


Figura 6.4

7. Exprese en términos de la función de Heaviside

$$F(r) = \begin{cases} 3 \text{ sen } t, & t \leqq \pi \\ t^2, & \pi < t \leqq 2\pi \\ t - \cos t, & t > 2\pi \end{cases}$$

8. La función

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1/\epsilon, & a \leqq t \leqq a + \epsilon \\ 0, & t > a + \epsilon \end{cases}$$

donde $a \geq 0$ y $\epsilon > 0$, cuyo gráfico se indica en la Figura **6.4, es a menudo** llamada una *función impulso.*
(a) Exprese esta función en términos de la función salto unidad de Heaviside.
(b) Halle la transformada de Laplace de esta función.
(c) Muestre que el límite de la transformada de Laplace en (b) cuando $\epsilon \to 0$ existe y es igual a e^{-as}.

EJERCICIOS C

1. Muestre que F(t) = 1, $t > 0$ y $G(t) = \begin{cases} 5, & t = 3 \\ 1, & t \neq 3 \end{cases}$ tienen las mismas transformadas de Laplace, a saber $1/s$, $s > 0$. ¿Puede usted pensar de otras funciones con la misma transformada de Laplace? Explique.

2. Sea $F(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$ (a) Encuentre $\mathscr{L}\{F(t)\}$ y $\mathscr{L}\{F'(t)\}$. (b) Es cierto para este caso que $\mathscr{L}\{F'(t)\} = s\mathscr{L}\{F(t)\} - F(0)$?

3. Pruebe que si Y(t) tiene una discontinuidad en $t = 0$ entonces debemos remplazar la entrada 15 de la tabla por $sy - Y(0+)$, donde $Y(0+)$ significa $\lim_{\epsilon \to 0+} Y(t)$ esto es, el límite cuando $t \to 0$ por valores positivos. Usando esto explique la discrepancia en el Ejercicio 2.

4. Sea $F(t)$ una función periódica de período P, empezando en $t = 0$ (por ejemplo, vea la Figura 6.2). (a) Si $\mathscr{L}\{F(t)\}$ existe muestre que está dada por

$$\frac{\int_0^P e^{-st} F(t)\,dt}{1 - e^{-sP}}$$

(b) Usando (a) obtenga la transformada de Laplace de $F(t) = |\text{sen } t|$ donde el período es π.

5. Pruebe el teorema en la página 269. *Sugerencia:* Escriba

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

y luego use el hecho de que

$$\left|\int_a^b e^{-st}F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b e^{-st}|F(t)|\,dt$$

6. (a) Pruebe que si F(t) es seccionalmente continua en todo intervalo finito y de orden exponencial entonces su transformada de Laplace f(s) tiende a cero cuando $s \to \infty$. (b) Ilustre el resultado en (a) dando varios ejemplos. (c) ¿Qué concluiría usted acerca de F(t) si $\lim_{s\to\infty} f(s) \neq 0$? (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 5.)

7. Sea $F(t) = e^t$. Usando la expansión en serie $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$ y tomando la transformada de Laplace término a término, verifique formalmente que $\mathscr{L}\{e^t\} = 1/(s-1)$, $s > 1$. ¿Cómo puede usted usar este método para hallar (a) $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\}$; (b) $\mathscr{L}\{\cos t\}$; (c) $\mathscr{L}\{e^{-t}\}$? ¿Puede usted justificar el método?

8. Muestre que si $a > 0$ y $n > 1$ entonces (a) $\int_0^t H(u-a)\,du = (t-a)H(t-a)$,

$$\text{(b)} \int_0^t (u-a)^n H(u-a)\,du = \frac{(t-a)^{n+1}H(t-a)}{n+1}.$$

9. Muestre que la función ilustrada gráficamente en la Figura 6.2 se puede representar por

$$H(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H(t-na)$$

2 Funciones impulso y la función delta de Dirac

Suponga que una fuerza $F(t)$ que depende del tiempo t actúa sobre una partícula de masa m del tiempo t_0 al tiempo t_1. Si v es la velocidad instantánea de la partícula durante este intervalo de tiempo, entonces por la ley de Newton tenemos

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{1}$$

así que

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} d(mv) = mv_1 - mv_0 \tag{2}$$

donde v_0 y v_1 son las velocidades de la partícula en tiempos t_0 y t_1, respectivamente.

Puesto que mv es el momentum de la partícula, la cantidad a la derecha de (2) es el cambio de momentum sobre el intervalo. La integral a la izquierda de (2) a menudo se llama el ***impulso de la fuerza*** sobre el intervalo, o brevemente el ***impulso.*** Así, en palabras (2) dice que

$$\text{impulso} = \text{cambio en momentum} \tag{3}$$

Ahora suponga que la diferencia entre t_1 y t_0 está dada por $\epsilon > 0$, así que $t_1 = t_0 + \epsilon$. Si asumimos que la fuerza es una constante, digamos A, en el in-

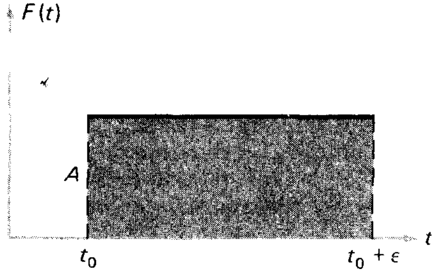


Figura 6.5

tervalo, 0 si asumimos que ϵ se toma lo suficientemente pequeño para que la fuerza sea aproximadamente. igual a A en el intervalo, entonces la fuerza se puede representar gráficamente como en la Figura 6.5. El impulso denotado por Z está entonces dado por

$$I = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} A \; dt = A\epsilon \tag{4}$$

y está representada geométricamente por el área del rectángulo sombreado en la Figura 6.5.

Suponga ahora que el impulso es una constante no cero, digamos 1, así que como se ve de (2) hay un cambio unitario en momentum sobre el intervalo, esto es, $A\epsilon$ = 1. Entonces cuando $\epsilon \to 0$ tenemos que $A \to \infty$, así que geométricamente el ancho del rectángulo en la Figura 6.5 se hace más grande de tal manera que el área permanezca igual a 1.

Si el estudiante prefiere no asumir que F(t) esté dada como en la Figura 6.5, sino en vez que varíe de alguna manera como se indica en la Figura 6.6, entonces de nuevo asumiendo Z= 1 tenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} F(t)dt = 1 \tag{5}$$

En tal caso, aún cuando la forma de la función no se conozca, no es difícil ver que si (5) debe ser cierto, cuando $\epsilon \to 0$, F(t) debe tender a infinito. La interpretación geométrica es que cuando ϵ-0 el pico de la curva de la Figura 6.6 debe tender a infinito de tal manera que el área bajo ella sea igual a 1, estando esencialmente de acuerdo con la discusión dada en relación con la Figura 6.5.

Estas ideas nos llevan naturalmente al tema matemático de intentar describir funciones, **tales** como las representadas por las Figuras 6.5 o 6.6, las

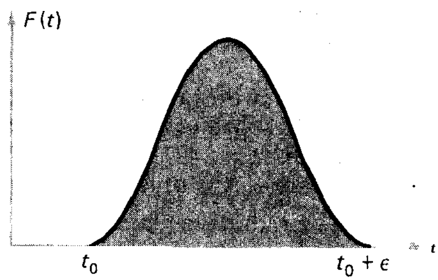


Figura 6.6

cuales tienden a infinito cuando $\epsilon \to 0$ de tal manera que sus integrales (geométricamente sus áreas asociadas y físicamente el impulso) permanezcan constantes. Tales funciones por obvias razones se llaman *funciones impulso* o, en el caso especial donde la constante es 1, *funciones impulso unitario.* Puesto que podemos considerar F(t) como cero fuera del intervalo de t_0 a $t_0 + \epsilon$, podemos pensar más generalmente en una función impulso unitaria caracterizada por las siguientes dos propiedades

$$1. \quad F(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \tag{6}$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt = 1 \tag{7}$$

Tales funciones ciertamente no son de las clases convencionales con las cuales hemos tratado, y de hecho, como lo sugiere la Propiedad 1, no son realmente funciones. Para distinguirlas de los tipos familiares de funciones, se han llamado *funciones generalizadas,* y los matemáticos han tenido éxito en construir una teoría sobre ellas llamada la *teoría de distribuciones.**

En su investigación sobre mecánica cuántica, Dirac encontró las funciones impulso de gran uso.‡ El introdujo lo que se llamó la *función delta,* ahora frecuentemente llamada de *función delta de Dirac,* con las propiedades anteriores, esto es,

$$1. \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \tag{8}$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1 \tag{9}$$

Un resultado importante relativo a la función delta es que, si $f(t)$ es cualquier función la cual es continua en $t = t_0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t)\,dt = f(t_0) \tag{10}$$

Esto algunas veces se llama la *propiedad selectoru* de la función delta, puesto que todos los valores de $f(t)$ se elimina excepto aquellos para los cuales $t = t_0$ y sólo permanece el resultado $f(t_0)$.

La propiedad selectora se puede hacer plausible si nos fijamos que el integrando en lado izquierdo de (10) es cero excepto donde $t = t_0$. Entonces puesto que $f(t) = f(t_0)$ en $t = t_0$, podemos remplazar $f(t)$ por $f(t_0)$ en (10) para llegar a $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0)\,dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$

usando la segunda propiedad de la función delta.

Si tomamos el caso especial $f(t) = e^{-st}$ en (10), obtenemos la transformada de Laplace de la función delta, esto es,

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - t_0)\,dt = e^{-st_0} \tag{11}$$

Si en particular $t_0 = 0$, tenemos
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{12}$$

*Ver referencia [19] por ejemplo.
‡ Ver referencia [8] .

El hecho de que la transformada de Laplace de $\delta(t)$ no tienda a cero cuando $s \to \infty$ sirve como un recordatorio de que la función delta no es una función convencional (vea el Ejercicio 6C, página 273). Para ganar habilidad en el uso de la función delta, consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt.$

Solución Sea $t_0 = \pi/2$ y $f(t) = e^{-t^2}$. Entonces por la propiedad (10) y $f(t_0) = f(\pi/2) = e^{-\pi^2/4}$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt = e^{-\pi^2/4}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Evalúe $\int_{-\infty}^{t} \delta(u - t_0)du.$

Solución Puesto que $\delta(u - t_0) = 0$ para $u < t_0$, sigue que la integral es cero para $t < t_0$.

En el caso $t > t_0$, la integral se puede remplazar para todos los propósitos prácticos por la integral en (9), puesto que $\delta(u - t_0) = 0$ para $u > t_0$. Así, la integral es 1 para $t > t_0$.

Entonces tenemos $$\int_{-\infty}^{t} \delta(u - t_0)du = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

Se debería notar que la función a la derecha es la función de Heaviside de modo que

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u - t_0)du = H(t - t_0) \tag{13}$$

Si formalmente tomamos la derivada de ambos lados de (13), obtenemos

$$H'(t - t_0) = \delta(t - t_0) \tag{14}$$

esto es, la función delta es la derivada formal de la función salto unidad de Heaviside. Decimos derivada formal debido a que la función de Heaviside no tiene una derivada en el sentido ordinario. En la teoría de las distribuciones mencionada antes, se consideran tales derivadas generalizadas.

La función de Dirac es útil en muchos problemas aplicados que surgen en ingeniería, física y otras ciencias. Por ejemplo, si golpeamos un objeto con un martillo o golpeamos un tambor con una vara, una fuerza algo grande actúa por un intervalo corto de tiempo. Esta fuerza se puede aproximar por una función delta multiplicada por alguna constante apropiada de magnitud igual al impulso total. La función delta se puede también usar en electricidad, tal como cuando hay grandes picos en voltaje o corriente por intervalos cortos de tiempo.

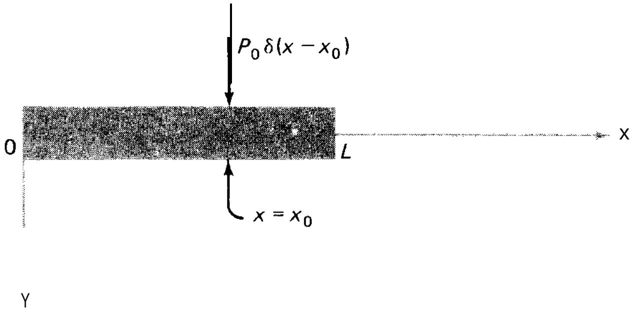


Figura 6.7

Una aplicación interesante de la función delta también surge en conexión con los problemas de vigas. Suponga que la viga de la Figura 6.7 tiene una carga concentrada P_0 actuando sobre ella en la localización $x = x_0$ desde el extremo izquierdo. Si asumimos que $w(x)$ es la fuerza por unidad de longitud actuando sobre la viga, entonces tendremos

$$\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} w(x)dx = P_0 \tag{15}$$

donde se asume que ϵ es pequeño. El resultado (15) en el limite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ sugiere que expresemos $w(x)$ en términos de la función delta como

$$w(x) = P_0\delta(x - x_0) \tag{16}$$

un resultado útil para hallar la deflexión de la viga debido a la carga concentrada.

Presentaremos algunas aplicaciones de la función delta al final de este capítulo.

EJERCICIOS A

1. Evalúe cada una de las siguientes integrales que involucran la función delta.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \cos 2t\, dt.$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-3t}\delta(t - \frac{1}{2})dt.$

(c) $\int_0^1 t^3\delta(t - \frac{1}{3})dt.$ (d) $\int_0^1 t^3\delta(t + \frac{1}{3})dt.$

(e) $\int_0^{\infty} t^{3/2}\delta(t - \frac{9}{4})dt.$ (f) $\int_0^{\pi} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\, t^2\, dt.$

2. Evalúe cada una de las siguientes transformadas de Laplace que involucran la función delta.
(a) $\mathscr{L}\{e^t\delta(t-2)\}$. (b) $\mathscr{L}\{e^{-3t}\delta(t-\pi)\}$. (c) $\mathscr{L}\{t\delta(t-1)\}$. (d) $\mathscr{L}\{te^{-t}\delta(t+1)\}$.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la transformada de Laplace de la función representada en el gráfico de la Figura 6.4. (a) Muestre que el límite de la transformada de Laplace hallada en (a) es e^{-st_0}. (c) Discuta la relación del resultado hallado en (b) con la función delta.
2. Evalúe $\mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\cos t^3\}$.
3. Discuta la relación del Ejercicio 8B, página272, con la función delta.

4. Muestre que $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)f(t)dt = \begin{cases} \dfrac{f(0)}{a}, & \text{si } a > 0 \\ -\dfrac{f(0)}{a}, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

¿Qué supuestos debe hacer usted en relación a f(t)?

5. Evalúe (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2t + \pi)\text{sen } 3t\, dt$. (b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-1)^2}\, \delta(3t)\, dt$.

EJERCICIOS C

1. Deduzca formalmente los siguientes resultados relativos a las derivadas de la función delta.

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0)$. (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)f(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

   (c) $\mathscr{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$, $n = 1, 2, 3,$.

2. Muestre que si $t_0 > 0$ y f(t) es continua en $t = \pm t_0$ entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - t_0^2)f(t)dt = \frac{1}{2t_0}[f(t_0) + f(-t_0)]$$

3. Considere la secuencia de funciones $\phi_n(t) = n/\pi(1 + n^2 t^2)$, $n = 1, 2, 3,$.

   (a) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)dt = 1$. (b) Asumiendo que $f(t)$ es continua en $t = 0$, muestre que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)f(t)dt = f(0)$

   (c) Discuta una posible conexión entre las funciones $\phi_n(t)$ y la función delta.

3 Aplicación de las transformadas de Laplace a ecuaciones diferenciales

3.1 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS. TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Para ver cómo se pueden usar las transformadas de Laplace para hallar soluciones a ecuaciones diferenciales, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $Y'' + 4Y = 16t$, $Y(0) = 3$, $Y'(0) = -6$.

Si tomamos las transformadas de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial encontramos al usar la entrada 16 en la tabla y denotando $\mathscr{L}\{Y\}$ por y,
$$\mathscr{L}\{Y''\} + \mathscr{L}\{4Y\} = \mathscr{L}\{16t\}, \quad s^2y - sY(0) - Y'(0) + 4y = \frac{16}{s^2}$$

o
$$s^2y - 3s + 6 + 4y = \frac{16}{s^2}$$

Y
$$y = \frac{3s - 6}{s^2 + 4} + \frac{16}{s^2(s^2 + 4)} \qquad (1)$$

Parece lógico que si pudiéramos encontrar la función cuya transformada de Laplace es el lado derecho de (1) entonces tendríamos la solución. Para hacer esto escribimos (1) en la forma

$$y = \frac{3s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+4} + \frac{16}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{3s}{s^2+4} - \frac{10}{s^2+4} + \frac{4}{s^2}$$

Sabemos ahora que

La transformada de Laplace de $\cos 2t$ es $\dfrac{s}{s^2+4}$

La transformada de Laplace de sen $2t$ es $\dfrac{2}{s^2+4}$,

La transformada de Laplace de t es $\dfrac{1}{s^2}$.

Parecería por tanto que la solución buscada es

$$Y(t) = 3\cos 2t - 5 \operatorname{sen} 2t + 4t.$$

Esta ciertamente satisface la ecuación diferencial dada y las condiciones y por tanto es la solución requerida.

En el problema acabado de considerar necesitamos encontrar una función $F(t)$ cuya transformada de Laplace f(s) se conoce. Tal función se llama una *transformada inuersa de Laplace* y se denota por $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$ donde $\mathscr{L}^{-1}$ se llama el *operador de la transformada inversa de Laplace*.
Del hecho de que $\mathscr{L}\{F(t) + G(t)\} = f(s) + g(s)$, $\mathscr{L}\{cF(t)\} = cf(s)$ tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s) + g(s)\} = F(t) + G(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{g(s)\} \tag{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{cf(s)\} = cF(t) = c\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} \tag{3}$$

lo cual muestra que $\mathscr{L}^{-1}$ es un operador lineal.

En vista de nuestra experiencia previa en relación a los problemas de existencia y unicidad (vea la página 20, por ejemplo) surgen varias preguntas.

1. ***Existencia.*** ¿Existe la transformada inversa de Laplace de una función $f(s)$?
2. ***Unicidad.*** ¿Si esta existe, es única?
3. ***Determinación.*** ¿Cómo la encontramos?

Desde el punto de vista práctico, como ya lo hemos mencionado, el numeral 3 parece ser el más importante. Pero los otros dos también son importantes. En lo que sigue investigaremos varios métodos por los cuales las transformadas inversas de Laplace se pueden encontrar y al mismo tiempo mostraremos cómo resolver varias ecuaciones diferenciales usando estos métodos. En la página 287 consideraremos las preguntas de existencia y unicidad.

3.2 ALGUNOS METODOS PARA HALLAR TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Del problema de discusión anterior, de una vez es claro que la proficiencia en resolver ecuaciones diferenciales usando transformadas de Laplace es prácticamente sinónimo con la proficiencia en determinar las transformadas de Laplace inversas. Varios métodos están disponibles para hallar transformadas inversas de Laplace. Estos son

(a) Uso de las tablas de la transformada de Laplace
(b) Uso de teoremas sobre las transformadas inversas de Laplace
(c) El método de las fracciones parciales
(d) El método de convoluciones
(e) Métodos misceláneos

Trataremos ahora ejemplos que ilustran cada uno de éstos.

(a) ***Uso de las tablas de la transformada de Laplace***

Suponga que deseamos hallar $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$ donde f(s) se conoce. Entonces necesitamos sólo mirar en la tabla de la transformada de Laplace lo opuesto a f(s). Considere por caso el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resuelva $Y'' + Y = 16 \cos t$, $\quad Y(0) = 0,\ Y'(0) = 0.$

Solución Tomando las transformadas de Laplace encontramos

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + y = \frac{16s}{s^2+1} \quad 0 \quad y = \frac{16s}{(s^2+1)^2}$$

Por tanto, de la entrada 13, tenemos el hacer $\omega = 1$ y dividiendo por 2 (justificado por la propiedad lineal de la transformada de Laplace) la solución requerida

$$Y = 16\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = 8t \operatorname{sen} t$$

En algunos casos una transformada inversa no se encuentra directamente de la tabla pero se puede obtener al combinar transformadas que están en la tabla. Considere por caso el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-3}{s^2+1}\right\}$.

Solución La transformada como la dada no está en la tabla. Sin embargo al escribirla como

$$2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

vemos en las entradas 6 y 7 con $\omega = 1$ que la solución requerida es $2 \cos t - 3 \operatorname{sen} t$.

Es bastante evidente que el éxito en usar las tablas depende en lo extensas que sean las tablas y también en nuestra habilidad para usar las tablas eficientemente.* En caso de que no podamos encontrar la transformada requerida en la tabla se deben usar otros métodos.

*Como en el caso de la diferenciación e integración, el estudiante debería, por facilidad, llegar a estar familiarizado con ciertas transformadas de Laplace básicas, por ejemplo las entradas 1-7.

(b) *Uso de teoremas sobre las transformadas inversas de Laplace*

Correspondiente a cada teorema desarrollado para las transformadas de Laplace hay un teorema sobre las transformadas inversas de Laplace. Por ejemplo correspondiente a los teoremas en la página 266, tenemos

Teorema. Si $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces

1. $\mathscr{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$.
2. $\mathscr{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Resuelva $Y'' + 2Y' + 5Y = 0$, $\quad Y(0) = 3$, $Y'(0) = -7$.

Solución Tomando las transformadas de Laplace encontramos

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{sy - Y(0)\} + 5y = 0, \quad (s^2 + 2s + 5)y - 3s + 1 = 0$$

y así
$$y = \frac{3s - 1}{s^2 + 2s + 5}$$

Para hallar la inversa, completemos el cuadrado en el denominador y reescribámosla como

$$y = \frac{3(s+1) - 4}{(s+1)^2 + 4} = 3\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}\right\} - 4\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right\}$$

De la primera parte del teorema vemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} = e^{-t}\cos 2t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} = \tfrac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

De donde $\quad y = 3e^{-t}\cos 2t - \tfrac{4}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t = e^{-t}(3\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t)$

(c) *El método de las fracciones parciales*

En muchos problemas llegamos a una transformada la cual es una función racional de s [esto es, una función con la forma $P(s)/Q(s)$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios y el grado de $P(s)$ es menor que el de Q(s)] . Entonces es con frecuencia útil expresar el resultado dado como una suma de fracciones más simples, llamadas *fracciones parciales.* Como un ejemplo considere el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resuelva $Y'' - 3Y' + 2Y = 12e^{4t}$, $\quad Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$.

Solución La transformación de Laplace produce,

$$(s^2 - 3s + 2)y - s + 3 = \frac{12}{s-4} \quad \text{o} \quad y = \frac{s^2 - 7s + 24}{(s-1)(s-2)(s-4)} \tag{4}$$

Para descomponer esto en fracciones parciales, se pueden usar dos métodos.

Primer método. Si *A, B,* C son constantes indeterminadas tenemos

$$\frac{s^2 - 7s + 24}{(s - 1)(s - 2)(s - 4)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 4} \tag{5}$$

Multiplicando por $(s - 1)(s - 2)(s - 4)$ obtenemos

$$\begin{aligned} s^2 - 7s + 24 &= A(s - 2)(s - 4) + B(s - 1)(s - 4) + C(s - 1)(s - 2) \\ &= (A + B + C)s^2 + (-6A - 5B - 3C)s + (8A + 4B + 2C) \end{aligned}$$

Puesto que esto es una identidad tenemos al igualar coeficientes de potencias similares de s,

$$A + B + C = 1, \qquad -6A - 5B - 3C = -7, \qquad 8A + 4B + 2C = 24$$

Resolviendo éstas encontramos $A = 6$, $B = -7$, $C = 2$. Así,

$$Y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s - 1} - \frac{7}{s - 2} + \frac{2}{s - 4}\right\} = 6e^t - 7e^{2t} + 2e^{4t}$$

Segundo método. Multiplicando ambos lados de (5) por $(s - 1)$ encontramos

$$\frac{s^2 - 7s + 24}{(s - 2)(s - 4)} = A + \frac{B(s - 1)}{s - 2} + \frac{C(s - 1)}{s - 4}$$

Luego haciendo $s = 1$,

$$A = \frac{1 - 7 + 24}{(1 - 2)(1 - 4)} = 6$$

Similarmente, multiplicando (5) por $s - 2$ y haciendo $s = 2$ produce $B = -7$, y multiplicando (5) por $s - 4$ y haciendo $s = 4$ produce $C = 2$. El método entonces procede como antes

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2 - 7s + 17}{(s - 1)(s^2 + 4)}\right\}$

Solución Asuma que

$$\frac{5s^2 - 7s + 17}{(s - 1)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4} \tag{6}$$

Primer método. Multiplicando por $(s - 1)(s^2 + 4)$ tenemos

$$5s^2 - 7s + 17 = (A + B)s^2 + (C - B)s + 4A - C$$

Entonces $\quad A + B = 5, \qquad C - B = -7, \qquad 4A - C = 17$

Así $A = 3$, $B = 2$, $C = -5$ y tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s - 1} + \frac{2s - 5}{s^2 + 4}\right\} &= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} - 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} \\ &= 3e^t + 2\cos 2t - \tfrac{5}{2}\operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

Segundo método. Multiplicando (6) por $s - 1$ y haciendo $s = 1$ produce $A = 3$. *Así*

$$\frac{5s^2 - 7s + 17}{(s - 1)(s^2 + 4)} = \frac{3}{s - 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

Para determinar C es conveniente colocar $s = 0$ y obtener C = 5. Finalmente al colocar s = − 1 por ejemplo encontramos $B = 2$. El método luego procede como antes.

Note que en ambos ejemplos, el primer método es general pero la solución de las ecuaciones simultáneas es tedioso. El segundo método, aunque más corto, es más efectivo cuando el denominador se puede factorizar en factores lineales distintos. Casos más complicados se consideran en los ejercicios.

(d) *EL método de convoluciones*

Ya hemos notado que si *f(s)* y g(s) son las transformadas de Laplace de $F(t)$ y G (t), respectivamente, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s) + y(s)) = F(t) + G(t), \qquad \mathscr{L}^{-1}\{f(s) - g(s)\} = F(t) - G(f)$$

Es de interés preguntar si hay alguna expresión para la transformada inversa de Laplace del producto $f(s)g(s)$ en términos de *F(t) y G(t).* La respuesta es si y el resultado se resume en el siguiente

Teorema. Si $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$ = F(t) y $\mathscr{L}^{-1}\{g(s)\}$ = G(t) entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)\,du = F*G$$

donde llamamos *F*G* la convolución de *F y G.* En forma equivalente, tenemos

$$\mathscr{L}\{F*G\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u)\,du\right\} = f(s)g(s)$$

Este teorema, llamado el *teorema de convolución,* con frecuencia es útil para obtener transformadas inversas de Laplace. Antes de presentar una prueba del teorema, consideremos varios ejemplos de su uso.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Encontrar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Solución Tenemos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$

Por tanto por el teorema de convolución

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos t * \operatorname{sen} t$$

$$= \int_0^t \cos u \operatorname{sen}(t \quad u)\,du = \int_0^t \cos u[\operatorname{sen} t \cos u - \cos t \operatorname{sen} u]\,du$$

$$= \operatorname{sen} t \int_0^t \cos^2 u\,du - \cos t \int_0^t \operatorname{sen} u \cos u\,du$$

$$= \operatorname{sen} t[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t] - \cos t[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t] = \tfrac{1}{2}t \operatorname{sen} t$$

Note que esto coincide con la entrada 13.

Si hacemos G(t) = 1 en el teorema de convolución obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du \tag{7}$$

Así multiplicando $f(s)$ por $1/s$ corresponde a integrar F(t) de 0 a t; multiplicando por $1/s^2$ a integración doble, etc. Para un uso de esto considere

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Encontrar (a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$, (b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$.

Solución (a) Puesto que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$ tenemos, usando (7),

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen} u\, du = 1 - \cos t$$

(b) Puesto que por (a), $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t$ tenemos, usando (7),

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1 - \cos u)du = t - \operatorname{sen} t$$

Haciendo G(t) = e^{at} en el teorema de convolución encontramos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s-a}\right\} = \int_0^t F(t)e^{a(t-u)}\, du = e^{at}\int_0^t e^{-au}F(u)du \tag{8}$$

Note que (7) es un caso especial de (8) con $a = 0$. De (8) vemos que hay una correspondencia entre

$$\frac{1}{s-a} \quad \text{y} \quad e^{at}\int_0^t e^{-au}(\quad)du \tag{9}$$

donde el primero se puede considerar como un operador actuando sobre *f(s)* mientras que el segundo se considera como un operador actuando sobre F(t). La correspondencia tiene algún parecido con la ecuación (31) en la sección sobre métodos de operador en la página 208. Esto proporciona una clave para la conexión entre s y el operador D y así la conexión entre los métodos de la transformada de Laplace y los métodos operacionales de Heaviside.

Para presentar una prueba del teorema de convolución, notamos primero que las transformadas de Laplace de F(t) y G(t) se pueden escribir, respectivamente, como

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx, \qquad g(s) = \int_0^\infty e^{-sy}G(y)dy \tag{10}$$

Podemos escribir éstos en términos de la función salto unidad de Heaviside como

$$f(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx}F(x)H(x)dx, \qquad g(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-sy}G(y)H(y)dy \tag{11}$$

Entonces $I = f(s)g(s) = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}F(x)H(x)dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sy}G(y)H(y)dy\right\}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(x+y)}F(x)H(x)G(y)H(y)dx\,dy$$

usando un procedimiento similar a aquel en la prueba de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ en la página 267.

Escribamos ahora esta integral doble como la integral iterada

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)H(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(x+y)}G(y)H(y)dy\right]dx \tag{12}$$

Suponga que en la integral entre paréntesis cambiemos la variable de integración de y a t, donde $x + y = t$, esto es, $y = t - x$. Entonces (12) se convierte en

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)H(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}G(t-x)H(t-x)dt\right]dx \tag{13}$$

o al cambiar el orden de integración

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x)H(x)G(t-x)H(t-x)dx\right]dt \tag{14}$$

Ahora debido a la definición de la función de Heaviside, el integrando de la integral entre paréntesis es cero excepto para $0 < x < t$, y para estos valores de x las funciones de Heaviside son iguales a 1. Así (14) se convierte en

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t F(x)G(t-x)dx\right]dt$$

o

$$I = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right]dt = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\right\} = \mathscr{L}\{F*G\}$$

al usar $x = u$. Esto completa la prueba. Los intercambios del orden de las integrales en esta prueba se pueden justificar si asumimos que las funciones F y G satisfacen las condiciones en la página 269 para la existencia de sus transformadas de Laplace.

La convolución con frecuencia es útil para resolver *ecuaciones integrales* donde la función desconocida a ser determinada está bajo el signo de la integral. Como una ilustración considere

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Resuelva la ecuación integral $Y'(t) = 3t + \int_0^t Y(u)\operatorname{sen}(t-u)du.$

Solución La ecuación integral se puede escribir en términos de convolución como

$$Y(t) = 3t + Y(t)*\operatorname{sen} t$$

Luego tomando la transformada de Laplace y usando el teorema de convolución tenemos

$$y(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{y(s)}{s^2+1} \quad \text{o} \quad y(s) = \frac{3(s^2+1)}{s^4} = \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^4}$$

Luego tomando la transformada inversa de Laplace encontramos $Y(t) = 3t + \frac{1}{2}t^3$.

El teorema de convolución es frecuentemente útil para obtener soluciones a ecuaciones diferenciales en las cuales hay funciones cuyas transformadas de Laplace son difíciles o aún imposibles de encontrar. Por caso consideremos el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Resuelva el problema de valor inicial $Y'' + Y = e^{-t^2}$, $E'(0) = 0$, $Y'(0) = 0$. (15)

Solución Remplace e^{-t^2} por $F(t)$ y denote su transformada de Laplace por $f(s)$. Entonces. de la ecuación diferencial y condiciones dadas tenemos

$$s^2 y \quad sY(0) \quad Y'(0) + y = f(s) \quad \text{o} \quad y = \frac{f(s)}{s^2+1}$$

Puesto que $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-t^2}$, y-l $\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$

tenemos $$Y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2+1}\right\} = \int_0^t e^{-u^2}\operatorname{sen}(t-u)\,du \tag{16}$$

La integral en (16) no se puede evaluar exactamente.

Es interesante notar que si el lado derecho de la ecuación diferencial en (15) fuera e^{t^2} en vez de e^{-t^2} la transformada de Laplace no existiría, pero la solución sin usar transformadas de Laplace es en efecto

$$Y = \int_0^t e^{u^2}\operatorname{sen}(t-u)\,du \tag{17}$$

Así formalmente el método de las transformadas de Laplace se puede usar para llegar a soluciones posibles las cuales se pueden luego chequear.

El hecho de que las técnicas de la transformada de Laplace puedan conducir a resultados correctos aún en los casos donde las funciones no tienen transformadas de Laplace parece indicar que hay algo más básico que la transformada de Laplace, pero aún bastante relacionado con ella, el cual puede usarse en su lugar. De los ejemplos anteriores parecería que la *misma convolución* es el concepto deseado. Esto se indica además por el hecho de que la convolución obedece muchas de las reglas comunes del álgebra, tales como las siguientes

(a) $F*G = G*H$ Ley conmutativa
(b) $F*(G*H) = (F*G)*H$ Ley asociativa
(c) $F*(G+H) = F*G + F*H$ Ley distributiva

Esto ha conducido a algunos autores a evitar el uso total de la transformada de Laplace y tratar sólo con convoluciones.* Por medio de este procedimiento es posible construir funciones de impulso rigurosas tales como la *función delta de Dirac*.

(e) *Métodos misceláneos*

Varios métodos especiales se pueden también usar para hallar las transformadas inversas de Laplace.

*Ver por ejemplo, la referencia [19]

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

Encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\}$ donde $f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\}$ y $a > 0$

Solución Tenemos por definición $\quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt$

Entonces multiplicando por e^{-as} encontramos $\quad e^{-as}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)}F(t)dt$

Con $t + a = u$ esta integral se puede escribir como

$$e^{-as}f(s) = \int_a^{\infty} e^{-su}F(u - a)du = \int_0^{a} e^{-su}(0)du + \int_a^{\infty} e^{-su}F(u - a)du$$

$$= \mathscr{L}\{G(t)\}$$

donde
$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ F(t - a), & t > a \end{cases}$$

Tenemos así al tomar las transformadas inversas de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} 0, & t < a \\ F(t - a), & t > a \end{cases}$$

Este resultado también se puede expresar en términos de la función unitaria de Heaviside como
$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = F(t - a)H(t - a)$$

El resultado de este ejemplo es importante y lo enunciamos para referencia en el siguiente

Teorema. Si $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} 0, & t < a \\ F(t - a), & t > a \end{cases} = F(t - a)H(t - a)$$

3.3 OBSERVACIONES CONCERNIENTES A LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Tácitamente hemos asumido en lo anterior que hay sólo una función que tiene alguna transformada de Laplace dada, esto es, hemos asumido que la transformada inversa de Laplace es única. Esto no es realmente así al notar aue la función

$$G(t) = \begin{cases} 5, \\ . \end{cases} \tag{18}$$

difiere de la función F(t) = 1, puesto que el valor de G(t) en $t = 3$ es 5 mientras que el valor de F(t) en $t = 3$ es 1. Sin embargo la transformada de Laplace de *ambas* funciones está dada por $1/s$, $s > 0$. Así la transformada inversa de Laplace de $1/s$ puede ser F(t) = 1 o la función G(t) dada en (18), o de hecho cualquiera de las infinitamente muchas funciones.

Una clave posible de la razón por qué no obtenemos unicidad se debe a que la función ***G(t)*** dada en (18) es discontinua en $t = 3$. A propósito se puede mostrar que si nos restringimos a las funciones continuas entonces la transformada inversa de Laplace es única. Este teorema, el cual es algo difícil de probar, se llama el teorema de *Lerch*.*

Ahora sabemos que si $F(t)$ es seccionalmente continua en todo intervalo finito y de orden exponencial entonces $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$ (vea el Ejercicio 6C, página 273). En caso de que se tuviera $\lim_{s\to\infty} f(s) \neq 0$ sigue que la transformada inversa no puede ser seccionalmente continua y de orden exponencial. Así $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$ es una *condición necesaria* para la existencia de una transformada inversa de Laplace que es seccionalmente continua y de orden exponencial. †

EJERCICIOS A

1. Encuentre las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones.

(a) $\dfrac{4}{s+2}$. (b) $\dfrac{3s}{s^2+9}$. (c) $\dfrac{15}{s^2+25}$.

(d) $\dfrac{6s-10}{s^2+4} - \dfrac{3}{s-4}$. (e) $\dfrac{2-s}{5+s^2}$. (f) $\dfrac{2+3s-s^2}{s^3}$.

2. Usando los teoremas sobre las transformadas inversas de Laplace encuentre cada una de las siguientes.

(a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$. (b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-10}{s^2-4s+20}\right\}$. (c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$

(d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-1)^4}\right\}$. (e) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{4s^2+4s+5}\right\}$.

3. Use el método de fracciones parciales para encontrar las transformadas inversas de Laplace de las siguientes

(a) $\dfrac{s+17}{(s-1)(s+3)}$. (b) $\dfrac{3s-8}{s^2-16}$. (c) $\dfrac{s-11}{(s+1)(s\quad 2)(s\quad 3)}$.

(d) $\dfrac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)}$. (e) $\dfrac{10}{s(s^2-2s+5)}$ (f) $\dfrac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

4. Use el método de convolución para encontrar cada una de las siguientes.

(a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-4}\right\}$. (b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$. (c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

5. Resuelva cada una de las siguientes y chequee las soluciones.

(a) $Y'' - 4Y' + 3Y = 0$, $Y(0) = 3$, $Y'(0) = 5$.
(b) $Y'' + 2Y' = 4$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -4$. (c) $Y'' + 9Y = 20e^{-t}$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$
(d) $Y'' - 2Y' + Y = 12t$, $Y(0) = 4$, $Y'(0) = 1$.
(e) $Y'' + 8Y' + 35Y = 100$, $Y(0) = 2$, $Y'(0) = 20$.

*Más generalmente Lerch ha probado que si dos funciones tienen la misma transformada de Laplace entonces ellas difieren a lo sumo por una función nula, esto es, una función N(t) tal que para todo $t > 0$

$$\int_0^t N(u)\,du = 0$$

Un significado práctico de esto es que, en un cierto sentido, la transformada inversa de Laplace es "esencialmente única", Para mayor discusión ver la referencia [6]

†La condición no es suficiente sin embargo. Para condiciones suficientes debemos considerar f(s) como una función de la variable compleja s. Ver [6] por ejemplo.

EJERCICIOS B

1. Use fracciones parciales para encontrar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{11s^2 - 10s + 11}{(s^2+1)(s^2-2s+5)}\right\}$

$\left[\textbf{\textit{Sugerencia:}}\right.$ Asuma $\dfrac{11s^2 - 10s + 11}{(s^2+1)(s^2-2s+5)} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{Cs+D}{s^2-2s+5}.\left.\right]$

2. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3+2s^2+4s+5}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$

3. Resuelva $Y''' + 3Y'' + 3Y' + Y = 12e^{-t}$, $Y(0) = 1$. $Y'(0) = 0$. $Y''(0) = -3$.

4. Resuelva $Y^{(IV)}$ $Y = \cos t$ sujeto a $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -1$, $Y''(0) = Y'''(0) = 0$.

5. Encuentre (a) $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-2s}/s^3\}$. (b) $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-s}/(s+1)^{3/2}\}$.

6. Resuelva $Y'' + Y = 0$, $Y(0) = 0$, $Y(\pi/2) = 4$.
[Sugerencia: Haga $Y'(0) = C$ y encuentre C.]

‘7. Pruebe (a) $F*G = G*F$. (b) $F*(G*H) = (F*G)*H$. Discuta.

8. Resuelva las siguientes ecuaciones integrales y chequee sus respuestas.
(a) $Y(t) = 1 + \int_0^t e^{2u}Y(t-u)du$. (b) $\int_0^t Y(u)\operatorname{sen}(t-u)du = Y(t) + \operatorname{sen} t - \cos t$.

9. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-1)^2}\right\}$.

10. Resuelva la ecuación integral $\int_0^t Y(u)Y(t-u)du = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$.

EJERCICIOS C

1. Muestre que $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ si $t > 0$.
(Sugerencia: Primero muestre que $\mathscr{L}\{I\} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathscr{L}\{\operatorname{sen} tx\}}{x}dx$ y evalúe la última integral.)

2. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-t}$ si $t = 0$.

3. Resuelva $tY'' - tY' + Y = 0$, $Y(0) = 0$. $Y'(0) = 1$.

4. Pruebe que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)\right\} = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

5. Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial que involucran la función delta de Dirac.
(a) $Y' + 2Y = 5\delta(t-1)$, $Y(0) = 2$. (b) $Y'' + Y = 3\delta(t-\pi)$, $Y(0) = 6$. $Y'(0) = 0$.
(c) $Y'' + 4Y' + 4Y = 6\delta(t-2)$, $Y(0) = 0$. $Y'(0) = 0$.

6. Trabaje el Ejercicio 4C, página 246, usando la función delta.

7. Sean P(s) y Q(s) polinomios en s donde el grado de $P(s)$ es menor que el grado de Q(s) y donde $Q(s) = 0$ tiene raíces distintas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pruebe la ***fórmula de expansión de Heaviside.***

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} e^{a_k t}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

9. Use el Ejercicio 7 para trabajar (a) el Ejemplo ilustrativo 4, página 281; (b) el Ejemplo ilustrativo 5, página **282** (c) el Ejercicio 3(e)A.

9. Generalice el Ejercicio 7 para el caso donde las raíces pueden no ser distintas e ilustre con un ejemplo.

19. (a) Muestre que
$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(x)dx^n = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} F(x)dx$$

donde hay n integrales a la izquierda. ¿Se cumple el resultado para $F(x) = e^{x^2}$? Explique

(b) Muestre que el resultado en (a) es equivalente a enunciar que
$$D^{-n}F(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-x)^{n-1} F(t)dt$$

11. Suponga que el resultado en el Ejercicio 10(b) se toma como la definición de $D^{-n}F(t)$ para cualquier número positivo n. (a) Muestre que si en particular $n = \frac{1}{2}$ entonces
$$D^{-1/2}F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F(x)}{\sqrt{t-x}} dx$$

(b) Opere con D en ambos lados del resultado en (a) y asuma que $D[D^{-1/2}] = D^{1/2}$ para llegar a la definición de la ***media derivada*** de ***F(t)*** dada por
$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} F(t) = D^{1/2}F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(x)}{\sqrt{t-x}} dx$$

(c) Chequee la definición en (b) al encontrar la media derivada de t^2 dos veces para ver si concuerda con la derivada completa, esto es, 2t.

4 Aplicaciones a problemas físicos y biológicos

Como ya hemos visto en capítulos precedentes una formulación matemática de problemas en mecánica, electricidad, vigas, etc., a menudo conduce a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En esta sección mostramos cómo la transformada de Laplace se usa para resolver tales problemas.

4.1 APLICACIONES A CIRCUITOS ELECTRICOS

Como un primer ejemplo ilustrando el uso de la transformada de Laplace en la solución de problemas aplicados, consideremos el siguiente problema involucrando circuitos eléctricos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un cierto circuito eléctrico (ver Figura 6.8) consiste de una resistencia de R ohmios en serie con un condensador de capacitancia C faradios, un generador de E voltios y un interruptor. En el tiempo $t = 0$ el interruptor se cierra. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en $t = 0$, encuentre la carga y corriente en cualquier tiempo más tarde. Asuma que R, C, E son constantes.

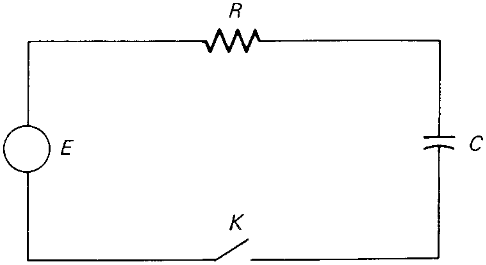


Figura 6.8

Formulación matemática. Si Q e $I = dQ/dt$ son la carga y la corriente a cualquier tiempo t entonces por la ley de Kirchhoff tenemos

$$RI + \frac{Q}{C} = E \quad 0 \quad R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \tag{1}$$

con condición inicial $Q(0) = 0$.

Solución Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de (1) y usando la condición inicial, tenemos, si q es la transformada de Laplace de Q,

$$R\{sq - Q(0)\} + \frac{q}{C} = \frac{E}{s}$$

0 $$q = \frac{CE}{s(RCs + 1)} = \frac{E/R}{s(s + 1/RC)}$$

$$\frac{E/R}{1/RC}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right\} = CE\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right\}$$

Entonces tomando la transformada inversa de Laplace encontramos

$$Q = CE(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{y} \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/RC}$$

Los métodos de la transformada de Laplace prueban ser de gran valor en problemas que involucran funciones seccionalmente continuas. En tales casos las propiedades de la función unidad de Heaviside (página 269) son útiles. Como una ilustración del procedimiento consideremos

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 1 para el caso donde el generador de E voltios se remplaza por un generador con voltaje dado como una función del tiempo por

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 \leqq t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Formulación matemática. Remplazando E en el Ejemplo ilustrativo 1 por $E(t)$ obtenemos la ecuación diferencial requerida

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t) \tag{2}$$

con condición inicial $Q(0) = 0$. La ecuación (2) también puede expresarse en términos de la función unidad de Heaviside como

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E_0[1-H(t-T)] \tag{3}$$

Solución. Método 1. Tomando las transformadas de Laplace de ambos lados de (2) o (3) y usando la condición inicial encontramos

$$R\{sq-Q(0)\}+\frac{q}{C}=\frac{E_0(1-e^{-sT})}{s}$$

o

$$q=\frac{E_0}{R}\frac{(1-e^{-sT})}{s(s+1/RC)}=\frac{E_0}{Rs(s+1/RC)}-\frac{E_0}{Rs(s+1/RC)}e^{-sT}$$

$$=CE_0\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/RC}\right\}-CE_0\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/RC}\right\}e^{-sT}$$

Tomando las transformadas inversas de Laplace de ambos lados usando el resultado enunciado en el teorema de la página 287, encontramos

$$Q=CE_0(1-e^{-t/RC})-CE_0(1-e^{-(t-T)/RC})H(t-T)$$
$$=\begin{cases}CE_0(1-e^{-t/RC}), & t<T\\ CE_0(e^{-(t-T)/RC}-e^{-t/RC}), & t>T\end{cases}$$

Para $t = T$ tenemos $Q = CE_0(1-e^{-t/RC})$.

Método 2. Usando el Teorema de conuolución. Sea e(s) la transformada de Laplace de $E(t)$. Entonces como antes tenemos

$$R\{sq-Q(0)\}+\frac{q}{C}=e(s)$$

o puesto que Q(0) = 0, $$q=\frac{e(s)}{R(s+1/RC)}$$

Ahora $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{R(s+1/RC)}\right\}=\frac{e^{-t/RC}}{R},\qquad \mathscr{L}^{-1}\{e(s)\}=E(t)$$

Así por el teorema de convolución $$Q=\mathscr{L}^{-1}(q)=\frac{1}{R}\int_0^t E(u)e^{-(t-u)/RC}$$

Para $0<t<T$ tenemos $$Q=\frac{1}{R}\int_0^t E_0e^{-(t-u)/RC}\,du=CE_0(1-e^{-t/RC})$$

Para $t > T$ tenemos $Q = \frac{1}{R}\int_0^T E_0 e^{-(t-u)/RC}\, du = CE_0\{e^{-(t-T)/RC} - e^{-t/RC}\}$

la cual concuerda con el resultado del Método 1.

4.2 UNA APLICACION A LA BIOLOGIA

Como una aplicación biológica, en particular la absorción de drogas en un órgano o célula, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Un líquido tránsporta una droga en un órgano de volumen V cm³ a una tasa de a cm³ /seg y sale a una tasa de b cm³ /seg, donde V, a, b son constantes. En el tiempo $t = 0$ la concentración de la droga es cero y crece linealmente a un máximo de k en $t = T$, en este tiempo el proceso se detiene. ¿Cuál es la concentración de la droga en el órgano en cualquier tiempo t?

Formulación matemática. El problema es el mismo de la página 157, excepto que la concentración es una función del tiempo denotada por $C(t)$ dada por

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{\kappa t}{T}, & 0 \leqq t \leqq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

cuyo gráfico aparece en la Figura 6.9. Denotando la concentración instantánea de la droga en el órgano por x, tenemos así

$$\frac{d}{dt}(xV) = aC(t) - bx, \qquad x(0) = 0 \tag{4}$$

Solución Usaremos el método de convolución (Método 2 del Ejemplo ilustrativo 2) para resolver el problema de valor inicial (4). Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial en (4), llamando $\mathscr{L}\{x\} = \bar{x}$ y $\mathscr{L}\{C(t)\} = c(s)$, tenemos

$$V\{s\bar{x} - x(0)\} = ac(s) - b\bar{x}$$

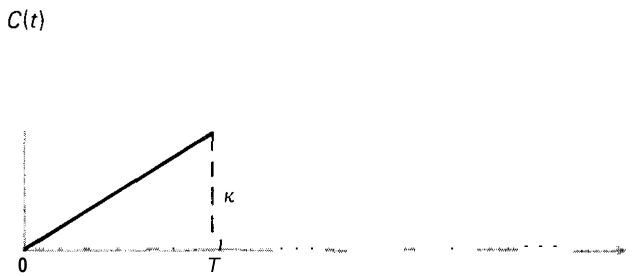


Figura 6.9

Luego usando $x(0) = 0$ produce $$\bar{x} = \frac{ac(s)}{V(s + b/V)}$$

Ahora $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{V(s + b/V)}\right\} = \frac{a}{V} e^{-bt/V}, \qquad \mathscr{L}^{-1}\{c(s)\} = C(t)$$

Así por el teorema de convolución

$$x = \mathscr{L}^{-1}(\bar{x}) = \frac{a}{V}\int_0^t C(u)e^{-b(t-u)/V}\,du$$

Para $0 \leqq t < T$, tenemos $$x = \frac{a}{V}\int_0^t \kappa u e^{-b(t-u)/V}\,du = \frac{\kappa a}{b} t - \frac{V\kappa a}{b^2}(1 - e^{-bt/V})$$

Para $t > T$, tenemos $$x = \frac{a}{V}\int_0^T \kappa u e^{-b(t-u)/V}\,du = \frac{V\kappa a}{b^2} e^{-bt/V} + \left(\frac{V\kappa a}{b^2}\right) \text{———} \quad e^{-b(t-T)/V}$$

El valor de x para $t = T$ se encontró al hacer $t = T$ en cualquiera de estos.

Interpretación. Del último resultado notamos que cuando t aumenta más allá de T la droga gradualmente desaparece. Sigue que la concentración de la droga en el órgano alcanzará un máximo en algún tiempo. El estudiante puede mostrar (vea el Ejercicio 9B) que este tiempo está dado por $t = T$ y que este máximo el cual llamaremos la *concentración pico de La droga* está dado por

$$\frac{\kappa a T}{b} - \frac{V\kappa a}{b^2}(1 - e^{-bT/V})$$

En la práctica el tiempo de la concentración pico de la droga ocurrirá más tarde que T debido al hecho de que la droga no entra al órgano instantáneamente, como en el modelo anterior, sino que en vez hay una demora.

4.3 EL PROBLEMA TAUTOCRONO-APLICACION DE UNA ECUACION INTEGRAL EN MECANICA

Como un ejemplo de un problema en mecánica el cual conduce a una ecuación integral de tipo convolución consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Un alambre tiene la forma de una curva en el plano vertical xy con su extremo más bajo 0 localizado en el origen como se indica en la Figura 6.10. Asumiendo que no hay fricción, encuentre la forma que la curva debe tener para que una bolilla bajo la influencia de la gravedad se deslice hacia abajo desde el reposo a 0 en un tiempo constante especificado T independiente de donde se coloque la bolilla sobre el alambre por encima de 0.

Formulación matemática. Antes de formular el problema en términos matemáticos, puede ser instructivo examinar si el problema tiene sentido desde el punto de vista físico. Para hacer esto suponga que tenemos dos personas con alambres idénticos a los mostrados -en la Figura 6.10. De acuerdo al problema, si los alambres tienen la forma correcta, entonces las bolillas puestas en cualquier lugar del alambre por las dos personas en un instante dado deberían alcanzar sus extremos más bajos simultáneamente después

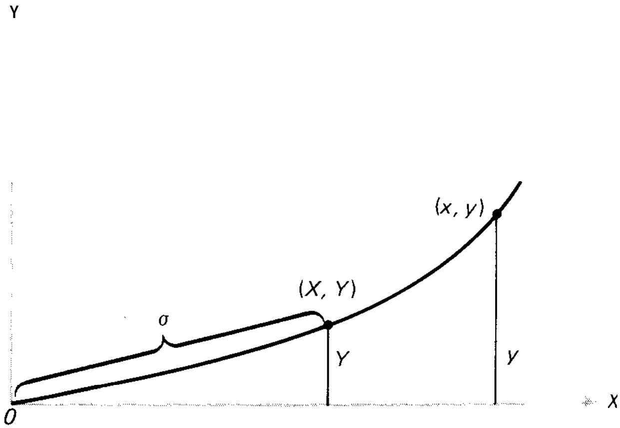


Figura 6.10

del tiempo T. A primera vista se puede pensar que esto no puede suceder, puesto que parecería que entre más alto coloque la persona la bolilla en el alambre le tomaría más tiempo a la bolilla alcanzar el extremo inferior porque la distancia a recorrer sería mayor. Sin embargo, la bolilla que viaja la distancia mayor tendría también la velocidad más alta cerca del final del alambre, así que presumiblemente la carrera podría resultar empatada.

Para formular el problema matemáticamente, sea (x, y) cualquier punto de partida de la bolilla y (X, Y) cualquier punto entre el punto inicial y el punto 0. Sea σ la longitud del alambre (esto es, la longitud del arco de la curva) medido desde 0.

Si denotamos por E.P. y E.C. la energía potencial y la energía cinética de la bolilla, entonces de acuerdo al principio de conservación de la energía de la mecánica elemental tenemos

$$\text{E.P. en } (x, y) + \text{E.C. en } (x, y) = \text{E.P. en } (X, Y) + \text{E.C. en } (X, Y)$$

Si la bolilla tiene una masa m y t es el tiempo de viaje medido desde la posición de reposo esto se convierte en

$$mgy + 0 = mgY + \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \tag{5}$$

Para conseguir esto tenemos que usar el hecho de que la energía potencial es el peso mg multiplicado por la altura por encima del eje x, mientras la energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2$, donde la velocidad $v = d\sigma/dt$ en (X, Y) pero es cero en (x, y) puesto que se asume que la bolilla parte del reposo.

De (5) obtenemos resolviendo para $d\sigma/dt$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pm\sqrt{2g(y - Y)} \tag{6}$$

Sin embargo, puesto que σ decrece a medida que t se incrementa así que $d\sigma/dt < 0$, debemos escoger el signo negativo en (6) para obtener

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(y - Y)} \tag{7}$$

Puesto que $Y = y$ en $t = 0$ mientras que $Y = 0$ en $t = T$, tenemos de (7) al separar variables e integrar

$$\int_{t=0}^{T} dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{Y=y}^{0} \frac{d\sigma}{\sqrt{y - Y}} \quad \text{o} \quad T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{Y=0}^{y} \frac{d\sigma}{\sqrt{y - Y}} \tag{8}$$

Ahora la longitud del arco se puede expresar como una función de y en la forma $\sigma = F(y)$, de modo que (8) se convierte en

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{Y=0}^{y} \frac{F'(Y)dY}{\sqrt{y - Y}} \tag{9}$$

Nuestro problema se reduce así a determinar F(y), esto es, resolver la ecuación integral (9) y de ésta obtener la curva requerida.

Solución La ecuación integral (9) es de tipo convolución y se puede escribir como

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} F'(y)*y^{-1/2}$$

Tomando la transformada de Laplace y usando el teorema de convolución encontramos

$$\frac{T}{s} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathscr{L}\{F'(y)\}\mathscr{L}\{y^{-1/2}\} \tag{10}$$

Ahora si hacemos $\mathscr{L}\{F(y)\} = f(s)$, entonces $\mathscr{L}\{F'(y)\} = sf(s) - F(0) = sf(s)$ puesto que $F(0) = 0$. También $\mathscr{L}\{y^{-1/2}\} = \Gamma(\frac{1}{2})/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/\sqrt{s}$. Así (10) se convierte en

$$\frac{T}{s} = \frac{1}{\sqrt{2g}} sf(s) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \quad \text{o} \quad sf(s) = T\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\, s^{-1/2}$$

esto es,

$$\mathscr{L}\{F'(y)\} = T\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\, s^{-1/2}$$

Tomando las transformadas inversas de Laplace conduce a

$$F'(y) = \frac{d\sigma}{dy} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{y}} \tag{11}$$

Ahora de la fórmula de la longitud del arco del cálculo elemental tenemos

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{o} \quad \left(\frac{d\sigma}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

Usando esto junto con (ll) conduce a

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = \frac{a}{y}, \qquad \text{donde } a = \frac{2gT^2}{\pi^2}$$

De esto tenemos

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a - y}{y}} \tag{12}$$

al usar el hecho de que la pendiente dy/dx y así dx/dy no puede ser negativa. Separando variables en (12) e integrando obtenemos

$$x = \int \sqrt{\frac{a - y}{y}}\, dy \tag{13}$$

Para desarrollar la integración en (13), es conveniente hacer $y = a \operatorname{sen}^2 \phi$. Entonces

$$x = 2a \int \cos^2 \phi \, d\phi = a \int (1 + \cos 2\phi) d\phi = \frac{a}{2}(2\phi + \operatorname{sen} 2\phi) + c$$

así que $\quad x = \frac{a}{2}(2\phi + \operatorname{sen} 2\phi) + c, \quad y = a \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\phi)$

o al hacer $2\phi = \theta$, $\quad x = \frac{a}{2}(\theta + \operatorname{sen} \theta) + c, \quad y = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$

Usando el hecho de que $x = 0$ cuando $y = 0$, debemos tener $c = 0$ para que las ecuaciones paramétricas de la curva requerida estén dadas por

$$x = \frac{a}{2}(\theta + \operatorname{sen} \theta), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta) \tag{14}$$

Interpretación. La curva descrita por (14) es una ***cicloide*** la cual es generada por un punto fijo sobre un círculo de diámetro a a medida que rueda a lo largo de la parte inferior punteada $y = a$, como se indica en la Figura 6.11. En nuestro caso la forma requerida del alambre está representada por esa parte de la cicloide mostrada en la línea gruesa de la figura. El tamaño de la cicloide naturalmente dependerá del valor particular de T.

La curva obtenida es a menudo llamada una ***tautócrona*** del griego ***tauto,*** que significa ***lo mismo o idéntico*** y *cronos* que significa ***tiempo.*** El problema de encontrar la curva requerida conocido como ***el problema tautócrono**** fue propuesto cerca del final del siglo XVII y resuelto de varias maneras por algunos prominentes matemáticos de ese tiempo. Uno de estos fue ***Huygens,*** quien empleó el principio para diseñar un ***péndulo cicloidal*** para usar en relojes. En este diseño (ver Figura 6.12) el medallón del péndulo B está en el extremo de una cuerda flexible cuyo lado opuesto está fijo en 0. El péndulo está restringido por dos arcos vecinos de la cicloide OP y OQ para que oscile entre ellos.

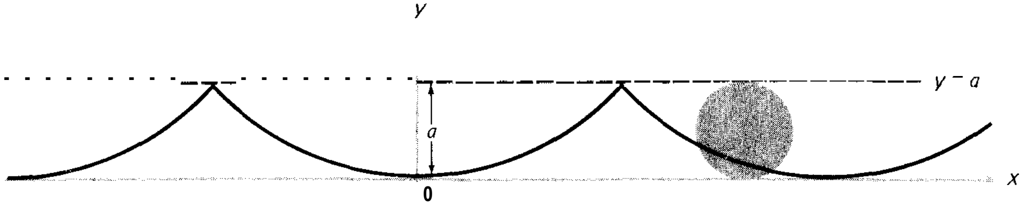


Figura 6.11

*El estudiante debería comparar el problema tautócrono con el problema de la braquistócrona (Ejercicio 4C, página 130), el cual también involucra la cicloide.

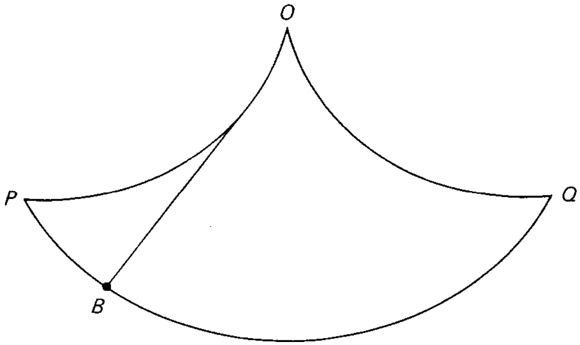


Figura 6.12

El período de oscilación es constante, y la trayectoria del medallón del péndulo resulta ser una cicloide (ver Ejercicio 5C, página 303).

El problema tautócrono, aunque aparentemente es sólo como un ejercicio interesante en mecánica y ecuaciones diferenciales, realmente resulta de gran significancia porque inspiró a *Abel* en 1923 a un estudio de *ecuaciones integrales*. Investigación en esta interesante e importante rama de las matemáticas con numerosas aplicaciones fueron hechas por muchos matemáticos de los siglos XIX y principios del XX, pero muchos problemas todavía permanecen sin solución. El estudiante que desea estudiar este tópico debería consultar algunas de las referencias dadas en la Bibliografía.

4.4 APLICACIONES INVOLUCRANDO LA FUNCION DELTA

Como mencionamos en la página 276, algunos importantes problemas aplicados pueden ser formulados en términos de la función delta de Dirac. Como ejemplo consideremos

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Una masa m está acoplada al extremo inferior de un resorte vertical de constante k suspendido de un punto fijo. En el tiempo $t = t_0$ la masa es golpeada al aplicarle una fuerza hacia arriba durando un tiempo muy pequeño. Describa el movimiento subsecuente.

Formulación matemática. Asumiendo que el eje vertical del resorte se toma como el eje x y que la masa está inicialmente en $x = 0$, tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = P_0\delta(t - t_0), \qquad x(0) = 0,\ s'(0) = 0 \tag{15}$$

Aquí hemos asumido que el impulso de la fuerza aplicada a la masa es constante e igual a P_0 de modo que la fuerza se puede tomar como $P_0\,\delta\,(t - t_0)$.

Solución Tome la transformada de Laplace de la ecuación diferencial en (15) usando las condiciones iniciales y el hecho de que $\mathscr{L}\{\delta\,(t - t_0)\} = e^{-st_0}$. Entonces si $\bar{x} = \mathscr{L}\{x\}$, tenemos

$$(ms^2 + k)\bar{x} = P_0e^{-st_0} \quad \text{o} \quad \bar{x} = \frac{P_0e^{-st_0}}{ms^2 + k}$$

Puesto que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P_0}{ms^2+k}\right\} = \frac{P_0}{m}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k/m}\right\} = \frac{P_0}{m}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,t}{\sqrt{k/m}}\right) = \frac{P_0}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

tenemos
$$x = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P_0e^{-st_0}}{ms^2+k}\right\} = \begin{cases} 0. & t < t_0 \\ \dfrac{P_0}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,(t-t_0), & t > t_0 \end{cases} \tag{16}$$

Interpretación. De (16) vemos que la masa permanece en reposo hasta el tiempo t_0, después del cual oscila senosoidalmente con período $2\pi\sqrt{m/k}$ y amplitud $P_0/\sqrt{km}$. En este ejemplo no hemos tomado en cuenta el amortiguamiento. Esto se deja para el Ejercicio 12B.

4.5 UNA APLICACION A LA TEORIA DE CONTROL AUTOMATICO Y SERVOMECANISMOS

Suponga que un misil M está siguiendo a un avión enemigo o a otro misil E como se indica en la Figura 6.13. Si en tiempo t el enemigo E gira algún ángulo, $\psi(t)$, entonces M debe también girar este ángulo si quiere alcanzar E y destruirlo. Si un hombre estuviera a bordo de M, él pudiera operar algún mecanismo de dirección para producir el giro requerido, pero puesto que el misil no está tripulado por cuestiones de seguridad, tal control se debe realizar automáticamente. Para hacer esto necesitamos algo para sustituir los ojos del hombre, tal como un haz de radar el cual indicará o apuntará a la dirección que M debe tomar. Necesitamos también algo para sustituir las manos del hombre el cual girará un timón algún ángulo para producir el giro deseado. Un mecanismo, ya sea que involucre principios eléctricos, mecánicos, u otros, diseñado para conseguir tal control automático se llama un *servomecanismo* o brevemente un *servo.*

Formulación matemática. En esta aplicación asumamos que el ángulo deseado de giro como lo indica el haz de radar es Ψ (t). También sea $\Theta(t)$ para denotar el ángulo de giro del timón en tiempo t. Idealmente desearíamos tener Θ (t) $=$ Ψ (t), pero debido a que las cosas suceden tan rápido debemos esperar tener una discrepancia o error entre los dos dada por

$$\text{error} = \Theta(t) - \Psi(t) \tag{17}$$

La existencia del error debe ser señalizado hacia el timón, algunas veces referido como una *señal de retroalimentación,* de modo que se pueda producir un efecto de giro o torque compensatorio. Si el error es grande, el torque necesario será grande. Si el error es pequeño, el torque necesario sera pequeño.

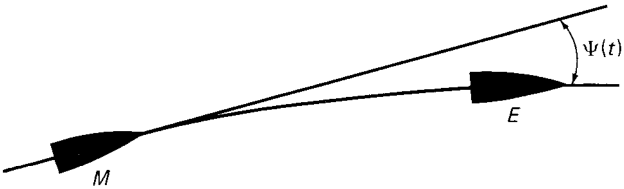


Figura 6.13

Es así razonable diseñar el servomecanismo de modo que el torque requerido sea proporcional al error (17). Ahora sabemos de la mecánica que el torque es igual al momento de inercia de la cosa a ser girada (en este caso el timón junto con lo que-esté conectado a éste), denotado por Z, multiplicado por la aceleración angular dada por $\Theta''(t)$. Así tenemos de (17)

$$I\Theta''(t) = -\kappa[\Theta(t) \quad \Psi(t)] \tag{18}$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo negativo ante *k se* usa porque si el error es positivo (esto es, el giro es demasiado grande) entonces el torque debe ser opuesto a éste (esto es, negativo), mientras que si el error es negativo el torque debe ser positivo. Asumiendo que el ángulo inicial y velocidad angular son cero como condiciones posibles, tenemos

$$\Theta(0) = 0, \qquad O'(0) = 0 \tag{19}$$

Para llegar a (18) hemos despreciado el amortiguamiento. Para este caso, vea el Ejercicio 15B.

Solución Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de (18) usando las condiciones (19), y asumiendo que $\mathscr{L}\{\Theta(t)\} = \theta(s)$, $\mathscr{L}\{\Psi(t)\} = \psi(s)$, tenemos

$$Is^2\theta(s) = -\kappa[\theta(s) - \psi(s)] \quad \text{o} \quad \theta(s) = \frac{\kappa\psi(s)}{Is^2 + \kappa} \tag{20}$$

Entonces por el teorema de convolución

$$\Theta(t) = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \int_0^t \Psi(u) \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\kappa}{I}}(t - u)\,du \tag{21}$$

Interpretación. El resultado (21) nos permite determinar $\Theta(t)$ a partir de q(t). En la teoría de control automático $\Psi(t)$ se llama co.n frecuencia la *función* de entrada o brevemente la *entrada,* $\Theta(t)$ se llama la *función de salida* o brevemente la *salida.* El factor de multiplicación en (20),

$$\frac{\kappa}{Is^2 + \kappa}$$

el cual sirve para caracterizar el servomecanismo al relacionar la entrada y la salida se llama la *función de transferencia o función respuesta.*

Los servomecanismos surgen en muchas situaciones en la práctica, como por ejemplo en el hogar donde un termostato se usa para regular la temperatura y en barcos o aviones donde se necesita un piloto automático. La idea básica de un servomecanismo se ilustra esquemáticamente en el diagrama de bloques de la Figura 6.14. En el primer bloque a la izquierda tenemos el, estado deseado (por ejemplo, la posición deseada y dirección en el caso de un misil o la temperatura de un cuarto). Puesto que el estado deseado no es el mismo del estado real, hay un error indicado por el segundo blo-

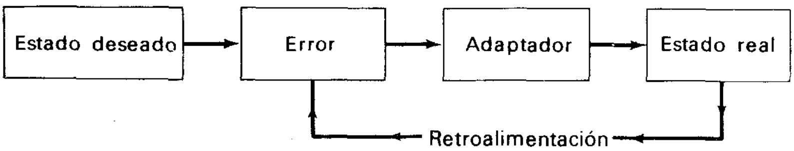


Figura 6.14

que. Este error se alimenta en un adaptador, indicado por el tercer bloque, el cual intenta rectificar el error (tal como un torque adaptivo en el caso del misil) y conduzca al estado real indicado por el bloque a la derecha. Este estado real luego es retroalimentado (señal de retroalimentación) para indicar el error de distanciamiento del estado deseado, y el proceso se repite una y otra vez hasta conseguir el estado deseado.

EJERCICIOS A

1. Un circuito eléctrico consiste de una resistencia de R ohmios en serie con un inductor de inductancia L henrios y un generador de E voltios donde R, L y E son constantes. Si la corriente es cero en el tiempo $t = 0$ encuéntrela en cualquier tiempo $t > 0$.
2. Un objeto de masa m se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0. Asumiendo que la aceleración debida a la gravedad es constante e igual a g, y la resistencia del aire es despreciable, determine la posición y velocidad del objeto en cualquier tiempo más tarde.
3. Trabaje el Ejercicio 1 si el generador tiene un voltaje dado por

   (a) $E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 \leqq t \leqq T \\ 0, & t > T \end{cases}$ (b) $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.
4. Trabaje (a) Ejemplo ilustrativo 3, página 76; (b) Ejercicio 3A, página 88; (c) Ejemplo ilustrativo 1, página 225.

EJERCICIOS B

1. Una masa m en el extremo de un resorte vibrante vertical de constante k sufre una vibración alrededor de su posición de equilibrio de acuerdo a la ecuación

$$m \frac{d^2X}{dt^2} + \beta \frac{dX}{dt} + kX = F_0 \cos \omega t$$

   donde β es la constante de amortiguamiento, y X es el desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio en cualquier tiempo t. (a) Resuelva esta ecuación sujeta a la condición inicial X(0) =X'(O) = 0. (b) ¿Cuál es la solución de estado estacionario? (c) Explique cómo la transformada de Laplace de la solución se puede simplificar para que conduzca a la solución de estado estacionario.
2. Trabaje el Ejercicio 1 si las condiciones iniciales se modifican así: $X(0) = X_0$, $X'(0) = V_0$. Interprete los resultados físicamente.
3. Trabaje (a) El Ejemplo ilustrativo 8, página 244; (b) El Ejemplo ilustrativo en la página 248.
4. Trabaje (a) Ejercicio 1A, página 249; (b) Ejercicio 1B, página 249.
5. Trabaje Ejercicio 1 si la fuerza externa de la masa m está dada por

   (a) $F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$ (b) $F(t) = F_0 t \cos \omega t$.
6. Trabaje el problema de cardiografía, página 253, usando la transformada de Laplace.
7. Trabaje el problema en Economía, página 255, usando la transformada de Laplace.
8. Use las ecuaciones paramétricas para la cicloide dadas por (14), página 297, para verificar directamente que el tiempo gastado por la bolilla en deslizar hacia abajo del alambre en el Ejemplo ilustrativo 4 es T.

9. Pruebe los resultados establecidos al final del Ejemplo ilustrativo 3, página 294.

10. Discuta cómo usted construiría un alambre en un plano vertical tal que una bolilla puesta en cualquier lugar de él deslizaría del reposo al extremo más bajo en 3seg. ¿Qué problemas esperaría usted que surgieran desde el punto de vista físico?

11. Una partícula de masa m está en reposo en el origen 0 sobre el eje x. En $t = t_0$ actúa sobre ella una fuerza durante un intervalo de tiempo muy corto donde el impulso de la fuerza es una constante P_0. (a) Establezca un problema de valor inicial que describa el movimiento. (b) Resuelva e interprete los resultados.

12. Trabaje el Ejemplo ilustrativo 5, página 298, si el amortiguamiento se toma en cuenta.

13. Un circuito eléctrico está hecho de una resistencia R e inductancia L en serie. En $t = t_0$ un voltaje muy grande se introduce en el circuito pero sólo por un corto tiempo. Asumiendo que la corriente inicial es cero, ¿cuál es la corriente en cualquier tiempo más tarde?

14. Trabaje el problema del servomecanismo de la página 299 si (a) $\Psi(t) = \alpha$, (b) $\Psi(t) = \alpha t$, (c) $P(t) = \alpha \operatorname{sen} \omega t$, donde α, ω son constantes.

15. Trabaje el problema del servomecanismo de la página 299 si hay una fuerza de amortiguamiento actuando sobre el timón la cual es proporcional a la velocidad angular instantánea.

16. Discuta las características del servomecanismo si la función de transferencia está dada por

(a) $\dfrac{s+1}{s^2+1}$. (b) $\dfrac{s-2}{s^2-2s+1}$ (c) $\dfrac{s}{s^3-1}$

EJERCICIOS C

1. Las vibraciones de una masa m en el extremo de un resorte vertical de constante k están dadas por

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + kX = F(t)$$

donde F(t) es la fuerza externa aplicada en cualquier tiempo t y X es el desplazamiento de m de su posición de equilibrio en cualquier tiempo t. Suponga que la fuerza está dada por

$$F(f) = \begin{cases} F_0, & 0 < t < T \\ 2F_0, & T < t < 2T \\ 0. & t > 2T \end{cases}$$

(a) Encuentre el desplazamiento en cualquier tiempo t asumiendo que el desplazamiento inicial y la velocidad son cero. (b) Describa físicamente las vibraciones dé la masa.

2. Trabaje el Ejercicio 1 si el término de amortiguamiento $\beta dx/dt$ sc toma en cuenta.

3. Suponga que la fuerza F(t) en el Ejercicio 1 está dado por

$$F(t) = \begin{cases} F_0/\epsilon, & 0 < t < \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$$

(a) Encontrar el desplazamiento en cualquier tiempo t asumiendo que el desplazamiento inicial y la velocidad son cero. (b) Discuta el resultado en (a) para el caso límite donde $\epsilon \to 0$ y dé una interpretación física. (c) ¿Cómo está relacionado su resultado en (b) con la función delta de Dirac? (d) Podría usted obtener el resultado en (b) haciendo $F(t) = F_0\delta(t)$ en la ecuación del Ejercicio **1** y **después** tomando la transformada de Laplace usando $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$? Explique.

4. Discuta el Ejemplo ilustrativo 4, página 294, en caso de que la bolilla se le dé una velocidad inicial v_0 en el punto de partida.

5. Pruebe los enunciados hechos acerca del péndulo cicloidal en el primer párrafo en la página 298.

6. Trabaje el Ejemplo ilustrativo 3, página 145, usando la función delta. [Sugerencia: Use la ecuación diferencial $EIy^{(IV)} = w(x)$ obtenida en el Ejercicio 8C, página 147.

7. Trabaje el Ejercicio 1A; página 145, usando la función delta.

8. Muestre cómo encontrar la solución de la ecuación ***integral de Abel***

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\, du = F(t), \qquad 0 < \alpha < 1$$

donde ***F(t)*** está dada y $Y(t)$ es para ser determinada.

9. (a) Discuta el Ejercicio 8 para el caso especial $\alpha = \frac{1}{2}$ y explique la relación de la solución con la ***media derivada*** del Ejercicio 11C, página 290. (b) Muestre que la solución del problema tautócrono en la página 294 depende de la solución de una ecuación diferencial de “medio orden”.

siete

solución de ecuaciones diferenciales usando series

1 Introducción al uso de series

1.1 MOTIVACION PARA SOLUCIONES CON SERIES

Hasta ahora hemos estado ocupados, y de hecho nos hemos restringido, con ecuaciones diferenciales que podían resolverse exactamente y con varias aplicaciones que nos conducían a ellas. Hay ciertas ecuaciones diferenciales las cuales son de gran importancia en altas matemáticas e ingeniería o en otras aplicaciones científicas que no pueden resolverse exactamente en términos de funciones elementales por cualesquiera de los métodos. Por ejemplo, las aparentemente inocentes ecuaciones diferenciales

$$y' = x^2 + y^2, \qquad xy'' + y' + xy = 0$$

no pueden resolverse exactamente en términos de funciones generalmente estudiadas en cálculo elemental, tales como las funciones algebraicas racionales, trigonométricas y trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas.

Es algo frustrante para el ingeniero o científico, y aún para el matemático, saber que existe una solución y es única pero que no es capaz de determinarla exactamente. Por supuesto, y es una buena cosa saber que existe una solución y sea única porque podemos generalmente en tal caso emplear métodos numéricos (lo cual es el tema del Capítulo nueve) en asocio con computadores poderosos que estén disponibles para proporcionarnos la solución deseada. Mientras que esto es maravilloso desde el punto de vista práctico en nuestra desesperación por obtener respuestas, algunos de nosotros pueden pensar que estamos en efecto abdicando y recurriendo a esto como último recurso.

Afortunadamente, para aquellos entre nosotros que pueden pensar de esta manera hay otro método el cual podemos ensayar cuando ningún otro parezca proporcionar una solución exacta. Para motivar una discusión de este método, consideremos la ecuación diferencial $y' = y$ sujeto a la condición $y(0) = 1$. Por separación de variables fácilmente descubrimos que $y = e^x$ es la solución requerida. Ahora en el cálculo aprendimos que muchas funciones tales como e^x, sen x y $\cos x$ poseen expansiones en serie del tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \tag{1}$$

con frecuencia llamada *serie de* potencias. Hacemos la siguiente

Pregunta. Asumamos que no podemos resolver $y' = y$, suponiendo, por ejemplo, que no estuviéramos todavía familiarizados con las propiedades de las funciones exponenciales. ¿De qué manera posible podríamos proceder a encontrar la solución requerida (asumiendo que existiera una)?

Una manera posible con la cual podríamos empezar sería *asumir* que la solución (si existe) posee una expansión en serie del tipo (1), donde a_0, a_1, son constantes por el momento indeterminadas. Si (1) va a ser una solución de $y' = y$, debemos tener

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

Ahora, *asumiendo* que se permita una diferenciación término a término de series infinitas, tenemos

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

Puesto que esto debe ser una identidad, debemos tener iguales los coeficientes de las correspondientes potencias de x,* de modo que

$$a_1 = a_0, \qquad 2a_2 = a_1, \qquad 3a_3 = a_2, \qquad 4a_4 = a_3.$$

De estas encontramos

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 2} = \frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!}, .$$

siendo aparente' la regla. Sustituyendo éstas en la solución asumida, tenemos

$$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

Usando la condición de que y = 1 cuando $x = 0$, encontramos $a_0 = 1$, de modo que

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{2}$$

Puesto que hemos encontrado el resultado (2), asumiendo tantas cosas, es natural preguntar si esto es realmente la solución requerida. Cualquiera que esté familiarizado con series sabe que (2) es la expansión en serie de e^x, de modo que realmente hemos obtenido la solución requerida. En casos donde no tengamos nada contra qué chequear puede que realmente estemos en duda. La solución en la forma (2) es tan buena como $y = e^x$, y de hecho, para muchos propósitos es mejor. Por ejemplo si uno deseara saber el valor de y cuando $x = 0{,}6$, es cierto que la respuesta $e^{0,6}$ se puede encontrar en las tablas, pero a propósito el valor de tablas fue probablemente calculado usando (2) con x remplazado por 0,6

Aunque tal vez hemos sido excesivamente simplistas en la discusión anterior, las conclusiones generales son aplicables a muchos casos importantes. Debemos darnos cuenta que no hemos sido rigurosos porque se han omitido varios pasos. Consideraremos la pregunta de rigor en la página 311. Mientras tanto apliquemos el método a otro ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $y'' + y = 0$ usando series.

Solución Sea
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \tag{3}$$
de modo que
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \tag{4}$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \tag{5}$$

Sustituyendo (3) y (5) en la ecuación diferencial dada y combinando términos similares da

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + (a_3 + 20a_5)x^3 + \cdots = 0$$

*Esto es una consecuencia del hecho de que si tenemos $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \equiv 0$ donde la serie de la izquierda converge en algún intervalo, entonces debemos tener $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, etc.

Puesto que el lado derecho es cero, esto puede ser una identidad si y sólo si cada uno de los coeficientes a la izquierda es cero. Así,

$$a_0 + 2a_2 = 0. \qquad a_1 + 6a_3 = 0, \qquad a_2 + 12a_4 = 0, \qquad a_3 + 20a_5 = 0, \ldots$$

Esto lleva a

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{12} = \frac{a_0}{4!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{20} = \frac{a_1}{5!}, \ldots$$

Sustituyendo éstas en (3), tenemos

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \cdots$$

o

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \tag{6}$$

Puesto que (6) involucra dos constantes arbitrarias sospechamos que ésta representa la solución de la ecuación diferencial dada.

Somos afortunados en este ejemplo al tener un chequeo, puesto que si recordamos del cálculo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

así que $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$ como ya se encontró por métodos del Capítulo cuatro. Es interesante notar que aún en el caso de no haber oído de sen x o $\cos x$ al tratar de resolver la ecuación diferencial nos hubiera llevado a estas funciones. Podríamos luego obtener sus propiedades, sus gráficos, etc. Vea el Ejercicio 3C. La moraleja es por supuesto que ecuaciones diferenciales pueden conducir a funciones con las cuales pueda que no estemos familiarizados pero que pueden tener propiedades importantes o interesantes. Veremos algunos ejemplos de tales funciones más adelante en este capítulo.

Observación 1. En vez de usar la serie (3) pudimos haber usado la serie de potencias alrededor de $x = a$, dada por

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \cdots \tag{7}$$

Esta se usa para el caso cuando las condiciones se especifican en $x = a$. Así, por ejemplo, si tuviéramos que resolver $y' = y$ dado $y(1) = 2$, podríamos usar la serie (7) con $a = 1$. Alternativamente, podríamos simplemente hacer el cambio de variable independiente $v = x - a = x - 1$ y luego usar (3) con x remplazada por v. Esto equivale a remplazar x por $x - a = x - 1$. La serie (7) con frecuencia se llama una ***serie de Taylor*** alrededor de $x = a$, y el caso especial donde $a = 0$ se llama una ***serie de Maclaurin.***

1.2 USO DE LA NOTACION SUMATORIA

En el proceso de obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales $y' = y$ y $y'' + y = 0$, tuvimos que escribir mucho y hubiéramos tenido que escribir más si usáramos más términos. Una simplificación que no sólo reduce el trabajo involucrado sino a menudo útil para reconocer el término general de la serie se obtiene con la ***notación sumatoria*** con la cual el estudiante probablemente ya esté familiarizado del estudio de series o de integrales definidas en cálculo.

De acuerdo a la notación de sumatoria, una serie tal como

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + + u_n \tag{8}$$

con un número finito de términos se representa por

$$\sum_{j=0}^{n} u_j \tag{9}$$

la cual *se* lee la *suma de todos los términos de la forma* ***u,, donde j va de 0 a n***. El signo es la letra mayúscula griega *sigma, j* se llama el *índice* ***de la sumatoria*** o brevemente el *índice*, y podemos leer (9) brevemente como *sigma, o suma, de* u_j ***de j*** = 0 ***a n.*** Como para integrales definidas j = 0 se refiere al *límite inferior*, mientras que ***n*** se refiere como el *límite superior.*

En el caso donde tengamos una serie infinita

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{10}$$

la representamos por

$$\sum_{j=0} u_j \tag{11}$$

donde el límite superior n es remplazado por ∞ .

Los siguientes son algunos ejemplos del uso del índice de sumatoria.

Ejemplo 1. $\sum_{j=0}^{n} j(j + 1) = 1\ 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdot + n(n + 1).$

Ejemplo 2. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

Ejemplo 3. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ tomando 0 ! = 1

Por supuesto que podemos usar otros límites además de 0 y *n ó* ∞ . Por ejemplo,

$$\sum_{j=2}^{6} u_j = u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$

esto es, la suma de u_j donde j va de 2 a 6. Podemos también usar otros índices. Así la suma anterior se puede representar en cualquiera de las formas

$$\sum_{k=2}^{6} u_k, \quad \sum_{k=0}^{4} u_{k+2}, \quad \sum_{j=0}^{4} u_{j+2}$$

Las siguientes son las propiedades importantes de la notación sumatoria, cuyas demostraciones se verifican fácilmente al escribir los términos en cada lado.

1. $\sum_{j=0}^{n} u_j + \sum_{j=0}^{n} v_j = \sum_{j=0}^{n} (u_j + v_j)$

2. $\alpha \sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha u_j$ para? cualquier α independiente de j.

Los resultados son también válidos si se usan otros límites además de 0 y n con tal de que éstos sean los mismos en cada suma. Sin embargo, si cualquier límite es infinito, la serie debe ser convergente.

Para propósitos de hallar soluciones con series de potencias de ecuaciones diferenciales, es conveniente usar la notación

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j \tag{12}$$

donde acordaremos que $a_j = 0$ para todos los valores enteros negativos de j, esto es, $j = -1, -2, -3, \ldots$ En tal caso la serie (12) es equivalente a la del Ejemplo 2 anterior.

Para ilustrar el procedimiento involucrado en obtener soluciones con series usando la notación sumatoria, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva $y'' + y = 0$ (Ejemplo ilustrativo 1).

Asumimos como antes que

$$y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j, \qquad a_j = 0, j = -1, -2, -3, \ldots \tag{13}$$

Entonces por diferenciación $y' = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ (14)

$$y'' = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \tag{15}$$

Sustituyendo (13) en (15) en la ecuación diferencial dada se obtiene

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j = 0 \tag{16}$$

Nos gustaría ahora combinar términos correspondientes en las dos series a la izquierda de (16) para que la serie resultante revele el coeficiente de x^j. Puesto que el coeficiente de x^{j-2} en la primera sumatoria de (16) es $j(j-1)a_j$, sigue al remplazar j por $j+2$ que el coeficiente de x^j es $(j+2)(j+1)a_{j+2}$. Además, no hay necesidad de preocuparse acerca de los limites en la sumatoria puesto que el índice va de $-\infty$ a ∞ y cambiando j por j+ 2 no tiene efecto en los límites, lo cual es incidentalmente la razón de introducirlos antes. Sigue que (16) se puede escribir como

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j = 0 \tag{17}$$

o asumiendo que la serie es convergente y usando la Propiedad 1 anterior

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} [(j+2)(j+1) a_{j+2} + a_j] x^j = 0 \tag{18}$$

Ahora (18) es una identidad para todos los valores de x para los cuales la serie converge si y sólo si cada coeficiente es cero, esto es

$$(j+2)(j+1) a_{j+2} + a_j = 0 \tag{19}$$

Si colocamos $j = -2$ en (19), obtenemos $0 \cdot a_0 + 0 = 0$, mostrando que a_0 es arbitraria. En forma similar, si colocamos $j = -1$ en (19), obtenemos $0 \cdot a_1 + 0 = 0$, mostrando que a_1 también es arbitraria. Note que si colocamos $j = -3$ en (19) obtenemos $0 \cdot a_{-1} + 0 = 0$, pero ya sabemos que $a_{-1} = 0$ de nuestro argumento en la página 309, de modo que este valor de j no produce información. Para $j \geqq 0$ obtenemos de (19)

$$a_{j+2} = \frac{a_j}{(j+2)(j+1)} \tag{20}$$

Colocando j = 0, 1, 2,. en sucesión encontramos que

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}, \tag{21}$$

Usando éstos en $y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j = \ldots a_1 x + a_2 x^2 +$

produce como antes $y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$ (22)

Las ecuaciones (19) o (20) con frecuencia se llaman *fórmulas de recurrencia* porque nos permite encontrar tantos términos de la serie como deseemos. Así, por ejemplo, si deseáramos encontrar a_7, obtendríamos de (20) al colocar $j = 5$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = \frac{a_3}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{a_1}{7!} \tag{23}$$

Se puede abreviar más lo anterior al omitir los límites de la sumatoria en (13) y sumas posteriores, sobre entendiendo por supuesto estos límites.

Con el objeto de practicar más en hallar soluciones por medio de términos de sumatorias, consideremos otro ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva $y'' + 2xy' - y = 0$ sujeto a las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución Sea

$$y = \sum a_j x^j \tag{24}$$

omitiendo los límites de la sumatoria $-\infty$, ∞. Entonces por diferenciación

$$y' = \sum j a_j x^{j-1} \tag{25}$$

$$y'' = \sum j(j-1) a_j x^{j-2} \tag{26}$$

Usando (24), (25) y (26) en la ecuación diferencial dada y empleando la propiedad 2 en la página 308, encontramos

$$\sum j(j-1) a_j x^{j-2} + 2x \sum j a_j x^{j-1} - \sum a_j x^j = 0 \tag{27}$$

ó

$$\sum j(j-1) a_j x^{j-2} + \sum 2j a_j x^j - \sum a_j x^j = 0 \tag{28}$$

Para que todas las sumas en (28) contengan x^j, remplace j por j + 2 en la primera. Entonces (28) se convierte en

$$\sum (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j + \sum 2j a_j x^j - \sum a_j x^j = 0 \tag{29}$$

Usando las propiedades de las sumas de la página 308 con la primera extendida a tres sumas en vez de dos, podemos escribir (29) como una simple sumatoria

$$\sum [(j + 2)(j + 1)a_{j+2} + (2j - 1)a_j]x^j = 0 \tag{30}$$

Así

$$(j + 2)(j + 1)a_{j+2} + (2j - 1)a_j = 0 \tag{31}$$

o

$$a_{j+2} = \frac{-(2j - 1)a_j}{(j + 2)(j + 1)} \tag{32}$$

Colocando $j = 0, 1, 2, \ldots$, obtenemos

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 1}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = -\frac{3a_2}{4 \cdot 3} = -\frac{3}{4!}a_0,$$

$$a_5 = -\frac{5a_3}{5 \cdot 4} = \frac{5}{5!}a_1, \quad a_6 = -\frac{7a_4}{6 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{6!}a_0, \quad a_7 = -\frac{9a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{5 \cdot 9}{7!}a_1$$

etc. Usando estos valores en $y = \sum a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ encontramos

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} + \frac{3 \cdot 7x^6}{6!} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11x^8}{8!} + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} - \frac{5 \cdot 9x^7}{7!} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 13x^9}{9!} - \cdots\right) \tag{33}$$

De $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$, obtenemos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ respectivamente. Así (33) se convierte en

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} - \frac{5 \cdot 9x^7}{7!} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 13x^9}{9!} - \cdots \tag{34}$$

La serie en (34) no parece estar relacionada de ninguna manera obvia con ninguna de las funciones elementales con las cuales estamos familiarizados. Así no hay un chequeo inmediato para ver si nuestro resultado es correcto. Podemos sin embargo, mostrar que (34) es la solución correcta. Sabiendo esto, si deseamos, podemos estudiar sus propiedades, obtener su gráfico, etc. Podemos aún si queremos darle un nombre. y si la ecuación resulta ser lo suficientemente importante podría entrar a la historia. Como veremos, hay muchos casos de ecuaciones diferenciales y funciones asociadas con los nombres de sus descubridores.

1.3 ALGUNAS PREGUNTAS DE RIGOR

De los resultados obtenidos en las páginas anteriores surgen varias preguntas.

Pregunta 1. ¿Cómo sabemos si las series que obtenemos formalmente son realmente soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales? Esta es una pregunta razonable de hacer puesto que al obtener estas series se realizaron varias operaciones cuestionables, tales como, por ejemplo, la diferenciación de una serie término a término. Siendo científicos con un deseo por la verdad, no queremos ser tildados de culpables de "manipulaciones ciegas" en la producción de un cierto resultado. Una manera de proceder es intentar justificar cada etapa a medida que avanzamos. Desafortunadamente esto puede ser imposible. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que podemos diferenciar la serie $a_0 x + a_1 x + a_2 x +$ si no conocemos los coeficientes? Claramente tenemos un círculo vicioso. No podemos probar si tenemos una solución hasta que no conozcamos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ y honestamente no podemos decir que hemos encontrado los coeficientes hasta tanto hayamos justificado las etapas.

Pregunta 2. ¿Cómo sabemos si una serie de la forma (13) puede producir una solución de una ecuación diferencial dada? Por supuesto, podríamos ensayarla y ver, pero esto no es muy científico y sería mucho mejor conocer de antemano si la serie funcionaría.

Una manera muy buena para evitar las dificultades surgidas en las dos preguntas anteriores es tratar de encontrar alguna clase de teorema de existencia y unicidad que nos dirá cuando una ecuación diferencial tiene soluciones con series de potencias tal como (13), o más generalmente (7). A primera vista parecería que el teorema en la página 171 podría usarse. Desafortunadamente, sin embargo, el hecho de que exista una solución no significa necesariamente que podamos hallarla en la forma (7).

Para simplificar las cosas, restrinjámonos a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{35}$$

donde p(r), g(x) y *r(x)* son polinomios. Resulta que tales ecuaciones diferenciales sí surgen mucho en la práctica, y también una vez tengamos información en relación a ellas es fácil generalizar a ecuaciones de orden superior o más complicadas.* Al resolver para y'' en (35) obtenemos

$$y'' = -\frac{q(x)y' + r(x)y}{p(x)} \tag{36}$$

Ahora si ha de existir una solución del tipo (7) seguramente desearíamos que y'' exista en $x = a$, y sería catastrófico si el denominador $p(x)$ en (36) fuera cero para $x = a$. Esto nos lleva a introducir la siguiente

Definición. Un valor de x tal que $p(x) = 0$ se llama un *punto singular,* o *singularidad,* de la ecuación diferencial (35). Cualquier otro valor de x se llama entonces un *punto ordinario o punto no singular.*

Ejemplo 1. Dada la ecuación diferencial $x(1 - x)y'' - (2x + 1)y' + 3y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ son ambos puntos singulares, mientras que otros valores de x, tales como $x = \frac{1}{2}, -3$ por ejemplo, son puntos ordinarios.

Ejemplo 2. La ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ tiene solamente un punto singular $x = 0$. Cualesquiera otros valores son puntos ordinarios.

*Una de tales generalizaciones se refiere al caso donde $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son *funciones analíticas*, esto es, tienen expansiones en series de potencias en algún intervalo de convergencia.

Ejemplo 3. Las ecuaciones $y'' + y = 0$ y $y'' + 2xy' - y = 0$ no tienen puntos singulares, o en otras palabras todo valor de x representa un punto ordinario.

Ejemplo 4. La ecuación $(x^2 + 1)y'' - 2y' + xy = 0$ tiene puntos singulares dados por $x^2 + 1 = 0$, esto es, $x = \pm i$. Así puntos singulares (y puntos ordinarios) pueden ser números complejos.

Tenemos entonces el interesante e importante teorema siguiente cuya demostración, la cual es algo larga y tediosa, se omitirá.*

Teorema 1. Sea
$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{37}$$
una ecuación diferencial donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios. Suponga que a es cualquier punto ordinario de (37), esto es, $p(a) \neq 0$. Entonces podemos sacar las dos siguientes conclusiones:

1. La solución general de (37) se puede obtener al sustituir la serie de potencias (o serie de Taylor) alrededor de $x = a$ dada por
$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots = \sum a_j(x - a)^j \tag{38}$$
en la ecuación diferencial dada. Un resultado equivalente es que la solución general tiene la forma $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones linealmente independientes cada una teniendo la forma (38).
2. Las soluciones con series obtenidas en la parte 1 convergen para todos los valores de x tales que $|x - a| < R$, donde R es la distancia del punto a a la singularidad ***más próxima.*** Con frecuencia llamamos R el ***radio de convergencia***. Las series pueden o no pueden converger para $|x - a| = R$, pero definitivamente divergen para $|x - a| > R$.

Con frecuencia es fácil confirmar la segunda conclusión de este teorema en relación a la convergencia de las soluciones con series usando la ***prueba del cociente*** que el estudiante aprendió en cálculo. Para propósitos de repaso resumimos los resultados en el siguiente

Teorema 2. (Prueba del cociente). Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, suponga que
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \tag{39}$$
donde l es un número mayor o igual a cero, esto es, $l \geqq 0$. Entonces la serie converge si $l < 1$ y diverge si $l > 1$. Sin embargo, la prueba falla si $l = 1$; esto es, la serie puede o no puede converger para $l = 1$, y en tal caso se deben usar otras pruebas.

Antes de mostrar cómo se usa este Teorema, consideremos la siguiente

Observación 2. En cálculo obteníamos la expansión en serie.
$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

*Ver referencia [13]

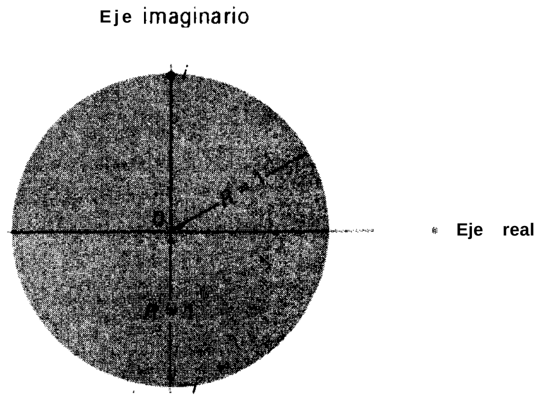


Figura 7.1

al usar la división sucesiva a la izquierda o expansión en una serie de Maclaurin. Puesto que el término general de la serie es $u_n = (-1)^n x^{2n}$, tenemos por la prueba del cociente

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x^2| = |x|^2$$

la cual muestra que la serie converge para $|x| < 1$ ó $-1 < x < 1$ si x es real. Así la serie a la derecha converge sólo para valores de x en el intervalo $-1 < x < 1$, mientras que *no hay tal restricción* sobre x para la función a la izquierda. Es natural preguntar por qué la serie a la derecha no significa nada para $x = 2$, por ejemplo, cuando la función a la izquierda tiene el valor $\frac{1}{5}$.

Investigación adicional muestra que la explicación está en el hecho de que el denominador a la izquierda es cero para $x = \pm i$ ó $|x| = 1$ usando el hecho de que el valor absoluto de un número complejo $p + qi$ es $|p + qi| = \sqrt{p^2 + q^2}$. La convergencia de la serie se garantiza así solamente para aquellos valores de x menores en valor absoluto que la distancia R de $x = 0$ (el cual es un *punto ordinario* de la función a la izquierda) a $x = \pm i$ (los cuales son *puntos singulares* de la función de la izquierda). En este caso la distancia es $R = 1$ y la situación se describe en la Figura 7.1, donde el círculo denota el *círculo de convergencia* y su radio R es el *radio de convergencia*. La serie converge para todos los puntos *dentro* del círculo pero no necesariamente en *su borde*. Sin embargo, definitivamente diverge para todos los puntos *fuera* del círculo. Esta es la interpretación que damos a la parte 2 del Teorema 1. Note que la Figura 7.1 simplemente representa un sistema de coordenadas rectangulares. Cualquier número complejo $p + qi$ se puede graficar como el punto (p, q) en este plano correspondiendo p a la coordenada en el eje horizontal o eje *real* y q correspondiendo a la coordenada en el eje vertical *o eje imaginario*. Por ejemplo, $i = 0 + 1i$ corresponde al punto (0, 1).

Demos ahora algunos ejemplos ilustrando los teoremas anteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) Use el Teorema 2 para predecir la convergencia de la solución con series de potencias en el Ejemplo ilustrativo 2, página 310, y (b) verifique usando la prueba del cociente.

Solución (a) Puesto que $y'' + 2xy' - y = 0$ no tiene singularidad, la distancia de $x = 0$ a la singularidad más próxima es infinita, esto es, la serie converge para $|x| < \infty$ ó para todo x. Otra manera de decir esto es que el radio de convergencia de la solución con series de potencias es infinito.

(b) Podemos probar la convergencia de la solución con series (34) al encontrar primero el término general u_n y luego usar la prueba del cociente dada en el Teorema 2. Sin embargo, puesto que sólo necesitamos el cociente entre dos términos sucesivos los cuales se pueden obtener usando la fórmula de recurrencia (32), es más sencillo proceder como sigue. Sea $j = 2n - 1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, puesto que (34) contiene sólo términos $a_j x^j$ donde j es impar. Así tenemos

$$u_n = a_{2n-1}x^{2n-1}, \qquad u_{n+1} = a_{2n+1}x^{2n+1}$$

y

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n-1}x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right| |x|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{(2n+1)(2n)}|x|^2 = 0$$

Puesto que $l = 0$ para todo x sigue de la prueba del cociente que la serie converge para todo x como se predijo en la parte (a). Lo interesante acerca del Teorema 1 es que ni siquiera tenemos que desarrollar la serie de potencias ni examinar su convergencia.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Determine si las soluciones con series de potencias alrededor de $x = a$, para los valores indicados de a, existen para cada una de las ecuaciones diferenciales y prediga el conjunto de valores para los cuales se garantiza la convergencia de cada serie: (a) $y'' + y = 0$; $a = 0$. (b) $xy'' + y' + xy = 0$; $a = 2$, $a = 0$. (c) $(x^2 + 1)y'' - 2y' + 5xy = 0$; $a = 0$, $a = 1$.

Solución (a) La ecuación no tiene singularidad. Así la distancia de $a = 0$ a la singularidad más próxima es infinita, esto es, la serie converge para $|x| < \infty$ ó para todo x. El hecho de que esto sea realmente cierto se verificó en la página 307, donde si obtuvieron las soluciones con series para sen x y cos x, convergentes para todo x.

(b) La ecuación tiene una singularidad en $x = 0$. Así la distancia de $a = 2$ a la singularidad más próxima es 2. Sigue del Teorema 1 que podemos hallar la solución general al usar

$$y = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + \cdots$$

La serie resultante será convergente para $|x - 2| < 2$, ó $-2 < x - 2 < 2$, esto es, $0 < x < 4$, si x es real. En $x = 0$ y $x = 4$ la serie puede o no puede converger.

Para $a = 0$, el cual es una singularidad, el Teorema 1 no se aplica puesto que solamente se consideran series de potencias alrededor de puntos ordinarios. En la próxima sección discutiremos soluciones con series de potencias alrededor de singularidades.

(c) La ecuación tiene una singularidad en los valores de x para los cuales $x^2 + 1 = 0$, esto es, $x = \pm i$. Si $a = 0$ la distancia a la singularidad más próxima es 1, como se indica en la Figura 7.1 (note que ambas singularidades

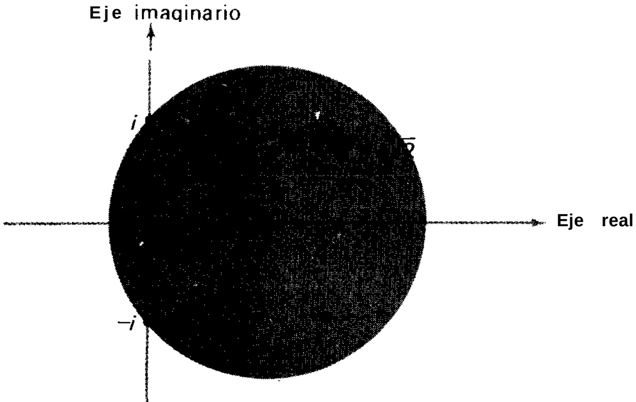


Figura 7.2

i y $-i$ son equidistantes de 0). La solución general se puede encontrar usando la serie

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

y la serie resultante convergirá para $|x| < 1$, 0 si x es real, $-1 < x < 1$, pero no hay garantía de convergencia en los puntos extremos -1 y 1.

Si a = 1 la distancia a la singularidad más próxima como se ve en la Figura 7.2 es $\sqrt{2}$ (note que ambas singularidades i y $-i$ son equidistantes de 1). La solución general se puede encontrar usando la serie

$$y = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + a_3(x - 1)^3 + \cdots$$

y será convergente para $|x - 1| < \sqrt{2}$, 0 si x es real, $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Sin embargo, puede o no puede converger en los puntos extremos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Resuelva el problema de valor inicial $xy'' - y = 0$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 3$.

Solución El punto $x = 0$ es una singularidad de la ecuación diferencial. Puesto que las condiciones iniciales se especifican en $x = 2$, usamos la serie de potencias alrededor de a = 2, el cual es un punto ordinario de la ecuación. Es conveniente hacer la transformación $v = x - 2$ de modo que $v = 0$ cuando $x = 2$. En tal caso el problema de valor inicial es

$$(v + 2)\frac{d^2y}{dv^2} - y = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{dy}{dv} = 3 \quad \text{en } v = 0 \tag{40}$$

Para resolver esto asuma $y = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots = \sum a_j v^j$ donde como de costumbre $a_j = 0$, $j < 0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(v + 2)\frac{d^2y}{dv^2} - y &= (v + 2)\sum j(j - 1)a_j v^{j-2} - \sum a_j v^j \\ &= \sum j(j - 1)a_j v^{j-1} + \sum 2j(j - 1)a_j v^{j-2} - \sum a_j v^j \\ &= \sum \left[(j + 1)j a_{j+1} + 2(j + 2)(j + 1)a_{j+2} - a_j\right]v^j = 0\end{aligned}$$

de modo que
$$(j + 1)j a_{j+1} + 2(j + 2)(j + 1)a_{j+2} - a_j = 0 \tag{41}$$

Colocando $j = -2$ y $j = -1$ en (41) muestra que a_0 y a_1 son ambas arbitrarias. Sin embargo, al notar que $y = a_0$, $dy/dv = a_1$ en $v = 0$, vemos de las condiciones en (40) que

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 3 \tag{42}$$

Tenemos ahora de (41) $$a_{j+2} = \frac{a_j - (j+1)ja_{j+1}}{2(j+2)(j+1)} \tag{43}$$

Colocando $j = 0, 1, 2,$. en sección y usando (42), encontramos

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = \tfrac{1}{4}, \qquad a_4 = -\tfrac{1}{16}, \qquad a_5 = \tfrac{1}{40}, \qquad a_6 = -\tfrac{3}{320}, \ldots$$

Así la solución requerida (única) es

$$y = \sum a_j v^j = 3v + \frac{v^3}{4} - \frac{v^4}{16} + \frac{v^5}{40} - \frac{3v^6}{320} + \cdots$$

$$= 3(x-2) + \frac{(x-2)^3}{4} - \frac{(x-2)^4}{16} + \frac{(x-2)^5}{40} - \frac{3(x-2)^6}{320} + \cdots \tag{44}$$

donde por el Teorema 1 la serie es convergente para $|x - 2| < 2$ o, puesto que x es real, $0 < x < 4$. La serie puede o no puede converger en los puntos extremos.

Observación 3. Se debería notar que la fórmula de recurrencia (43) es una *fórmula de recurrencia de tres términos* en vez del resultado acostumbrado de dos términos obtenido anteriormente. Esto no causa ninguna dificultad aunque tiende a oscurecer el término general de la serie. Podemos, sin embargo, obtener tantos términos como deseemos, y no hay motivo de preocupación puesto que conocemos del Teorema 1 los valores de x para los cuales la serie converge. Puede ser de interés para el estudiante deducir el radio de convergencia de la solución con series anterior usando (43) y la prueba del cociente (vea Ejercicio 6B).

1.4 EL METODO DE LA SERIE DE TAYLOR

Un método alternativo para hallar soluciones con series de potencias de la ecuación diferencial (35) alrededor de un punto ordinario $x = 0$ está disponible y se conoce como el *método de la serie de Taylor.* Este método usa los valores de las derivadas evaluadas en el punto ordinario, los cuales se obtienen de la ecuación diferencial por diferenciación sucesiva. Cuando se encuentran las derivadas, usamos luego la expansión en serie de Taylor

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{y'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots \tag{45}$$

dando la solución requerida, Consideremos algunos ejemplos, de este método.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Resuelva por el método de la serie de Taylor $y' = x + y + 1$.

Solución De la ecuación diferencial encontramos

$$y' = x + y + 1, \qquad y'' = 1 + y', \qquad y''' = y'', \qquad y^{(IV)} = y''', \cdots \tag{46}$$

Asumiendo $y = c$ cuando $x = 0$, encontramos de (46),

$$y'(0) = c + 1, \qquad y''(0) = c + 2, \qquad y'''(0) = c + 2, \ldots$$

Sustituyendo en (45) con $a = 0$, tenemos

$$y(x) = c + (c + 1)x + \frac{(c+2)x^2}{2!} + \frac{(c+2)x^3}{3!} + \cdots$$

o

$$y(x) = c + (c+1)x + (c+2)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= c + (c+1)x + (c+2)(e^x - 1 - x) = (c+2)e^x - x - 2$$

Esto se puede chequear como la solución sustituyendo en la ecuación diferencial dada.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 5, página 316, por el método de la serie de Taylor.

Solución Por diferenciación sucesiva de $xy'' - y = 0$ tenemos

$$xy''' + y'' - y' = 0, \qquad xy^{(IV)} + 2y''' - y'' = 0, \qquad xy^{(V)} + 3y^{(IV)} - y''' = 0,$$
$$xy^{(VI)} + 4y^{(V)} - y^{(IV)} = 0, \ldots$$

Para $x = 2$ éstas llegan a ser

$$2y''(2) - y(2) = 0, \qquad 2y'''(2) + y''(2) - y'(2) = 0, \qquad 2y^{(IV)}(2) + 2y'''(2) - y''(2) = 0,$$
$$2y^{(V)}(2) + 3y^{(IV)}(2) - y'''(2) = 0, \qquad 2y^{(VI)}(2) + 4y^{(V)}(2) - y^{(IV)}(2) = 0.$$

Usando las condiciones $y(2) = 0$, $y'(2) = 3$, éstas producen

$$y''(2) = 0, \qquad y'''(2) = \tfrac{3}{2}, \qquad y^{(IV)}(2) = -\tfrac{3}{2}, \qquad y^{(V)}(2) = 3, \qquad y^{(VI)}(2) = -\tfrac{27}{2},$$

Así

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 3(x-2) + \frac{3/2}{3!}(x-2)^3 + \frac{-3/2}{4!}(x-2)^4 + \frac{3}{5!}(x-2)^5 + \frac{-27/2}{6!}(x-2)^6 + \cdots$$

$$= 3(x-2) + \frac{(x-2)^3}{4} - \frac{(x-2)^4}{16} + \frac{\quad}{40} - \frac{320}{320} + \cdots$$

lo cual concuerda con la solución obtenida en la página 317.

El método de la serie de Taylor se puede usar también para obtener soluciones con series para ecuaciones diferenciales no lineales. Desafortunadamente, sin embargo, no hay un simple teorema como el Teorema 1 disponible para estas ecuaciones no lineales, de modo que la convergencia de la serie obtenida está cuestionada y se requieren mayores investigaciones. Como un ejemplo del método de la serie de Taylor para ecuaciones no lineales considere

Resuelva $y' = x^2 + y^2$ dado que $y(0) = 1$.

Solución Tenemos

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y'' = 2x + 2yy', \qquad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'',$$
$$y^{IV} = 6y'y'' + 2yy''', \qquad y^{V} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}.$$

colocando $x = 0$ conduce a

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{IV}(0) = 28, \quad y^{V}(0) = 144, \ .$$

Así de la expansión en serie de Taylor obtenemos

$$y(x) = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \cdots$$

Puesto que la regla de formación para los términos de esta serie no es aparente no podemos concluir nada acerca de su convergencia.

Observación 4. Como se indicó en el pie de página de la página 312, el Teorema 1 no puede generalizarse al caso donde $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son series de potencias en x-a en vez de polinomios. El teorema fundamental en tal caso es el siguiente.

Teorema 3. Sea $$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{47}$$
una ecuación diferencial dada. Sea $x = a$ un punto ordinario [esto es, $p(a) \neq 0$] y R la distancia de a a la singularidad más próxima. Suponga también que las funciones p(x), $q(x)$, $r(x)$ tienen expansiones en series de potencias de la forma (7), página 307, las cuales son convergentes para $|x - a| < R$, esto es, dentro del círculo de radio R con centro en a (las funciones en tal caso se dice con frecuencia que son ***analíticas*** dentro del círculo). Entonces podemos sacar las dos siguientes conclusiones:

1. La solución general de (47) se puede encontrar al sustituir la serie

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots = \sum a_j(x - a)^j \tag{48}$$

en (47) usando la ***serie*** de potencias en x-a para $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$. En forma equivalente, la solución general tiene la forma $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones linealmente independientes cada una teniendo la forma (48).

2. Las soluciones con series obtenidas en la parte 1 convergen para todos los valores de x tales que $|x - a| < R$ (esto es, dentro del círculo), y divergen para todos los valores de x tales que $|x - a| > R$ (esto es, fuera del círculo). Para los valores de x tales que $|x - a| = R$ (esto es, sobre el círculo), las series pueden o no pueden converger.

En la práctica la solución se puede también obtener usando el método de la serie de Taylor como en el Ejemplo ilustrativo 7. Una discusión adicional se deja para los ejercicios avanzados.

1.5 METODO DE ITERACION DE PICARD

Hay un método muy interesante debido al matemático Picard el cual se puede usar para obtener soluciones con series de ecuaciones diferenciales. Su valor, sin embargo, surge más desde el punto de vista teórico que del práctico. En efecto, Picard, usó su método para probar teoremas de existencia y unicidad para soluciones de varios tipos de ecuaciones diferenciales tales como las descritas en las páginas 24 y 171. En el ejemplo siguiente ilustramos el método de Picard para una ecuación diferencial de primer orden, aunque su uso se puede extender a ecuaciones diferenciales de alto orden.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Resuelva $y' = x + y + 1$.

Solución Asumiendo que $y = c$ cuando $x = 0$, podemos integrar ambos lados de (49) con respecto a x para obtener*

$$y = c + \int_0^x (x + y + 1)dx \tag{50}$$

La integral a la derecha no se puede desarrollar puesto que no sabemos cómo depende y de x. De hecho, esto es lo que estamos buscando. El método de Picard consiste en asumir que $y = c$ es una primera aproximación a y. Denotamos esta primera aproximación por $y_1 = c$. Cuando este valor se sustituye por y en el integrando de (50), denotamos el valor resultante de y por y_2, el cual es una segunda aproximación a y, esto es,

$$y_2 = c + \int_0^x (x + y_1 + 1)dx = c + \int_0^x (x + c + 1)dx = c + \frac{x^2}{2} + cx + x$$

Sustituyendo este valor aproximado en el integrando de (50), encontramos la tercera aproximación y_3, dada por

$$y_3 = c + \int_0^x (x + y_2 + 1)dx = c + (c + 1)x + \frac{(c + 2)x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Similarmente $$y_4 = c + (c + 1)x + \frac{(c + 2)x^2}{2!} + \frac{(c + 2)x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

y, en general,

$$y_n = c + (c + 1)x + \frac{(c + 2)x^2}{2!} + \frac{(c + 2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{(c + 2)x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

En el caso límite vemos que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c + (c + 1)x + \frac{(c + 2)x^2}{2!} + \frac{(c + 2)x^3}{3!} + \cdots$$

El hecho de que la solución a la derecha es, en efecto, la solución deseada se ve al comparar con los resultados del Ejemplo ilustrativo 6, página 317, donde se resuelve la misma ecuación diferencial. Así vemos que para este caso $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

*En la integración hemos usado x en dos sentidos, uno para la variable muda de integración y el otro para el límite superior en la integral. Hay varias ventajas para hacer esto y no debería haber ninguna confusión. Sin embargo, el estudiante podría desear usar un símbolo diferente para la variable muda, tal como t. En tal caso (50) se escribiría

$$y = c + \int_0^x (t + y + 1)dt$$

En general, dada la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

podemos obtener por integración, como el ejemplo anterior, una secuencia de aproximaciones $y_1, y_2, y_3, .$ Si $f(x, y)$ satisface condiciones apropiadas tales como las dadas en el teorema en la página 24, esta secuencia converge a la solución requerida.* El método no es práctico a menos que $f(x, y)$ sea una función simple en x y y, tal como en el ejemplo anterior, puesto que de otra manera las integraciones sucesivas pueden ser difíciles o imposibles. El hecho de que esto sea así puede verse al considerar por ejemplo la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

en la cual ni siquiera la primera integración se puede realizar.

EJERCICIOS A

1. Encontrar soluciones con series de potencias para cada una de las siguientes ecuaciones alrededor de un punto apropiado $x = a$ usando el valor de a si se indica. En cada caso determine el conjunto de valores de x para el cual la serie converge y, si es posible, sume la serie en forma cerrada.

   (a) $y' = -y;\ y(0) = 4.$ (b) $y' = xy;\ y(0) = 5.$
   (c) $y' = 2x - y.$ (d) $y'' - y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   (e) $xy'' + y' = 0;\ y(1) = 2,\ y'(1) = 7.$ (f) $xy'' + y = 0;\ a = 1.$
   (g) $y'' + xy' + y = 0.$ (h) $x^2y'' + xy' - y = 0;\ a = 2.$
   (i) $(1 - x^2)y'' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$ (j) $(1 + x)y'' + 2y' = 0;\ a = 1.$

2. Determine si las soluciones con series de potencias alrededor de a, existen para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, y prediga el conjunto de valores para el cual sus convergencias estén garantizadas.

   (a) $2y'' - 5y' + 3y = 0;\ a = 1.$ (b) $x^2y'' - y = 0;\ a = 2.$
   (c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0;$ LI $= 0.$ (d) $x(1 - x)y'' + y = 0;\ a = \frac{1}{3}.$
   (e) $(x^2 + 4)y'' - xy' + y = 0;\ a = 0.$ (f) $(x^2 + x)y'' + (x - 2)y = 0;$ LI $= 1.$

3. Trabaje los Ejercicios l(a)-(j) y Z(a)-(f) usando el método de la serie de Taylor donde sea aplicable.

4. Encuentre las soluciones con series de potencias para $y'' + xy = 0$ y discuta sus convergencias.

EJERCICIOS B

1. Use el método de Picard para obtener las soluciones de cada una de las siguientes. Encuentre al menos la cuarta aproximación a cada solución. (a) $y' = 3y;\ y(0) = 1.$ (b) $y' = x^2 - y;\ y(0) = 0.$ (c) $y' = e^x + y;\ y(0) = 0.$ (d) $2y' + xy - y = 0.$

2. Use el método de Picard para obtener la cuarta aproximación a la solución de $y' = x + y;\ y(1) = 2.$ (Sugerencia: Tome el límite inferior en la integración igual a 1.)

3. Trabaje los Ejercicios l(a)-(c) usando el método de Picard.

4. Resuelva usando series $y'' + xy' - 2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

*Para una demostración ver [13]

5. Encuentre la solución general de $y'' - 2xy' + 4y = 0$ usando métodos de series

6. Use (43), página 317, y la prueba del cociente para hallar el radio de convergencia de (44), página 317.

7. Muestre que la solución general en términos de series de potencias alrededor del punto singular $x = 0$ se puede obtener para la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, pero no para $2x^2y'' + 2xy' + y = 0$. ¿Tiene esto alguna conexión con el Teorema 1 en la página 313? Explique.

8. ¿Cómo resolvería usted por series $y'' + xy = \operatorname{sen} x$?

9. ¿Puede usted encontrar una solución con series de potencias alrededor de $a = 1$ para el Ejercicio 2(c)A? Explique.

EJERCICIOS C

1. Resuelva usando series de potencias $y'' + e^x y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Para qué valores cree usted que la serie es convergente? Explique.

2. Explique cómo usted podría resolver $(\cos x)y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$ usando series. ¿Para qué valores de x esperaría usted que la serie converja?

3. Suponga que usted nunca había oído de sen x y cos x pero que en algún problema aplicado llegó a la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ y obtuvo las soluciones con series de potencias como en el Ejemplo ilustrativo 1, página 306. Denotando estas soluciones por $C(x)$ y $S(x)$, esto es,

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

muestre que estas tienen las siguientes propiedades: (a) $[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1$. (b) $S(u + v) = S(u)C(v) + C(u)S(v)$. (c) $C(u + v) = C(u)C(v) - S(u)S(v)$.

4. Explique cómo encontraría una solución con series de $y' = e^{-xy}$, $y(0) = 1$.

5. ¿Puede usted extender el método de Picard a ecuaciones diferenciales de orden mayor al primero? Si es así, ilustre con un ejemplo.

2 El método de Frobenius

2.1 MOTIVACION PARA EL METODO DE FROBENIUS

En la sección anterior mostramos cómo obtener una solución con series de potencias a la ecuación diferencial

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{1}$$

alrededor de un punto ordinario $x = a$, esto es, donde $p(a) \neq 0$. Una pregunta que naturalmente surge es si podemos encontrar soluciones con series de potencias alrededor de $x = a$ si a es un punto singular. Esto podría ser por supuesto ventajoso, cuando por ejemplo las condiciones iniciales están dadas en un punto singular.

Un matemático con el nombre de *Frobenius* llegó a interesarse en esta pregunta al final del siglo XIX y decidió investigarla. Como una primera etapa en la investigación, decidió mirar a la ecuación diferencial de Euler, la cual tiene un punto singular y que siempre puede resolverse como ya lo hemos visto en la página 215. Consideró varios ejemplos de ecuaciones diferenciales de este tipo junto con sus soluciones generales, tales como en la lista siguiente:

1. $2x^2y'' + 2xy' + y = 0. \quad y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1/2}$
2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \quad y = c_1x^2 + c_2x.$
3. $x^2y'' - xy' + y = 0. \quad y = c_1x + c_2x \ln x.$

Estos ejemplos muestran que aunque las ecuaciones diferenciales mismas no lucían muy diferentes entre sí sus soluciones eran bastante diferentes. Por ejemplo, la segunda ecuación tiene soluciones que involucran potencias positivas de x, la primera tiene soluciones que involucran potencias negativas de x, mientras que la tercera tiene una solución que involucra In x. Al asumir una solución con series de potencias de la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum a_jx^j \tag{2}$$

en cada una de estas ecuaciones encontraríamos la solución general en el segundo caso, una solución en el tercer caso, y ninguna solución en el primer caso (aparte de la solución trivial y = 0). Llegó a ser claro para Frobenius que la dificultad surge debido al tipo de serie asumida en (2). ¿Por qué no asumir un tipo más general de serie, tal como

$$y = x^c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = \sum a_jx^{j+c} \tag{3}$$

donde c es una constante adicional desconocida, la cual se reduce a (2) en el caso especial $c = 0$? Este supuesto produciría la solución general en ambos el primer y segundo casos y una solución en el tercero.

De hecho, no es difícil mostrar que cualquier ecuación de Euler de orden 2 (o mayor) tiene al menos una solución del tipo (3). Frobenius fue llevado así a hacer la siguiente

Pregunta. ¿Bajo qué condiciones sobre p(x), $q(x)$ y $r(x)$ donde $x = 0$ es un punto singular la ecuación diferencial (1) tendrá una solución del tipo (3)?

Debido a que una serie del tipo (3) está asociada con Frobenius, con frecuencia nos referiremos a ésta como una *solución tipo Frobenius.*

Ahora es por supuesto imposible saber qué sucedió en la mente de Frobenius en la búsqueda de la respuesta a esta pregunta, pero el razonamiento pudo haber sido como el que sigue.

Comparemos la ecuación general de Euler de segundo orden

$$k_0x^2y'' + k_1xy' + k_2y = 0 \tag{4}$$

donde k_0, k_1, k_2 son constantes en (1). Para propósitos de una mejor comparación dividamos la ecuación (1) por $p(x)$ y (4) por k_0x^2 de modo que el coeficiente de y $''$ en cada caso sea 1. Así obtenemos

$$y'' + \frac{q(x)}{p(x)}y' + \frac{r(x)}{p(x)}y = 0, \qquad y'' + \frac{k_1}{k_0x}y' + \frac{k_2}{k_0x^2}y = 0$$

Ahora si tenemos $\dfrac{q(x)}{p(x)} = \dfrac{k_1}{k_0x}, \quad \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{k_2}{k_0x^2}$

o en forma equivalente si $\dfrac{xq(x)}{p(x)}$ = una constante, $\dfrac{x^2r(x)}{p(x)}$ = una constante (5)

entonces (1) es precisamente una ecuación de Euler.

Si no tenemos (5) pero si tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{xq(x)}{p(x)} = \text{una constante}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2r(x)}{p(x)} = \text{una constante} \tag{6}$$

esto es, límites en (6) existen, entonces (1) no será una ecuación de Euler pero debería ser *cercamente* una ecuación de Euler si tomamos x lo *suficientemente cercano* a cero. En tal caso esperaríamos que (1) tuviera una solución del tipo Frobenius (3).

Ejemplo 1. Suponga que nos dan la ecuación diferencial

$$(2x^2 + 5x^3)y'' + (2s - x^2)y' + (1 + x)y = 0 \tag{7}$$

entonces para valores suficientemente pequeños de x, esto es, para x cerca a cero, podemos despreciar $5x^3$ en comparación con $2x^2$, x^2 en comparación con 2x, y x en comparación con 1, de modo que podemos esperar que una buena aproximación a (7) cerca a $x = 0$ esté dada por

$$2x^2y'' + 2xy' + y = 0 \tag{8}$$

la cual es la primera ecuación de Euler dada en la página 323 con la solución general $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1/2}$. En vista de esto esperaríamos que (7) tenga dos soluciones del tipo Frobenius (3) con c = -1 y c = $-\frac{1}{2}$, respectivamente. Esto no es difícil de verificar (vea el Ejercicio 1B).

A pesar de que este enfoque "llamativo" no es por supuesto una prueba de nada, el tipo de razonamiento involucrado puede ayudar a guiarnos hacia una *conjetura* de un posible teorema, el cual debe ser demostrado. Antes de enunciar tal "posible teorema" notemos primero que el imponer el requerimiento (6) estamos colocando una restricción sobre el punto singular x = 0, puesto que el requerimiento puede o no puede cumplirse. Esto nos lleva a distinguir entre ***dos clases*** de puntos singulares como se expresan en la siguiente definición. Enunciamos esta definición en una forma aplicable a cualquier punto singular $x = a$ en vez de $x = 0$.

Definición. Sea $x = a$ un punto singular de la ecuación diferencial (1). Entonces si

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-a)q(x)}{p(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2r(x)}{p(x)} \quad \text{existen ambos} \tag{9}$$

llamamos $x = a$ un *punto singular regular;* en caso contrario se llama un *punto singular irregular,*

Ejemplo 2. Dada la ecuación $(x - 2)y'' + 3y' - xy = 0$, tenemos $p(x) = x - 2$, $q(x) = 3$, $r(x) = -x$ y $x = 2$ es un punto singular. Puesto que

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3)}{x-2} = 3, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(-x)}{x-2} \quad 0$$

esto es, ambos límites existen, $x = 2$ es un punto singular regular.

Ejemplo 3. Dada la ecuación $x^3(1 - x)y'' + (3x + 2)y' + x^4y = 0$, tenemos $p(x) = x^3(1 - x)$, $q(x) = 3x + 2$, $r(x) = x^4$, y hay dos puntos singulares $x = 0$ y $x = 1$.

Puesto que
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x)(3x+2)}{x^3(1-x)}$$

no existe, mientras que
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2)(x^4)}{x^3(1-x)} = 0$$

no existen ambos límites y por tanto $x = 0$ es un punto singular irregular. Puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{x^3(1-x)} = -5 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(3x+2)}{x^3(1-x)} = 0$$

existen ambos límites y $x = 1$ es un punto singular regular.

Basados en las observaciones anteriores, conjeturamos la verdad del siguiente

Teorema 1. Sea $x = a$ un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{10}$$

donde $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son polinomios, y suponga que $x = a$ es un punto singular regular, esto es,

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)q(x)}{p(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^2 r(x)}{p(x)} \quad \text{existen ambos} \tag{11}$$

Entonces (10) tiene una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = (x-a)^c[a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots] = \sum a_j(x-a)^{j+c}$$

donde la serie aparte del factor $(x-a)^c$ converge para todo x tal que $|x-a| < R$ y donde R es la distancia de $x = a$ a la singularidad mas próxima (por supuesto distinta de a). La serie puede o no puede converger para $|x-a| = R$ pero definitivamente diverge para $|x-a| > R$.*

La generalización se puede hacer al caso donde $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son analíticas dentro del círculo de radio R con centro en a (esto es, tienen series de potencias o series de Taylor en $x-a$ convergentes para $|x-a| < R$).

Al enunciar este teorema usamos la intuición dada por el Teorema 1, página 313. Lo sorprendente acerca del conjeturado teorema anterior es que es *cierto*. Sin embargo, como antes omitiremos una demostración y en vez presentamos ejemplos de su uso. †

Ejemplo 4. Puesto que $x = 2$ es un punto singular regular de $(x-2)y'' + 3y' - xy = 0$ (ver el Ejemplo 2), la ecuación tiene una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = (x-2)^c[a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots] = \sum a_j(x-2)^{j+c}$$

*Se debería notar que si incluimos el factor $(x-a)^c$ entonces la serie resultante converge para $|x-a| < R$ si $c \geqq 0$. Sin embargo, si $c < 0$, la serie no converge para $x = a$.

† Para una demostración, ver [13]

donde la serie aparte del factor $(x - 2)^c$ es convergente para todo x, esto es, para x tal que Ix-21 < ∞, puesto que no hay otro punto singular.

Ejemplo 5. Dada la ecuación $x^3(1 \quad x)y'' + (3y + 2)y' + x^4y = 0$, sabemos del Ejemplo 3 que $x = 1$ es un punto singular regular mientras que $x = 0$ es un punto singular irregular. Así existe una solución tipo Frobenius de la forma

$$2' = (x - 1)^c[a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdot \cdot] = \sum a_j(x - 1)^{j+c}$$

donde la serie aparte del factor $(x - 1)^c$ es convergente para $|x - 1| < 1$ puesto que la distancia de 1 a la singularidad mas próxima (esto es, 0) es 1. La serie puede o-no puede converger para $|x - 1| = 1$ pero definitivamente; diverger para $|x - 1| > 1$.

Puesto que $x = 0$ es un punto singular irregular, no podemos concluir a partir del teorema anterior si hay soluciones tipo Frobenius de la forma

$$y = x^c[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot \cdot] = \sum a_jx^{j+c}$$

Observación 1. Como se indicó en el Ejemplo 5, el teorema de la página 325 no nos permite sacar ninguna conclusión que concierne soluciones tipo Frobenius en el caso de un punto singular irregular. Puesto que la teoría que involucra puntos singulares irregulares es algo difícil, no nos ocuparemos de ella. Se debería indicar, sin embargo, que en tal caso siempre podemos obtener una solución con series alrededor de un punto ordinario y luego usar el Teorema 1 en página 313. *

Al comparar el teorema anterior con aquel en la página 313 el estudiante alerta puede haber notado que el anterior no menciona solución general, mientras que el de la página 313 sí lo hace. La razón es muy simple, porque aunque el teorema anterior menciona condiciones bajo las cuales una solución tipo Frobenius de una ecuación diferencial exista, no menciona que *todas las soluciones* deban ser del tipo Frobenius. Hemos visto esto de hecho en conexión con la ecuación elemental de Euler, por ejemplo el Caso 3 en la página 323, donde aparece $\ln x$, la cual ciertamente no es del tipo Frobenius.

Afortunadamente, haciendo uso del teorema en la pagina 175, si conocemos una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, podemos encontrar la solución general. Como veremos, esta segunda solución involucra una serie tipo Frobenius multiplicada por In x, como podríamos esperar de las observaciones de la tercera ecuación de Euler en la página 323.

2.2 EJEMPLOS USANDO EL METODO DE FROBENIUS

Volvamos ahora a algunos ejemplos típicos del método de Frobenius.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encontrar soluciones tipo Frobenius de $4xy'' + 2y' + y = 0$.

Solución Tenemos $p(x) = 4x$, $q(x) = 2$, $r(x) = 1$, y $x = 0$ es un punto singular.

Puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xq(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x)(2)}{4x'} = \dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2r(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2)(1)}{4x} = 0$

*Ver también los Ejercicios 3 y 4C de la página 337.

existen ambos, vemos que $x = 0$ es un punto singular regular, de modo que existe una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c} \tag{12}$$

donde se omiten los límites de las sumatorias $-\infty$ y ∞, donde $a_j = 0$ para los enteros negativos j. La diferenciación de (12) produce

$$y' = \sum (j + c)a_j x^{j+c-1}, \qquad y'' = \sum (j + c)(j + c - 1)a_j x^{j+c-2} \tag{13}$$

Sustituyendo (12) y (13) en la ecuación diferencial dada, tenemos

$$\begin{aligned}
4xy'' + 2y' + y &= \sum 4(j + c)(j + c - 1)a_j x^{j+c-1} + \sum 2(j + c)a_j x^{j+c-1} + \sum a_j x^{j+c} \\
&= \sum 4(j + c + 1)(j + c)a_{j+1} x^{j+c} + \sum 2(j + c + 1)a_{j+1} x^{j+c} + \sum a_j x^{j+c} \\
&= \sum [4(j + c + 1)(j + c)a_{j+1} + 2(j + c + 1)a_{j+1} + a_j]x_{j+c} \\
&= \sum [(2j + 2c + 2)(2j + 2c + 1)a_{j+1} + a_j]x_{j+c} = 0
\end{aligned}$$

de donde $$(2j + 2c + 2)(2j + 2c + 1)a_{j+1} + a_j = 0 \tag{14}$$

Puesto que $a_j = 0$ para $j < 0$, el primer valor de j para el cual obtenemos alguna informaclón de (14) es $j = -1$ ($j = -2$ produce $0 = 0$). Para $j = -1$ (14) llega a ser

$$(2c)(2c - 1)a_0 = 0 \tag{15}$$

0, puesto que $a_0 \neq 0$, $$(2c)(2c \quad 1) = 0 \tag{16}$$

de donde $c = 0, \frac{1}{2}$. La ecuación (16) para determinar c con frecuencia se llama la ***ecuación indicial***, y los valores de c se llaman las ***raíces indiciales,*** en este caso $c = 0, \frac{1}{2}$. Hay dos casos que deben ser considerados, correspondientes a los dos valores de c.

Cuso ***1,*** $c = 0$. En este caso (14) llega a ser

$$(2j + 2)(2j + 1)a_{j+1} + a_j = 0 \quad 0 \quad a_{j+1} = -\frac{a_j}{(2j + 2)(2j + 1)}$$

Colocando $j = 0, 1, 2,.$, encontramos

$$a_1 = -\frac{a_0}{2!} \qquad a_2 = -\frac{a_1}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!},$$

de donde $$y = \sum a_j x^j = a_0\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots\right) \tag{17}$$

Cuso 2, $c = \frac{1}{2}$. En este caso (14) llega a. ser

$$(2j + 3)(2j + 2)a_{j+1} + a_j = 0, \qquad a_{j+1} = -\frac{a_j}{(2j + 3)(2j + 2)}$$

Colocando $j = 0, 1, 2,.$ produce

$$a_1 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 4} = \frac{a_0}{5!}, \qquad a_3 = -\frac{a_2}{7.6} = -\frac{a_0}{7!},$$

de donde $$y = \sum a_j x^{j+1/2} = a_0\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \frac{x^{7/2}}{7!} + \cdots\right) \tag{18}$$

De las soluciones (17) y (18) encontramos la solución general

$$y = A\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots\right) + B\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \frac{x^{7/2}}{7!} + \cdots\right) \quad (19)$$

El estudiante observador notara que las dos series en (19) representan, respectivamente, $\cos\sqrt{x}$ y sen $\sqrt{x}$, de modo que la solución general es

$$y = A\cos\sqrt{x} + B\operatorname{sen}\sqrt{x} \quad (20)$$

Note también que las series en (19) convergen para todos los valores de x. Esto sigue de inmediato del teorema en la página 325, puesto que $x = 0$ es el único punto singular.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre soluciones tipo Frobenius para $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Solución Aquí $p(x) = x^2$, $q(x) = x$, $r(x) = x^2 - 1$ y $x = 0$ es un punto singular. Puesto que

$$\lim_{x\to 0}\frac{xq(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x)}{x^2} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2r(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)}{x^2} = -1$$

sigue que $x = 0$ es un punto singular regular de modo que, por el teorema en la página 325, hay una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c}$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial dada produce

$$x^2\sum (j+c)(j+c-1)a_jx^{j+c-2} + x\sum (j+c)a_jx^{j+c-1} + (x^2-1)\sum a_jx^{j+c} = 0$$

$$0 \quad \sum (j+c)(j+c-1)a_jx^{j+c} + \sum (j+c)a_jx^{j+c} + \sum a_jx^{j+c+2} - \sum a_jx^{j+c} = 0$$

lo cual se puede escribir como la sola sumatoria

$$\sum [(j+c)(j+c-1)a_j + (j+c)a_j + a_{j-2} - a_j]x^{j+c} = 0$$

Haciendo el coeficientes de x^{j+c} igual a cero y simplificando obtenemos

$$(j+c+1)(j+c-1)a_j + a_{j-2} = 0 \quad (21)$$

Colocando j = 0 en (21) produce $(c+1)(c-1)a_0 = 0$, lo cual puesto que $a_0 \neq 0$ produce la ecuación indicia1

$$(c+1)(c-1) = 0 \text{ de modo que } c = -1, 1$$

son las raíces indiciales. Así hay dos casos.

Cuso 1, $c = -1$. Colocando $c = -1$ en (21), tenemos

$$j(j-2)a_j + a_{j-2} = 0 \quad 0 \quad a_j = -\frac{a_{j-2}}{j(j-2)}$$

Colocando $j = 1$ conduce a $a_1 = 0$, pero colocando $j = 2$ nos conduce a algo sin sentido para a_2 puesto que asumimos $a_0 \neq 0$. Así no podemos encontrar ninguna solución en este caso.

Caso 2, $c = 1$. Colocando $c = 1$ en (21) produce

$$(j+2)ja_j + a_{j-2} = 0 \quad \text{ó} \quad a_j = -\frac{a_{j-2}}{j(j+2)}$$

Colocando $j = 1, 2, 3,$ conduce a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6},$$

$$a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 8} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}, \ldots$$

Note que todos los a_j con j impar son cero porque son todos múltiplos de $a_1 = 0$. La solución requerida está así dada por

$$y = \sum a_j x^{j+1} = a_0\left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots\right) \tag{22}$$

Del Teorema 1 en la página 325, sigue que esta serie converge para todo x puesto que $x = 0$ es el único punto singular.

A diferencia con el Ejemplo ilustrativo 1 el método de Frobenius en este caso conduce a una sola solución. Para encontrar la solución general, debemos hallar otra solución linealmente independiente. Afortunadamente, para este propósito el Teorema 3, página 175, puede ayudarnos puesto que si conocemos una solución, digamos $Y_1(x)$ o brevemente Y_1, de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, podemos encontrar la solución general al hacer $y = vY_1$. Desarrollemos este proceso a través del siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encontrar la solución general de $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Solución Haciendo $y = vY_1$, tenemos $y' = vY'_1 + v'Y_1$, $y'' = vY''_1 + 2v'Y'_1 + v''Y_1$ de modo que la ecuación diferencial dada llega a ser

$$x^2(vY''_1 + 2v'Y'_1 + v''Y_1) + x(vY'_1 + v'Y_1) + (x^2 - 1)vY_1 = 0$$

o

$$x^2v''Y_1 + (2x^2Y'_1 + xY_1)v' + [x^2Y''_1 + xY'_1 + (x^2 - 1)Y_1]v = 0 \tag{23}$$

Pero puesto que Y_1 satisface la ecuación dada tenemos $x^2Y''_1 + xY'_1 + (x^2 - 1)Y_1 = 0$ de modo que el último término en (23) es cero y tenemos

$$x^2v''Y_1 + (2x^2Y'_1 + xY_1)v' = 0$$

una ecuación de primer orden en v'. Haciendo $v' = u$, esto llega a ser

$$x^2u'Y_1 + (2x^2Y'_1 + xY_1)u = 0$$

o al dividir por x^2Y_1u,

$$\frac{u'}{u} + \frac{2Y'_1}{Y_1} + \frac{1}{x} = 0$$

Integrando y denotando la constante de integración por $\ln A$, tenemos

$$\ln u + 2 \ln Y_1 + \ln x = \ln A \quad \text{o} \quad \ln (u Y_1^2 x) = \ln A$$

esto es,
$$u Y_1^2 x = A \quad \text{ó} \quad v' = \frac{A}{x Y_1^2}$$

de donde
$$v = A \int \frac{dx}{x Y_1^2} + B$$

donde B es otra constante de integración. De $y = v Y_1$, obtenemos ahora

$$y = A Y_1 \int \frac{dx}{x Y_1^2} + B Y_1 \tag{24}$$

la cual es la solución general. El resultado (24) muestra que además de Y_1 siendo una solución tenemos como una solución linealmente independiente

$$Y_2 = Y_1 \int \frac{dx}{x Y_1^2} \tag{25}$$

Veamos en lo que se convierte (25) si usamos la solución conocida Y_1, la cual tomamos como la serie en (22) aparte de la constante arbitraria a_0, esto es,

$$Y_1 = x - \frac{x^3}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \cdots \tag{26}$$

Tenemos de (26)

$$\frac{1}{Y_1} = \frac{1}{x(1 - x^2/8 + x^4/192 - \cdots)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \alpha_1 x^4 + \cdots\right) \tag{27}$$

donde hemos usado la división sucesiva en el segundo factor y hemos denotado el coeficiente de x^4 por α_1, el cual no necesitamos determinar explícitamente para nuestros propósitos del momento. Si ahora elevamos al cuadrado (27) y multiplicamos por $1/x$ tenemos

$$\frac{1}{x Y_1^2} = \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \alpha_2 x^4 + \cdots\right) \tag{28}$$

donde el nuevo coeficiente de x^4 se denota por α_2. La integración de (28) conduce a

$$\int \frac{dx}{x Y_1^2} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4} \ln x + \frac{\alpha_2 x^2}{2} + \tag{29}$$

Multiplicando (29) por Y_1 muestra que

$$Y_2 = \tfrac{1}{4} Y_1 \ln x + F \tag{30}$$

donde F es una serie tipo Frobenius. Sin embargo, debido al término que contiene $\ln x$ vemos que Y_2 no se puede representar por una serie de Frobenius y explica por qué no obtuvimos la solución general en el Ejemplo ilustrativo 2. El resultado también sirve para ilustrar la observación en la página 326 en relación a la presencia de $\ln x$ en la solución. Es de interés que si estuviéramos buscando una solución a la ecuación diferencial la cual esta *acotada* en $x = 0$ tendríamos que deshacernos de Y_2, lo cual equivale a escoger $A = 0$ en (24). Esto a menudo se hace en problema aplicados puesto que las variables físicas no pueden ser en general no acotadas.

Observación 2. Hay otras maneras de obtener la segunda solución (esto es, una que no es del tipo Frobenius) en una forma que muestra el término general. El método se indica en el Ejercicio 1C.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Resuelva $xy'' + 2y' - xy = 0$.

Solución Aquí $p(x) = x$, $q(x) = 2$, $r(x) = -x$ y $x = 0$ es una singularidad. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{xq(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2)}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 r(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-x)}{x} = 0$$

sigue que $x = 0$ es un punto singular regular. Así existe una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c}$$

Usando esto, la ecuación diferencial llega a ser

$$\sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-1} + \sum 2(j+c)a_j x^{j+c-1} - \sum a_j x^{j+c+1} = 0$$

o
$$\sum [(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + 2(j+c+1)a_{j+1} - a_{j-1}]x^{j+c} = 0$$

de modo que
$$(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + 2(j+c+1)a_{j+1} - a_{j-1} = 0$$

esto es,
$$(j+c+1)(j+c+2)a_{j+1} - a_{j-1} = 0 \tag{31}$$

Colocando $j = -1$ en (31) produce $c(c+1)a_0 = 0$, y puesto que $a_0 \neq 0$ obtenemos $c = -1, 0$ para las raíces indiciales.

Caso 1, $c = -1$. En este caso, de (31) tenemos

$$j(j+1)a_{j+1} - a_{j-1} = 0 \quad o \quad a_{j+1} = \frac{a_{j-1}}{j(j+1)} \tag{32}$$

Colocando $j = 0$, la primera ecuación en (32) da $0 \cdot a_1 - 0 = 0$, así que a_1 es arbitraria. Esto también se puede ver de la segunda ecuación en (32), la cual *formalmente* da $a_1 = 0/0$, lo cual es indeterminado. Ahora colocando $j = 1, 2, 3, \ldots$ en (32) da

$$a_2 = \frac{a_0}{1\cdot 2} = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_1}{3!}, \quad a_4 = \frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{4!}, \quad a_5 = \frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{5!}, \ldots$$

Así
$$y = \sum a_j x^{j+c} = \sum a_j x^{j-1}$$

$$= a_0\left(x^{-1} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) + a_1\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\right) \tag{33}$$

la cual da la solución general. Puesto que $x = 0$ es el único punto singular, la primera serie a la derecha de (33) converge para todo $x \neq 0$ (debido al término x^{-1}) mientras que la segunda serie a la derecha converge para todo x incluyendo $x = 0$. Podemos escribir la solución en términos de funciones hiperbólicas, esto es,

$$y = \frac{a_0 \cosh x + a_1 \operatorname{senh} x}{x} \tag{34}$$

Caso 2, $c = 0$. No hay necesidad de desarrollar este caso puesto que ya hemos obtenido la solución general a partir de Caso 1. Si lo desarrollamos obtenemos solamente la segunda serie en (33). Debido a esta posibilidad, es generalmente aconsejable considerar primero la raíz indicial más pequeña.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Obtenga una solución tipo Frobenius alrededor de $x = 1$ para la ecuación diferencial $x(x - 1)y'' + xy' + y = 0$.

Solución Tenemos ***$p(x) = x(x - 1)$, $q(x) = x$, $r(x) = 1$, de modo*** que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares. Puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)q(x)}{p(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x)}{x(x-1)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 r(x)}{p(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(1)}{x(x-1)} = 0$$

sigue que $x = 1$ es un punto singular regular, y así por el teorema en la página 325 hay una solución tipo Frobenius alrededor de $x = 1$ dada por

$$y = \sum a_j (x-1)^{j+c} \tag{35}$$

Es conveniente hacer el cambio de variable $v = x - 1$ así que la ecuación diferencial dada llega a ser

$$v(v+1)\frac{d^2y}{dv^2} + (v+1)\frac{dy}{dv} + y = 0 \tag{36}$$

y (35) se puede escribir

$$y = \sum a_j v^{j+c} \tag{37}$$

Sustituyendo (37) en (36) produce

$$(v^2 + v)\sum (j+c)(j+c-1)a_j v^{j+c-2} + (v+1)\sum (j+c)a_j v^{j+c-1} + \sum a_j v^{j+c} = 0$$

o

$$\sum \{[(j+c)^2 + 1]a_j + (j+c+1)^2 a_{j+1}\} v^{j+c} = 0$$

Así

$$[(j+c)^2 + 1]a_j + (j+c+1)^2 a_{j+1} = 0 \tag{38}$$

Haciendo $j = -1$ produce $c^2 a_0 = 0$, esto es, $c = 0$ puesto que $a_0 \neq 0$. Así las raíces de la ecuación indicial son ambas iguales a cero. Colocando $c = 0$ en (38) da

$$(j^2 + 1)a_j + (j+1)^2 a_{j+1} = 0 \quad \text{ó} \quad a_{j+1} = \frac{-(j^2+1)}{(j+1)^2} a_j \tag{39}$$

Ahora colocando j = 0, 1, 2,. , tenemos

$$a_1 = -a_0, \qquad a_2 = -\frac{(1^2+1)}{2^2} a_1 = \frac{(1^2+1)}{2^2} a_0,$$

$$a_3 = -\frac{(2^2+1)}{3^2} a_2 = -\frac{(1^2+1)(2^2+1)}{2^2 3^2} a_0, \ .$$

Usando éstos en (37) y también remplazando v por $x - 1$, obtenemos la solución reauerida

$$y = a_0 \left[1 - (x-1) + \frac{(1^2+1)}{2^2}(x-1)^2 - \frac{(1^2+1)(2^2+1)}{2^2 3^2}(x-1)^3 + \cdots \right] \tag{40}$$

Del teorema en la página 325 sigue que la solución con series (40) converge para $|x - 1| < 1$, puesto que la distancia de $x = 1$ a la singularidad más próxima $x = 0$ es 1. Es interesante verificar esto usando la prueba del cociente. Para hacer esto notamos que el j-ésimo término es $a_j(x - 1)^j$. Así tenemos

$$\left| \frac{a_{j+1}(x-1)^{j+1}}{a_j(x-1)^j} \right| = \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| |x-1| = \frac{j^2+1}{(j+1)^2} |x-1|$$

al usar (39). Entonces
$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}(x-1)^{j+1}}{a_j(x-1)^j} \right| = |x-1|$$

así que por la prueba del cociente la serie converge si $|x - 1| < 1$ y diverge si $|x - 1| > 1$. La prueba falla si $|x - 1| = 1$.

Note que en este caso no hemos obtenido la solución general. Para hacerlo procedemos como en el Ejemplo ilustrativo 3 (vea el Ejercicio 5C).

De los ejemplos anteriores es claro que las soluciones tipo Frobenius que obtenemos dependen de las raíces indiciales y que pueden surgir varios casos.

1. Si las raíces indiciales difieren en una constante que no es un entero, esto *es,* no *es 0,* ± 1, ± 2, . , *siempre* se obtiene la solución general. Esta es la situación en el Ejemplo ilustrativo 1, página 326.

2. Si las raíces indiciales difieren en un entero no igual a cero, hay *dos posibilidades:*
   (a) No se obtiene solución al usar la raíz indicial más pequeña. Sin embargo, en todos los casos se puede determinar una solución al usar la *raíz más grande.* Esta es la situación en el Ejemplo ilustrativo 2, página 328.
   (b) La solución se obtiene al usar la raíz indicial más pequeña. Por ejemplo, si las raíces indiciales son -2 y -1, entonces -2 es la raíz más pequeña. Esta es la situación en el Ejemplo ilustrativo 4, página 331.

3. Si las raíces indiciales difieren en cero, esto es, son iguales, se obtiene solamente una solución. Esta es la situación en el Ejemplo ilustrativo 5, página 332.

Se ve que los casos 1 y 2(b) no ofrecen dificultad puesto que se obtiene la solución general. En los casos 2(a) y 3, se obtiene solamente una solución (esto es, con una constante arbitraria), y debemos encontrar otra solución independiente para determinar la solución general. Para hacer esto siempre podemos usar el teorema en la página 175, como en el Ejemplo ilustrativo 3, página 329, o usar el método dado en el Ejercicio 1C, página 335.

Observación 3. En el Teorema 1 en la página 325 se da información concerniente a la convergencia de soluciones con series tipo Frobenius. Sin embargo, como el estudiante puede haber notado, tal información no ha sido proporcionada en la relación a la convergencia de una segunda solución con series como en el Ejemplo ilustrativo 3 de la página 329, por ejemplo. Tal teorema está disponible el cual lo enunciamos aquí para propósitos de referencia.

Teorema 2. Suponga que se satisfacen las condiciones del Teorema 1, página 325 (o su generalización para funciones analíticas) de modo que una solución del tipo Frobenius de la forma

$$(x-a)^{c_1}\sum a_j(x-a)^j$$

existe correspondiente a la raíz indicial c_1. Entonces si la segunda solución (linealmente independiente) no es una solución tipo Frobenius, ésta debe tener la forma

$$(x-a)^{c_2}\left[\sum b_j(x-a)^j + K\ln|x-a|\sum a_j(x-a)^j\right] \tag{41}$$

donde K y c_2 son constantes y donde la serie de potencias $\sum a_j(x-a)^j$ y $\sum b_j(x-a)^j$ convergen para $|x-a|<R$ donde R, como antes, es la distancia de a al punto singular más próximo.*

Ejemplo. La segunda solución Y_2 dada por (30) en el Ejemplo ilustrativo 3, página 329, tiene la forma (41).

Observación. El método de Frobenius se puede también extender a ecuaciones diferenciales con coeficientes variables de orden superior a dos, pero puesto que la teoría involucrada es análoga a la dada anteriormente, y puesto que tales ecuaciones no ocurren en la mayoría de problemas aplicados, no consideraremos esta extensión. Vea sin embargo el Ejercicio 7C.

EJERCICIOS A

1. Encuentre soluciones tipo Frobenius alrededor de $x=0$ para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. En cada caso determine la solución general y discuta la convergencia.

(a) $xy''+2y'+xy=0$.
(b) $2xy''+y'-xy=0$.
(c) $x(1-x)y''+2y'+2y=0$.
(d) $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$.
(e) $xy''+y=0$.
(f) $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$.
(g) $xy''+(1-x)y'+y=0$.
(h) $xy''-y'+4x^2y=0$.
(i) $4x^2y''-4xy'+(3-4x^2)y=0$.
(j) $xy''+y'+y=0$.
(k) $x(x^2+2)y''-y'-6xy=0$.
(l) $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$.

2. Muestre que las raíces de la ecuación indicial puede encontrarse haciendo $y=x^c$ en la ecuación diferencial dada y determinando c de modo que el coeficiente de la potencia más baja de x sea cero. Ilustre trabajando algunos de los ejercicios anteriores.

*Note que en el caso especial donde $K=0$, (41) corresponde a una solución tipo Frobenius linealmente independiente correspondiente a la raíz indicial $c_2 \neq c_1$

3. Use el método de Frobenius para obtener la solución exacta de

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} + \alpha U = 0.$$

EJERCICIOS B

1. Verifique que la ecuación diferencial *(7)* en la página 324 tiene las raíces indiciales $c = -1, -\frac{1}{2}$, y resuelva la ecuación.
2. ¿Cómo obtendría usted la solución general de $y'' - xy' - y = 5\sqrt{x}$? [Sugerencia: Asuma una solución *particular* de la forma $x^c(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$ y determine las constantes para que se satisfaga la ecuación dada. Luego resuelva $y'' - xy' - y = 0$ asumiendo una solución tipo Frobenius y obtenga la solución complementaria.]
3. Resuelva $xy'' + 2y' + xy = 2x$.
4. Resuelva (a) $(1 - x)y'' + (2 - 4x)y' - y = 0$, (b) $(1 - x)y'' + (2 - 4x)y' - y = 4x^2$.
5. Es $x = 0$ un punto singular regular para la ecuación $x^2y'' + y' + xy = 0$? ¿Cómo obtendría usted una solución de esta ecuación?

EJERCICIOS C

1. Si el método de Frobenius produce una solución con series con sólo una constante arbitraria, existen procedimientos para determinar la solución general. Dos casos pueden surgir: (A) las raíces de la ecuación indicial son iguales; (B) las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero. Se indicará el procedimiento en un ejemplo ilustrando cada caso.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 (CASO A)

Encuentre la solución general de $xy'' + y' + xy = 0$.

Solución Procedemos como de costumbre, usando la notación de sumatoria. Sustituyendo $y = \sum a_j x^{j+c}$ en la ecuación dada, encontramos,

$$xy'' + y' + xy = \sum [a_{j-1} + (j + c + 1)^2 a_{j+1}]x^{j+c} \tag{42}$$

El procedimiento acostumbrado ahora es decir que

$$a_{j-1} + (j + c + 1)^2 a_{j+1} = 0 \tag{43}$$

y, al hacer $j = -1$, obtenemos las raíces indiciales $c = 0, 0$. Esto produce la solución tipo Frobenius dada, aparte de una constante multiplicativa, por

$$U(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots \tag{44}$$

la cual proporciona una solución a la ecuación dada. Para encontrar una segunda solución, regresemos una vez más a la ecuación (43), donde $j \geqq 0$ y donde supongamos por un momento que $c \neq 0$, esto es,

$$a_{j-1} + (j + c + 1)^2 a_{j+1} = 0, \qquad j \geqq 0$$

Entonces

$$a_{j+1} = -\frac{a_{j-1}}{(j + c + 1)^2}, \qquad j \geqq 0$$

Colocando $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$, tenemos

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{-a_0}{(c+2)^2}, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = \frac{-a_2}{(c+4)^2} = \frac{a_0}{(c+2)^2(c+4)^2}$$

y, en general, $\qquad a_{2j-1} = 0, \qquad a_{2j} = \dfrac{(-1)^j a_0}{(c+2)^2(c+4)^2 \cdots (c+2j)^2}$

Considere ahora

$$Y = \sum a_j x^{j+c} = a_0 x^c \left[1 - \frac{x^2}{(c+2)^2} + \frac{x^4}{(c+2)^2(c+4)^2} - \cdots\right] \tag{45}$$

Es claro de (42) o por sustitución directa que

$$xY'' + Y' + xY = c^2 a_0 x^{c-1} \tag{46}$$

Ahora recurrimos al siguiente esquema; diferencie (46) con respecto a c. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial c}(xY'') + \frac{\partial}{\partial c}(Y') + \frac{\partial}{\partial c}(xY) = 2ca_0 x^{c-1} + c^2 a_0 x^{c-1} \ln x$$

o $$x\left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right)'' + \left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right)' + x\left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right) = 2ca_0 x^{c-1} + c^2 a_0 x^{c-1} \ln x$$

asumiendo válido el intercambio del orden de la diferenciación. Sigue que $(\partial Y/\partial c)|_{c=0}$ es una solución de la ecuación diferencial dada. No es difícil mostrar ahora que

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial c}\right|_{c=0} = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots$$
$$+ \ln x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} \cdots\right)$$

es una solución además de (44). La solución general es por tanto

$$y = AU(x) + B\left[U(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\right] \tag{47}$$

La segunda solución también se puede obtener usando el teorema en la página 175.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 (CASO B)

Encuentre la solución general de $xy'' + y = 0$.

Solución Haciendo $y = \sum a_j x^{j+c}$ como de costumbre, encontramos

$$xy'' + y = \sum \left[(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + a_j\right]x^{j+c} \tag{48}$$

Normalmente escribiríamos

$$(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + a_j = 0$$

y colocando $j = -1$ para hallar $c(c-1) = 0$ ó $c = 0, 1$. Considerando estos dos casos, encontramos que no se obtiene la solución general. Así, procedemos como en el ejemplo ilustrativo anterior. Asumimos que c es variable y que

$$(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + a_j = 0, \qquad j \geqq 0$$

Entonces

$$a_1 = \frac{-a_0}{c(c+1)},\quad a_2 = \frac{a_1}{(c+1)(c+2)} = \frac{a_0}{c(c+1)^2(c+2)},\quad a_3 = \frac{-a_0}{c(c+1)^2(c+2)^2(c+3)}.$$

Considere ahora

$$Y = \sum a_j x^{j+c}$$

$$= a_0 x^c \left(1 - \frac{x}{c(c+1)} + \frac{x^2}{c(c+1)^2(c+2)} - \frac{x^3}{c(c+1)^2(c+2)^2(c+3)} + \cdots\right) \tag{49}$$

Es claro de (48) o por sustitución directa que

$$xY'' + Y = c(c-1)a_0 x^{c-1} \tag{50}$$

Una diferenciación directa con respecto a c como en el caso A no sirve para producir resultados promisorios. Notamos que la serie para Y carece de sentido donde c = 0. Escribiendo $a_0 = cp_0$, donde p_0 es una nueva constante arbitraria, el factor c desaparece, y por tanto la serie resultante sí tiene sentido cuando c = 0. Para este valor de a_0, (50) llega a ser

$$\text{NY''} + Y = c^2(c-1)p_0 x^{c-1} \tag{51}$$

La diferenciación con respecto a c muestre ahora que

$$x\left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right)'' + \frac{\partial Y}{\partial c} = (c^3 - c^2)p_0 x^{c-1}\ln x + (3c^2 - 2c)p_0 x^{c-1}$$

y así $(\partial Y/\partial c)|_{c=0}$ es una solución. De (49), escribiendo cp_0 en lugar de a_0, tenemos

$$Y = p_0 x^c \left(c - \frac{x}{c+1} + \frac{x^2}{(c+1)^2(c+2)} \cdots\right)$$

El estudiante puede ahora mostrar que la solución general requerida es

$$y = AZ(x) + B\left\{Z(x)\ln x - \left[1 + \frac{x}{1^2} - \left(\frac{1}{1^2 2^2} + \frac{2}{1^3 \cdot 2}\right)x^2 + \cdots\right]\right\} \tag{52}$$

donde

$$Z(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} \cdots \tag{53}$$

2. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes usando el Ejercicio 1:

(a) $xy'' + y' + y = 0$. (b) $xy'' + xy' + y = 0$. (c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.

3. (a) Muestre que las soluciones tipo Frobenius (alrededor de $x = 0$) no existen para la ecuación $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$. (b) Haciendo $x = 1/u$ (a menudo usado para tales casos), resuelva esta ecuación y así explique el resultado en (a).

4. Use el método del Ejercicio 3 para resolver (a) $x^4y'' + 2x^2(x+1)y' + y = 0$.

(b) $4x^3y'' + 10x^2y' + (2x+1)y = 0$.

5. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial en el Ejemplo ilustrativo 5, página 332.

6. ¿Cómo obtendría usted las soluciones con series tipo Frobenius para una ecuación diferencial tal como $2(\text{sen } x)y'' + y' \quad xy = 0$?

7. (a) Generalice las ideas del método de Frobenius a las ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden. (b) Ilustre (a) mostrando cómo se resuelve $xy''' + y = 0$.

3 Soluciones con series de algunas ecuaciones diferenciales importantes

En la página 307, (y en el Ejercicio 3C, página322) indicamos que aún en el caso de que nunca hubiéramos oído de sen x ó $\cos x$ pudimos haber sido llevados a estas funciones y sus propiedades por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

la cual surge, por ejemplo, en un problema de resorte vibrante. Esto no lleva a la idea de que al "inventarnos" ecuaciones diferenciales y luego resolviéndolas podremos concebiblemente obtener algunas *funciones especiales* de interés que no estén relacionadas con funciones ya familiares.* Aunque esto puede hacerse, por supuesto el procedimiento toma aún mayor significancia cuando la ecuación diferencial ocurre en una situación importante, por ejemplo en un problema aplicado. Esto explica el porqué muchos descubrimientos de importancia matemática, especialmente en los siglos XVIII y XIX, fueron hechos por científicos e ingenieros.

En el proceso de formular diferentes problemas aplicados, varias ecuaciones diferenciales han sido encontradas conduciendo a funciones especiales que llevan el nombre de sus descubridores. Una de tales ecuaciones se llama la *ecuación diferencial de Bessel,* en nombre del astrónomo alemán *Wilhelm Friedrich Bessel,* quien la descubrió al formular un problema en movimiento planetario (vea el Ejercicio 10C, página 348. Otra se llama la *ecuación diferencial de Legendre,* en nombre del matemático y astrónomo francés *Adrien Marie Legendre.* En esta sección obtendremos soluciones a estas ecuaciones diferenciales y examinaremos algunas de sus propiedades. En capítulos posteriores, especialmente en el Capítulo catorce, se darán algunas aplicaciones importantes de los resultados obtenidos en este capítulo.

3.1 LA ECUACION DIFERENCIAL DE BESSEL

La ecuación
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{1}$$
donde n puede tener cualquier valor pero generalmente toma un valor entero, *se* conoce como la *ecuación de Bessel de orden n.*† Por métodos de la sección previa se ve que la ecuación tiene un punto singular regular en $x = 0$. Así existe una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c}, \qquad a_j = 0 \text{ Para } j < 0 \tag{2}$$

Si sustituimos (2) en la ecuación dada, obtenemos

$$x^2 \sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-2} + x \sum (j+c)a_j x^{j+c-1} + x^2 \sum a_j x^{j+c} - n^2 \sum a_j x^{j+c} = 0$$

*Existen varios libros que tratan con funciones especiales tales como [25], [28] ó [29]

†Desafortunadamente, la misma palabra algunas veces se usa en matemáticas con diferentes significados. En este caso, *orden* se refiere al parámetro n pero no debería surgir ninguna confusión con la terminología de la página 4.

o

$$\sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c} + \sum (j+c)a_j x^{j+c} + \sum a_j x^{j+c+2} - \sum n^2 a_j x^{j+c} = 0$$

Esto puede escribirse

$$\sum [(j+c)(j+c-1)a_j + (j+c)a_j + a_{j-2} - n^2 a_j]x^{j+c} = 0$$

o

$$\sum [\{(j+c)^2 - n^2\}a_j + a_{j-2}]x^{j+c} = 0$$

Así tenemos $$\{(j+c)^2 - n^2\}a_j + a_{j-2} = 0 \qquad (3)$$

Colocando $j = 0$ en (3) y notando que $a_{-2} = 0$ mientras que $a_0 \neq 0$, esto se reduce a

$$(c^2 - n^2)a_0 = 0 \quad o \quad c^2 - n^2 = 0$$

lo cual produce las raíces indiciales requeridas $c = \pm n$. Consideremos dos casos, $c = n$, $n \geqq 0$ y $c = -n$, $n > 0$.

Cuso 1, $c = n$, $n \geqq 0$. En este caso (3) llegar a ser

$$j(2n+j)a_j + a_{j-2} = 0 \quad \text{esto es,} \quad a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n+j)} \qquad (4)$$

Colocando j= 1, (4) muestra que $a_1 = 0$ puesto que $a_{-1} = 0$. Además, (4) también muestra que $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $a_7 = 0, \ldots$, o todos los a's con subíndice impar son cero.

Colocando j = 2, 4, 6, en sucesión produce

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)}, \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)},$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(2n+6)} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}, \ldots$$

donde la regla de formación es aparente. La solución con series requerida está así dada por

$$\begin{aligned} y &= \sum a_j x^{j+n} \\ &= a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \cdots\right] \end{aligned}$$

la cual también puede escribirse en cualesquiera de las formas

$$y = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 \, 2!(n+1)(n+2)} - \frac{x^6}{2^6 \, 3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

$$o \quad y = a_0 x^n \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \qquad (5)$$

Al mirar los términos de la última serie notamos que los denominadores contienen factoriales, esto es $1!$, $2!$, $3!$,. También están presentes en estos denominadores $n + 1$, $(n+1)(n+2)$, $(n+1)(n+2)(n+3)$, ., los cuales llegarían a ser factoriales, esto es $(n+1)!$, $(n+2)!$, $(n+3)!$,. si multiplicarnos cada término por $n!$ Otra cosa que notamos es que los términos de la serie todos contienen $x/2$, mientras que el factor multiplicativo en frente involucra solamente x. Una solución particular proporcionando estos factoriales e introduciendo x/2 en vez de x en el factor se obtiene al escoger

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

en cuyo caso (5) se convierte en

$$(x/2)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+3)!} + \cdots \right] \tag{6}$$

Esta es una solución para $n = 0, 1, 2,.$, donde definimos O! $= 1$ de modo que (6) concuerde con (5) para $n = 0$.

Para permitir la posibilidad de que n sea cualquier número positivo, podemos usar la generalización del factorial llamada la ***función gamma***, la cual se consideró en la página 266. Esta función está definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du \qquad n > 0 \tag{7}$$

Como en la página 267, tenemos la ***fórmula de recurrencia***

$$l\text{-}(n+1) = n\Gamma(n), \qquad \Gamma(1) = 1 \tag{8}$$

Así si n es un entero positivo, digamos 1, 2, 3, , entonces

$$r(2) = 1\Gamma(1) = 1!, \qquad r(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

y en general $$\Gamma(n+1) = n!, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Tenemos el valor especial (vea la página 267) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (10)

de modo que al usar (8)

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \ . \ . \ .$$

Para determinar la función gamma para cualquier número positivo, es suficiente debido a (8) saber sus valores para los números entre 0 y 1. Estos están disponibles en tablas.

Con este uso de la función gamma para generalizar factoriales podemos escribir (6) como

$$(x/2)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^2}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^4}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^6}{3!\Gamma(n+4)} + \cdots \right] \tag{11}$$

la cual es una solución de la ecuación de Bessel para todo $n \geqq 0$. Ahora, así como le damos nombres a personas para que podamos hablar de ellas, así también le damos nombres a funciones importantes. Llamamos a (ll) por el nombre ***J,,(x). Así***

$$J_n(x) = \frac{(x/2)}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^{n+6}}{3!\Gamma(n+4)} + \cdots \tag{12}$$

Caso 2, $c = -n$, $n > 0$. Para tratar este caso, podíamos regresar al resultado (3) y obtener de nuevo los coeficientes. Sin embargo, esto no es necesario puesto que todo lo que tenemos que hacer es remplazar n por $-n$ en (11) donde ocurra. Esto nos conduce a

$$J_{-n}(x) = \frac{(x/2)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} - \frac{(x/2)^{-n+2}}{1!\Gamma(-n+2)} + \frac{(x/2)^{-n+4}}{2!\Gamma(-n+3)} - \frac{(x/2)^{-n+6}}{3!\Gamma(-n+4)} + \cdots \tag{13}$$

Una pregunta surge inmediatamente de cómo interpretamos la función gamma para un número negativo. Así, por ejemplo, si $n = \frac{5}{2}$, los dos primeros denominadores en (13) son $\Gamma(-\frac{3}{2})$ y $\Gamma(-\frac{1}{2})$. La definición (7) no se puede usar puesto que sólo es aplicable para $n > 0$ donde la integral converja. Podemos sin embargo extender el rango de definición para $n < 0$ usando (8), esto es,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \text{para todo } n \tag{14}$$

Así, por ejemplo, colocando $n = -\frac{1}{2}$ y $n = -\frac{3}{2}$ en (14) encontramos

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

Si colocamos $n = 0$ en (14), formalmente tenemos $1 = 0\Gamma(0)$ lo cual nos conduce a definir $1/\Gamma(0) = 0$ o $\Gamma(0)$ como infinito. En forma similar, si colocamos $n = -1$ en (14), tenemos $\Gamma(0) = -1\,\Gamma(-1)$ o $1/\Gamma(-1) = 0$. El proceso puede continuarse y encontramos

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(-2)} = 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(-3)} = 0, \ldots \tag{15}$$

Usando estas interpretaciones, (13) llega a tener sentido para todo $n > 0$ y representa una solución de (1).

Ahora si n es positivo pero no es un entero, la solución (13) no está acotada en $x = 0$ mientras que (11) está acotada (y de hecho es cero) en $x = 0$. Esto implica que las dos soluciones son linealmente independientes de modo que la solución general de (1) es

$$y = c_1J_n(x) + c_2J_{-n}(x), \qquad n \neq 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

donde también hemos incluido $n \neq 0$ en (16), puesto que para $n = 0$, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ ambas se reducen a $J_0(x)$, y (16) claramente no da la solución general.

Si n es un entero, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes. De hecho tenemos

$$J_{-n}(x) = (-1)^nJ_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Por ejemplo si $n = 3$, (13) se convierte al usar (15) en

$$J_{-3}(x) = -\frac{(x/2)^3}{3!} + \frac{(x/2)^5}{4!1!} - \frac{(x/2)^7}{5!2!} + \cdots \tag{18}$$

También de (12) tenemos si $n = 3$

$$J_3(x) = \frac{(x/2)^3}{3!} - \frac{(x/2)^5}{1!4!} + \frac{(x/2)^7}{2!5!} - \cdots \tag{19}$$

Comparando (18) y (19), vemos que $J_{-3}(x) = -J_3(x)$ concordando con (17) para $n = 3$. En forma similar (17) se puede establecer para todos los enteros n.

Para obtener una solución que sea linealmente independiente de *J,,(x)* en el caso de que n sea un entero, podemos usar el Teorema 3 u 8, páginas 175 ó 186. Encontramos para la solución general

$$y = AJ_n(x) + BJ_n(x)\int \frac{dx}{x[J_n(x)]^2} \tag{20}$$

Esta es la solución general independiente de si n es entero o no y así incluye a (16). Una desventaja de la segunda solución en (20) es que no la tenemos en forma explícita de modo que no la podemos graficar, etc.

Para obtener una segunda solución en forma explícita, podemos recurrir al siguiente artificio interesante. Si n no es un entero, sigue del hecho de que $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son ambas soluciones de (1) que una solución también está dada por

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) \quad J_{-n}(x)}{\text{sen } n\pi} \tag{21}$$

y que esta solución es linealmente independiente de *J,,(x).* Si por otro lado n es un entero, (21) asume una forma indeterminada $0/0$ debido a (17) puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$. Así nos lleva a considerar como una posible solución para n igual a un entero.

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{\cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\text{sen } p\pi} \tag{22}$$

Este límite se puede.encontrar usando la regla de L'Hopital como en cálculo y produce una solución, cuyos detalles se dejan para el Ejercicio 6C. Llamamos a esta solución, la cual es linealmente independiente de *J,(x)* sea o no sea n un entero, la *función de Bessel de segunda clase de orden n,* reservando el nombre de *función de Bessel de primera clase de orden n* para *J,,(x).**
Usando esto podemos así escribir la solución general de (1) para todo n como

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \tag{23}$$

Intentemos ahora obtener alguna familiaridad con estas funciones de Bessel. Podemos empezar con el caso más simple donde $n = 0$. La función de Bessel de primera clase en este caso está dada por

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \tag{24}$$

Ahora podemos hacer con (24) tanto como con e^x. Por ejemplo, después de cálculos laboriosos podemos tabular los resultados:

J,(O) = 1. $J_0(1) = 0{,}77, J_0(2) = -0{,}22, J_0(3) = -0{,}26, J_0(4) = -0{,}40$

Podemos graficar $J_0(x)$ para $x \geq 0$ y obtener lo que se muestra en la Figura 7.3. El gráfico para $x < 0$ se obtiene fácilmente puesto que es simétrico al eje y.

*Esta función $Y_n(x)$ también se llama la función ***de Neumann*** en nombre del matemático quien investigó sus propiedades.

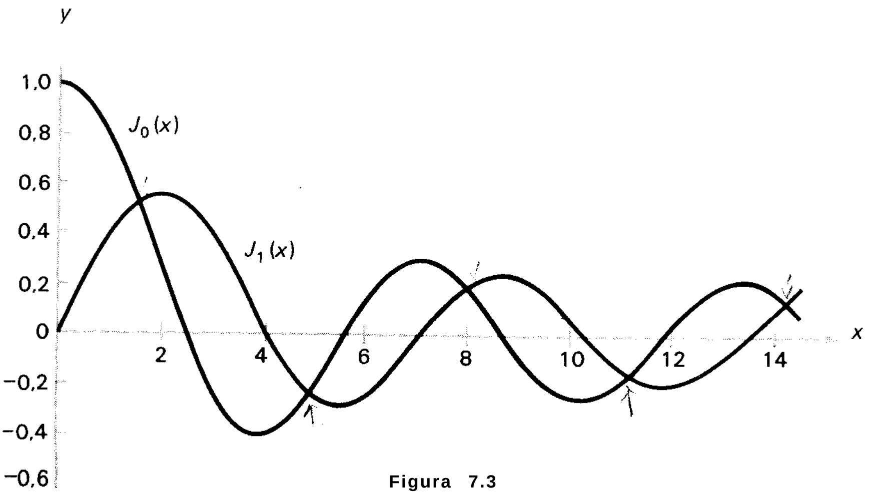


Figura 7.3

Se verá que el gráfico es de carácter oscilatorio, asemejándose a los gráficos de las vibraciones con amortiguamiento del Capítulo cinco. El gráfico también revela que hay raíces de la ecuación $J_0(x) = 0$, llamadas *ceros* de $J_0(x)$, obtenidos como los puntos de intersección del gráfico con el eje x. La investigación revela que hay infinitas raíces las cuales todas son reales y positivas.

En una manera similar para $J_1(x)$ tenemos

$$J_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 4} - \frac{x^5}{2^2 4^2 6} + \cdots \tag{25}$$

cuyo gráfico también se muestra en la Figura 7.3. Se debería notar que las raíces de $J_1(x) = 0$ están entre aquellas de $J_0(x) = 0$.

Los gráficos de $J_n(x)$ para otros valores de n son similares a aquellos en la Figura 7.3. Es posible mostrar que las raíces de $J_n(x) = 0$ son todas reales, y que entre cualesquiera dos raíces positivas sucesivas de $J_n(x) = 0$ hay una y solamente una raíz de $J_{n+1}(x) = 0$. Esto se ilustra en la Tabla 7.1 en la cual hemos listado para propósitos de referencia los primeros ceros positivos de $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$.

Tabla 7.1 **Ceros positivos de algunas funciones de Bessel**

Ceros de	1	2	3	4	5
$J_0(x)$	2,4048	5.5201	8,6537	11.7915	14.9309
$J_1(x)$	3,8317	7,0156	10.1735	13,3237	16,4706
$J_2(x)$	5,1356	8,4172	11.6198	14,7960	17,9598
$J_3(x)$	6,3802	9,7610	13.0152	16,2235	19,4094

Es de interés que si tomamos las diferencias entre ceros sucesivos de $J_0(n)$ obtenemos 3,1153, 3,1336, 3,1378, 3,1394, . . . , sugiriendo la conjetura que estas diferencias tienden a $\pi = 3,14$. Una observación similar sobre las diferencias de ceros sucesivos de $J_1(x)$, $J_2(x)$, también *nos* lleva a tal conjetura. La conjetura realmente puede probarse (vea el Ejercicio 5C), y puesto que los ceros sucesivos de sen x ó cos x difieren en π, la descripción aproximada de la función de Bessel $J_n(x)$ como una "onda seno amortiguada" está más confirmada.

Las características de onda de las funciones de Bessel se parecen mucho a las ondas de agua las cuales podrían generarse por ejemplo al soltar una piedra en el medio de un gran pozo de agua. Las ondas de agua así generadas se asemejarían a una superficie de revolución generada al girar las curvas de la Figura 7.3 alrededor del eje y. Resulta ciertamente que en la teoría de hidrodinámica tales ondas teniendo las formas de funciones de Bessel sí ocurren.

De la misma manera las funciones de Bessel de segunda clase $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ se muestran en la Figura 7.4. Note que éstas no están acotadas cuando x-0 como se había indicado antes.

Al colocar $n = \frac{1}{2}$ y $n = -\frac{1}{2}$ en (ll), encontramos

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!\Gamma(\frac{7}{2})} - \cdots$$

$$x - \frac{\;}{\;} + \frac{\;}{\;} - \cdots) = \sqrt{\;}\,\text{sen}\,x \qquad (26)$$

$$J_{-1/2}(x) = \frac{(x/2)^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{(x/2)^{3/2}}{1!\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{(x/2)^{7/2}}{2!\Gamma(\frac{5}{2})} - \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad (27)$$

lo cual muestra que J,,,(x), $J_{-1/2}(x)$ son de hecho funciones elementales obtenidas en términos de sen x y cos x. Es interesante notar que las diferencias entre ceros sucesivos son exactamente iguales a π.

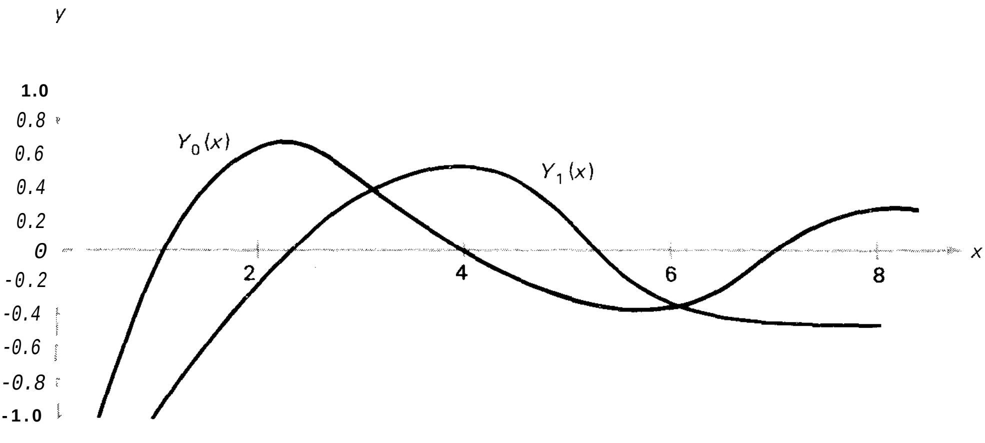


Figura 7.4

Hay muchas identidades que relacionan las funciones de Bessel. Algunas importantes son las siguientes:

1. $$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{28}$$

2. $$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \tag{29}$$

Esto es una *fórmula de recurrencia,* la cual permite obtener $J_{n+1}(x)$ a partir de $J_n(x)$ y $J_{n-1}(x)$.

3. $$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty} J_n(x)t^n \tag{30}$$

Esta a menudo se llama la *función generatriz* para las funciones de Bessel. Otras propiedades interesantes e importantes y aplicaciones de las funciones de Bessel se dan en los ejercicios y en capítulos posteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Pruebe la fórmula de recurrencia (29) para el caso donde n es un entero.

Solución Para obtener varias propiedades de $J_n(x)$ para n entero, con frecuencia se emplea la función generatriz (30). En este caso si diferenciamos ambos lados de (30) con respecto a t, manteniendo x constante, encontramos, omitiendo los límites de la sumatoria por brevedad,

$$\left[e^{(x/2)(t-1/t)}\right]\left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right] = \sum nJ_n(x)t^{n-1} \tag{31}$$

Usando (30) en el primer factor a la izquierda de (31), obtenemos

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum J_n(x)t^n = \sum nJ_n(x)t^{n-1}$$

o

$$\sum \frac{x}{2} J_n(x)t^n + \sum \frac{x}{2} J_n(x)t^{n-2} = \sum nJ_n(x)t^{n-1}$$

esto es,

$$\sum \frac{x}{2} J_n(x)t^n + \sum \frac{x}{2} J_{n+2}(x)t^n = \sum (n+1)J_{n+1}(x)t^n$$

de modo que

$$\sum \frac{x}{2}\left[J_n(x) + J_{n+2}(x)\right]t^n = \sum (n+1)J_{n+1}(x)t^n$$

Puesto que los coeficientes correspondientes de t^n a ambos lados deben ser iguales, tenemos

$$\frac{x}{2}\left[J_n(x) + J_{n+2}(x)\right] = (n+1)J_{n+1}(x)$$

lo cual produce el resultado (29) al remplazar n por $n - 1$. Esta técnica es con frecuencia útil para obtener resultados válidos para valores enteros de n. Una vez tengamos tales resultados estamos en capacidad de mostrar que estos también son válidos para otros valores de n usando la serie (12) directamente. Este es el caso de (29), el cual en efecto se cumple para todo n (vea el Ejercicio 10A).

EJERCICIOS A

1. Muestre que $J_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{1!^2} + \frac{(x/2)^4}{2!^2} - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \cdots$.

2. Muestre que (a) $J_0'(x) = -J_1(x)$. (b) $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$.

3. Resuelva la ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$ directamente usando el método de Frobenius.

4. Muestre que (a) $J_{-1}(x) = -J_1(x)$, $J_{-2}(x) = J_2(x)$ y, en general, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. (b) $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, donde n es un entero.

5. Escriba la solución general de (a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$. (b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 8)y = 0$.

6. Muestre que (a) $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\text{sen } x}{x} - \cos x\right)$(b) $J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\text{sen } x + \frac{\cos x}{x}\right)$

7. Muestre que si x se remplaza por XX, donde λ es una constante, entonces la ecuación de Bessel se convierte en

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 \quad n^2)y = 0$$

8. Use el Ejercicio 7 para resolver

(a) $x^2y'' + xy'$ **+ (3.x’** $- 4)y = 0$. (b) $4x^2y'' + 4xy' + (2x^2 - 1)y = 0$.

9. Muestre que $Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

10. Pruebe que (29) se cumple para todo n.

EJERCICIOS B

1. Encuentre la solución de $x^2y'' + xy' + (4x^2 - 1)y = 0$, la cual está acotada en $x = 0$ y satisface la condición y(2) = 5.

2. Derive los resultados (a) $\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)] = x^nJ_{n-1}(x)$. (b) $\frac{d}{dx}[x^{-}$ “J,(x)] $= -x^{-n}J_{n+1}(x)$.

3. Muestre que

(a) $J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x)$ J,,+,(s)]. (b) $J_n''(x) = \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)]$.

4. Muestre que (a) $\int x^nJ_{n-1}(x)\,dx = x^nJ_n(x) + c$. (b) $\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}\,dx = -\frac{J_n(x)}{x^n} + c$.

5. Evalúe (a) $\int xJ_0(x)dx$. (b) $\int x^3J_2(x)dx$. (c) $\int x^{-4}J_5(x)dx$. (d) $\int x^{1/2}J_{1/2}(x)dx$.

6. Evalúe $\int x^3 J_0(x)dx$. [Sugerencia: Use el Ejercicio 5(a) e integración por partes.]

7. Muestre que si m y n son enteros entonces $\int x^mJ_n(x)dx$ puede evaluarse en forma cerrada si $m + n$ es impar y en términos de $\int J_0(x)dx$ (la cual no puede ser integrada en forma cerrada) si $m + n$ es par. Ilustre trabajando

$$\text{(a)} \int J_3(x)dx. \quad \text{(b)} \int \frac{J_2(x)}{x^2}\,dx.$$

8. Muestre que

$$\text{(a)}\ \frac{d}{dx}\left[J_n^2(x)\right] = \frac{x}{2n}\left[J_{n-1}^2(x) - J_{n+1}^2(x)\right]. \qquad \text{(b)}\ \frac{d}{dx}\left[xJ_n(x)J_{n+1}(x)\right] = x\left[J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)\right].$$

9. Demuestre gráficamente que las diferencias de ceros sucesivos de $J_{3/2}(x)$ tienden a π. (Sugerencia: Use el Ejercicio 6(a)A, y el hecho de que las intersecciones de los gráficos de $y = x$ y $y = \tan x$ dan los ceros.)

10. Pruebe que $\int x^k J_0(x)dx = x^k J_1(x) + (k-1)x^{k-1}J_0(x) - (k-1)^2 \int x^{k-2}J_0(x)dx$ y así encuentre $\int x^5 J_0(x)dx$.

EJERCICIOS C

1. Derive la función generatriz (30), página 345. *[Sugerencia:* Escriba $e^{(x/2)(t-1/t)} = e^{(xt/2)} \cdot e^{-x/2t}$ y luego use la expansión en serie para e^u.]

2. Pruebe que entre cualquier par de ceros consecutivos de $J_0(x)$ hay uno y solamente un cero de $J_1(x)$. *[Sugerencia:* Use el Ejercicio 2(a)A *y el Teorema de Rolle* del cálculo elemental,el cual establece que entre cualquier par de ceros reales consecutivos de una función diferenciable f(x) hay al menos un cero de la derivada $f'(x)$.]

3. Generalice el Ejercicio 2 a los ceros de $J_n(x)$ y $J_{n+1}(x)$. *[Sugerencia:* Use el Ejercicio 2(a)B y el Teorema de Bolle.]

4. Muestre que mediante el cambio de variable dependiente de y a v dado por $y = x^{-1/2}v$ la ecuación diferencial de Bessel se convierte en

$$v'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) = 0$$

Use el resultado para resolver la ecuación de Bessel para el caso de $n = \frac{1}{2}$.

5. Muestre que para valores grandes de x las soluciones de la ecuación de Bessel tienen la forma

$$\frac{c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x}{\sqrt{x}}$$

Explique cómo esto se puede usar para demostrar que las diferencias de ceros sucesivos de $J_n(x)$ tienden a π *[Sugerencia:* Use el Ejercicio 4.]

6. Encuentre el límite expresado en (22), página 342, para el caso $n = 0$. Compare el resultado obtenido en el Ejercicio 1C, Ejemplo ilustrativo 6 (Caso A), página 335, donde la misma ecuación diferencial se resolvió de otra manera.

7. Una ecuación diferencial que surge en varios problemas de ingeniería eléctrica es $xy'' + y' - ixy = 0$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. (a) Muestre que una solución acotada en $x = 0$ está dada por $J_0(i^{3/2}x)$. (b) Las partes real e imaginaria de $J_0(i^{3/2}x)$ son conocidas por $Ber(x)$ y $Bei(x)$. Muestre que

$$Ber(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{4j}}{2^2 4^2 \cdots (4j)^2}, \qquad Bei(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^{4j-2}}{2^2 4^2 \cdots (4j-2)^2}$$

8. Muestre que la solución general de $y'' + xy = 0$ a menudo llamada la ecuación *de Airy* es

$$y = Ax^{1/3}J_{1/3}(\tfrac{2}{3}x^{3/2}) + Bx^{1/3}J_{-1/3}(\tfrac{2}{3}x^{3/2})$$

9. Muestre que la solución general de $xy'' + y = 0$ es $y = A\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x}) + B\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{x})$.

Compare con la solución encontrada en el Ejercicio 1C, Ejemplo ilustrativo 6 (Caso B), página 336.

10. En un problema sobre órbitas planetarias Bessel llegó a la función de x definida por la integral

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\,(n\theta - x \text{ sen } \theta)d\theta$$

Muestre que para $n = 0$ tenemos $y = J_0(x)$. *(Sugerencia:* Use la serie de Maclaurin para $\cos u$ donde $u = x$ sen θ y luego integre término a término.)

11. Sin usar el método indicado en la sugerencia del Ejercicio 10, muestre que para $n = 0$ la función definida por la integral es una solución de la ecuación diferencial de Bessel de orden cero, esto es,

$$xy'' + y' + xy = 0$$

12. La integral dada en el Ejercicio 10 en el caso donde n es un entero no negativo es igual a $J,(n)$. ¿Puede usted probar esto?

3.2 ECUACION DIFERENCIAL DE LEGENDRE

La ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2x2” + n(n + 1)y = 0 \tag{32}$$

es conocida como la ***ecuación de Legendre de orden n.* Se ve*** que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación, de modo que podemos obtener soluciones de la forma

$$y = \sum a_j x^j \tag{33}$$

Podríamos también usar una solución de tipo Frobenius pero resultaría con $c = 0$, lo cual es equivalente a (33). Puesto que $x = \pm 1$ son puntos singulares de (32), la serie (33) que se obtiene debería al menos convergir en el intervalo $-1 < x < 1$.

Sustituyendo (33) en (32) tenemos

$$\sum j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum j(j-1)a_j x^j - \sum 2ja_j x^j + \sum n(n+1)a_j x^j = 0$$

esto es, $\sum [(j+2)(j+1)a_{j+2} - j(j-1)a_j - 2ja_j + n(n+1)a_j]x^j = 0$

o $$\sum \{(j+2)(j+1)a_{j+2} + [n(n+1) - j(j+1)]a_j\}x^j = 0$$

así que $$(j+2)(j+1)a_{j+2} + [n(n+1) - j(j+1)]a_j = 0 \tag{34}$$

Colocando $j = -2$ en (34) muestra que a_0 es arbitraria. Colocando $j = -1$ en (34) muestra que a_1 es arbitraria. Así podemos esperar en obtener dos constantes arbitrarias y por tanto la solución general.

De (34) $$a_{j+2} = \frac{[n(n+1) - j(j+1)]}{(j+2)(j+1)}a_j$$

Colocando $j = 0, 1, 2, 3, .$ en sucesión encontramos

*Ver el segundo pie de página en la página 338

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0, \qquad a_3 = -\frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2]}{3!} a_1,$$

$$a_4 = -\frac{[n(n+1) - 2 \cdot 3]}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{n(n+1)[n(n+1) - 2 \cdot 3]}{4!} a_0,$$

$$a_5 = -\frac{[n(n+1) - 3 \cdot 4]}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2][n(n+1) - 3 \cdot 4]}{5!} a_1, \qquad \text{etc.}$$

Entonces (33) se convierte en

$$y = a_0 \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)[n(n+1) - 2 \cdot 3]}{4!} x^4 - \cdots \right\}$$
$$+ a_1 \left\{ x - \frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2]}{3!} x^3 + \frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2][n(n+1) - 3 \cdot 4]}{5!} x^5 - \cdots \right\} \tag{35}$$

Si n no es un entero, estas dos series convergen para $-1 < x < 1$, pero se puede mostrar que ellas divergen para $x = \pm 1$. Si n es un entero positivo o cero, una de estas series se termina, esto es, es un polinomio, mientras que la otra serie converge para $-1 < x < 1$ pero diverge para $x = \pm 1$.

Encontremos solamente las soluciones polinómicas. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, obtenemos

$$1, \qquad x, \qquad 1 - 3x^2, \qquad x - \tfrac{5}{3}x^3$$

los cuales son polinomios de grado $0, 1, 2, 3, \ldots$ Es conveniente multiplicar cada uno de estos por una constante elegida para que el polinomio resultante tenga el valor de 1 cuando $x = 1$. Los polinomios resultantes son llamados *polinomios de Legendre* y se denotan por $P_n(x)$. Algunos de los primeros están dados por

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad P_5(x) = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Para cualquier polinomio de Legendre tenemos

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \qquad P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n$$

Debería notarse que los polinomios de Legendre son las únicas soluciones de la ecuación de Legendre las cuales están acotadas en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, puesto que las series que producen todas las otras soluciones divergen para $x = \pm 1$.

Puesto que sabemos que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre, podemos usar los Teoremas 3 u 8, páginas 175 o 186, para encontrar la solución general. Encontramos

$$y = AP_n(x) + BP_n(x) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)[P_n(x)]^2} \tag{36}$$

Esta segunda solución está relacionada con la serie en (35). Si denotamos la segunda solución por $Q_n(x)$, la solución general se puede escribir

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \tag{37}$$

Estas funciones son a menudo conocidas colectivamente como *funciones de Legendre.*

Algunos resultados importantes que involucran polinomios de Legendre son los siguientes:

1. $$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} xP_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \tag{38}$$

Esto es una *fórmula de recurrencia* para los polinomios de Legendre.

2. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1) \tag{39}$$

Esta es conocida como la *fórmula de Rodrigues* para los polinomios de Legendre.

3. $$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{40}$$

Esta se llama la *función generatriz* para los polinomios de Legendre.

Si hacemos la definición $P_n(x) = 0$ para $n = -1, -2, \ldots$, (40) se puede escribir en la forma conveniente

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum P_n(x)t^n \tag{41}$$

donde la sumatoria se toma de $n = -\infty$ a ∞.

Otras interesantes e importantes propiedades y aplicaciones de los polinomios de Legendre se dan en los ejercicios y capítulos posteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Pruebe la fórmula de recurrencia (38) de los polinomios de Legendre.

Solución Diferenciando ambos lados de la función generatriz (41) con respecto a t, manteniendo x constante, tenemos

$$\frac{x - t}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} = \sum nP_n(x)t^{n-1}$$

Multiplicando ambos lados por $(1 - 2tx + t^2)$ y usando (41) da

$$(x - t) \sum P_n(x)t^n = (1 - 2tx + t^2) \sum nP_n(x)t^{n-1}$$

o $$\sum xP_n(x)t^n - \sum P_n(x)t^{n+1} = \sum nP_n(x)t^{n-1} - \sum 2nxP_n(x)t^n + \sum nP_n(x)t^{n+1}$$

esto es,

$$\sum [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]t^n = \sum [(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)]t^n$$

Igualando los correspondientes coeficientes de t^n da

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

lo cual conduce a los resultados requeridos (38).

3.3 OTRAS FUNCIONES ESPECIALES

Las soluciones con series de las ecuaciones diferenciales proporcionan una fuente significante de funciones especiales, algunas de las cuales tienen importantes aplicaciones y están asociadas con matemáticos particulares quienes las estudiaron. Los siguientes son tres ejemplos.

(a) *Ecuación diferencial de Hermite:* $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

Esta ecuación tiene soluciones llamadas ***polinomios de Hermite*** para el caso $n = 0, 1, 2,$. Estos polinomios denotados por $H_n(x)$ tienen muchas propiedades importantes análogas a las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre. Esta analogía se demuestra por los siguientes resultados, los cuales el estudiante podría comparar con los resultados en la página 345 y 350.

1. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (fórmula de recurrencia)
2. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ (fórmula de Rodrigues)
3. $e^{2tx-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$ (función generatriz)

Algunos de los primeros polinomios de Hermite son

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

(b) *Ecuación diferencial de Laguerre:* $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$.

Esta ecuación tiene soluciones llamadas ***polinomios de Laguerre*** denotados por $L_n(x)$ deben $n = 0, 1, 2,$. Estos tienen las propiedades

1. $L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x)$ (fórmula de recurrencia)
2. $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ (fórmula de Rodrigues)
3. $\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}$ (fórmula generatriz)

Algunos de los primeros polinomios de Laguerre son

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 \quad 18x + 6$$

(c) *Ecuación diferencial de Gauus:* $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$.

Esta ecuación en la cual α, β, γ son constantes dadas se llama también la ***ecuación diferencial hipergeométrica*** y sus soluciones se llaman ***funciones hipergeométricas*** a menudo denotadas por $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Una solución con series está dada por

$$y = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\ \gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \qquad (42)$$

EJERCICIOS A

1. Verifique que los primeros polinomios de Legendre dados en la página 349 son soluciones de sus correspondientes ecuaciones diferenciales.

2. Encuentre una solución de $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, la cual está acotada por $-1 \leqq x \leqq 1$ y satisface la condición $y(\frac{1}{2}) = 10$.

3. Encuentre algunos de los primeros polinomios de Legendre usando (a) la fórmula de recurrencia (38), página 350, con $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. (b) La fórmula de Rodrigues (39), página 350.

4. Encuentre la segunda solución (esto es, la solución no polinómica) de la ecuación de Legendre para los casos (a) $n = 0$, (b) $n = 1$, y luego escriba la solución general.

5. Verifique que las segundas soluciones encontradas en el Ejercicio 4 son no acotadas para $x = \pm 1$.

6. Derive el resultado (36), página 349.

EJERCICIOS B

1. Encuentre una solución de $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ en el intervalo $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ tal que $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

2. Muestre que $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$ tal que $\int P_n(x)dx = \dfrac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + c$.

3. Obtenga algunos de los primeros polinomios de Legendre usando la función generatriz (40), página 350.

4. Muestre que (a) $P'_{n+1}(x) - P'_n(x) = (n+1)P_n(x)$. (b) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$.

5. Muestre que $\dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\theta}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta)$, $0 < \theta < \pi$.

6. Derive la función generatriz (40), página 350.

7. Derive la fórmula de Rodrigues (39), página 350

8. Muestre que (a) $P_{2n+1}(0) = 0$. (b) $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$

EJERCICIOS C

1. Use la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite en la página 351 para obtener $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, y verifique que ellos satisfacen sus correspondientes ecuaciones diferenciales.

2. Encuentre algunos de los primeros polinomios de Hermite usando la función generatriz en la página 351.

3. Derive la fórmula de recurrencia en página 351 para los polinomios de Hermite, y muestre cómo los polinomios se pueden obtener por medio de ella.

4. Obtenga algunos de los primeros polinomios de Laguerre y verifique que ellos satisfacen sus correspondientes ecuaciones diferenciales.

5. Escriba las soluciones generales de (a) la ecuación de Hermite (b) la ecuación de Laguerre.

6. Obtenga una solución de $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$ reconociéndola como un caso especial de la ecuación diferencial hipergeométrica. ¿Puede usted encontrar la solución general?

7. Muestre que (42) es una solución de la ecuación diferencial de Gauss.

ocho

funciones ortogonales y problemas de Sturm-Liouville

1 Funciones ortogonales

1.1 FUNCIONES COMO VECTORES

El estudiante recordará de la geometría analítica y el cálculo que un vector en un espacio tridimensional se puede denotar por

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \tag{1}$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, son vectores unitarios en la dirección positiva de los ejes x, y, z, de un sistema de coordenadas rectangulares (ver Figura 8.1). Puesto que el vector (1) se conoce cuando se conocen los coeficientes A_1, A_2, A_3 y recíprocamente, bien podríamos representar el vector A por la ***terna ordenada*** (A_1, A_2, A_3). Esto es simplemente un conjunto de tres números reales los cuales llamaremos componentes del vector* en las direcciones de x, y y z respectivamente. Similarmente si tenemos un vector en el plano xy podemos representarlo por $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$ o simplemente por el par ordenado (A_1, A_2).

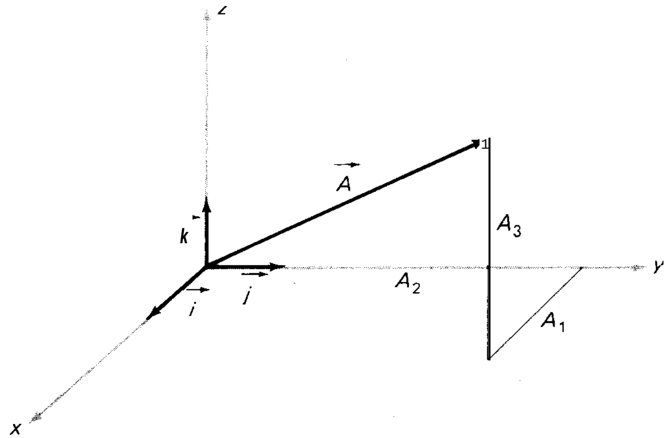


Figura 8.1

Ahora los matemáticos gustan generalizar y de tales generalizaciones ellos a menudo pueden llegar a interesantes e importantes resultados. En el caso de un vector por ejemplo un matemático podría fácilmente ser llevado a hacer la siguiente

Pregunta. Puesto que un vector tri-dimensional puede representarse por una terna ordenada de tres números reales, ¿por qué no representar un vector n-dimensional por una n-tupla de números reales dados por $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$? La pregunta de si un vector n-dimensional no tiene significado físico para $n > 3$ no es, estrictamente hablando, de interés desde un punto de vista ***matemático.*** Hay sin embargo casos donde la interpretación física se

*En tal caso los vectores $A_1\vec{i}$, $A_2\vec{j}$, $A_3\vec{k}$ se llaman los *vectores* componentes en las direcciones x, y, z. Debido a que (A_1, A_2, A_3) representa el punto terminal del vector $\vec{A}$, algunos autores prefieren llamar A_1, A_2, A_3 las coordenadas del vector.

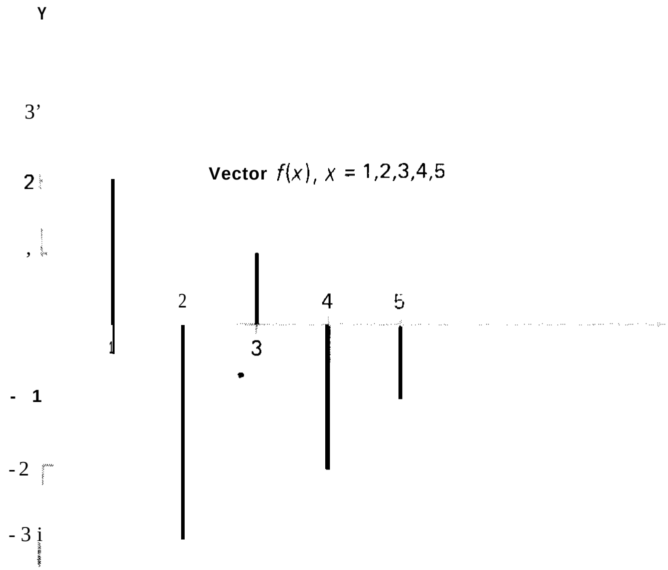


Figura 8.2

puede dar a vectores en más de tres dimensiones, tal como por ejemplo la *teoría de la relatividad de Einstein,* de acuerdo a la cual vivimos en un universo cuadra-dimensional compuesto por el acostumbrado espacio de tres coordenadas x, y, z y el tiempo t. Un vector en tal espacio se podría entonces denotar por (x, y, z, t).

Aunque no hay modo de representar vectores físicamente como en la Figura 8.1 para $n > 3$, hay un modo de representarlos gráficamente. Para ver esto, suponga por ejemplo un vector A cinco-dimensional cuyos componentes están dados por 2, -3, 1, -2, -1. Podemos representar estas componentes por las ordenadas de y en la Figura 8.2 correspondientes a $x = 1, 2, 3, 4, 5$, respectivamente. Podemos llamar el valor de y correspondiente a $x = 1$ *la primera componente o componente en la "dirección x_1", el* valor de y correspondiente a $x = 2$ *la segunda componente o componente en la "dirección x_2",* etc. Por tanto la cuarta componente o componente en la "dirección x_4", es -2. Vemos que si y es la componente correspondiente a x entonces y es una función de x de modo que, correspondiendo a la Figura 8.2, podemos escribir $y = f(x)$, donde $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

No se necesita tener mucha imaginación ahora para que podamos pensar en un vector como una función y, recíprocamente, en una función como un vector.* En la Figura 8.3, por ejemplo, en la cual se muestra el gráfico de $y = f(x)$ para $a \leqq x \leqq b$, podemos pensar de $f(c)$ donde c es algún valor entre a y b que representa la componente del vector $f(x)$ en la "dirección x_c".

Si tenemos un vector tal como el que se muestra en la Figura 8.2 en la cual hay un número finito de componentes, hablamos de esto como de un *vector finito dimensional.* Extendiendo la Figura 8.2 para incluir componentes para $x = 6, 7, \ldots$, tendríamos un vector con infinitamente muchos componentes; pero puesto que estos se pueden contar (esto es, $1, 2, \ldots$), hablaríamos

*Asumiremos a menos que se establezca otra cosa que las funciones consideradas son reales.

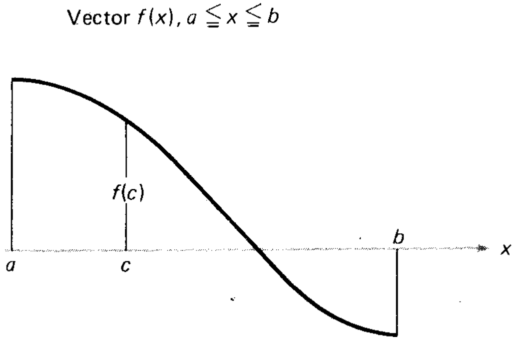


Figura 8.3

de esto como un *vector infinito dimensional contable.* El vector de la Figura 8.3, por otro lado, el cual tiene infinitamente muchos componentes los cuales no se pueden contar, se habla de un *vector infinito dimensional no contable.**

1.2 ORTOGONALIDAD

Puesto que el estudiante ya conoce muchos resultados que involucran vectores tales como (1) en tres dimensiones, es natural buscar generalizaciones de estos resultados a dimensiones superiores. Si bien muchas de estas generalizaciones son posibles, algunas de las cuales se dan en los ejercicios, nos concentraremos en solamente dos.

La primera generalización la cual exploraremos es la de la perpendicularidad, o como a menudo la llamamos la *ortogonalidad,* de vectores. En el caso de tres dimensiones el estudiante recordará que si tenemos dos vectores

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}, \qquad \vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$$

entonces *su producto escalar o interno,* denotado por $(\vec{A}, \vec{B})$ ó $\vec{A} \cdot \vec{B}$ está dado por

$$\vec{A}\ \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{2}$$

El estudiante también recordará que los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$ son *ortogonales* si su producto escalar o interno es cero. Recíprocamente, si este-producto es cero, los vectores son ortogonales. Podemos por tanto decir que *A y B* son ortogonales si y sólo si su producto escalar

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0 \tag{3}$$

Ahora es fácil generalizar (2) al caso donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tiene cada uno *n* componentes, puesto que es natural hacer la siguiente

Definición 1. El producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) = \sum_{j=1}^{n} A_jB_j$ (4)

Correspondiendo a (3) tenemos así el enunciado

*El hecho de que las componentes en este caso no se pueden contar se prueba en cálculo avanzado. Ver [26] , por ejemplo.

$$\vec{A} \text{ y } \vec{B} \text{ son ortogonales si y sólo si } \sum_{j=1}^{n} A_j B_j = 0 \tag{5}$$

Aunque (4) y (5) se cumplen para vectores finito dimensionales $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la misma dimensión n, es fácil extenderlas a vectores infinito dimensional contables simplemente tomando n como infinito. En tal caso, sin embargo, se debe tener cuidado para examinar la convergencia de la resultante serie infinita.

Un poco más de razonamiento se requiere para llegar a una generalización de vectores infinito dimensionales no contables. Si nos dan dos vectores, digamos $f(x)$ y $g(x)$ donde $a \leqq x \leqq b$, podríamos ser llevados por analogía con (4) a definir el producto escalar de f y g como $\sum f(x)g(x)$ donde la suma se extiende sobre todos los valores de x en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ donde $b > a$. Sin embargo, tal definición es insatisfactoria debido a que aún en el caso simple donde f(x) > 0, $g(x) > 0$, la suma no existiera. Una manera de salir de la dificultad es a través de nuestra experiencia con el cálculo integral donde las integrales resultan de los límites de sumas. Esta idea sugiere que adoptemos la siguiente definición para el producto escalar de f y g:

Definición 2. El producto escalar de f y g= $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ (6)

Note que en (6) hemos evitado la notación de punto $f \cdot g$ para el producto escalar sugerido por $\vec{A} \cdot \vec{B}$ puesto que esto podría confundirse con la multiplicación de f y g. Correspondiendo a (5) tendríamos entonces el siguiente enunciado

Las funciones f y g son ortogonales en $a \leqq x \leqq b$ si y sólo si

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \tag{7}$$

Como una ilustración de estas ideas, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea $f(x) = 2x$, $g(x) = 2 + cx$ para $0 \leqq x \leqq 1$. Encuentre el valor de la constante c para que las dos funciones sean ortogonales en el intervalo.

Solución El producto escalar de f y g está dado por

$$(f, g) = \int_0^1 (2x)(3 + cx)dx = 3 + \tfrac{2}{3}c$$

Entonces las funciones son ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ cuando el producto escalar sea cero, esto es $3 + \frac{2}{3}c = 0$ ó $c = -\frac{9}{2}$. Las funciones en este caso son $f(x) = 2x$, $g(x) = 3 - \frac{9}{2}x$.

1.3 LONGITUD 0 NORMA DE UN VECTOR. ORTONORMALIDAD

La segunda generalización que buscaremos *es* la de *longitud* de un vector la cual en espacios de dimensión mayor que tres con frecuencia se refiere como la *norma*. La longitud del vector (1) se puede escribir como

$$l_A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{8}$$

un hecho que puede conjeturarse directamente de la Figura 8.1 usando el Teorema de Pitágoras. Por una extensión natural de esto tenemos la siguiente

Definición 3. La longitud o norma de un vector n-dimensional esta dada por

$$l_A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2} \tag{9}$$

Si n es infinito contable esto corresponde a la raíz cuadrada de una serie infinita.

Similarmente, usando (6) podemos escribir la siguiente definición para la norma N, de f(x) donde $a \leqq x \leqq b$.

Definición 4. La norma de $f = N_f = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$ (10)

En tres dimensiones un vector-unitario es un vector cuya longitud es igual a uno. Si nos dan un vector $\vec{A}$, entonces podemos encontrar un vector unitario ü en la misma dirección de $\vec{A}$ dividiendo $\vec{A}$ por la longitud de $\vec{A}$, esto es, por 1,. El proceso de encontrar este vector unitario con frecuencia se llama ***normalización,*** y ü se llama un ***vector normalizado.***

Ejemplo 1. Si $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, entonces $l_A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{38}$

así que
$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{l_A} = \frac{3}{\sqrt{38}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{38}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\vec{k}$$

De la misma manera, vectores unitarios o normalizados en dimensiones mayores se pueden obtener al dividir los vectores por sus normas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) Encuentre las normas de las funciones (vectores) f y g en el Ejemplo ilustrativo 1, página 357, y (b) obtenga las correspondientes funciones normalizadas.

Solución (a) Los cuadrados de las normas de f y g están dadas, respectivamente, por

$$N_f^2 = (f, f) = \int_0^1 (2x)^2 \, dx = \tfrac{4}{3}, \qquad N_g^2 = (g, g) = \int_0^1 (3 - \tfrac{9}{2}x)^2 \, dx = \tfrac{9}{4}$$

Así
$$N_f = \sqrt{\tfrac{4}{3}}, \qquad N_g = \tfrac{3}{2}$$

(b) Las funciones normalizadas correspondientes a f y g están dadas por

$$\phi_1(x) = \frac{f(x)}{N_f} = \frac{2x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \sqrt{3}x, \qquad \phi_2(x) = \frac{g(x)}{N_g} = \frac{3 - 9x/2}{\frac{3}{2}} = 2 - 3x$$

En el caso de que dos vectores o funciones sean ortogonales y adicionalmente estén normalizadas, con frecuencia decimos que ellas son funciones 0 vectores ***ortonormales.***

Ejemplo 2. Las funciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ del Ejemplo ilustrativo 2 están normalizadas y también son ortogonales en el intervalo de modo que son ortonormales.

En el caso de que tengamos un conjunto de funciones, digamos $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, , en algún intervalo $a \leqq x \leqq b$ las cuales están normalizadas y tales que cualquier par, digamos $\phi_j(x)$ y $\phi_k(x)$, son ortogonales, podemos decir que el conjunto es un conjunto *mutuamente* ***ortogonal*** *y normalizado,* o brevemente un conjunto ortonormal. En tal caso tenemos

$$\int_a^b \phi_j(x)\phi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \tag{11}$$

Observación. **El** espacio infinito dimensional no contable consistente de todas las funciones (vectores) f(x), $a \leqq x \leqq b$, las cuales tienen norma (longitud) finita con frecuencia se llama *espacio de Hilbert* en nombre del matemático quien investigó las propiedades de tales funciones.

EJERCICIOS A

1. Grafique los siguientes vectores (funciones) y diga si son vectores dimensionalmente finitos, contablemente infinitos, o infinitos no contables.

(a) $(2, -1, 0, 5)$. (b) $f(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqq x \leqq \pi$. (c) $f(x) = \begin{cases} 3, & x = 2 \\ -2, & x = 5 \\ 4, & x = 7 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{n}$ para $x = n$, donde $n = 1, 2, 3,$.

2. Determine el componente de cada uno de los siguientes vectores en las "direcciones" indicadas.
(a) (-5, 3, 2, -6); dirección x_2. (b) f(x) = $6\cos\pi x$, $0 < x < 1$; direcciones $x_{1/3}$, $x_{1/2}$ y $x_{2/3}$
(c) $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leqq x \leqq 2 \\ -1, & 2 < x \leqq 4 \end{cases}$; $x_{\sqrt{2}}$ y x_π; direcciones $x_{\sqrt{2}}$ y x_π.

3. Encuentre el producto escalar de cada uno de los siguientes: (a) $\vec{A} = (2, -1, 4, 3)$ y $B = (3, 2, -1, 0)$. (b) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$, donde $0 \leqq x \leqq 1$. (c) $f(x) = 2e^{-3x}$, $g(x) = 6e^{-2x}$, $x \geqq 0$.

4. Encuentre la longitud o norma de los siguientes
(a) $\vec{A} = (2, -1, 4, 3)$. (b) $f(x) = 2x - 1, 0 \leqq x \leqq 1$.
(c) $f(x) = 4e^{-x}, x \geqq 0$. (d) $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leqq x \leqq 2 \\ -4, & 2 < x \leqq 3 \end{cases}$

5. Encuentre la constante c tal que los siguientes conjuntos sean ortogonales
(a) $\vec{A} = (5, 1, 2, 3c, -2)$, $\vec{B} = (-c, -2, 4, 1, -1)$.
(b) $f(r) = cx^2 - 1$, $g(x) = x + 2, 0 \leqq x \leqq 3$.
(c) $f(x) = 2cx$, $g(x) = x + c, 1 \leqq x \leqq 2$.

6. Encuentre los vectores (funciones) unitarios o normalizados correspondientes a cada uno de los siguientes
(a) $\vec{A} = (-4, 3, 5, -2)$. (b) $f(x) = 2x - 3.\ 0 \leqq x \leqq 2$.
(c) $f(x) = 20e^{-5x}, x \geqq 0$. (d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqq x < 3 \\ 4, & 3 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$

7. (a) Determine las constantes c_1, c_2, c_3 para que $f_1(x) = c_1x + 2$, $f_2(x) = c_2x^2 + c_3x + 1$ y $f_3(x) = x - 1$ sean mutuamente ortogonales en $0 \leqq x \leqq 1$. (b) Obtenga un correspondiente conjunto ortonormal.

EJERCICIOS B

1. Dado los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Usando la analogía con vectores tridimensionales, explique cómo definiría usted (a) $\vec{A} + \vec{B}$. (b) $\vec{A} - \vec{B}$. (c) $m\vec{A}$ y $n\vec{A}$, donde m y n son cualesquiera números reales (o *escalares*). (d) $m\vec{A} + n\vec{B}$. Explique como podría usted generalizar estas ideas.
2. Muestre que las funciones $f_1(x) = a_1 + b_1 x$, $f_2(x) = a_2 + b_2 x$, $f_3(x) = a_3 + b_3 x$, donde los a's y b's son constantes, no pueden ser mutuamente ortogonales en ningún intervalo a menos que al menos una de las funciones sea idénticamente cero.
3. (a) Muestre que las funciones $f_1(x) = \text{sen } x$, $f_2(x) = \text{sen } 2x$, $f_3(x) = \text{sen } 3x$ mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$. (b) Obtenga un correspondiente conjunto ortonormal.
4. Generalice el Ejercicio 3 mostrando que las funciones $f_n(x) = \text{sen } nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$, y obtenga un correspondiente conjunto ortonormal.
5. Dados los vectores $\vec{A} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, $\vec{B} = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots)$. Muestre que (a) la norma de $\vec{A}$ es finita, (b) la norma de $\vec{B}$ es infinita, (c) el producto escalar es finito.
6. Sea $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $g(x) = 1/\sqrt[4]{x}$ donde $a \leqq x \leqq 1$. Muestre que (a) la norma de f no existe, (b) la norma de g existe, (c) el producto escalar existe. Compare con el Ejercicio 5.

EJERCICIOS C

1. En cálculo elemental el producto interno o escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de dos vecrores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ con frecuencia está definido como el producto de la longitud de $\vec{A}$, la longitud de $\vec{B}$, y el coseno del ángulo θ entre ellos. (a) Muestre que de acuerdo a esto debemos tener

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

y que en particular $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales si y sólo si $\cos \theta = 0$. (b) Muestre que el resultado en (a) implica la desigualdad $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ frecuentemente llamada la *desigualdad de Schwarz.* Ilustre estos resultados escogiendo vectores particulares.

2. ¿Puede usted generalizar-las ideas del Ejercicio 1 al caso de vectores en cuatro dimensiones tales como $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ o mayores? ¿Qué dificultades se tendrían en tal generalización? ¿Piensa usted que la desigualdad de Schwarz se cumpliría en tal caso? ¿Sus conclusiones contradicen al Ejercicio 5? Explique.
3. Si usted deseara extender las ideas del Ejercicio 1 y 2 a funciones f(r), g(x), donde $a \leqq x \leqq b$, explique por qué sería apropiado tomar

$$\cos \theta = \frac{(f, g)}{\sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)}}$$

Muestre que la desigualdad de Schwarz se puede escribir en este caso como

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right|^2 \leqq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \int_a^b |g(x)|^2 \, dx$$

¿Esto contradice al Ejercicio 6B?

4. Justifique cada una de las siguientes etapas proporcionando una prueba de la desigualdad de *Schwarz* del Ejercicio 3. (a) Si α es cualquier parámetro real (escalar), entonces

$$(f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + 2\alpha(f, g) + \alpha^2(g, g) \geqq 0$$

(b) El resultado en (a) se puede escribir $\left(\alpha + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2} \geqq 0$, para todo α

donde $\quad A = (g, g) > 0, \quad B = (f, g), \quad C = (f, f) > 0$

(c) Del resultado en (b) debemos tener $AC - B^2 \geqq 0$, la cual es la desigualdad de Schwarz. Establezca condiciones apropiadas sobre las funciones f y g.

5. Use el método de prueba esbozado en el Ejercicio 4 para probar la desigualdad de Schwarz.

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Discuta el caso donde n en infinito.

6. Pruebe que si las normas de dos funciones f y g existen en un intervalo entonces sus productos escalares también existen en el intervalo.

7. (a) Si $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ son vectores que forman los lados de un triángulo, muestre que $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geqq \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$.
(b) ¿Qué generalizaciones del resultado en (a) esperaría usted se cumplieran para espacios de dimensión mayor? ¿Puede usted probarlas?

8. Tres vectores $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$, en el espacio tridimensional se dice que son *linealmente dependientes* si existen constantes c_1, c_2, c_3 no todas cero tales que $c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 + c_3\vec{A}_3 = 0$ idénticamente, o en otras palabras si uno de los vectores puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos. En otro caso, los vectores se dice que son *linealmente independientes*. (a) Muestre que los vectores $\vec{A}_1 = (2, -1, 4)$, $\vec{A}_2 = (1, 2, -3)$, $\vec{A}_3 = (-1, 3, -7)$ son linealmente dependientes y dé una interpretación geométrica. (b) Muestre que los vectores $\vec{A}_1 = (4, 2, 1)$, $\vec{A}_2 = (2, 0, 3)$, $\vec{A}_3 = (-2, 3, -8)$ son linealmente independientes e interprete geométricamente. (c) ¿Puede usted hallar una condición que involucre determinantes de tercer orden los cuales indicarán dependencia o independencia lineal? Ilustre usando (a) y (b).

9. Generalice las ideas en el Ejercicio 8 a espacios de dimensión mayor. En particular, discuta estas ideas en relación a los conceptos de dependencia lineal y Wronskianos dados en las páginas 181-189 . ¿Puede usted dar una interpretación geométrica?

2 Problemas de Sturm-Liouville

2.1 MOTIVACION PARA LOS PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE. EIGENVALORES Y EIGENFUNCIONES

Puesto que $y = f(x)$ donde $a \leqq x \leqq b$ es un vector en el espacio infinito dimensional no contable, podemos tratar de dar rienda suelta a nuestra imaginación y pensar en las cosas posibles que se le pueden hacer a los vectores tridimensionales y luego intentar generalizar. Una cosa que se le puede hacer a un vector ordinario sería *transformarlo u operarlo*. Por ejemplo, podríamos rotarlo, cambiando así su dirección, o estirarlo o contraerlo, cambiando así su magnitud, o podríamos combinar ambos, esto es, rotación y estiramiento (0 contracción).

Ya hemos encontrado operadores, realmente ***operadores diferenciales,*** al principio de este libro. Sin embargo, con esta nueva interpretación de una función como un vector es natural preguntar qué estamos haciendo cuando, por ejemplo, tomamos la derivada de sen 2x para obtener 2 cos 2x, esto es, D sen 2x = 2 cos 2x. Podemos pensar en sen 2x como un vector en el espacio infinito dimensional no contable y en D como alguna transformación que se aplica a este vector para producir otro vector 2 cos 2x en este espacio. Si aplicamos la operación dos veces a sen 2x, simbolizada por D^2 sen 2x, ocurre una cosa interesante, puesto que obtenemos -4 sen 2x, el cual podemos pensar como un vector en este espacio que tiene una "dirección" opuesta a aquella de sen 2x, pero una "magnitud" cuatro veces mayor. Así cuando D^2 actúa sobre sen 2x produce una rotación y un estiramiento.*

Suponga que ahora consideramos la ecuación diferencial

$$\phi(D)y = F(s) \tag{1}$$

como lo hemos hecho a menudo. La interpretación vectorial es como sigue: Dado el vector $F(x)$ en un espacio infinito dimensional no contable, encuentre todos los vectores y en el espacio los cuales se transforman en $F(x)$ por $\phi(D)$. Podemos por supuesto encontrar estos vectores resolviendo la ecuación diferencial, la cual en muchos casos ya lo podemos hacer. Así, aunque la interpretación es nueva, el método es viejo.

Ya hemos dado una interpretación a la transformación D^2 sen 2x = -4 sen 2x. Esto es realmente una situación poco común, por ejemplo, si aplicamos D una, dos o cualquier número de veces a alguna otra función (vector) tal como tan x, nunca regresaríamos a un múltiplo de tan x. Esto nos lleva a hacer la siguiente

Pregunta. Dado un operador, digamos $\phi(D)$, ¿podemos determinar aquellas funciones (vectores) y las cuales sean transformadas por $\phi(D)$ en múltiplos constantes de ellos mismos?

Podemos expresar esto en la forma

$$\phi(D)y = -\lambda y \tag{2}$$

donde hemos usado $-\lambda y$ para denotar el múltiplo constante dey. El signo menos se ha usado simplemente porque pensamos pasar $-\lambda y$ al lado izquierdo de la ecuación, y cuando lo hagamos nos gustaría que el término tuviera asociado un signo positivo.

Para que se propicie una discusión, asumamos que $\phi(D)$ es un operador diferencial de segundo orden dado por $a_0D^2 + a_1D + a_2$, donde a_0, a_1, a_2 pueden ser funciones de x. En tal caso (2) se puede escribir

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = -\lambda y \quad \text{o} \quad a_0\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + (a_2 + \lambda)y = 0$$

Dividiendo por a_0, la cual se asume diferente de cero, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{a_2}{a_0} + \frac{\lambda}{a_0}\right)y = 0$$

*Usaremos la palabra *estiramiento* para incluir los casos especiales donde la longitud o norma se decrece (contracción) o no se cambia (invariante) a menos que se especifique otra cosa.

Si ahora multiplicamos esta ecuación por $e^{\int (a_1/a_0)dx}$, la suma de los dos primeros términos a la izquierda se pueden escribir como una derivada exacta, esto es,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int (a_1/a_0)dx}\frac{dy}{dx}\right] + \left(\frac{a_2}{a_0} + \frac{\lambda}{a_0}\right)e^{\int (a_1/a_0)dx}y = 0 \qquad (3)$$

donde se nota la analogía con el factor integrante de la página 53.

Podemos escribir (3) en la forma

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0 \qquad (4)$$

donde $\quad P(x) = e^{\int (a_1/a_0)dx}, \qquad Q(x) = \dfrac{a_2}{a_0}e^{\int (a_1/a_0)dx} \qquad R(x) = \dfrac{e^{\int (a_1/a_0)dx}}{a_0} \qquad (5)$

Llamamos la ecuación diferencial (4) una *ecuación diferencial de Sturm-Liouville* en nombre de los matemáticos quienes investigaron sus propiedades.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Exprese en la forma de Sturm-Liouville la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + (x^2 + \lambda)y = 0$$

Solución Método 1. Divida la ecuación dada por x para obtener

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)y = 0$$

Para hacer la suma de los dos primeros términos una derivada exacta, multiplique el factor integrante $e^{\int (-3/x)dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln (x^{-3})} = x^{-3}$ asumiendo $x > 0$. Entonces la ecuación se puede escribir en la forma requerida de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-3}\frac{dy}{dx}\right] + [x^{-2} + \lambda x^{-4}]y = 0 \qquad (6)$$

la cual es la misma (4) con $P(x) = x^{-3}$, $\quad Q(x) = x^{-2}$, $\quad R(x) = x^{-4}$

Método 2. Coloque $a_0 = x$, $a_1 = -3$, $a_2 = x^2$ en (5). Entonces

$$P(x) = e^{\int (-3/x)dx} = x^{-3}, \quad Q(x) = \frac{x^2}{x}e^{\int (-3/x)dx} = x^{-2}, \quad R(x) = \frac{1}{x}e^{\int (-3/x)dx} = x^{-4}$$

lo cual cuando se usa en (4) produce (6).

Una solución de la ecuación de Sturm-Liouville (4) es por supuesto $y = 0$, la cual constituye el *vector nulo* o *cero* del espacio infinito dimensional no contable. Claramente esta *solución triuiul* no nos interesa. Estamos interesados en *soluciones no triviales,* o como algunas veces decimos *soluciones propias,* para las cuales $y \neq 0$. Ahora puesto que mucha de la investigación sobre la ecuación (4) fue escrita en alemán, y puesto que la palabra alemán para propio es *eigen,* ha llegado a ser moda referirse a las funciones no triviales o propias las cuales satisfacen (4) como *eigenfunciones* combinando las palabras alemana y española. Las correspondientes constantes λ se llaman entonces *eigenvalores*.*

Como un ejemplo, suponga que consideramos la ecuación diferencial especial de Sturm-Liouville

$$D^2y = -\lambda y \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{7}$$

Si y = sen 2x, (7) llega a ser -4 sen 2x = $-\lambda$ sen $2x$, de modo que $\lambda = 4$. Así sen 2x es una eigenfunción y $\lambda = 4$ un eigenvalor correspondiente. Similarmente, si y = sen $3x$, entonces (7) llega a ser -9 sen $3x = -\lambda$ sen 3x, de modo que $\lambda = 9$. Así y = sen 3x es un eigenfunción y $\lambda = 9$ un eigenvalor correspondiente.

Supongamos ahora que tenemos dos eigenfunciones diferentes y, y y_k (esto es, $j \neq k$) las cuales satisfacen (4) con los correspondientes eigenvalores λ_j Y λ_k, respectivamente. Entonces tendríamos

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right] + \left[Q(x) + \lambda_j R(x)\right]y_j = 0, \quad \frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right] + \left[Q(x) + \lambda_k R(x)\right]y_k = 0$$

donde hemos usado y $'_j$, y $'_k$ en lugar de dy_j/dx, dy_k/dx. Si multiplicamos la primera ecuación por y_k, la segunda por y,, y luego sustraernos, encontramos

$$y_k \frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right] - y_j \frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right] + (\lambda_j - \lambda_k)R(x)y_j y_k = 0$$

en la cual notamos que Q(x) ha sido eliminada. Podemos escribir esto como

$$(\lambda_j \quad \lambda_k)R(x)y_j y_k = y_j \frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right] \quad y_k \frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right] \tag{8}$$

El lado derecho de (8) se puede expresar como una derivada exacta de modo que

$$(\lambda_j - \lambda_k)R(x)y_j y_k = \frac{d}{dx}\left[P(x)(y_j y_k' \quad y_k y_j')\right] \tag{9}$$

como puede verificarse por diferenciación directa.

Si integramos ambos lados de (9) de $x = a$ a $x = b$, obtenemos

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b R(x)y_j y_k\,dx &= P(b)\left[y_j(b)y_k'(b) - y_k(b)y_j'(b)\right] \\ &\quad - P(a)\left[y_j(a)y_k'(a) - y_k(a)y_j'(a)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Ahora ciertamente sería muy bueno si el lado derecho de (10) fuera igual a cero, porque en tal caso-puesto que $\lambda_j \neq \lambda_k$ pudiéramos dividir por $\lambda_j - \lambda_k$ para obtener

$$\int_a^b R(x)y_j y_k\,dx = 0, \qquad j \neq k \tag{11}$$

o si $R(x) \geqq 0$,

$$\int_a^b \left[\sqrt{R(x)}y_j\right]\left[\sqrt{R(x)}y_k\right]dx = 0, \qquad j \neq k$$

*Eigenfunciones y eigenvalores se llaman también funciones *características* y *valores característicos* respectivamente.

Esto mostraría que las eigenfunciones $\sqrt{R(x)}y_j$ y $\sqrt{R(x)}y_k$ son *ortogonales* en el intervalo $a \leqq x \leqq b$.

Observación. Usando la interpretación de una función como un vector donde los valores de la función en x representan componentes del vector en la x-ésima dirección (vea la página 355), podemos interpretar *R(x) corno* un *factor de ponderación o factor peso* el cual pondera las diferentes direcciones. Debido a esto, cuando se cumple la propiedad (11), con frecuencia diremos que las funciones y_j y y_k son *ortogonales* en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ *con respecto al factor peso (o función peso) R(x).* La idea puede también extenderse a la ortogonalidad y ortonormalidad mutua con respecto a los factores peso. Podemos resumir la observación en la siguiente

Definición. Sea y_1, y_2, y_3, un conjunto de funciones tales que

$$\int_a^b R(x)y_j y_k\,dx = 0, \qquad j \neq k \tag{12}$$

para cualquier par de funciones y_j, y_k. Entonces se dice que las funciones son *mutuamente ortogonales en el intervalo con respecto al factor peso* $R(x) \geqq 0$. En el caso de que también tengamos

$$\int_a^b R(x)y_j^2\,dx = 1 \tag{13}$$

para todas las funciones en el conjunto, decimos que las funciones son *ortonormales en el intervalo con respecto al factor peso.* En el caso donde se cumpla (13), decimos también que las funciones y_j *están normalizadas con respecto al factor peso.*

Examinemos ahora los diferentes casos bajo los cuales el lado derecho de (10) será cero. Hay cuatro casos que pueden surgir.

Caso 1. $y_j(a)y_k'(a) - y_k(a)y_j'(a) = 0, \quad y_j(b)y_k'(b) - y_k(b)y_j'(b) = 0$ (14)

El primero de estos es equivalente a

$$a_1 y_j(a) + a_2 y_j'(a) = 0, \qquad a_1 y_k(a) + a_2 y_k'(a) = 0 \tag{15}$$

donde a_1, a_2 son constantes dadas. Para ver esto tenemos solamente que resolver para a_1 ó a_2 en una de estas ecuaciones y sustituir en la otra. Similarmente, la segunda es equivalente a

$$b_1 y_j(b) + b_2 y_j'(b) = 0, \qquad b_1 y_k(b) + b_2 y_k'(b) = 0 \tag{16}$$

donde b_1, b_2 son constantes dadas. Podemos también expresar (15) y (16) en la forma

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \quad \text{para } y = y_j \text{ y } y = y_k \tag{17}$$

Nos referiremos a este caso como el *caso ordinario.*

Caso 2. $P(a) = 0, \quad y_j(b)y_k'(b) - y_k(b)y_j'(b) = 0$ (18)

La última condición en Caso 1 es equivalente a

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \quad \text{para } y = y_j \text{ y } y = y_k \tag{19}$$

Puesto que $P(a) = 0$ es equivalente a la situación donde la ecuación diferencial de Sturm-Liouville tiene un punto singular en $x = a$, nos referiremos a este caso como el *caso de un punto singular.* Note que podemos intercambiar los a's y los b's en (18) y (19). Este equivaldría a tener el punto singular $x = b$ en vez de $x = a$.

cuso 3. $P(a) = 0$. **P(h) = 0** **(20)**

Este caso ocurrirá si, por ejemplo, $P(x) = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$. Puesto que (20) es equivalente a la situación donde la ecuación diferencial de Sturm-Liouville tiene dos puntos singulares, esto es, en $x = a$ y $x = b$, no referiremos a este caso como el *caso de dos puntos singulares*.

Cuso 4. $P(a) = P(h) \neq 0$, $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$, para $y = y_j$ y $y = y_k$ (21)

Nos referiremos a este caso como el *caso periódico,* puesto que los valores de P(x), y(x) y y'(x) son los mismos en $x = a$ y $x = b$. A menudo también ocurre que $Q(a) = Q(b)$ y $R(a) = R(b)$.

Cada uno de los casos anteriores sugiere un problema de valor de frontera involucrando la ecuación diferencial de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0 \tag{22}$$

y una de las siguientes cuatro condiciones de frontera correspondientes a estos casos.

A. Caso ordinario, $P(a) \neq 0$. $P(b) \neq 0$.

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{23}$$

B. Caso de un punto singular, $P(a) = 0$.

$$y \text{ y } y' \text{ acotadas en } x = a, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{24}$$

Un problema de valor de frontera análogo resulta si intercambiamos a y b.

C. Caso de dos puntos singulares, $P(a) = P(b) = 0$.

$$y \text{ y } y' \text{ acotadas en } x = a \text{ y } x = b \tag{25}$$

D. Caso periódico, $P(a) = P(h) \neq 0$.

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b) \tag{26}$$

Cada uno de estos problemas de valor de frontera se llama un *problema de valor de frontera de Sturm-Liouville* o brevemente un *problema de Sturm-Liouville*. Consideraremos varios ejemplos de tales problemas en este capítulo.*

*La primera condición en (24) es en muchos casos prácticos más de lo que se necesita, podemos necesitar sólo y acotada en $x = a$. Más precisamente, deberíamos tener

$$\lim_{x \to a+} P(x)[y_j(x)y_k'(x) - y_k(x)y_j'(x)] = 0$$

donde $x \to a+$ significa que x tiende a a por la derecha [ver (10), página 364. La misma observación se aplica a las condiciones en (25).

Como un ejemplo de un problema de Sturm-Liouville con condiciones de frontera dadas en A, considere el siguiente Ejemplo ilustrativo. En próximas secciones se darán ilustraciones de los problemas de Sturm-Liouville B, C Y D.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Dado el problema de valor de frontera

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0. \qquad y(0) = 0, \; y(1) = 0 \tag{27}$$

(a) Muestre que es un problema de Sturm-Liouville. (b) Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones. (c) Obtenga un conjunto de funciones que sean mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. (d) Obtenga un conjunto correspondiente de funciones ortonormales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$.

Solución (a) La ecuación diferencial y condiciones de frontera en (27) son casos especiales de (22) y (23) con

$$P(x) = 1, \qquad Q(x) = 0. \qquad R(s) = 1, \qquad a = 0, \qquad b = 1,$$
$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = 0$$

de modo que (27) es un problema de Sturm-Liouville. (b) La ecuación diferencial en (27) tiene la solución general

$$y = A \cos\sqrt{\lambda}x + B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \tag{28}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Para satisfacer la primera condición en (27), esto es, $y(0) = 0$, vemos de (28) que $A = 0$. Así (28) llega a ser

$$y = B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \tag{29}$$

Para satisfacer la segunda condición en (27), esto es. $y(1) = 0$, vemos de (29) que debemos tener B sen $\sqrt{\lambda} = 0$. Hay dos posibilidades, ya sea $B = 0$ o sen $\sqrt{\lambda} = 0$. Si $B = 0$, entonces la solución (29) se reduce a la trivial $y = 0$ la cual no deseamos. Requerimos así que sen $\sqrt{\lambda} = 0$ de la cual tenemos

$$\sqrt{\lambda} = \pm n\pi \quad 0 \quad \lambda = \lambda_n = n^2\pi^2, \qquad n = 0, 1, 2,$$

Las soluciones correspondientes (29) están entonces dadas por

$$y = y_n = B_n \operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 0, 1, 2,$$

donde hemos usado diferentes valores de B dadas por $B_0, B_1, B_2,$, puesto que múltiplos de soluciones también son posibles. Puesto que $n = 0$ produce la solución trivial y = 0, la excluimos. Así los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones requeridas están dadas por

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2. \qquad y = y_n = B_n \operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 1, 2. 3. \tag{30}$$

(c) De la teoría dada en la página 365, las eigenfunciones deben ser mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Sin embargo, si queremos podemos verificar esto directamente, para ello tenemos de (30) $y_j = B_j \operatorname{sen} j\pi x$, $y_k = B_k \operatorname{sen} k\pi x$ para cualesquiera enteros positivos j y k. Así $j \neq k$

$$\int_0^1 y_j y_k\, dx = \int_0^1 (B_j \operatorname{sen} j\pi x)(B_k \operatorname{sen} k\pi x)dx = B_j B_k \int_0^1 \operatorname{sen} j\pi x \operatorname{sen} k\pi x\, dx$$

$$= B_j B_k \int_0^1 \operatorname{sen} j\pi x \operatorname{sen} k\pi x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} B_j B_k \int_0^1 [\cos (j - k)\pi x - \cos (j + k)\pi x]dx$$

$$= \tfrac{1}{2} B_j B_k \left[\frac{\operatorname{sen}(j-k)\pi x}{(j-k)\pi} - \frac{\operatorname{sen}(j+k)\pi x}{(j+k)\pi}\right]\Bigg|_0^1 = 0$$

donde hemos usado la identidad $\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1}{2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$.

(d) Para obtener un conjunto ortonormal debemos determinar las constantes B_n en (30) de modo que el producto escalar de y_n consigo misma es 1. Esto lleva a

$$\int_0^1 (B_n \operatorname{sen} n\pi x)^2\, dx = 1 \quad \text{o} \quad B_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x\, dx = 1 \tag{31}$$

Puesto que $$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi x)dx = \tfrac{1}{2}$$

(31) produce $B_n^2 = 2$ ó $B_n = \sqrt{2}$, tomando valores positivos para B_n. Esto lleva al conjunto ortonormal de funciones $\phi_n = \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, 3,$

Los resultados obtenidos en el ejemplo anterior son típicos para problemas de Sturm-Liouville bajo condiciones poco restrictivas sobre las funciones P(x), Q(x), R(x), las cuales se satisfacen generalmente en la práctica. Podemos resumir los principales resultados como sigue:

1. Habrá un conjunto infinito de eigenvalores los cuales son todos reales y no negativos. Ellos se pueden denotar en orden ascendente por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, donde $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
2. Habrá un conjunto infinito de eigenfunciones correspondientes a los eigenvalores en el numeral 1. Ellos se pueden denotar por $y_1, y_2, y_3, \ldots$
3. Las funciones $\sqrt{R(x)}y_1, \sqrt{R(x)}y_2, \sqrt{R(x)}y_3, \ldots$ son mutuamente ortogonales en el intervalo $a \leqq x \leqq b$. Normalizando estas funciones se pueden convertir en las funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, las cuales conforman un conjunto ortonormal en el intervalo. Alternativamente, podemos decir que las funciones $y_1, y_2, y_3, \ldots$ son mutuamente ortogonales (y pueden ser ortonormales) en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ con respecto al factor peso $R(x)$.

2.2 UNA APLICACION AL PANDEO DE VIGAS

Suponga que tenemos una viga o columna OR de longitud L (ver Figura 8.4) la cual está asegurada en los puntos 0 y R. Esta viga está inicialmente derecha de modo que su eje (o curva elástica) coincide con el eje x tomado en la dirección hacia abajo como se muestra en la figura. Debido a una carga axial de magnitud constante P suponga que la viga sufre una deflexión como se muestra exagerada en la figura. Tratemos de encontrar la magnitud de esta deflexión.

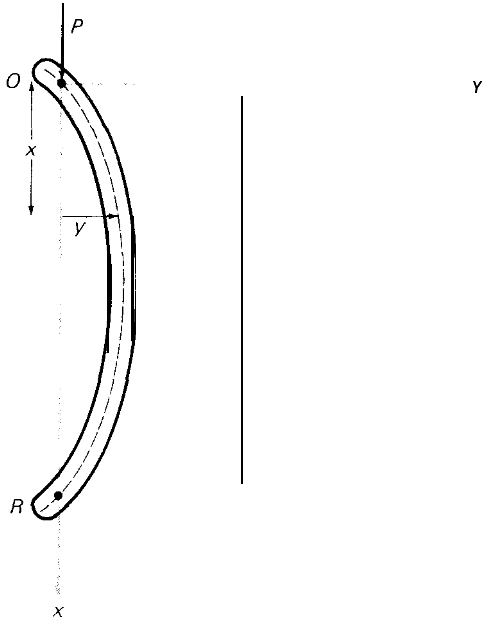


Figura 8.4

Formulación matemática. De acuerdo a la teoría dada en la página 139, la deflexión y de la viga está dada por

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{32}$$

donde E e I son constantes y $M(x)$ es el momento flexionante de una sección de la viga a la distancia x del extremo 0. Este momento flexionante se ve de la figura que tiene una magnitud igual a la fuerza P multiplicada por la distancia y de la sección a la línea de acción de la fuerza. Sin embargo, puesto que la tasa de cambio de la pendiente (esto es, d^2y/dx^2) *se ve* que es negativa, debemos tener $M(x) = -Py$ así que (32) se convierte en

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{33}$$

Puesto que el extremo de la viga tiene cero deflexión en $x = 0$ y $x = L$, debemos también tener

$$y(0) = 0, \qquad y(L) = 0 \tag{34}$$

Solución La ecuación diferencial (33) y las condiciones de frontera (34) constituye un problema de Sturm-Liouville. Si resolvemos (33), tenemos

$$y = A\cos\sqrt{P/EI}\,x + B\operatorname{sen}\sqrt{P/EI}\,x \tag{35}$$

Usando la primera condición en (34) produce $A = 0$, mientras que la segunda condición produce $B \operatorname{sen}\sqrt{P/EI}\,L = 0$. Sin embargo, puesto que $B \neq 0$ (de otro modo no hay deflexión), debemos tener sen $\sqrt{P/EI}\,L = 0$, de lo cual sigue que

$$\sqrt{P/EI}\,L = n\pi \quad \text{o} \quad P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}, \qquad n = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Estos constituyen los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville. Las correspondientes eigenfunciones, obtenidas de (35) con $A = 0$, están dadas por

$$y = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3. \tag{37}$$

donde los coeficientes que pueden depender de n se denotan por B_n

Interpretación. Físicamente, los valores de P (eigenvalores) dados por (36) representan las cargas *criticas* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ para las cuales las correspondientes deflexiones (eigenfunciones) están dadas por (37). Para una carga dada $P < P_1$, la cual es la carga crítica más pequeña, la deflexión es cero, así que la viga puede soportar tal carga. Para $P = P_1$, la viga se pandeará como se indica en la Figura 8.5 (o en la dirección opuesta), esto es, la viga fallará a soportar la carga P_1. Para prevenir tal pandeo es necesario proporcionarle un apoyo en el punto medio $x = L/2$ de la viga para que no ocurra deflexión. Si esto se hace la viga no se pandeará como se muestra en la Figura 8.5 hasta que se alcance la carga crítica P_2. La carga P_2 hace que la viga se pandee de la manera como se muestra en la Figura 8.6 de modo que la viga falla a soportar la carga P_2. Para prevenir este doblamiento, sin embargo, podemos proveer dos apoyos adicionales en $x = L/3$ y $x = 2L/3$. Si esto se hace la viga no se doblará hasta que se alcance la carga crítica P_3, y esto a su vez causa pandeo como se muestra en la Figura 8.7. Continuando el proceso de apoyos adicionales se permiten cargas críticas más grandes.

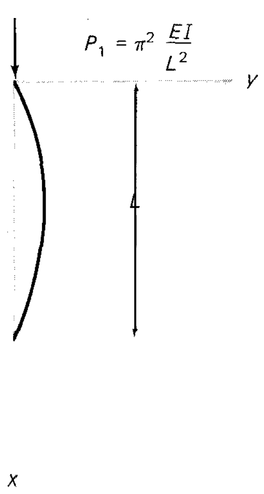


Figura 8.5

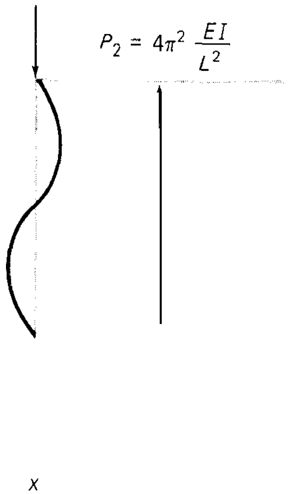


Figura 8.6

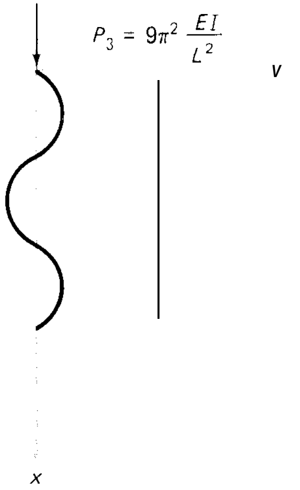


Figura 8.7

3 Ortogonalidad de las funciones de Bessel y Legendre

Al final del Capítulo siete discutimos las' soluciones, en la forma de series, de las ecuaciones diferenciales de Bessel y Legendre. Puesto que las ecuaciones involucradas son lineales y de segundo orden, es razonable preguntar si podemos usar la teoría de Sturm-Liouville desarrollada en este capítulo para obtener propiedades adicionales de las funciones de Bessel y Legendre. En particular nos gustaría conocer si los problemas de valor de frontera que involucran estas ecuaciones tienen eigenvalores y eigenfunciones, si las eigenfunciones son mutuamente ortogonales, etc.

Ocurre que podemos aplicar la teoría de Sturm-Liouville a estas ecuaciones especiales, y que las funciones de Bessel y Legendre proveen ejemplos adicionales de funciones ortogonales de gran importancia en aplicaciones posteriores. Primero consideremos la ortogonalidad de las funciones de Bessel.

3.1 ORTOGONALIDAD DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

En el Capítulo siete encontramos que la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{1}$$

tiene una solución para $n \geqq 0$ dada por la función de Bessel

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \tag{2}$$

Para $n \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$, una solución la cual es linealmente independiente de (2) está dada por $J_{-n}(x)$, pero para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (y de hecho para todo n), una solución lo cual es linealmente independiente de (2) está dada por $Y_n(x)$ (ver página 342). Ambas funciones $J_{-n}(x)$ y $Y_n(x)$ llegan a ser infinitas cuando $x \to 0$, de modo que (2) es la única solución de (1) la cual está acotada en $x = 0$.

Para investigar la teoría de Sturm-Liouville y la posible ortogonalidad de las funciones de Bessel, puede ocurrir la idea de introducir el parámetro λ en el último término del lado izquierdo de (1), por ejemplo, remplazando x por $\sqrt{\lambda}x$. Podemos hacer esto haciendo el cambio de la variable independiente $x = \sqrt{\lambda}u$ en (1) y luego formalmente remplazar u por x. Dejamos los detalles de esto al estudiante (ver el Ejercicio 8A) y solamente note que el resultado es

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda x^2 - n^2)y = 0 \tag{3}$$

Usando cualquiera de los métodos en el Ejemplo ilustrativo 1, página 363, la ecuación (3) se puede escribir en la forma de Sturm-Liouville como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \tag{4}$$

la cual corresponde a (22), página 366 con

$$P(x) = x, \qquad Q(x) = -n^2/x, \qquad R(x) = x \tag{5}$$

La pregunta que ahora surge es qué condiciones de frontera imponer. Si queremos una condición de frontera en $x = 0$, tendremos que excluir soluciones tales como $J_{-n}(x)$ y $Y_n(x)$, los cuales llegan a ser infinitas en $x = 0$. Puesto que $P(x) = x$, tenemos $P(0) = 0$, pero no hay otros valores de x para los cuales $P(x) = 0$, esto es, hay solamente un punto singular. Esto sugiere que usemos las condiciones de frontera asociadas con el problema de Sturm-Liouville tipo B en la página 366, En tal caso tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 .$$

$$y \text{ y } y' \text{ están acotadas en } x = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{6}$$

Por simplicidad escojamos $b = 1$. La teoría de la sección 2 indica que deberíamos esperar encontrar soluciones no triviales a este problema solamente para ciertos valores de λ, esto es, eigenvalores, y que las correspondientes eigenfunciones deberían ser ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso $R(x) = x$. Intentemos confirmar esto para el caso especial donde $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b = 1$ en (6). En tal caso la última condición en (6) se convierte en

$$y(1) = 0 \tag{7}$$

Ahora la solución general de (3) se obtiene de (16) ó (23), paginas 341-342, remplazando x por $\sqrt{\lambda}x$. De la primera condición en (6) requerimos $c_2 = 0$ ó $B = 0$ para que se excluya $J_{-n}(x)$ ó $Y_n(x)$, las cuales no están acotadas para $x = 0$. La solución requerida es por tanto

$$y = AJ_n(\sqrt{\lambda}x) \tag{8}$$

Ahora para satisfacer la condición (7) tenemos de (8)

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0 \tag{9}$$

puesto que $A \neq 0$ (de otro modo tendríamos la solución trivial $y = 0$). Ahora como ya hemos mencionado en la página 343 existen infinitas raíces positivas de $J_n(x) = 0$ dadas por $x = r_1, r_2, r_3, \ldots$ Por tanto (9) tiene las soluciones

$$\sqrt{\lambda} = r_1, r_2, r_3, \ldots \quad \text{o} \quad \lambda = r_1^2, r_2^2, r_3^2, \ldots \tag{10}$$

las cuales son los eigenvalores. Las correspondientes eigenfunciones están dadas por

$$J_n(r_1x), \quad J_n(r_2x), \quad J_n(r_3x), \ldots \tag{11}$$

Usando (10), pagina 364, sigue que $\int_0^1 xJ_n(r_jx)J_n(r_kx)dx = 0, \quad j \neq k$ (12)

lo cual muestra que las funciones $\sqrt{x}J_n(r_1x), \sqrt{x}J_n(r_2x), \ldots, \sqrt{x}J_n(r_3x), \ldots$ (13)

son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, o equivalentemente que $J_n(r_1x)$, $J_n(r_2x)$, $J_n(r_3x)$, son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso x.

Podemos también convertir el conjunto (13) en un conjunto ortonormal normalizando cada función. Para hacer esto consideremos $\phi_k(x) = c_k\sqrt{x}J_n(r_kx)$ y procuremos determinar la constante c_k tal que

$$\int_0^1 [\phi_k(x)]^2\, dx = \int_0^1 [c_k\sqrt{x}J_n(r_kx)]^2\, dx = 1$$

Esto produce

$$c_k = \left[\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx\right]^{-1/2} \tag{14}$$

asumiendo $c_k > 0$. La integral en **(14)** no es muy fácil de evaluar directamente. Sin embargo, podemos usar el siguiente procedimiento.

1. Evalúe la integral $\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx$ **(15)**

Esto puede conseguirse usando (10) en la página 364.

2. Asumiendo que α es una variable y β una constante, dejemos que α tienda a β en (15). Esto producirá la integral

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx \tag{16}$$

3. Use el valor $\beta = r_k$ en (16).

Veamos qué conseguimos con este procedimiento. De (10), página 364, con $P(x) = x$, $R(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$, $y = J_n(\sqrt{\lambda}x)$, de modo que $y' = \sqrt{\lambda}J'_n(\sqrt{\lambda}x)$, obtenemos

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_0^1 xJ_n(\sqrt{\lambda_j}x)J_n(\sqrt{\lambda_k}x)dx = J_n(\sqrt{\lambda_j})[\sqrt{\lambda_k}J'_n(\sqrt{\lambda_k})] - J_n(\sqrt{\lambda_k})[\sqrt{\lambda_j}J'_n(\sqrt{\lambda_j})]$$

Entonces escribiendo $\lambda_j = \alpha^2$, $\lambda_k = \beta^2$, encontramos

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta) - \alpha J_n(\beta)J'_n(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} \tag{17}$$

Ahora si tomamos el límite cuando $\alpha \to \beta$, el lado derecho asume la forma indeterminada 0/0, lo cual sugiere que usemos la regla de L'Hôpital del cálculo elemental. Esta regla establece que el límite deseado, si existe, es igual al límite cuando $\alpha \to \beta$ de la fracción obtenida diferenciando el numerador con respecto a α y el denominador con respecto a α. Si llevamos a cabo estas diferenciaciones, (17) se convierte en

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx = \lim_{\alpha\to\beta} \frac{\beta J_n'(\alpha)J_n'(\beta) - \alpha J_n(\beta)J_n''(\alpha) - J_n(\beta)J_n'(\alpha)}{2\alpha}$$

o
$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx = \frac{\beta J_n'^2(\beta) - \beta J_n(\beta)J_n''(\beta) - J_n(\beta)J_n'(\beta)}{2\beta} \tag{18}$$

Ahora puesto que $J_n(x)$ satisface la ecuación diferencial de Bessel, tenemos

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \tag{19}$$

de modo que para $x = \beta$, $$\beta^2J_n''(\beta) + \beta J_n'(\beta) + (\beta^2 - n^2)J_n(\beta) = 0 \tag{20}$$

Usando el valor de $J''(\beta)$ obtenido de (20) en (18), encontramos simplificando

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx = \frac{\beta^2J_n'^2(\beta) + (\beta^2 - n^2)J_n^2(\beta)}{2\beta^2} \tag{21}$$

Este resultado se cumple para todos los valores de β. En el caso especial donde $\beta = r_k$ es una raíz de $J_n(x) = 0$ de modo que $J_n(r_k) = 0$. (21) *asume* la forma simple

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx = \tfrac{1}{2}J_n'^2(r_k) \tag{22}$$

De esto sigue que el conjunto de funciones

$$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2x}J_n(r_kx)}{J_n'(r_k)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

es ortonormal en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$.

En el caso de la ecuación $$J_n'(x) = 0 \tag{24}$$

tiene también infinitas raíces positivas las cuales denotamos también por r_k, aunque estas raíces son por supuesto diferentes a las de $J_n(x) = 0$. En tal caso $J'_n(r_k) = 0$, y así tenemos de (21) con $\beta = r_k$

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx = \frac{(r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2} \tag{25}$$

Esto muestra que $$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2x}\,r_kJ_n(r_kx)}{\sqrt{r_k^2 - n^2}\,J_n(r_k)} \tag{26}$$

es un conjunto ortonormal en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$.

Consideremos ahora el caso $a = 0$, $b = 1$, $b_1 = \mu$, $b_2 = 1$, donde μ es una constante positiva. Entonces la última condición en (6) llega a ser

$$\mu y(1) + y'(1) = 0 \tag{27}$$

La solución acotada en $x = 0$ debe como en la página 372 estar dada por

$$y = AJ_n(\sqrt{\lambda}x) \tag{28}$$

Para satisfacer (27) debemos así tener

$$\mu J_n(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda}) = 0 \tag{29}$$

Ahora así como es cierto que $J_n(x) = 0$ y $J'_n(x) = 0$ tienen infinitas raíces positivas así también es cierto que

$$\mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0 \tag{30}$$

para cualquier número positivo μ tiene infinitas raíces positivas. Denotaremos estas raíces también por r_k, pero debemos por supuesto darnos cuenta que las raíces de (30) son diferentes de las raíces de $J_n(x) = 0$ ó $J'_n(x) = 0$. Sigue que las raíces de (29) están dadas por

$$\sqrt{\lambda} = r_1, r_2, r_3, \qquad \text{ó} \quad \lambda = r_1^2, r_2^2, r_3^2, \tag{31}$$

De (13), página 373, sigue así que las funciones

$$\sqrt{x}J_n(r_1x), \qquad \sqrt{x}J_n(r_2x), \qquad \sqrt{x}J_n(r_3x), \tag{32}$$

donde r_k son las raíces de (30) son ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Para normalizar éstas podemos proceder como en la página 374, Colocando $\beta = r_k$ en (21), tenemos

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)\,dx = \frac{r_k^2 J_n'^2(r_k) + (r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2} \tag{33}$$

Puesto que r_k son las raíces de (30), $\qquad \mu J_n(r_k) + r_kJ_n'(r_k) = 0 \qquad (34)$

Usando esto en (33), $\qquad \displaystyle\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx = \frac{(\mu^2 + r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2} \qquad (35)$

Esto se puede usar para normalizar las funciones (32) y nos lleva al conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ dado por

$$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2xr_k}J_n(r_kx)}{\sqrt{\mu^2 + r_k^2 - n^2}J_n(r_k)} \tag{36}$$

Para propósitos de referencia, resumimos en la Tabla 8.1 los resultados importantes obtenidos anteriormente. Ellos nos serán muy útiles en nuestro trabajo posterior.

Tabla 8.1

Ecuaciones con raíces r_k	**Valores de** $\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx$
1. $J_n(x) = 0$	$\frac{1}{2}J_n'^2(r_k)$
2. $J_n'(x) = 0$	$\dfrac{(r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2}$
3. $\mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0$	$\dfrac{(\mu^2 + r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2}$

Observaciones similares hechas para las funciones de Bessel también se pueden hacer para las funciones de Legendre. En el Capítulo siete resolvimos la ecuación diferencial de Legendre.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \tag{37}$$

y encontramos que para $n = 0, 1, 2, \ldots$, la ecuación tiene soluciones polinómicas llamadas *polinomios de Legendre*, mientras que para $n \neq 0, 1, 3, \ldots$, tiene soluciones con series de potencias alrededor de $x = 0$ las cuales convergen para $-1 < x < 1$, pero divergen para $x = \pm 1$. Podemos escribir (37) en la forma de Sturm-Liouville como

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0 \tag{38}$$

la cual es un caso especial de (22), página 366, con

$$P(x) = 1 - x^2, \qquad Q(x) = 0, \qquad R(x) = 1, \qquad \lambda = n(n+1) \tag{39}$$

Puesto que $P(x) = 1 - x^2$, tenemos $P(x) = 0$ donde $x = \pm 1$, esto es, dos puntos singulares, y esto sugiere que escojamos $a = -1$, $b = 1$. También el hecho de que $P(a) = 0$, $P(b) = 0$ para $a = -1$, $b = 1$ sugiere el problema de Sturm-Liouville tipo C, página 366, el cual involucra las condiciones de frontera

$$y \text{ y } y' \text{ están acotadas en } x = \pm 1 \tag{40}$$

Una solución de (38) la cual satisface (40) está dada por los polinomios de Legendre

$$y = AP_n(x) \tag{41}$$

Los eigenvalores están ya indicados por

$$\lambda = n(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

y las correspondientes eigenfunciones están así dadas por

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x), \ldots \tag{43}$$

Usando (10) en la página 364 con $P(a) = P(b) = 0$, sigue que

$$\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)dx = 0, \qquad j \neq k \tag{44}$$

lo cual muestra que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ son mutuamente ortogonales en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, siendo la función peso $R(x) = 1$. Las funciones (43) se pueden normalizar. Para hacer esto escribimos $\phi_k(x) = A_kP_k(x)$ e intentamos hallar la constante A_k tal que

$$\int_{-1}^{1}[\phi_k(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{1}[A_kP_k(x)]^2\,dx = 1$$

Esto produce

$$A_k = \left[\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx\right]^{-1/2} \tag{45}$$

escogiendo $A_k > 0$. Desafortunadamente, no podemos usar el mismo procedimiento dado en la página 373, para las funciones de Bessel puesto que j y k

son enteros, Una manera de obviar esto es evaluar la integral (45) para diferentes valores de k puesto que sabemos, por ejemplo, que P,(n) $= 1$, $P_1(x) = x$, P_2 (x) $= \frac{1}{2}(3x^2 \quad 1)$, P_3 (x) $= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ (vea la página 349). Si lo hacemos encontramos

$$\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx = 2, \qquad \int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \tfrac{2}{3}, \int_{-1}^{1} P_2^2(x)dx = \tfrac{2}{5}, \qquad \int_{-1}^{1} P_3^2(x)dx = \tfrac{2}{7},$$

El patrón evidentemente sugiere el resultado

$$\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx = \frac{2}{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \tag{46}$$

lo cual se confirma al tomar valores grandes de k. Sin embargo, simplemente tomando un conjunto finito de valores k y hallando que el resultado es correcto no constituye una prueba matemática (aunque tal evidencia se usa con frecuencia en ciencia e ingeniería como una “prueba”).*

Se puede dar una prueba usando la función generatriz para polinomios de Legendre (vea la página 350 dada por

$$\sum_{k=0}^{\prime} P_k(x)t^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + x^2}} \tag{47}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de (47) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(x)t^{2k} + \sum_{j \neq k} P_j(x)P_k(x)t^{j-k} = \frac{1}{1 - 2tx + x^2} \tag{48}$$

donde la segunda suma a la izquierda es la suma de todos los términos de productos cruzados que aparecen en el proceso de elevar al cuadrado. La integración de (48) de $x = \quad 1$ a $x = 1$ produce

$$\sum_{k=0}^{\gamma} \left[\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx\right] t^{2k} + \sum_{j \neq k} \left[\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)dx\right] t^{j+k} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2tx + x^2} \tag{49}$$

Puesto que la integral en la segunda suma a la izquierda es cero debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, podemos escribir (49) como

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k t^{2k} = \text{-2, In } (1 - 2tx \text{ t } t^2)\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{1}{t}[\ln(1-t) - \text{In }(1+\text{t})] \tag{50}$$

donde I_k denota el valor de la integral (46) lo cual buscamos. Multiplicando ambos lados de (50) por t da

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k t^{2k+1} = \ln(1 \quad t) \quad \ln(1+t) \tag{51}$$

Si ahora diferenciamos ambos lados de (51) con respecto a t, llegamos a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)I_k t^{2k} = \frac{2}{1-t^2} = 2(1 + t^2 + t^4 + \cdots) = \sum_{k=0}^{\prime} 2t^{2k} \tag{52}$$

*Un ejemplo interesante de esto es la “fórmula para generar números primos” dada por $p = k^2 + k + 41$. Colocando $k = 0$, 1, 2, , obtenemos sólo números primos (esto es, números p que tiene solamente ± 1 y $\pm p$ como factores). Sin embargo la fórmula se rompe cuando $k = 41$.

Así al igualar coeficientes de t^{2k} en las dos sumas encontramos

$$(2k+1)I_k = 2 \quad \text{o} \quad I_k = \int_{-1}^{1} P_k^2(x)\,dx = \frac{2}{2k+1} \tag{53}$$

3.3 FUNCIONES ORTOGONALES MISCELANEAS

Existen muchos otros ejemplos de funciones ortogonales que pueden ser estudiadas. Esto es de esperarse puesto que hay muchos casos especiales de las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville. Por supuesto que no todas éstas son importantes en aplicaciones, pero las relativamente pocas que son importantes merecen investigación especial. Dos conjuntos importantes de funciones ortogonales son los polinomios de Hermite y Laguerre $H_n(x)$ y $L_n(x)$, respectivamente, ya discutidos en la página 351. Usando las ecuaciones diferenciales para estas funciones,. podemos probar los siguientes resultados:

1. ***Polinomios de Hermite*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_j(x)H_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 2^k k!\sqrt{\pi}, & j = k \end{cases}$

Esto muestra que los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son ortogonales con respecto a la función peso e^{-x^2} en el intervalo $-\infty < x < \infty$. También se puede obtener un conjunto ortonormal de funciones.

2. ***Polinomios de Laguerre*** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} L_j(x)L_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ (k!)^2, & j = k \end{cases}$

Esto muestra que los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ son ortogonales con respecto a la función peso e^{-x} en el intervalo $0 \leq x < \infty$. Se puede encontrar un correspondiente conjunto ortonormal de funciones.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Pruebe que los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a la función peso e^{-x^2} en $-\infty < x < \infty$.

Solución Sabemos que $H_j(x)$ y $H_k(x)$ satisfacen las respectivas ecuaciones

$$H_j'' - 2xH_j' + 2jH_j = 0, \qquad H_k'' - 2xH_k' + 2kH_k = 0$$

Si multiplicamos la primera ecuación por H_k, la segunda por H_j, y restamos, encontramos

$$H_jH_k'' - H_kH_j'' - 2x(H_jH_k' - H_kH_j') + (2k - 2j)H_jH_k = 0$$

o

$$\frac{d}{dx}(H_jH_k' - H_kH_j') - 2x(H_jH_k' - H_kH_j') + (2k - 2j)H_jH_k = 0$$

Multiplicando esto por el "factor integrante" $e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}$ podemos escribir esto como

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}(H_jH_k' - H_kH_j')\right] = (2j - 2k)e^{-x^2}H_jH_k$$

Integrando de $-\infty$ a ∞ tenemos así

$$(2j - 2k)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_jH_k\,dx = e^{-x^2}(H_jH_k' - H_kH_j')\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

de la cual obtenemos la solución deseada al dividir por $2j - 2k \neq 0$.

Pudimos también haber obtenido el mismo resultado al escribir primero la ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville y usar la técnica de la página 376.

EJERCICIOS A

1. Dé una interpretación geométrica involucrando vectores a cada una de las siguientes operaciones. (a) $(D^2 + 4)(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x)$; c_1, c_2 son constantes. (b) $D^2 \cos 4x$. (c) $D^k e^{mx} = m^k e^{mx}$, donde m es una constante y $k = 1, 2, 3,$

2. Interprete geométricamente los resultados $D^{2k}u = -u$, $D^{4k}u = u$, donde $u = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, c_1, c_2 son constantes y $k = 1, 2, 3,$

3. (a) Encuentre todos los vectores y en un espacio infinito dimensional no contable los cuales se transforman en el vector sen x por la transformación $D^2 + 1$. (b) ¿Cuál de estos vectores es tal que $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$? De una interpretación geométrica.

4. Dado que $Dy = -\lambda y$, muestre que hay infinitas eigenfunciones dadas por $y = ce^{-mx}$ con infinitos eigenvalores $\lambda = m$ correspondientes. Interprete geométricamente.

5. Escriba cada una de las siguientes ecuaciones en la forma de Sturm-Liouville.
   (a) $xy'' + 2y' + (\lambda + x)y = 0$. (b) $y'' - y' + (\lambda + e^{-x})y = 0$.
   (c) $y'' + (3 + \lambda \cos x)y = 0$. (d) $y'' - (\tan x)y' + (1 + \lambda \tan x)y = 0$.

6. Muestre que cada uno de los siguientes son problemas de valor de frontera de Sturm-Liouville. En cada caso encuentre (i) los eigenvalores y las eigenfunciones, (ii) un conjunto de funciones mutuamente ortogonales en el intervalo (chequee la ortogonalidad por integración directa), y (iii) un conjunto ortonormal de funciones en el intervalo. (a) $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y(4) = 0$. (b) $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. (c) $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$.

7. Discuta el problema de pandeo de viga en la página 370 para los casos (a) $n = 4$; (b) $n = 5$.

8. Muestre que si x se remplaza por $\sqrt{\lambda}\, x$ en la ecuación (1), página 371, entonces se obtiene la ecuación (3)

EJERCICIOS B

1. Dado el problema de valor de frontera $y'' + \lambda y = 0$; $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$. (a) Muestre que es un problema de Sturm-Liouville y clasifíquelo de acuerdo al tipo como se indica en la página 362. (b) Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones. (c) Verifique que las eigenfunciones son mutuamente ortogonales en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. (d) Encuentre un correspondiente conjunto ortonormal de funciones.

2. Discuta el problema de valor de frontera $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) + y(1) = 0$, $y'(0) = 0$, respondiendo en particular a las siguientes preguntas: (a) ¿Es un problema de Sturm-Liouville? (b) ¿Tiene eigenvalores y eigenfunciones? (c) ¿Si las eigenfunciones existen, son ellas mutuamente ortogonales?

3. Trabaje el Ejercicio 2 para $y'' + \lambda y = 0$; $y(-1) = -y(1)$, $y'(-1) = -y'(1)$. Compare con el Ejercicio 1.

4. Trabaje el problema de pandeo de viga en la página 369 si las condiciones de frontera (34) se remplazan por (a) $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$; (b) $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Discuta el significado físico si tiene.

5. Determine las eigenfunciones normalizadas y la ecuación que define los eigenvalores para el problema de valor de frontera $xy'' + y' + \lambda xy = 0$ con condiciones y aco-

tada en $x = 0$ y (a) $y(1) = 0$; (b) $y'(1) = 0$; (c) $y(1) + 2y'(1) = 0$. ¿Está y' acotada en $x = 0$? Explique.

6. Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones para los problemas de valor de frontera:
(a) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 4)y = 0$; donde y está acotada en $x = 0$ y $y'(1) = 0$.
(b) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 \quad 25)y = 0$; donde y está acotada en $x = 0$ y $2y(1) + 3y'(1) = 0$.

7. Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones para el problema de valor de frontera consistente de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ con la condición de que y está acotada en $x = 0$ y (a) $y(1) = 0$; (b) $y'(1) = 0$; (c) $y(1) + 5y'(1) = 0$.

8. Verifique el resultado (18) en la página 374 usando la regla de L'Hôpital.

9. Muestre que (a) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2 - 1}$. (b) $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)[P_n'(x)]^2\, dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$.

10. Pruebe que los polinomios de Laguerre son ortogonales con respecto a la función peso e^{-x} en el intervalo $0 \leqq x < \infty$.

EJERCICIOS C

1. Dado el problema de valor de frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) + \mu y'(1) = 0$, donde μ es una constante. (a) Muestre que hay infinitos eigenvalores positivos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$, donde $\lambda_n \quad \frac{1}{4}(2n - 1)^2\pi^2 \to 0$ cuando $n - \infty$. (b) Obtenga las correspondientes eigenfunciones normalizadas y verifique que son mutuamente ortogonales.

2. Resuelva el problema de valor de frontera $x^2y'' + 5xy' + (\lambda + y)y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$, dando los eigenvalores y eigenfunciones. ¿Cuál es el factor peso con respecto al cual las funciones son ortogonales?

3. Sea $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2,.$ para denotar las soluciones de la ecuación diferencial

$$(1 \quad x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

(a) Muestre que las soluciones para algunos de los primeros valores de n están dadas por

$$T_0(x) = 1. \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(s) = 2x^2 \quad 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

(b) Muestre que las soluciones están dadas por

$$T_n = \cos(n \cos^{-1} x), \qquad n = 1. 2, 3,. .: \qquad T_0(x) = 1$$

y que estos son polinomios de grado n. [Sugerencia: Use $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ y tome $x = \cos\theta$.] (c) Muestre que el conjunto de funciones es ortogonal con respecto a la función peso $(1 - x^2)^{-1/2}$ en el intervalo $1 < x < 1$. Los polinomios $T_n(x)$ se llaman los *polinomios de Chebysheu.*

4 Series ortogonales

4.1 INTRODUCCION

Tenemos ahora varios ejemplos de conjuntos de funciones mutuamente ortogonales las cuales se pueden transformar en conjuntos ortonormales de funciones por normalización apropiada. Podemos denotar un conjunto ortonormal de funciones por

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots \tag{1}$$

donde

$$\int_a^b \phi_j(x)\phi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases} \tag{2}$$

Tales funciones se parecen mucho a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ del espacio tridimensional ordinario los cuales también constituyen un conjunto ortonormal.

Puesto que+ cualquier vector tridimensional $\boldsymbol{A}$ se puede expandir en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\boldsymbol{k}$ en la forma

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \tag{3}$$

para constantes apropiadas A_1, A_2, A_3 (las cuales representan los componentes de $\vec{A}$ en las direcciones $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\vec{k}$, respectivamente), es natural preguntar si podemos expandir una función $f(x)$ en una serie de funciones ortonormales, esto es,

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\phi_j(x) \tag{4}$$

para constantes apropiadas $c_1, c_2, \ldots$ (las cuales por analogía representan los componentes de $f(x)$ en las "direcciones" de $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,). Asumimos aquí por supuesto que las funciones están todas definidas en el mismo intervalo $a \leqq x \leqq b$, lo cual equivale a decir que todos son vectores en el mismo espacio.

Formalmente, es fácil obtener las constantes $c_1, c_2, \ldots$ Para ello multipliquemos la ecuación (4) por $\phi_k(x)$ e integremos término a término de $x = a$ a $x = b$ para obtener

$$\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \int_a^b \phi_j(x)\phi_k(x)dx \tag{5}$$

Ahora si hacemos uso de (2), la serie a la derecha de (5) se reduce sólo a un término, aquel para el cual $j = k$, puesto que los otros términos son cero. El valor de este término realmente es c_k. Así tenemos

$$c_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx \tag{6}$$

Note que c_k es el producto escalar de $f(x)$ y $\phi_k(x)$. Esto es análogo a A_1, A_2, A_3 siendo iguales a los productos escalares de $\boldsymbol{A}$ con $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente, esto es, $A_1 = \vec{A}\cdot\vec{i}$, $A_2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}$, $A_3 = \vec{A}\cdot\vec{k}$ de modo que

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} = (\vec{A}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{A}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{A}\cdot\vec{k})\vec{k} \tag{7}$$

Hay varias preguntas que deberían hacerse.

Pregunta 1. ¿Cómo sabemos si la serie asumida a la derecha de (4) contiene ***todas*** las funciones necesarias para la expansión? Para hacer la pregunta de otra manera, ¿qué pasaría si excluimos una o más funciones a la izquierda? Esto involucra lo que se llama ***complitud*** del conjunto ortonormal de funciones, y, como podríamos esperar, a menos que el conjunto sea completo ciertamente no esperaríamos que (4) se cumpla.

Pregunta 2. Aún si tenemos un conjunto ortonormal completo, ¿cómo sabemos que la serie a la derecha de (4) con coeficientes c_k dados por (6) converja y aún si converge cómo sabemos que converge a $f(x)$?

Con el objeto de apreciar la Pregunta 1, suponga que solo nos fuera dado los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$ y se nos pidiera expandir un vector tridimensional arbitrario $\vec{A}$ en términos de ellos, esto es, hallar A_1 y A_2 de modo que

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} \tag{8}$$

Claramente, no podemos hacer esto puesto que el conjunto $\vec{i}$, j no es un conjunto ortonormal completo y para que sea completo necesitaríamos sólo el vector unitario $\vec{k}$. Es interesante notar que en el caso (3) donde sí tenemos complitud también tenemos

$$A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{A}\cdot\vec{i})^2 + (\vec{A}\cdot\vec{j})^2 + (\vec{A}\cdot\vec{k})^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \tag{9}$$

lo cual es el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

De esta observación parecería razonable por analogía hacer la definición de que el conjunto ortonormal de funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ***es completo*** en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ si se cumple la igualdad

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{10}$$

donde
$$c_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx \tag{11}$$

para toda función $f(r)$ para la cual el lado izquierdo de (10) existe. La igualdad (10), la cual equivale al teorema de Pitágoras en un espacio infinito dimensional contable, con-frecuencia se llama la ***igualdad de Parseval o*** la ***identidad de Parseval.***

El resultado (ll) fácilmente se obtiene formalmente si tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k(x) \tag{12}$$

debido a que si multiplicamos ambos lados de (12) por $f(x)$ e integramos término a término de $x = a$ a $x = b$ encontramos

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx \tag{13}$$

la cual se reduce a (10) al usar (ll). Desafortunadamente, lo recíproco no funciona, esto es, no podemos obtener (12) de (10). De hecho, puede muy bien suceder que se cumpla (10) y que (12) no se cumpla.

Una desventaja al usar (10) como una definición para complitud es que no hay una relación obvia entre $f(x)$ y el conjunto ortonormal que ofrece la base para la expansión como se da en (12). Esta situación se puede, sin embargo, remediar debido a que podemos mostrar que (10) es equivalente al enunciado

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x)\right]^2 dx = 0 \tag{14}$$

donde se nota que el integrando contiene la diferencia entre $f(x)$ y la suma de los primeros n términos de la serie a la derecha de (12). La equivalencia no es difícil de establecer. Para ello debemos primero elevar al cuadrado

$$f(x) - \sum_{j=1} c_j\phi_j(x) \tag{15}$$

Esto se hace al elevar al cuadrado cada término en (15), hallar los términos de producto cruzado, y luego sumar. El resultado es

$$[f(x)]^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j^2[\phi_j(x)]^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_j f(x)\phi_j(x) + \sum_{j\neq k} c_j c_k \phi_j(x)\phi_k(x) \tag{16}$$

Si ahora integramos (16) de $x = a$ a b podemos escribir el resultado (14) como

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx + \sum_{j=1}^{n} c_j^2\int_a^b [\phi_j(x)]^2\,dx - 2\sum_{j=1}^{n} c_j\int_a^b f(x)\phi_j(x)dx + \sum_{j\neq k} c_j c_k\int_a^b \phi_j(x)\phi_k(x)dx\right\} = 0$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 + 0\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right\} = 0$$

lo cual es equivalente a (10).

Suponga ahora que consideramos

$$E_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x)\right]^2 dx \tag{17}$$

Podemos considerar la suma finita $$\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x) \tag{18}$$

como una aproximación de $f(x)$ y (15) como el error cometido. Entonces (17) se puede interpretar como el ***error medio cuadrático*** en la aproximación y la raíz cuadrada de éste como ***error medio en raíz cuadrada o error rms*** con el cual el científico y el ingeniero pueden estar familiarizados del análisis de circuitos eléctricos, física, etc., en conexión con corrientes medias cuadráticas, velocidades, etc.

Estas observaciones nos llevan a hacer la siguiente definición de completitud.

Definición. El conjunto ortonormal de funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, se dice que constituye un conjunto ***ortonormal completo*** en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ si para todas, las funciones $f(x)$ tales que el lado izquierdo de (10) converge se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x)\right]^2 dx = 0 \tag{19}$$

donde los coeficientes c_j están dados por (ll), esto es, el error medio cuadrático en la aproximación (18) tiende a cero cuando $n \to \infty$.

El resultado (19) a menudo se escribe en la forma algo sugestiva

$$\text{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x) = f(x) \tag{20}$$

lo cual *se* lee $f(x)$ *es el límite* en *media* de (18) cuando $n \to \infty$, o que (18) converge *en la media* a $f(x)$ cuando $n \to \infty$. Se debería notar que tal *convergencia media,* como se llama es diferente de la *convergencia ordinaria,* esto es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x) = f(x) \tag{21}$$

la cual corresponde a (12).

Aunque las preguntas de convergencia ordinaria y media están fuera del alcance de este curso, es de interés que el estudiante vea algunas de estas ideas y tal vez se motive para emprender cursos más avanzados en los cuales se tratan tales tópicos. Algunos de los conceptos serán considerados en los ejercicios para los estudiantes interesados.

Afortunadamente, desde el punto de vista aplicado ocurre que en la mayoría de los casos que surgen en la práctica tenemos la convergencia ordinaria (12), excepto en algunos valores aislados de x y también la convergencia media (20). Más adelante se darán algunas ilustraciones.

Observación. En la discusión anterior asumimos la expansión de una función en términos de funciones ortonormales $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, Esto es deseable desde el punto de vista teórico, puesto que los resultados obtenidos tales como (10) y (ll) se simplifican mayormente. Desde el punto de vista práctico, sin embargo, esto requiere primero la normalización de las funciones ortogonales y luego la expansión de la función en la serie ortonormal resultante. En vez de hacer esto, con frecuencia es más simple asumir la expansión en serie en términos de las funciones ortogonales y determinar los coeficientes directamente. Así, por ejemplo, suponga que nos dan el conjunto ortogonal de funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, (el cual esperamos, con una apropiada normalización, corresponderá a un conjunto ortonormal completo), y nos piden expandir una función dada $f(x)$ en la serie.

$$f(x) = a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} a_ju_j(x) \tag{22}$$

Multiplicando ambos lados por $u_k(x)$ e integrando de a a b, encontramos

$$\int_a^b f(x)u_k(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_a^b u_j(x)u_k(x)dx \tag{23}$$

Luego usando
$$\int_a^b u_j(x)u_k(x)dx = 0, \qquad j \neq k \tag{24}$$

(23) llega a ser
$$\int_a^b f(x)u_k(x)dx = a_k \int_a^b [u_k(x)]^2 dx \tag{25}$$

lo cual produce

$$a_k = \frac{\int_a^b f(x)u_k(x)dx}{\int_a^b [u_k(x)]^2\,dx} \tag{26}$$

La serie resultante (22) será por supuesto la misma que si hubiéramos empezado con las funciones normalizadas.

4.2 SERIES DE FOURIER

En la página 366 mencionamos cuatro tipos de problemas de Sturm-Liouville A, B, C y D. Hasta ahora hemos dado ejemplos de todos estos excepto para *D, el caso periódico.* Ahora examinamos este caso. Escogemos la ecuación diferencial de Sturm-Liouville más sencilla

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{27}$$

y tomaremos las condiciones de frontera periódicas como

$$y(-L) = y(L), \qquad y'(\quad L) = y'(L) \tag{28}$$

donde hemos usado $a = -L$ y $b = L$, donde L es una constante dada. Con esta elección los resultados se simplifican mayormente.

Ahora la solución general de la ecuación diferencial (27) es

$$y = A \cos \sqrt{\ } \text{ir} + B\text{sen}\sqrt{\lambda}x \tag{29}$$

Las condiciones de frontera (28) producen

$$A \cos\sqrt{\lambda}L - B\text{sen}\sqrt{\lambda}L = A \cos\sqrt{\lambda}L + B\,\text{sen}\sqrt{\lambda}L \tag{30}$$

$$A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}L + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L = -A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}L + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L \tag{31}$$

Estas ecuaciónes conducen respectivamente a

$$2B\,\text{sen}\sqrt{\lambda}L = 0, \qquad 2A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}L = 0 \tag{32}$$

Dos posibilidades pueden ocurrir

(a) sen $\sqrt{\lambda}L = 0$, de lo cual obtenemos

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{33}$$

los cuales son los eigenvalores. Las eigenfunciones correspondientes obtenidas de (29) están entonces dadas por

$$y_k = a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\text{sen}\frac{k\pi x}{L}, \qquad k = 0,\ 1.\ 2,\ 3,\ . \tag{34}$$

donde a_k, b_k son constantes.

(b) sen $\sqrt{\lambda}L \neq 0$, de lo cual $B = 0$, $A\sqrt{\lambda} = 0$. Esto significa que $B = 0$ ó $A = 0$, lo cual produce la solución trivial y = 0, ó $B = 0$, $\lambda = 0$, lo cual conduce a un caso algo sin interés de un eigenvalor y una eigenfunción de modo que la ortogonalidad llega a ser despreciable.

Obviamente, la posibilidad (a) es la única significativa. Los eigenvalores son $\lambda = 0, \pi/L, 2\pi/L,$, y las eigenfunciones correspondientes son

$$a_0, \qquad a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}, \qquad a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}, \tag{35}$$

Estas son por supuesto, de la manera como se derivan, mutuamente ortogonales, esto es,

$$\int_{-L}^{L} \left(a_j \cos \frac{j\pi x}{L} + b_j \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L}\right)\left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0, \qquad j \neq k \tag{36}$$

En particular, puesto que (36) es cierto para cualesquiera valores de las *a* 's y *b* 's, tenemos

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx = 0, \qquad \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}\, dx = 0,$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx = 0, \qquad j \neq k \tag{37}$$

las cuales se pueden verificar por integración directa.

Si f(x) es una función definida en el intervalo $-L \leqq x \leqq L$, nos lleva naturalmente a la expansión de f(n) en la serie

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos \frac{j\pi x}{L} + b_j \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L}\right) \tag{38}$$

Para obtener las ***a's*** primero multiplicamos ambos lados de (38) por $\cos(k\pi x/L)$ e integramos de -L a L. Entonces

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx = a_0 \int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \int_{-L}^{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx\right.$$

$$\left. + b_j \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx\right)$$

Debido a (37), todos los términos a la derecha son cero excepto uno, aquel para el cual j = k. Así tenemos

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx = a_k \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx \quad \text{o} \quad a_k = \frac{\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx}{\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx} \tag{39}$$

E1 denominador en (39) se evalua fácilmente. Tenemos

$$k = 0: \qquad \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} 1\, dx = 2L$$

$$k = 1, 2, 3.. : \qquad \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{2k\pi x}{L}\right) dx = L$$

Así (39) llega a ser

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, . \tag{40}$$

Similarmente, para obtener los b's, multiplicamos ambos lados de (38) por sen $(k\pi x/L)$ e integramos de $-L$ a L. *Así*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx = a_0\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\int_{-L}^{L}\cos\frac{j\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx\right.$$
$$\left.+\, b_j\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{j\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx\right)$$

Debido a (37) todos los términos a la derecha son cero excepto uno, de modo que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx = b_k\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi x}{L}\,dx \quad o \quad b_k = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx}{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi x}{L}} \tag{41}$$

El denominador en (41) se evalúa fácilmente. Encontramos

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{L}\right)dx = L, \qquad k = 1, 2, 3, . .$$

de modo que (41) llega a ser

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

La expansión en serie (38) con coeficientes dados por (40) y (42) se llama una *serie de Fourier* en nombre de la persona quien primero la descubrió en su investigación sobre flujo de calor involucrando ecuaciones diferenciales parciales a principios del siglo XIX. Veremos cómo tal serie surge de las aplicaciones de ecuaciones diferenciales parciales en el Capítulo trece y tendremos ocasión de trabajar muchos problemas haciendo uso de ellas.

Se observa que hay dos fórmulas separadas para los a's dadas en (40), una para a_0 y otra para a_k, k = 1, 2,. Es posible y deseable remplazar éstas por una fórmula. Para ver cómo se hace esto, coloquemos k = 0 en la segunda fórmula de (40). Entonces encontramos

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \tag{43}$$

El mismo resultado se consigue si remplazamos a_0 en el primer resultado de (40) por $a_0/2$. Si hacemos esto, debemos también por supuesto remplazar el a_0 en (38) por $a_0/2$. Tenemos así el siguiente resumen del procedimiento básico para la expansión de una función en una serie de Fourier.

Resumen del Procedimiento para hallar series de Fourier

1. Dada la función f(x) definida en el intervalo $-L \leqq x \leqq L$, evalúe los

coeficientes, a menudo llamados *coeficientes de Fourier,* dados por

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx \tag{44}$$

2. Usando estos coeficientes y asumiendo que la serie converge a *f(x).* la serie de Fourier deseada está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{45}$$

Como ya hemos mencionado, hay una pregunta de si la serie a la derecha de (45) realmente converge a *f(x)* para que se justifique la igualdad. Para este propósito tendremos que examinar la pregunta de convergencia de las series de Fourier. Antes de hacerlo, sin embargo, trabajemos un ejemplo ilustrando cómo se puede encontrar una serie de Fourier para una función dada *f(x).*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encuentre la serie de Fourier correspondiente a la función $f(x) = 1 - x$ en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$.

Solución Puesto que el intervalo es $-1 \leqq x \leqq 1$, tenemos $L = 1$. Entonces los coeficientes de Fourier a_k, b_k están dados por

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-x)\cos\frac{k\pi x}{1}\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{1}\,dx$$

De estos encontramos

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(1 - x)dx = x - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 2$$

$$a_k = \int_{-1}^{1}(1 - x)\cos k\pi x\,dx = (1 - x)\left(\frac{\operatorname{sen}k\pi x}{k\pi}\right) - (-1)\left(-\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^{1}(1 - x)\operatorname{sen}k\pi x\,dx = (1 - x)\left(-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right) - (-1)\left(-\frac{\operatorname{sen}k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2\cos k\pi}{k\pi}$$

Así $a_0 = 2, a_1 = a_2 = \cdots = 0, b_1 = -\frac{2}{\pi}, b_2 = \frac{2}{2\pi}, b_3 = -\frac{2}{3\pi}, \ldots$ y la serie de Fourier se puede escribir formalmente como

$$1 - x = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\pi x + \frac{2}{2\pi}\operatorname{sen}2\pi x - \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}3\pi x + \cdots \tag{46}$$

asumiendo que la serie converge por la derecha a $f(x) = 1 - x$ para $-1 \leqq x \leqq 1$.

Cuando científicos, ingenieros o matemáticos obtienen resultados posibles por algún medio dudoso, ellos recurren ya sea a probarlos rigurosamente o a chequearlos para ver si son razonables. Esto último es generalmente más fácil, y en muchos casos una prueba se visualiza solamente después de que se haya obtenido suficiente evidencia para conjeturar que los resultados tienen validez. Con esta intención procedamos a chequear el resultado (46) obtenido en el ejemplo anterior. Puesto que hemos obtenido este resultado asumiendo $-1 \leqq x \leqq 1$, veamos si este resultado se cumple para varios valores en este intervalo. Si ensayamos $x = 1$ y -1, esto es, los puntos extremos del intervalo, formalmente encontramos $0 = 1$ y $2 = 1$, respectivamente, cuya evidencia puede causar que alguien abandone inmediatamente y concluya que el resultado debe estar equivocado. Otros, con más fé en el análisis, pueden estar inclinados a pensar que tal vez el resultado solamente se cumple para $-1 < x < 1$, en cuyo caso es natural que obtengamos un resultado equivocado para $x = \pm 1$. Con estas ideas, podemos ensayar con un punto en la mitad del intervalo, esto es, $x = 0$. Usando esto en (40) nos lleva a $1 = 1$, lo cual puede ser una simple coincidencia. Continuando aún más, sea $x = \frac{1}{2}$, en cuyo caso (46) llega a ser

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} - \frac{2}{5\pi} + \frac{2}{7\pi} - \cdots = 1 - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

o

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Esto, si es cierto, parecería ser más que una coincidencia. Usando una calculadora, vemos que parece tener validez. Realmente, no es difícil probar el resultado el cual está basado en la expansión en serie de Taylor fácilmente obtenible (usando métodos empleados en el cálculo elemental)

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$$

y tomando simplemente $t = 1$ a ambos lados.

Aún todavía está la pregunta de por qué el resultado no se cumple en $x = \pm 1$. Para buscar una explicación posible, notamos que los términos a la derecha de (46) son todas funciones periódicas, y de hecho el período de todas ellas es 2. Así, si (46) ha de ser válida, el lado izquierdo debe tener también período 2. Podemos ver esto mejor si graficamos $f(x) = 1 - x$ para $-1 \leqq x \leqq 1$ y repetir este gráfico a la derecha y a la izquierda, como se muestra en la Figura 8.8.

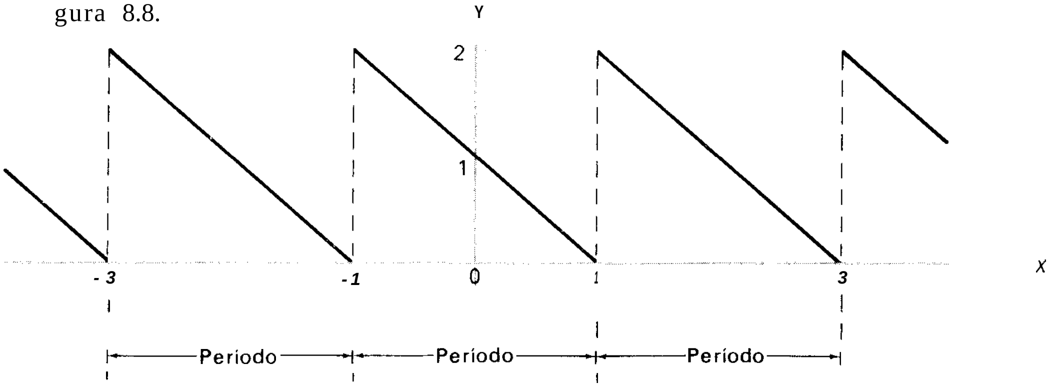


Figura 8.8

El gráfico sirve para aclarar nuestro dilema porque vemos en éste que hay puntos de discontinuidad en $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$. Puesto que el valor de la serie es 0 ó 2 cerca a un punto de discontinuidad, dependiendo del lado donde consideremos la discontinuidad, la serie en su intento de ser "insesgada" da el valor promedio $\frac{1}{2}(0 + 2) = 1$ en el punto de discontinuidad.

Como ya lo hemos resaltado, la pregunta de convergencia de la serie Fourier involucra algún análisis matemático algo complicado el cual omitiremos. Resulta, sin embargo, que hay algunas condiciones muy simples bajo las cuales podemos decir cuándo una serie de Fourier converge y también a lo que ésta converge. Fourier mismo no desarrolló estas condiciones, y se dejó al matemático *Dirichlet* el desarrollar esta tarea.

Antes de enunciar el teorema básico de Dirichlet, hagamos algunas observaciones adicionales. Primero, es bastante claro que si la serie (45) ha de cumplirse entonces, puesto que cada función a la derecha tiene el período $2L$, la suma debería también tener el período $2L$, y así f(x) debería tener el período $2L$. Indicamos esto escribiendo

$$f(x + 2L) = f(x)$$

Segundo, es claro que la función f(x) debe ser tal que la integral en (44) exista. Una condición simple para esto es que f(x) sea continua en el intervalo $-L \leqq x \leqq L$. Esto es un poco más restrictivo de lo que necesitamos, sin embargo, puesto que es posible para una función tener discontinuidades y ser todavía integrable. Una posibilidad es usar funciones seccionalmente continuas, con las cuales ya nos hemos encontrado en el capítulo sobre transformadas de Laplace. Revisemos esto en la siguiente

Definición. Una función *se* dice que *es seccionalmente continua* en un intervalo si la función tiene solamente un número finito de discontinuidades en el intervalo y si los límites por la derecha y por la izquierda en cada discontinuidad existen ambos.

Un ejemplo de una función que tiene período $2L$ y es seccionalmente continua se muestra en la Figura 8.9.

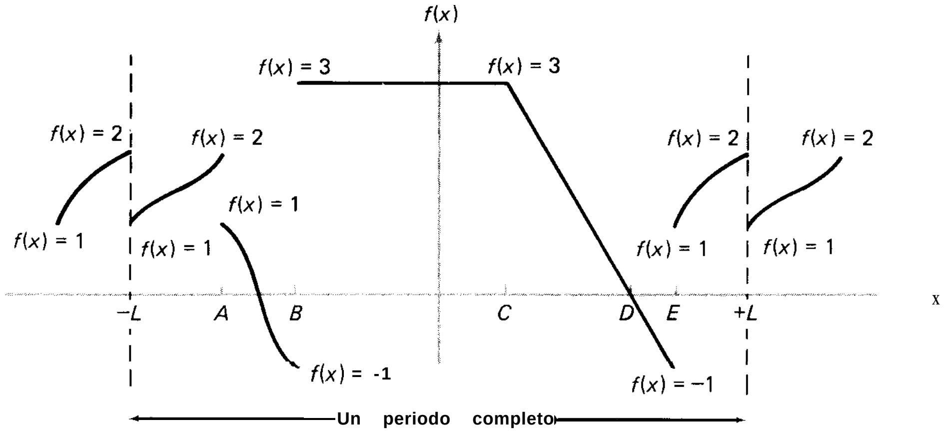


Figura 8.9

Estamos listos ahora para enunciar las condiciones conocidas como las *condiciones de Dirichlet* bajo las cuales una serie de Fourier se garantiza a converger y a lo que ésta converge en el siguiente

Teorema 1. (Teorema de Dirichlet). (a) Sea f(x) una función de x definida en el intervalo $-L < x < L$ y definida por extensión periódica por la relación $f(x + 2L) = f(x)$, esto es, f(x) tiene período $2L$. (b) Sea f(x) una función seccionalmente continua en el intervalo $-L < x < L$. (c) Sea la derivada $f'(x)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $-L < x < L$. Entonces la serie a la derecha de (45) con coeficientes (44) converge a f(x) si x es un punto de continuidad y converge a

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \tag{47}$$

si x es un punto de discontinuidad donde (47) representa la media aritmética de los límites de f(x) por ambos lados del punto de discontinuidad.* Las condiciones en (a), (b) y (c) se llaman las *condiciones de Dirichlet*.

Este teorema es de gran valor puesto que garantiza que una función tal como la que se muestra en la Figura 8.9 posee una serie de Fourier convergente. Si la función esquematizada en el gráfico se fuera a usar para llegar a una serie de Fourier, la serie resultante convergiría a los siguientes valores:

En A la serie convergiría a $\dfrac{2+1}{2} = 1.5$.

En B la serie convergiría a $\dfrac{3+(-1)}{2} = 1$.

En C la serie convergiría a 3, puesto que x es un punto de continuidad.

En D la serie convergiría a 0.

En E la serie convergiría a $\dfrac{1+(-1)}{2} = 0$.

En -L y + L la serie convergiría a $\dfrac{2+1}{2} = 1.5$.

El teorema sirve para explicar los resultados alcanzados en el Ejemplo ilustrativo 1, página 388.

Antes de continuar con más ejemplos y el uso del teorema anterior, hay varias cosas que deberían indicarse.

1. Algunas veces la función f(x) se especifica en el intervalo de longitud $2L$ diferente a $-L < x < L$, tal como por ejemplo $c < x < c + 2L$, donde c puede ser cualquier número real. En tal caso la serie de Fourier es la misma a la dada en (45), pero los coeficientes de Fourier (44) se remplazan por

$$a_k = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{k\pi x}{L}\,dx \tag{48}$$

*Ver el pie de página en la página 268.

En el caso especial donde $c = -L$, (48) se reduce a (44).

2. Ocurren dos casos especiales importantes de series de Fourier en los cuales (a) solamente están presentes términos de coseno, o (b) solamente están presentes términos de seno. Nos referimos a estos como *serie coseno de Fourier y serie seno de Fourier,* respectivamente. Con frecuencia es posible predecir del gráfico de la función si obtendremos una serie coseno de Fourier, o una serie seno de Fourier, o una serie regular que involucre cosenos y senos. Para ver cómo, supongamos primero que tenemos una serie coseno, esto es,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots \tag{49}$$

donde todos los b's son cero. Si remplazamos x por $-x$ en (49) y recordamos que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, (49) llegar a ser

$$f(-x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots \tag{50}$$

esto es, $f(-x) = f(x)$. Una función que tiene esta propiedad con frecuencia se llama una *función par,* la terminología probablemente originada del hecho de que si n es un entero par entonces $(-x)^n = x^n$. Ejemplos de gráficos de funciones pares se muestran en la Figura 8.10. En cada una de éstas el valor de la función en $-x$, esto es, $f(-x)$, es igual al valor de la función en x, esto es, $f(x)$. El gráfico es así simétrico alrededor del eje y de tal modo que el eje y actúa como un espejo en el cual la parte del gráfico a la derecha es el objeto y la parte a la izquierda es la imagen.

Si solamente están presentes términos seno, esto es, tenemos una serie seno de Fourier, entonces

$$f(x) = b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \cdots \tag{51}$$

donde todos los a's son cero. Si remplazamos x por $-x$ en (51), y recordamos que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, (51) llega a ser

$$f(-x) = -\left(b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \cdots\right) = -f(x) \tag{52}$$

esto es, $f(-x) = -f(x)$. Una función que tiene esta propiedad se llama una *función impar,* probablemente del hecho de que, para n igual a un entero impar, $(-x)^n = -x^n$. Ejemplos de funciones impares se muestran en la Figura 8.11. En cada una de éstas el valor de la función en $-x$, esto es, $f(-x)$, es igual al negativo del valor de la función en x, esto es, $-f(x)$. Si asumimos que la parte del gráfico a la derecha del eje y es el objeto, entonces la imagen deseada se obtiene por reflexión en dos espejos, uno siendo el eje y y el otro siendo el eje negativo x.

Recíprocamente, podemos mostrar que funciones pares tienen series coseno de Fourier correspondientes, mientras que funciones impares tienen series seno de Fourier. Por tanto si sabemos de antemano que tenemos una función par, o impar, podemos acortar en la mitad el trabajo de hallar los coeficientes de Fourier, puesto que solamente tenemos que hallar de a's o b's, *respectivamente.*

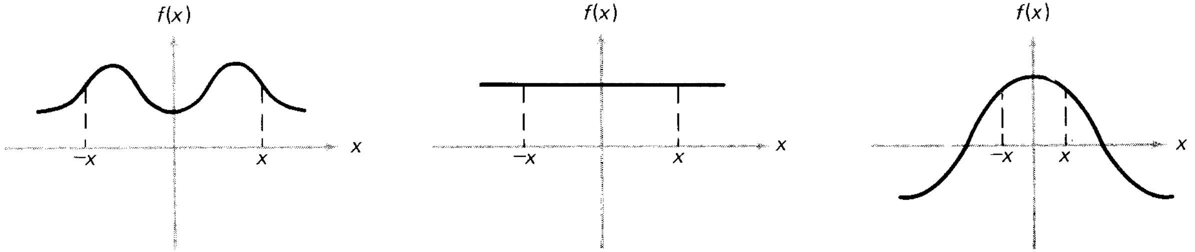


Figura 8.10

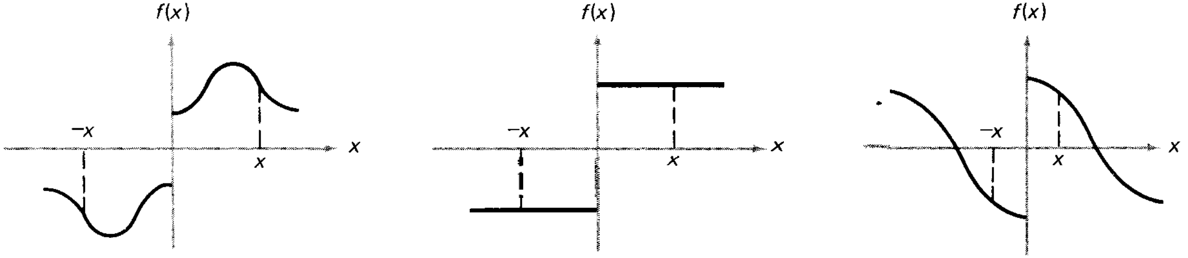


Figura 8.11

Si f(x) es par, entonces asf también es f(x) cos $k\pi x/L$, *de modo* que (44) se remplaza por

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad b_k = 0 \tag{53}$$

Similarmente, en el caso de que f(x) sea impar, entonces f(x) sen $k\pi x/L$ *es* par, de modo que el resultado (44) se remplaza por

$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx \tag{54}$$

Algunas veces nos dan la función $f(x)$ en un intervalo $0 < x < L$ de longitud L, esto es, la mitad del intervalo acostumbrado, y nos piden encontrar la serie coseno de Fourier para la función. En tal caso simplemente usamos (53). El resultado es por supuesto el mismo a si fuéramos a extender la definición de la función a la otra mitad del intervalo, $-L < x < 0$ de modo que la función resultante en el intervalo completo $-L < x < L$ es una función par.

Similarmente, si nos dan la función $f(x)$ en $0 < x < L$ *y* nos pidieran encontrar la serie seno de Fourier para la función, usamos (54). El resultado es el mismo a si fuéramos a extender la definición de la función a la otra mitad del intervalo $-L < x < 0$ de modo que la función resultante en el intervalo completo $-L < x < L$ es una función impar. Tales casos con frecuencia se refieren por obvias razones como *serie coseno de Fourier de medio rango y serie seno de Fourier de medio rango,* respectivamente.

Ilustremos las observaciones anteriores trabajando un poco más de ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre una serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

teniendo período 4.

Solución El gráfico de esta función aparece en la Figura 8.12. Se ve que la función es impar. Por tanto esperamos una serie seno de Fourier. Puesto que el período es 4, tenemos $2L = 4$, $L = 2$. Por tanto de (54),

$$a_k = 0,\ b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 (1)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{2}\,dx$$

La integracián produce $\qquad b_k = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)$

de la cual obtenemos $\qquad b_1 = \frac{4}{\pi}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{4}{3\pi},$

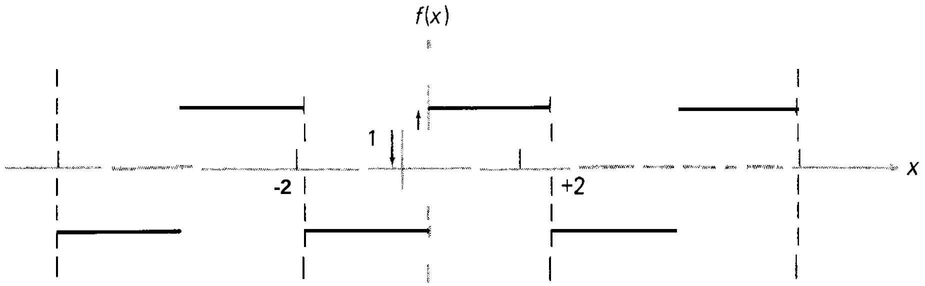


Figura 8.12

Así, la serie de Fourier deseada es

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}+\frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{2}$$

Del teorema de Dirichlet vemos que en los puntos de discontinuidad tales como $x = 0, 2, 4,$ la serie converge a cero. En un lugar como $x = 1$, el cual es un punto de continuidad. la serie debería converger al valor de f(x) para $x = 1$ el cual es 1. Sigue que

$$\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=1$$

el cual es el mismo resultado obtenido en la página 389.

Podemos si deseamos definir una nueva función *F(x)* de período 4 tal que

$$F(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0\\ 1, & 0<x<2\\ 0, & x=\pm 2\end{cases}$$

En tal caso tendríamos para todo x

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{2}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Expanda en una serie de Fourier $f(x)=\begin{cases}0.1x, & 0\leqq x\leqq 10\\ 0.1(20-x), & 10\leqq x\leqq 20\end{cases}$'

Solución Puesto que no se ha hecho mención del período de esta función, a primera vista hay tres casos posibles que podrían surgir.

(a) El período podría tomarse como 20 (y la serie contendría senos y cosenos).
(b) Podríamos expandir la función en una serie seno de Fourier, en cuyo caso el período se tomaría como 40 (esto es, el intervalo $0 \leqq x \leqq 20$ sería la mitad del rango).
(c) Podríamos expandir la función en una serie coseno de Fourier, en cuyo

caso el período se tomaría como 40 (esto es, $0 \leqq x \leqq 20$ sería la mitad del rango).

Todas estas series servirían el propósito de representar la función en el intervalo $0 \leqq x \leqq 20$. El hecho de que podamos obtener varias posibilidades muestra la necesidad de especificar el período o al menos mencionar si se desea una serie seno o coseno.

Asumamos que se desea el caso (a), esto es, el período de la función es 20. En tal caso el gráfico de f(x) aparece en la Figura 8.13. Puesto que este gráfico es una función par, la serie de Fourier contendrá solamente cosenos, esto es, será una serie coseno de Fourier. Esto resultaría ser lo mismo al caso (c) anterior,

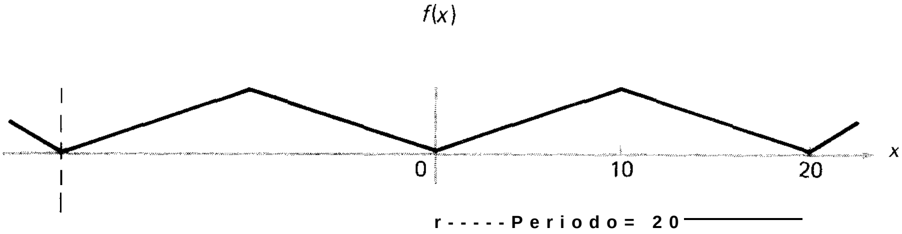


Figura 8.13

de modo que solamente hay dos posibilidades en vez de tres. Puesto que el período es 20, tenemos $2L = 20$ ó $L = 10$. Así

$$a_k = \frac{2}{10}\int_0^{10} (0.1x)\cos\frac{k\pi x}{10}\,dx, \qquad b_k = 0$$

Para $k = 0$ tenemos $$a_0 = \frac{2}{10}\int_0^{10} 0.1x\,dx = 1$$

Para $k = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos, al integrar por partes,

$$a_k = \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1)$$

Entonces la serie de Fourier deseada está dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1)\cos\frac{k\pi x}{10} \tag{55}$$

o

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{10} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{10} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{10} + \cdots\right) \tag{56}$$

Puesto que f(x) no tiene puntos de discontinuidad, vemos por el teorema de Dirichlet que esta serie converge a f(x) para todo valor de x. Podemos así legítimamente escribir la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1)\cos\frac{k\pi x}{10}$$

En particular, para $x = 0$ la serie converge a cero. Así colocando $x = 0$ tenemos

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \quad \text{o} \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \tag{57}$$

una serie interesante la cual es difícil de sumar por otros métodos.

Observación 2. Se debería notar que si por alguna razón no notamos que $f(x)$ es una función par hubiéramos obtenido el mismo resultado (55) usando

$$a_k = \frac{1}{10}\int_0^{10} 0{,}1x\cos\frac{k\pi x}{10}\,dx + \frac{1}{10}\int_{10}^{20} 0{,}1(20 - x)\cos\frac{k\pi x}{10}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{10}\int_0^{10} 0{,}1x\,\text{sen}\frac{knx}{10}\,dx + \frac{1}{10}\int_{10}^{20} 0{,}1(20 - x)\,\text{sen}\frac{k\pi x}{10}\,dx$$

El resto del caso (b) mencionado antes se trata en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Expanda la función del Ejemplo ilustrativo 3 en una serie seno de Fourier.

Solución Para hacer esto debemos usar la función definida en el Ejemplo ilustrativo 3 para el intervalo $0 \leqq x \leqq 20$, y luego extender la definición a la izquierda de $x = 0$ de modo que tendremos una función impar como se indica en la Figura 8.14. En tal caso el período es 40 de modo que $2L = 40$, $L = 20$. Tenemos así $a_k = 0$ y

$$b_k = \frac{2}{20}\int_0^{20} f(x)\,\text{sen}\frac{k\pi x}{20}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} 0.1x\,\text{sen}\frac{k\pi x}{20}\,dx + \frac{1}{10}\int_{10}^{20} 0.1(20 \quad x)\,\text{sen}\frac{k\pi x}{20}\,dx$$

Integración por partes produce $b_k = \dfrac{8\,\text{sen}\,k\pi/2}{k^2\pi^2}$

de modo que la serie de Fourier requerida es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\,\text{sen}\,k\pi/2}{k^2\pi^2}\,\text{sen}\frac{k\pi x}{20} \tag{58}$$

o

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\text{sen}\frac{\pi x}{20} - \frac{1}{3^2}\text{sen}\frac{37cx}{20} + \frac{1}{5^2}\text{sen}\frac{5\pi x}{20} - \cdots\right) \tag{59}$$

La serie converge para todo x a f(x) por el teorema de Dirichlet, puesto que f(x) es continua para todo x. En particular, para $x = 10$ la serie converge a 1.

Así tenemos

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \tag{60}$$

la cual produce el mismo resultado como en (57). Note que las series (55) y (58), aunque *lucen diferentes,* realmente representan la misma función para $0 \leqq x \leqq 20$.

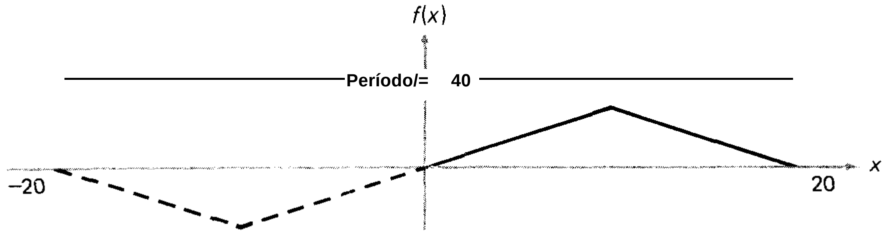


Figura 8.14

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Encuentre una serie de Fourier de período 8 para la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqq 4 \\ 4, & 4 \leqq x < 8 \end{cases}$$

Solución El gráfico de la función se muestra en la Figura 8.15, y se ve que no es par ni impar. Así la serie de Fourier tendría senos y cosenos presentes. Puesto aue el período es 8, tenemos $2L = 8$, $L = 4$. Entonces usando (48), página 391, con-c $= 0$, tenemos

$$a_k = \frac{1}{4}\int_0^8 f(x) \cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 x \cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{1}{4}\int_4^8 4 \cos\frac{k\pi x}{4}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{4}\int_0^8 f(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 x \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{1}{4}\int_4^8 4 \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{4}\,dx$$

Para $k = 0$ tenemos $\qquad a_0 = \frac{1}{4}\int_0^4 x\,dx + \frac{1}{4}\int_4^8 4\,dx = 6$

Para $k > 0$ tenemos al integrar por partes

$$a_k = \frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1), \qquad b_k = \frac{8}{k\pi}(\cos k\pi - 1)$$

Entonces la serie de Fourier deseada es

$$3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - \cos\frac{k\pi x}{4} + \frac{8}{k\pi}(\cos k\pi - 1)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{4}\right] \tag{61}$$

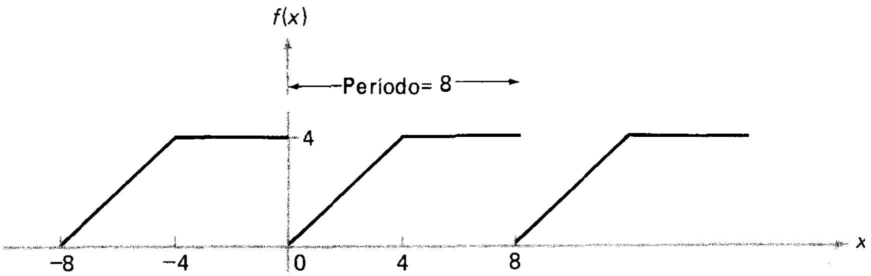


Figura 8.1 5

Observación 3. Para los puntos de discontinuidad $x = 0, \pm 8, \pm 16$, la serie converge para $\frac{1}{2}(4+0) = 2$ por el teorema de Dirichlet. Para cualquier otro valor de x la serie converge a f(x). Si deseamos podemos definir una nueva función

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqq 4 \\ 4, & 4 \leqq x < 8 \\ 2, & x = 0, 8 \end{cases}$$

Podemos decir entonces que la serie (61) es la serie de Fourier para $F(x)$ y que converge a $F(x)$ para todo x en el intervalo $0 \leqq x \leqq 8$.

La discusión general relacionada con series ortogonales en las páginas 380-385 se aplica por supuesto a las series de Fourier en particular. Una de las preguntas que surgió en esa discusión involucraba la complitud de un conjunto ortogonal (u ortonormal) de funciones. Para el caso de las series de Fourier podemos probar el siguiente

Teorema 2. El conjunto de funciones 1, $\cos\frac{k\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}$, donde $k = 1, 2, \ldots$ es un conjunto ortogonal completo en cualquier intervalo de longitud $2L$, *y* si f(z) satisface las condiciones de Dirichlet del teorema en la página 391, entonces la ***identidad de Parseval*** dada por

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} [f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \tag{62}$$

donde c es cualquier número real, es válida.

Formalmente, podemos deducir (62) al escribir la serie de Fourier para f(x), esto es,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{63}$$

Multipliquemos ahora ambos lados de (63) por f(x) e integremos de c a $c + 2L$ para obtener

$$\int_c^{c+2L} [f(x)]^2\, dx = \frac{a_0}{2}\int_c^{c+2L} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_c^{c+2L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx \tag{64}$$

De (48), página 391, tenemos

$$\int_c^{c+2L} f(x)dx = \frac{La_0}{2}, \qquad \int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = La_k, \qquad \int_c^{c+2L} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx = Lb_k$$

Entonces (64) llega a ser $\displaystyle\int_c^{c+2L} [J'(x)]2\ dx = \frac{La_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (La_k^2 + Lb_k^2)$

la cual produce (62) al dividir por L.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Escriba la identidad de Parseval correspondiente a la serie de Fourier del Ejemplo ilustrativo 4, página 397.

Solución Tenemos c = 0, L = 10 y $a_k = 0,\ b_k = \dfrac{8\operatorname{sen} k\pi/2}{k^2\pi^2}$

Entonces (62) llega a ser

$$\frac{1}{10}\int_0^{20} [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{64\operatorname{sen}^2 k\pi/2}{k^4\pi^4} = \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right) \tag{65}$$

Pero puesto que $\displaystyle\int_0^{20} [f(x)]^2\, dx = \int_0^{10} (0{,}1x)^2\, dx + \int_{10}^{20} [0{,}1(20 \quad x)]^2\, dx = \frac{20}{3}$

(65) llega a ser $$\frac{2}{3} = \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right)$$

la cual es la identidad de Parseval deseada. Esto produce el interesante resultado

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} \tag{66}$$

EJERCICIOS A

1. Obtenga expansiones en series de Fourier correspondientes a cada una de las siguientes funciones definidas en el intervalo indicado y teniendo el período por fuera de ese intervalo. Para cada caso (i) grafique la función, (ii) establezca si es par o impar, (iii) determine los puntos de discontinuidad si hay alguno, y (iv) dé los valores a los cuales la serie converge.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 < x < \pi \end{cases};\ 2\pi$ (b) $f(x) = 1,$ $-2 < x < 2$: 4

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \end{cases}$; 6 (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$; 2

(e) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$; 2π (f) $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 4 \\ -3, & 4 < x < 8 \end{cases}$; 8

(g) $f(x) = 4x \quad x^2, \quad 0 < x < 4$: 4 (h) $f(x) = \begin{cases} 1. & 0 < x < 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 < x < 4\pi/3; 2\pi \\ -1. & 4\pi/3 < x < 2\pi \end{cases}$

2. **Expanda** cada función definida en el intervalo indicado en series seno de Fourier o series coseno de Fourier como se indica. Dé los valores a los cuales cada serie converge.

(a) $f(x) = 5, \quad 0 < x < 3$ seno (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ coseno

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$ seno (d) $f(x) = 2, \quad 0 < x < 1$ coseno

(e) $f(x) = 4x - x^2, \quad 0 < x <$ seno (f) $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 4 \end{cases}$ coseno

3. Escriba la identidad de Parseval correspondiente a las series obtenidas en (a) Ejercicio l(a); (b) Ejercicio l(d); (c) Ejercicio l(g).

4. Obtenga los resultados (37), página 386, por integración directa.

EJERCICIOS B

1. Muestre que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right), \quad -\pi < x < \pi.$

Muestre por el teorema de Dirichlet que la igualdad se cumple en $x = \pm \pi$ y, por tanto, que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Muestre que si $a \neq 0, \pm 1, \pm 2,$

$$\frac{\pi \cos ax}{2a \operatorname{sen} a\pi} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\cos x}{1^2 - a^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - a^2} - \cdots, \quad -\pi < x < \pi$$

Muestre que la igualdad se cumple para $x = \pm \pi$ y pruebe por tanto que

$$\frac{1}{1^2 - a^2} + \frac{1}{2^2 - a^2} + \frac{1}{3^2 - a^2} + \cdots = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cot \pi a$$

3. **Expanda**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -L < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < L \end{cases}$$

en una serie de Fourier de período $2L$. ¿Qué pasa en $x = \pm L$?

4. Muestre que $e^x = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - n \operatorname{sen} nx}{n^2 + 1}\right), \quad 0 < x < 2\pi$

5. (a) Remplazando x por 2x-x en el Ejercicio 4, muestre que

$$\frac{\pi \cosh (\pi - x)}{2 \quad \operatorname{senh} \pi} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$$

(b) Pruebe que la igualdad se cumple para $x = 0$, y así evalúe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

6. Muestre usando la identidad de Parseval en el Ejercicio 1 que

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

7. Muestre que cualquier conjunto ortogonal debe ser linealmente independiente.

EJERCICIOS C

1. Un inductor L y un condensador C están en serie con una feín de período $2T$ dada por

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 < t < T \\ -E_0, & T < t < 2T \end{cases}$$

Si la carga en el condensador y la corriente son cero en $t = 0$ y si L, C, E_0, T son constantes, muestre que la carga está dada por

$$Q = \frac{4E_0}{\pi L\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \operatorname{sen} \omega_n t - \omega_n \operatorname{sen} \omega t}{(2n-1)(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

donde $\omega_n = (2n - 1)\pi/T$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Determine la corriente en cualquier tiempo. ¿Qué pasa cuando $\omega_n = \omega$ para algún n?

2. Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2}$. (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 5B.)

3. Sea $\phi_k(x)$, $k = 1, 2,$. un conjunto ortonormal en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ y sean α_k, $k = 1, 2,$. constantes cualesquiera. Muestre que si una función dada f(x) se aproxima en el intervalo por

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x)$$

entonces el error medio cuadrático $E_n = \frac{1}{b - a} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x) \right]^2 dx$

es mínimo cuando α_k está dado por $\qquad \alpha_k = c_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx$

esto es, las constantes determinadas de la expansión en serie de f(x) en términos de $\phi_k(x)$. ¿Qué supuestos debería hacer usted sobre las funciones? (*Sugerencia:* Haga cada derivada parcial de E_n con respecto a α_k igual a cero.)

4. (a) Use el hecho de que $E_n \geqq 0$ en el Ejercicio 3 para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

(b) Tomando el límite cuando n- ∞ en (a), deduzca que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$

El resultado a menudo se llama la *desigualdad* de *Bessel*, mientras que el caso especial de igualdad es la igualdad de Parseval, siendo la primera cierta aún si el conjunto ortonormal no es necesariamente completo.

(c) Usando (b) muestre que la serie infinita converge, y así

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx = 0$$

5. ¿Cómo probaría usted que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{1+x^2} dx = 0$?

6. Muestre que no puede haber ninguna función f(x) en el intervalo $-\pi < x < \pi$ tal que la integral $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx$ sea finita y cuya serie de Fourier sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$

4.3 SERIES DE BESSEL

De la página 373, sabemos que las funciones de Bessel

$$J_n(r_1x),\ J_n(r_2x),\ J_n(r_3x),\ \ldots \tag{67}$$

son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso x, donde r_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ son las raíces positivas sucesivas de cualquiera de las ecuaciones

$$J_n(x) = 0, \qquad J_n'(x) = 0, \qquad \mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0 \tag{68}$$

donde asumiremos que $n \geqq 0$ y $\mu > 0$. Esperaríamos por tanto ser capaces de expandir una función f(x) en una serie de estas funciones de Bessel, o como diremos una *serie de Bessel*, teniendo la forma

$$f'(x) = a_1J_n(r_1x) + a_2J_n(r_2x) + \cdots = \sum_{j=1} a_jJ_n(r_jx) \tag{69}$$

El método de obtener los coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ consiste en multiplicar (69) por $xJ_n(r_n x)$ y luego integrar de $x = 0$ a $x = 1$ para obtener

$$\int_0^1 xf(x)J_n(r_kx)dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^1 xJ_n(r_jx)J_n(r_kx)dx$$

Por la ortogonalidad la integral a la derecha es cero excepto para j = k, de modo que la serie a la derecha se reduce a un término y encontramos

$$\int_0^1 xf(x)J_n(r_kx)dx = a_k \int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx \quad \text{o} \quad a_k = \frac{\int_0^1 xf(x)J_n(r_kx)dx}{\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx} \tag{70}$$

El' valor del denominador en (70) se puede encontrar usando la Tabla 8.1. Los resultados se pueden justificar por el siguiente teorema, el cual es análogo al teorema de Dirichlet para las series de Fourier en la página 391.

Teorema 3. Sean f(x) y f'(x) seccionalmente continuas en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Entonces la serie a la derecha de (69) con coeficientes (70) converge a f(x) si x es un punto de continuidad y converge a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ si x es un punto de discontinuidad. En los puntos extremos $x = 0, 1$ la serie puede o no puede converger a $f(x)$, y esto requiere investigación especial.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Expanda f(x) = 1, $0 \leqq x \leqq 1$, en términos de las funciones $J_0(r_k x)$, k = 1, 2, 3,. , donde r_k son las raíces de $J_0(x) = 0$. Investigue la convergencia en los puntos extremos.

Solución Usando f(x) = 1, n = 0, los coeficientes (70) llegan a ser

$$a_k = \frac{\int_0 xJ_0(r_k x)dx}{\int_0^1 xJ_0^2(r_k x)dx} = \frac{2}{J_0'^2(r_k)}\int_0^1 xJ_0(r_k x)dx = \frac{2}{J_1^2(r_k)}\int_0^1 xJ_0(r_k x)dx \quad (71$$

donde hemos usado la entrada 1 de la Tabla 8.1 y también el resultado $J_0'(x) = -J_1$ (x) dado en el Ejercicio 2(a)A, página 346. Para evaluar la integral a la derecha de (71), sea $r_k x = u$. Luego usando el Ejercicio 2(b)A, pagina 346.

$$\int_0^1 xJ_0(r_k x)dx = \frac{1}{r_k^2}\int_0^{r_k} uJ_0(u)du = \frac{1}{r_k^2}\,uJ_1(u)\Big|_0^{r_k} = \frac{J_1(r_k)}{r_k}$$

de modo que (71) produce
$$a_k = \frac{2}{r_k J_1(r_k)} \tag{72}$$

Así (69) se reduce al interesante resultado

$$1 = \frac{2J_0(r_1 x)}{r_1 J_1(r_1)} + \frac{2J_0(r_2 x)}{r_2 J_1(r_2)} + \cdots = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(r_k x)}{r_k J_1(r_k)} \tag{73}$$

Por el Teorema 3, esto es válido para todo x tal que $0 < x < 1$, puesto que no hay puntos de discontinuidad en el intervalo. Para $x = 1$ la serie converge a 0, mientras que para $x = 0$ se puede mostrar que converge a 1.

Observación 4. Aunque hemos usado el intervalo básico para las series de Bessel como $0 < x < 1$ con posible convergencia en los puntos extremos de acuerdo con el Teorema 3 dado anteriormente, el intervalo efectivo de convergencia puede ser mayor. Así, por ejemplo, en el Ejemplo ilustrativo 7 la serie (73) converge para $0 \leqq x < 1$. Sin embargo, puesto que $J_0(x)$ es una función par fácilmente se ve que (73) converge para $-1 < x < 1$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Expanda f(x) = 1- x^2, $0 \leqq x \leqq 1$ en una serie de funciones $J_2(r_k x)$, donde r_k son las raíces de $3J_2(x) + xJ'_2(x) = 0$.

Solución En este caso n = 2 y el numerador de (70) llegar a ser

$$\int_0^1 x(1 - x^2)J_2(r_k x)dx = \int_0^1 xJ_2(r_k x)dx - \int_0^1 x^3 J_2(r_k x)dx$$
$$= \frac{1}{r_k^2}\int_0^{r_k} uJ_2(u)du - \frac{1}{r_k^4}\int_0^{r_k} u^3 J_2(u)du$$

al hacer $r_k x$ = u. Ahora si usamos los resultados

$$\int_0^{r_k} uJ_2(u)du = -2J_0(u) - uJ_1(u)\Big|_0^{r_k} = 2 - 2J_0(r_k) - r_k J_1(r_k) \tag{74}$$

$$\int_0^{r_k} u^3 J_2(u)du = u^3 J_3(u)\Big|_0^{r_k} = r_k^3 J_3(r_k) \tag{75}$$

tenemos $$\int_0^1 x(1-x^2)J_2(r_k x)dx = \frac{1}{r_k^2}\left[2 - 2J_0(r_k) - r_k J_1(r_k)\right] - \frac{J_3(r_k)}{r_k} \qquad (76)$$

El denominador de (70) se puede obtener de la entrada 3 de la Tabla 8.1, con $n = 2$, $\mu = 3$. Encontramos

$$\int_0^1 xJ_2^2(r_k x)dx = \frac{(r_k^2 + 5)J_2^2(r_k)}{2r_k^2} \qquad (77)$$

De (76) y (77) podemos encontrar a_k, y usando esto en (69) obtenemos la expansión en serie requerida

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 - 4J_0(r_k) - 2r_kJ_1(r_k) - 2r_kJ_3(r_k)}{(r_k^2 + 5)J_2^2(r_k)} J_2(r_k x)$$

para $0 < x \leqq 1$. Para $x = 0$ la serie converge a cero.

La identidad de Parseval también se puede escribir para las series de Bessel puesto que se puede mostrar que las funciones (67), página 403, constituyen un conjunto completo. Podemos obtener esta identidad formalmente elevando al cuadrado ambos lados de (69), multiplicando por x, y luego integrando con respecto a x de 0 a 1 usando la ortogonalidad de las funciones de Bessel. El resultado se da en el siguiente

Teorema 4. Sea f(x), $0 \leqq x \leqq 1$, que satisface las condiciones del Teorema 3, página 403. Entonces tenemos la ***identidad de Parseval***

$$\int_0^1 x[f(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_k^2 \qquad (78)$$

donde los coeficientes a_k se obtienen de (70) y d_k es el denominador de (70) dado por

$$d_k = \int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx \qquad (79)$$

En cualquier problema particular es por lo general más conveniente obtener la identidad de Parseval correspondiente a una expansión en serie dada directamente al elevar al cuadrado, multiplicar por x, y luego integrar de $x = 0$ a 1.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Escriba la identidad de Parseval correspondiente a la serie del Ejemplo ilustrativo 7.

Solución Eleve al cuadrado ambos, lados de (73), página 404, multiplique por x, e integre de $x = 0$ a 1. Entonces tenemos

$$\int_0^1 x(1)^2\, dx = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^2 J_1^2(r_k)} \int_0^1 xJ_0^2(r_k x)dx \qquad (80)$$

donde hemos omitido los términos de producto cruzado puesto que ellos son cero debido a la ortogonalidad de las funciones de Bessel. Puesto que

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_kx)dx = \tfrac{1}{2}J_0'^2(r_k) = \tfrac{1}{2}J_1^2(r_k)$$

(80) produce el interesante resultado

$$\frac{1}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k^2} \quad \text{o} \quad \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\cdots = \frac{1}{4} \tag{81}$$

donde $r_1, r_2, r_3, .$ son las raíces positivas sucesivas de $J_0(x) = 0$.

EJERCICIOS A

1. (a) Expanda $f(x) = x$, $0 < x < 1$, en una serie de funciones de Bessel $J_1(r_kx)$, donde r_k, $k = 1, 2, .$, son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$ para obtener

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(r_kx)}{r_kJ_2(r_k)}$$

(b) Muestre que la serie en (a) converge a f(x) $= x$ si $-1 \leqq x \leqq 1$.

2. Sean r_k, $k = 1, 2,$, las raíces positivas de $J_0(x) = 0$. Muestre que para $0 \leqq x \leqq 1$ tenemos

(a) $\dfrac{x}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(r_kx)}{r_k^2J_2(r_k)}$. (b) $\dfrac{x^2}{16} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_2(r_kx)}{r_k^3J_1(r_k)}$.

3. Expanda $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$ en una serie de funciones de Bessel $J_2(r_kx)$, donde r_k, $k = 1, 2,.$, son las raíces positivas de $J_2(x) = 0$, y muestre que la serie resultante también converge a $f(x)$ donde $-1 \leqq x \leqq 1$.

4. Muestre que para $-1 \leqq x \leqq 1$ $\quad \dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_kJ_2(r_k)J_1(r_kx)}{(r_k^2-1)J_1^2(r_k)}$

donde r_k, $k = 1, 2, .$, son las raíces positivas de $J_1'(x) = 0$.

5. Expanda $f(x) = 1$, $0 < x < 1$, en una serie de funciones de Bessel $J_0(r_kx)$, donde r_k, $k = 1, 2,.$, son las raíces positivas de $xJ_0'(x) + J_0(x) = 0$.

6. Usando la identidad de Parseval en el Ejercicio 1, muestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1'^2(r_k)}{r_k^2J_2^2(r_k)} = \frac{1}{8}$

'7. Escriba la identidad de Parseval correspondiente a la serie obtenida en (a) Ejercicio 2(a); (b) Ejercicio 3.

8. (a) Si r_k, $k = 1, 2,.$, son las raíces positivas de $J_3(x) = 0$, muestre que para $0 \leqq x \leqq 1$

$$x^3 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_3(r_kx)}{r_kJ_4(r_k)}$$

(b) Escriba la identidad de Parseval correspondiente al resultado en (a)

9. (a) Si r_k, $k = 1, 2,. .$, son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$, muestre que para $0 < x \leqq 1$

$$x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(r_k^2-4)J_0(r_kx)}{r_k^3J_1(r_k)}$$

(bì Escriba la identidad de Parseval correspondiente al resultado en (a).

1. (a) Si r_k, $k = 1, 2, .$, son las raíces positivas de $J,(x) = 0,$ muestre que para $-1 < x < 1$

$$\frac{1 - x^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(r_k x)}{r_k^3 J_1(r_k)}$$

(b) Muestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^3 J_1(r_k)} = \frac{1}{8}$

(c) Diferenciando el resultado en (a), obtenga el resulado en el Ejercicio 1A.

2. (a) Muestre que para $1 \leqq x \leqq 1$ $$\frac{x^3 - x}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(r_k x)}{r_k^3 J_0(r_k)}$$

donde r_k, $k = 1, 2,$ son las raíces positivas de $J, (n) = 0$

(b) Deduzca que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(r_k/2)}{r_k^3 J_0(r_k)} = -\frac{3}{128}$.

3. Expanda $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ en una serie de funciones de Bessel $J_0(r_k x)$, donde r_k, $k = 1, 2, .$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$, y use el resultado para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(r_k/2) J_1(r_k/2)}{r_k J_1^2(r_k)} = \frac{1}{2}$$

4. (a) Muestre que para $0 < x \leqq 1$ $$\ln x = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(r_k x)}{r_k^2 J_1^2(r_k)}$$

donde r_k, $k = 1, 2, .$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$. (b) Use la identidad de Parseval para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4 J_1^2(r_k)} = \frac{1}{8}$$

5. Expanda $f(x) = x^2$, $0 \leqq x \leqq 3$, en una serie de funciones de Bessel $J_0(r_k x)$, donde r_k, $k = 1, 2, . .$, son las raíces positivas de $J_0(3x) = 0.$

EJERCICIOS C

1. Sea r_k, $k = 1, 2, .$, las raíces positivas de $J,(x) = 0$, $n \geqq 0$. (a) Muestre que para $0 \leqq x \leqq 1$.

$$\frac{x^{n+1}}{4(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(r_k x)}{r_k^2 J_{n+1}(r_k)}$$

(b) Deduzca que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^2} = \frac{1}{4(n+1)}$ y así obtenga una generalización de (81), página 406.

2. Muestre que para $0 \leqq x \leqq 1$ $$\frac{J_0(ax)}{2J_0(a)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k J_0(r_k x)}{(r_k^2 - a^2) J_1(r_k)}$$

donde r_k, $k = 1, 2, . . .$, son las raíces positivas de $J,(x) = 0.$

3. Use la identidad de Parseval en el Ejercicio 2 para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^2}{(r_k^2 - a^2)^2} = \frac{J_0^2(a) + J_1^2(a)}{4}$$

4. Deduzca del Ejercicio 3 que si r_k, $k = 1, 2,.$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$, entonces

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^2} = \frac{1}{4}$. (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4} = \frac{1}{32}$. (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^6} = \frac{1}{192}$.

[Sugerencia: Para (a), haga a = 0; para (b) y (c), diferencie el resultado del Ejercicio 3 con respecto a a una y dos veces, respectivamente, y luego haga a = 0.]

5. Use el Ejercicio 4(c) para mostrar que el cero menos positivo de J,(x) es aproximadamente $\sqrt[6]{192}$ y compare con el valor dado en la página 343.

4.4 SERIES DE LEGENDRE

Puesto que los polinomios de Legendre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P,(x)$,. son mutuamente ortogonales en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, y se puede mostrar que constituyen un conjunto completo podríamos estar en capacidad de expandir una función $f(x)$ en una serie de estos polinomios dados por

$$f(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + \ldots = \sum_{j=0} a_jP_j(x) \tag{82}$$

y llamada una *serie de Legendre*. Los coeficientes a_j podrían entonces determinarse por un método ya familiar, esto es, multiplicando la serie por $P,(x)$ e integrando término a término de $x = -1$ a 1. Entonces encontramos

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)dx$$

Puesto que la integral a la derecha es cero para $j \neq k$, la serie se reduce a un solo término donde j = k de modo que

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = a_k \int_{-1}^{1} [P_k(x)]^2dx \ \ 0 \quad a_k = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx} \tag{83}$$

El denominador en (83) ya ha sido evaluado en la página 377 así que tenemos

$$a_k \ \frac{2k + 1}{2} \int_{1}^{1} f(x)P_k(x)dx \tag{84}$$

El resultado anterior se puede justificar por el siguiente teorema, el cual es análogo al teorema de Dirichlet para las series de Fourier en la página 391.

Teorema 5. Sean $f(r)$ y $f'(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. Entonces la serie a la derecha de (82) con coeficientes (84) convergen a $f(x)$ si x es un punto de continuidad, y converge a

$$\tfrac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$$

si x es un punto de discontinuidad. En los puntos extremos $x = \pm 1$ la serie puede o no puede converger a $f(x)$ y requieren investigación especial.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

Expanda $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ en una serie de polinomios de Legendre y examine la convergencia.

Solución De (84) encontramos que

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-1)P_k(x)dx + \int_0^1 (1)P_k(x)dx\right] \\ &= \frac{2k+1}{2}\left[\int_0^1 P_k(x)dx - \int_{-1}^{0} P_k(x)dx\right] \end{aligned} \tag{85}$$

Si deseamos podríamos ahora colocar $k = 0, 1, 2, \ldots$, y usar algunos de los primeros polinomios de la página 349 para encontrar $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Podemos, sin embargo, ahorrar algo del trabajo involucrado si notamos que $P_k(x)$ es una función par para k par, esto es, $k = 0, 2, 4, \ldots$, y una función impar para k impar, esto es, $k = 1, 3, 5, \ldots$, de modo que

$$\int_0^1 P_k(x)dx = \int_{-1}^{0} P_k(x)dx \qquad \text{para } k \text{ par},$$

$$\int_0^1 P_k(x)dx = -\int_{-1}^{0} P_k(x)dx \quad \text{para } k \text{ impar}$$

Sigue así de (85) que todos los a_k donde k es par son iguales a 0, y así solamente necesitamos ocuparnos de los a_k para k impar. En tales casos (85) da

$$a_k = (2k+1)\int_0^1 P_k(x)dx, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{86}$$

Colocando $k = 1, 3, 5, \ldots$ en (86) produce

$$a_1 = \tfrac{3}{2}, \qquad a_3 = -\tfrac{7}{8}, \qquad a_5 = \tfrac{11}{16}, \qquad a_7 = -\tfrac{75}{128}, \ldots$$

Así la expansión requerida es

$$f(x) = \tfrac{3}{2}P_1(x) - \tfrac{7}{8}P_3(x) + \tfrac{11}{16}P_5(x) - \tfrac{75}{128}P_7(x) + \cdots \tag{87}$$

Por el Teorema 5, la serie converge a 1 para $0 < x < 1$, y a -1 para $-1 < x < 0$, y converge a $\frac{1}{2}[(1) + (-1)] = 0$ para $x = 0$.

Observación 5. Los coeficientes a_k en (86) se pueden determinar exactamente usando la función generatriz para los polinomios de Legendre dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \tag{88}$$

Integrando (88) de $x = 0$ a 1 encontramos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1 P_k(x)dx\right]t^k = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \tag{89}$$

de modo que al evaluar la integral a la derecha

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1 P_k(x)dx\right]t^k = -\frac{1}{t}(1-2tx+t^2)^{1/2}\Bigg|_{x=0}^{1} = 1 + \frac{(1+t^2)^{1/2}-1}{t} \tag{90}$$

Ahora usando el teorema binomial (o equivalentemente la expansión en serie de Maclaurin), tenemos

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2!}u^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}u - \frac{1}{2\cdot 4}u^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}u^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}u^4 + \cdots \tag{91}$$

Si ahora hacemos $u = t^2$, vemos que el lado izquierdo de (90) es igual a

$$1 + \tfrac{1}{2}t - \frac{1}{2\cdot 4}t^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^7 + \cdots \tag{92}$$

Entonces igualando potencias similares de t en ambos lados conduce al resultado

$$\int_0^1 P_k(x)dx = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0, \quad \frac{1}{2} \text{ si } k = 1, \quad 0 \text{ si } k = 2, 4, 6, \ldots \\ (-1)^{(k-1)/2}\dfrac{1\cdot 3\cdots(k-2)}{2\cdot 4\cdots(k+1)} \quad \text{si } k = 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \tag{93}$$

Usando esto podemos escribir (87) como

$$f(x) = \tfrac{3}{2}P_1(x) + \sum_{k=3,5,\ldots}(-1)^{(k-1)/2}(2k+1)\frac{1\cdot 3\cdots(k-2)}{2\cdot 4\cdots(k+1)}P_k(x) \tag{94}$$

donde la suma a la derecha se toma sobre los enteros positivos impares 3, 5, . . .

En caso de que quisiéramos expandir un polinomio en una serie de polinomios de Legendre el resultado es una serie finita en vez de una serie infinita. Aunque el método anterior se puede usar en tal caso, también es posible proceder como en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 11

Expanda $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 10$, $-1 \leqq x \leqq 1$, en una serie de **Legendre.**

Solución Ya conocemos que

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}, \qquad P_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x$$

De estos tenemos

$$1 = P_0(x), \qquad x = P_1(x), \qquad x^2 = \tfrac{1}{3}P_0(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x), \qquad x^3 = \tfrac{3}{5}P_1(x) + \tfrac{2}{5}P_3(x)$$

Así

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 10 = 2[\tfrac{3}{5}P_1(x) + \tfrac{2}{5}P_3(x)] \quad 5[\tfrac{1}{3}P_0(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x)] + 3P_1(x) - 10P_0(x)$$

Simplificando el lado derecho conduce a la serie de Legendre requerida:

$$f(x) = -\tfrac{35}{3}P_0(x) + \tfrac{21}{5}P_1(x) - \tfrac{10}{3}P_2(x) + \tfrac{4}{5}P_3(x) \tag{95}$$

Podemos escribir la identidad de Parseval para la serie de Legendre puesto que el conjunto de polinomios de Legendre es un conjunto ortogonal completo. El teorema involucrado es el siguiente.

Teorema 6. Sea f(x), $-1 \leqq x \leqq 1$, que satisface las condiciones del Teorema 5, página 408. Entonces tenemos la ***identidad de Parseval***

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2k+1}\right) a_k^2 \tag{96}$$

donde los coeficientes a_k están dados por (84).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 12

Escriba la identidad de Parseval correspondiente a la serie del Ejemplo ilustrativo 10.

Solución La identidad requerida se puede obtener formalmente elevando al cuadrado la serie (94) e integrando término a término de $x = -1$ a $x = 1$, usando el hecho de que las integrales de términos de productos cruzados son cero debido a la ortogonalidad de los polinomios. Obtenemos así

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx = \frac{9}{4}\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx + \sum_{k=3,5,\ldots} (2k+1)^2 \left[\frac{1\cdot 3\cdots(k-2)}{2\cdot 4\cdots(k+1)}\right]^2 \int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx \tag{97}$$

o

$$\sum_{k=3,5,\ldots} (2k+1)\left[\frac{1\cdot 3\cdots(k-2)}{2\cdot 4\cdots(k+1)}\right]^2 = \frac{1}{4} \tag{98}$$

4.5 SERIES ORTOGONALES MISCELANEAS

Series ortogonales distintas a las de Fourier, Bessel y Legendre también surgen en aplicaciones. Por ejemplo, podemos tener ***series de Hermite y series de Laguerre*** correspondientes a los polinomios ortogonales de Hermite y Laguerre en la página 351. Las ideas de expansión de funciones en tales series son básicamente las mismas dadas anteriormente. Podemos también escribir la identidad de Parseval para tales series. Como una ilustración, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 13

Expanda f(x) $= x(1-x)$ en una serie de polinomios de Hermite.

Solución Método 1. Escriba $f(x) = a_0H_0(x) + a_1H_1(x) + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} a_jH_j(x)$.

Multiplicando ambos lados por $e^{-x^2}H_k(x)$ e integrando de $-\infty$ a ∞, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)H_k(x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_j(x)H_k(x)dx$$

Debido a los resultados en la página 378, el lado derecho se reduce a sólo un término, aquel para el cual $j = k$. Así tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)H_k(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_k(x)]^2\, dx = 2^k k!\sqrt{\pi}a_k$$

o

$$a_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)H_k(x)dx$$

Colocando $k = 0, 1, 2, \ldots$ (notando que $0! = 1$), obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x(1 - x)dx, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^2(1 - x)dx$$

$$a_2 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x(1 - x)(4x^2 - 2)dx, \ldots$$

Esto conduce a $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ y $a_k = 0$ para $k > 2$. Así

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}H_0(x) + \tfrac{1}{2}H_1(x) - \tfrac{1}{4}H_2(x)$$

***Método* 2.** Puesto que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$

sigue que $\qquad 1 = H_0(x), \quad x = \frac{1}{2}H_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{2}H_0(x) + \frac{1}{4}H_2(x)$

Así $\qquad x(1 - x) = x - x^2 = \frac{1}{2}H_1(x) - [\frac{1}{2}H_0(x) + \frac{1}{4}H_2(x)]$

o

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}H_0(x) + \tfrac{1}{2}H_1(x) - \tfrac{1}{4}H_2(x)$$

Claramente, el Método 2 es superior en el caso donde un polinomio se va expandir en una serie de Hermite. Para otras funciones, sin embargo, se debe usar el Método 1.

EJERCICIOS A

1. Expanda cada una de las siguientes funciones en una serie de Legendre y examine la convergencia.

   (a) $f(x) = 4x^2, -1 \leqq x \leqq 1.$ (b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 4, -1 \leqq x \leqq 1.$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 < x \leqq 1 \\ 0, & -1 \leqq x < 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 \leqq x < 0 \\ 3, & 0 < x \leqq 1 \end{cases}$

2. Expanda $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqq 1 \\ 0, & -1 \leqq x < 0 \end{cases}$ en una serie de Legendre y examine la convergencia.

3. Muestre que la expansión de $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqq 1 \\ -x, & -1 \leqq x < 0 \end{cases}$ en una serie de Legendre está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(4k + 1)}{2^{k+1}(k + 1)!} P_{2k}(x)$$

   y examine la convergencia.

4. Escriba la identidad de Parseval correspondiente al (a) Ejercicio I(a), y (b) Ejercicio 1(b).

5. Escriba la identidad de Parseval correspondiente al Ejercicio 3.

EJERCICIOS B

1. Expanda cada una de las siguientes en una serie de Hermite. (a) $f(x) = x^2 + 1$. (b) $f(x) = 5x5$.

2. Expanda cada una de las siguientes en una serie de Laguerre. (a) $f(x) = 3x^2 - 2x$. (b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$.

3. Escriba la identidad de Parseval correspondiente al (a) Ejercicio 1(a), y (b) Ejercicio 2(a).

4. Muestre que $P_n'(x) = (2n - 1)P_{n-1}(x) + (2n - 5)P_{n-3}(x) + (2n - 9)P_{n-5}(x) +$

5. Muestre que $xP_n'(x) = nP_n(x) + (2n - 3)P_{n-2}(x) + (2n - 7)P_{n-4}(x) +$

6. Si m y n son enteros los cuales son ambos pares o ambos impares y $m \leqq n$, muestre que

$$\int_{-1}^{1} P_m'(x)P_n'(x)dx = m(m + 1)$$

7. Muestre que la expansión de $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x^2, & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$ en una serie de Legendre está dada por

$$f(x) = \tfrac{3}{4}P_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \frac{4k + 3}{k + 2} P_{2k+1}(x)$$

y examine la convergencia

EJERCICIOS C

1. Si $m > -1$ y $n = 2, 3, 4, \ldots$, muestre que

$$\int_0^1 x^m P_n(x)dx = \frac{m(m - 1)\cdots(m - n + 2)}{(m + n + 1)(m + n - 1)\cdots(m \quad n + 3)}$$

2. Si $k = 0, 1, 2, \ldots$, muestre que

$$x^k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k + 1)}\left[(2k + 1)P_k(x) \cdot t \frac{2k + 1}{2 \cdot 1!}(2k - 3)P_{k-2}(x) + \frac{(2k + 1)(2k \quad 1)}{2^2 \cdot 2!}(2k - 7)P_{k-4}(x) + \right]$$

3. Muestre que $$nP_n(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta P_{n-k}(\cos\theta)$$

4. Use los resultados del Ejercicio 3C, página 380, para mostrar cómo expandir una función en una *serie de Chebysheu, y* escriba la correspondiente identidad de Parseval. Ilustre usando una función particular.

5 Algunos tópicos especiales

5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES A SI MISMO ADJUNTAS

Considere la ecuación diferencial

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = F(x) \tag{1}$$

donde a_0, a_1, a_2 son funciones de x. Si podemos escribir el lado izquierdo de (1) como una diferencial exacta, esto es

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = D(b_0 y' + b_1 y) \tag{2}$$

para funciones apropiadas de x denotadas por b_0, b_1, entonces (1) será inmediatamente integrable. Veamos si podemos encontrar una condición bajo la cual esto se puede hacer. Expandiendo el lado derecho de (2) tenemos

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 y'' + (b_0' + b_1)y' + b_1' y$$

Puesto que esto debe ser una identidad, sigue que

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_0' + b_1, \qquad a_2 = b_1' \tag{3}$$

Diferenciando la segunda ecuación produce $a'_1 = b''_0 + b'_1$, de lo cual obtenemos, al sustituir $b_0 = a_0$, $b'_1 = a_2$,

$$a_0'' \quad a_1' + a_2 = 0 \tag{4}$$

Recíprocamente, si nos dan (4), entonces podemos escribir

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = D[a_0 D + (a_1 - a_0')]y \tag{5}$$

Por analogía con las ecuaciones diferenciales lineales de Primer orden, llamamos la ecuación diferencial (1), donde el lado izquierdo se puede escribir como una diferencial exacta, una ***ecuación diferencial exacta.*** Debido a las observaciones anteriores tenemos el siguiente

Teorema 1. La ecuación diferencial

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = F(x) \tag{6}$$

es exacta si y sólo si

$$a_0'' - a_1' + a_2 = 0 \tag{7}$$

donde las derivadas indicadas de a_0 y a_1 se asume que existen.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (x + 2)y' + y = 4x$.

Solución Comparando esta ecuación con (1), tenemos $a_0 = x$, $a_1 = x + 2$, $a_2 = 1$, de modo que

$$a_0'' - a_1' + a_2 = 0$$

y la ecuación es exacta. Así ésta se puede escribir $D[xD + (x + 1)]\, y = 4x$.

Integrando encontramos

$$x\frac{dy}{dx} + (x + 1)y = 2x^2 + c_1 \quad 0 \quad \frac{dy}{dx} + \left(\frac{x + 1}{x}\right) y = 2x + \frac{c_1}{x}$$

Esta última ecuación tiene factor integrante $e^{\int (x+1)/x\, dx} = xe^x$ así que ésta se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(xe^x y) = 2x^2e^x + c_1e^x$$

Integrando esto da

$$xe^x y = 2(x^2 - 2x + 2)e^x + c_1e^x + c_2 \quad 0 \quad y = \frac{2(x^2 - 2x + 2)}{x} + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2e^{-x}}{x}$$

En el caso de que (1) no sea exacta, puede ser posible multiplicar la ecuación por alguna función apropiada de x denotada por μ de modo que la ecuación resultante

$$(a_0\mu)y'' + (a_1\mu)y' + (a_2\mu)y = \mu F(x) \tag{8}$$

sea exacta. Por analogía con las ecuaciones de primer orden, llamamos a μ un factor integrante. Del Teorema 1 vemos que (8) es exacta si y sólo si

$$(a_0\mu)'' - (a_1\mu)' + a_2\mu = 0 \tag{9}$$

Llamamos esta ecuación diferencial para la función desconocida la ***adjunta*** de (1). Podemos resumir esto en la siguiente

Definición 1. La ***adjunta*** de la ecuación diferencial

$$a_0y'' + a_1y' + a_2 J' = F(X) \tag{10}$$

es

$$(a_0\mu)'' - (a_1\mu)' + a_2\mu = 0 \tag{11}$$

Una consecuencia de esto es que si podemos encontrar una solución no cero de la adjunta (ll) entonces podemos resolver la ecuación (10).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Dado

$$y'' + y = \csc x \tag{12}$$

(a) Escriba su adjunta. (b) Use (a) para encontrar un factor integrante y así resuelva (12).

Solución (a) Comparando (12) con (1) vemos que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Entonces de (ll) la adjunta es

$$\mu'' + \mu = 0 \tag{13}$$

(b) Una solución particular de (13) es sen x, la cual podemos usar como un factor integrante de (12). Multiplicando (12) por sen x encontramos

$$(\operatorname{sen} x)y'' + (\operatorname{sen} x)y = 1$$

la cual se ve fácilmente que es'exacta. Podemos escribirla como

$$D[\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y] = 1$$

La integración produce $(\operatorname{sen} x)\, y' - (\cos x)\, y = x + c_1$

Dividiendo por sen x, vemos que $e^{-\int \cot x\,dx} = e^{-\ln \operatorname{sen} x} = \csc x$ es un factor integrante. Así tenemos

$$\frac{d}{dx}[y \csc x] = x \csc^2 x + c_1 \csc^2 x$$

Integrando, $\quad y \csc x = -x \cot x + \ln \operatorname{sen} x - c_1 \cot x + c_2$

o $\quad y = -x \cos x + \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x - c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

En forma expandida la ecuación diferencial (ll) se puede escribir como

$$a_0\mu'' + (2a_0' - a_1)\mu' + (a_0'' - a_1' + a_2)\mu = 0 \tag{14}$$

o

$$[a_0D^2 + (2a_0' - a_1)D + a_0'' - a_1' + a_2]\mu = 0 \tag{15}$$

Esto nos lleva a la siguiente

Definición 2. El adjunto del operador $a_0D^2 + a_1D + a_2$ es el operador

$$a_0D^2 + (2a_0' - a_1)D + a_0'' - a_1' + a_2 \tag{16}$$

En el caso de que estos operadores sean lo mismo, se llaman operadores ***a sí mismo adjuntos.***

Claramente, los operadores en esta definición son a sí mismo adjuntos si y sólo si $\quad a_0D^2 + a_1D + a_2 = a_0D^2 + (2a_0' - a_1)D + a_0'' - a_1' + a_2$

o $\quad a_1 = 2a_0' - a_1, \qquad a_2 = a_0'' - a_1' + a_2$

esto es, $\quad a_1 = a_0'$

En tal caso los operadores se pueden escribir

$$a_0D^2 + a_0'D + a_2 = D(a_0D) + a_2 \tag{17}$$

Tenemos así el siguiente

Teorema 2. Un operador $a_0D^2 + a_1D + a_2$ *es* un ***operador a sí mismo adjunto*** si y sólo si $a_1 = a_0'$, esto es, el operador se puede escribir en la forma

$$D(a_0D) + a_2 \equiv \frac{d}{dx}\left(a_0 \frac{d}{dx}\right) + a_2 \tag{18}$$

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden en la cual el operador es a sí mismo adjunto es con frecuencia por razones obvias llamada una ***ecuación diferencial a sí mismo adjunta. Se*** ve que la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q(x)y = -\lambda y \tag{19}$$

es una ecuación diferencial a sí mismo adjunta. Así toda la teoría ya desarrollada relacionada con eigenvalores y eigenfunciones, ortogonalidad y series ortogonales, etc., está relacionada con la teoría de operadores a sí mismo adjuntos.

Suponga que nos dan un conjunto de funciones de x linealmente independientes en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ y denotadas brevemente por

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{20}$$

Entonces es posible generar a partir de ellas un nuevo conjunto de funciones ortonormales en el intervalo. El método de hacer esto, el cual es bastante simple, se llama a menudo el ***método de ortonormalización de Gram-Schmidt.*** La primera etapa en el método es construir a partir de (20) el nuevo conjunto de funciones dadas por

$$\phi_1 = c_{11}\psi_1, \qquad 42 = c_{21}\psi_1 + c_{22}\psi_2, \qquad \phi_3 = \phi_{31}\psi_1 + c_{32}\psi_2 + c_{33}\psi_3, \ldots \tag{21}$$

donde los c's son constantes. Note que para obtener la n-ésima función en (21) multiplicamos cada una de las primeras n funciones en (20) por constantes y sumamos los resultados. Debemos determinar ahora las constantes en (21) de modo que las funciones sean mutuamente ortogonales y normalizadas en el intervalo dado. Podemos hacer esto sistemáticamente escribiendo la condición de que la k-ésima función ϕ_k en (21) sea ortogonal con cada una de las k 1 funciones precedentes $\phi_1, \phi_2, , \phi_{k-1}$, lo cual conduce a las relaciones entre las constantes. Finalmente, normalizamos cada función. Ilustremos el procedimiento en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Use el método de Gram-Schmidt sobre el conjunto de funciones 1, x, x^2, x^3,. para generar un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$.

Solución Como en (21) construimos a partir del conjunto'de funciones dado el conjunto

$$\phi_1 = c_{11}, \qquad \phi_2 = c_{21} + c_{22}x, \qquad \phi_3 = c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2, . \tag{22}$$

Para que ϕ_1 sea ortogonal con ϕ_2 debemos tener

$$\int_{-1}^{1} \phi_1\phi_2\, dx = \int_{-1}^{1} c_{11}(c_{21} + c_{22}x)dx = 2c_{11}c_{21} = 0$$

Puesto que $c_{11} \neq 0$, de otra manera tendríamos $\phi_1 = 0$, debemos tener $c_{21} = 0$ de modo que

$$\phi_2 = c_{22}x$$

Para que ϕ_3 sea ortogonal con ϕ_1 y ϕ_2, debemos tener

$$\int_{-1}^{1} \phi_1\phi_3\, dx = \int_{-1}^{1} c_{11}(c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2)dx = 2c_{11}(c_{31} + \tfrac{1}{3}c_{33}) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_2\phi_3\, dx = \int_{-1}^{1} c_{22}x(c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2)dx = \tfrac{2}{3}c_{22}c_{32} = 0$$

Puesto que $c_{22} \neq 0$, de otra manera tendríamos $\phi_2 = 0$, vemos de estas que $c_{31} = \frac{1}{3}c_{33}$ y $c_{32} = 0$ de modo que

$$\phi_3 = c_{33}(x^2 \quad \tfrac{1}{3})$$

Continuando de esta manera podemos encontrar

$$\phi_4 = c_{44}(x^3 - \tfrac{6}{5}x), \qquad \phi_5 = c_{55}(x^4 - \tfrac{6}{7}x^2 + \tfrac{3}{35}), \ldots$$

Normalizamos ahora las funciones escogiendo las constantes de modo que

$$\int_{-1}^{1} \phi_k^2\, dx = 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Si esto se hace, encontramos

$$\phi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \phi_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \qquad \phi_3 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right),$$

$$\phi_4 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5x^3 - 3x}{2}\right), \qquad \phi_5 = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}\left(\frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}\right), \ldots$$

Los polinomios que aparecen aquí, aparte de las constantes multiplicativas que involucran la raíz cuadrada, son los *polinomios de Legendre* ya obtenidos en una manera diferente en la página 348.

EJERCICIOS A

1. Muestre que cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales es exacta y así obtenga su solución.
   (a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 12x$. (b) $xy'' + (2x + 1)y' + 2y = 3x - 5$. (c) $(\operatorname{sen} x)y'' + 3(\cos x)y' - 2(\operatorname{sen} x)y = 5\cos x$.
2. Muestre que cada una de las siguientes ecuaciones no es exacta pero puede hacerse exacta al multiplicarla por el factor integrante indicado. Resuelva así cada ecuación.
   (a) $xy'' + (x + 2)y' + 2y = 6x$; x. (b) $y'' + y = \cot x$; $\operatorname{sen} x$.
3. (a) Encuentre la adjunta de la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0$. (b) Determinando una solución de esta adjunta, resuelva la ecuación original.
4. Muestre que la ecuación del Ejercicio 1(a) es también exacta si se multiplica por x, y obtenga su solución por este método.
5. Muestre que si la ecuación diferencial de Bessel se escribe como $xy'' + y' + xy = 0$ entonces es a sí mismo adjunta, pero si se escribe como $y'' + (1/x)y' + y = 0$, no es a sí mismo adjunta. Explique.
6. Dado el conjunto de funciones $1, x^2, x^4, \ldots$ Obtenga a partir de éste un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. ¿Están las funciones relacionadas con los polinomios de Legendre?
7. Trabaje el Ejercicio 6 para el conjunto de funciones $x, x^3, x^5, \ldots$

EJERCICIOS B

1. Pruebe que la adjunta de la adjunta de un operador de segundo orden $\phi(D)$ *es d(D).*
2. (a) Encuentre la adjunta de $y'' - x^2y' + xy = 0$.
   (b) Notando que $y = x$ es una solución a la ecuación en (a), resuelva la ecuación adjunta.
3. Generalice el Ejercicio 2 considerando la ecuación $y'' - xg(x)y' + g(x)y = 0$.
4. Resuelva $y'' + (x \operatorname{sen} x)y' + (x\cos x + 2\operatorname{sen} x)y = 0$.

5. Encuentre un factor integrante de la forma x^p para la ecuación $x^5y'' + (2x^4 - 8x)y' + (8 - 2x^3)y = 0$ y obtenga así su solución.

6. Dado el conjunto de funciones 1, $x, x^2, x^3, .$ (a) Obtenga a partir de este un conjunto de funciones mutuamente ortogonales en $0 \leqq x < \infty$ con respecto a la función peso e^{-x} y dé el correspondiente conjunto ortonormal. (b) ¿Puede usted reconocer el conjunto de funciones?

7. Trabaje el Ejercicio 6 en el caso de que el intervalo sea $-\infty < x < \infty$ y la función peso sea e^{-x^2}.

EJERCICIOS C

1. ¿Puede una ecuación diferencial de segundo orden lineal tener más de dos factores integrantes linealmente independientes? Justifique su conclusión.

2. Dada la ecuación diferencial de tercer orden lineal $a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = F(x)$ donde a_0, a_1, a_2, $F(x)$ son funciones de x. Como en el caso de segundo orden esta ecuación se llama ***exacta*** si el lado izquierdo es una derivada exacta, esto es, se puede escribir como $D(b_0y'' + b_1y' + b_2y)$ para funciones apropiadas b_0, b_1, b_2. Pruebe que esta ecuación de tercer orden es exacta si y sólo si

$$a_0''' - a_1'' + a_2' - a_3 \equiv 0$$

3. Use el Ejercicio 2 para resolver $xy''' + (x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = 24x$.

4. Si la ecuación de tercer orden del Ejercicio 2 no es exacta, puede ser posible hacerla exacta al multiplicarla por un factor integrante μ. Muestre que μ debe ser una solución de la ecuación

$$(a_0\mu)''' - (a_1\mu)'' + (a_2\mu)' - a_3\mu = 0$$

la cual se llama la adjunta de la ecuación dada. Use esto para resolver

$$(x^3 - x)y''' + (7x^2 - 3)y'' + 10xy' + 2y = 0$$

5. Generalice el concepto de exactitud, factor integrante, y adjunta a cualquier ecuación diferencial lineal de orden n.

6. Responda el Ejercicio 1 para ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

7. Investigue la idea de operadores y ecuaciones diferenciales a sí mismo adjuntos para los casos donde el orden es 3, 4, o mayor.

8. Explique cómo generaría usted los ***polinomios de Chebyshev*** descritos en el Ejercicio 3C, página 380, usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Obtenga algunos de los primeros polinomios usando el procedimiento.

nueve

la solución numérica de ecuaciones diferenciales

En muchos campos de investigación científica el producto final es un número o una tabla de valores. Puesto que las ecuaciones diferenciales juegan una parte importante en las investigaciones científicas, naturalmente parecería deseable aprender cómo las ecuaciones diferenciales se pueden resolver numéricamente. Esto es de un valor aún mayor cuando nos damos cuenta que ahora hay disponibles máquinas de computación maravillosas que ayudan extraordinariamente en las laboriosas tareas de trabajo numérico. Algunas de estas máquinas calculan tablas de valores y pueden aún graficar resultados en un porcentaje muy pequeño del tiempo que requeriría un computador ordinario. El hecho de que las máquinas alivien el trabajo, sin embargo, no significa que el operador necesite conocer menos acerca de los métodos numéricos. Por el contrario él debería conocer mucho acerca de los varios métodos puesto que él debe conocer la manera más eficiente de "alimentar" las matemáticas dentro de la máquina.

Un estudio de las técnicas de análisis numérico es un campo extenso en sí mismo. En un libro como este podemos dar sólo una breve introducción a este importante tema.

1 Solución numérica de $y' = f(x, y)$

En esta sección nos restringimos a estudiar la solución numérica de la ecuación diferencial de primer orden* $y' = f(x, y)$. Hacemos la

Pregunta. Dado que una solución de $y' = f(x, y)$ es tal que y es igual a c donde $x = a$, ¿cómo podemos determinar el valor de y cuando $x = b$?

Por integración de la ecuación diferencial con respecto a x tenemos †

$$y = c + \int_a^x f(x, y)dx \tag{1}$$

y es claro que $y = c$ cuando $x = a$ de modo que (1) satisface la condición requerida. El valor de y cuando $x = b$ debe estar dado por

$$y = c + \int_a^b f(x, y)dx \tag{2}$$

Desafortunadamente, puesto que y ocurre bajo el signo de la integral de (2), no podemos seguir adelante sin alguna clase de aproximación. Cada tipo de aproximación usada en (2) determina un método de análisis numérico. Primero examinamos uno de estos métodos, el cual llamamos el ***método de pendiente constante o método de Euler.***

*Suponemos que $f(x, y)$ satisface las condiciones del teorema fundamental de existencia y unicidad de la página 24. Si la solución no existe o no es única no hay objeto en intentar una solución numérica.

† En la integral (1) estamos usando el símbolo x como un símbolo mudo en la integración como también para la variable independiente. Podríamos por supuesto haber usado un símbolo diferente, por ejemplo μ, para denotar la variable muda y escribir

$$y = c + \int_a^x f(u, y)du$$

Sin embargo, no debería surgir confusión. Compare con el pie de página en la página 320

Asumamos que el intervalo de $x = a$ a $x = b$ se subdivide en n partes iguales, cada una de longitud h, de modo que

$$h = \frac{b - a}{n} \quad o \quad b = a + nh \tag{3}$$

Llamamos h el ***tamaño de paso*** y n el ***número de pasos.*** Entonces (2) llega a ser

$$y = c + \int_a^{a+nh} f(x, y)dx \tag{4}$$

Si usamos solamente un paso, esto es, n= 1, esto llega a ser

$$y = c + \int_a^{a+h} f(x, y)dx \tag{5}$$

La aproximación más simple para tomar en (5) es asumir que la pendiente $f(x, y)$ es constante sobre el intervalo $a \leqq x \leqq a + h$ e igual a la pendiente en el punto donde $x = a$, $y = c$, esto es, $f(a, c)$. En este caso (5) llega a ser

$$y = c + \int_a^{a+h} f(a, c)dx = c + hf(a, c) \tag{6}$$

Esto se llama el ***método de pendiente constante*** ó, puesto que fue primero usado por Euler, el ***método de Euler.*** Claramente, (6) le dará una buena aproximación al valor de y en $x = a + h$ solamente si h es pequeña. El grado de pequeñez evidentemente depende del grado de precisión deseado. Por tanto la palabra "pequeño" debe necesariamente ser vago hasta que se disponga de mayor información.

La interpretación gráfica de (6) se ve en la Figura 9.1. La solución verdadera se representa por la curva punteada AE. Puesto que la distancia $AD = h$ es fácil de ver que el valor de y correspondiente a (6) está representado por la ordenada QB. El error cometido está dado por BE. Esto se hace más pequeño a medida que h se hace más pequeño. Si h es grande, el error cometido es grande. Si la longitud del intervalo de a a b es grande, parecería natural tomar valores más pequeños de h correspondiendo a un incremento en el nú-

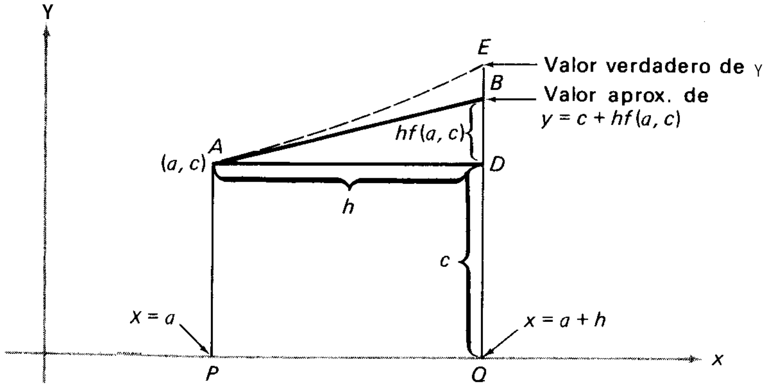


Figura 9.1

mero de pasos, esperando de esta manera disminuir el error involucrado. Con esta idea en mente nos lleva a escribir (4) como

$$y = c + \int_a^{a+h} f(x, y)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x, y)dx + \cdots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x, y)dx \qquad (7)$$

Usando la aproximación descrita en la página 422 para cada una de las integrales en (7), vemos que una aproximación a (7), está dada por

$$y = c + hf(a, c) + hf(a + k, c_1) + hf(a + 2h, c_2) + \ldots + hf(a + (n - 1)h, c_{n-1}) \qquad (8)$$

donde c, es el valor de y cuando $x = a + jh, j = 1, 2, ., n - 1$.

La interpretación geométrica de (8) está dada en la Figura 9.2. Por una aplicación de (6), vemos que $A_1 B_1 = hf(a, c)$, la ordenada del punto B_1 estando dada por

$$c_1 = c + hf(a, c)$$

Se computa ahora una nueva pendiente correspondiente al punto B_1, cuyas coordenadas son $(a + h, c_1)$; el valor de esta pendiente está dado por $f(a + h, c_1)$. Usando esto, llegamos al punto B_2, la distancia A_2B_2 dada por $hf(a + h, c_1)$. Puesto que la ordenada de B_2 es la ordenada de B_1 más la distancia A_2B_2, la ordenada de B_2 es

$$c_2 = c + hf(a, c) + hf(a + k, c_1)$$

Similarmente, la ordenada del punto B_j es

$$c_j = c + hf(a, c) + hf(a + h, c_1) + \ldots + hf(a + (j - 1)h, c_{j-1})$$

y en particular

$$c_n = c + hf(a, c) + hf(a + k, c_1) + \ldots + hf(a + (n - 1)h, c_{n-1})$$

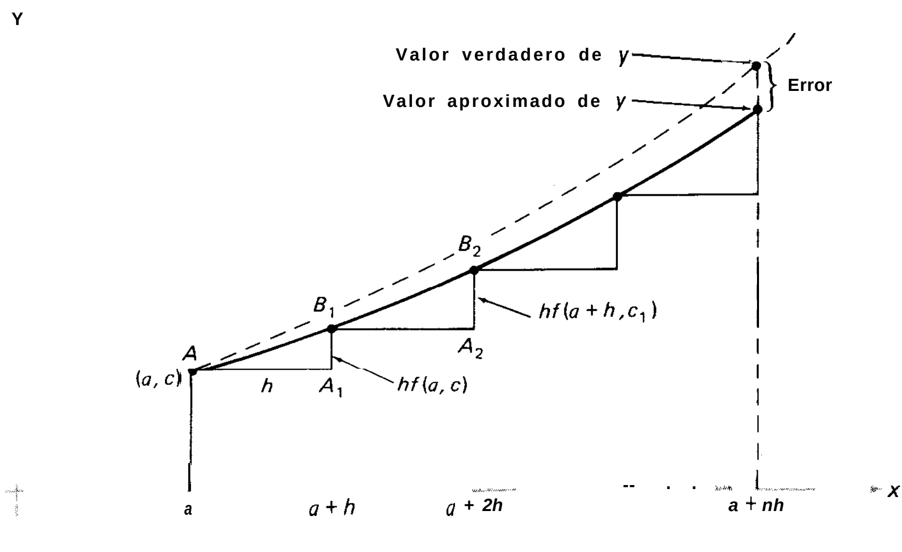


Figura 9.2

es la ordenada alcanzada después de n pasos, la cual es el valor de y dado en (8). Si usamos la notación $a_j = a + jh$, $j = 1, 2, \ldots$, esto se puede escribir simplemente como

$$c_n = c + hf(a, c) + hf(a_1, c_1) + \cdots + hf(a_{n-1}, c_{n-1})$$

A pesar de la simplicidad de este método los resultados obtenidos pueden ser buenos, llegando la precisión a ser mejor en general a medida que n se escoge más grande. Para un valor grande de n, sin embargo, aunque la precisión puede ser mayor el cómputo llega a ser más laborioso y por tanto se debe alcanzar un compromiso. El método se adapta bien a computadores y no es difícil de programarlo. Ilustremos el método en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Dado $y' = x + y$, encuentre el valor de y correspondiente a $x = 1$ si $y = 1$ donde $x = 0$.

Solución Aquí $a = 0$, $b = 1$. Nos gustaría escoger n para que $h = (b - a)/n$ sea pequeño. Es conveniente escoger $n = 10$ para que $h = 0{,}1$. El cómputo se puede entonces organizar como en la Tabla 9.1.

La condición inicial $x = 0$, $y = 1$ determina una pendiente $y' = x + y$ (primera línea de la tabla). Puesto que el incremento en x es $0{,}1$, el nuevo valor de y, el cual denotamos por y_{nuevo}, se obtiene del valor de y denotado por y_{viejo}, como

$$y_{\text{nuevo}} = y_{\text{viejo}} + 0{,}1\,(\text{pendiente}) = 1{,}00 + 0{,}1(1{,}00) = 1{,}10$$

Tabla 9.1

x	y	$y' = x + y$	y_{viejo} + 0,1(pend.) = y = y_{nuevo}
0,00	1,00	1,00	$1{,}00 + 0{,}1(1{,}00) = 1{,}10$
0,10	1,10	1,20	$1{,}10 + 0{,}1(1{,}20) = 1{,}22$
0,20	1,22	1,42	$1{,}22 + 0{,}1(1{,}42) = 1{,}36$
0,30	1,36	1.66	$1{,}36 + 0{,}1(1{,}66) = 1{,}53$
0,40	1,53	[illegible]	$1{,}53 + 0{,}1(1{,}93) = 1{,}72$
0,50	1,72	2,22	$1{,}72 + 0{,}1(2{,}22) = 1{,}94$
0,60	1,94	2,54	$1{,}94 + 0{,}1(2{,}54) = 2{,}19$
0,70	2,19	2.89	$2{,}19 + 0{,}1(2{,}89) = 2{,}48$
0,80	2,48	3,28	$2{,}48 + 0{,}1(3{,}28) = 2{,}81$
0,90	2,81	3,71	$2{,}81 + 0{,}1(3{,}71) = 3{,}18$
1,00	3,18		

Este valor de y se transfiere luego a la segunda línea de la tabla y el proceso se repite. En la Tabla 9.1 hemos mantenido tres cifras significativas; el valor obtenido para y correspondiente a $x = 1$ es 3,18. Resolviendo exactamente se puede verificar que el valor verdadero de y donde $x = 1$ es 3,44; el error es por tanto alrededor del 8 por ciento. Si hubiéramos usado $n = 20$, la precisión se hubiera incrementado considerablemente pero el cómputo involucrado hubiera sido el doble.

1.2 EL METODO DE PENDIENTE PROMEDIO 0 METODO MODIFICADO DE EULER

En el método anterior la pendiente $f(x, y)$ sobre el intervalo $a \leqq x \leqq a + h$ se remplazó por $f(a, c)$ de modo que el valor de y en $x = a + h = a_1$ resultó ser

$$c_1 = c + hf(a, c) \tag{9}$$

Una mejor aproximación se obtiene si remplazamos $f(x, y)$ por el promedio de las pendientes en los puntos extremos correspondientes a $x = a$ y $x = a_1 = a + h$, los cuales están dados, respectivamente, por $f(a, c)$ y $f(a_1, c_1)$. Así

$$\text{pendiente promedio} = \frac{f(a, c) + f(a_1, c_1)}{2} \tag{10}$$

donde $a_1 = a + h$ y c_1 está dado por (9). Usando (10) como el valor aproximado de $f(x, y)$, el valor de y en $x = a + h = a_1$ está dado por

$$y = c + \int_a^{a+h} \left[\frac{f(a, c) + f(a_1, c_1)}{2}\right] dx = c + h\left[\frac{f(a, c) + f(a_1, c_1)}{2}\right] \tag{11}$$

Este proceso de usar pendientes promedio se puede continuar para los intervalos sucesivos $a + h \leqq x \leqq a + 2h$, $a + 2h \leqq x \leqq a + 3h$, etc., hasta que finalmente se tenga el valor de y para $x = a + nh = b$. Por ejemplo, en el intervalo $a + h \leqq x \leqq a + 2h$, el cual escribimos como $a_1 \leqq x \leqq a_2$, (10), se remplaza por

$$\text{pendiente promedio} = \frac{f(a_1, c_1) + f(a_2, c_2)}{2} \tag{12}$$

donde
$$c_2 = c_1 + hf(a_1, c_1) \tag{13}$$

y el valor de y en $x = a + 2h = a_2$ está dado por

$$c_1 + h\left[\frac{f(a_1, c_1) + f(a_2, c_2)}{2}\right] \tag{14}$$

Resultados similares se pueden escribir para intervalos posteriores.

Por razones obvias este método se llama el *método de pendiente promedio*, pero también se refiere como *el método modificado de Euler.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 1, página 424, usando el método de pendiente promedio.

Tabla 9.2

x	Y	Pendiente izquierda	y_{nuevo}	Pendiente derecha $f(x_{nuevo}\ y_{nuevo})$	Pendiente promedio y'_{av}	$y_{viejo} + 0.1(y'_{av}) = y_{corr}$
0,00	1,00	1,00	1,10	1,20	1,10	1,00 + 0,1(1,10) = 1,11
0,10	1,11	1,21	1,23	1,43	1,32	1,11 + 0,1(1,32) = 1,24
0,20	1,24	1,44	1,38	1,68	1,56	1,24 + 0,1(1,56) = 1,40
0,30	1,40	1,70	1,57	1,97	1,84	1,40 + 0,1(1,84) = 1,58
0,40	1,58	1,98	1,78	2,28	2,13	1,58 + 0,1(2,13) = 1,79
0,50	1,79	2,29	2,02	2,62	2.46	1,79 + 0,1(2,46) = 2.04
0,60	2,04	2,64	2,30	3,00	2,82	2,05 + 0,1(2,82) = 2,33
0,70	2,33	3,03	2,63	3,43	3,23	2,33 + 0,1(3,23) = 2,65
0,80	2,65	3,45	2,99	3,89	3,67	2,65 + 0,1(3,67) = 3,02
0,90	3,02	3,92	3,41	4,41	4,16	3,02 + 0,1(4,16) = 3,44
1,00	3,44					

Solución En este caso escojamos también $n = 10$ de modo que $h = 0.1$. Los cómputos se pueden arreglar como en la Tabla 9.2 en la cual los primeros cuatro encabezamientos de columna son los mismos de la Tabla 9.1. Sin embargo, puesto que necesitamos dos pendientes, una a la izquierda del punto extremo de un intervalo y la otra a la derecha del punto extremo, para obtener la pendiente promedio, el encabezamiento de la tercera columna de la Tabla 9.1 se ha modificado a *pendiente izquierda*. Las tres columnas restantes en la Tabla 9.2 se usan para encontrar respectivamente, la pendiente derecha, el promedio de las pendientes izquierda y derecha denotada por y'_{av} y el valor corregido de y, denotado por y_{corr} .

Para ver cómo el cómputo sigue, obtengamos las entradas en la primera fila de la Tabla 9.2. Las primeras cuatro entradas se obtienen exactamente como en la Tabla 9.1. La pendiente derecha (entrada de la quinta columna) se obtiene calculando y' $= f(x, y) = x + y$, tomando x como el punto extremo derecho $a + h = a_1$, el cual llamamos x_{nuevo} y y como el correspondiente valor aproximado de y, el cual hemos llamado y_{nuevo} (ya obtenido en la entrada de la cuarta columna). Esta pendiente derecha está dada por $f(x_{nuevo}, y_{nuevo}) = x_{nuevo} + y_{nuevo} = 0{,}10 + 1{,}10 = 1{,}20$.

Habiendo encontrado las pendientes derecha e izquierda, podemos determinar la pendiente promedio (entrada de la sexta columna) como $\frac{1}{2}$ (1,00 + 1,20) = 1,10. Finalmente el valor corregido de y denotado por y_{corr} (entrada de la séptima columna) es el nuevo valor de y (cuarta columna) mas 0,1 veces la pendiente promedio, esto es, $y_{corr} = 1{,}00 + 0{,}1(1{,}10) = 1{,}11$. El valor corregido de y se transfiere a la segunda fila de la tabla como se indica.

El mismo proceso usado para obtener las entradas en la primera fila se puede usar ahora para obtener las entradas en la segunda fila y en todas las filas siguientes hasta obtener el valor de y correspondiente a $x = 1$. Como muestra la Tabla 9.2, este valor es 3,44, el cual sorprendentemente ***concuerda exactamente*** con el verdadero valor. Esto parecería indicar que todos los pares restantes de valores (x, y) en la Tabla 9.2 son también correctos, y podemos usar éstos para obtener un gráfico de la solución en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Si deseamos continuaríamos el cálculo para valores de x por encima de 1, pero por supuesto no hay seguridad de que se mantendrá la misma precisión.

1.3 DIAGRAMAS DE COMPUTADOR

Es de interés presentar diagramas esquemáticos que muestren las etapas sucesivas en los cálculos para los métodos de pendiente constante y pendiente promedio. Tales diagramas se llaman ***diagramas de computador o diagramas de flujo.*** La Figura 9.3 presenta el diagrama de computador para el método de pendiente constante. El par inicial de valores (x, y) proporcionan una ***entrada*** la cual se ***alimenta*** en la primera caja, la cual calcula la pendiente en (x, y). Esta pendiente se alimenta dentro de otra caja que calcula el nuevo valor de y. La ***salida*** final consiste del nuevo par de valores (x_{nuevo}, y_{nuevo}). Esto proporciona una nueva entrada ***o retroalimentación,*** y el mismo proceso se repite una y otra vez hasta que se consiga el resultado final deseado.

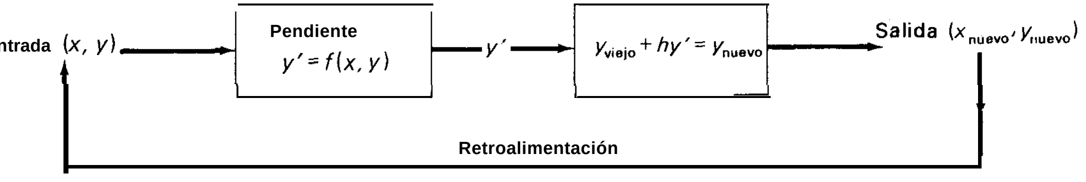


Figura 9.3 Diagrama de computador para método de pendiente constante.

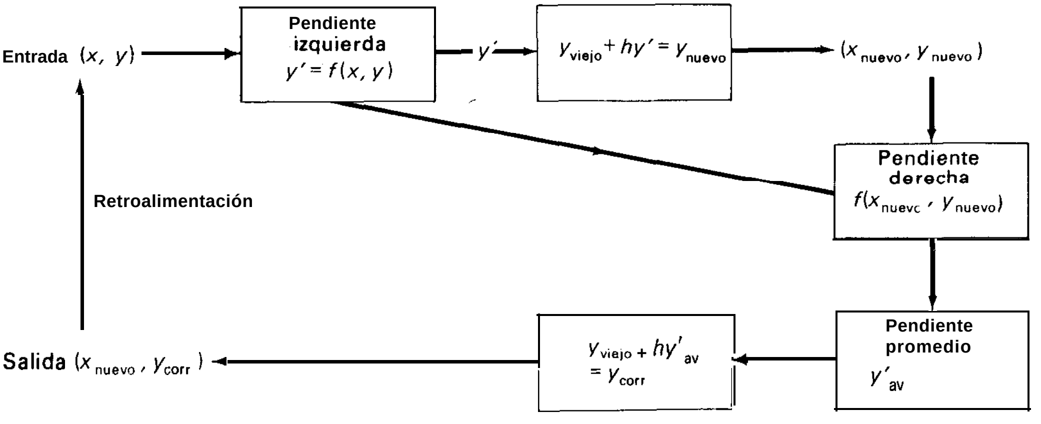


Figura 9.4 Diagrama de computador para método de pendiente promedio.

En una manera similar podemos construir un diagrama de computador que muestre el método de pendiente promedio como en la Figura 9.4. La primera fila en esta figura que conduce a (x_{nuevo}, y_{nuevo}), es por supuesto idéntica con la de la Figura 9.3. La modificación consiste *en* tres cajas adicionales, la primera proporciona el cómputo de la pendiente derecha a partir de (x_{nuevo}, y_{nuevo}), la segunda obtiene la pendiente promedio a partir de las pendientes izquierda y derecha como se indica, y la tercera proporciona el valor corregido de y. El par de valores (x_{nuevo}, y_{corr}) es la salida, la cual sirve como una nueva entrada, y el proceso se repite una y otra vez como antes.

1.4 ANALISIS DE ERRORES

Cada vez que se desarrolla una fórmula para obtener resultados aproximados, es natural buscar algún estimador del error que se puede cometer al usarla. El proceso de estimar tales errores con frecuencia se llama análisis ***de errores.*** Al tratar con estos errores, no nos preocuparemos de los ***errores aleatorios,*** tales como ***errores de redondeo,*** e. g., redondeo de 2,84316 a 2,8432, el cual puede ser debido por ejemplo a limitaciones en la capacidad de almacenamiento de un computador. En vez estaremos interesados solamente en el error producido al usar la fórmula particular. Si una fórmula produce resultados más precisos que otra, ciertamente esperaríamos que esta precisión aumentada apareciera en un análisis de errores. Ilustraremos esto con un análisis de errores de los métodos de pendiente constante y de pendiente promedio.

(a) ***Análisis de errores para el método de pendiente constante.*** De la página 422 vemos que una solución aproximada del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \qquad y(u) = (\tag{15}$$

para $y(a + h)$ está dada por

$$y(a + h) = c + hf(a, c) \tag{16}$$

Sin embargo, usando la serie de Taylor, asumiendo condiciones apropiadas de diferenciabilidad sobre $f(x, y)$, el verdadero valor de $y(a + h)$ ***es***

$$y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2!} y''(a) + . = c + hf(a, c) + \frac{h^2}{2!} y''(U) + . . \tag{17}$$

Comparando (16) y (17), vemos que el error cometido en usar (16) en vez de (17) es

$$E = \frac{n^-}{2!} y''(a) + \frac{n^-}{3!} y'''(a) + \cdots \tag{18}$$

donde los valores y”(a), ***y”‘(a),*** se encuentran por diferenciación sucesiva de la ecuación diferencial en (15). Este error ocurre debido al hecho de que la serie se ha cortado después de los primeros dos términos en (17). Por esta razón el error con frecuencia se llama un ***error de truncamiento*** (del Latinismo ***truncare,*** que significa ***cortar).***

Para valores de h suficientemente pequeños, esperaríamos que el error (18) fuera muy próximo igual al primer término, esto es, $\frac{1}{2}h^2$ ***y”(a)*** despreciando el resto de términos. Sin embargo, el estudiante puede con derecho sentirse molesto al despreciarse un número infinito de términos sin ninguna justificación apropiada. Afortunadamente, esto se puede justificar con el uso del

teorema de Taylor con residuo, que el estudiante pudo haber estudiado en cálculo. Este teorema dice que si y es al menos doblemente diferenciable [ó $f(x, y)$ es al menos una vez diferenciable] , entonces

$$y(a + h) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2!} y''(r), \qquad \text{donde } r \text{ está entre } a \text{ y } a + h \tag{19}$$

Aquí el último término a la derecha representa el residuo de la serie después de los primeros dos términos, y (19) proporciona un decidido mejoramiento sobre (17), lo cual requiere la existencia de todas las derivadas. Usando (19), el error se puede escribir

$$E = \frac{h^2}{2!} y''(r), \qquad \text{donde } r \text{ está entre } a \text{ y } a + h \tag{20}$$

Puesto que este error es proporcional a h^2, o como a menudo decimos es ***de orden*** h^2, abreviado por $O(h^2)$, vemos que reduciendo el **tamaño** de h podemos reducir considerablemente el tamaño del error. Puesto que $y''(r)$ puede ser positivo o negativo el error (20) puede también ser positivo o negativo. Si denotamos por M una constante positiva tal que $|y''(r)| < M$ para r entre a y $a + h$, entonces

$$|E| < \frac{Mh^2}{2} \tag{21}$$

representando el lado derecho una cota superior para el error.

Puesto que el error está dado por (20), si tenemos $y(a)$ y buscamos $y(a + h)$, la pregunta que naturalmente surge es ¿cuál sería el ***error acumulado*** si procedemos en n pasos al cálculo de $y(b)$, donde $b = a + nh$? Análisis adicional, el cual es algo tedioso y que no haremos aquí, muestra que el error máximo es n veces el dado en (21), tal vez con un valor diferente de M, el cual llamaremos K; esto es, para n pasos

$$|E_n| < \frac{Knh^2}{2} \tag{22}$$

o puesto que $n = (b - a)/h$, $$|E_n| < \frac{K(b - a)h}{2} \tag{23}$$

lo cual muestra que el error acumulado es de orden h.

(b) ***Análisis de errores para el método de pendiente promedio.*** De la página 425 vemos que una solución aproximada al problema de valor inicial (15) para $y(a + h)$ es

$$y(a + h) = c + \frac{h}{2}[f(a, c) + f(a + h, c + hf(a, c))] \tag{24}$$

la cual se debe comparar con el verdadero valor (17) o (19). El error cometido en este caso es

$$E = y(a + h) - \left\{c + \frac{h}{2}[f(a, c) + f(a + h, c + hf(a, c))]\right\} \tag{25}$$

Para ver cómo el lado derecho **de** (25) depende de h, usamos de nuevo la serie de Taylor. Usaremos la serie infinita en vez de la serie con residuo por simplicidad en la notación. Tenemos como antes

$$y(a+h) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2!}\, y''(a) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(a) + \cdots \tag{26}$$

Para hallar una serie para el último término a la derecha de (25), usamos la serie de Taylor para el caso de dos variables, la cual es análoga para el caso de una variable. Esta está dada por

$$\begin{aligned} f(a+h, c+k) &= f(a, c) + hf_x(a, c) + kf_y(a, c) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\,[h^2 f_{xx}(a, c) + 2hk f_{xy}(a, c) + k^2 f_{yy}(a, c,] + . \end{aligned} \tag{27}$$

donde $f_x(a, c)$ denota la derivada parcial de f (x, y) con respecto a x evaluada en $x = a$, $y = c$, $f_{xx}(a, c)$ denota la segunda derivada parcial de $f\ (x, y)$ con respecto a x evaluada en $x = a$, $y = c$, $f_{xy}(a, c)$ denota la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x y y evaluada en $x = a$, $y = c$, etc.

Tomando $k = hf(a, c)$ en (27) encontramos

$$\begin{aligned} f(a+h, c+hf(a, c)) &= f(a, c) + hf_x(a, c) + hf(a, c)f_y(a, c) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\,[h^2 f_{xx}(a, c) + 2h^2 f(a, c) f_{xy}(a, c) + h^2\{f(a, c)\}^2 f_{yy}(a, c)] + . . \end{aligned} \tag{28}$$

Sustituyendo (26) y (28) en (25) produce

$$\begin{aligned} E &= [y(a) - c] + h[y'(a) - f(a, c)] + \frac{h^2}{2}\,[y''(U) - f_x(a, c) - f_y(a, c)f(a, c)] \\ &\quad + \text{ términos involucrando } h^3 \text{ y superiores} \end{aligned} \tag{29}$$

Puesto que $y(a) = c$ de la condición inicial en (15), mientras que $y'(a) = f(a, c)$ de la ecuación diferencial en (15), los primeros dos términos en (29) son cero. Tomando la derivada de ambos lados de la ecuación diferencial en (15), tenemos usando la regla de la cadena del cálculo elemental

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' \tag{30}$$

De esto tenemos al evaluar las derivadas en $x = a$, $y = c$

$$y''(a) = f_x(a, c) + f_y(a, c) f(a, c) \tag{31}$$

de modo que el tercer término en (29) es también cero. El resultado muestra que E involucra sólo términos en h^3 o superiores. Usando la serie de Taylor con residuo como en el caso del método de pendiente constante, sigue que el error es de orden h^3, esto es, $E = O(h^3)$. Puesto que $E = O(h^2)$ para el método de pendiente constante, mientras que $E = O(h^3)$ para el método de pendiente promedio, podemos ver rápidamente por qué el segundo método es mucho más preciso.

Como una ilustración de cómo se pueden usar las ideas anteriores de analisis de errores, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Dado el problema de valor inicial $y' = x+y$, $y(0) = 1$. Estime el error cometido al calcular $y(0{,}1)$ usando el método de pendiente constante con $h = 0{,}1$.

Solución Puesto que $y' = f(x, y) = x + y$, tenemos $y'' = 1 + y' = 1 + x + y$ de modo que

$$y''(r) = 1 + r + y, \qquad \text{donde } 0 < r < 0{,}1$$

Es razonable suponer que $y < 2$. Así tenemos

$$|y''(r)| < 1 + 0{,}1 + 2 = 3{,}1$$

y de (20) o (21) vemos que

$$|E| < \frac{(0{,}1)^2\,(3{,}1)}{2}, \text{ esto es, } |E| < 0{,}016 \text{ aprox.}$$

Puesto que el método de pendiente constante da 0,10 (ver Tabla 9.1) mientras que el verdadero valor es 0,11 el error efectivo es 0,01, el cual está de acuerdo con el estimador anterior.

1.5 ALGUNAS GUIAS PRACTICAS PARA LA SOLUCION NUMERICA

Hay muchos métodos disponibles para la solución numérica de ecuaciones diferenciales como puede darse cuenta el estudiante al leer la literatura en el tema.* Para la mayoría de los métodos un análisis de errores es difícil, como puede conjeturarse de la derivación en la página 428 para el caso relativamente simple del método de pendiente constante. También, aún en el caso de que se disponga de un análisis de errores éste no proporciona un término de error simple, tal como el dado en (20), página 429, sino solo que su orden es una función del tamaño del paso, como por ejemplo $O(h^4)$, $O(h^5)$, etc. Una complicación adicional es que la precisión conseguida está limitada por las características particulares de la ecuación diferencial considerada. Así, por ejemplo, si se desea una solución cerca a una singularidad, aún el "mejor método" puede dar una pobre precisión. Debido a estas dificultades no hay una panacea simple para la solución numérica (lo cual puede servir para indicar por qué hay tantos métodos disponibles). A pesar de esto hay algunas guías prácticas que un científico puede seguir.

1. Escoja un método particular que involucre un tamaño de paso h el cual parezca razonable en vista del tipo de la ecuación diferencial involucrada. Por ejemplo, si la ecuación diferencial involucra una singularidad tal como $x = 1$ en el problema de valor inicial donde buscamos $y(0{,}9)$ por caso, se necesitan tamaños de paso más pequeños cerca de $x = 0{,}9$ que cerca de $x = 0$. En tal caso podemos dividir el intervalo de $x = 0$ a $x = 0{,}9$ en intervalos o tamaños de paso de longitud desigual.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{1 - x}, \qquad y(0) = 1$$

2. Para chequear la precisión del valor numérico hallado en 1, repita el método usando un tamaño de paso más pequeño, por ejemplo la mitad del ta-

*Ver por ejemplo [12]

maño de paso usado anteriormente. Si este procedimiento sólo produce un cambio menor en las cifras significantes podemos estar seguros de aquellas que no cambian. Así, si el valor repetido es por ejemplo 5,2435, en vez de 5,2408, podemos al menos estar seguros de la precisión a tres cifras significantes dadas por 5,24. Si hay una discrepancia mayor, posiblemente tengamos que reducir aún más el tamaño de paso.

3. La reducción del tamaño de paso, resultante de un incremento en el número de pasos, puede conducir a *errores de redondeo acumulativos* los cuales afectan la precisión. Debido a esto, los cálculos se deben hacer con suficientes cifras significantes. Desafortunadamente, no se pueden dar reglas puesto que esto de nuevo depende de las clases de cálculos involucradas. Así, por ejemplo, aunque podamos tener $x = 7{,}41563$ y $y = 7{,}41492$ cada una con una precisión a seis cifras significantes, la mayoría de estas se pierden al tomar la diferencia $x - y = 0{,}00071$. Sin embargo, en la mayoría de los casos que surgen en la práctica no ocurren tales pérdidas en cifras significantes. En estos casos de "rutina" una regla razonable a seguir es usar al menos dos cifras más de las requeridas en la respuesta.

EJERCICIOS A

Use (a) el método de pendiente constante y (b) el método de pendiente promedio para determinar el valor indicado de y para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial tomando el número indicado de subdivisiones n. Si es posible compare con el valor exacto.

1. $y' = 2x + y$; $y(0) = 0$. Halle $y(0{,}5)$; use $n = 5$.
2. $y' = x^2 - y$; $y(1) = 0$. Halle $y(1{,}6)$; use $n = 6$.
3. $y' = (y + 1)/x$; $y(2) = 3$. Halle $y(2{,}8)$; use $n = 4$ y $n = 8$.
4. $y' = (x - y)/(x + y)$; $y(3) = 2$. Halle $y(1)$; use $n = 5$ y $n = 10$.
5. $y' = x^2 + y^2$; $y(1) = 2$. Halle $y(0{,}5)$; use $n = 5$ y $n = 10$.
6. $y' = \sqrt{x + y}$; $y(5) = 4$. Halle $y(4)$; use $n = 5$ y $n = 10$.
7. $y' = \operatorname{sen} y$; $y(0) = 1$. Halle $y(1)$; use $n = 5$ y $n = 10$.

EJERCICIOS B

1. Dado $y' = y$; $y(0) = 1$, encuentre $y(1)$ numéricamente. ¿Cómo puede usted usar este resultado para calcular e?
2. Si $y' = \tan^{-1} x$; $y(0) = 1$, encuentre $y(1)$.
3. (a) Use el problema de valor inicial $y' = -2y$, $y(0) = 1$ para calcular $y(0{,}1)$ por el método de pendiente constante con $h = 0{,}1$. (b) Estime el error del cálculo en (a) usando (20), página 429, y compare con el verdadero valor.
4. Dado el problema de valor inicial $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y(0) = 1$. (a) Calcule $y(0{,}2)$ por el método de pendiente constante usando un valor apropiado para h. (b) Estime el error en el cálculo y compare con el verdadero valor.
5. En el Ejercicio 3 calcule $y(0{,}2)$ usando el método de pendiente constante con $h = 0{,}1$. ¿Cómo estimaría usted el error cometido?
6. (a) La ecuación diferencial $y' = (x + y)^{-2}$ se va a resolver numéricamente para $y(2)$, dado $y(0) = 0$. ¿Cuáles son los valores numéricos obtenidos escogiendo $n =$

2, 5, 10? ¿Cómo puede uno estar seguro de tener una solución con precisión en dos cifras decimales? (b) Resuelva la ecuación diferencial de (a) exactamente usando la transformación $x + y = v$. Así encuentre y(2) exactamente y compare con (a).

7. Dado $y' = e^{-xy}$; $y(0) = 1$, encuentre y(l) usando una calculadora o un manual que tabule los varios valores de e^u. Obtenga una precisión de al menos con dos cifras decimales.

8. Dado $y' = y(x+y)$; $y(0) = 0{,}5$, encuentre $y(0{,}5)$, usando n = 5. Compare con la solución exacta. ¿Qué precisión se obtiene usando n = 20?

9. Dado el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-x}$, $y(0) = 1$ encuentre $y(0{,}9)$ y compare con el verdadero valor (ver página 431).

10. Dado $y' = 1/(1+x^2)$; $y(0) = 0$, encuentre $y(1)$ numéricamente. ¿Cómo puede usar sus resultados para calcular π?

EJERCICIOS C

1. El método de esta sección se limitó a la solución numérica de una ecuación diferencial de primer orden. La ecuación diferencial de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$ sujeta a las condiciones $y = c_1$, $y' = c_2$ donde $x = a$ se puede escribir como dos ecuaciones simultáneas de primer orden

$$y' = v, \qquad v' = f(x, y, v)$$

sujeta a las condiciones $y = c_1$, $v = c_2$ donde $x = a$. Puede usted idear un procedimiento para encontrar y y y' cuando $x = a + h$? Sí así fuera, use el método en la ecuación $y'' = x + y$ sujeta a las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$ para obtener y(l). Compare con la solución exacta.

2. Use el método ideado en el Ejercicio 1 y encuentre $y(0{,}8)$ y $y'(0{,}8)$ para la ecuación diferencial $y'' = \sqrt{x+y}$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Suponga que en la ecuación de la integral (5), página 422 aproximamos $f(x, y)$ por su valor en $x = a + \frac{1}{2}h$ y $y = c + \frac{1}{2}hf(a, c)$ los cuales son los valores prornedios de x y y obtenidos por el método de pendiente constante. (a) Muestre que

$$y = c + \frac{h}{2} f(a + \tfrac{1}{2}h, c + \tfrac{1}{2}hf(a,c))$$

(b) Usando el análisis de errores compare la precisión del resultado en (a) con el obtenido por los métodos de pendiente constante y de pendiente promedio. (c) Trabaje algunos de los Ejercicios A en la página 432 por este método y compare con los resultados de otros métodos. (d) Construya a diagrama de computador para el método el cual algunas veces se llama el *método de Runge.*

2 El método de Runge-Kutta

Como ya hemos visto (página 422), si nos dan la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \text{donde } y(a) = c$$

entonces tomando $n = 1$ de modo que $b = a + h$, encontramos

$$y(a + h) = c + \int_a^{a+h} f(x, y)\,dx \tag{1}$$

También de la expansión en serie de Taylor tenemos

$$y(a+h) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2!}y''(a) + \frac{h^2}{3!}y'''(a) + \qquad (2)$$

Expresando las derivadas indicadas en (2) en términos de $f(x, y)$, Runge y Kutta fueron capaces de obtener varias fórmulas para aproximar la serie en (2). Una de tales fórmulas, la cual se encuentra que está en concordancia con (2) hasta e incluyendo el término que involucra h^4 está dada por

$$y(a+h) = c + \tfrac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

donde $\quad m_1 = hf(a, c), \qquad m_2 = hf(a + \tfrac{1}{2}h, c + \tfrac{1}{2}m_1)$

$$m_3 = hf(a + \tfrac{1}{2}h, c + \tfrac{1}{2}m_2), m_4 = hf(a+h, c+m_3)$$

La verificación de esta fórmula es tediosa pero no difícil (ver Ejercicio 2C). Otra fórmula está dada en el Ejercicio 1C. Para ver una aplicación del método *Runge-Kutta,* como a menudo se llama, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Dado $y' = x + y$, $y(0) = 1$, encuentre $y(1)$.

Solución Tenemos en este caso $f(x, y) = x + y$, $a = 0$, $c = 1$. Si escogemos $h = 1$, encontramos

$$m_1 = hf(a, c) = f(0, 1) = 1, \qquad m_2 = hf(a + \tfrac{1}{2}h, c + \tfrac{1}{2}m_1) = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = 2$$

$$m_3 = hf(a + \tfrac{1}{2}h, c + \tfrac{1}{2}m_2) = f(\tfrac{1}{2}, 2) = \tfrac{5}{2}, \qquad m_4 = hf(a + h, c + m_3) = f(1, \tfrac{7}{2}) = \tfrac{9}{2}$$

y así $\quad y(1) = 1 + \tfrac{1}{6}(1 + 4 + 5 + \tfrac{9}{2}) = 3{,}42$

El hecho que esto esté en tan buen acuerdo con el verdadero valor 3,44 aun cuando se haya usado un tamaño de paso relativamente grande $h = 1$, sirve para indicar la superioridad del método de Runge-Kutta sobre el método de pendiente promedio (y ciertamente el método de pendiente constante), el cual requirió más cálculos, como se vió en los Ejemplos ilustrativos 1 y 2 en las páginas 424-427. El incremento en la precisión del ejemplo anterior se obtiene usando valores más pequeños de h y aplicando el método más de una vez. Así, por ejemplo, si escogemos $h = 0{,}5$ y aplicamos el método dos veces, llegamos al verdadero valor de 3,44.

EJERCICIOS A

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales y condiciones, determine el valor indicado de y usando el método de Runge-Kutta. Si es posible compare con los valores obtenidos resolviendo la ecuación exactamente

1. $y' = 2x + y$; $y(0) = 1$. Encuentre $y(0{,}5)$. 2. $y' = x^2 - y$; $y(1) = 0$. Encuentre $y(1{,}6)$

3. $y' = (y + 1)/x$; $y(2) = 3$. Encuentre $y(2{,}8)$ 4. $y' = x - y$; $y(1) = 2$. Encuentre $y(0{,}5)$

5. Trabaje los Ejercicios 1-7A en la página 432 usando el método de Runge-Kutta y compare la precisión obtenida.

EJERCICIOS B

1. Trabaje el Ejercicio 1A usando dos aplicaciones del método de Runge-Kutta. Discuta los resultados.
2. Use (a) dos, (b) tres, y (c) cuatro aplicaciones del método de Runge-Kutta para resolver el Ejercicio 2A. ¿Cuáles son las ventajas de usar aplicaciones sucesivas del método? ¿Cómo podría usted determinar el número de aplicaciones necesarias?
3. Use dos aplicaciones del método de Runge-Kutta para resolver el Ejercicio 1B en la página 432. Compare la precisión de este método con la del método de pendiente constante.
4. (a) Usando $h = 0{,}2$, encuentre $y(1,2)$ por el método de Runge-Kutta para la ecuación $y' = x + y$ sujeta a $y(1) = 0$. (b) Usando $h = 0{,}1$, encuentre $y(1{,}1)$ por el método de Runge-Kutta para la ecuación en (a). Usando este resultado, calcule $y(1{,}2)$. Compare con la precisión de (a) y con la respuesta exacta.
5. Use el método de Runge-Kutta para resolver el problema de valor inicial $y' = f(x)$, $y(a) = c$ mostrando que

$$y(a+h) = c + \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h)\right]$$

   Esto es la regla *de Simpson* usada en cálculo para evaluar integrales definidas.
6. Use el Ejercicio 5 para resolver $y' = 1/(1 + x^2)$, $y(0) = 0$ para $y(1)$ y compare con el verdadero valor.

EJERCICIOS C

1. Otro método debido a Runge-Kutta consiste en calcular lo siguiente

$$m_1 = hf(a, c), \qquad m_2 = hf(a + h, b + m_1)$$
$$m_3 = hf(a + h, b + m_2), \qquad m_4 = hf(a + \tfrac{1}{2}h, b + \tfrac{1}{2}m_1)$$

   y luego usar $$y(a + h) = c + \tfrac{1}{6}(m_1 + 4m_4 + m_3)$$

   Resolviendo varias ecuaciones diferenciales usando este método, por ejemplo las de los Ejercicios A y B anteriores, decida si este método es mejor o peor que el método dado en el texto. ¿Puede usted dar una explicación posible para su conjetura?
2. Derive la fórmula de Runge-Kutta del texto. [*Sugerencia:* Use el teorema de Taylor para funciones de dos variables y la regla del trapecio para aproximar integrales. Luego compare los términos de las ecuaciones (1) y (2) de las páginas 433-434 hasta e incluyendo los términos involucrando h^4.]
3. Explique cómo se puede obtener la fórmula del Ejercicio 1.

II

sistemas de *ecuaciones diferenciales ordinarias*

diez

sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones

1 Sistemas de ecuaciones diferenciales

1.1 MOTIVACION PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones diferenciales que involucran una variable independiente y una dependiente. Con frecuencia en aplicaciones encontramos ecuaciones que contienen una variable independiente pero con dos o más variables dependientes. Como un ejemplo, considere el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Suponga que una partícula de masa m se mueve en el plano xy (ver Figura 10.1) debido a una fuerza que actúa sobre ella. Asumamos que la dirección de la fuerza está en el plano xy y que su magnitud depende solamente de la posición instantánea (x, y) de la partícula y del tiempo t. Asumiendo que la partícula está inicialmente en reposo en algún punto, digamos el origen, es natural para nosotros preguntar dónde estará la partícula en cualquier tiempo posterior.

Formulación matemática. Descompongamos la fuerza en dos componentes F_1 y F_2 en las direcciones positivas x y y como se indica en la figura. Entonces por la ley de Newton tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y, t), \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y, t) \tag{1}$$

puesto que d^2x/dt^2 y d^2y/dt^2 son las componentes de la aceleración en las direcciones positivas x y y, respectivamente. En (1) hemos específicamente indioado la dependencia de los componentes sobre la posición instantánea (x, y) de la partícula en el tiempo t. Puesto que la partícula se asume que está inicialmente en reposo en el origen, tenemos como condiciones iniciales

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \text{ en } t = 0$$

0

$$x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \tag{2}$$

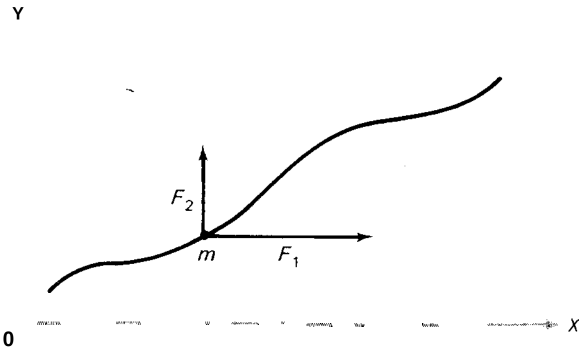


Figura 10.1

Como un ejemplo específico, suponga que la partícula es de una masa unitaria, esto es, $m = 1$, y que la fuerza es tal que los componentes están dados por

$$F_1 = y + 4e^{-2t}, \qquad F_2 = x \quad e^{-2t} \tag{3}$$

Entonces de (1), $$\frac{d^2x}{dt^2} = y + 4e^{-2t}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x \quad e^{-2t} \tag{4}$$

mientras que las condiciones sobre x y y están dadas como antes por (2).

Las ecuaciones (1) o (4) involucran una variable independiente t y dos variables dependientes x y y que dependen de t. Puesto que éstas involucran derivadas ordinarias con respecto a t, es natural llamarlas ***ecuaciones diferenciales ordinarias.***

Para determinar dónde estará la partícula en cualquier tiempo $t > 0$, debemos tratar de encontrar un par de funciones de x y y que dependan de t las cuales cuando se sustituyan en (4) satisfarán cada ecuación (esto es, reduce cada ecuación a una identidad), y también satisfarán las condiciones (2). Es natural llamar a cada par de funciones x y y una ***solución*** del ***problema de valor inicial*** descrito por las ecuaciones (4) y condiciones (2).

Ahora ciertamente es fácil encontrar pares de funciones que satisfagan la primera ecuación en (4). Por ejemplo, si hacemos $x = t^2$ en la primera ecuación, encontramos

$$y = 2 - 4e^{-2t}$$

Así el par $x = t^2$, $y = 2 - 4e^{-2t}$ es una solución de esta primera ecuación. Sin embargo, se encuentra por sustitución en la segunda ecuación de (4) que este par no es una solución a esa ecuación. Nuestro problema es por supuesto encontrar un par de funciones que satisfagan *simultáneamente* las ecuaciones (4). Por esta razón a menudo llamamos la combinación de ecuaciones (1) *o* (4) ***ecuaciones diferenciales simultáneas.*** También nos referimos a ellas como un ***sistema de ecuaciones diferenciales.***

El problema de determinar una solución a ecuaciones diferenciales simultáneas nos recuerda una situación similar encontrada en álgebra. Dada la ecuación lineal $x + 2y = 6$, por ejemplo, hay infinitos pares de soluciones. Así $x = 6$, $y = 0$; $x = 3$, $y = \frac{3}{2}$, etc., son soluciones. Sin embargo, si tenemos otra ecuación que se debe -satisfacer simultáneamente, digamos $2x + y = 3$, solamente es una solución el par $x = 0$, $y = 3$.

Ahora sabemos del álgebra que hay varias maneras de encontrar soluciones a ecuaciones simultáneas. Una de las más simples es aquella de eliminar una de las incógnitas, Así, dado el par $x + 2y = 6$, $2x + y = 3$, obtenemos de la segunda ecuación $y = 3 - 2x$. Sustituyendo esto en la primera ecuación produce $x + 2(3 - 2x) = 6$, esto ***es,*** $x = 0$, de modo que $y = 3$. Este ***método de eliminación*** el cual se puede aplicar a casos de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, etc., resulta también ser un procedimiento básico para resolver ecuaciones diferenciales simultáneas, como ilustraremos ahora.

1.2 METO00 DE ELIMINACION PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Para mostrar cómo se puede usar el método de eliminación en ecuaciones diferenciales, regresemos al sistema de ecuaciones (4). Podemos, debido a la forma particular de las ecuaciones, resolver la primera ecuación para y en términos de x y t para obtener

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} - 4e^{-2t} \tag{5}$$

Si ahora sustituimos esto en la segunda ecuación de (4) y simplificamos, encontramos

$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = 15e^{-2t} \tag{6}$$

Puesto que esto es una ecuación diferencial lineal para la sola variable desconocida x, podemos usar ahora 10s métodos del Capítulo cuarto para obtener

$$x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + e^{-2t} \tag{7}$$

Sustituyendo esto en (5) produce

$$y = -c_1 \cos t \quad c_2 \operatorname{sen} t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} \tag{8}$$

El par (7) y (8) es así la solución requerida del sistema (4). Podemos usar ahora las condiciones (2) para determinar las constantes c_1 c_2, c_3, c_4. Necesitaremos dx/dt y dy/dt. De (7) y (8) tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3 e^t - c_4 e^{-t} - 2e^{-t} \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t + c_3 e^t - c_4 e^{-t} \tag{10}$$

Colocando $t = 0$ en (7), (8), (9) y (10), vemos de (2) que los valores correspondientes de x, y, dx/dt y dy/dt son todos cero lo cual conduce a las ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 + c_3 + c_4 = -1, & -c_1 + c_3 + c_4 = 0, \\ c_2 + c_3 - c_4 = 2, & -c_2 + c_3 - c_4 = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

De estas encontramos $\quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{4}, \quad c_4 = -\frac{3}{4} \quad (12)$

de modo que

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t + \tfrac{1}{4}e^t - \tfrac{3}{4}e^{-t} + e^{-2t} \tag{13}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t + \tfrac{1}{4}e^t - \tfrac{3}{4}e^{-t} \tag{14}$$

Las ecuaciones (13) y (14) representan las ecuaciones paramétricas de la trayectoria tomada por la partícula a medida que se mueve en el plano xy y de estas ecuaciones podemos determinar la posición (x, y) de la partícula en cualquier tiempo como fue solicitado.

Aunque el método de eliminación descrito antes es fácil en principio, desafortunadamente no siempre es un asunto fácil de aplicar. Para mostrar esto, supongamos que en el problema de la partícula considerada en la página 439, los componentes de fuerza actuando sobre la partícula dependen de los componentes de la velocidad, esto *es*, dx/dt, dy/dt, como también de la posición (x, y) y del tiempo t. En tal caso las ecuaciones (1) se remplazan por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right), \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right) \tag{15}$$

Si en particular $m = 1$ y los componentes de fuerza están dados por

$$F, = y + 3x - \frac{dy}{dt}, \qquad F_2 = -4x - 2y - \frac{dx}{dt} \tag{16}$$

la ecuación (15) llega a ser

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y + 3x - \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -4s - 2y - \frac{dx}{dt} \tag{17}$$

Para apreciar las dificultades que pueden ocurrir en aplicar el método de eliminación, intentemos encontrar la solución al sistema (17) como en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva el sistema

$$\text{(a)}\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 3x = y, \qquad \text{(b)}\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4s + 2y = 0.$$

Solución Las ecuaciones dadas son reagrupaciones de las ecuaciones (17). Tratemos de eliminar y de estas dos ecuaciones. Diferenciando (a) encontramos

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \tag{18}$$

Sustrayendo la ecuación (b), eliminamos d^2y/dt^2, de modo que

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{dx}{dt} - 4x - 2y = \frac{dy}{dt} \tag{19}$$

Todavía debemos eliminar *y* y dy/dt. Si sustituimos dy/dt de (19) en (a), encontramos

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 7x - 3y = 0 \tag{20}$$

de modo que ahora sólo se necesita eliminar y. Para ello resolvamos para y en (20) y sustituyamos el resultado en (a) ó (b). Esto da

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} - 2x = 0 \tag{21}$$

de modo que finalmente llegamos a una ecuación para x. De este punto resolvemos para x, luego regresamos y encontramos y, y finalmente satisfacemos las condiciones iniciales.

No iremos sobre los detalles para hallar la solución puesto que el propósito principal del ejemplo fue mostrar lo tedioso que puede ser el método de eliminación. El ejemplo dado ciertamente nos motivaría a buscar un enfoque más corto. Mostraremos ahora un enfoque que hace uso de operadores.

1.3 EL USO DE OPERADORES EN LA ELIMINACION DE INCOGNITAS

Usando la notación del operador simbólico $D \equiv d/dt$, las ecuaciones (a) y (b) del Ejemplo ilustrativo 1 se pueden escribir respectivamente como

$$(D^2 - 3)s + (D - 1)y = 0 \tag{22}$$

$$(D + 4)s + (D^2 + 2)y = 0 \tag{23}$$

La tentación de eliminar x o y tratando a D como un simple operador algebraico es grande. Si recurrimos a esto dándonos cuenta que al hacerlo así todavía queda la tarea de justificación, procederíamos como sigue: "multiplique" (22) por $(D^2 + 2)$ y (23) por $(D - 1)$ para obtener

$$(D^2 + 2)(D^2 - 3)x + (D^2 + 2)(D - 1)y = 0$$

$$(D - 1)(D + 4)x + (D - 1)(D^2 + 2)y = 0$$

Sustrayendo, asumiendo que $(D^2 + 2)(D - 1)y \equiv (D - 1)(D^2 + 2)y$, tenemos

$$(D^2 + 2)(D^2 - 3)x - (D - 1)(D + 4)x = 0$$

esto es
$$(D^4 - 2D^2 - 3D - 2)x = 0$$

la cual es la misma ecuación como en (21), obtenida con mayor trabajo

Para justificar este procedimiento, todo lo que debemos observar es que la "multiplicación" por $(D^2 + 2)$, por ejemplo, simplemente significa que una cierta operación se debe desarrollar. Así $(D^2 + 2)Y$ dice (1) tome la segunda derivada de Y, (2) multiplique Y por 2 y (3) sume los resultados de (1) y (2). En una manera similar podemos mostrar que

$$(D^2 + 2)(D - 1)y \equiv (D - 1)(D^2 + 2)y$$

puesto que $(D^2 + 2)(D - 1)y \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\right)\left(\frac{dy}{dt} - y\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dy}{dt} - y\right) + 2\left(\frac{dy}{dt} - y\right)$

$$\equiv \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 2y$$

$$(D - 1)(D^2 + 2)y \equiv \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 2y\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 2y\right) - \left(\frac{d^2y}{dt^2} + 2y\right)$$

$$\equiv \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 2y$$

Así, el uso de la notación de operador es esencialmente una abreviación.

Para mostrar su uso en otro ejemplo, el cual desarrollamos en detalle, consideremos el

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Resuelva el sistema

$$\text{(a)}\ \frac{dx}{dt} \quad 3x - 6y = t^2, \qquad \text{(b)}\ \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \quad 3y = e^t$$

Solución Escriba las ecuaciones en forma de operador como

$$\text{(c)}\ (D \quad 3)x - 6y = t^2, \qquad \text{(d)}\ Dx + (D \quad 3)y = e^t$$

"Multiplique" (c) por ***D,*** (d) por $(D - 3)$, para encontrar

$$D(D - 3)x - 6Dy = Dt^2 = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

$$(D - 3)Dx + (D - 3)^2 y = (D \quad 3)e^t = De' - 3e^t = -2e^t$$

Por tanto, por sustracción, tenemos después de simplificar, $(D^2 + 9)y = -2e^t - 2t$ cuya solución general es

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t - \tfrac{1}{5}e^t - \frac{2t}{9} \tag{24}$$

Dos alternativas son posibles: podemos sustituir y en cualquiera de las ecuaciones dadas o podemos eliminar y entre las dos ecuaciones dadas para producir una ecuación que involucre sólo x. Escogemos lo último. "Multiplicando" la ecuación (c) por ***(D-3)*** y la ecuación (d) por 6 y sustrayendo, encontramos

$$(D^2 + 9)x = 6e^t \quad 3t^2 + 2t$$

o

$$x = c_3 \cos 3t + c_4 \operatorname{sen} 3t + \tfrac{3}{5}e^t - \tfrac{1}{3}t^2 + \tfrac{2}{9}t + \tfrac{2}{27} \tag{25}$$

Debemos chequear ahora para ver si tenemos demasiadas constantes arbitrarias (generalmente esto ocurre). Sustituyendo x y y de (24) y (25) en cualquiera de las ecuaciones dadas, digamos (c), encontramos

$$(\operatorname{sen} 3t)(\quad 3c_3 \quad 3c_4 - 6c_2) + (\cos 3t)(3c_4 - 3c_3 - 6c_1) + t^2 = t^2$$

Esto debe ser una identidad, y así debemos tener

$$-3c_3 - 3c_4 \quad 6c_2 = 0, \qquad 3c_4 \quad 3c_3 - 6c_1 = 0 \tag{26}$$

Las ecuaciones (26) producen $c_1 = \tfrac{1}{2}c_4 - \tfrac{1}{2}c_3, \qquad c_2 = -\tfrac{1}{2}c_3 \quad \tfrac{1}{2}c_4$

Usando estas en (24) tenemos como la solución simultánea deseada,

$$\left.\begin{aligned} x &= c_3 \cos 3t + c_4 \operatorname{sen} 3t + \tfrac{3}{5}e^t - \tfrac{1}{3}t^2 + \tfrac{2}{9}t + \tfrac{2}{27} \\ y &= (\tfrac{1}{2}c_4 - \tfrac{1}{2}c_3)\cos 3t + (-\tfrac{1}{2}c_3 - \tfrac{1}{2}c_4)\operatorname{sen} 3t - \tfrac{1}{5}e^t - \frac{2t}{9} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Estas también chequearán la otra ecuación dada como se puede verificar fácilmente.

El estudiante no debería encontrar difícil darse cuenta que el método de operador es aplicable a sistemas de ecuaciones diferenciales que pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(D)x + \psi_1(D)y &= F_1(t)\\ \phi_2(D)x + \psi_2(D)y &= F_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

donde $\phi_1(D)$, $\psi_1(D)$, $\phi_2(D)$, $\psi_2(D)$ son operadores lineales en $D \equiv d/dt$.* Debido a que el sistema (28) es una generalización lógica de la ecuación diferencial

$$\phi(D)y = F(t) \tag{29}$$

considerada en capítulos previos, es natural llamar a (28) un *sistema lineal de ecuaciones diferenciales,* mientras que un sistema de dos ecuaciones en x y y que no se pueda escribir en la forma (28) *es* un *sistema no lineal.* Por supuesto que, generalizaciones de estas ideas a más de dos variables dependientes se hacen fácilmente.

Ejemplo 1. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + y = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

es un sistema lineal puesto que se puede escribir como

$$\left.\begin{aligned}Dx + (3D + 1)y &= e^t\\ -x + (D - 1)y &= 0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

el cual tiene la forma (28).

Ejemplo 2. El sistema de ecuaciones

$$3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4\frac{dy}{dt} = t^2 + 1, \tag{31}$$

es un *sistema no lineal* puesto que ambas ecuaciones no tienen la forma (28).

Observación 1. Dado un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, surge una pregunta relacionada con el número total de constantes arbitrarias que deberían aparecer en la solución simultánea. Esto es de importancia puesto que el número debería coincidir con el número de condiciones disponibles en el problema a partir del cual se formuló el sistema. Podemos mostrar que el número *total* de constantes arbitrarias que deben estar presentes en la solución simultánea del sistema (28) es el mismo al grado del operador polinómico obtenido del determinante de los coeficientes de x y y en (28), esto es

$$\begin{vmatrix}\phi_1(D) & \psi_1(D)\\ \phi_2(D) & \psi_2(D)\end{vmatrix} = \phi_1(D)\psi_2(D) - \psi_1(D)\phi_2(D) \tag{32}$$

Esto se puede generalizar al caso de n ecuaciones lineales con n incógnitas, en cuyo caso (32) se extiende a un determinante de orden n.

*Asumiremos a menos que se diga lo contrario que los operadores son polinomios en D con coeficientes constantes. De otra manera los operadores no se conmutan en general, esto es, $\phi_1(D)\phi_2(D) \neq \phi_2(D)\phi_1(D)$, por ejemplo, y así el método de eliminación usando operadores dado en la página 444 no se aplicará en general (ver Ejercicio 1C, página 172). Sin embargo. todavía puede ser posible emplear otros métodos de eliminación.

Ejemplo 3. En el Ejemplo ilustrativo 2, el determinante es

$$\begin{vmatrix} D-3 & -6 \\ D & D-3 \end{vmatrix} = (D-3)(D-3) - (-6)(D) = D^2 + 9$$

el cual es de segundo grado, y así el número total de constantes arbitrarias debería ser 2, como de hecho, lo hemos encontrado.

Observación 2. Hay varios otros métodos disponibles para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ademas del método de eliminación. Aunque algunos de estos pueden tener ventajas en situaciones particulares y pueden tal vez acortar el trabajo involucrado, el estudiante encontrará como una política general que el método anterior de eliminación es adecuado para la mayoría de propósitos que surgen en la práctica. Sin embargo, en el interés de presentar estos métodos posibles, los indicamos como sigue.

(a) ***Métodos abreviados de operador.*** Estos métodos son idénticos con aquellos usados en la página 207 para ecuaciones diferenciales individuales. Daremos un ejemplo del procedimiento involucrado en la página 447.

(b) ***Métodos de transformada de Laplace.*** Estos métodos son los mismos a los usados en el Capítulo seis. Daremos algunos ejemplos al final de este capítulo (página 498). Como antes, una ventaja importante del método de las transformadas de Laplace es que las condiciones iniciales automáticamente se toman en cuenta, y como resultado el trabajo involucrado en el método de eliminación se puede reducir.

(c) Método de soluciones complementarias y particulares. El método estándar usado en el Capítulo cuatro para ecuaciones diferenciales lineales de encontrar primero la solución complementaria, luego encontrar una solución particular, y finalmente sumar éstas para obtener la solución general se puede generalizar a sistemas de ecuaciones diferenciales. Ejemplos del procedimiento involucrado se darán en la página 500.

(d) ***Métodos usando matrices.*** Estos métodos son especialmente útiles cuando tenemos sistemas de tres o más ecuaciones diferenciales lineales donde el método de eliminación puede llegar a ser tedioso. Para aquellos que no estén familiarizados con matrices, por supuesto es necesario "salirse por la tangente" y construir la teoría antes de que podamos ver su aplicación. En esencia, los métodos de matrices utilizan ideas análogas a aquellas dadas en el método (c) anterior, donde no hemos usado matrices. Para el beneficio de aquellos quienes tienen el tiempo e inclinación a emprender tal estudio, hemos incluido un capítulo corto (capítulo once), el cual resume los conceptos básicos necesarios. Se debería enfatizar, sin embargo, que este capítulo es opcional y se puede omitir, aunque se debería notar también que las ideas que involucran matrices son interesantes e importantes desde el punto de vista teórico como también práctico. Es de interés especial e importancia desde el punto de vista teórico la conexión entre la teoría usando matrices y los conceptos de funciones ortogonales y problemas de Sturm-Liouville del Capítulo ocho. Sin embargo, como ya lo hemos subrayado, ambos capítulos son opcionales y pueden omitirse en un curso corto.

1.4 METODOS ABREVIADOS DE OPERADOR

Métodos análogos a los dados en la página 207 se pueden también usar para resolver sistemas lineales. En tales casos el uso de determinantes sirve para minimizar el trabajo involucrado. Para ilustrar el procedimiento, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 2, página 444 usando métodos abreviados de operador.

Solución Escribiendo el sistema en forma de operador, tenemos

$$(D - 3)x - 6y = t^2$$
$$Dx + (D - 3)y = e^t$$

Entonces usando determinantes tenemos*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & -6 \\ e^t & D-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -6 \\ D & D-3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} D-3 & t^2 \\ D & e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -6 \\ D & D-3 \end{vmatrix}}$$

Al expandir estos determinantes, asegurándose que en las expansiones del numerador el operador siempre preceda a la función que opera, encontramos

$$x = \frac{(D-3)(t^2) - (-6)(e^t)}{(D-3)(D-3) - (-6)(D)} = \frac{2t - 3t^2 + 6e^t}{D^2 + 9} = \frac{1}{D^2+9}(2t - 3t^2) + \frac{1}{D^2+9}(6e^t)$$

$$= \frac{1}{9(1 + D^2/9)}(2t - 3t^2) + \frac{1}{(1)^2 + 9}(6e^t)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{D^2}{9} + \cdots\right)(2t - 3t^2) + \tfrac{3}{5}e^t = \frac{2t}{9} - \frac{t^2}{3} + \frac{2}{27} + \tfrac{3}{5}e^t$$

$$y = \frac{(D-3)(e^t) - (D)(t^2)}{(D-3)(D-3) - (-6)(D)} = \frac{-2e^t - 2t}{D^2 + 9} = \frac{1}{D^2+9}(-2e^t) + \frac{1}{D^2+9}(-2t)$$

$$\frac{1}{(1)^2 + 9}(-2e^t) + \frac{1}{9}\left(1 - \frac{D^2}{9} + \cdots\right)(-2t) = -\tfrac{1}{5}e^t \quad \frac{2t}{9}$$

Como en la página 211, lo anterior sólo produce soluciones particulares. Debemos aún sumar las soluciones complementarias, esto es, las soluciones generales de $(D^2 + 1)x = 0$ y $(D^2 + 1)y = 0$. Haciendo esto tenemos

$$x = c_3 \cos 3t + c_4 \operatorname{sen} 3t + \frac{2t}{9} - \frac{t^2}{3} + \frac{2}{27} + \tfrac{3}{5}e^t, \qquad y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t - \tfrac{1}{5}e^t - \frac{2t}{9}$$

como en (24) y (25), página 444. Debemos luego hallar las relaciones entre las constantes como antes, llegando así a (27).

*Asumimos aquí que las reglas de Cramer (ver el Apéndice) son aplicables a los operadores

2 Soluciones de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias

Hemos visto en capítulos precedentes que las ecuaciones diferenciales no lineales no se pueden resolver exactamente en general, y que cuando se pueden generalmente se requieren técnicas especiales. En vista de esto no es una sorpresa que los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales también requieran técnicas especiales si una solución exacta es posible. Hay varios métodos de ataque que se pueden emplear, tales como los siguientes.

(a) ***Método de eliminación.*** Elimine todas excepto una de las variables dependientes del sistema, como en el caso de sistemas lineales. Esto conduce a una ecuación no lineal individual con una variable dependiente y una variable independiente. Eventualmente, podemos resolver esta ecuación y así llegar a la solución del sistema. Una dificultad de este procedimiento es que, a diferencia de los sistemas lineales, la eliminación no siempre es posible aún cuando existe una solución exacta.

(b) ***Transformación de variables.*** Si el método de eliminación falla, puede ser posible transformar variables para producir un sistema más simple. Los tipos de transformaciones que se pueden ensayar frecuentemente son sugeridos por la forma particular del sistema, pero el ingenio también juega un papel importante en hacer una buena selección. Para una ilustración de esto vea la página 459.

(c) Método de linearización. Si el sistema no lineal no se puede resolver exactamente, puede ser posible remplazarlo por un sistema lineal que pueda servir como una razonable aproximación. Si el sistema surge de una formulación matemática de un problema en ciencia o ingeniería, esto generalmente involucra el establecimiento de supuestos acerca del modelo matemático, el cual puede servir como una primera aproximación a la situación real. Así, por ejemplo, si un proyectil se lanza desde la superficie de la Tierra, podemos como una primera aproximación suponer que la Tierra es plana. Sin embargo, esto será una razonable buena aproximación si el proyectil no viaja demasiado lejos. En otro caso, puede que tengamos que considerar el hecho de que la Tierra es esférica en forma (o más exactamente es un esferoide ovalado, esto es, ligeramente achatada en los polos), y que la aceleración gravitacional no es constante. Para mayor precisión podemos considerar el movimiento de la Tierra y aún los efectos del Sol, la Luna, y otros planetas. Una ilustración de esta técnica se da en la sección 7.

Como una ilustración del método de eliminación para un sistema no lineal, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Resuelva
$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, \qquad \frac{dy}{dt} = xy \tag{1}$$

Solución Método 1. Empezamos con la primera ecuación en (1), puesto que ésta no contiene la variable dependiente y. Escribiéndola como

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = dt$$

tenemos al integrar, $\tan^{-1} x = t + c_1$ o $x = \tan(t + c_1)$. Entonces la segunda ecuación en (1) llega a ser

$$\frac{dy}{dt} = y \tan(t + c_1) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = \tan(t + c_1)dt$$

e integrando produce $\ln y = \ln \sec(t + c_1) + \ln c_2$ ó $y = c_2 \sec(t + c_1)$
Así la solución deseada está dada por

$$x = \tan(t + c_1), \qquad y = c_2 \sec(t + c_1) \tag{2}$$

Método 2. Elimine t de las ecuaciones dadas (1) dividiendo por los correspondientes lados para obtener

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{xy}{x^2 + 1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 1}$$

lo cual se puede escribir $\qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{x\,dx}{x^2 + 1}$

La integración da $\qquad \ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln c \quad$ ó $\quad y = c\sqrt{x^2 + 1} \qquad (3)$

De la primera ecuación en (1) obtenemos, como en el Método 1,

$$x = \tan(t + c_1) \tag{4}$$

usando (4) en (3) produce $\qquad y = c \sec(t + c_1)$

de modo que se obtiene la misma solución conseguida por el Método 1.

Observación. Los sistemas de ecuaciones algunas veces se escriben de otras maneras. Por ejemplo, el sistema (1) del ejemplo anterior se podría haber escrito equivalentemente como

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{dy}{xy} = dt$$

3 Ecuaciones diferenciales expresadas como sistemas de primer orden

Hemos visto de los ejemplos anterior& que el método de eliminación aplicado a un sistema de ecuaciones diferenciales resulta en una ecuación diferencial individual. Una pregunta que naturalmente surge es si el recíproco es también cierto, esto es, ¿se puede expresar cualquier ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales ? Podemos mostrar no sólo que la respuesta a esto es "si", si no que podemos demostrar aún más como se indica en el siguiente

Teorema. Cualquier ecuación diferencial ordinaria o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales de *primer orden.*

Este teorema, el cual también tiene algún valor teórico importante, es fácil de probar. Para ello, notamos que cualquier ecuación diferencial ordinaria de orden n, lineal o no lineal, se puede escribir en la forma

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

donde las derivadas son con respecto a t, con tal que podamos resolver para la derivada más alta en términos de las restantes. Si hacemos ahora las siguientes definiciones

$$y' = u_1, \; y'' = u_1' = u_2, \; y''' = u_2' = u_3, \; \ldots, \; y^{(n-1)} = u_{n-2}' = u_{n-1}, \tag{2}$$

la ecuación (1) se puede escribir

$$\frac{dy}{dt} = u_1, \quad \frac{du_1}{dt} = u_2, \ldots \frac{du_{n-2}}{dt} = u_{n-1}, \quad \frac{du_{n-1}}{dt} = g(t, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \tag{3}$$

lo cual es un sistema de n ecuaciones de primer orden en las n variables dependientes y, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Esto prueba el teorema para una ecuación diferencial ordinaria. Una prueba para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es similar y se deja como un ejercicio (Ejercicio 4C, página 452).

Ilustremos el teorema con algunos ejemplos

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Exprese la ecuación diferencial

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 8x = 6 \operatorname{sen} 4t$$

como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución Sea $\dfrac{dx}{dt} = u_1, \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{du_1}{dt} = u_2, \quad \dfrac{d^3x}{dt^3} = \dfrac{du_2}{dt} = u_3$

Entonces la ecuación diferencial dada se puede escribir

$$\frac{du_3}{dt} - 2u_3 + 5u_2 + 3u_1 - 8x = 6 \operatorname{sen} 4t$$

Así la ecuación dada es equivalente al sistema de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = 2u_3 - 5u_2 - 3u_1 + 8x + 6 \operatorname{sen} 4t$$

con variables dependientes x, u_1, u_2, u_3.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Exprese el sistema de ecuaciones diferenciales en el Ejemplo ilustrativo 1, página 442, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

Solución Sea $\dfrac{dx}{dt} = u_1, \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{du_1}{dt}, \quad \dfrac{dy}{dt} = u_2, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{du_2}{dt}$

Entonces el sistema de ecuaciones dado se puede escribir

$$\frac{du_1}{dt} + u_2 - 3x = y, \qquad \frac{du_2}{dt} + u_1 + 4x + 2y = 0$$

el cual es equivalente al sistema de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \qquad \frac{dy}{dt} = u_2, \qquad \frac{du_1}{dt} = 3x + y - u_2, \qquad \frac{du_2}{dt} = -4x - 2y - u_1$$

EJERCICIOS A

1. Encuentre la solución de cada sistema sujeto a cualesquiera condiciones dadas.

(a) $\frac{dy}{dt} = x,\ \frac{dx}{dt} = -y;\ y(0) = 0,\ x(0) = 1.$ (b) $\frac{du}{dx} = 2v - 1,\ \frac{dv}{dx} = 1 + 2u.$

(c) $\frac{dx}{dt} = x + y,\ \frac{dy}{dt} = x - y.$ (d) $\frac{d^2x}{dt^2} = -x,\ \frac{d^2y}{dt^2} = y.$

(e) $\frac{d^2y}{dt^2} = x - 2,\ \frac{d^2x}{dt^2} = y + 2.$

(f) $\frac{dy}{dt} + 6y = \frac{dx}{dt},\ 3x - \frac{dx}{dt} = 2\frac{dy}{dt};\ x = 2,\ y = 3$ en $t = 0.$

(g) $\begin{cases}(D + 1)x + 2y = 1,\\ 2x + (D - 2)y = t.\end{cases}$ (h) $\begin{cases}(D + 2)x + (D - 1)y = -\operatorname{sen} t,\\ (D - 3)x + (D + 2)y = 4\cos t.\end{cases}$

2. Dé una interpretación física al (a) Ejercicio 1(a), (b) Ejercicio 1(e).

3. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 8x = 32t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 2y = 60e^{-t}$$

sujeto a las condiciones $x(0) = 6$, $x'(0) = 8$, $y(0) = -24$, $y'(0) = 0$, y dé una interpretación física.

4. Diga cuáles de los siguientes sistemas son lineales y cuáles son no lineales.

(a) $\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = e^t,\ 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sqrt{t}.$ (b) $\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = xy,\ 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t.$

(c) $\frac{d^2r}{dt^2} = r + \phi,\ \frac{d^2\phi}{dt^2} = 5r - 3\phi + t^2.$ (d) $x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = t^2,\ 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 5t.$

5. Escriba cada uno de los siguientes como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 5\operatorname{sen} 2t.$ (b) $(y'')^2 - (\operatorname{sen} x)y' = y\cos x.$

(c) $x\frac{d^2x}{dt^2} - y = 4t,\ 2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = x.$ (d) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 5\ln x.$

6. Resuelva $\begin{cases} x'' + y' + x = y + \text{sen } t \\ y'' + x' - y = 2t^2 - x \end{cases}$ sujeto a $x(0) = 2, x'(0) = -1, y(0) = -\frac{9}{2}, y'(0) = -\frac{7}{2}$.

7. Exprese como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden al sistema en (a) Ejercicio l(d), (b) Ejercicio 3, (c) Ejercicio 6.

EJERCICIOS B

1. Resuelva $\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = x - y, \frac{dz}{dt} = 2y$ si $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 0$.

2. Resuelva (a) $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$. (b) $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{dz}{z}$.

   ¿Son estos lineales o no lineales? Explique

3. Resuelva el sistema $\begin{cases} x^2y'' + xz' + z = x \\ xy' + z = \ln x \end{cases}$ haciendo primero la transformación $x = e^t$.

   Compare con la ecuación de Euler, página 215.

4. Resuelva el sistema $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x$.

EJERCICIOS C

1. La probabilidad $P_n(t)$ de que un contador (tal como un contador Geiger) registre exactamente n partículas nucleares (tales como las que aparecen en los rayos cósmicos) en un tiempo t se determina del sistema de ecuaciones diferenciales,

$$P'_n(t) = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)], \qquad n \neq 0; \; P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

   donde λ es una constante positiva. Usando condiciones apropiadas, resuelva para $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

   De sus resultados muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

   ¿Cuál es la interpretación probabilística de esto?

2. Resuelva el sistema $\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{z + x} = \frac{dz}{x + y}$

3. Pruebe que el sistema obtenido de acuerdo al teorema en la página 449 es lineal o no lineal de acuerdo a si la ecuación diferencial original es lineal o no lineal.

4. Pruebe que todo sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

4 Aplicaciones a la mecánica

4.1 EL VUELO DE UN PROYECTIL

Suponga que un proyectil se dispara de un cañón el cual está inclinado un ángulo θ_0 con la horizontal y que le imparte al proyectil una velocidad de salida de magnitud v_0. Asumiendo ninguna resistencia del aire y una tierra estacionaria y plana, se requiere describir el vuelo resultante.

Formulación matemática. Localicemos el cañón en el origen 0 de un sistema de ejes coordenados xy (Figura 10.2). La curva punteada indica la trayectoria del proyectil; ***OV*** representa la velocidad de salida, un vector de magnitud v_0 y una dirección en el plano xy formando un ángulo θ_0 con el eje x positivo. Las componentes de la velocidad en las direcciones x y y tienen magnitudes $v_0 \cos\theta_0$ y $v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, respectivamente. Puesto que no hay fuerza de resistencia del aire, la ímica fuerza actuando sobre el proyectil de masa ***m*** es su peso mg. Tomemos "arriba" y "derecha" como las direcciones positivas. De acuerdo a la ley de Newton tenemos:

fuerza neta en la dirección x = masa por la aceleración en la dirección x

fuerza neta en la dirección y = masa por la aceleración en la dirección y.

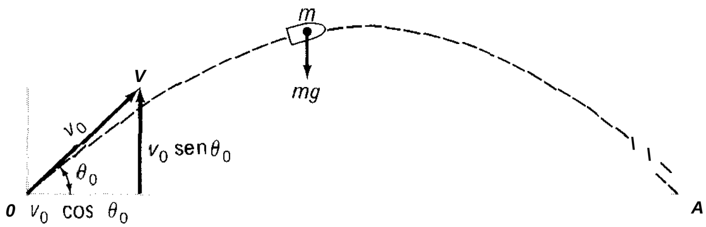


Figura 10.2

las cuales podemos escribir como $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$. Puesto que la fuerza neta en la dirección x es cero y $a_x = d^2 x/dt^2$, tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

Puesto que la fuerza neta en la dirección y es -mg (porque "abajo" es la dirección negativa) y puesto que $a_y = d^2 y/dt^2$, tenemos

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{2}$$

Además, de las condiciones del problema tenemos

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta_0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0, \quad \text{en } t = 0 \tag{3}$$

Nuestra formulación matemática completa consiste de las ecuaciones diferenciales (1) y (2) sujetas a las condiciones (3). De las ecuaciones diferenciales se ve que el movimiento no depende de ***m,*** y por tanto del tamaño del proyectil, con tal de que no haya resistencia del aire.

Solución Al integrar (1) tenemos $dx/dt = c_1$. Aplicando la condición que $dx/dt = v_0 \cos \theta_0$ en $t = 0$, vemos que $c_1 = v_0 \cos \theta_0$, esto *es*, $dx/dt = (v_0 \cos \theta_0)$.* Con otra integración $x = (v_0 \cos \theta_0)t + c_2$, y puesto que $x = 0$ en $t = 0$, $c_2 = 0$ y tenemos

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t \tag{4}$$

De manera similar, tenemos al integrar (2) $\dfrac{dy}{dt} = -gt + c_3$

y puesto que $dy/dt = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$ en $t = 0$, $c_3 = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$, y encontramos

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \tag{5}$$

Con otra integración, usando el hecho de que $y = 0$ en $t = 0$, tenemos

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{6}$$

La solución deseada es $x = (v_0 \cos \theta_0)t,\ y = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2$ (7)

Estas ecuaciones dan la posición (x, y) del proyectil en cualquier tiempo t después del disparo. De ellas podemos discutir cualquier cosa relacionada con el movimiento. Por ejemplo, suponga que hacemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el tiempo total de vuelo de 0 a A (Figura 10.2)?
2. ¿Cuál es el rango (distancia OA sobre el eje x)?
3. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada?
4. ¿Qué tipo de curva describe el proyectil?

La pregunta 1 será contestada si encontramos los valores de t que hacen $y = 0$. De (6) vemos que esto es así cuando

$$t[(v_0 \operatorname{sen} \theta_0) - \tfrac{1}{2}gt] = 0 \quad 0 \quad t = 0; \qquad t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

El segundo valor de t da el tiempo cuando el proyectil está en A. De donde

$$\text{tiempo de vuelo} = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} \tag{8}$$

Para responder en la Pregunta 2 calculamos el valor de x cuando $t =$ tiempo de vuelo. De la primera de las ecuaciones (7) tenemos por tanto

$$\text{rango} = \frac{(v_0 \cos \theta_0)(2v_0 \operatorname{sen} \theta)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} \tag{9}$$

De (9) es claro que el rango es máximo cuando $2\theta_0 = 90°$, esto es, $\theta_0 = 45”$ y el rango máximo es v_0^2/g.

Para responder la Pregunta 3 debemos encontrar cuándo y es un máximo, esto es, cuándo $dy/dt = 0$. Esto equivale a decir que en el punto más alto

*Así, la componente horizontal de la velocidad permanece constante.

la velocidad en la dirección y es cero. De la ecuación (5) tenemos

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt = 0 \qquad \text{donde} \qquad t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

(Note que esto es la mitad del tiempo de vuelo, lo cual parece lógico). Colocando este valor de t en la ecuación (6) para y, encontramos

$$\text{altura máxima} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g} \tag{10}$$

La Pregunta 4 realmente ya se respondió con (7), la cual representa las ecuaciones paramétricas de una parábola. La trayectoria del proyectil es por tanto una porción de una parábola. Eliminando el parámetro t encontramos

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \sec^2 \theta_0 \tag{11}$$

lo cual es otra forma para la parábola

EJERCICIOS A

1. Un proyectil se dispara de un cañón el cual forma un ángulo de 60” con la horizontal. Si la velocidad de salida es 160 pies/seg: (a) Escriba un sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones para el movimiento. (b) Encuentre la posición del proyectil en cualquier tiempo. (c) Encuentre el rango, altura máxima, y tiempo de vuelo. (d) Determine la posición y velocidad del proyectil después de estar en vuelo por 2 y 4 segundos.
2. Determine cuál hubiera sido el rango máximo del cañón “Big Bertha” de la primera guerra mundial el cual tenía una velocidad de salida de 1 milla por segundo, habiendo sido despreciable la resistencia del aire. Para este rango máximo, ¿cuál es la altura alcanzada y el tiempo total de vuelo?
3. Una piedra se lanza horizontalmente desde una colina de 256 pies de altura con una velocidad de 50 pies/seg. (a) Encuentre el tiempo de vuelo. (b) ¿A qué distancia de la base de la colina caerá la piedra?

EJERCICIOS B

1. Un proyectil disparado de un cañón localizado en un plano horizontal tiene un rango de 2.000 pies y alcanza una altura máxima de 1.000 pies. Determine su velocidad de salida y el tiempo de vuelo.
2. Un cañón con velocidad de salida v_0 y formando un ángulo θ con la horizontal se va a disparar para impactar a un objeto localizado al mismo nivel del cañón y a una distancia d de él. Muestre que esto es posible para dos valores de θ dados por $\theta = \pi/4 \pm \phi$, donde

$$\phi = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{gd}{v_0^2}, \qquad d < \frac{v_0^2}{g}$$

Discuta los casos $d \geqq v_0^2/g$.

3. Un plano está inclinado un ángulo α con la horizontal. Un cañón en este plano forma un ángulo θ con la horizontal. Muestre que el rango del proyectil en el plano inclinado es

$$R = \frac{2v_0^2 \cos \theta \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

donde v_0 es la velocidad de salida del cañón. Por tanto muestre que el rango máximo se obtiene cuando $\theta = \alpha/2 + \pi/4$ y que su valor es

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

Discuta el caso $\alpha = 0°$, 90”.

EJERCICIOS C

1. Una pistola está localizada a una distancia horizontal R de la base de una colina de altura H. La pistola, la cual tiene una velocidad de salida v_0, se debe inclinar un ángulo θ con la horizontal y apuntarse para impactar a un blanco en la cima de la colina. Muestre que esto será posible para dos valores de θ dados por

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{H}{R} \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{H + gR^2/v_0^2}{\sqrt{R^2 + H^2}} \quad \text{si} \quad \frac{H + gR^2/v_0^2}{\sqrt{R^2 + H^2}} \leqq 1$$

2. Si en un plano vertical dado se disparan proyectiles de una pistola teniendo velocidad de salida v_0 y localizada en 0 (Figura 10.3), sus trayectorias serán parábolas como se muestran, una parábola correspondiendo a cada ángulo de elevación (o depresión) de la pistola. (a) Determine la envolvente de estas trayectorias parabólicas, mostrando que esta envolvente es también una parábola. (b) Si el punto 0 está a una altura H por encima de un plano horizontal y si la pistola se puede apuntar en todas las posibles direcciones, muestre que el volumen sobre el cual la pistola tiene “control” es

$$\frac{\pi v^2}{g}\left(H + \frac{v^2}{2g}\right)^2$$

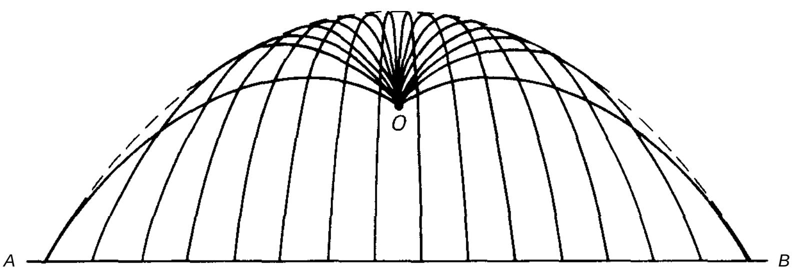


Figura 10.3

3. Discuta el movimiento de un proyectil en el cual se tiene en cuenta la resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea.

4. Un electrón de una masa m y una carga eléctrica q se mueve en un campo electromagnético en el cual los campos eléctrico y magnético tienen magnitudes constantes E y B, respectivamente, y direcciones como se indican en la Figura 10.4. El sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento está dado por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qB\frac{dy}{dt}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -qB\frac{dx}{dt} + qE, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

En tiempo $t = 0$ el electrón está en reposo en el origen. (a) Muestre que para $t > 0$ el electrón se mueve en una trayectoria dada por la cicloide localizada en el plano xy cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \frac{Em}{qB^2}\left(1 - \cos\frac{qBt}{m}\right), \qquad y = \frac{Em}{qB^2}\left(\frac{qBt}{m} - \operatorname{sen}\frac{qBt}{m}\right), \qquad z = 0$$

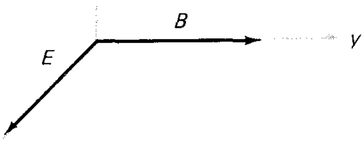


Figura 10.4

(b) Muestre que esta trayectoria cicloidal está descrita por el movimiento de un punto fijo en un círculo C de radio Em/qB^2 el cual rueda a lo largo del eje x a una velocidad E/B, como se indica en la Figura 10.5. Los resultados fueron usados por J. J. Thomson en 1897 para determinar la razón q/m de la carga en un electrón a su masa.

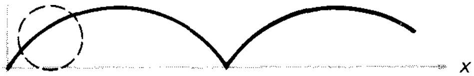


Figura 10.5

5. Describa el movimiento del electrón en el Ejercicio 4 si parte del origen con una velocidad inicial v_0 en la dirección positiva z.
6. Si el electrón del Ejercicio 5 tiene los componentes de su velocidad inicial diferentes de cero en las direcciones x y y y cero en la dirección z, muestre que la trayectoria es una *trocoide* descrita por el movimiento de un punto en el radio de una rueda que gira a lo largo del eje x.

4.2 UNA APLICACION A ASTRONOMIA

De acuerdo a la famosa ley universal de gravitación de Newton. cualesquiera dos objetos separados por una distancia r y con masas M_1 y M_2, respectivamente, se atraen uno a otro con una fuerza teniendo una magnitud dada por

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2} \qquad (12)$$

donde G es una constante de gravitación universal. Es interesante hacer uso de esta ley para describir el movimiento de planetas en nuestro sistema solar. Consideraremos, en particular, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Al discutir este problema, simplificamos nuestra tarea tremendamente al despreciar los efectos de los otros planetas. Consecuentemente, los resultados son aproximados pero, sin embargo, sí representan en un alto grado de precisión, el verdadero estado de cosas como se evidencia por observaciones experimentales.

Formulación matemática. Asumimos al Sol fijo en el origen de un sistema de coordenadas xy y que la Tierra está en el punto (x, y) en el tiempo t de su movimiento (Figura 10.6). Tomamos como direcciones positivas de las cantidades vectoriales las direcciones $+x$ y $+y$. De la figura, la fuerza F actuando sobre la Tierra se ve que tiene componentes x y y de magnitudes $F\cos\phi$ y $F\operatorname{sen}\phi$, respectivamente. Tomando a m_s y m_e como las masas respectivas del Sol y de la Tierra, tenemos, haciendo uso de (12),

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2} = -F\cos\phi = \frac{Gm_em_s}{r^2}\cos\phi \tag{13}$$

$$m_e\frac{d^2y}{dt^2} = -F\operatorname{sen}\phi = -\frac{Gm_em_s}{r^2}\operatorname{sen}\phi \tag{14}$$

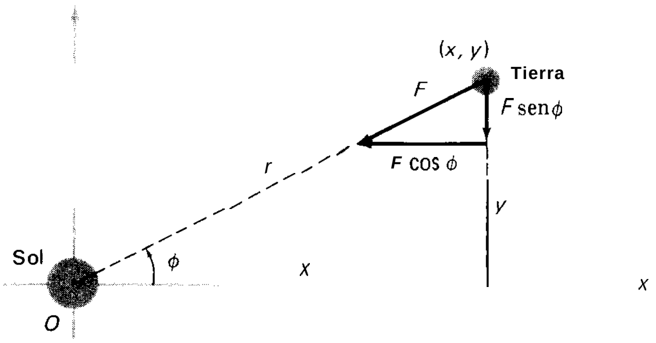


Figura 10.6

Puesto que $\operatorname{sen}\phi = y/r$ y $\cos\phi = x/r$, las ecuaciones (13) y (14) llegan a ser

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{r^3} \tag{15}$$

donde $k = Gm_s$. Puesto que $r = \sqrt{x^2+y^2}$, las ecuaciones (15) se pueden escribir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{16}$$

Como condiciones iniciales asumimos que en $t = 0$, la Tierra está localizada en el eje x, a una distancia a del Sol, y prosigue en la dirección positiva y con velocidad v_0.

Así $$x = a, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{17}$$

Si podemos resolver simultáneamente las ecuaciones (16) sujetas a las condiciones (17), tendremos la solución a nuestro problema.

Solución El sistema de ecuaciones diferenciales (16) es un sistema no lineal, y un poco de experimentación con ellas pronto revela que es difícil si no imposible eliminar x o y. Sin embargo, al notar la presencia de $x^2 + y^2$, podemos ser llevados a considerar un cambio de variables a coordenadas polares. Esto se evidencia más al ver que la posición de la Tierra con respecto al Sol se describe tal vez méjor con coordenadas polares (r, ϕ) que con (x, y). Transformemos por tanto las ecuaciones (16) a coordenadas polares.

Puesto que las ecuaciones que permiten la transformación de coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, ϕ) están dadas por

$$x = r \cos \phi, \qquad y = r \operatorname{sen} \phi$$

tenemos, denotando por puntos las diferenciaciones con respecto a t,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - (r \operatorname{sen} \phi)\dot{\phi} \\
\ddot{x} &= \ddot{r} \cos \phi - 2(\dot{r} \operatorname{sen} \phi)\dot{\phi} - (r \operatorname{sen} \phi)\ddot{\phi} \quad (r \cos \phi)\dot{\phi}^2 \\
\dot{y} &= \dot{r} \operatorname{sen} \phi + (r \cos \phi)\dot{\phi} \\
\ddot{y} &= \ddot{r} \operatorname{sen} \phi + 2(\dot{r} \cos \phi)\dot{\phi} + (r \cos \phi)\ddot{\phi} - (r \operatorname{sen} \phi)\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

Así,
$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \operatorname{sen} \phi \\
\ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \operatorname{sen} \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \phi
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Las ecuaciones (16), al hacer uso de 'las ecuaciones (18), se convierten en

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \operatorname{sen} \phi = -\frac{k \cos \phi}{r^2} \tag{19}$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \operatorname{sen} \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \phi = -\frac{k \operatorname{sen} \phi}{r^2} \tag{20}$$

Multiplicando la ecuación (19) por $\cos \phi$, la ecuación (20) por sen ϕ, y sumando,

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{k}{r^2} \tag{21}$$

También multiplicando (19) por sen ϕ, (20) por $\cos \phi$, y restando,

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \tag{22}$$

Las condiciones (17) en forma rectangular necesitan ser remplazadas pór las correspondientes condiciones en forma polar. Correspondiente a las condiciones (17), tenemos

$$r = a, \qquad \phi = 0, \qquad \dot{r} = 0, \qquad \dot{\phi} = \frac{v_0}{a} \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{23}$$

Debemos resolver ahora (21) y (22) simultáneamente sujetas a las condiciones (23). Se obtiene una simplificación si notamos que el lado izquierdo (22) es $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})$ como se verifica fácilmente. Así (22) se puede remplazar por

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \quad \text{o} \quad r^2\dot{\phi} = c_1 \tag{24}$$

Esta ecuación tiene una interpretación interesante. Suponga un objeto que se mueve de P a Q a lo largo del arco PQ (Figura 10.7). Sea A el área acotada por las líneas OP, OQ, y el arco PQ. Entonces del cálculo elemental,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} r^2\, d\phi \text{ esto es, } dA = \tfrac{1}{2}r^2\, d\phi \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\phi}$$

La cantidad dA/dt se llama la *velocidad areal*. Puesto que $r^2\dot{\phi}$ es constante por (24), sigue que la velocidad areal es constante. Esto equivale a decir que el objeto se mueve de modo tal que áreas iguales se describen en tiempos iguales, o que el radio vector (línea trazada de 0 al objeto) "barre" áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley *de áreas* es la primera de las tres leyes famosas de Kepler. Estas leyes se basaron en deducciones de las voluminosas observaciones del astrónomo Tycho Brahe quien gastó muchos años en la compilación de datos. Enunciamos ahora las

Leyes de Kepler

1. *Cada uno de los planetas se mueve en una curva plana alrededor del Sol, de tal manera que el radio vector trazado del Sol a los planetas describe áreas iguales en tiempos iguales.*

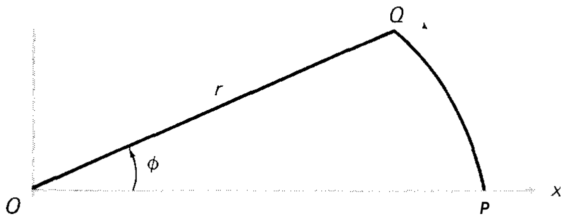


Figura 10.7

2. *Las trayectorias de los planetas son elipses, con el Sol en uno de los focos.*
3. *Los cuadrados de los períodos (tiempo para una revolución completa alrededor del Sol) varían directamente a los cubos de los ejes mayores de las elipses.*

Fue esencialmente debido al trabajo de Kepler de organizar los datos de Tycho Brahe que Newton fue capaz, con la ayuda del cálculo, de formular su famosa ley universal de gravitación la cual se aplica, no sólo a los planetas, sino a todos los objetos. En esta sección no hemos usado el enfoque histórico sino que en vez empezamos con la ley universal de gravitación de Newton, y dedujimos la primera ley de Kepler. En esta sección también deduciremos la segunda ley. La tercera ley se deja a los Ejercicios B para el estudiante interesado. En adición, en el Ejercicio 5C, se indica la manera en la cual Newton fue rigurosamente capaz de deducir su ley universal de gravitación a partir de las leyes de Kepler.

Regresemos ahora a la solución de (21) y (22) sujetas a (23). De (23) vemos que $r = a$, $\dot\phi = v_0/a$ en $t = 0$. Por tanto, de (24) $c_1 = av_0$. Así, podemos escribir $r^2\dot\phi = av_0$. De esto, $\dot\phi = av_0/r^2$ y (21) llega a ser

$$\ddot r = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2} \tag{25}$$

una ecuación en la cual no aparece ϕ. La ecuación (25) no involucra a t explícitamente. Por tanto, haciendo $\dot r = p$ la ecuación se puede escribir

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = p\frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2} \quad \text{o} \quad p\frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}$$

Separando las variables e integrando esta última ecuación produce

$$\frac{p^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{2r^2} + c_2 \tag{26}$$

De (26), puesto que $p = \dot r = 0$ donde $r = a$, tenemos $c_2 = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{k}{a}$

Así,
$$\frac{\dot r^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a} \quad \text{o} \quad \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2k}{a}\right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{r^2}} \tag{27}$$

De esto podemos obtener r como una función de t (ver Ejercicio 8C). De mayor interés, tal vez, es una descripción de la trayectoria tomada por la Tierra en su movimiento. Para determinar esto, desearíamos una ecuación que contuviera r y ϕ. De (27) y $\dot\phi = av_0/r^2$, tenemos las ecuaciones simultáneas.

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2k}{a}\right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{r^2}}, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{av_0}{r^2} \tag{28}$$

La ecuación diferencial deseada relacionando r y ϕ pero no conteniendo a t se puede obtener al dividir las ecuaciones en (28). Encontramos

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r\sqrt{Ar^2 + 2Br - 1}, \qquad \text{donde } A = \frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3v_0^2},\ B = \frac{k}{a^2v_0^2} \tag{29}$$

Así
$$\int \frac{dr}{r\sqrt{Ar^2 + 2Br - 1}} = \pm\int d\phi = \pm\phi + c_3 \tag{30}$$

Es útil hacer la sustitución $r = 1/u$ en la integral a la izquierda de (30), para obtener

$$-\int \frac{du}{\sqrt{A + 2Bu - u^2}} = \pm\phi + c_3 \quad \text{o} \quad -\int \frac{du}{\sqrt{A + B^2 - (u - B)^2}} = \pm\phi + c_3$$

esto es, $$\cos^{-1} \frac{(u - B)}{\sqrt{A + B^2}} = \pm \phi + c_3$$

Entonces $$u = B + \sqrt{A + B^2}\cos(\phi + c_4) = B[1 + \epsilon \cos(\phi + c_4)]$$

donde $$\epsilon = \frac{\sqrt{A + B^2}}{B} = \frac{a^2 v_0^2}{k}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^2 v_0^2} + \frac{k^2}{a^4 v_0^4}\right)^{1/2} = \left|\frac{a v_0^2}{k} - 1\right| \tag{31}$$

Puesto que u = $1/r$ $$r = \frac{a^2 v_0^2/k}{1 + \epsilon\cos(\phi + c_4)} \tag{32}$$

Dos casos pueden surgir, $(av_0^2/k) - 1 \geqq 0$ y $(av_0^2/k) - 1 < 0$.

Caso *1*, $(av_0^2/k) - 1 \geqq 0$. En este caso $$\epsilon = \frac{av_0^2}{k} - 1 \geqq 0 \tag{33}$$

y (32) se puede escribir $$r = \frac{a(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon\cos(\phi + c_4)} \tag{34}$$

Puesto que debemos tener $r = a$, $\phi = 0$ por la condición (23), encontramos al usar (34) que $\cos c_4 = 1$, $c_4 = 0$. Así, (34) llega a ser

$$r = \frac{a(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon\cos\phi} \tag{35}$$

De la geometría analítica sabemos que (35) es la forma polar de una sección cónica teniendo excentricidad ϵ. Esta puede representar cuatro tipos de curvas, como se dan en la Tabla 10.1.

Tabla 10.1 **Tipos de órbitas**

Tipo 1	Elipse	si	$0 < \epsilon < 1$	esto es,	$k/a < v_0^2 < 2k/a$
Tipo 2	Círculo	si	$\epsilon = 0$	esto es,	$v_0^2 = k/a$
Tipo 3	Parábola	si	$\epsilon = 1$	esto es,	$v_0^2 = 2k/a$
Tipo 4	Hipérbola	si	$\epsilon > 1$	esto es,	$v_0^2 > 2k/a$

En nuestro problema del Sol y la Tierra (o cualquier planeta en nuestro sistema solar) tenemos $0 < \epsilon < 1$ de modo que la curva que describe la órbita de la Tierra alrededor del Sol es de Tipo 1, esto es, una elipse con el Sol en uno de sus focos, como lo predice la segunda ley de Kepler. Esta elipse se muestra en la Figura 10.8. En esta figura, a es la distancia de la Tierra al Sol ***en su posición más próxima P,*** con frecuencia llamada ***perihelio*** (del griego *peri*, que significa ***cerca, y helio,*** que significa Sol). Puesto que tenemos

$$\epsilon = \frac{av_0^2}{k} - 1, \qquad k = Gm_s \tag{36}$$

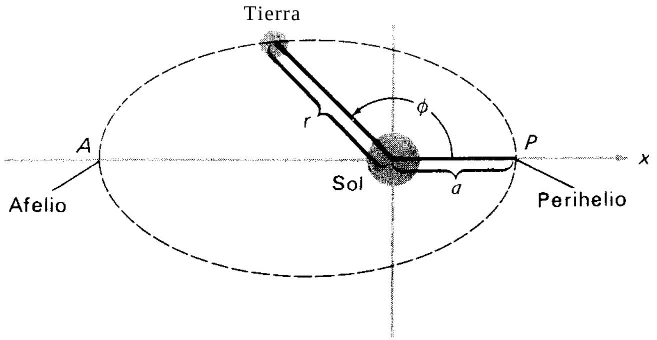


Figura 10.8

sigue que la velocidad en el perihelio está dada por

$$v_0^2 = \frac{Gm_s(1+\epsilon)}{a} \tag{37}$$

La distancia de la Tierra al Sol en ***su posición más alejada A,*** con frecuencia llamada afelio (del griego *apo*, que significa lejos ***de)*** se puede obtener de (35) colocando $\phi = \pi$. Encontramos

$$\text{máxima distancia del Sol (afelio)} = \frac{a(1+\epsilon)}{1-E} \tag{38}$$

Puesto que $r^2\dot{\phi} = av_0$, la velocidad en el afelio denotada por v_A está dada por $r\dot{\phi}$, donde $r = a(l+\epsilon)/(1-$ t). Esto lleva a

$$\text{velocidad en el afelio} = v_A = \frac{v_0(1-\epsilon)}{1+\epsilon} \tag{39}$$

Esto muestra como podríamos esperar, que la velocidad en el afelio es menor que aquella en el perihelio.

Observaciones similares se pueden hacer para todos los planetas; esto es, ellos tienen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos, demostrando la segunda ley de Kepler. Así la Figura 10.8 se aplica a cualquier otro planeta en lugar de la Tierra. Por supuesto, las órbitas tienen todas excentricidades, perihelios, afelios, etc., diferentes, pero los resultados anteriores son aún válidos.*

Los siguientes son ejemplos adicionales donde pueden surgir los varios tipos de curvas en la Tabla 10.1.

*Al derivar los resultados anteriores se asumió por supuesto que sólo se consideran dos cuerpos, esto es, el Sol y el planeta, y que los efectos de los otros planetas son despreciables. Aunque este es el caso para la mayoría de propósitos prácticos, se consigue mayor precisión si este **problema** de ***dos*** *cuerpos* se remplaza por uno de n cuerpos, donde $n \geqq 3$. Desafortunadamente, este problema no se puede resolver exactamente, pero aproximaciones son posibles. Aún con tales aproximaciones se descubrió al final del siglo XIX que ciertas discrepancias en la órbita del planeta Mercurio no podían explicarse con la mecánica Newtoniana. Sin embargo, Einstein, usando ***su*** *teoría* ***de la relatividad,*** fue capaz de resolverlas.

Ejemplo 1. La Tierra y la Luna. En este caso la órbita de la Luna es una elipse con la Tierra en uno de sus focos. Sin embargo, puesto que la excentricidad es aproximadamente cero, la órbita es casi circular (tipo 2).

Ejemplo 2. Cometas recurrentes. En este caso un cometa puede tener una órbita en la forma de una elipse elongada con una excentricidad menor que pero próxima a 1. El tiempo para que reaparezca un cometa depende de la excentricidad de esta trayectoria elíptica. Un ejemplo importante de un cometa recurrente es el *cometa* de *Halley*, el cual aparecer cerca a la Tierra cada 76 años aproximadamente. La última aparición fue en 1910, y se espera reaparecer próximamente en 1986.

Ejemplo 3. Orbitas parabólicas e hiperbólicas. Podemos también tener objetos con órbitas parabólicas o hiperbólicas (tipo 3 y 4), los cuales aparecerán, teóricamente, sólo una vez, para nunca retornar, como se indica en la Figura 10.9. Ejemplos son los meteoros del espacio exterior. Antes de la comprensión de tales eventos, los arribos de esos objetos fueron probablemente clasificados como "milagros".

Otros ejemplos de órbitas parabólicas e hiperbólicas ocurren en conexión con experimentos que involucran partículas de dimensiones atómicas desarrollados en ***cámaras de nube*** en muchas de nuestras universidades. Tales cámaras están diseñadas para revelar "pistas de niebla" de tales partículas atómicas de alta velocidad a medida que orbitan en una trayectoria parabólica o hiperbólica alrededor de una partícula más masiva localizada en el foco. Como se podría esperar, órbitas parabólicas son raras en la práctica debido a que cualquier perturbación pequeña puede cambiar la órbita de una parábola a una elipse o hiperbola.

Cuso 2, $(av_0^2/k) - 1 < 0$. En este caso $0 < \epsilon = 1 - \dfrac{av_0^2}{k} < 1$ (40)

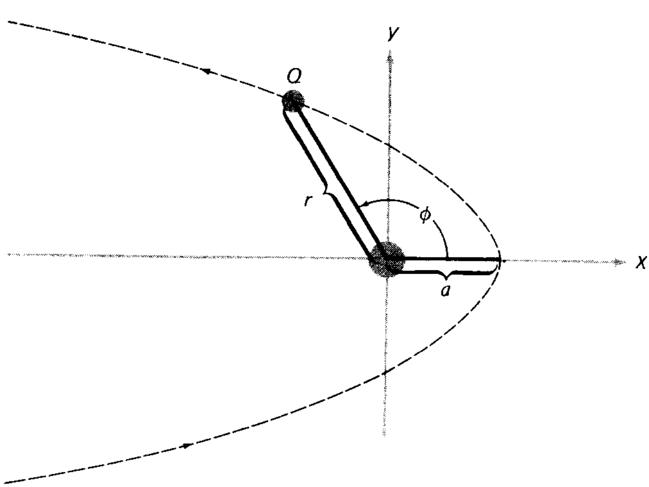


Figura 10.9

y (32) se puede escribir $$r = \frac{a(1-\epsilon)}{1+\epsilon\cos(\phi + c_4)} \tag{41}$$

Usando $r = a$, $\phi = 0$ en (41), encontramos $\cos c_4 = -1$, $c_4 = \pi$, de modo que

$$r = \frac{a(1-\epsilon)}{1-\epsilon\cos\phi} \tag{42}$$

Esto también es una elipse de excentricidad ϵ. Sin embargo, como vemos al colocar $\phi = \pi$ en (42), el perihelio está a la distancia $a(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$ del foco mientras que el afelio está a la distancia a del foco. Así la elipse es la recíproca de la que se muestra en la Figura 10.8. Puesto que este caso no aporta nada nuevo, sólo el Caso 1 necesita ser considerado.

Se debería notar que la primera ley de Kepler, enunciada en la pagina 460 para movimiento planetario en órbitas elípticas (o circulares), es válida también para órbitas parabólicas e hiperbólicas. La velocidad areal dada por $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ es así una constante para cualquier curva orbital del tipo dado en la Tabla 10.1. Esta constante con frecuencia se denota por $\frac{1}{2}h$, de modo que tenemos

$$\text{velocidad areal} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}av_0$$

donde la última igualdad se desprende de la página 461.

En términos de la ecuación de la velocidad areal, (35) se puede escribir como

$$r = \frac{h^2/k}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{43}$$

4.3 EL MOVIMIENTO DE SATELITES Y MISILES

La teoría anterior también es aplicable con ligeras modificaciones al movimiento de ***satélites artificiales o hechos por el hombre*** lanzados por medio de cohetes desde la superficie de la Tierra. Existe de hecho una teoría que sostiene que la Luna, la cual por supuesto se puede considerar como un satélite natural de la Tierra, se formó durante etapas iniciales en la evolución de la Tierra cuando la Tierra en un estado derretido "expulsó" una parte de ella. La misma teoría podría también explicar el origen de la Tierra y otros planetas siendo "expulsados" desde el Sol para convertirse en sus satélites.

Los satélites artificiales tienen muchas aplicaciones, y como a menudo es el caso en la ciencia algunos de estos trabajan en beneficio de la humanidad y otros pueden llevarla a su destrucción. El uso de satélites tiene propósitos beneficiosos para predecir patrones del clima, proporcionar información científica concerniente a fenómenos tales como rayos cósmicos o radiación solar, y permitir comunicaciones de radio y televisión. Con propósitos de destrucción potencial está el uso de satélites para espionaje y lanzamiento de armas. nucleares.

Como una ilustración del uso de la teoría anterior en conexión con satélites artificiales, supongamos que se lanza un satélite con un cohete y se coloca en órbita alrededor de la Tierra. Los detalles de tal lanzamiento basado en los principios de astronáutica, aunque fascinantes, no se discutirán aquí. La órbita de un satélite es, en general, una elipse de excentricidad muy próxima a cero de modo que su órbita es casi circular. El movimiento es como aquel en la Figura 10.7, con el Sol en el foco remplazado por la Tierra y la Tierra remplazada por el satélite, excepto que la elipse es más como un círculo.

Los resultados ya derivados se adaptan fácilmente para producir los resultados para el movimiento de satélites. Así, por ejemplo, en el movimiento de satélites alrededor de la Tierra debemos remplazar la masa del Sol m_s por la masa de la Tierra m_e. Similarmente, si tenemos el movimiento de satélites alrededor de la Luna, debemos remplazar la masa del Sol por la masa de la Luna.

Como una ilustración del uso de la teoría ya desarrollada para movimiento planetario en ejemplos de movimiento de satélites, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un satélite lanzado desde la superficie de la Tierra gira en una órbita casi circular a una altitud b por encima de la superficie de la Tierra. Determine (a) su velocidad orbital, y (b) el tiempo para una revolución completa alrededor de la Tierra.

Solución (a) Podemos adaptar el resultado (37), página 463, a este problema cambiando m_s por m_e, obteniendo así

$$v_0^2 = \frac{Gm_e(1+\epsilon)}{a} \tag{44}$$

Puesto que la órbita es casi circular, podemos tomar la excentricidad $\epsilon = 0$, y en este caso la distancia a désde el centro de la Tierra será muy aproximadamente constante e igual a

$$a = R_e + b \tag{45}$$

donde R_e es el radio de la Tierra. Para obtener la cantidad Gm_e en (44), podemos usar el hecho de que en la superficie de la Tierra la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite es el peso mg del satélite. Así, usando la ley universal de gravitación de Newton,

$$F = \frac{Gm_e m}{R_e^2} = mg \quad \text{o} \quad Gm_e = gR_e^2 \tag{46}$$

Usando esto en (44), $v_0^2 = \dfrac{gR_e^2}{R_e + b}$ o $v_0 = R_e\sqrt{\dfrac{g}{R_e + h}}$ (47)

Puesto que b es en general mucho más pequeño que el radio de la Tierra R_e, podemos despreciar b comparado con R_e en (47) de modo que

$$v_0 = \sqrt{gR_e} \tag{48}$$

Tomando g = 9,8 m/seg² y $R_e = 6{,}6 \times 10^5$ m aproximadamente, encontramos

$$v_0 = \sqrt{(9{,}8)(6{,}6 \times 10^6)}\ \text{m/seg} = 8.000\ \text{m/seg}$$

esto es, cerca de 290.000 km h o 170.000 millas/ h.

(b) Puesto que la circunferencia de un círculo de radio $a = R_e + b$ es $2\pi(R_e + b)$, vemos que el tiempo para una revolución completa ***o período orbital*** está dado por

$$T = \frac{2\pi(R_e + b)}{v_0} = \frac{2\pi(R_e + b)^{3/2}}{R_e\sqrt{g}} \tag{49}$$

si se usa el resultado para v_0 dado en (47). Sin embargo, si asumimos como antes que b es despreciable comparado con R_e, (49) llega a ser

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}6 \times 10^6}{9{,}8}}\ \text{seg} = 5.200\ \text{seg}$$

o cerca de $1\frac{1}{2}$ h. Esto es realmente el tiempo correcto para el período orbital de un satélite girando cerca a la superficie de la Tierra como se observa en nuestro programa espacial.

Se debería enfatizar que la velocidad y período orbital variarían considerablemente de los valores dados anteriormente si la altitud del satélite por encima de la superficie de la Tierra no es despreciable comparada con el radio de la Tierra o si la órbita del satélite es elíptica en vez de casi circular. Que esto es así se puede conjeturar del hecho de que la Luna, la cual se puede considerar como un satélite de la Tierra, tiene un período orbital de cerca de 28 días.

Cuando un satélite está en una órbita elíptica alrededor de la Tierra, el punto en el cual está *más próximo* a la Tierra con frecuencia se llama el *perigeo* (del griego *peri* para *próximo y geios* para *Tierra).* Similarmente, el punto en el cual está más alejado de la Tierra se llama el *apogeo* (del griego *apo*, que significa lejos de). Estos se deben comparar con las palabras perihelio y afelio. Por conveniencia las palabras perigeo y apogeo con frecuencia se usan para movimiento de satélite alrededor de cualquier cuerpo además de la Tierra.

Las ideas básicas dadas anteriormente se pueden adaptar para usarlas en viajes a través del espacio a los varios planetas de nuestro sistema solar. Desde un punto de vista más destructivo, ellas se pueden usar para el lanzamiento de un misil de un continente a otro, esto *es*, un *misil balístico intercontinental* (ICBM). El problema es similar a aquel con el cual empezamos nuestra discusión en la página 452, excepto que debido a que las distancias son mucho más grandes se debe tener en cuenta la curvatura de la Tierra, esto es, no podemos usar la simplificación de una "tierra plana" como en la página 452, En vez del movimiento de satélite en el cual la órbita circunda la Tierra, la trayectoria de un misil lanzado desde alguna posición P_1 en la Tierra intersectaría la superficie de la Tierra en alguna otra posición P_2, como se muestra en la Figura 10.10.

EJERCICIOS A

1. Muestre que la velocidad areal en coordenadas rectangulares es $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$

2. (a) Use las ecuaciones (16), página **458,** para mostrar que $x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$. (b) Demuestre que $x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x})$ y así deduzca con el uso del Ejercicio 1 que la velocidad areal es constante sin hacer uso de coordenadas polares.

3. Un objeto de masa m es atraido hacia un punto fijo 0 con una fuerza proporcional a la distancia instantánea de 0. Sea 0 el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y sea (x, y) para representar la posición del objeto en cualquier tiempo. (a) Establezca las ecuaciones diferenciales que describan el movimiento. (b) Si el objeto empieza en el eje x a una distancia a de 0 y se le da una velocidad inicial de v_0 en la dirección positiva y, muestre que la trayectoria es una elipse

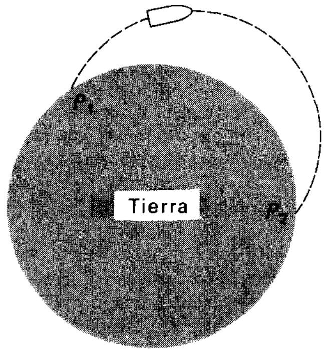


Figura 10.10

con centro en 0. ¿Bajo qué condiciones la trayectoria es un círculo? (c) Muestre que el radio vector que une la masa y el punto 0 barre áreas iguales en tiempos iguales, esto es, muestre que la velocidad areal $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ es constante. ¿Cuál es el valor de esta constante?

4. Si la fuerza en el Ejercicio 3 es de repulsión en vez de atracción, muestre que la trayectoria es una porción de una hipérbola. ¿Es la velocidad areal constante en este caso? Discuta el caso $v_0 = 0$.

5. Encuentre las distancias máxima y mínima de la Tierra (u otro planeta) al Sol (foco) haciendo dr/dt en (27), página 461, igual a cero.

6. En la elipse de la Figura 10.8, página 463, encuentre (a) la longitud del eje mayor; (b) la localización del otro foco.

7. Si un planeta se mueve en una órbita elíptica de excentricidad $\frac{1}{2}$, muestre que (a) la razón de la distancia al afelio a la distancia al perihelio es 3:1, mientras que (b) la razón de las velocidades correspondientes es 1:3.

8. Un astronauta está en órbita alrededor de la Tierra en una trayectoria elíptica de excentricidad 0.1. En el perigeo él está a 1.000 Km por encima de la superficie de la Tierra. Encuentre (a) su velocidad orbital en el perigeo, (b) su altitud en el apogeo, y (c) su velocidad orbital en el apogeo.

9. Trabaje el Ejemplo ilustrativo en la página 466 si el satélite está en órbita alrededor de la Luna. Asumiendo que b es despreciable comparado con el radio de la Luna, ¿cuál sería (a) la velocidad orbital y (b) el período orbital?

EJERCICIOS B

1. Muestre que la longitud del eje menor de la elipse de la Figura 10.8 es $2a\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$,

2. Muestre que la ecuación de la elipse de la Figura 10.8 se puede escribir como $r = \frac{\beta^2/\alpha}{1+\epsilon\cos\phi}$ donde α y β son las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectiaamente. Por comparación con la ecuación (43) en la página 465 muestre que la velocidad areal está dada por

$$h = \beta\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$$

3. El tiempo T para que un planeta realice una revolución completa en su órbita elíptica es el *período* del planeta. Muestre que

$$T = \frac{\text{área de la elipse}}{\text{velocidad areal}} = \frac{2\pi\alpha\beta}{h} = \frac{2\pi\alpha^{3/2}}{\sqrt{k}}$$

usando el resultado del Ejercicio 2. Pruebe así la tercera ley de Kepler.

4. El período de revolución del planeta Júpiter alrededor del Sol es 11,9 arios terrestres. Encuentre la longitud del semieje mayor de su órbita y así encuentre la distancia aproximada del Sol.
5. La excentricidad de la órbita elíptica del planeta Mercurio es cerca de 0,21, y su período de rotación alrededor del Sol es cerca de 88 días terrestres. (a) ¿Cuáles son las longitudes de los semiejes mayor y menor de su órbita? (b) ¿Cuáles son sus distancias del Sol al afelio y perihelio?
6. Asumiendo que el radio de la Tierra es 3.690 millas y que el período orbital de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es 27,3 días, encuentre la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna.
7. El primer satélite tripulado por dos hombres de los Estados Unidos que orbitó la Tierra fue el Géminis 12, lanzado el 11 de noviembre de 1966: Tenía un perigeo de 243 millas y un apogeo de 310 millas. Calcule el período orbital y compare con el realmente observado de 89,9 min.
8. Explorer 1, un satélite lanzado por los Estados Unidos en 1958, alcanzó una altitud máxima sobre la Tierra de 2.550 millas y una altitud mínima de 356 millas. Calcule el período orbital y compare con el realmente observado de 115 min.
9. Un satélite terrestre lanzado por los Estados Unidos en 1969 fue diseñado para permanecer en órbita por más de 1 millón de años. La órbita es casi circular y de radio 35.800 millas aproximadamente. Calcule el período orbital, despreciando la influencia de la Luna, y compare con el período orbital real de cerca de 24 h.
10. Suponga que en el perigeo un satélite repentinamente sufre un aumento en su velocidad orbital v_0 de tal manera que la órbita se agranda y últimamente llega a ***ser*** parabólica. La menor velocidad v_p necesaria para hacer esto con frecuencia se llama la ***velocidad parabólica y*** equivale a una ***velocidad de escape.*** Muestre que $v_p = \sqrt{2}v_0$.

EJERCICIOS C

1. Un objeto de masa m se mueve de modo que es atraído a un punto fijo 0 (tomado como el origen de un sistema de coordenadas ny) con una fuerza ***F(r),*** donde r es la distancia instantánea de la masa de 0. Tal fuerza que depende sólo de r se llama una ***fuerza central.*** (a) Muestre que las ecuaciones del movimiento son (los puntos denotan derivadas con respecto a t).

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{r}F(r), \qquad m\ddot{y} = -\frac{y}{r}F(r)$$

(b) Pruebe que $x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$, y así que $x\dot{y} - y\dot{x} = h$, donde h es una constante. Usando el resultado del Ejercicio 2A, muestre que la velocidad areal es constante independiente de la forma de la fuerza central.

2. Muestre que las ecuaciones diferenciales del Ejercicio 1(a) se pueden remplazar por

$$m(\ddot{r} \quad r\dot{\phi}^2) = -F(r), \qquad m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0$$

Deduzca que $r^2 \dot{\phi} = h$ y así muestre que el problema de la fuerza central se reduce a resolver

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m}$$

3. Problemas que involucran fuerzas centrales se simplifican con el uso de la transformación $u = 1/r$. Muestre que esta transformación produce el resultado

$$\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2}$$

Transforme así la ecuación diferencial del Ejercicio 2 en $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = \dfrac{G(u)}{mh^2u^2}$

donde $F(1/u) \equiv G(u)$.

4. Para una fuerza central dada por $F(r) = k/r^2$, muestre que la ecuación diferencial del Ejercicio 3 se convierte en

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{k}{mh^2} \quad \text{ó} \quad u = A\cos\phi + B\,\text{sen}\phi + \frac{k}{mh^2}$$

Compare con el resultado del texto

5. Muestre que para que un objeto se mueva a lo largo de la elipse $r = \dfrac{l}{1+\epsilon\cos\phi}$ bajo la influencia de una fuerza central $F(r)$ localizada en el origen, debemos tener

$$F(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Históricamente, esta es la manera en la cual Newton dedujo de la ley de Kepler la "ley del cuadrado inverso" para planetas y finalmente su ley universal de gravitación para todos los objetos.

6. Usando la ecuación diferencial del Ejercicio 3, discuta el movimiento de un objeto que se mueve en un campo de fuerza central dada por $F(r) = k/r^3$, asumiendo que empieza en (a, 0), con velocidad inicial v_0 en la dirección positiva y. Muestre que si $k = mh^2 = ma^2v_0^2$, la masa gira hacia el origen pero nunca lo alcanza.

7. Un objeto se 'mueve bajo la influencia de una fuerza central en el origen de un sistema de coordenadas. Si la trayectoria del objeto es el círculo $r = a\cos\phi$, determine la ley de la fuerza.

8. Integre la ecuación (27) del texto y así obtenga la posición de la Tierra (u otro planeta) con respecto al Sol en cualquier tiempo.

9. Establezca un sistema de ecuaciones diferenciales que describan el movimiento de tres cuerpos de masas conocidas, siendo las únicas fuerzas sus mutuas atracciones gravitacionales. Este problema de determinar el movimiento de tres cuerpos dadas sus posiciones y velocidades instantáneas en algún instante de tiempo, se llama el *problema de los tres cuerpos;* nunca ha sido resuelto exactamente excepto en ciertos casos muy especiales (tales como cuando los cuerpos están en la misma línea recta como en la página 117). Un *problema de n cuerpos* similar se puede formular donde $n > 3$.

4.4 EL PROBLEMA DE LAS MASAS VIBRANTES

Un sistema consiste de los resortes, A, B, C y de los objetos D y E acoplados en una línea recta sobre una mesa horizontal sin fricción RS (Figura

10.11), estando los extremos de los resortes A y C fijos en 0 y P, respectivamente. Los resortes, de una masa despreciable, cada uno tiene constante k, y los objetos tienen igual masa M. El sistema se pone a vibrar sujetando D en su lugar, moviendo E a la derecha una distancia $a > 0$, y luego soltando ambos objetos. El problema es determinar la posición de los objetos D y E en cualquier tiempo t en adelante.

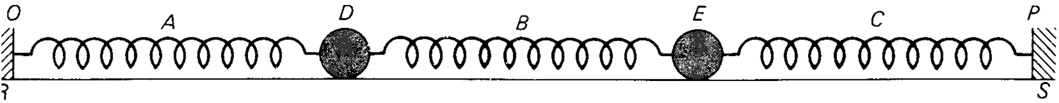


Figura 10.11

Formulación matemática. Para determinar las ecuaciones diferenciales del rnovimiento veamos qué condiciones prevalecen en tiempo t. En este tiempo D y E pueden estar algo desplazadas de su posición de equilibrio, como se muestra la Figura 10.12. Suponga que en este tiempo los objetos están localizados a las distancias x_1 y x_2 de sus respectivas posiciones de equilibrio indicadas por las líneas punteadas en la figura. Asumiremos que las direcciones hacia la derecha son positivas. Consideremos las fuerzas sobre D y E en tiempo t:

1. El resorte A está ejerciendo una fuerza sobre D hacia la izquierda de magnitud kx_1.
2. El resorte B está ejerciendo una fuerza sobre D hacia la derecha de magnitud $k(x_2 - x_1)$.
3. El resorte C no está ejerciendo fuerza directa sobre D.

La fuerza neta hacia la derecha es $k(x_2 - x_1) - kx_1 = k(x_2 - 2x_1)$. De donde

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1) \tag{50}$$

por la ley de Newton. Similarmente,

1. El resorte A no está ejerciendo fuerza directa sobre E.
2. El resorte B está ejerciendo una fuerza sobre E hacia la izquierda de magnitud $k(x_2 - x_1)$.
3. El resorte C está ejerciendo una fuerza sobre E hacia la izquierda de magnitud kx_2.

La fuerza neta hacia la izquierda es $-k(x_2 - x_1) - kx_2 = k(x_1 - 2x_2)$. De donde

$$M\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2) \tag{51}$$

por la ley de Newton. Las condiciones iniciales están dadas por

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad \frac{dx_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 0, \text{ en } t = 0 \tag{52}$$

Nuestra formulación matemática consiste de las ecuaciones (50) y (51), las cuales debemos resolver simultáneamente sujetas a las condiciones (52).

Solución Haciendo $\omega^2 = k/M$, las ecuaciones (50) y (51) se pueden escribir

$$(D^2 + 2\omega^2)x_1 - \omega^2 x_2 = 0, \qquad -\omega^2 x_1 + (D^2 + 2\omega^2)x_2 = 0 \tag{53}$$

donde $D \equiv d/dt$. Para eliminar x_2 de las ecuaciones (53) operemos sobre la primera ecuación con $D^2 + 2\omega^2$ y multipliquemos la segunda ecuación por ω^2 para obtener

$$(D^2 + 2\omega^2)^2 x_1 - \omega^2(D^2 + 2\omega^2)x_2 = 0, \qquad -\omega^4 x_1 + \omega^2(D^2 + 2\omega^2)x_2 = 0$$

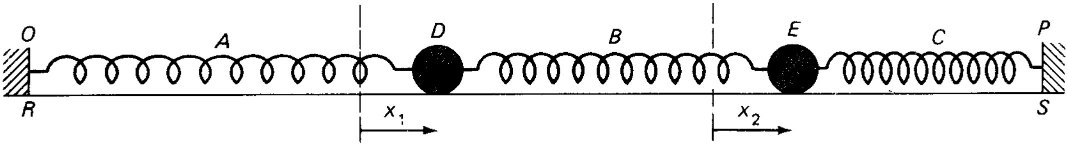


Figura 10.12

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$[(D^2 + 2\omega^2)^2 - \omega^4]x_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad (D^4 + 4\omega^2 D^2 + 3\omega^4)x_1 = 0 \tag{54}$$

La ecuación auxiliar correspondiente a esta última ecuación diferencial es $m^4 + 4\omega^2 m^2 + 3\omega^4 = 0$, esto es, $(m^2 + \omega^2)(m^2 + 3\omega^2) = 0$ de donde $m^2 = -\omega^2, \ -3\omega^2$ ó $m = \pm i\omega, \ \pm i\sqrt{3}\omega$. Así la solución de (54) es

$$x_1 = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + c_3 \cos \sqrt{3}\omega t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}\omega t \tag{55}$$

En una manera exactamente análoga encontramos eliminando x_1 la ecuación

$$(D^4 + 4\omega^2 D^2 + 3\omega^4)x_2 = 0$$

la cual es la misma (54), y por tanto tiene la solución

$$x_2 = c_5 \cos \omega t + c_6 \operatorname{sen} \omega t + c_7 \cos \sqrt{3}\omega t + c_8 \operatorname{sen} \sqrt{3}wt \tag{56}$$

El determinante de los coeficientes en las ecuaciones (53) es

$$\begin{vmatrix} D^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & D^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = D^4 + 4\omega^2 D^2 + 3\omega^4$$

un polinomio en D de cuarto grado, así que debe haber un total de cuatro constantes arbitrarias. Tenemos ocho. Si sustituimos x_1 y x_2 de (55) y (56) en las ecuaciones originales, encontramos las relaciones entre las constantes

$$c_5 = c_1, \qquad c_6 = c_2, \qquad c_7 = -c_3, \qquad c_8 = -c_4$$

De (55) y (56) encontramos así

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + c_3\cos\sqrt{3}\omega t + c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}\omega t \\ x_2 &= c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t - c_3\cos\sqrt{3}\omega t - c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}\omega t \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Usando las condiciones (52) se obtiene

de modo que $\quad x_1 = \dfrac{a}{2}(\cos\omega t - \cos\sqrt{3}\omega t), \qquad x_2 = \dfrac{a}{2}(\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\omega t) \quad (58)$

Se ve del movimiento general (57) y en nuestro caso especial (58) que están presentes dos frecuencias, dadas por

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad f_2 = \frac{\sqrt{3}\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{M}} \quad (59)$$

Estas se llaman las *frecuencias naturales o normales* del sistema. En otros casos especiales es posible que el sistema vibre con sólo una de las frecuencias dadas en (59). Por ejemplo, si la frecuencia es f_1, vemos de (57) que $c_3 = c_4 = 0$. Esto corresponde a $x_1 = x_2$, esto es, el caso donde los objetos *D y E* se mueven ambos en las mismas direcciones, como se indica en la Figura 10.13. Por otro lado, si la frecuencia es f_2 vemos de (57) que $c_1 = c_2 = 0$. Esto corresponde a $x_1 = -x_2$, esto es, el caso donde los objetos *D y E se* mueven ambos en direcciones opuestas, como se indica en la Figura 10.14.

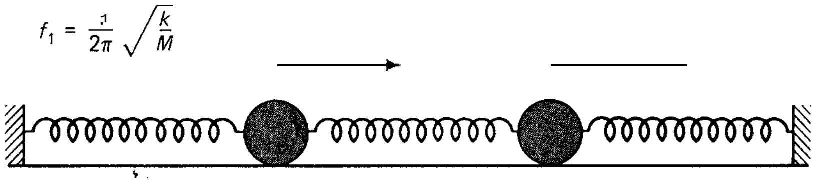


Figura 10.13

Los tipos especiales de vibraciones indicadas en las Figuras 10.13 y 10.14 en las cuales el sistema vibra con una sola frecuencia se llaman *modos naturales o normales de vibración* y a menudo se refieren como a los *modos normales.* Movimientos más complejos como los indicados por (57) representan combinaciones de estos modos normales debido a que ambas frecuencias están presentes.

El sistema de las Figuras 10.11 y 10.12 es una generalización de los sistemas vibrantes simples considerados en el Capítulo cinco para los cuales había una simple frecuencia *natural o normal.* Mayores generalizaciones son posibles. Por ejemplo, podríamos tener tres objetos conectados por cuatro resortes, en cuyo caso habría tres frecuencias normales y tres modos normales. En general, estructuras complejas tales como edificios y puentes tienen muchas frecuencias normales y modos de vibración.

En el Capítulo cinco encontramos que, cuando una fuerza periódica externa teniendo frecuencia igual (o casi igual en caso de amortiguamiento) a la frecuencia natural de un sistema se aplicaba a un sistema, grandes perturbaciones se podían iniciar en el sistema, un fenómeno que llamarnos ***resonancia.*** En sistema más complejos pueden estar presentes un gran número de frecuencias normales y la probabilidad de que ocurra resonancia se incrementa. Esto hace aún más plausible por qué podría ser peligroso para un grupo "marcar el paso" cuando cruzan un puente, puesto que un puente es una estructura complicada con muchas frecuencias naturales o normales, y excitando una de ellas puede provocar un desastre.

Las frecuencias normales o naturales son de gran importancia en ciencia y tecnología. Ellas aparecen en campos aparentemente no relacionados como análisis de esfuerzos (requeridos por los ingenieros civiles y mecánicos en el diseño de estructura) y física nuclear (donde son útiles para explicar la teoría del espectro como también los efectos de la energía atómica). Ellas también son de gran importancia en electricidad en conexión con resonancia, donde actúan en una manera constructiva y se desean en vez de evitarlas.

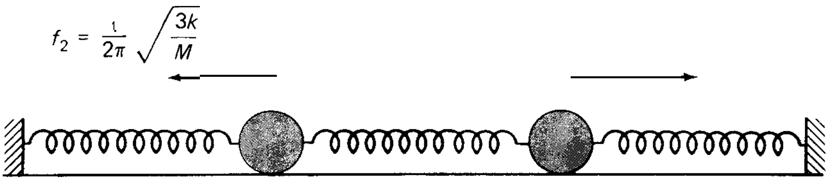


Figura 10.14

EJERCICIOS A

1. Resuelva el problema del texto si las condiciones iniciales se cambian como sigue: (a) D y E se mueven ambos una distancia $a > 0$ a la derecha y luego se sueltan. (b) D se mueve una distancia $a > 0$ a la izquierda, mientras que E se mueve una distancia $a > 0$ a la derecha, y luego se sueltan ambos. Discuta el movimiento en cada caso.

2. En el problema del texto, suponga que D y E están inicialmente en sus posiciones de equilibrio y se les dan velocidades iniciales a la derecha de magnitudes v_1 y v_2 respectivamente. Describa el movimiento.

3. Si los dos resortes extremos A y C del problema del texto se remplazan por unos con constante de resorte K, mientras que el resorte B se deja inmodificado con constante de resorte k, muestre que

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) - Kx_1, \qquad M\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2) - Kx_2$$

Pruebe que hay dos frecuencias f_1 y f_2 donde $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$, $\quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K + 2k}{M}}$

Describa los modos normales.

4. ¿Qué significado físico si hay alguno se les puede dar a los casos (a) $k = 0$ y (b) $K = 0$ en el Ejercicio 3?

5. Si los resortes del problema del texto se mantienen los mismos pero las masas D y E se cambian de modo que tengan la razón 8:5, muestre que las frecuencias normales tienen la razón $\sqrt{3}$: $\sqrt{10}$.

EJERCICIOS B

1. Un sistema consiste de los resortes *A*, *B* y objetos *C*, *D* acoplados en una línea recta sobre una mesa horizontal sin fricción *RS* (Figura 10.15), un extremo del resorte *A* está fijo en 0. Los resortes de masa despreciable tienen cada uno constante de resorte k, y los objetos tienen igual masa M. El sistema se pone a vibrar sosteniendo *D* en su lugar, moviendo C a la izquierda una distancia $a > 0$ y luego soltando ambos objetos.

   (a) Muestre que las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento son

   $$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1), \qquad M\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1)$$

   donde x_1 y x_2 son los desplazamientos de C y *D* de sus posiciones de equilibrio en tiempo t.

   (b) Muestre que el sistema vibra con frecuencias

   $$f_1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad f_2 = \frac{(\sqrt{5}+1)}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

   (c) Determine las posiciones de C y *D* en cualquier tiempo.

   (d) Describa los modos normales de vibración.

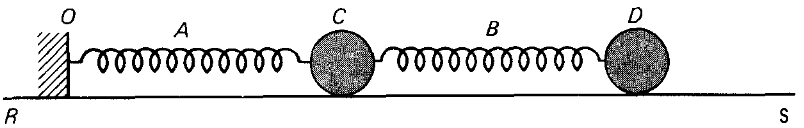


Figura 10.15

2. Si los dos resortes del Ejercicio 1 tienen constantes diferentes k_1 y k_2, mientras que las masas de C y *D* se mantienen igual, muestre que hay dos frecuencias normales f_1 y f_2, donde

   $$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2 + \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}}{2M}}, \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2 - \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}}{2M}}$$

3. Si los resortes del Ejercicio 1 tienen la misma constante de resorte, pero las masas de C y *D* se cambian para que tengan la razón 3:2, muestre que las frecuencias normales tienen la razón 1: $\sqrt{6}$.

4. Un método a menudo usado en la práctica para la determinación de las frecuencias normales es sustituir $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$, donde A_1, A_2, ω son constantes indeterminadas, en las ecuaciones diferenciales. Entonces uno establece una condición para las cantidades que son diferentes de cero. Muestre que para el problema del texto este método conduce a la condición que el determinante (***llamado el determinante secular***),

   $$\begin{vmatrix} \dfrac{2k}{M} - \omega^2 & -\dfrac{k}{M} \\ -\dfrac{k}{M} & \dfrac{2k}{M} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

La justificación de este método se da en la sección 9, página 500.

5. Trabaje el problema de las masas vibrantes en el texto si se toma en cuenta el amortiguamiento proporcional a las velocidades instantáneas.

EJERCICIOS C

1. En el problema del texto, asuma que actúan dos fuerzas adicionales, una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad instantánea de cada una de las masas, y una fuerza externa que actúa en cada una y dada por $A \cos \alpha t$, $t \geq 0$ donde A y α son constantes. (a) Encuentre la solución de estado estacionario- (b) Muestre que hay dos frecuencias de la fuerza externa para las cuales ocurre resonancia. En vista de que los extremos de los resortes A y C están fijos, ¿cuál es el efecto de la resonancia? (c) Discuta la solución si no hay amortiguamiento. ¿Para qué valor de α ocurrirá resonancia en este caso?

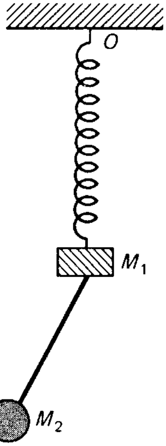


Figura 10.16

2. Una masa M_1 se cuelga de un resorte vertical (de constante k) el cual está soportado en 0 (Figura 10.16). De M, se cuelga un péndulo simple teniendo un medallón de masa M,. Asuma que M, puede vibrar sólo verticalmente y todo movimiento tiene lugar en el plano vertical. (a) Establezca ecuaciones diferenciales para el movimiento. (b) Encuentre las posiciones de M, y M_2 en cualquier tiempo, asumiendo pequeñas vibraciones y condiciones iniciales arbitrarias. (c) Determine las frecuencias y modos normales si los hay.

5 Aplicaciones a las redes eléctricas

Ya hemos visto en los Capítulos tres y cinco cómo la ley de Kirchhoff se usaba para resolver problemas que involucran circuitos eléctricos de una sola malla. En trabajos de ingeniería avanzada, a menudo es esencial considerar redes eléctricas que involucran rnás de una malla. Un ejemplo de una red de dos mallas se muestra en la Figura 10.17. Para resolver problemas de redes eléctricas que involucran dos o más mallas necesitamos

Las dos leyes de Kirchhoff

1. ***La suma algebraica de las corrientes que viajan hacia cualquier nudo (A o B en la Figura 10.17) es igual a cero.***

2. La suma algebraica de las caídas de potencial (o caídas de voltaje) alrededor de cualquier malla cerrada es igual a **cero.**

Para poder aplicar estas leyes consistentemente adoptamos las siguientes

Convenciones

(a) Si I es la corriente en una dirección, -1 es la corriente en la dirección opuesta.
(b) Para escribir la suma algebraica de las caídas de potencial alrededor de una malla cerrada, consideraremos una caída de potencial como *positiua* si al describir la malla viajamos en la *misma* dirección indicada por la corriente y negativa si viajamos en la dirección opuesta a la corriente.
(c) Un aumento de potencial (debido **a** la batería o generador por ejemplo) se considera la negativa de una caída de potencial.

Usando las leyes y convenciones anteriores, estaremos en capacidad de formular matemáticamente cualquier problema en redes eléctricas lineales. Para ver los procedimientos involucrados, considere la red de la Figura 10.17, por ejemplo. Hay presentes tres mallas cerradas, a saber, *JHGBNDAKJ*, *JHGBFEAKJ y NFEDN*. La segunda de las leyes de Kirchhoff aplicada a estas tres mallas conduce a tres ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones, sin embargo, no son independientes, puesto que, como encontraremos, una ecuación diferencial puede ser obtenida de las otras dos. Debemos así decir que hay solamente dos mallas independientes. En la práctica, es lógico escoger aquellas mallas que sean las más simples. En este caso, para practicar, consideramos todas las tres mallas.

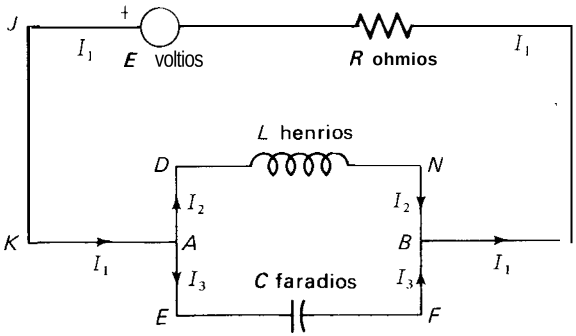


Figura 10.17

La primera cosa a hacer al formular matemáticamente un problema de redes eléctricas es marcar las corrientes en las varias partes. La dirección adoptada para flujo de corriente es en general indiferente en la medida en que seamos consistentes. En la Figura 10.17 hemos adoptado las direcciones mostradas por I_1, I_2 e I_3 . Es claro que si I_2 fluye en una dirección de A a D, entonces continuará de D a N y de N a B como se indica. La situación parece bastante lógica cuando razonamos que la corriente I_1 se separa en el nudo *A en* las corrientes I_2 e I_3. En el nudo B, I_2 e I_3 se combinan para dar *1,* de nuevo. Puesto que I_1 se divide en I_2 e I_3, es claro que $I_1 = I_2 + I_3$.

Otra manera de llegar al mismo resultado es a partir de la primera ley de Kirchhoff. Puesto que I_2 está fluyendo *aleiándose* de *A,* entonces por convención (a), $-I_2$ está fluyendo *hacia A.* Similarmente la corriente $-I_3$ está fluyendo hacia A. La suma algebraica del flujo de las corrientes hacia *A* está así dada por $I_1 - I_2$ I_3, la cual cuando se iguala a cero conduce a $I_1 = I_2 + I_3$ como antes.

Consideremos ahora la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.

Para la malla JHGBNDAKJ:

Caída de voltaje a través de *R* es $-I_1 R$ por convención (b).
Caída de voltaje a través de *L es* $-L dI_2/dt$.
Caída de voltaje a través de la batería *E* es + *E* por convención (c).

Por tanto,
$$-I_1 R - L\frac{dI_2}{dt} + E = 0 \tag{1}$$

Para la malla JHGBFEAKJ:

Caída de voltaje a través de *R es* $-I_1 R$.
Caída de voltaje a través de C es $-Q_3/c$ (donde Q_3 es la carga en el condensador C proporcionada por la corriente I_3)
Caída de voltaje a través de *E es + E.*

Por tanto
$$-I_1 R - \frac{Q_3}{C} + E = 0 \tag{2}$$

Para la malla NFEDN:

Caída de voltaje a través de *L es* $L dI_2/dt$ por convención (b):
Caída de voltaje a través de C es $-Q_3/C$.

Por tanto
$$L\frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_3}{C} = 0 \tag{3}$$

Se notará, como se mencionó antes, que las ecuaciones (1), (2), y (3) son dependientes. Así, por ejemplo, (3) se obtiene por sustracción de (1) y (2). Notando que solamente dos ecuaciones diferenciales son independientes se habría ahorrado algún trabajo. También la malla *NFEDN es* algo más simple que las otras mallas como se evidencia por la ecuación diferencial más simple (3). Puesto que tenemos una elección escogamos las ecuaciones *(2)* y (3) junto con la ecuación $I_1 = I_2 + I_3$. Puesto que hay tres ecuaciones y cuatro incógnitas, I_1, I_2, I_3 *y* Q_3, necesitamos otra ecuación. Esta se obtiene notando que $I_3 = dQ_3/dt$.
Usando este valor para I_3 y remplazando I_1 por su igual $I_2 + I_3$, las ecuaciones (2) y (3) pueden escribirse

$$-R\left(I_2 + \frac{dQ_3}{dt}\right) - \frac{Q_3}{C} + E = 0, \qquad L\frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_3}{C} = 0$$

o en forma de operador con $D \equiv d/dt$,

$$RI_2 + \left(RD + \frac{1}{C}\right)Q_3 = E, \qquad LDI_2 - \frac{Q_3}{C} = 0 \tag{4}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse por métodos ya considerados. Por ejemplo considere $E = E_0$ sen ωt un voltaje alterno con frecuencia $\omega/2\pi$. Operando en la primera de las ecuaciones (4) con LD, multiplicando la segunda ecuación por R, y sustrayendo, encontramos

$$\left(LRD^2 + \frac{L}{C}D + \frac{R}{C}\right)Q_3 = LE_0\omega \cos \omega t \tag{5}$$

una ecuación que puede resolverse para Q_3. De aquí el método continúa como de costumbre.

EJERCICIOS A

1. En la red eléctrica de la Figura 10.18, $E = 60$ voltios. Determine las corrientes I_1 e I_2 como funciones del tiempo t, asumiendo que en $t = 0$, cuando el interruptor K se cierra, $I_1 = I_2 = 0$. Encuentre las corrientes de estado estacionario.
2. Trabaje el Ejercicio 1 si $E = 150$ sen $10t$. Encuentre las corrientes de estado estacionario.
3. En $t = 0$ la carga en el condensador en el circuito de la Figura 10.19 es 1 culombio, mientras que la corriente en el inductor es cero. Determine la carga en el condensador y la corriente en los varios nudos en cualquier tiempo.

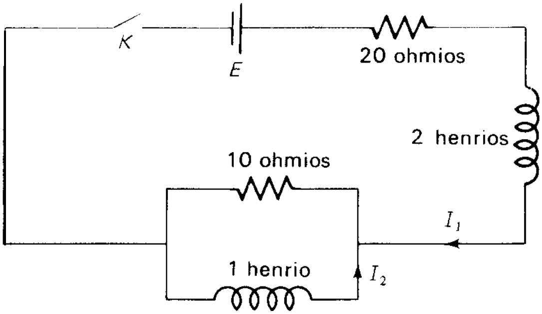


Figura 10.18

4. Trabaje el Ejercicio 3 si la fem es 100 sen $2t$.
5. Complete el problema del texto si $R = 10$ ohmios, $C = 10^{-3}$ faradios, $L = 0{,}4$ henrios, $E_0 = 100$ voltios, $\omega = 50$. Asuma que la carga del condensador y las corrientes en los varios nudos son inicialmente cero.

EJERCICIOS B

1. En $t = 0$ los condensadores de la red de la Figura 10.20 se cargan al potencial V_0, y los interruptores K_1 y K_2 se cierran. Muestre que el potencial a través de los condensadores de alta y baja capacitancia está dado, respectivamente, por

$$\frac{V_0}{3}\left(2\cos\frac{t}{2\sqrt{LC}}+\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{V_0}{3}\left(4\cos\frac{t}{2\sqrt{LC}}-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

2. Compare el Ejercicio 1 con el problema de las masas vibrantes en la página 470, indicando las diferentes analogías. ¿Qué sistema mecánico pudiera corresponder a la red de la Figura 10.20?

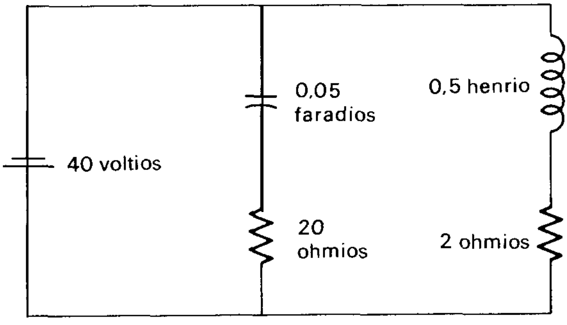


Figura 10.19

EJERCICIOS C

1. En el circuito de la Figura 10.21 el condensador C tiene una carga Q_0 en el tiempo $t = 0$, mientras que las corrientes a través de los inductores son cero en ese tiempo. Muestre que en cualquier tiempo $t > 0$ la carga en el condensador está dada por

$$Q = Q_0 e^{-Rt/2L}\left(\cos \omega t + \frac{R}{2L\omega}\operatorname{sen}\omega t\right) \text{ donde } \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

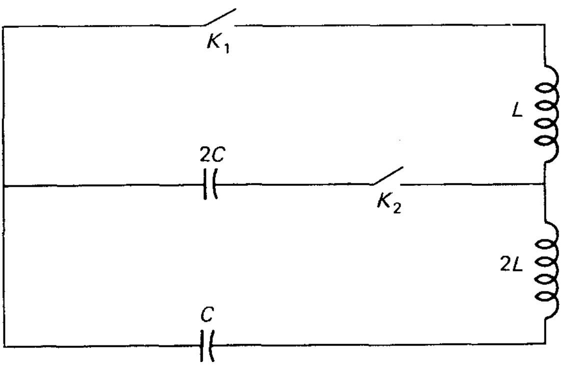


Figura 10.20

Muestre también que las corrientes Z, e I_2 a través de L_1 y L_2 son

$$I_1 = -\frac{Q_0}{\omega C L_1} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen} \omega t, \qquad I_2 = \frac{Q_0}{\omega C L_2} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen} \omega t$$

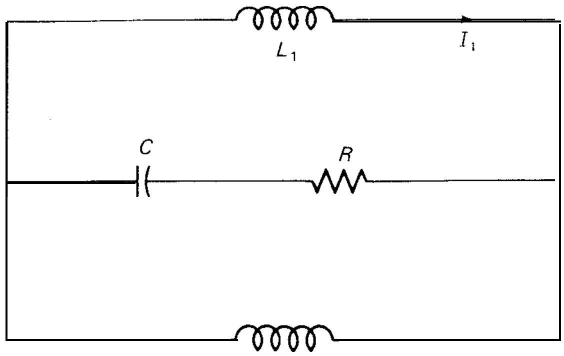


Figura 10.21

2. Discuta el problema anterior si $1/LC \leqq R^2/4L^2$.

6 Aplicaciones a la biología

6.1 CONCENTRACION DE UNA DROGA EN UN SISTEMA DE DOS COMPARTIMENTOS

Ya hemos examinado en el Capítulo tres algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales a varios problemas en biología. Consideraremos ahora problemas biológicos que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Un problema interesante se relaciona con la determinación de la concentración de algún químico, tal como una droga, en un sistema que consiste de dos compartimentos separados por una membrana, como se muestra en la Figura 10.22. La droga puede pasar a través de esta membrana del compartimento 1 al compartimento 2, o viceversa del compartimento 2 al compartimento 1. Asumiremos también que la droga puede escapar al sistema externo a través de una abertura en el segundo compartimento, como se indica en la figura.

Formulación matemática. Supongamos que los compartimentos tienen volúmenes V_1 y V_2, y que el área de la sección transversal de la membrana es A. Denote por x_1 y x_2 las masas de la droga en los compartimentos 1 y 2, respectivamente, en cualquier tiempo t. Usando la palabra tasa para significar ***tasa de tiempo*** por brevedad, tenemos

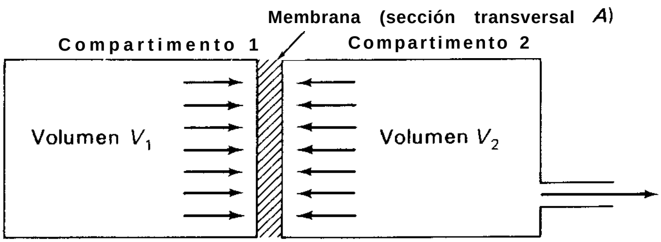


Figura 10.22

tasa de cambio de masa de droga en el compartimento 1
$=$ tasa de flujo de masa de droga de compartimento 2 al compartimento 1.
$-$ tasa de flujo- de masa de droga de compartimento 1 al 2 (1)

Debemos examinar ahora cada uno de estos términos. El primero es fácil porque si la masa de droga en el compartimento 1 es x_1 entonces

tasa de cambio de la masa de droga en el compartimento 1

$$\frac{dx_1}{dt} \tag{2}$$

Para obtener el segundo término, notemos que la tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 2 al compartimento 1 es proporcional al área A de la membrana y a la concentración de la droga en el compartimento 2, dada por x_2/V_2. Así

tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 2 al 1

$$= \alpha_{21} A \frac{x_2}{V_2} \tag{3}$$

donde hemos usado α_{21} para denotar la constante de proporcionalidad. El último término se obtiene por razonamiento similar; esto es, la tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 1 al compartimento 2 es proporcional al área A de la membrana y a la concentración de la droga en el compartimento 1 dada por x_1/V_1. Así

tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 1 al compartimento 2 $= \alpha_{12} A \dfrac{x_1}{V_1}$ (4)

donde hemos usado α_{12} para denotar la constante de proporcionalidad. Las constantes α_{12} y α_{21} no necesitan ser iguales; esto es, la tasa de absorción de la droga en los lados opuestos de la membrana pueden ser diferentes. Usando (2), (3) y (4) el resultado (1) llega a ser

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_{21} A \frac{x_2}{V_2} \quad \alpha_{12} A \frac{x_1}{V_1} \tag{5}$$

Una ecuación correspondiente se debe ahora obtener para el compartimento 2. Podemos escribir

tasa de cambio de la masa de droga en el compartimento 2
$=$ tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 1 al 2
$-$ tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 2 al 1
$-$ tasa de flujo de la masa de droga de 2 al sistema externo (6)

Puesto que x_2 es la masa de droga en el compartimento 2, tenemos para el primer término en (6).

tasa de cambio de la masa de droga en el compartimento2

$$= \frac{dx_2}{dt} \tag{7}$$

Los próximos dos términos de (6) son exactamente lo mismo a lo dado en (4) y (3), respectivamente. Para obtener el término final en (6) notamos que la tasa de flujo de la masa de droga del compartimento 2 es proporcional a la concentración de la droga en el compartimento 2 dado por x_2/V_2. Así

tasa de flujo de la masa de droga de 2 al sistema externo =

$$= \alpha \frac{x_2}{V_2} \tag{8}$$

donde hemos usado α para denotar la constante de proporcionalidad.

De estos podemos escribir (6) como

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_{12} A \frac{x_1}{V_1} - \alpha_{21} A \frac{x_2}{V_2} - \alpha \frac{x_2}{V_2} \tag{9}$$

Tomando $$\beta_{21} = \frac{\alpha_{21} A}{V_2}, \qquad \beta_{12} = \frac{\alpha_{12} A}{V_1}, \qquad \beta = \frac{\alpha}{V_2} \tag{10}$$

las ecuaciones (5) y (9) pueden escribirse

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta_{21} x_2 - \beta_{12} x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \beta_{12} x_1 - \beta_{21} x_2 - \beta x_2 \tag{11}$$

o $$(D + \beta_{12}) x_1 \quad \beta_{21} x_2 = 0, \qquad -\beta_{12} x_1 + (D + \beta_{21} + \beta) x_2 = 0 \tag{12}$$

Las ecuaciones diferenciales simultáneas (ll) o (12) se deben resolver sujetas a condiciones adecuadas tales como, por ejemplo

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b \qquad \text{enr} = 0 \tag{13}$$

donde a y b son constantes.

Solución Podemos resolver el sistema de ecuaciones usando cualquiera de los métodos ya dados. Usemos el método de eliminación. Para eliminar x_2 se opera en la primera ecuación en (12) con $D + \beta_{21} + \beta$ y se multiplica la segunda ecuación en (12) por β_{21}. Sumando las ecuaciones resultantes se obtiene

$$[D^2 + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta)D + \beta\beta_{12}]x_1 = 0 \tag{14}$$

La ecuación auxiliar correspondiente a ésta es $m^2 + (\beta_{12} + \beta_{12} + \beta)m + \beta\beta_{12} = 0$

o $$m = \frac{-(\beta_{12} + \beta_{21} + \beta) \pm \sqrt{(\beta_{12} + \beta_{21} + \beta)^2 - 4\beta\beta_{12}}}{2}$$

Si hacemos $$p = \tfrac{1}{2}(\beta_{12} + \beta_{21} + \beta), \qquad q = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta_{12} + \beta_{21} + \beta)^2 - 4\beta\beta_{12}} \tag{15}$$

estas raíces son $m = -p \pm q$. Entonces obtenemos la solución deseada

$$x_1 = e^{-pt}(c_1e^{qt} + c_2e^{-qt}), \quad x_2 = \frac{e^{-pt}}{\beta_{21}}\left[(\beta_{12} - p + q)c_1e^{qt} + (\beta_{12} - p - q)c_2e^{-qt}\right] \tag{16}$$

donde la segunda ecuación para x_2 en (16) se encontró al sustituir el resultado para x_1 en la primera de las ecuaciones (12). Las constantes c_1 y c_2 se pueden determinar de las condiciones (13).

Interpretación. Los valores de q en (15) sugieren que hay tres casos que pueden surgir correspondiendo a los casos donde q es imaginario, $q > 0$ y $q = 0$. Resulta, sin embargo, que el primer y último casos no pueden surgir. Para ver esto, escribamos

$$(\beta_{12} + \beta_{21} + \beta)^2 - 4\beta\beta_{12} = (\beta + \beta_{21} - \beta_{12})^2 + 4\beta_{12}\beta_{21}$$

Puesto que esta última cantidad debe ser siempre positiva si $\beta_{12} > 0$, $\beta_{21} > 0$, debemos tener $q > 0$. Usando esto y el hecho de que $p > q$ si $\beta > 0$, como se ve de (15), sigue que las masas de droga x_1 y x_2 tienden a cero estabilizadamente de una manera similar a la indicada por el gráfico de la Figura 5.6, página 235, correspondiendo al caso *sobreamortiguado. No* podemos tener *movimiento oscilatorio amortiguado,* como en la Figura 5.5 en la página 234.

6.2 EL PROBLEMA DE EPIDEMIA CON CUARENTENA

En el problema de epidemia discutido en la página 153, no consideramos la posibilidad de que los estudiantes que se llegaran a infectar fueran removidos de la comunidad para así no causar que otros llegaran a infectarse. Es de interés considerar este modelo más realístico de enfermedad en el cual los estudiantes que se descubren estar infectados son removidos o, como a menudo *se* dice, *a cuarentena.* Pueden surgir varias circunstancias las cuales son matemáticamente equivalentes a tal cuarentena, como las siguientes:

(a) La enfermedad puede ser tal que aquellos quienes la desarrollan y se recuperan no pueden desarrollarla de nuevo o transmitirla a nadie más; esto es, ellos desarrollan *inmunidad y* no son *transmisores* de la enfermedad.
(b) Aquellos quienes desarrollan la enfermedad no se recuperan.

Formulación matemática. Introduzcamos la siguiente notación:

N_u = número de estudiantes que no están infectados en cualquier tiempo t: esto no incluye a los estudiantes que pueden haberse recuperado como en la situación (a) anterior y regresan a la comunidad.

N_i = número de estudiantes que están infectados en tiempo t pero no están aún en cuarentena.

N_q = número de estudiantes que están en cuarentena en tiempo t [equivalente al número de estudiantes correspondientes a las situaciones (a) y (b) anteriores] .

Claramente, debemos tener $N = N_u + N_i + N_q$ (17)

donde N es el número total de estudiantes en la comunidad, asumido constante.

Como en el caso del modelo matemático de la página 154, esperaríamos que la tasa a la cual los estudiantes se infectan sea proporcional al producto de los números de estudiantes infectados y no infectados, de modo que

$$\frac{dN_u}{dt} = -\kappa N_u N_i \tag{18}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Esperaríamos también que la tasa a la cual los estudiantes se ponen en cuarentena sea proporcional al número de estudiantes infectados. Esto conduce a

$$\frac{dN_q}{dt} = \lambda N_i \tag{19}$$

donde λ es la constante de proporcionalidad.

De (17), (18) y (19) es fácil llegar a

$$\frac{dN_i}{dt} = \kappa N_u N_i - \lambda N_i \tag{20}$$

una ecuación que pudo haberse conjeturado sin hacer uso de (17), puesto que expresa el hecho algo obvio de que la tasa de cambio en el número de estudiantes infectados en la comunidad en tiempo t iguale a la tasa a la cual se infectan menos la tasa a la cual se remueven (por cuarentena) después de identificarlos.

Como posibles condiciones iniciales podemos tener

$$N_u = U_0, \qquad N_i = I_0, \qquad N_q = 0, \qquad \text{en } t = 0 \tag{21}$$

donde U_0 e I_0 son constantes. Usando (17) vemos que

$$N = U_0 + I_0 + 0 \quad \text{o} \quad U_0 + I_0 = N \tag{22}$$

Solución Dividiendo la ecuación (18) por (19) se obtiene

$$\frac{dN_u}{dN_q} = -\frac{\kappa}{\lambda} N_u \tag{23}$$

cuya solución al separar variables se encuentra como

$$N_u = c_1 e^{-\kappa N_q/\lambda} \tag{24}$$

donde c_1 es una constante arbitraria. Puesto que $N_u = U_0$ cuando $N_q = 0$, como se ve de (17), tenemos $c_1 = U_0$, de modo que

$$N_u = U_0 e^{-\kappa N_q/\lambda} \tag{25}$$

Ahora de (17) vemos que

$$N_i = N - N_q - N_u = N \quad N_q - U_0 e^{-\kappa N_q/\lambda} \tag{26}$$

al hacer uso de (25). Así la ecuación (19) llega a ser

$$\frac{dN_q}{dt} = \lambda(N - N_q - U_0 e^{-\kappa N_q/\lambda}) \quad ó \quad \int \frac{dN_q}{N - N_q - U_0 e^{-\kappa N_q/\lambda}} = \int \lambda\, dt \tag{27}$$

al separar las variables. La integración en el lado izquierdo de (27) no se puede desarrollar exactamente. Sin embargo, podemos obtener una buena aproximación usando los tres primeros términos de la expansión en serie para la exponencial en (27) para obtener la aproximación donde en la segunda igual-

$$N - N_q - U_0 e^{-\kappa N_q/\lambda} = N - N_q - U_0 + \frac{\kappa U_0 N_q}{\lambda} \quad \frac{\kappa^2 U_0 N_q^2}{2\lambda^2}$$

$$= I_0 - N_q + \frac{\kappa U_0 N_q}{\lambda} - \frac{\kappa^2 U_0 N_q^2}{2\lambda^2} = I_0 + \left(\frac{\kappa U_0}{\lambda} - 1\right) N_q - \frac{\kappa^2 U_0 N_q^2}{2\lambda^2}$$

dad hemos hecho uso de N- $U_0 = I_0$ de (22). Si ahora cambiamos variables de N_q a w, donde

$$\frac{\kappa\sqrt{U_0}}{\lambda\sqrt{2}} N_q = w \tag{28}$$

el último resultado puede escribirse como

$$I_0 + \left(\frac{\kappa U_0}{\lambda} - 1\right)\frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}} w - w^2 = I_0 + 2\alpha w - w^2 = I_0 + \alpha^2 - (w - \alpha)^2$$

donde por brevedad escribimos $\alpha = \left(\frac{\kappa U_0}{\lambda} - 1\right)\frac{\lambda\sqrt{2}}{2\kappa\sqrt{U_0}}$ (29)

Así (27) se puede escribir $\frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}} \int \frac{dw}{I_0 + \alpha^2 \quad (w - \alpha)^2} = \int \lambda\, dt$ (30)

Haciendo uso del resultado elemental

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(30) se convierte en $\frac{\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}\sqrt{I_0 + \alpha^2}} \tanh^{-1}\left(\frac{w - \alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right) = t + c_2$ (31)

donde c_2 es una constante de integración. Para hallar c_2 usamos $N_q = 0$ ó w = 0 en $t = 0$ en (31) para obtener

$$c_2 = \frac{\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}\sqrt{I_0 + \alpha^2}} \tanh^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}\sqrt{I_0 + \alpha^2}} \tanh^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right)$$

Así, $\tanh^{-1}\left(\frac{w - \alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right) = \frac{\kappa\sqrt{U_0}\sqrt{I_0 + \alpha^2}\, t}{\sqrt{2}} - \tanh^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right)$

del cual $w = \alpha + \sqrt{I_0 + \alpha^2}\tanh(\beta t - \gamma)$ (32)

donde
$$\beta = \frac{\kappa\sqrt{U_0}\sqrt{I_0 + \alpha^2}}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma = \tanh^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{I_0 + \alpha^2}}\right) \tag{33}$$

El número de estudiantes removidos por cuarentena (o equivalente) dado por N_q se puede obtener de (32) al usar (28). De esto N_u se puede obtener usando (25) y Ni usando (26). Se debería enfatizar por supuesto que los resultados son aproximados y válidos en la medida en que el término exponencial (25) esté bien aproximado por los tres términos en su expansión en serie.

EJERCICIOS A

1. Verifique los resultados (16) en la página 484.

2. Suponga que en el modelo de dos compartimentos tenemos $\beta = 0$. Suponga también que inicialmente la cantidad de la droga presente en el compartimento 1 es a pero no hay droga presente en el compartimento 2. Muestre que (a) las cantidades de droga presentes en los compartimentos 1 y 2 en tiempo $t > 0$ están dadas respectivamente por
$$x_1 = \frac{a\beta_{21}}{\beta_{12} + \beta_{21}} + \frac{a\beta_{12}}{\beta_{12} + \beta_{21}} e^{-(\beta_{12}+\beta_{21})t}, \qquad x_2 = \frac{a\beta_{12}}{\beta_{12} + \beta_{21}}\left[1 - e^{-(\beta_{12}+\beta_{21})t}\right]$$
(b) Muestre que en todo momento $x_1 + x_2 = a$. (c) Muestre que las cantidades de droga presente en los dos compartimentos después de un tiempo largo están dadas respectivamente por $a\beta_{21}/(\beta_{12} + \beta_{21})$ y $a\beta_{12}/(\beta_{12} + \beta_{21})$. (d) Interprete físicamente los resultados.

3. Muestre que en el modelo de dos compartimentos del Ejercicio 2 tenemos (usando los símbolos en la página 482) los volúmenes de los dos compartimentos dados por $V_1 = 25.000$ cm^3, $V_2 = 40.000$ cm^3, el área de la membrana que los separa 500 cm^2, y las constantes de proporcionalidad $\alpha_{21} = 20$, $\alpha_{12} = 30$, $\alpha = 60$ (unidades cgs). Asumiendo que la cantidad de droga inicialmente presente en el compartimento 1 es 2,0 mg encuentre (a) las cantidades de droga en los compartimentos en cualquier tiempo $t > 0$, y (b) las cantidades de la droga en los dos compartimentos después de un tiempo largo.

4. Trabaje el problema del sistema de dos compartimentos si $\beta \neq 0$ para los casos (a) $\beta_{12} = 0$, (b) $\beta_{21} = 0$ e interprete físicamente.

5. Muestre que el modelo de enfermedad con cuarentena dado en el texto se reduce al modelo dado en la página 154 si no hay cuarentena.

EJERCICIOS B

1. Muestre que el número de estudiantes en cuarentena dado por (32), página 486, aumenta cuando t aumenta y que
$$\lim_{t\to\infty} N_q = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa\sqrt{U_0}}(\alpha + \sqrt{I_0 + \alpha^2})$$
¿Concuerda esto con lo que usted esperaría para este límite? Explique.

2. Suponga que en el modelo de dos compartimentos la droga se introduce en el compartimento 1 a una tasa constante. (a) Establezca un sistema de ecuaciones diferenciales que describa el proceso, y (b) resuelva el sistema sujeto a condiciones apropiadas. Trate los casos $\beta = 0$ y $\beta \neq 0$ e interprete físicamente.

3. (a) Trabaje el Ejercicio 2 si la droga se introduce en el compartimento 1 a una tasa la cual es una función del tiempo t. (b) Use el resultado para obtener una solu-

ción al caso donde la droga se introduce a una tasa constante por un intervalo de tiempo T_1, se detiene por el intervalo T_2, y finalmente se introduce nuevamente a la tasa anterior para el intervalo de tiempo T_1.

EJERCICIOS C

1. Establezca un sistema de ecuaciones diferenciales para las cantidades de una droga en un modelo de tres compartimentos, y así obtenga una generalización del modelo de dos compartimentos dado en el texto. ¿Puede obtener usted la solución de este sistema sujeto a condiciones apropiadas?
2. Generalice las ideas formuladas en el Ejercicio 1 a un modelo de n compartimentos donde $n > 3$.
3. ¿Cómo formularía usted el problema de epidemia dado en el texto si los estudiantes que pueden no estar infectados o al menos no saben que están infectados "se retiran" de la universidad a una tasa proporcional al número instantáneo presente?

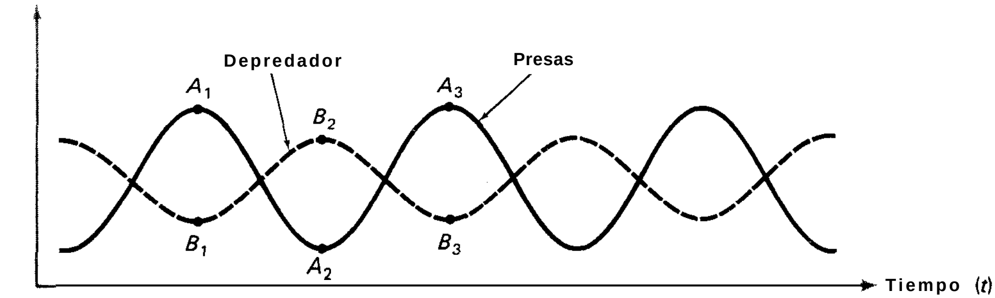


Figura 10.23

7 El problema depredador-presa: un problema en ecología

Hay muchas situaciones en la naturaleza donde una especie animal se alimenta de otra especie animal, la cual a su vez se alimenta de otras cosas.

Ejemplo 1. Los lobos en Alaska se alimentan de caribus, los cuales a su vez se alimentan de vegetación.

Ejemplo 2. Los tiburones en el océano se alimentan de pequeños peces, los cuales a su vez se alimentan de plantas.

La primera especie-se llama el ***depredador*** y la segunda especie se llama la ***presa.***

Teóricamente, el depredador puede destruir toda la presa de modo que esta última llegue a extinguirse. Sin embargo, si esto sucede el depredador también se extinguirá puesto que, como asumimos, depende de la presa para su existencia.

Lo que sucede realmente en la naturaleza es que se desarrolla un ciclo donde en algún tiempo la presa puede ser abundante y los depredadores pocos, como se indica por los puntos A_1 y B_1, respectivamente, en la Figura 10.23. Debido a la abundancia de la presa, la población de depredadores crece y se reduce la población de presa, llevando a los puntos A_2, B_2 *de la* Figura 10.23. Esto resulta en una reducción de depredadores y en un consecuente incremento de presas y el ciclo continúa. El gráfico de la Figura 10.23 no debería por supuesto tomarse muy literalmente, puesto que no esperaríamos que los puntos de máxima presa coincida con los puntos de mínimos depredadores, si no que en vez esperaríamos algún tiempo de demora o diferencia de fase entre ellos. También, las curvas reales podrían no ser simétricas como se indica en la figura, puesto que en la práctica pueden haber otros factores a tener en cuenta, tal como el clima.

Un problema importante de la *ecología*, la ciencia que estudia las **interrelaciones** de organismos y su ambiente, es investigar la cuestión de coexistencia de las dos especies y decidir lo que debería hacer la humanidad, si algo puede, para preservar este balance ecológico de la naturaleza.

Para responder esto y otras cuestiones relacionadas, es natural buscar una formulación matemática de este problema depredador-presa.*

7.1 FORMULACION MATEMATICA

Asumamos la siguiente notación:

x = número de presas en cualquier tiempo t,
y = número de depredadores en cualquier tiempo t.

Ahora si no hubiera depredadores, esperaríamos como una primera aproximación que el número de presas incrementará a una tasa proporcional a su número en cualquier tiempo, de modo que

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \tag{1}$$

donde $a_1 > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Similarmente, si no hubiera presa, esperaríamos como una primera aproximación que el número de depredadores declinará a una tasa proporcional a su número de modo que

$$\frac{dy}{dt} = -b_1 y \tag{2}$$

donde $b_1 > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Puesto que (1) y (2) tienen soluciones respectivas $x = c_1 e^{a_1 t}$ y $y = c_2 e^{-b_1 t}$, donde c_1, c_2 son constantes, vemos que $x \to \infty$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo cual como se espera no está de acuerdo con la realidad. Para obtener un modelo matemático de la situación real, debemos modificar las ecuaciones (1) y (2) de modo que tengan en cuenta la interacción entre las especies. Para hacer esto deberíamos incluir en (1) un término de interacción que dependa de x y y, digamos $F_1(x, y)$ el cual tienda a disminuir la tasa a la cual x crece. Similarmente, incluiríamos en (2) un término de interacción $F_2(x, y)$ el cual tienda a incrementar la tasa a la cual y decrece. Los resultados son

*Estoy problemas relacionados fueron primero investigados por *Lotka* y *Volterra* (ver [18]).

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \quad F_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -b_1 y + F_2(x, y) \tag{3}$$

Una pista para las formas de F_1 (x, y) y F_2 (x, y) se obtiene cuando vemos que éstas deben ser cero ya sea si $x = 0$ ó $y = 0$, esto es, no hay depredadores o no hay presas. Las funciones más simples con esta propiedad están dadas por

$$F_1(x, y) = a_2 xy, \quad F_2(x, y) = b_2 xy \tag{4}$$

donde a_2, b_2 son constantes positivas. Esto nos lleva así a

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - a_2 xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_1 y + b_2 xy \tag{5}$$

Los supuestos (4) también parecen razonables desde el punto de vista físico puesto que esperaríamos que los términos de interacción fuesen proporcionales al número de ***encuentros o encontradas*** de depredadores y presas, el cuál está dado por xy.

7.2 INVESTIGACION DE UNA SOLUCION

Aunque el sistema no lineal de ecuaciones (5), a menudo llamado las ***ecuaciones de Lotka-Volterra***, aparece simple, nadie todavía ha sido capaz de obtener una solución exacta. Tenemos así el recurso de usar ya sea series o métodos numéricos. Es posible sin embargo, obtener alguna información importante de estas ecuaciories aún sin resolverlas.

Para empezar es conveniente interpretar las ecuaciones (5) como si se dieran las componentes x y y de la velocidad de una partícula que se mueve en el plano xy. La curva, 0 como frecuentemente se llama el camino, ***trayectoria u órbita,*** en la cual se mueve la partícula se puede representar por las ecuaciones paramétricas

$$x = \phi_1(t, c_1, c_2), \qquad y = \phi_2(t, c_1, c_2) \tag{6}$$

donde c_1, c_2 ***son*** constantes que se pueden determinar al especificar un punto a través del cual la partícula pasa en algún tiempo, por ejemplo $t = 0$. Las ecuaciones (6) representan las soluciones del sistema (5) y también representan geométricamente una familia de curvas o trayectorias una de las cuales puede ser la trayectoria de la partícula.

Estas ideas nos permiten describir las soluciones de (5) usando los conceptos de la mecánica y geometría a la vez de visualizar lo que está sucediendo. El plano xy en el cual nuestra "partícula hipotética" se mueve se llama con frecuencia el ***plano de fase,*** y el análisis que usa tal interpretación se llama ***análisis del plano de fase.*** La familia de curvas (6) se refieren entonces con frecuencia como ***curvas de fase.****

Ahora tal como un turista puede encontrar un punto donde él ***para*** de mayor interés que un punto a través del cual él viaja, así podemos encontrar puntos donde nuestra partícula se detiene de mayor interés que los puntos a

*El plano de fase fue usado extensamente por los matemáticos *Poincaré* y *Liapunov* en sus investigaciones sobre sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales.

través de los cuales se mueve. Tales puntos donde la partícula se detiene, los cuales llamaremos ***puntos de descanso o puntos de equilibrio,*** ocurren donde la velocidad ***es*** cero, esto ***es,*** $dx/dt = 0$ y $dy/dt = 0$. De las ecuaciones (5) vemos que

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ para } x = 0 \quad 0 \quad y = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{b_1}{b_2} \tag{7}$$

Así hay dos posibles puntos de equilibrio,

$$x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{o} \quad (0,0) \quad \text{y} \quad x = \frac{b_1}{b_2}, \qquad y = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{o} \quad \left(\frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2}\right). \tag{8}$$

También es interesante notar que hay soluciones de (5) que son independientes del tiempo y pueden considerarse como casos especiales de (6) en las cuales las curvas degeneran en puntos. Examinaremos ahora los dos casos (8) y en particular buscaremos determinar el comportamiento de las soluciones de (5) cerca de los puntos de equilibrio.

Caso 1, Punto de equilibrio $(0,0)$. Este es el caso donde no hay ni depredadores ni presas. Cuando la partícula en nuestra interpretación del plano de fase está suficientemente cerca a este punto, podemos despreciar los segundos términos a_2xy y b_2xy a la derecha de las ecuaciones (5) en comparación con los primeros términos. Así las ecuaciones llegan a ser (1) y (2) en la página 489 con las cuales empezamos nuestra discusión, esto es

$$\frac{dx}{dt} = a_1x, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_1y \tag{9}$$

con solución
$$x = c_1e^{a_1t}, \qquad y = c_2e^{-b_1t} \tag{10}$$

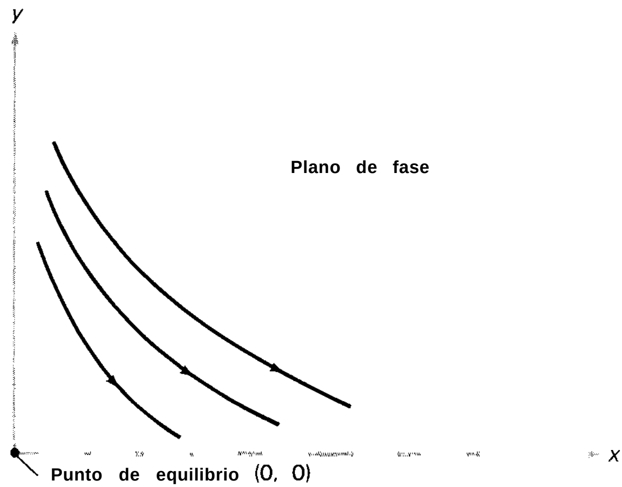


Figura 10.24

Puesto que x y y son no negativas, tenemos $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, y la familia de curvas descritas por (10) se muestra en la Figura 10.24, el caso particular $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ correspondiendo al punto de equilibrio (curva degenerada) $x = 0$, $y = 0$. A medida que t crece vemos de (10) que x aumenta mientras y tiende a cero, de modo que la partícula se mueve en la dirección mostrada en la Figura 10.24. Es aparente de estas curvas que si desplazáramos ligeramente la partícula del punto de equilibrio (0, 0) tiende a ***alejarse*** del punto, como se muestra en la Figura 10.24. Por esta razón llamamos al punto de equilibrio un ***punto de equilibrio inestable*** o un punto de ***inestabilidad. Si*** por otro lado un pequeño desplazamiento del punto de equilibrio causa que la partícula regrese o se mueva hacia el punto de equilibrio, como en el caso de una masa en un resorte estirado, llamaríamos al punto un ***punto de equilibrio estable.*** Esta situación también se puede ilustrar refiriéndonos a las Figuras 10.25 y 10.26. En la Figura 10.25 un cilindro hueco pequeño A reposa en el punto más elevado P de otro cilindro hueco más grande B. Un ligero desplazamiento del punto P causa que el cilindro se aleje, así que P es un punto de equilibrio inestable. En la Figura 10.26, en la cual A reposa en el fondo de B en el punto P, cualquier ligero desplazamiento del cilindro A del punto P causa que regrese hacia P, así que P es un punto de equilibrio estable.
La interpretación es que si en algún tiempo hay un pequeño número de depredadores y presas habrá una tendencia a incrementarse el número de presas y a disminuirse el número de depredadores, como se indica en la Figura 10.24. En la realidad, sin embargo, x no incrementa indefinidamente puesto que un aumento en la presa produce un consiguiente incremento en los depredadores. Esto permite la posibilidad de que si se extendieran las curvas de la Figura 10.24 ellas tenderán a elevarse después de un cierto punto.

Equilibrio inestable

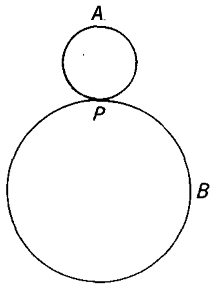


Figura 10.25

Equilibrio estable

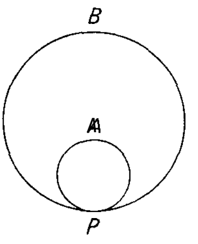


Figura 10.26

Caso 2, Punto de equilibrio $(b_1/b_2, a_1/a_2)$. Este es el caso donde depredadores y presas están en un estado de equilibrio en el cual sus números no cambian porque $x = b_1/b_2$, $y = a_1/a_2$ es una solución de (5) independiente del tiempo t. Es de interés hacer la pregunta, ¿qué pasa si existe una pequeña desviación de este punto de equilibrio, el cual puede ocurrir si por ejemplo cazadores destruyen depredadores o presas (o ambos)'?

Para responder esta pregunta hacemos la transformación en (5) dada por

$$x = \frac{b_1}{b_2} + u, \qquad y = \frac{a_1}{a_2} + v \tag{11}$$

de modo que $$\frac{du}{dt} = -\frac{a_2 b_1}{b_2} v - a_2 uv, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{a_1 b_2}{a_2} u + b_2 uv \tag{12}$$

Ahora si la partícula de nuestra interpretación del plano de fase está cerca al punto $(b_1/b_2, a_1/a_2)$ del plano xy, entonces u y v serán próximas a cero. En tal caso los segundos términos a la derecha de las ecuaciones (12) se pueden despreciar en comparación con los primeros términos de modo que obtenemos el sistema linearizado.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{a_2 b_1}{b_2} v, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{a_1 b_2}{a_2} u \tag{13}$$

Eliminando v se obtiene $$\frac{d^2u}{dt^2} + a_1 b_1 u = 0 \tag{14}$$

con solución $$u = c_1 \cos \sqrt{a_1 b_1}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{a_1 b_1}\, t \tag{15}$$

de modo que $$v = \frac{b_2}{a_2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left(c_1 \operatorname{sen}\sqrt{a_1 b_1}\, t - c_2 \cos\sqrt{a_1 b_1}\, t\right) \tag{16}$$

Estas ecuaciones (11) llegan a ser

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b_1}{b_2} + c_1 \cos\sqrt{a_1 b_1}\, t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{a_1 b_1}\, t, \\ y &= \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left(c_1 \operatorname{sen}\sqrt{a_1 b_1}\, t - c_2 \cos\sqrt{a_1 b_1}\, t\right) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Las ecuaciones paramétricas (17) representan elípses concéntricas teniendo centro común $(b_1/b_2, a_1/a_2)$ y dirección contraria a las manecillas del reloj, como se muestra en la Figura 10.27. Esta dirección se puede obtener de

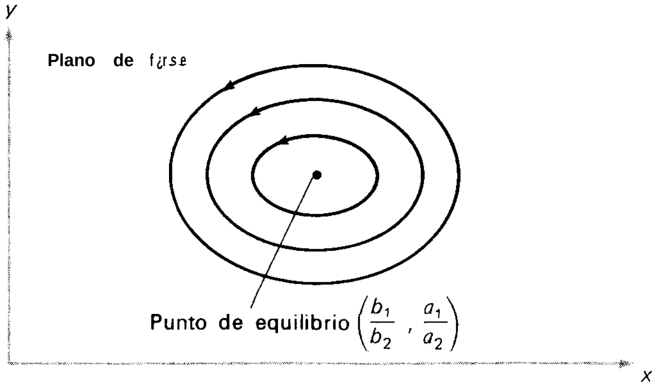


Figura 10.27

la solución (17) notando cómo se mueve el punto (x, y) a medida que t aumenta o directamente de las ecuaciones diferenciales (13). Para ver cómo se determina la dirección directamente de las ecuaciones diferenciales (13), refirámonos a la Figura 10.28 en la cual hemos mostrado un sistema de coordenadas uv con origen en el centro común de las elipses. De (13) vemos

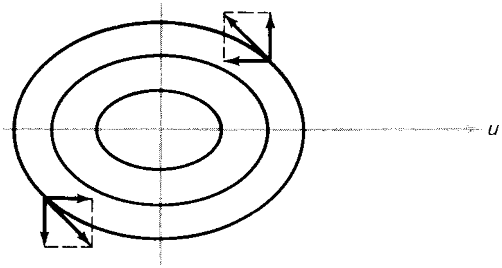


Figura 10.28

que en un punto en el primer cuadrante donde $u > 0$, $v > 0$ los componentes de la velocidad son tales que $du/dt < 0$, $dv/dt > 0$, de modo que la velocidad tiene la dirección contraria a las manecillas del reloj indicada. Esta misma dirección se puede confirmar al escoger puntos en otros cuadrantes. Así en el tercer cuadrante donde $u < 0$, $v < 0$, tenemos $du/dt > 0$, $dv/dt < 0$, mostrando de nuevo que la velocidad está en la dirección contraria a las manecillas del reloj. En la práctica, con frecuencia es más fácil determinar la dirección de la partícula de fase a partir de la ecuación diferencial en vez de la solución.

El hecho de que las curvas de fase son elipses concéntricas también se puede deducir directamente de las ecuaciones (13) dividiendo los lados correspondientes de las ecuaciones para eliminar t. Entonces obtenemos

$$\frac{du}{dv} = -\left(\frac{b_1 a_2^2}{a_1 b_2^2}\right)\frac{v}{u} \quad \text{o} \quad a_1 b_2^2 u\, du + b_1 a_2^2 v\, dv = 0$$

y por integración

$$\frac{u^2}{b_1 a_2^2} + \frac{v^2}{a_1 b_2^2} = c^2 \tag{18}$$

donde hemos escogido c^2 como la constante de integración. Si dividimos ambos lados de (18) por c^2, vemos que representa una familia de elipses concéntricas cuyos semiejes mayores y menores' tienen longitudes $ca_2\sqrt{b_1}$ y $cb_2\sqrt{a_1}$.

Las curvas de la Figura 11.5 muestran que cerca del punto de equilibrio hay una periodicidad en el número de presas y depredadores, y vemos de (17) que el período está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{a_1 b_1}} \tag{19}$$

En general, una curva cerrada en el plano de fase la cual no se cruza a sí misma en ninguna parte, a menudo referida como ***curva cerrada simple,*** indica una periodicidad en la solución de las ecuaciones diferenciales.

Una pregunta que naturalmente surge es si deberíamos considerar el punto $(b_1/b_2, a_1/a_2)$ un punto de equilibrio estable o inestable. Puesto que un ligero desplazamiento de nuestra partícula del plano de fase del punto de equilibrio no causa un movimiento de acercamiento ni de alejamiento si no solo ***alrededor*** del punto, estaríamos inclinados a llamarlo ***ninguno,*** y tal vez aún a crear una nueva palabra para describir el comportamiento. Sin embargo, debido a que un ligero desplazamiento no causa que la partícula se aleje mucho, si no en vez permanezca en la "vecindad" del punto, ampliaremos nuestra idea de punto de equilibrio estable para que incluya también este tipo de comportamiento.*

Podemos obtener alguna información adicional de (17). Para ello sea $\theta = \sqrt{a_1 b_1}\, t$ y note que podemos escribir

$$c_1 \cos\theta + c_2 \operatorname{sen}\theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\theta - \alpha) \tag{20}$$

donde

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \tag{21}$$

Remplazando θ por $\theta - (\pi/2)$ en (20), encontramos entonces

$$c_1 \operatorname{sen}\theta - c_2\cos\theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tag{22}$$

Así (17) se puede escribir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b_1}{b_2} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos\sqrt{a_1 b_1}\left(t - \frac{\alpha}{\sqrt{a_1 b_1}}\right) \\ y &= \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos\sqrt{a_1 b_1}\left(t - \frac{\alpha + \pi/2}{\sqrt{a_1 b_1}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Las ecuaciones (23) muestran que en el tiempo $t = \alpha/\sqrt{a_1 b_1}$, por ejemplo, el número de presas es un máximo. Sin embargo, el número de depredadores no alcanza un máximo hasta $t = (\alpha + \pi/2)/\sqrt{a_1 b_1}$, esto es, un tiempo $\pi/2\sqrt{a_1 b_1}$ o un cuarto del período (19) más tarde. Los gráficos de x y y contra t aparecen así en la Figura 10.29, lo cual es lo que se conjetura en la página 489.

En el análisis anterior examinamos la situación sólo cerca de los puntos de equilibrio. La pregunta que naturalmente surge es sobre el comportamiento de las soluciones en otros lugares del plano de fase. Las Figuras 10.24 y 10.28 sugieren que las curvas pueden aparecer como en la Figura 10.30. Sin embargo, esto sugeriría que todas las curvas de hecho son cerradas y que todas las soluciones de (5) son periódicas. Con un mayor análisis podemos mostrar que esto es realmente así, El procedimiento involucra la elimina-

*Es posible formular una definición más precisa de puntos estables e inestables. Ver por ejemplo [3] ción de t entre las ecuaciones (5) al dividir las dos ecuaciones para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b_1 + b_2x)y}{(a_1 - a_2y)x} \tag{24}$$

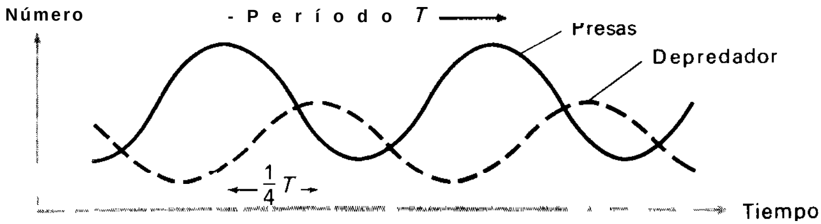


Figura 10.29

Esta ecuación, la cual es la ecuación diferencial de la familia de curvas o trayectorias en el plano de fase, tiene sus variables separables y se puede escribir como

$$\left(\frac{b_1 - b_2x}{x}\right) dx + \left(\frac{a_1 - a_2y}{y}\right) dy = 0 \tag{25}$$

Integrando encontramos $b_1 \ln x - b_2 x + a_1 \ln y - a_2 y = \text{constante}$ (26)

o

$$x^{b_1} y^{a_1} e^{-(b_2x + a_2y)} = A \tag{27}$$

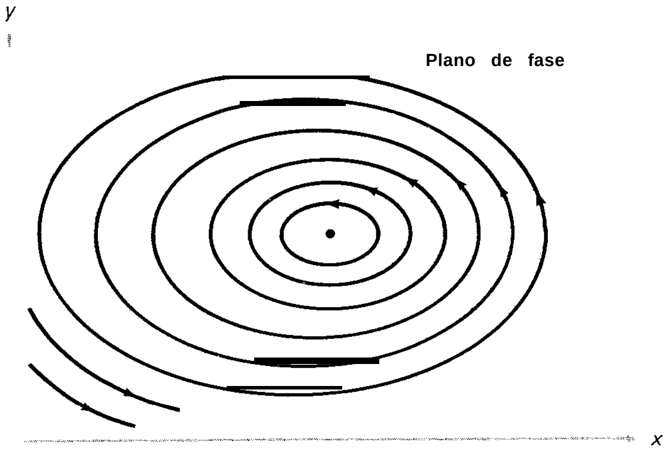


Figura 10.30

donde A es una constante arbitraria. Se puede mostrar que éstas son curvas cerradas, y como una consecuencia que las soluciones (5) son periódicas. Sin embargo, no deberíamos saltar a la conclusión de que el período para todas estas curvas está dado por (19). En realidad el período es una función complicada de las constantes a_1, b_1, a_2, b_2 el cual se reduce a (19) cerca del punto de equilibrio El período exacto para todos los casos no ha sido encontrado.

7.3 ALGUNAS APLICACIONES ADICIONALES

Las ideas acabadas de presentar son aplicables a otras situaciones. Por ejemplo en vez de tener depredadores y presas podríamos tener la situación donde una especie de insectos depende para su supervivencia de ciertos animales o plantas para realmente alimentarse de ellos. Los primeros con frecuencia son referidos como parásitos y los últimos como *huéspedes.* Mientras que la presa es destrozada por el depredador, el parásito encuentra ventajoso el mantener vivo al huésped para que pueda seguir alimentándose de él. Como otro ejemplo podemos tener situaciones más complicadas que surgen cuando dos o más especies compiten y se pueden aún destrozar una a otra por la misma presa.

Las aplicaciones no se limitan a la ecología o a las ciencias de la vida si no también a otros campos. En economía por ejemplo, las naciones compiten entre sí por el comercio el cual en un sentido es supervivencia económica, los productores compiten entre sí por los consumidores, y aún los consumidores pueden competir entre sí por los productos. En este contexto es interesante notar la similitud en la apariencia del gráfico de la Figura 5.19, página 256, involucrando el precio y la oferta de un bien con el de la Figura 10.29, página 496, que involucra depredador y presa.

Los conceptos del plano de fase y estabilidad descritos en el problema depredador-presa se pueden extender a otros sistemas no lineales

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Sin embargo no proseguiremos con esto aquí si no más bien referimos al estudiante interesado a las referencias en la Bibliografía.

EJERCICIOS A

1. Suponga que el sistema de ecuaciones diferenciales que describen un modelo particular del depredador y la presa está dado por

$$\frac{dx}{dt} = 10^{-2}x - 2 \cdot 10^{-5}xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -4 \cdot 10^{-2}y + 10^{-5}xy$$

donde y y x son los números de depredadores y presas, respectivamente, y t es el tiempo en días. (a) Determine el número de depredadores y presas en equilibrio. (b) Encuentre el período. (c) Escriba las ecuaciones de las curvas de fase en la vecindad del punto de equilibrio.

2. Haciendo el cambio de variables independientes $x = k_1X$, $y = k_2Y$, donde k_1 y k_2 son constantes muestre que las ecuaciones de Lotka-Volterra se pueden transformar en el sistema

$$\frac{dX}{dt} = \alpha(XY - X), \qquad \frac{dY}{dt} = \beta(Y - XY)$$

y dé los valores de k_1, k_2, α, β en términos de a_1, a_2, b,, b_2 ¿Cuáles son los valores de equilibrio de X y Y? Discuta algunas ventajas de este sistema transformado.

EJERCICIOS B

1. De acuerdo a las ecuaciones de Lotka-Volterra (5), si no hay depredadores el número de presas debería incrementar indefinidamente. Suponga sin embargo que revi-

samos estas ecuaciones para disponer de un modelo matemático en el cual hay algún máximo teórico al número de presas denotado por x_M. Muestre que un sistema apropiado para tal modelo está dado por

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x\left(1 - \frac{x}{x_M}\right) - a_2 xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_1 y + b_2 xy$$

2. Discuta cómo podría usted modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra si presas o depredadores se introducen o remueven del ambiente en tiempos especificados. ¿Para qué situaciones realísticas podría servir tal modelo?
3. Muestre cómo llegar al resultado (18), página 494, directamente de (27), página 496.
4. (a) Muestre que un sistema de ecuaciones para describir el movimiento no amortiguado de una masa m en el extremo de un resorte vertical de constante k está dado por

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-kx}{m}$$

(b) Muestre que en el plano de fase la masa viaja a lo largo de una elipse con ecuación.

$$\tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}my^2 = E$$

donde E es una constante y explique el significado físico.
(c) Explique ¿por qué esperaría usted que el movimiento fuera periódico?

EJERCICIOS C

1. Desarrolle el análisis del sistema de ecuaciones dado en el Ejercicio 1B en lo que usted pueda usando la analogía que se hizo en el texto.
2. Discuta como podría usted proceder con el análisis de las ecuaciones obtenidas en el Ejercicio 2B.
3. Use el análisis del plano de fase para describir el movimiento de un péndulo simple si el ángulo formado con la vertical (a) es pequeño (b) no es pequeño.
4. Discuta la estabilidad del sistema

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x^2 - 4x$$

¿El movimiento es periódico? ¿Puede usted dar una posible interpretación física?

5. Dado
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x - y$$

muestre que cuando t aumenta, las trayectorias de fase tienden al círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el límite. Tales curvas cerradas a las cuales tienden (o se apartan) las trayectorias se llaman ***ciclos límites*** y fueron investigadas extensivamente por Poincaré y otros ***(Sugerencia:*** Use coordenadas polares).

8 Soluciones de sistemas lineales por transformadas de Laplace

El método de las transformadas de Laplace ya estudiadas en el Capítulo seis se pueden usar sin ninguna dificultad adicional para resolver ecuaciones diferenciales lineales simultáneas, especialmente aquellas con coeficientes constantes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva $\quad Y' + 6Y = X', \quad 3X - X' = 2Y', \quad X(0) = 2, \quad Y(0) = 3$

donde las primas denotan derivadas con respecto a t

Solución Tomando la transformada de Laplace de cada ecuación diferencial y usando las condiciones dadas tenemos si $\mathscr{L}\{X\} = x$ y $\mathscr{L}\{Y\} = y$

$$\{sy - Y(0)\} + 6y = \{sx - X(0)\}, \qquad 3x - \{sx - X(0)\} = 2\{sy - Y(0)\}$$

o
$$sx - (s+6)y = 1, \qquad (3-s)x - 2sy = -8$$

Resolviendo para x y y, tenemos

$$x = \frac{2s+16}{(s-2)(s+3)} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3}, \qquad y = \frac{3s-1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3}$$

Así
$$X = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{2}{s+3}\right\} = 4e^{2t} - 2e^{-3t},$$

$$Y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right\} = e^{2t} + 2e^{-3t}$$

Como una ilustración de las transformadas de Laplace en un problema aplicado, considere

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Trabaje el problema de las masas vibrantes en la página 470, usando transformadas de Laplace.

Solución El sistema de ecuaciones obtenido en la página 471, junto con las condiciones iniciales, están dados por

$$x_1'' = \omega^2(x_2 - 2x_1), \qquad x_2'' = \omega^2(x_1 - 2x_2) \tag{1}$$

$$x_1(0) = 0, \qquad x_2(0) = a, \qquad x_1'(0) = 0, \qquad x_2'(0) = 0 \tag{2}$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a t y donde $\omega^2 = k/M$. Tomando la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones en (1), y usando la notación $\mathscr{L}\{x_1\} = \bar{x}_1$, $\mathscr{L}\{x_2\} = \bar{x}_2$ encontramos

$$s^2\bar{x}_1 - sx_1(0) - x_1'(0) = \omega^2(\bar{x}_2 - 2\bar{x}_1), \qquad s^2\bar{x}_2 - sx_2(0) - x_2'(0) = \omega^2(\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2)$$

o
$$(s^2 + 2\omega^2)\bar{x}_1 - \omega^2\bar{x}_2 = 0, \qquad -\omega^2\bar{x}_1 + (s^2 + 2\omega^2)\bar{x}_2 = sa$$

las cuales se pueden resolver para $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ para producir

$$\bar{x}_1 = \frac{a\omega^2 s}{s^4 + 4\omega^2 s^2 + 3\omega^4} = \frac{a\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 3\omega^2)} = \frac{a}{2}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + 3\omega^2}\right]$$

$$\bar{x}_2 = \frac{as(s^2 + 2\omega^2)}{s^4 + 4\omega^2 s^2 + 3\omega^4} = \frac{as(s^2 + 2\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 3\omega^2)} = \frac{a}{2}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + 3\omega^2}\right]$$

Entonces $x_1 = \frac{a}{2}(\cos \omega t - \cos \sqrt{3}\omega t)$, $\quad x_2 = \frac{a}{2}(\cos \omega t + \cos \sqrt{3}\omega t)$

en acuerdo con los resultados en la página 473.

EJERCICIOS A

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por transformadas de Laplace
   (a) $X' = Y,\ Y' = -X,\ X(0) = 2,\ Y(0) = -1$.
   (b) $X' + X - 5Y = 0,\ Y' + 4X + 5Y = 0,\ X(0) = -1,\ Y(0) = 2$.
   (c) $X' + 3Y' + Y = e^t,\ Y' \quad X = Y,\ X(0) = 0,\ Y(0) = 1$.
   (d) $X' - 3X - 6Y = 27t^2,\ X' + Y' - 3Y = 5e^t,\ X(0) = 5,\ Y(0) = -1$.
2. Resuelva usando transformadas de Laplace.
   (a) $\dfrac{d^2X}{dt^2} = -2Y,\ \dfrac{dY}{dt} = Y - \dfrac{dX}{dt},\ X(0) = 0,\ X'(0) = 10,\ Y(0) = 5$
   (b) $Y'' = X - 2,\ X'' = Y + 2,\ X(0) = 0,\ X'(0) = 1,\ Y(0) = 2,\ Y'(0) = -3$
3. Resuelva $X' + Y' = \cos t,\ X + Y'' = 2,\ X(\pi) = 2,\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = \frac{1}{2}$ por transformadas de Laplace [Sugerencia: Haga $X(0) = c$ y luego resuelva para c]

EJERCICIOS B

1. Trabaje el Ejercicio 1B, página 452, usando transformadas de Laplace.
2. Resuelva $X' = X + Y + Z,\ Y' = 2X + 5Y + 3Z,\ Z' = 3X + 9Y + 5Z$ sujeto las condiciones $X(0) = 2,\ Y(0) = -1,\ Z(0) = 3$.
3. Trabaje (a) el Ejercicio 1 (g)A, página 451, (b) el Ejercicio 6A, página 452, usando transformadas de Laplace.
4. Use transformadas de Laplace para trabajar (a) Ejercicio 1A, página 479, (b) Ejercicio 2A, página 479, (c) Ejercicio 3A, página 479, (d) Ejercicio 1B, página 479,
5. Resuelva $\dfrac{d^2x}{dt^2} = y + 4e^{-2t},\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x - e^{-2t}$ donde $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

EJERCICIOS C

1. Trabaje el Ejercicio 1C, página 452, usando transformadas de Laplace.
2. Use transformadas de Laplace para trabajar (a) Ejercicio 4C, página 456, (b) Ejercicio 5C, página 457, (c) Ejercicio 6C, página 457.
3. Trabaje el Ejercicio 1C, página 480, usando transformadas de Laplace.
4. Resuelva el sistema de ecuaciones (11), página 483, sujeto a las condiciones (13) usando transformadas de Laplace.

9 Método de las soluciones complementaria y particular

Cuando resolvimos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación (ver página 441, llegamos a uña ecuación diferencial lineal ordinaria individual. Luego encontramos las soluciones complementaria y particular de esta ecuación individual y de ellas su solución general. Usamos luego esta solución general para resolver el sistema de ecuaciones dado. La pregunta que naturalmente surge es de si podemos obtener soluciones complementarias y particulares del sistema *sin* primero usar la eliminación. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(D)x + \psi_1(D)y = F_1(t)\\ \phi_2(D)x + \psi_2(D)y = F_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde $D \equiv d/dt$, esto equivaldría a encontrar la solución general del sistema complementario de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(D)x + \psi_1(D)y = 0\\ \phi_2(D)x + \psi_2(D)y = 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[obtenido de (1) al remplazar los lados derechos por cero], el cual podemos llamar la solución complementaria x_c, y_c de (1), y luego encontrar una solución particular x_p, y_p del sistema dado (1). La solución general requerida de (1) debería entonces estar dada por

$$x = x_c + x_p, \; y = y_c + y_p.$$

Como en el caso de uná ecuación diferencial ordinaria individual, hay dos teoremas que son de fundamental importancia.

Teorema 1. Sea x_c, y_c la solución general del sistema complementario (2), y x_p, y_p cualquier solución particular del sistema dado (1). Entonces la solución general de (1) está dada por

$$x = x_c + x_p, \qquad y = y_c + y_p \tag{3}$$

Teorema 2. (Principio de superposición). Sea x_1, y_1; x_2, y_2; . cualquier numero de soluciones del sistema complementario (2), y sean α_1, α_2, . contantes arbitrarias.

Entonces $$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots, \qquad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + . \tag{4}$$

es también una solución de (2).

Las pruebas de estos teoremas son fáciles y muy similares a aquellas para ecuaciones lineales individuales (ver la página 169).

Prueba del Teorema 1. Por las definiciones de x_c, y_c y x_p, y_p, tenemos

$$(1)\; \phi_1(D)x_c + \psi_1(D)y_c = 0, \quad (3)\; \phi_1(D)x_p + \psi_1(D)y_p = F_1(t)$$

$$(2)\; \phi_2(D)x_c + \psi_2(D)y_c = 0, \quad (4)\; \phi_2(D)x_p + \psi_2(D)y_p = F_2(t)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3) y luego las ecuaciones (2) y (4), respectivamente, y haciendo uso de la linearidad de los operadores, encontramos

$$\begin{aligned}\phi_1(D)(x_c + x_p) + \psi_1(D)(x_c + x_p) = F_1(t),\\ \phi_2(D)(y_c + y_p) + \psi_2(D)(y_c + y_p) = F_2(t)\end{aligned} \tag{5}$$

lo cual muestra que (3) es una solución de (1). Esto en general será la solución general como lo podemos ver de la Observación 1, página 445, y del hecho de que el número de constantes arbitrarias en $x_c + x_p$, $y_c + y_p$ es el mismo como en x_c, y_c.

***Prueba del Teorema** 2.* Por las definiciones de x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; . . , tenemos

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(D)x_1 + \psi_1(D)y_1 = 0\\ \phi_2(D)x_1 + \psi_2(D)y_1 = 0\end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned}\phi_1(D)x_2 + \psi_1(D)y_2 = 0\\ \phi_2(D)x_2 + \psi_2(D)y_2 = 0\end{aligned}\right\}, \ldots \tag{6}$$

Multiplicando la primera ecuación en cada uno de estos sistemas por α_1, α_2, . . ., respectivamente, y sumando, usando la linealidad de los operadores, tenemos

$$\phi_1(D)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots) + \psi_1(D)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdot\ \cdot) = 0 \tag{7}$$

Haciendo lo mismo a cada una de las segundas ecuaciones en (6), tenemos

$$\phi_2(D)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdot) + \psi_2(D)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdot) = 0 \tag{8}$$

De (7) y (8) vemos que (4) es una solución de (1), la cual prueba el teorema.

Aunque los resultados anteriores se han enunciado para el sistema (1) que involucra dos ecuaciones con dos incógnitas x y y, ellos se cumplen también para sistemas que involucran n ecuaciones con n incógnitas, donde $n > 2$. Para ilustrar los procedimientos que intervienen en encontrar soluciones en el caso de n incógnitas, podemos usar el caso de dos incógnitas puesto que los procedimientos para ambos casos son esencialmente idénticos. También nos concentraremos en los casos donde los operadores involucrados son polinomios en $D \equiv d/dt$ con coeficientes constantes como en el Capítulo cuatro aunque los teoremas anteriores también son válidos para coeficientes variables. Puesto que el hallar la solución general del sistema complementario (2) es básico para hallar la solución general de (1), dirigimos primero nuestra atención a la cuestión de hallar la solución complementaria.

9.1 (COMO ENCONTRAMOS LA SOLUCION COMPLEMENTARIA?

Consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}(2D\ \ 2)s + (D\ \ 7)y = 0\\ (3D - 2)x + (2D - 8)y = 0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Para una ecuación diferencial individual $\phi(D)y = 0$, $D \equiv d/dt$, recordamos que buscamos soluciones de la forma y = e^{mx} y luego determinamos valores de la constante m a partir de la ecuación auxiliar. Hacemos lo mismo para el sistema (9), asumiendo que existe una solución de la forma

$$x = ae^{mt}. \qquad y = be^{mt} \tag{10}$$

donde m, a, b son constantes indeterminadas por el momento. Usamos dos constantes a y b puesto que es altamente improbable que tengamos los mismos coeficientes en (10). Si sustituimos (10) en (9), encontramos después de dividir por $e^{mt} \neq 0$,

$$\left.\begin{aligned}(2m-2)a+(m-7)b&=0\\(3m-2)a+(2m-8)b&=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Note que (11) formalmente se obtiene de (9) al remplazar D por m, x por a, y y por b, una observación que es útil con frecuencia para ahorrar tiempo. Ahora las ecuaciones (11) tendrán una solución no trivial para a y b (esto es, una en la cual a y b no son ambos cero) si y sólo si el determinante de los coeficientes de a y b en (11) es cero, esto es,

$$\begin{vmatrix}2m-2 & m-7\\3m-2 & 2m-8\end{vmatrix}=0\tag{12}$$

Esto da $\qquad m^2+3m+2=0$ o $m=-1,-2$

Note que esto corresponde a la ecuación auxiliar del Capítulo cuatro y las raíces de la ecuación auxiliar. Para este caso las raíces resultan ser reales y distintas, pero podrían haber sido iguales o imaginarias. Hay dos casos para examinar.

Caso **1, *m*** $=-1$. En este caso las ecuaciones (11) dan $-4a-8b=0$, $-5a-10b=0$, las cuales ambas llevan a $a=-2b$. Si hacemos $b=c_1$, una constante arbitraria, entonces $a=-2c_1$. Esto nos lleva a la solución

$$x=-2c_1e^{-t},\qquad y=c_1e^{-t}$$

Caso 2, ***m*** $=-2$. En este caso las ecuaciones (11) dan $-6a-9b=0$, $-8a-12b=0$, las cuales ambas llevan a $a=-\frac{3}{2}b$. Para evitar fracciones, escribamos $b=2c_2$ donde c_2 es otra constante arbitraria, de modo que $a=-3c_2$. Esto nos lleva a

$$x=-3c_2e^{-2t},\qquad y=2c_2e^{-2t}$$

Debido a que las sumas de soluciones son también soluciones, tenemos

$$x=-2c_1e^{-t}-3c_2e^{-2t},\qquad y=c_1e^{-t}+2c_2e^{-2t}\tag{13}$$

lo cual se puede chequear como la solución deseada por sustitución directa en (9).

Algunas observaciones se deberían hacer acerca del procedimiento anterior.

Observación 1. A diferencia con el método de eliminación, el número apropiado de constantes arbitrarias en (13) se obtiene automáticamente. Así no tenemos que preocuparnos por encontrar relaciones entre las constantes, como se requiere si se usa el método de eliminación.

Observación 2. Como se observó en los Casos 1 y 2 anteriores, un valor de ***m*** conduce a dos ecuaciones equivalentes involucrando a y b. Necesitamos obtener sólo una. Algunas veces, sin embargo, puede que valga la pena obtener ambas como un chequeo al trabajo.

La técnica acabada de considerar es claramente aplicable cuando las raíces son reales y distintas. Una pregunta que podemos hacer ahora es, ¿qué pasa si las raíces están repetidas? Examinemos esta situación en el siguiente

Resuelva el sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} Dx + (3D + 1)y = 0 \\ (D + 2)x + (D + 3)y = 0 \end{aligned}\right\}.$ (14)

Con el procedimiento habitual de hacer $x = ae^{mt}$, $y = be^{mt}$, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} ma + (3m + 1)b = 0 \\ (m + 2)a + (m + 3)b = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Así, si deseamos una solución no trivial para a y b, debemos tener

$\begin{vmatrix} m & 3m + 1 \\ m + 2 & m + 3 \end{vmatrix} = 0$, esto es, $m^2 + 2m + 1 = 0$ y $m = -1, -1$

Caso **1**, m = 1. Colocando $m = -1$ en la primera ecuación de (15), encontramos $-a - 2b = 0$ ó $a = -2b$, lo cual también se obtiene de la segunda ecuación de (15). Tomando así b = c , , $a = -2c_1$, vemos que una solución es

$$x = -2c_1e^{-t}, \qquad y = c_1e^{-t} \tag{16}$$

Ahora obviamente no tiene sentido considerar $m = -1$ de nuevo como Caso 2, pues parecería que estuviéramos atrancados en este punto. Sin embargo, al recordar la situación similar en el Capítulo cuatro, podemos ser llevados a multiplicar los resultados en (16) por t, usando sólo una constante diferente c_2, Y esperamos que

$$x = -2c_2te^{-t}, \qquad y = c_2te^{-t} \tag{17}$$

será también una solución. Desafortunadamente, si sustituimos la solución asumida (17) en las dos ecuaciones de (14), nos conduce, respectivamente, a $c_2e^{-t} = 0$ y $c_2e^{-t} = 0$, mostrando que (17) no es una solución. El hecho de que obtuvimos c_2 e-t y $-c_2e^{-t}$ en lugar de cero, sin embargo, sugiere la posibilidad de que deberíamos añadir múltiplos constantes apropiados de e^{-t} a x y y en (17), esto es,

$$x = -2c_2te^{-t} + K_1e^{-t}, \qquad y = c_2te^{-t} + K_2e^{-t} \tag{18}$$

y luego determinamos las constantes K_1 y K_2 de modo que (18) sea una solución de (14).

Entonces $c_2e^{-t} = K_1e^{-t} + 2K_2e^{-t}, \qquad -c_2e^{-t} = -K_1e^{-t} - 2K_2e^{-t}$ (19)

De cada uno de los resultados en (19) obtenemos

$$K_1 + 2K_2 = c_2 \tag{20}$$

lo cual muestra que fue necesario sustituir (18) en solo una de las ecuaciones en (14). El resultado (20) también muestra que podemos usar cualesquiera valores para K_1 y K_2 que sean consistentes con (20). Por ejemplo, escojamos $K_2 = c_1$, $K_1 = c_2 - 2c_1$. Para este caso obtenemos de (18)

$$x = -2c_1e^{-t} \quad 2c_2te^{-t} + c_2e^{-t}, \qquad y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \tag{21}$$

lo cual es la solución deseada.

Hemos tratado así los casos de raíces reales, raíces distintas y raíces repetidas. Por analogía con el Capítulo cuatro, trataríamos ahora el caso final donde las raíces pueden ser imaginarias. Para ilustrar el procedimiento en este caso, consideremos el siguiente

PROBLEMA 3 PARA **DISCUSION**

Resuelva el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{aligned}(4D+1)x+(2D+7)y&=0\\(D-1)x+(D+1)y&=0\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Colocando $x = ae^{mt}$, $y = be^{mt}$ en (22), encontramos
$$\left.\begin{aligned}(4m+1)a+(2m+7)b&=0\\(m-1)a+(m+1)b&=0\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Para obtener soluciones no triviales de a y b, debemos tener

$$\begin{vmatrix}4m+1 & 2m+7\\ m-1 & m+1\end{vmatrix}=0, \qquad \text{esto es, } m^2+4=0 \text{ y } m=\pm 2i$$

Caso 1, $m = 2i$. Colocando $m = 2i$ en la segunda de las ecuaciones (23) la cual aparece más simple que la primera, obtenemos $(2i-1)a + (2i+1)b = 0$, de modo que

$$a = -\frac{2i+1}{2i-1}b = -\frac{(2i+1)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)}b = -\frac{3-4i}{5}b$$

Por supuesto este mismo resultado se hubiera obtenido si usáramos la primera ecuación. Haciendo $b = 5c_1$, donde c_1 es una constante arbitraria, tenemos $a = (3-4i)c_1$. Una solución correspondiente a esto es

$$x = -(3-4i)c_1e^{2it}, \qquad y = 5c_1e^{2it}\tag{24}$$

Caso 2, $m =\ 2i$. Iríamos ahora sobre el mismo procedimiento como en el Caso 1. Sin embargo, es más fácil notar que los resultados serían los mismos como los del Caso 1 con i remplazado por $-i$, excepto que se usaría una constante arbitraría distinta, digamos c_2. Esto conduce a la solución

$$x = -(3+4i)c_2e^{-2it}, \qquad y = 5c_2e^{-2it}\tag{25}$$

De estos dos casos tenemos así la solución deseada

$$x = -(3-4i)c_1e^{2it} - (3+4i)c_2e^{-2it}, \qquad y = 5c_1e^{2it} + 5c_2e^{-2it}\tag{26}$$

Esta es realmente la solución general. El único inconveniente es que no es una solución *real*. Podemos, sin embargo obtener una solución real de ella. Para hacer esto hacemos uso de las identidades de Euler (ver página 178) para escribir (26) como

$$\left.\begin{aligned}x &= -(c_1+c_2)(3\cos 2t+4\operatorname{sen}2t) - i(c_1\ \ c_2)(3\operatorname{sen}2t-4\cos 2t)\\ y &= 5(c_1+c_2)\cos 2t + 5i(c_1-c_2)\operatorname{sen}2t\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Ahora puesto que $c_1 + c_2$ e $i(c_1 - c_2)$ son también constantes arbitrarias, podemos denotarlas, respectivamente, por ***A*** y ***B***, de modo que (26) se puede escribir en forma real como

$$\left.\begin{aligned} x &= -A(3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t) - B(3\,\text{sen}\,2t - 4\cos 2t) \\ y &= 5A\cos 2t + 5B\,\text{sen}\,2t \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

la cual es la solución deseada de (22)

Observación 3. Hay una manera abreviada para obtener (28) directamente de (26). Para ver esto primero observamos que

$$\left.\begin{aligned} -(3-4i)e^{2it} &= -(3-4i)(\cos 2t + i\,\text{sen}\,2t) \\ &= -(3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t) - i(3\,\text{sen}\,2t - 4\cos 2t) \\ 5e^{2it} &= 5(\cos 2t + i\,\text{sen}\,2t) = 5\cos 2t + 5i\,\text{sen}\,2t \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Hacemos ahora uso del siguiente

Teorema 3. Si x_1, y_1 es una solución de (2), entonces

$$\text{Re}\,(x_1), \text{Re}\,(y_1) \quad \text{Y} \quad \text{Im}\,(x_1), \text{Im}\,(y_1)$$

donde Re e Im denotan las partes real e imaginaria, son dos soluciones independientes de (2), y su solución general está así dada por

$$x = A\,\text{Re}\,(x_1) + B\,\text{Im}\,(x_1), \qquad y = A\,\text{Re}\,(y_1) + B\,\text{Im}\,(y_1) \tag{30}$$

donde ***A, B*** son constantes arbitrarias

De este teorema y (29) vemos que la solución general de (22) es

$$x = -A(3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t) - B(3\,\text{sen}\,2t - 4\cos 2t), \; y = 5A\cos 2t + 5B\cos 2t$$

coincidiendo con (28). Una prueba del Teorema 3 no es difícil y se deja al Ejercicio 3A, página 509.

9.2 (COMO ENCONTRAMOS UNA SOLUCION PARTICULAR?

Si el sistema lineal de ecuaciones diferenciales que hay que resolver tiene la forma (2), página 501, entonces la solución complementaria la cual ya se ha considerado es claramente la solución general deseada. Sin embargo, para el sistema (1) en el cual los lados derechos no son ambos iguales a cero, debemos además hallar una solución particular. Como en el Capítulo cuatro, hay tres métodos principales mediante los cuales se puede obtener una solución particular.

(a) Método de coeficientes indeterminados.
(b) Método de variación de parámetros.
(c) Método de operadores.

Como hemos visto, los métodos (a) y (c) sirven solo para tipos limitados de funciones, tales como polinomios, exponenciales, etc.* Sin embargo, el método de variación de parámetros (b) sirve para todos los casos. Por tanto concentraremos nuestra atención en este método. Para ilustrar el procedimiento involucrado, consideremos el siguiente

*El método de operador para determinar soluciones particulares de sistemas de ecuaciones Para tales funciones es esencialmente como el mostrado en el Ejemplo ilustrativo 3, página 447.

Resuelva el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{aligned}(2D-2)x+(D-7)y&=t-1\\(3D-2)x+(2D-8)y&=e^{-t}\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Ya hemos encontrado la solución complementaria de este sistema de ecuaciones en la página 503 dada por

$$x=-2c_1e^{-t}-3c_2e^{-2t},\qquad y=c_1e^{-t}+2c_2e^{-2t}\qquad(32)$$

El método de variación de parámetros consiste en remplazar las constantes arbitrarias en esta solución por funciones arbitrarias de la variable independiente del mismo modo como en el Capítulo cuarto, y luego hallar estas funciones sustituyendo la solución asumida en (31). De (32) obtenemos

$$x=-2\gamma_1e^{-t}-3\gamma_2e^{-2t},\qquad y=\gamma_1e^{-t}+2\gamma_2e^{-2t}\qquad(33)$$

donde γ_1, γ_2 son funciones de t las cuales deseamos determinar. Usando (33) en (31) y denotando por γ'_1, γ'_2 las derivadas de γ_1, γ_2 con respecto a t encontramos después de simplificar

$$3\gamma'_1e^{-t}+4\gamma'_2e^{-2t}=1-t,\qquad 4\gamma'_1e^{-t}+5\gamma'_2e^{-2t}=-e^{-t}\qquad(34)$$

Note que ningún término contiene γ_1 ni γ_2, lo cual no es sorprendente en vista del hecho de que para las constantes γ_1 y γ_2 (33) es la solución complementaria de (31). Esta observación ayuda considerablemente en reducir el trabajo involucrado en obtener las ecuaciones (34). Si resolvemos para γ'_1 y γ'_2 de (34) encontramos

$$\gamma'_1=5te^t-5e^t-4,\qquad \gamma'_2=3e^t-4te^{2t}+4e^{2t}$$

Entonces por integración, omitiendo la constante de integración

$$\gamma_1=5te^t-10e^t-4t,\qquad \gamma_2=3e^t-2te^{2t}+3e^{2t}\qquad(35)$$

Usando (35) en (33) y sumando la solución complementaria (32), encontramos

$$\left.\begin{aligned}x&=-2c_1e^{-t}-3c_2e^{-2t}+8te^{-t}-9e^{-t}-4t+11,\\y&=c_1e^{-t}+2c_2e^{-2t}-4te^{-t}+6e^{-t}+t-4\end{aligned}\right.\qquad(36)$$

la cual es la solución general deseada. Se debería notar que si hubiéramos incluido las constantes arbitrarias de integración en (35) también hubiéramos obtenido la solución complementaria.

9.3 RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO

Vale la pena resumir el procedimiento a usar al resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por el método de las soluciones complementaria y particular.

I. ***Escriba la ecuación complementaria.*** Esto se hace remplazando por cero los lados derechos de cada ecuación en el sistema, asumiendo que aún no es cero.

II. Encuentre la solución complementaria. Para hacer esto, asuma soluciones de la forma $x = ae^{mt}$, $y = be^{mt}$ obteniendo una *ecuación de determinante* para *m*. Luego encuentre los valores de m que son raíces de esta ecuación y usándolas determine *a* y *b* en términos de constantes arbitrarias. Tres situaciones pueden surgir.

1. *Las raíces son reales y distintas.* En este caso la solución complementaria se puede escribir inmediatamente.

2. *Las raíces están repetidas.* Si las raíces son m_1, m_1 por ejemplo, multiplicamos la solución original $x = ae^{m_1 t}$, $y = be^{m_1 t}$ por t y sumamos múltiplos constantes de $e^{m_1 t}$ para obtener una nueva solución asumida

$$x = ate^{m_1 t} + K_1 e^{m_1 t}, \qquad y = bte^{m_1 t} + K_2 e^{m_1 t}$$

donde K_1 y K_2 se deben determinar por sustitución en una de las ecuaciones complementarias del sistema.

3. *Las raíces son imaginarias.* En este caso usamos el hecho de que las partes reales e imaginarias de las soluciones son también soluciones.

III. Encuentre una solución particular. Esto se puede hacer usando el método de *variación de parámetros,* esto es, remplazando las constantes arbitrarias por funciones arbitrarias de t, las cuales se deben luego determinar a partir del sistema dado. La solución general deseada se obtiene entonces sumando las soluciones complementaria y particular.

El procedimiento anterior es válido con menores modificaciones para sistemas con n ecuaciones lineales con *n* incógnitas donde $n > 2$. Sin embargo, para valores grandes de *n*, los cálculos llegan a ser algo laboriosos. Está disponible un método que usa matrices, el cual discutiremos en el Capítulo once, y que reduce el trabajo. Sin embargo, una de las principales razones para usar matrices es desde el punto de vista teórico, puesto que los valores de m resultan ser los *valores característicos,* o como con frecuencia decimos los *eigenvalores,* de una matriz. La teoría es análoga a la *Teoría de Sturm-Liouville* del Capítulo ocho.

EJERCICIOS A

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas y determine la solución que satisfaga las condiciones dadas.

(a) $\left.\begin{aligned}(D + 6)x + (3D + 2)y &= 0\\ (D + 5)x + (2D + 3)y &= 0\end{aligned}\right\}$; $x(0) = 2$, $y(0) = 4$

(b) $\left.\begin{aligned}(D \quad 1)x + (2D + 7)y &= 0\\ (2D + 1)x + (D + 5)y &= 0\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned}(D + 5)x + (3D - 11)y &= 0\\ (D + 3)x + (D - 7)y &= 0\end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned}(D - 2)x + 4y &= 0\\ 3x + (2D + 1)y &= 0\end{aligned}\right\}$

(e) $\left.\begin{aligned}(D + 3)x + 2y &= 0\\ 3x + (D + 1)y &= 0\end{aligned}\right\}$

(f) $\left.\begin{aligned}(D + 4)x + (3D + 4)y &= 0\\ (D + 2)x + (2D + 2)y &= 0\end{aligned}\right\}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 6$

(g) $\left.\begin{aligned}(D + 1)x + (2D + 3)y &= 0\\ (D - 2)x + 5Dy &= 0\end{aligned}\right\}$

(h) $\left.\begin{aligned}(D - 1)x - y &= 0\\ 5x + (D - 3)y &= 0\end{aligned}\right\}$; $x(0) = 2$, $y(0) = 0$

(i) $\left.\begin{array}{l} 2x - (D + 5)y = 0 \\ (D + 1)x + 2y = 0 \end{array}\right\}; x(0) = 0,\ y(0) = -10$ (j) $\left.\begin{array}{l} (2D - 6)x + (3D - 2)y = 0 \\ (7D + 4)x + (7D + 20)y = 0 \end{array}\right\}$

2. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas usando el método de la solución complementaria-particular y determine la solución que satisfaga cualquiera de las condiciones dadas.

(a) $\left.\begin{array}{l} (D + 1)x + 2y = 8 \\ 2x + (D - 2)y = 2e^{-t} \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{l} Dx + 2y = 4e^{2t} \\ x + (D \quad 1)y = 2e^{2t} \end{array}\right\}: x(0) = 7.\ y(0) = 1$

(c) $\left.\begin{array}{l} (D - 1)x + (2D + 7)y = 3(t \quad 5) \\ (2D + 1)x + (D + 5)y = 9t - 7 \end{array}\right\} x(0) = 0, y(0) = -3$

(d) $\left.\begin{array}{l} (D + 3)x \quad (D + 1)y = 0 \\ (2D - 9)x + (D + 4)y = 15e^{-3t} \end{array}\right\}$ (e) $\left.\begin{array}{l} (D + 2)x + (D + 1)y = 10\cos t \\ (D + y)x + (2D + 3)y = 6 \end{array}\right\}$

(f) $\left.\begin{array}{l} 3x - (D + 2)y = 8t \\ (D - 2)x + y = 16e^{-t} \end{array}\right\}$ (g) $\left.\begin{array}{l} (2D - 1)x - (D \quad 1)y = 4te^{-t} - 3e^{-t} \\ (D + 4)x - (2D + 4)y = 2te^{-t} - 6e^{-t} \end{array}\right\}$

(h) $\left.\begin{array}{l} (2D - 1)x + (7D + 3)y = 90\,\text{sen}\,2t \\ (D - 5)x + (8D \quad 3)y = 0 \end{array}\right\}$

3. Pruebe el Teorema 3, página 566.

EJERCICIOS B

1. Pruebe (a) Teorema 1, (b) Teorema 2 y (c) Teorema 3 para sistemas de tres o más ecuaciones diferenciales lineales.
2. Trabaje (a) Ejercicio **2(a)A,** (b) Ejercicio **2(d)A,** (c) Ejercicio **2(f)A** usando operadores para obtener una solución particular.
3. Muestre cómo se puede usar el método de coeficientes indeterminados trabajando (a) Ejercicio 2(a)A, (b) Ejercicio **2(d)A,** (c) Ejercicio **2(f)A.**
4. Trabaje (a) Ejercicio 2(b)A, (b) Ejercicio **2(d)A,** (c) Ejercicio **2(f)A** usando métodos de operador o de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular.
5. Explique cómo se puede usar el método del texto para resolver los sistemas:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} = y + 4e^{-2t}, \frac{d^2y}{dt^2} = x - e^{-2t}$ (ver ecuaciones **(4)**, página **440**), (b) Ejercicio **3A,** página 451.

EJERCICIOS C

1. Resuelva usando el método de la solución complementaria-particular.

$$(D - 5)x + Dy + 2z = 24e^{-t}, \quad (D - 1)x - y = 0. \quad (5D - 11)y + (2D \quad 2)z = 0$$

2. Trabaje el Ejercicio 1 usando el método de coeficientes indeterminados o el método de operadores para hallar una solución particular.
3. Trabaje (a) Ejercicio **5(a)B,** (b) Ejercicio **5(b)E** expresando primero los sistemas como sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
4. Resuelva el Ejercicio **6A,** página 452, usando el método de la solución complementaria-particular.

once

métodos de eigenvalores de matrices para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

1 El concepto de una matriz

1.1 INTRODUCCION

En el Capítulo diez, página 500, obtuvimos soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales por el método de la solución complementaria y particular. Si el número de ecuaciones es grande, el método puede ser algo laborioso. Sin embargo, esta labor se puede reducir al introducir-la idea de *matrices,* las cuales se pueden considerar como generalización de vectores.

Aunque tal reducción de trabajo es desde el punto de vista práctico una motivación para el estudio de matrices, mayores beneficios se obtienen desde el punto de vista teórico. Esto es con frecuencia el caso cuando aplicamos matemáticas a un problema práctico. Las matemáticas por sí solas resultan ser más interesantes y gratificantes que el problema original. Afortunadamente, el recíproco también es cierto, y así tal vez lo mejor es disfrutar lo mejor de ambos mundos.

1.2 ALGUNAS IDEAS SIMPLES

Puesto que no todos los estudiantes se han enfrentado con matrices en cursos previos, presentaremos los aspectos más importantes que se necesitan de ellas en relación a nuestra discusión con ecuaciones diferenciales lineales. Para los estudiantes que han estudiado matrices, tal presentación puede considerarse como un repaso de los fundamentos.

Tal vez la mejor manera de introducir la idea de matrices es considerar sistemas de ecuaciones lineales tales como los que se estudian en álgebra elemental, por ejemplo

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 7 \\ 2x + y - z &= -6 \\ 4x - 3y + 2z &= -5 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde x, y, z son incógnitas que se deben determinar. Un método para resolver tales ecuaciones es la técnica de *eliminación,* lo análogo de lo que se dio en la página 441 para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Ocurre que el método se simplifica considerablemente cuando las ecuaciones se expresan en forma matricial. Describamos esto.

La solución de las ecuaciones (1) claramente depende de los coeficientes de x, y, z en el lado izquierdo de las ecuaciones, como también de las constantes a la derecha. Podemos escribir estos dos conjuntos de números, denotados por A y B, respectivamente, como

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Llamamos *A y B matrices,* cada una separadamente se llama una *matriz.* Por razones obvias *A,* que tiene tantas filas de números como columnas, se llama una *matriz cuadrada,* mientras que *B,* que tiene sólo una columna de números, se llama una *matriz columna.* Los números restantes en (1), esto es, las incógnitas x, y, z se pueden escribir como una matriz columna dada por

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

usando la letra X para denotar esta matriz de incógnitas. Cada número en una matriz se llama con frecuencia un *elemento o entrada* de la matriz.

En general, podemos pensar en una matriz como un arreglo rectangular de números organizados en m filas y n columnas, la cual se puede indicar por

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Aquí el número o elemento en la fila j y columna ***k*** está dado por a_{jk}. **Con** frecuencia llamamos la matriz (4) una matriz m por n ó de $m \times n$, y podemos referirnos a $m \times n$ como el *tamaño o dimensión* de la matriz. Por ejemplo, ***A*** en (2) es una matriz de 3×3 mientras que ***B*** es una matriz de 3×1. Podemos tener por supuesto otras matrices además de matrices cuadradas y matrices columna. Por ejemplo podríamos tener las matrices

$$R = (3 \quad -2 \quad 5), \qquad S = \Big(2 \tag{5}$$

donde ***R*** es una matriz de *1* $\times$ ***3*** *o matriz fila* y S una matriz de ***2*** $\times$ ***3.*** Note que una matriz de $m \times n$ no es del mismo tamaño de una matriz de n $\times$ m a menos que m = n, esto es, a menos que sea una matriz cuadrada.

En el caso de que ***A*** sea una matriz cuadrada podemos asociar con ***A el*** determinante $n \times n$ o de orden n de ***A*** el cual se denota por $\det(A)$. Debemos por supuesto distinguir entre la matriz cuadrada y su determinante, la primera es un conjunto de números y el último es un simple número.*

Ejemplo 1. Si $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

entonces $\qquad \det(A) = 14. \qquad \det(B) = -37$

1.3 VECTORES FILA Y COLUMNA

Un vector en el espacio tridimensional se puede caracterizar por sus tres componentes en las direcciones de los ejes positivos x, y, z. Podemos así considerar a una matriz fila o columna como un *vector fila o columna,* respectivamente. Por analogía un vector n dimensional teniendo n componentes se puede representar por una matriz fila o columna con n elementos y se llama un vector fila 0 columna respectivamente.

*Para definiciones y teoremas sobre determinantes ver el apéndice.

Ejemplo 2. La matriz B en (2) es un vector columna que representa a un vector tridimensional con componentes 7, -6, -5. La matriz R en (5) es un vector fila que representa a un vector tridimensional con componentes 3, -2, 5. La matriz $(-4\ \ 2\ \ 3\ \ 5)$ es un vector fila y representa un vector cuadridimensional.

En cálculo se desarrollan varias operaciones con vectores. Por ejemplo, para sumar dos vectores (teniendo las mismas dimensiones), simplemente sumamos sus componentes. En terminología matricial esto equivale a

$$(a_1\ \ a_2\ \ a_3) + (b_1\ \ b_2\ \ b_3) = (a_1 + b_1\ \ a_2 + b_2\ \ a_3 + b_3) \tag{6}$$

con un resultado similar para matrices columna. Similarmente, para multiplicar un vector por un número real, a menudo referido como un *escalar*, simplemente multiplicamos cada componente por el número. En términos, de matrices, esto equivale a

$$c(a_1\ \ a_2\ \ a_3) = (ca_1\ \ ca_2\ \ ca_3) \tag{7}$$

con un resultado similar para matrices columna. Las reglas (6) y (7) se pueden extender fácilmente a dimensiones mayores.

Ejemplo 3

$$(3\ \ -4\ \ 2) + (-2\ \ 4\ \ 3) = (1\ \ 0\ \ 5),$$

$$-2(2\ \ -1\ \ 4) = (-4\ \ 2\ \ -8)$$

Otro concepto importante involucrando vectores es el concepto del *producto escalar*, o como también se llama el *producto punto*, de dos vectores. El estudiante recordará que éste está definido como la suma de los productos de los componentes correspondientes de los dos vectores. Desde el punto de vista de matrices, es conveniente expresar este producto escalar para vectores n dimensionales en la forma

$$(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{8}$$

donde el primer vector está escrito como un vector fila y el segundo como un vector columna.* Motivación por esta definición se da cuando miramos el sistema lineal de ecuaciones (1) en la página 511. El lado izquierdo $3x - 2y + 5z$, de la primera ecuación es el producto escalar de la primera fila de la matriz A en (2) y la matriz columna X en (3), esto es,

$$(3\ \ -2\ \ 5)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x\ \ \ 2y + 5z \tag{9}$$

Enunciados similares se pueden hacer para los lados izquierdos de la segunda y tercera ecuaciones en (1). La multiplicación donde un vector columna precede a un vector fila no está definida.

***Ver también el Capítulo ocho, página 356.**

1.4 OPERACIONES CON MATRICES

Podemos considerar una matriz de $m \times n$ con m filas y n columnas como compuesta de m vectores fila cada uno de los cuales es un vector n dimensional o n vectores columna cada uno de los cuales es m dimensional. Así, de la misma manera como tenemos un álgebra de matrices fila y columna, deberíamos tener un álgebra de matrices en general. Guiados por el álgebra para vectores, por tanto, presentamos las siguientes definiciones.

(a) Igualdad.. Dos matrices, digamos A y B, teniendo el mismo tamaño se dice que son *iguales*, escrito $A = B$, si y sólo si los elementos correspondientes son iguales. En símbolos, si $A =$ (c-z,,), $B=$ *(b,,)*, entonces $A = B$ si y sólo si $a_{jk} = b_{jk}$ para toda j y k.

Ejemplo 4 $\begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 3 & -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 4 & y \\ z & w & 0 \end{pmatrix}$

si y sólo si $x = -2$, $a = 4$, $y = 1$, $z = 3$, $w = -2$ y $b = 0$.

(b) Multiplicación por un número real (escalar). Si A es una matriz y c es un número (o escalar), entonces cA es una matriz cuyos elementos son todos c veces los elementos correspondientes de A. En símbolos, si $A = (a_{jk})$, entonces $cA =$ *(ca,,)*.

Ejemplo 5 $-3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)(4) & (-3)(-1) \\ (-3)(-2) & (-3)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Adición. Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces *su suma*, denotada por $A + B$, es: una matriz cuyos elementos son las sumas de los elementos correspondientes de A y B. En símbolos, si $A =$ *(a,,)*, $B = (b_{jk})$, entonces $A + B = (a_{jk} +$ *b,,)*.

Ejemplo 6 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 & 3+0 \\ 4-2 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) Sustracción. Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces su *diferencia*, denotada por A-B es una matriz cuyos elementos son las diferencias de los elementos correspondientes de A y B. En símbolos, si $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$, entonces $A - B =$ *(a,,* $- b_{jk})$. Podemos también definir A-B como $A + (-1)B$ y usar (b) y (c).

Ejemplo 7. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 3-0 \\ 4-(-2) & -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

(e) Multiplicación. Sean A y B matrices tales que el número n de columnas en A es igual al número de filas en B. Entonces el producto AB es una matriz cuyo elemento en la fila j y columna k es igual al producto escalar del vector fila j en A y el vector columna k en B. En símbolos si $A = (a_{jk})$, $B =$ *(b,,)*, y $C = AB = (c_{jk})$, entonces

$$c_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rk}$$

Ejemplo 8. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (3)(-2)+(-4)(-3)+(2)(1) & (3)(1)+(-4)(-1)+(2)(-2) \\ (-1)(-2)+(0)(-3)+(1)(1) & (-1)(1)+(0)(-1)+(1)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9. El producto obtenido al intercambiar las matrices en el Ejemplo 8 no está definido, porque en el producto resultante el número de columnas de la primera matriz no sería igual al número de filas de la segunda matriz. Este ejemplo muestra que la ley conmutativa para la multiplicación de matrices no se cumple en general, esto es, $AB \neq BA$. Esto es cierto en general aún cuando AB y BA existan ambas.

Observación. La definición de multiplicación de matrices requiere que si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $p \times q$ entonces debemos tener $n = p$ para que el producto AB exista. En tal caso decimos que A y B son ***conformes.*** El producto AB es una matriz de $m \times q$. Esto se puede indicar simbólicamente por la regla de cancelación:

$$(m \times \cancel{n})(\cancel{n} \times q) \to m \times q.$$

Si una matriz se sustrae de sí misma, el resultado es una matriz cuyos elementos son todos iguales a cero, llamada la *matriz* cero o *nula* y denotada por el símbolo 0. La matriz cero puede tener cualquier tamaño o dimensión.

Ejemplo 10. $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz cero o nula actúa en álgebra matricial como el cero del álgebra ordinaria.

Con el objeto de tener una matriz que actúe como el uno o unidad de! álgebra ordinaria, introducimos una ***matriz** unidad o identidad* definida por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

la cual es una matriz cuadrada con unos en la diagonal de la izquierda superior a la derecha inferior, llamada la diagonal ***principal, y*** ceros en otras partes. Si el producto IA o AI existe, el resultado es A (ver el Ejercicio 6B).

Ejemplo ll.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(4)+(0)(-1) & (1)(-2)+(0)( ) \\ (0)(4)+(1)(-1) & (0)(-2)+(1)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La siguiente lista proporciona algunos resultados importantes en relación a matrices, los cuales se pueden considerar corno teoremas. En todos los casos asumimos que las operaciones indicadas están definidas y todas las letras denotan matrices.

1. $A + B = B + A$ — Ley conmutativa para la adición
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — Ley asociativa para la adición
3. $AB \neq BA$ en general — Ley conmutativa para la multiplicación no se cumple
4. $A(BC) = (AB)C$ — Ley asociativa para la multiplicación
5. $A(B + C) = AB + AC$ — Ley distributiva
6. $A + O = A$
7. $AO = OA = 0$
8. $AI = IA = A$

En muchas situaciones prácticas tenemos necesidad de matrices cuyos elementos son funciones, tal como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} t^2 & e^{-t} & \operatorname{sen} 3t \\ 4 & 3t & 2t^3 \end{pmatrix}$$

en la cual los elementos son funciones de t. Las reglas de operación con tales matrices son exactamente las mismas a las ya dadas. Además, sin embargo, como se podría esperar en aplicaciones a ecuaciones diferenciales, necesitamos definir la derivada de una matriz. Hacemos la siguiente

Definición 1. Si A es una matriz cuyos elementos son funciones diferenciables de t, entonces la derivada de A con respecto a t, denotada por dA/dt, es una matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos correspondientes de A. En símbolos, si $A = (a_{jk})$, entonces

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{jk}}{dt}\right) \tag{11}$$

Ejemplo 12. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$. $\quad \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^2 & e^{-t} & \operatorname{sen} 3t \\ 4 & 3t & 2t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & -e^{-t} & 3\cos 3t \\ 0 & 3 & 6t^2 \end{pmatrix}$

Podemos también definir integrales de matrices.

Definición 2. Si A es una matriz cuyos elementos son funciones integrables de t, entonces la integral de A con respecto a t es una matriz cuyos elementos son las integrales de los elementos correspondientes de A. En símbolos, si $A = (a_{jk})$, entonces

$$\int A\, dt = \left(\int a_{jk}\, dt\right) \tag{12}$$

Ejemplo 13. Sea $= (e^{-t} \;\; -2 \operatorname{sen} t \;\; 3)$.

Entonces $\int A\, dt = (-e^{-t} + c_1 \;\; 2\cos t + c_2 \;\; 3t + c_3) = (-e^{-t} \;\; 2\cos t \;\; 3t) + C$

donde $C = (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3)$. Algunas veces C se llama una *matriz constante arbitraria*,

Consideremos algunos ejemplos ilustrando varias operaciones con matrices.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Exprese el sistema de ecuaciones lineales (1), página 511, en forma matricial.

Solución Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Entonces usando la definición de multiplicación e igualdad de matrices, podemos escribir el sistema en la forma $AX = B$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ *muestre que* $A^2 - 3A - 4I = 0$.

Solución Tomando $A^2 = AA$, tenemos

$$A^2 - 3A - 4I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Escriba en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} + 2y - z = t^2 - 1, \quad \frac{dy}{dt} - x + y + 3z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + x - 2y = 4e^{-2t} \tag{13}$$

Solución El sistema dado (13) se puede expresar de acuerdo a la definición de igualdad de matrices como

$$\begin{pmatrix} Dx + 0x + 2y - z \\ Dy - x + y + 3z \\ Dz + x - 2y + 0z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 0 \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{14}$$

donde por brevedad hemos usado $D \equiv d/dt$. Usando la definición de adición de matrices, el lado izquierdo de (14) se puede escribir como una suma:

$$\begin{pmatrix} Dx \\ Dy \\ Dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0x + 2y - z \\ -x + y + 3z \\ x - 2y + 0z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

donde hemos usado las definiciones de derivadas y producto de matrices. Podemos así escribir el sistema dado como

$$\frac{du}{dt} + Au = F \tag{15}$$

donde $\quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 0 \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$

El siguiente es *un* teorema importante el cual será usado con frecuencia en este capítulo.

Teorema. Suponga que se da el sistema de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \tag{16}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ cuyos eleméntos son constantes dadas, y X es un vector n dimensional con elementos desconocidos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces el sistema tiene soluciones no triviales, esto es, $X \neq 0$, si y sólo si $\det(A) = 0$.

Ejemplo 14. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Entonces $AX = O$ es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ x - 4y + 6z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Puesto que
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

el sistema tiene soluciones no triviales. Dos de las infinitas posibles soluciones no triviales son

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Debido al teorema anterior llamamos una matriz *A singular* si $\det(A) = 0$; en otro caso, se llama *no singular*.

EJERCICIOS A

1. Desarrolle cada una de las siguientes operaciones indicadas para producir una matriz equivalente

(a) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $-2\begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $(2 \quad 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) $(3 \quad -2 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Encuentre los valores de a y b para los cuales $(2a \quad b \quad 4a + 3) = (a + b \quad 3)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Dado que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentre $3A^2 - 4A + 6I$.

4. Dado que $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Muestre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$. (h) $A(B + C) = AB + AC$. (c) $A(BC) = (AB)C$

¿Qué leyes ilustran estos resultados?

5. Si A, B, C son las matrices dadas en el Ejercicio 4, determine si (a) $AB = BA$. (b) $A(BC) = C(AB)$. ¿Qué conclusiones puede usted sacar de estas observaciones?

6. Exprese en forma matricial

(a) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}\right\}$. (b) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 4x + 3y - 2z &= -3 \\ 3x - 2y + z &= 7 \end{aligned}\right\}$. (c) $\left.\begin{aligned} x - z &= 4 \\ y + 3z &= 2 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

7. Dado que $A = \begin{pmatrix} t^2 & e^{-t} \\ 3t - 2 & 4e^t \end{pmatrix}$, encuentre $t\dfrac{d^2A}{dt^2} - 2\dfrac{dA}{dt} + 4t^2I$.

8. Exprese los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales en forma matricial

(a) $\dfrac{dx}{dt} + 3x - 2y = e^{-t}$, $\dfrac{dy}{dt} - x + 4y = \operatorname{sen} 2t$

(b) $\dfrac{dx}{dt} - x + 2y - z = t^2$, $\dfrac{dy}{dt} + 3x - y + 4z = e^t$, $\dfrac{dz}{dt} - 2x + y - z = 0$

(c) $\dfrac{dx}{dt} + z = x$, $\dfrac{dy}{dt} - 2x = y + 3t$, $\dfrac{dz}{dt} + 4y = z - \cos t$

9. Encuentre det (A) si: (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Determine cuáles de los siguientes sistemas tienen soluciones no triviales, y determine algunas de estas soluciones si existen.

(a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$. (b) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y \quad 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$

EJERCICIOS B

1. Si A, B y C son matrices del mismo tamaño, pruebe que (a) $A + B = B + A$. (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2. Pruebe que si A, B y C son matrices conformes entonces:

(a) $A(B + C) = AB + AC$. (b) $A(BC) = (AB)C$.

3. Si A, B son matrices conformes cuyos elementos son funciones diferenciables de t, muestre que

$$\frac{d}{dt}(AB) = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B$$

Ilustre tomando $A = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^{2t} & -3t \\ 4 & e^t \end{pmatrix}$

Explique por qué el orden indicado es esencial.

4. ¿Si $AX = AB$, donde A, B, X se asumen conformes, necesariamente sigue que X $= B$? Explique.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, determine, si es posible, los elementos en la matriz X $= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ de modo que $AX = XA$.

6. Muestre que si I es la matriz identidad (10), página 515, y A es una matriz, entonces si los productos ZA ó AZ existen, el resultado es A.

EJERCICIOS C

1. Dado $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ muestre que aún cuando $AB \neq BA$ todavía tenemos det $(AB) =$ det (BA).

2. Pruebe el resultado indicado en el Ejercicio 1 si A y B son cualesquiera (a) matrices de 2x 2, (b) matrices de 3×3. El resultado se puede generalizar a matrices de $n \times n$ donde $n > 3$.

3. Muestre que si A y B son cualesquiera determinantes de 2×2 tenemos det (AB) = det (A) det (B) e ilustre usando los determinantes en el Ejercicio 1. (b) Extienda el resultado de (a) a determinantes de 3×3 e ilustre con un ejemplo (el resultado es cierto para cualesquiera determinantes de $n \times n$). (c) Discuta la conexión entre los resultados de (a) y (b) y los resultados de los Ejercicios 1 y 2.

4. Una matriz X tal que AX = Z donde I es la matriz identidad o unidad se llama la ***inversa*** de A y se denota por A^{-1}. Encuentre A^{-1} si:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Muestre que la inversa de una matriz cuadrada A no puede existir si A es una matriz singular.

6. Sea $A = (a_{jk})$ una matriz cuadrada, C = (c,,) una matriz cuadrada del mismo tamaño cuyos elementos C_{jk} denotan los cofactores de los elementos, y C^T es la matriz cuadrada obtenida de C al intercambiar columnas y filas (con frecuencia llamada la ***transpuesta*** de C). (a) Usando las matrices en el Ejercicio 4 ilustre el hecho que

$$AC^T = C^TA = I\Delta \quad 0 \quad A\left(\frac{C^T}{\Delta}\right) = \left(\frac{C^T}{\Delta}\right)A = I \quad \text{donde}\,\Delta = \det(A) \neq 0$$

(b) Use (a) para mostrar que la inversa de una matriz no singular A está dada por $A^{-1} = \frac{C^T}{\Delta}$, donde $\Delta \neq 0$ y use este resultado para trabajar el Ejercicio 4. Estos resultados se cumplen para matrices de $n \times n$.

7. Resuelva el sistema de ecuaciones (1), página 511, usando matrices inversas. [*sugerencia:* Use el Ejemplo ilustrativo 1, página 517, para escribir el sistema como $AX = B$ y luego multiplique a la izquierda por A^{-1}.]

2 Ecuaciones diferenciales matriciales

Volvamos nuestra atención a mostrar cómo las matrices se pueden usar para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por el método de la solución complementaria y particular. Hacemos un paralelo con la discusión de la página 500 para que el estudiante pueda ver las relaciones entre ambos métodos. Como ya se mencionó, las matrices sirven para simplificar el trabajo involucrado donde el número de ecuaciones es grande.

Indicamos en el Capítulo diez, página 449, que todo sistema lineal de ecuaciones diferenciales puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden si queremos usar suficientes incógnitas. En el caso donde, por ejemplo, tengamos tres funciones desconocidas de t, digamos x, y, z, tal sistema se puede escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= F_1 \\ \frac{dy}{dt} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= F_2 \\ \frac{dz}{dt} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= F_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde los a's son constantes dadas y los lados derechos F_1, F_2, F_3 son funciones dadas de t. El sistema (1) se puede escribir en forma matricial como

$$\frac{du}{dt} + Au = F \qquad (2)$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

como vemos al usar un procedimiento similar al del Ejemplo ilustrativo 3, página 517. Si (1) se remplaza por un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $n \geq 2$, la correspondiente ecuación matricial está aún dada por (2), pero u y F son entonces vectores n dimensional y A es una matriz de $n \times n$.

Entendemos por una ***solución*** de (2), por supuesto cualquier vector columna u el cual cuando se sustituye en (2) produzca una identidad. Para resolver cualquier sistema tal como (1), debemos por tanto aprender cómo resolver (2).

Por razones obvias, llamamos (2) una *ecuación diferencial matricial lineal de primer orden con coeficientes constantes.** La ecuación obtenida de (2) al remplazar el lado derecho F por 0, la matriz cero o nula, se llama por analogía con los capítulos previos la *ecuación complementaria* y está dada por

$$\frac{du}{dt} + Au = O \tag{4}$$

La *solución general* de (4), la cual involucra un número de constantes arbitrarias igual a la dimensión de u, se llama la *solución complementaria* de (2), y como en los capítulos previos tenemos los siguientes teoremas fundamentales.

Teorema 1. Sea u_c la solución general de la ecuación complementaria (4), esto es, la solución complementaria de (2). Sea u_p cualquier solución particular de (2). Entonces la solución general de (2) está dada por

$$u = u_c + u_p \tag{5}$$

Teorema 2. *(Principio de superposición).* Sea u_1, u_2,. cualquier número de soluciones de la ecuación complementaria (4), y sea c_1, c_2, constantes arbitrarias. Entonces

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \; . \; . \tag{6}$$

es también una solución de (4).

Pruebas de estos teoremas se dejan para los ejercicios.

Observación. Se debería notar que si deseamos la solución general de la ecuación complementaria (4) donde u es un vector n dimensional necesitamos n soluciones independientes en (6). Como en el Capítulo cuatro, este concepto de independencia requiere una discusión de *Wronskianos,* la cual se da en la página 532.

En vista de los teoremas anteriores es claro que para obtener la solución general deseada de (2) debemos encontrar la solución complementaria de (2), o la solución general de (4), y también una solución particular de (2). Veamos ahora cómo éstas se pueden encontrar.

3 La solución complementaria

Para encontrar la solución general de (4) o la solución complementaria de (2), hagamos la sustitución en (4) **dada** por

$$u = e^{\lambda t}v \tag{7}$$

donde λ es una constante y v es un vector columna n-dimensional constante. Note que para $n = 2$, (7) equivale a hacer la sustitución $x = ae^{\lambda t}$, $y = be^{\lambda t}$ en la página 502. Entonces (4) llega a ser

$$\lambda e^{\lambda t}v + Ae^{\lambda t}v = O \tag{8}$$

*Pudimos también llamar (2) una ecuación diferencial *vectorial* puesto que u es un vector columna.

o al dividir por $e^{\lambda t} \neq 0$

$$(\lambda I + A)v = 0 \tag{9}$$

donde I es la matriz identidad o unitaria. Ahora del teorema en la página 518, sigue que (9) tendrá soluciones no triviales, esto es, $v \neq 0$, si y solo si

$$\det(\lambda I + A) = 0 \tag{10}$$

Para la matriz (4) en la página 512 con $m = n$ esto produce la ecuación determincnte de orden n

$$\begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

3.1 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

La ecuación determinante (ll) es equivalente a una ecuación polinómica de grado n en λ. Esta ecuación, que es análoga a la *ecuación auxiliar* del Capítulo cuatro, tiene n raíces no necesariamente distintas, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Correspondiente a estas raíces habrá valores del vector columna v obtenido de (9), y de estos valores de v se obtienen soluciones de la ecuación matricial (2). Antes de ilustrar el procedimiento, examinemos el significado de la ecuación (9) la cual conduce a (10) u (11).

Podemos escribir (9) en la forma

$$Av = -\lambda v \tag{12}$$

En el lado izquierdo de esta ecuación A es una matriz de $n \times n$ y v es un vector columna n dimensional. Una pregunta que naturalmente surge es sobre el significado del producto Av. Claramente, Av es otro vector n dimensional, de modo que podemos considerar a A como un *operador o transformación* que cuando opera sobre v produce un nuevo vector n dimensional. Esta transformación en el espacio n dimensional se puede visualizar mejor si consideramos $n = 3$, por ejemplo. En tal caso podemos pensar que la matriz A de 3×3 toma al vector tridimensional v y lo transforma en otro vector tridimensional. En el espacio tridimensional se puede pensar que tal transformación consiste de una *rotación* del vector, un *alargamiento o contracción* del vector, o posiblemente ambos. Para el caso general, donde $n > 3$, podemos considerar a A como una rotación con un posible alargamiento o contracción de un vector n dimensional, aunque tal visualización no es tan fácil como para $n = 3$.

En el caso de un vector tridimensional, la multiplicación por un número escalar λ representa un vector en la misma u opuesta dirección, dependiendo si el número $-\lambda$ es positivo o negativo. En muchos casos, podemos considerar a $-\lambda v$ como un vector paralelo a v. Esta misma idea también se aplica al espacio n dimensional.

Con estas interpretaciones el problema de hallar los valores de λ y sus vectores correspondientes v equivale a hacer la siguiente

Pregunta. ¿Cuáles vectores v en el espacio n dimensional son tales que cuando sufren una transformación A (rotación y alargamiento o contracción) se convierten en un nuevo vector (esto es, $-\lambda v$) paralelo al vector original teniendo magnitud $|\lambda|$ veces la del vector original?

Al responder la pregunta anterior estamos por supuesto buscando vectores no cero o no triviales los cuales se pueden pensar como *vectores propios.* Ahora debido a que mucho del trabajo sobre teoría de matrices fue hecho en alemán en el cual la palabra para propio es *eigen, los* valores de λ y los vectores correspondientes v han llegado a conocerse por las palabras híbridas *eigenvalores y eigenvectores,* respectivamente, y usaremos esta terminología. La ecuación determinante (10) u (11) usada para hallar los valores de λ se llama la *ecuación de eigenvalor.** Hay varias observaciones que deberían hacerse.

Observación 1. El hecho de que aparezca un signo menos en (12) surge simplemente porque hicimos $u = e^{\lambda t} v$ en la ecuación diferencial matricial (4) en la página 522. Si en vez hubiéramos hecho $u = e^{-\lambda t} v$, (12) habría sido remplazada por $Av = \lambda v$, la cual luce más estética.† En tal caso pudimos llamar los λ's eigenvalores, pero ellos serían los negativos de los dados anteriormente. Hay algunas ventajas de usar la ecuación (12) debido a la analogía con la *teoría de Sturm-Liouville* del Capítulo ocho, como lo discutiremos en la página 542. Se debería notar que independiente del signo adoptado para los eigenvalores no hay diferencias en los eigenvectores correspondientes, debido a que cualquier múltiplo constante (o escalar) de un eigenvector es también un eigenvector.

Observación 2. El problema de determinar λ y v tales que $Av = -\lambda v$ (ó $Av = \lambda v$) se puede considerar como un problema puramente algebraico (esto es, aparte de su conexión con soluciones de ecuaciones diferenciales matriciales). Por esta razón, nos referimos a los λ's y v's como los eigenvalores y eigenvectores de la matriz *A.* El problema de eigenvalores matriciales tiene muchas ramificaciones teóricas importantes, algunas de las cuales se presentan en los ejercicios y al final de este capítulo para aquellos interesados en ellas. El estudiante que desee continuar un estudio adicional puede referirse a los libros sobre teoría matricial.*

3.2 EL CASO DE EIGENVALORES REALES DISTINTOS

Para ilustrar las ideas anteriores, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - 2x - 6y &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*El estudiante que ha leído el Capítulo ocho notará la similitud en terminología con la dada aquí. Esta similitud se explorará más en las páginas 539-545.

† Algunos autores expresan la ecuación diferencial matricial en la forma $du/dt = Au + F$ para conseguir este objetivo. Sin embargo, ésta no es la forma ya usada al escribir ecuaciones diferenciales de primer orden (ver página 53).

*Ver [11], por ejemplo.

El sistema dado es equivalente a la ecuación diferencial matricial

$$\frac{du}{dt} + Au = 0. \quad \text{donde } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Colocando $u = e^{\lambda t}v$ en la ecuación diferencial dada o usando (10), tenemos

$$(\lambda I + A)v = 0 \text{ o } \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 \\ 2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} v = O \tag{15}$$

Ahora con el objeto de tener soluciones no triviales $v \neq 0$, debemos tener

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -6 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0, \text{ esto es, } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \text{ ó } \lambda = -1, -2$$

Así hay dos eigenvalores reales y dintintos $\lambda = -1$ y $\lambda = -2$.

***Caso* 1.** $\lambda = -1$. Colocando $\lambda = -1$ en (15) y usando $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, donde a y b son constantes desconocidas, tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = O \quad \text{o} \quad -3a - 6b = 0, \quad 2a + 4b = 0$$

De cualquiera de estas dos ecuaciones encontramos $a = -2b$. En particular, si $b = 1$, entonces $a = -2$. Así una solución de (15) correspondiente a $\lambda = -1$ es

$$v = v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Usando $u = e^{\lambda t}$ v, esto produce una solución correspondiente a (14) dada por

$$u = u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{17}$$

Caso 2. $\lambda = -2$. Colocando $\lambda = -2$ en (15) como en el Caso 1, encontramos

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = O \quad \text{o} \quad -4a - 6b = 0, \quad 2a + 3b = 0$$

Así $a = -\frac{3}{2}b$. En particular, si $b = 2$, tenemos $a = -3$, de modo que

$$v = v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y una solución a la ecuación diferencial (14) es

$$u = u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{18}$$

Usando el principio de superposición, vemos de las soluciones (17) y (18) que

$$u = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{19}$$

es también una solución. Puesto que ésta contiene el número (dos) necesario de constantes arbitrarias, ésta es la solución general deseada. Podemos escribir (19) como

$$x = -2c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t}, \qquad y = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} \tag{20}$$

Observación 3. Al obtener la solución general anterior, hemos asumido la independencia lineal de las soluciones u_1, u_2 dadas por (17) y (18), respectivamente. Esto se verifica en la página 532. Ejemplo 1.

Observación 4. El sistema (13) es equivalente al sistema (9) en la página 502, y se obtiene la misma solución general. Podemos usar métodos matriciales para resolver (9), página 502, directamente como se muestra en el Ejercicio 6(a)B.

3.3 EL CASO DE EIGENVALORES REPETIDOS

Consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Este sistema es equivalente a la ecuación diferencial matricial

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \qquad \text{donde } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

La misma técnica de hacer u = $e^{\lambda t}v$ usada antes produce

$$(\lambda I + A)v = 0 \quad o \quad \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} v = 0 \tag{23}$$

Así, para tener soluciones no triviales v $\neq$ 0, debemos tener

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & 4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0, \text{esto es } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \text{ ó } \quad \lambda = -1, -1$$

o eigenvalores repetidos.

Caso 1. $\lambda = -1$. Colocando $\lambda = -1$ en (23) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad o \quad 2a + 4b = 0, \qquad -a - 2b = 0$$

de modo que $a = -2b$. En particular, si b = 1, entonces $a = -2$ de modo que

$$v = v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y una solución a la ecuación diferencial es

$$u = u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{24}$$

Obviamente, no hace falta tomar el Caso **2,** $\lambda = -1$, puesto que es de nuevo como el Caso 1. De acuerdo a nuestra experiencia con raíces repetidas podemos ensayar como una posible solución

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} \tag{25}$$

obtenida de (24) al multiplicar por t. Sin embargo, al sustituir (25) en la ecuación diferencial de (22), encontramos

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = O \tag{26}$$

lo cual muestra que (25) no es una solución. El hecho de que un término involucrando

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

no se use en (26) nos lleva a asumir en vez de (25) la posible solución

$$u = u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{27}$$

donde K_1, K_2 son constantes a determinar. Sustituyendo (27) en (22) da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 2K_1 + 4K_2 \\ -K_1 - 2K_2 \end{pmatrix} e^{-t} = O \quad \text{ó} \quad 2K_1 + 4K_2 = 2, \qquad K_1 + 2K_2 = 1$$

Tomando $K_2 = 0$, de modo que $K_1 = 1$, vemos de (27) que una solución está dada por

$$u = u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{28}$$

De las dos soluciones (24) y (28) y del principio de superposición obtenemos

$$u = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \right] \tag{29}$$

como la solución general deseada.

Observación 5. Podemos mostrar que las soluciones (24) y (28) son linealmente independientes por el método en las páginas 532-533

Observación 6. El sistema (21) es equivalente al dado en (14) en la página 504, y las dos soluciones generales obtenidas son las mismas.

3.4 EL CASO DE EIGENVALORES IMAGINARIOS

Consideremos el siguiente

Resuelva el sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2}y &= 0\\ \frac{dy}{dt} - \tfrac{5}{2}x - \tfrac{3}{2}y &= 0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

El sistema es equivalente a la ecuación diferencial matricial

$$\frac{du}{dt} + Au = O, \quad \textbf{donde } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

De esto encontramos

$$\begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{pmatrix} v = O \tag{32}$$

de modo que $\begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0$, esto es $\lambda^2 + 4 = 0$ o $\lambda = \pm 2i$

Tenemos así eigenvalores imaginarios.

Cuso *1*, $\lambda = 2i$. Colocando $\lambda = 2i$ en (32), tenemos

$$\begin{pmatrix} 2i + \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2i - \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad o \quad (2i + \tfrac{3}{2})a + \tfrac{5}{2}b = 0, \quad -\tfrac{5}{2}a + (2i - \tfrac{3}{2})b = 0$$

Entonces $a = (4i - 3)b/5$. En particular si $b = 5$, tenemos $a = -3 + 4i$. Así

$$v = v_1 = \begin{pmatrix} -3 + 4i \\ 5 \end{pmatrix} \tag{33}$$

lo cual conduce a la solución de la ecuación diferencial (31) dada por

$$u = u_1 = \begin{pmatrix} -3 + 4i \\ 5 \end{pmatrix} e^{2it} \tag{34}$$

Caso 2, $\lambda = -2i$. Podríamos colocar $\lambda = -2i$ en (32) y proceder como en el Caso 1. Es más fácil notar que podemos obtener la solución deseada para este caso simplemente remplazando i por $-i$ en (34). Esto lleva a la solución

$$u = u_2 = \begin{pmatrix} -3 - 4i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-2it} \tag{35}$$

De (34) y (35) podríamos encontrar la solución general usando el principio de superposición. Sin embargo esta solución está dada en términos de imaginarios y desearíamos que la solución fuese real. Podemos fácilmente probar que la parte real de u_1 y la parte imaginaria de u_1 son soluciones (ver el Ejercicio 4A). De (34) tenemos, al hacer uso de la identidad de Euler, página 178,

$$\begin{pmatrix} -3+4i \\ 5 \end{pmatrix} e^{2it} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right][\cos 2t + i\,\mathrm{sen}\,2t]$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t + i\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t\right] \quad (36)$$

Esto lleva a las soluciones

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t \qquad (37)$$

así que por el principio de superposición la solución general es

$$u = c_1\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\mathrm{sen}\,2t\right] \quad (38)$$

Observación 7. Podemos mostrar que las soluciones en (38) son linealmente independientes por el método en la página 532, de modo que (38) da solución general.

Observación 8. El sistema (30) es equivalente al dado en (22) en la página 505, y la solución general allá obtenida es equivalente a (38).

3.5 UN PROBLEMA ALGO MAS COMPLICADO

Las ideas anteriores se pueden por supuesto extender a sistemas que involucran matrices de $n \times n$ donde $n > 2$. Los métodos son esencialmente los mismos, y la única dificultad que puede surgir es el trabajo involucrado en la evaluación de determinantes de alto orden. Con el objeto de ilustrar el procedimiento en tales casos, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA **DISCUSION**

Resuelva el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} - x + 3y &= 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Para reducir éste a un sistema de primer orden, hacemos la sustitución $\frac{dx}{dt} = z$. Entonces el sistema dado (39) puede escribirse

$$\frac{dx}{dt} - z = 0, \quad \frac{dy}{dt} + x - y + z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + 2y + z = 0 \qquad (40)$$

Esto puede escribirse como una ecuación diferencial matricial de primer orden.

$$\frac{du}{dt} + Au = O \qquad (41)$$

donde
$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Si ahora colocamos $u = e^{\lambda t}v$ en (41), donde v es un vector columna tridimensional constante, se obtiene

$$(\lambda I + A)v = 0 \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} v = 0 \tag{43}$$

Así, para obtener soluciones no triviales $v \neq 0$, debemos tener

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0, \qquad \text{esto es, } \lambda = 2, -1, -1$$

Caso 1, $\lambda = 2$. Colocando $\lambda = 2$ en (43) produce

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad 2a_1 - a_3 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad 2a_2 + 3a_3 = 0$$

de donde $a_1 = \frac{1}{2}a_3$, $a_2 = -\frac{3}{2}a_3$. En particular, si $a_3 = 2$, entonces $a_1 = 1$, $a_2 = -3$.

Así tenemos
$$v = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

y una solución correspondiente es
$$u = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \tag{45}$$

Caso 2, $\lambda = -1$. Colocando $\lambda = -1$ en (43) produce

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad -a_1 - a_3 = 0, \quad a_1 - 2a_2 + a_3 = 0, \quad 2a_2 = 0$$

de donde $a_1 = -a_3$, $a_2 = 0$. En particular si $a_3 = 1$, entonces $a_1 = -1$, $a_2 = 0$.

Así tenemos
$$v = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

y una solución correspondiente es
$$u = u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{47}$$

Puesto que el Caso 3, $\lambda = -1$ produciría la misma solución con el Caso 2, debemos usar el método para raíces repetidas dado en la página 526. Para este propósito tomamos como solución

$$u = u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{48}$$

y buscamos determinar K_1, K_2, K_3. Sustituyendo (48) en (41) produce

$$\frac{du}{dt} + Au = \begin{pmatrix} -K_1 - K_3 - 1 \\ K_1 - 2K_2 + K_3 \\ 2K_2 + 1 \end{pmatrix} e^{-t} = O$$

0 $\quad K_1 \; t \; K_3 + 1 = 0, \quad K, -2K_2 + K_3 = 0, \quad 2K_2 + 1 = 0$

de donde $K_1 = -1 - K_3$, $K_2 = -\frac{1}{2}$. Puesto que K_3 es arbitraria, podemos escoger $K_3 = 0$ de modo que $K_1 = -1$. Así (48) da la solución

$$u = u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{49}$$

Usando el principio de superposición, obtenemos de (45), (47) y (49) la solución general requerida.

$$u = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \right] \tag{50}$$

Esto es equivalente a

$$\begin{gathered} x = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - c_3 te^{-t} \quad c_3 e^{-t}, \\ y = -3c_1 e^{2t} - \tfrac{1}{2} c_3 e^{-t}, \qquad z = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t} \end{gathered} \tag{51}$$

Se debería notar que aunque (51) es la solución general para el sistema (40), la solución general para el sistema (39) está dada por los valores de x y y en (51), mientras que z, la cual es igual a dx/dt, es ajena. A pesar de esto, sin embargo, (50) o su equivalente (51) puede ser útil cuando se den condiciones iniciales. Por ejemplo, suponga que debemos resolver (39) sujeto a las condiciones iniciales

$$x = 5, \qquad 4' = 2, \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \qquad \text{en } t = 0 \tag{52}$$

Esto se puede usar para escribir (50) como

$$c_1 \begin{pmatrix} \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} tc, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \tag{53}$$

de donde podemos encontrar c_1, c_2, c_3

El uso del principio de superposición en los problemas anteriores para hallar soluciones generales se puede justificar empleando los conceptos de independencia lineal y Wronskianos como en el Capítulo cuatro. En este respecto, tenemos las siguientes definiciones fundamentales

Definición 1. Sea $u_1, u_2, \ldots, u_k$ un conjunto de vectores n dimensionales , los cuales asumiremos que son funciones de t definidas en algún intervalo denotado por J. El conjunto *se* dice que *es linealmente independiente en J* si para todo t en J

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k = 0 \tag{54}$$

implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. En otro caso el conjunto se dice que es *linealmente dependiente* en J.

Definición 2. Sea $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un conjunto de vectores columna n dimensionales definidos como en la Definición 1. Entonces el *Wronskiano de este* conjunto es el determinante de la matriz obtenida a partir de estos vectores columna y se denota por

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{55}$$

Entonces el siguiente teorema fundamental puede probarse.

Teorema 3. Sea $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soluciones de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{du}{dt} + Au = O \tag{56}$$

para todo t en J, donde A es una matriz de $n \times n$ y u es vector columna n dimensional.

Entonces

(a) el conjunto es linealmente independiente en J si y sólo si el Wronskiano $W \neq 0$ para algún valor, digamos t_1 en J.

(b) Todas las soluciones de (56) tienen la forma

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n \tag{57}$$

esto es, (57) es la solución general de (56).

Ejemplo 1. En el problema de la página 524 encontramos dos soluciones de la ecuación matricial (14) dadas por

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

El Wronskiano de este conjunto de soluciones está dado por

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} -2e^{-t} & -3e^{-2t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} \end{vmatrix} = -e^{-3t}$$

y puesto que $W \neq 0$, vemos por el Teorema 3 que el conjunto es linealmente independiente y

$$u = c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}e^{-2t} \text{ es la solución general deseada.}$$

Ejemplo 2. En el problema de la página 529 encontramos tres soluciones de la ecuación matricial (41), las cuales se pueden escribir como

$$u_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -3e^{2t} \\ 2e^{2t}\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t}\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -(1+t)e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} \\ te^{-t}\end{pmatrix}$$

El Wronskiano de este conjunto está dado por

$$W(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -(1+t)e^{-t} \\ -3e^{2t} & 0 & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} & te^{-t}\end{vmatrix} = \frac{9}{2}$$

Puesto que $W \neq 0$, vemos por el Teorema 3 que el conjunto es linealmente independiente y que $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$ es la solución general deseada.

4 La solución particular

Ahora que hemos encontrado la solución complementaria, volvamos a los métodos para obtener una solución particular de la ecuación matricial

$$\frac{du}{dt} + Au = F \tag{1}$$

Como en el Capítulo cuatro, podemos usar el método de coeficientes indeterminados, el método de variación de parámetros, o métodos especiales de operador. De estos el método de variación de parámetros trabaja mejor, puesto que los otros métodos se aplican sólo a tipos especiales de funciones como hemos visto. Restringimos así nuestra atención a este método. Para ilustrar el procedimiento, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - 2x - 6y &= 2t - 2 - e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y &= 2e^{-t} - 3t + 3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial como

$$\frac{du}{dt} + Au = F, \quad \text{donde } u = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}-2 & -6\\ 2 & 5\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}2t - 2 - e^{-t}\\ 2e^{-t} - 3t + 3\end{pmatrix} \tag{3}$$

Ahora, ya hemos encontrado la solución complementaria de la ecuación diferencial en (3) como

$$u = c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}e^{-2t} \tag{4}$$

Para hallar una solución particular, remplacemos las constantes c_1 y c_2 en (4) por funciones de t, denotadas por γ_1 y γ_2, respectivamente, de modo que

$$u = \gamma_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + \gamma_2\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}e^{-2t} \tag{5}$$

es una solución de la ecuación diferencial en (3). Sustituyendo tenemos

$$\gamma_1'\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + \gamma_2'\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}e^{-2t} = \begin{pmatrix}2t-2-e^{-t}\\ 2e^{-t}-3t+3\end{pmatrix} \tag{6}$$

donde se nota que sólo están presentes los términos que involucran derivadas γ'_1, γ'_2, puesto que todos los otros términos satisfacen la ecuación diferencial en (3) con F remplazada por 0. Podemos escribir (6) como dos ecuaciones en γ'_1, γ'_2 a saber

$$-2\gamma_1'e^{-t} - 3\gamma_2'e^{-2t} = 2t - 2 - e^{-t}, \qquad \gamma_1'e^{-t} + 2\gamma_2'e^{-2t} = 2e^{-t} - 3t + 3$$

las cuales podemos resolver ya sea por eliminación o por determinantes (regla de Cramer, en el apéndice). Por cualquiera de estos métodos encontramos

$$\gamma_1' = 5te^t - 5e^t - 4, \qquad \gamma_2' = 3e^t - 4te^{2t} + 4e^{2t}$$

La integración de éstas, omitiendo las constantes de integración, produce

$$\gamma_1 = 5te^t - 10e^t - 4t, \qquad \gamma_2 = 3e^t - 2te^{2t} + 3e^{2t} \tag{7}$$

Usando éstas en (5) da una solución particular, y así la solución general deseada es

$$u = c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}(5t - 10 - 4te^{-t}) + \begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}(3e^{-t} - 2t + 3) \tag{8}$$

Note que si sumamos las constantes arbitrarias c_1, c_2 a (7) y usamos los resultados en (5) también obtenemos (8).

En términos de x y y la solución está dada por

$$\left.\begin{aligned} x &= -2c_1e^{-t} \quad 3c_2e^{-2t} + 8te^{-t} - 9e^{-t} - 4t + 1\\ y &= c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} - 4te^{-t} + 6e^{-t} + t \quad 4\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Observación. El sistema (2) es equivalente al sistema dado en la página 507, y las soluciones generales son las mismas.

5 Resumen del procedimiento

Resumamos el procedimiento usado anteriormente. Se asume que el sistema dado a resolver está escrito en la forma (2), página 521.

I. *Escriba la ecuación complementaria.* Esto se hace remplazando el lado derecho de la ecuación diferencial matricial por la matriz nula o cero, asumiendo por supuesto que esto no está ya hecho.

II. *Encuentre la solución complementaria.* Para ello asuma una solución de la forma $u = ve^{\lambda t}$, donde u es un vector columna de las variables dependientes, v es un vector columna constante, y λ es una constante (escalar). En el caso de la ecuación (4), página 522, esto conduce a $(\lambda I + A)v = 0$. De esto tenemos det $(\lambda I + A) = 0$, lo cual conduce a los eigenvalores λ. De estos eigenvalores podemos determinar los eigenvectores correspondientes v y de éstos la solución. Hay tres situaciones que pueden surgir.

(a) Los eigenvalores son reales y distintos. En este caso la solución complementaria se puede escribir como una combinación lineal de las soluciones (esto es, suma de soluciones cada una multiplicada por una constante diferente).

(b) Los eigenvalores están repetidos. Si hay dos eigenvalores cada uno igual a λ_1, por ejemplo, entonces una solución está dada por $u = v_1 e^{\lambda_1 t}$, donde v_1 es el eigenvector correspondiente a λ_1. Una segunda e independiente solución se obtiene asumiendo

$$u = v_1 t e^{\lambda_1 t} + K e^{\lambda_1 t}, K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

y determinando las constantes K_1, K_2 de' modo que (10) satisfaga la solución complementaria. Una combinación lineal de estas dos soluciones será también una solución. Para tres o más eigenvalores iguales el procedimiento se puede extender.

(c) Los eigenvalores son imaginarios. En este caso hacemos uso del hecho de que las partes reales e imaginarias de soluciones son también soluciones.

III. *Encuentre una solución particular.* Use el método de variación de parámetros, esto es, remplace las constantes en la solución complementaria por funciones de t, las cuales deben luego determinarse.

IV. *Sume las soluciones complementaria y particular.* El resultado es la solución general deseada del sistema dado.

Observación. Se asume que en el procedimiento anterior el sistema dado de ecuaciones está expresado como una ecuación diferencial matricial de primer orden con coeficientes constantes. Si, por ejemplo, tenemos un sistema que involucra dos ecuaciones diferenciales, las cuales pueden involucrar derivadas hasta de segundo orden, para ambas variables dependientes el procedimiento anterior involucraría vectores cuadridimensionales y matrices de 4×4. Es posible, sin embargo, generalizar el procedimiento anterior a ecuaciones diferenciales matriciales de *segundo orden* involucrando sólo vectores bidimensionales y matrices de 2×2 (ver el Ejercicio 2C).

6 Aplicaciones usando matrices

Podemos usar matrices para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales formuladas de problemas que surgen en ciencia e ingeniería. Una ilustración típica se da en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Encuentre las corrientes en cualquier tiempo t en la red eléctrica que se muestra en la Figura 11.1, asumiendo que son cero en tiempo $t = 0$.

Solución Usando las leyes de Kirchhoff (ver página 476), encontramos las ecuaciones

$$370 \operatorname{sen} t - 2I_1 - 3(I_1 - I_2) - \frac{dI_1}{dt} = 0, \qquad -2\frac{dI_2}{dt} + 3(I_1 - I_2) = 0 \tag{1}$$

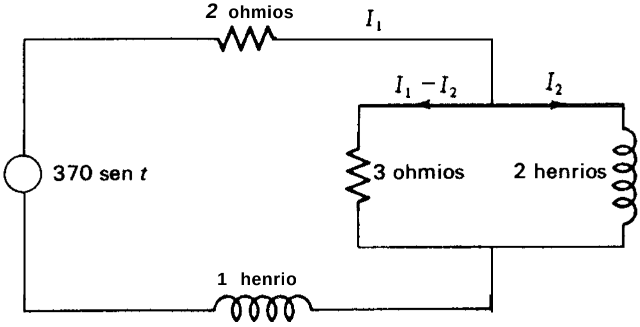


Figura 11.1

ó

$$\frac{du}{dt} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 370 \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{donde } u = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Así la ecuación de eigenvalores está dada por

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad \lambda^2 + \tfrac{13}{2}\lambda + 3 = 0, \quad \text{esto es } \lambda = -6, -\tfrac{1}{2}$$

Caso ***1,*** $\lambda = -6$. De

$$\begin{pmatrix} \lambda + 5 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

tenemos al colocar $\lambda = -6$; $-a_1 - 3a_2 = 0$, $-\frac{3}{2}a_1 - \frac{9}{2}a_2 = 0$ o $a_1 = -3a_2$.

Tomando $a_2 = 1$, tenemos $a_1 = -3$. Así una solución de la ecuación complementaria es

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} \tag{4}$$

Caso 2, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Colocando $\lambda = -\frac{1}{2}$ en (3) se tiene

$$\tfrac{9}{2}a_1 - 3a_2 = 0, \qquad -\tfrac{3}{2}a_1 + a_2 = 0 \quad \text{o} \quad a_2 = \tfrac{3}{2}a_1$$

Tomando $a_1 = 2$, tenemos $a_2 = 3$. Así una segunda solución de la ecuación complementaria es

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} \tag{5}$$

De (4) y (5) vemos que la solución complementaria de (2) es

$$u_c = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} \tag{6}$$

Para encontrar una solución particular usamos el método de variación de parámetros. De acuerdo a este método remplazamos c_1 y c_2 en (6) por funciones de t dadas por γ_1 y γ_2 respectivamente para obtener

$$u = \gamma_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} \tag{7}$$

la cual debe ser una solución de (2). Sustituyendo tenemos

$$\gamma_1' \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} + \gamma_2' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} = \begin{pmatrix} 370\,\text{sen}\,t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

donde usamos el hecho de que los términos que involucran γ_1 y γ_2 desaparecen puesto que la suma de tales términos es una solución de (2) con el lado derecho remplazado por 0. Tenemos de (8)

$$-3\gamma_1' e^{-6t} + 2\gamma_2' e^{-t/2} = 370\,\text{sen}\,t, \qquad \gamma_1' e^{-6t} + 3\gamma_2' e^{-t/2} = 0$$

ó

$$\gamma_1' = -\tfrac{1110}{11} e^{6t}\,\text{sen}\,t, \qquad \gamma_2' = \tfrac{370}{11} e^{t/2}\,\text{sen}\,t$$

La integración de éstas omitiendo las constantes de integración conduce a

$$\gamma_1 = -\tfrac{30}{11} e^{6t}(6\,\text{sen}\,t - \cos t), \qquad \gamma_2 = \tfrac{148}{11} e^{t/2}(\text{sen}\,t - 2\cos t)$$

Usando éstas en (7) produce la solución particular

$$u_p = -\tfrac{30}{11}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}(6\,\text{sen}\,t - \cos t) + \tfrac{148}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}(\text{sen}\,t - 2\cos t) = \begin{pmatrix} -62 \\ -78 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 76 \\ 24 \end{pmatrix}\text{sen}\,t$$

La solución general está así dada por

$$u = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \begin{pmatrix} -62 \\ -78 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 76 \\ 24 \end{pmatrix}\text{sen}\,t \tag{9}$$

Usando las condiciones iniciales $u = 0$ en $t = 0$ en (9) produce

$$c_1 = \tfrac{296}{11}, \qquad c_2 = -\tfrac{30}{11} \tag{10}$$

de modo que la solución deseada es

$$u = \tfrac{296}{11}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} - \tfrac{30}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \begin{pmatrix} -62 \\ -78 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 76 \\ 24 \end{pmatrix}\text{sen}\,t \tag{11}$$

ó

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= -\tfrac{888}{11} e^{-6t} - \tfrac{60}{11} e^{-t/2} - 62\cos t + 76\,\text{sen}\,t \\ I_2 &= \tfrac{296}{11} e^{-6t} - \tfrac{90}{11} e^{-t/2} \quad 78\cos t + 24\,\text{sen}\,t \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

EJERCICIOS A

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas usando matrices y determine aquella solución que satisface cualesquiera condiciones dadas

(a) $\dfrac{dx}{dt} + 5x - 4y = 0, \dfrac{dy}{dt} - x + 2y = 0; x(0) = 3, y(0) = -2.$

(b) $\dfrac{dx}{dt} + x - 5y = 0, \dfrac{dy}{dt} + 4x + 5y = 0.$ (c) $\dfrac{dx}{dt} + 3y - 2x = 0, \dfrac{dy}{dt} - 2x + 3y = 0.$

(d) $\dfrac{dx}{dt} + 3x - 6y = 0, \dfrac{dy}{dt} = x - 3y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

(e) $\dfrac{dx}{dt} = x + 8y, \dfrac{dy}{dt} = -2x - 7y.$ (f) $\dfrac{dx}{dt} = -12x - 7y, \dfrac{dy}{dt} = 19x + 11y.$

2. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas usando matrices y determine aquella solución que satisface cualesquiera condiciones dadas

(a) $\dfrac{dx}{dt} - y = t, \dfrac{dy}{dt} + x = t^2;\ x(0) = 2,\ y(0) = -1.$

(b) $\dfrac{dx}{dt} + 3x + 4y = 8e^t, \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0.$ (c) $\dfrac{dx}{dt} - 2x + y = e^{-t}, \dfrac{dy}{dt} - 3x + 2y = t.$

(d) $\dfrac{dx}{dt} + 2x - y = 100 \operatorname{sen} t, \dfrac{dy}{dt} - 4x - y = 36t;\ x(0) = -8,\ y(0) = -21$

(e) $\dfrac{dx}{dt} - 3x - 6y = 9(1 - t), \dfrac{dy}{dt} + 3x + 3y = 9te^{-3t}.$

(f) $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y + te^{-t}, \dfrac{dy}{dt} = e^{-t} + 2x - 3y.$

3. Use matrices para resolver los sistemas del (a) Ejercicio 2(a)A, página 508, (b) Ejercicio 2(b)A, página 508, (c) Ejercicio 2(f)A, página 508.

4. Pruebe que si A es cualquier matriz de 2×2 y u_1 es una solución de $\dfrac{du}{dt} + Au = 0$ entonces las partes real e imaginaria de u_1 denotadas por $\operatorname{Re}(u_1)$, $\operatorname{Im}(u_1)$ respectivamente son también soluciones (ver página 528). ¿Puede usted generalizar esto?

EJERCICIOS B

1. Use matrices para encontrar la solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 2y - z = 12e^t, \quad \frac{dy}{dt} - 2x - 5y + 3z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + 4x + z = 30e^{-t}$$

2. Resuelva el Ejercicio 1C, página 509 por matrices.

3. Muestre cómo el método de coeficientes indeterminados se puede usar con matrices para encontrar una solución particular resolviendo el sistema del Ejercicio 2(c)A.

4. Resuelva por matrices y el método de coeficientes indeterminados el (a) Ejercicio 2(d)A, (b) Ejercicio 2(e)A, (c) Ejercicio 2(f)-A, (d) Ejercicio 1.

5. Trabaje el Problema para Discusión en la página 533 usando el método de coeficientes indeterminados.

6. Muestre cómo resolver directamente por matrices los sistemas (a) (9), página 502, (b) (14), página 504, (c) (22), página 505.
(Sugerencia: Escriba los sistemas en forma matricial y haga $u = e^{\lambda t}v$ como de costumbre).

7. Muestre que las soluciones de (31), página 528, son linealmente independientes.

1. (a) Muestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las masas vibrantes (ver página 470) se pueden escribir en forma matricial como

$$\frac{du}{dt} + Au = 0$$

donde $x_3 = dx_1/dt$, $x_4 = dx_3/dt$, y $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2\omega^2 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Use métodos matriciales para resolver el sistema en (a) sujeto a las condiciones dadas en la página 471. Compare con los resultados ya obtenidos.

2. (a) Muestre que el sistema de ecuaciones para las masas vibrantes (página 470) se pueden escribir como una ecuación diferencial matricial de segundo orden

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Bu = 0 \text{ donde } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 \end{pmatrix}$$

(b) Muestre cómo se pueden usar métodos matriciales para resolver la ecuación en (a) directamente haciendo $u = e^{\lambda t} v$. ¿Qué ventajas tendría este procedimiento sobre el método dado en el Ejercicio 1?

3. Use el método de los Ejercicios 1 y 2 para trabajar el Ejercicio 5A, página 479.

Algunos tópicos especiales

7.1 ORTOGONALIDAD

Suponga que tenemos dos vectores columna n dimensionales dados por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

El producto escalar de los vectores fue definido en la página 513 como la suma de los productos de los componentes correspondientes de los vectores. Equivalentemente, esto se obtiene cambiando uno de los vectores (1) en un vector fila y usándolo para multiplicar al otro vector.

Dada una matriz A podemos obtener una nueva matriz al cambiar las columnas en filas (o filas en columnas) de tal modo que la columna j se convierta en la fila j. Esta nueva matriz se llama la ***transpuesta*** de A y se denota por A^T. Así, tenemos la siguiente definición

Definición 1. La ***transpuesta*** de cualquier matriz A, denotada por A^T, *es* la matriz obtenida de A al cambiar sus filas en columnas (o columnas en filas), convirtiéndose la fila j en la columna j. En símbolos, si $A = (a_{jk})$, entonces $A^T = (a_{kj})$.

Ejemplo 1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = (1 \; -3 \; 2)$.

Ejemplo 2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Usando la transpuesta, podríamos definir el producto escalar como sigue.

Definición 2. Sean ***A y B*** dos vectores columnas de la misma dimensión. Entonces el ***producto escalar*** de ***A*** y ***B*** está dado por

$$A^TB = B^TA \tag{2}$$

Ejemplo 3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A^TB = B^TA = (1 \; -3 \; 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \; 1 \; -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3$$

Por analogía con la ortogonalidad (perpendicularidad) de vectores en tres dimensiones, hacemos la siguiente

Definición 3. Dos vectores columna ***A*** y ***B*** teniendo la misma dimensión se dice que son ***ortogonales*** si su producto escalar es cero, esto es, si $A^TB = B^TA = 0$.

Mientras que la ortogonalidad significa que los vectores son perpendiculares en tres dimensiones, en dimensiones mayores a tres tal visualización sólo puede imaginarse.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Encuentre el valor de ***K*** para que los vectores ***A*** y ***B*** sean ortogonales donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ K \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2K \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución Tenemos el producto escalar $= A^TB = B^TA = -2 + 2K - 3K + 0 = -2-K$ y esto es cero para $K = -2$.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1. La transpuesta del producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden inverso, asumiendo por supuesto que los productos estén definidos. Para el caso de productos que involucran dos y tres matrices, esto puede escribirse como

(a) $(AB)^T = B^T A^T$.
(b) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

Ejemplo 4. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad B^T A^T = (-2 \quad 5)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-16 \quad -3)$$

Así $(AB)^T = (-16 \quad -3) = B^T A^T$.

Se deja para el Ejercicio 1B la prueba de este teorema

7.2 LONGITUD DE UN VECTOR

Si tenemos un vector tridimensional con componentes a_1, a_2, a_3 asumidos ser números reales, sabemos del cálculo elemental que la longitud del vector hallada usando el teorema de Pitágoras está dada por

$$l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{3}$$

Si el vector está dado por
$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

el resultado (3) se puede expresar en términos del producto escalar de v con sí mismo como

$$l = \sqrt{v^T v} \tag{5}$$

Esto lleva a definir la longitud de un vector en el espacio n dimensional como sigue:

Definición 4. Sea v cualquier vector columna con componentes reales. Entonces la longitud de v está dada por

$$l = \sqrt{v^T v}$$

En particular, si $l = 1$, llamamos a v un *vector* ***unitario.***

Dado un vector v el ***proceso de multiplicar*** v por un escalar c para que cv sea un vector unitario se llama la ***normalización*** del vector u. Esto siempre se puede llevar a cabo al dividir a v por su longitud, asumiendo por supuesto que esta longitud no es cero.

Un vector columna cuadridimensional tiene componentes 2,– 1,– 3, 4. (a) Determine la longitud del vector y (b) normalice el vector

Solución (a) La longitud del vector está dada por

$$l = \sqrt{v^T v} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-3)'} = \sqrt{30}$$

(b) Dividiendo v por $l = \sqrt{30}$, obtenemos el vector normalizado o unitario

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ -3/\sqrt{30} \\ 4/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

Algunas veces tenemos un conjunto de vectores, tales como por ejemplo los eigenvectores, los cuales corresponden a los eigenvalores de una matriz. Si los convertimos en vectores unitarios o normalizados, el conjunto con frecuencia se denomina un *conjunto normalizado.* Si además cada par de vectores en este conjunto es ortogonal, en cuyo caso podemos decir que los vectores son *mutuamente ortogonales,* con frecuencia llamamos al conjunto un *conjunto ortonormal.* La palabra *ortonormal* es por supuesto una combinación de las palabras *ortogonal y normalizado.*

Observación. Aquellos que han estudiado el Capítulo ocho notarán las marcadas analogías que existen en los conceptos de ortogonalidad, el concepto de eigenvalores, en particular la ecuación de eigenvalor $Av = -XV$, *y* la ecuación diferencial de Sturm-Liouville de las páginas 362-363. Analogías adicionales aparecerán en las próximas páginas y en los ejercicios avanzados.

7.3 EIGENVALORES Y EIGENVECTDRES DE MATRICES REALES SIMETRICAS

Suponga que tenemos una matriz A cuyos elementos son todos números reales llamada una *matriz real.* Entonces como hemos visto los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a A se encuentran al hallar soluciones no triviales, esto es, v $\neq$ 0, de

$$Av = -\lambda v \tag{6}$$

Ahora, como hemos visto, aún cuando A sea real los eigenvalores y eigenvectores no necesitan ser reales. Así, si tomamos la conjugada compleja de ambos lados de (6), obtenemos $\bar{A}\bar{v} = -\bar{\lambda}\bar{v}$, o puesto que A es real $\bar{A} = A$,

$$A\bar{v} = -\bar{\lambda}\bar{v} \tag{7}$$

Multipliquemos ambos lados de (6) por $\bar{v}^T$ para obtener

$$\bar{v}^T A v = -\lambda \bar{v}^T v \tag{8}$$

y multipliquemos ambos lados de (7) por v^T para obtener

$$v^T A \bar{v} = -\bar{\lambda} v^T \bar{v} \tag{9}$$

Puesto que $v^T \bar{v}$ y $\bar{v}^T v$ son las transpuestas de cada uno, nos lleva a tomar la transpuesta de ambos lados de (8) y luego usar el teorema en la página 000 para obtener

$$v^T A^T \bar{v} = - \lambda v^T \bar{v} \tag{10}$$

Ahora se puede ver que los lados izquierdos de (9) y (10) son iguales si A es una matriz tal que

$$A = A^T \tag{11}$$

Escribiendo $A = (a_{jk})$, vemos que (ll) implica que

$$(a_{jk}) = (a_{kj}) \text{ o } a_{jk} = a_{kj} \tag{12}$$

Esto significa que el elemento en la filaj y columna k es igual al elemento en la fila k y columna j, de modo que hay una simetría de los elementos en la matriz alrededor de la diagonal principal. Esto nos lleva a llamar una matriz real que tenga la propiedad (ll) una *matriz real simétrica.* Enunciamos esto en la siguiente

Definición 5. Una matriz A se llama una *matriz real simétrica* si A es real y $A = A^T$ *ó* $a_{jk} = a_{kj}$.

Ejemplo 5. Puesto que $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ a s í que $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

vemos que A es real, $A = A^T$, de modo que A es una matriz real simétrica.

Regresando a (9) y (10), vemos que si A es simétrica tenemos $\bar{\lambda} \bar{v}^T \bar{v} = \lambda v^T \bar{v}$ ó

$$(\lambda - \bar{\lambda}) v^T \bar{v} = 0 \tag{13}$$

De esto se deduce que $\lambda = \bar{\lambda}$, en cuyo caso todo eigenvalor debe ser real, ó $v^T \bar{v} = 0$. Sin embargo, es fácil mostrar que $v^T \bar{v} \neq 0$. Para ello, asumamos que v está dado por el vector columna

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde algunos o todos los elementos pueden no ser reales Entonces tenemos

$$v^T \bar{v} = a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + \cdots + a_n \bar{a}_n = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2$$

Puesto que al menos uno de los a's no es cero (debido a que v $\neq 0$), vemos que $v^T \bar{v} \neq 0$, lo cual significa que todos los eigenvalores son reales. Como una consecuencia necesaria de esto, vemos también de (6) que los eigenvectores correspondientes se pueden escoger para que sean reales. Debido a esto tenemos el siguiente

Teorema 2. Si *A* es una matriz real simétrica, entonces todos sus eigenvalores son reales y los eigenvectores correspondientes se pueden escoger reales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Verifique el teorema anterior para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución Los eigenvalores y eigenvectores se obtienen como de costumbre de $Av = -\lambda v$ ó $(\lambda I + A)v = 0$, esto es,

$$\begin{pmatrix} \lambda + 3 - & 2 \\ -2 & \lambda + 6 \end{pmatrix} v = 0 \tag{14}$$

Para soluciones no triviales, $v \neq 0$, debemos tener

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 - & 2 \\ -2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = 0 \quad 0 \quad \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0, \text{ esto es } \lambda = -2, -7$$

Cuso 1, $\lambda = -2$. Colocando $\lambda = -2$ en (14) lleva a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ esto es, } a_1 - 2a_2 = 0, \quad -2a_1 + 4a_2 = 0$$

de modo que $a_1 = 2a_2$. En particular, escogiendo $a_2 = 1$, tenemos $a_1 = 2$. Así un eigenvector es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Cuso 2, $\lambda = -7$. Colocando $\lambda = -7$ en (14) lleva a

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ esto es, } -4a_1 \quad 2a_2 = 0, \qquad -2a_1 - a_2 = 0$$

de modo que $a_2 = -2a_1$. En particular, escogiendo $a_1 = 1$, tenemos $a_2 = -2$. Así, otro eigenvector es

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Puesto que *A* es una matriz real simétrica y puesto que hemos hallado que los eigenvalores son reales el teorema anterior ha sido verificado para este caso. Se debería notar también que los eigenvectores correspondientes son reales.

Ahora que sabemos los eigenvalores y eigenvectores para una matriz real simétrica son reales, supongamos que λ_1 y λ_2 son cualesquiera dos eigenvalores con eigenvectores correspondientes v_1 y v_2, respectivamente. Entonces por definición

$$Av_1 = -\lambda_1 v_1 \qquad Av_2 = -\lambda_2 v_2 \tag{17}$$

Multipliquemos ahora cada lado de la primera ecuación en (17) por v_2^T para obtener

$$v_2^T A v_1 = -\lambda_1 v_2^T v_1 \tag{18}$$

Similarmente, multipliquemos cada lado de la segunda ecuación en (17) por v_1^T para obtener

$$v_1^T A v_2 = -\lambda_2 v_1^T v_2 \tag{19}$$

Si tomamos la transpuesta de ambos lados de (18), encontramos

$$v_1^T A^T v = -\lambda_1 v_1^T v_2 \tag{20}$$

donde hemos hecho uso de la parte (b) del Teorema 1, página 541, y del hecho de que la transpuesta de la transpuesta de una matriz dada es claramente la matriz dada. Sigue que si A es simétrica, obtenemos de (19) y (20), $\lambda_1 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$ o

$$(\lambda_1 - \lambda_2) v_1^T v_2 = 0 \tag{21}$$

y puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$v_1^T v_2 = 0 \tag{22}$$

lo cual establece que v_1 y v_2 son ortogonales. Hemos probado así un resultado algo interesante dado en el siguiente

Teorema 3. Si A es cualquier matriz real simétrica, entonces los eigenvectores pertenecientes a dos eigenvalores diferentes son ortogonales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Verifique el Teorema 3 para la matriz del Ejemplo ilustrativo 3.

Del Ejemplo ilustrativo 3 tenemos los eigenvectores.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $$v_1^T v_2 = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2)(1) + (1)(-2) = 0$$

de modo que v_1 y v_2 son ortogonales y el teorema está verificado.

EJERCICIOS A

1. Encuentre el producto escalar de

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre las longitudes de los vectores- columna con componentes (a) 0, -2, 3, 6. (b) 1, 2, -3, -2, 0.
3. Normalice los vectores dados en el Ejercicio 2.
4. Dados- los vectores columna A y B cuyas componentes están dadas por 3, -1, $k+2$, -1 y -2, k, 0, -4, respectivamente. (a) Encuentre el valor de k para que los vectores- sean ortogonales, y (b) determine los- vectores ortonormales correspondientes.

5. Dados los vectores columna A y B con componentes 2, 1, -4 y 4, 3, 2 respectivamente. Encuentre un vector normalizado que sea ortogonal con ambos A y B. Interprete los resultados geométricamente.

6. Dado $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, verifique que

(a) $(AB)^T = B^T A^T$ **(b)** $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

7. Verifique los Teoremas 2 y 3 para las matrices

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}. \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Encuentre un conjunto de vectores mutuamente ortogonales y normalizados pertenecientes a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS B

1. Si A, B, C son matrices apropiadamente conformes, pruebe que

(a) $(AB)^T = B^T A^T$. (b) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

2. Pruebe que si A y B son matrices del mismo tamaño entonces $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ tal que $(AB)^T = A^T B^T$.

4. Muestre que las matrices A y B, asumidas apropiadamente conformes, se conmutan si y sólo si $(AB)^T = A^T B^T$. Ilustre usando el Ejercicio 3.

5. Dado los vectores A_1, A_2, A_3, donde $A_1^T = (1\ -1\ 2)$, $A_2^T = (2\ 1\ 0)$, $A_3^T = (0\ 2\ 1)$, determine un conjunto ortonormal de vectores $c_{11}A_1$, $c_{21}A_1 + c_{22}A_2$, $c_{31}A_1 + c_{32}A_2 + c_{33}A_3$, donde los c's son constantes (escalares). Discuta el significado geométricamente. (Este *es* el ***método de ortonormalización de Gram-Schmidt*** de la página 417 para el caso especial de vectores tridimensionales.

6. Generalice las ideas del Ejercicio 5.

7. Sean A_1, $A_2, \ldots, A_k$ vectores n dimensionales. Si existen constantes (escalares) $c_1, c_2, \ldots, c_k$ no todos cero tal que

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k \equiv 0$$

se dice que los vectores son ***linealmente dependientes;*** en otro caso ellos son ***linealmente independientes.*** Determine si los vectores (a) $(2\ -1\ 1)$, $(3\ 2\ -2)$, $(4\,5\ -5)$, (b) $(3\ 1\ 5)$, $(-2\ 2\ 4)$, $(1\ 1\ 0)$ (c) $(-2\ 1\ 4\ 3)$, $(1\ -2\ 3\ -1)$, $(5\ -7\ 5\ -6)$ son linealmente dependientes o independientes.

8. Discuta el significado geométrico de vectores linealmente dependientes e independientes y su relación con la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales consideradas en la última sección.

9. Pruebe que un conjunto de más de n vectores diferentes en el espacio n dimensional deben ser linealmente dependientes. Discuta la relación de esto con la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales.

10. Discuta la relación del método de ortonormalización de Gram-Schmidt (ver Ejercicio 5) con los conceptos de dependencia lineal.

EJERCICIOS C

1. (a) Resuelva la ecuación diferencial matricial $\frac{du}{dt} + Au = O$

donde
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) Muestre que hay tres soluciones linealmente independientes y mutuamente ortogonales u_1, u_2, u_3 al sistema en (a), y explique su relación con la solución general obtenida en (a).

2. Sea S una matriz cuyas columnas son los eigenvectores normalizados de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

dada en el Ejemplo ilustrativo 3, página 544. (a) Muestre que $S^T S = Z$, donde Z es la matriz identidad de 2×2, o equivalentemente $S^T = S^{-1}$. Una matriz S teniendo la propiedad que $S^T = S^{-1}$ a menudo se llama una ***matriz ortogonal.*** (b) Muestre que la matriz $S^{-1}AS$ es una matriz con todos sus elementos cero excepto en la diagonal principal. (c) Muestre que los elementos en la diagonal principal de la matriz en (b) son los negativos de los eigenvalores de A, o equivalentemente que los eigenvalores de $S^{-1}AS$ son iguales a los eigenvalores de A.

3. Demuestre los resultados del Ejercicio 2 usando la matriz A del Ejercicio 1.

4. Pruebe directamente de la definición $Av = \lambda v$ los resultados indicados en los Ejercicios 2(b) y (c).

5. Discuta las relaciones de las formulaciones matriciales del problema de masas vibrantes dadas en el Ejercicio 1C y 2C, página 539, con los Teoremas 2 y 3 en las páginas 544-545

III

ecuaciones diferenciales parciales

doce

ecuaciones diferenciales parciales en general

1 El concepto de una ecuación diferencial parcial

1.1 INTRODUCCION

En los capítulos anteriores estuvimos ocupados con ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente. Aprendimos cómo surgen tales ecuaciones diferenciales, los métodos mediante los cuales se pueden obtener sus soluciones, exactas y aproximadas, y hemos considerado aplicaciones a varios campos científicos.

Al usar ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver problemas aplicados estamos en efecto simplificando altamente (y con frecuencia sobresimplificando seriamente) el modelo matemático de la realidad física que conduce a estos problemas. Esto es porque en las formulaciones matemáticas de tales problemas nos restringimos a una sola variable independiente sobre la cual dependen todas las otras variables pertinentes. Aunque esto con frecuencia es útil, como hemos visto, limita las clases de problemas que podemos investigar, ya que en muchos casos se requieren dos o más variables independientes.

Las formulaciones matemáticas de problemas que involucran dos o más variables independientes conducen a ecuaciones diferenciales parciales. Como uno podría esperar, la introducción de más variables independientes hace el tema de ecuaciones diferenciales parciales más complejo que el de ecuaciones diferenciales ordinarias, y así es relativamente poco lo que se conoce con respecto a ellas. Sin embargo, el tema es tan vasto que sólo lo discutiremos brevemente en este libro.

1.2 SOLUCIONES DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES SENCILLAS

Con el objeto de obtener algunas ideas relacionadas con la naturaleza de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Obtenga soluciones de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} = 6x + 12y^2 \tag{1}$$

Aquí la variable dependiente U depende de dos variables independientes x y y. Para hallar soluciones, buscamos determinar U en términos de x y y, esto es, $U(x, y)$. Si escribimos (1) como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 6x + 12y^2 \tag{2}$$

podemos integrar con respecto a x, manteniendo y constante, para hallar

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 + 12xy^2 + F(y) \tag{3}$$

donde hemos añadido la "constante" de integración, la cual depende de y y así realmente es una función de y denotada por ***F(y).***

Ahora integramos (3) con respecto a y manteniendo x constante para hallar

$$U = 3x^2y + 4xy^3 + \int F(y)dy + G(x) \tag{4}$$

esta vez añadiendo una función arbitraria de x dada por G(x). Puesto que la integral de una función arbitraria de y es otra función arbitraria de y, podemos escribir (4) como

$$U = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \tag{5}$$

Esto se puede chequear al sustituirla en (1) y obtener una identidad. Puesto que (1) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, y (5) tiene dos funciones arbitrarias, por analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias llamamos a (5) la solución ***general*** de (1). Usando la misma analogía, llamaríamos por supuesto a cualquier solución obtenida de la solución general (5) por selecciones particulares de las funciones arbitrarias, tal como por ejemplo $H(y) = y^3$, G(x) = sen 2x, una ***solución particular.*** Hacemos así la siguiente definición

Definición. Dada una ecuación diferencial parcial de orden ***n.*** una solución que contenga ***n*** funciones arbitrarias se llama la ***solución general, y*** cualquier solución obtenida de esta, solución general por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se llama una ***solución particular.****

Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, con frecuencia necesitamos determinar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales que satisfagan condiciones dadas. Por ejemplo, suponga que deseamos resolver la ecuación diferencial (1) sujeta a las dos condiciones

$$U(1, y) = y^2 - 2y, \qquad U(x, 2) = 5x - 5 \tag{6}$$

Entonces de la solución general (5) y la primera condición (6) tenemos

$$U(1, y) = 3(1)^2y + 4(1)y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y$$

o

$$H(y) = y^2 - 5y - 4y^3 - G(1)$$

de modo que $U = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + G(x)$ (7)

Si ahora usamos la segunda condición en (6), tenemos

$$U(x, 2) = 3x^2(2) + 4x(2)^3 + (2)^2 - 5(2) - 4(2)^3 - G(1) + G(x) = 5x - 5$$

de donde

$$G(x) = 33 - 27x - 6x^2 + G(1)$$

Usando esto en (7), obtenemos. la solución deseada

$$U = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - 27x - 6x^2 + 33 \tag{8}$$

Podríamos usar la misma. terminología de problemas de valor inicial y de frontera para las ecuaciones diferenciales parciales como se hizo para las ecuacio-

*Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, puede suceder que existan soluciones *singulares* las cuales no se puedan obtener de la solución general por cualquier selección de las funciones arbitrarias.

nes diferenciales ordinarias. Sin embargo, debido a que generalmente hay una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos a tales problemas como *problemas de valor de frontera*.

Como en el problema discutido en la página 551, la forma de una ecuación diferencial parcial puede sugerir un método de solución. Un tipo especialmente sencillo de ecuación diferencial parcial es aquella que puede tratarse por métodos de ecuaciones diferenciales ordinarias usando una variable independiente a la vez. Un ejemplo es el problema en la página 551. Un ejemplo un poco más complicado se da en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Hallar una solución al problema de valor de frontera*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} + 2, \qquad U(0, y) = 0, \qquad U_x(x, 0) = x^2$$

Solución Escribiendo la ecuación como $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - U\right) = 2$

e integrando con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial U}{\partial y} - U = 2x + F(y)$$

la cual es una ecuación lineal con factor integrante e^{-y}. Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}U) = 2xe^{-y} + e^{-y}F(y)$$

o

$$U(x, y) = 2x + e^{y}\int e^{-y}F(y)dy + e^{y}G(x)$$

donde G(x) es arbitraria. Escribiendo H(y) $\equiv e^{y}\int e^{-y}F(y)dy$, tenemos

$$U(x, y) = -2x + H(y) + e^{y}G(x) \tag{9}$$

De $U(0, y) = 0$ encontramos H(y) $= -G(0)e^{y}$, así (9) llega a ser

$$U(x, y) = -2x - G(0)e^{y} + e^{y}G(x)$$

Diferenciando con respecto a x y colocando y $=$ 0, encontramos

$$U_x(x, 0) = -3 + G'(x) = x^2 \quad \text{o} \quad G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + c$$

De donde, $U(x, y) = -3x - G(0)e^{y} + e^{y}\left(\dfrac{x^3}{3} + 2x + c\right)$

Puesto que $c = G(0)$, $\qquad U(x, y) = \dfrac{x^3e^{y}}{3} + 2xe^{y} - 2x$

*Los subíndices x y y a menudo se usan para denotar derivadas parciales. Por ejemplo, U_x ó $U_x(x, y)$ es lo mismo que $\partial U/\partial x$ mientras que U_y ó $U_y(x, y)$ es lo mismo que $\partial U/\partial y$. Similarmente U_{xy} es lo mismo que $\partial^2 U/\partial x\,\partial y$.

Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, los problemas aplicados ofrecen una fuente importante de ecuaciones diferenciales parciales para resolver sujetas a condiciones asociadas, los cuales llamamos *problemas de valor de frontera.* Dado algún problema de ciencia o ingeniería, procedemos como de costumbre a construir un *modelo matemático* que simplifique pero aproxime bastante la realidad. Luego formulamos matemáticamente el problema, llegando así al problema de valor de frontera. Se debería indicar que en la practica la formulación de ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones asociadas puede algunas veces ser difícil y aún imposible. Más tarde en este capítulo derivaremos algunas ecuaciones diferenciales parciales importantes que surgen en varios campos.

Si tenemos éxito en la formulación de un problema de valor de frontera, queda aun la tarea de hallar una solución de este problema de valor de frontera, esto es, hallar una solución de la ecuación diferencial parcial que satisfaga las condiciones. Algunas veces es fácil encontrar una solución, de hecho muchas soluciones, de la ecuación diferencial parcial, pero es difícil o aún imposible hallar aquella solución que satisfaga las condiciones dadas. Como en las ecuaciones diferenciales ordinarias hay, lógicamente, tres preguntas que nosotros como científicos deberíamos *hacer* aún cuando no seamos capaces de *responder.*

1. ***¿Existe una solución a nuestro problema?*** Si de alguna manera podemos mostrar que no existe una solución realmente no hay razón en buscarla. Los matemáticos han tenido éxito en probar que algunos ciertos tipos de problemas de valor de frontera tienen soluciones. Los teoremas que garantizan la existencia de soluciones se llaman *teoremas de existencia y* son de mucho valor.
2. ***¿Si existe una solución, es ésta única?*** Si ésta no es única, esto es, si tenemos dos respuestas posibles a un problema físico dado podría ser muy embarazoso. Los teoremas que garantizan la unicidad de las soluciones se llaman *teoremas de unicidad.*
3. ***Si existe una solución y es única, ¿cuál es esta solución?***

En una presentación elemental naturalmente solo trataremos la ultima pregunta, de cómo determinar una solución que satisfaga la ecuación *y* las condiciones. Esta solución debe estar por supuesto en concordancia con el experimento u observación; de otra manera tendríamos que revisar las ecuaciones.

1.3 SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LAS SOLUCIONES GENERAL Y PARTICULAR

En el problema de la página 551, obtuvimos la solución general

$$U = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(s) \tag{10}$$

Supongamos ahora que escogemos funciones particulares para H(y) y G(x), y remplazamos U por z. Entonces (10) toma la forma

$$z = f(x, y) \tag{11}$$

la cual se interpreta como una superficie S en un sistema de coordenadas rectangular o xyz tal como se indica en la Figura 12.1. La superficie esta formada por los puntos con coordenadas (x, y, z) que satisfacen (11).

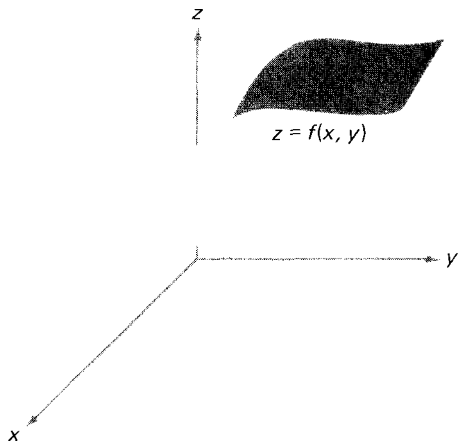


Figura 12.1

Para funciones arbitrarias $H(y)$ y $G(x)$, obtenemos una *familia de superficies* cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de H(y) y G(x), esto es, una solución particular. La ecuación diferencial que tenga esto como una solución se llama entonces la *ecuación diferencial de la familia de superficies.* El estudiante notará la analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias en las cuales la solución general con constantes arbitrarias (en vez de funciones) representa una familia de curvas, donde cada miembro de ella corresponde a una solución particular, esto es, una selección particular de esas constantes arbitrarias.

Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay más de dos variables independientes. Así, por ejemplo, en el caso donde U es una función de tres variables independientes, las cuales podemos denotar por x_1, x_2, x_3, podríamos pensar como una solución particular de una ecuación diferencial parcial con estas variables la dada por

$$U = f(x_1, x_2, x_3) \tag{12}$$

Esto no podría visualizarse geométricamente como en la Figura 12.1. Sin embargo, podemos considerar un cuádruplo de números (x_1, x_2, x_3, U) como representando a un punto en un *espacio cuadridimensional* y entonces referirnos a (12) como una *superficie cuadridimensional o hipersuperficie.* Por ejemplo, así como $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ representa una esfera de radio c, en el espacio tridimensional, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + U^2 = c^2$ representaría una *hiperesfera* de radio c en un espacio cuadridimensional.

1.4 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES QUE SURGEN DE LA ELIMINACION DE FUNCIONES ARBITRARIAS

Puesto que las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales involucran funciones arbitrarias, parece lógico que debiéramos obtener ecuaciones diferenciales parciales por el proceso inverso de eliminar tales funciones. Esta idea es útil porque ayuda a enriquecer nuestro conocimiento de cómo se pueden resolver ecuaciones diferenciales parciales. Consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre una ecuación diferencial parcial de primer orden que tenga como su solución general

$$U = y^2F(x) - 3x + 4y \tag{13}$$

donde $F(x)$ es una función arbitraria de x.

Solución Si diferenciamos a (13) con respecto a y, obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2yF(x) + 4 \tag{14}$$

Entonces eliminando *F(x)* entre (13) y (14), encontramos la ecuación deseada:

$$y\frac{\partial U}{\partial y} - 2U = 6x - 4y \tag{15}$$

Chequeo. $y\dfrac{\partial U}{\partial y} - 2U = y[2yF(x) + 4] - 2[y^2F(x) - 3x + 4y] = 6x - 4y.$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encuentre una ecuación diferencial parcial de primer orden que tenga como su solución general

$$z = F(3x - 4y) \tag{16}$$

donde *F* es una función arbitraria.

Solución Sea u = 3x- 4y. Entonces (16) llega a ser

$$z = f(u) \tag{17}$$

Diferenciando (17) con respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)(3) = 3F'(u) \tag{18}$$

Diferenciando (17) con respecto a y, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = F'(u)(-4) = -4F'(u) \tag{19}$$

Eliminando *F'(u)* entre (18) y (19) produce la ecuación deseada

$$4\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{20}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Encuentre una ecuación diferencial parcial de segundo orden que tenga como su solución general

$$U = xF(y) + yG(x) \tag{21}$$

donde F y G son funciones arbitrarias.

Solución Podemos eliminar ***F(y)*** en (21) dividiendo ambos lados de ***(21)*** por x y diferenciando el resultado con respecto a x. Entonces encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U}{x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(y) + \frac{y}{x}G(x)\right] \quad \text{esto es,} \quad x\frac{\partial U}{\partial x} - U = xyG'(x) - yG(x)$$

la cual se puede escribir
$$x\frac{\partial U}{\partial x} - U = y[xG'(x) - G(x)] \tag{22}$$

Si ahora dividimos ambos lados de ***(22)*** por y y diferenciamos con respecto a y, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(x\frac{\partial U}{\partial x} - U\right)\right] = 0 \quad \text{o} \quad xy\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial y} + U = 0 \tag{23}$$

la cual da la ecuación de segundo orden deseada. Note que la segunda ecuación de (23) también se puede escribir como

$$xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial U}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial y} + U = 0 \quad \text{puesto que} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$$

Se deberían hacer algunas observaciones acerca de los resultados anteriores.

Observación 1. Al diferenciar las funciones arbitrarias asumimos por supuesto que ellas son diferenciables. De otra manera, no tenemos derecho a diferenciar.

Observación 2. La ecuación diferencial obtenida en cada ejemplo representa la ecuación diferencial de la familia representada por la solución general.

Observación 3. Si una solución tiene un número dado n de funciones arbitrarias, con frecuencia es fácil escribir una ecuación diferencial de orden mayor que n teniendo esta solución. Por ejemplo, es fácil ver que (21) es una solución de

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} = 0$$

pero ésta es de orden 4 y no 2. Cuando buscamos la ecuación diferencial, buscamos aquella del *menor orden*.

EJERCICIOS A

1. Obtenga soluciones a los siguientes problemas de valor de frontera.

(a) $\frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{sen} y$; $U(0, y) = 0$. (b) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 \cos y$; $U(x, 0) = 0$, $U\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(c) $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = 0$; $V(0, y) = 3 \operatorname{sen} y$, $V_x(x, 1) = x^2$

(d) $\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = 4xy + e^x$; $U_y(0, y) = y$, $U(x, 0) = 2$.

e) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} = 3\frac{\partial Z}{\partial y} + 2y$; $Z_y(0, y) = y^2 - 2y$, $Z(x, 0) = x + 3e^{-x}$.

2. Obtenga ecuaciones diferenciales parciales (del menor orden) eliminando las funciones arbitrarias en cada relación dada. En cada caso verifique que la relación dada es una solución de la ecuación obtenida. Tome z como variable dependiente a menos que se diga lo contrario.

(a) $U = x^2F(y) + 3xy$. (b) $z = e^{xy}G(x)$. (c) $z = e^{-y}F(x) + e^xG(y)$.

(d) $U = \sqrt{x}F(y) + (\ln y)G(x)$. (e) $z = F(x - 2y)$. (f) $z = F(xy)$.

(g) $x = F(y/z)$ (haga x dependiente) (h) $z = F(x^2 - y^2)$. (i) $z = e^{3y}F(x - 2y)$.

(j) $z = F(x + 3y) + G(2x - y)$.

EJERCICIOS B

1. Considerando $z = F(3x - 2y)$, parecería que $3x - 2y = G(z)$, donde F y G son funciones inversas. Asumiendo esto cierto, ¿son equivalentes las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas de estas dos relaciones? Justifique su conclusión.
2. Obtenga una ecuación diferencial parcial con $z = F(x^2y) + G(xy^2)$, como solución, donde F y G son funciones diferenciables arbitrarias.
3. Si una función $F(x, y)$ se puede escribir como $x^nG(y/x)$ se llama homogénea de grado n. Muestre que cualquier función homogénea diferenciable satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = nF$$

Esto se llama el *teorema de Euler sobre funciones homogéneas*.

4. Muestre que si $F = \sqrt{x^2 + y^2}\tan^{-1}(y/x)$ entonces $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = F$.

5. Determine n para que $z = x^3 \tan^{-1}\left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}\right)$ satisfaga $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

6. Muestre que la función $V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisface la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

7. Use el Ejercicio 3 para resolver el problema de valor de frontera

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2U, \quad U(1, y) = 20\cos y$$

1. (a) Si $z = F(y/x) + xG(y/x)$ muestre que $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(b) Obtenga una solución a la ecuación diferencial parcial en (a) que satisfaga las condiciones $z = \cos y$ para $x = 1$ y $z = e^{-2y}$ para $x = \frac{1}{2}$.

2. (a) En la relación $F(u, v) = 0$, F es una función diferenciable arbitraria de u y v, las cuales son funciones diferenciables de x, y y z. Diferenciando con respecto a x y y, pruebe que

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

(b) Eliminando $\partial F/\partial u$ y $\partial F/\partial v$ de las ecuaciones de (a), muestre que la ecuación diferencial parcial resultante tiene la forma

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

donde P, Q, R son funciones conocidas de x, y y z. Discuta cualesquiera restricciones que se deban imponer para desarrollar esta eliminación. Este resultado es la ecuación diferencial parcial correspondiente a $F(u, v) = 0$.

3. Usando el método del Ejercicio 2, encuentre las ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a cada una de las siguientes, donde F es una función arbitraria.

(a) $F(2x + 3z, x - 2y) = 0$. (b) $F(x^2 + y^2, yz) = 0$.
(c) $F(z \operatorname{sen} x, z \cos y) = 0$. (d) $F(x - y \quad z, x^2 - 2xy) = 0$.

4. (a) Muestre que la ecuación diferencial $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

tiene solución $z = F(x - y) + xG(x - y) + x^2 H(x - y)$, donde F, G y H son funciones diferenciables arbitrarias.

(b) Muestre que la ecuación diferencial de (a) también tiene soluciones dadas por

$$z = F(x - y) + yG(x - y) + y^2 H(x - y), \quad z = F(x - y) + yG(x - y) + xyH(x - y)$$

¿Están relacionadas todas estas soluciones? Explique.

5. Suponga que en la ecuación diferencial parcial $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

hacemos el cambio de variables de coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, ϕ) de acuerdo a las ecuaciones de transformación $x = r\cos\phi$, $y = r$ sen@.

(a) Muestre que $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

(b) Muestre que la ecuación diferencial dada está dada en coordenadas polares por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0$$

6. Suponga que en la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$

cambiamos variables de (x, y, z) a (r, ϕ, θ) de acuerdo a las ecuaciones de transformación

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \; y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \; z = r \cos \theta$$

(a) Muestre que $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\left[r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}\right]$

(b) Muestre que la ecuación diferencial parcial dada se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0$$

2 El método de separación de variables

Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, podemos clasificar ecuaciones diferenciales parciales en dos tipos, *lineal y no lineal.* Sin consideramos, por ejemplo, dos variables independientes x, y y la variable dependiente U, una ecuación lineal tiene la forma

$$\phi(D_x, D_y)U = F(x, y) \tag{1}$$

donde el operador $\phi(D_x, D_y)$ es un polinomio en los dos operadores

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

teniendo coeficientes que son funciones de las variables independientes x y y solamente. Si estos coeficientes son constantes, llamamos la ecuación una *ecuación lineal con coeficientes constantes;* en otro caso es una *ecuación lineal con coeficientes variables*. Una ecuación diferencial parcial *no lineal es* una que no es lineal.

Ejemplo 1. Si $\phi = D_x^2 + 4D_xD_y - 2D_y^2 - 3D_x + 5$, $F(x, y) = x^3 - e^y$, entonces (1) llega a ser

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3\frac{\partial U}{\partial x} + 5U = x^3 - e^y$$

la cual es una ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes constantes.

Ejemplo 2. Si $\phi = xD_x + yD_y$, $F(x, y) = 1$, entonces (1) llega a ser

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 1$$

la cual es una ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes variables.

Ejemplo 3. La ecuación $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 3x - 2y$

es una ecuación diferencial parcial no lineal puesto que no puede expresarse en la forma (1).

Extensiones a más de dos variables independientes se hacen fácilmente.

Como se podría esperar, las ecuaciones no lineales son en general difíciles de manejar, y no las discutiremos en este libro. De hecho sólo discutiremos aquellas ecuaciones diferenciales parciales lineales que son más útiles en problemas aplicados.

De la analogía con ecuaciones diferenciales ordinarias, el estudiante podría esperar los siguientes teoremas, los cuales de hecho son correctos y no difíciles de probar (ver Ejercicio 9B).

Teorema 1. Considere la ecuación diferencial parcial lineal

$$\phi(D_x, D_y,)U = F(x, y, .) \tag{3}$$

donde x, y, son variables independientes y $\phi(D_x, D_y,)$ es un operador polinómico en D_x, D_y, . Entonces la solución general de (3) es la suma de la solución general U_c de la *ecuación complementaria*.

$$\phi(D_x, D_y, .)U = 0 \tag{4}$$

y cualquier solución particular U_p de (3), esto es,

$$U = U_c + U_p \tag{5}$$

La solución general U_c de (4) a menudo se llama la *solución complementaria* de (3).

Teorema 2. Sean U_1, U_2, . soluciones de la ecuación

$$\phi(D_x, D_y, .)U = 0 \tag{6}$$

Entonces si a_1, a_2, son constantes cualesquiera

$$U = a_1U_1 + a_2U_2 + \cdots \tag{7}$$

es también una solución. Este teorema a menudo se conoce como el *principio de superposición*.

Consideremos cómo podríamos resolver la ecuación (4). Cuando teníamos una ecuación diferencial ordinaria

$$\phi(D)y = 0 \tag{8}$$

con coeficientes constantes, usamos la sustitución $y = e^{mx}$, la cual conducía a la *ecuación auxiliar o ecuación característica* para determinar la constante m. Para el caso (6) con coeficientes constantes, por analogía deberíamos asumir como solución $U = e^{ax+by+\cdot}$ y tratar de determinar las constantes a, b, Aunque esto tiene éxito en algunos casos (ver los Ejercicios 2 y 3A), un enfoque mejor es asumir una solución de la forma

$$U = X(x)Y(y) \text{ o brevemente } U = XY \tag{9}$$

esto es, una función solo de x multiplicada por una función solo de y, y así sucesivamente. como se sugiere al escribir $U = e^{ax+by+}$ como $U = e^{ax} \cdot e^{by}$. El método de solución usando (9) con frecuencia se llama, por razones obvias, el método de ***separación de variables.*** Este método, el cual es útil para obtener soluciones de ecuaciones diferenciares parciales en casos de coeficientes constantes o variables, será el principal método de solución en lo que resta del libro.

La mejor manera de ilustrar el método de separación de variables es presentar algunos ejemplos de su uso. Empecemos con el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad U(0, y) = 4e^{-2y} + 3e^{-6y} \tag{10}$$

Para trabajar este problema asumamos que existen soluciones de la forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y) \text{ o } U = XY \tag{11}$$

esto es, U se puede expresar como una función solo de x multiplicada por una función sólo de y de acuerdo con el método de separación de variables. Usando (11) en la ecuación diferencial de (10), tenemos, si $X' = dX/dx$, $Y' = dY/dy$,

$$X'Y + 3XY' = 0 \text{ o } \frac{X'}{3X} + \frac{Y}{Y} = 0 \tag{12}$$

al dividir ambos lados por 3XY (asumido no cero). Suponga ahora que escribimos (12) en !a forma

$$\frac{X'}{3X} = -\frac{Y'}{Y} \tag{13}$$

Vemos entonces que un lado depende sólo de x, mientras que el otro lado depende sólo de y. Puesto que x y y son variables independientes, ellas no dependen entre si, y por tanto (13) puede ser cierta si y sólo si cada lado de la ecuación (13) es igual a la misma constante, que llamamos c. De (13) tenemos por tanto

$$X' - 3cX = 0, \qquad Y' + cY = 0 \tag{14}$$

Estas ecuaciones tienen soluciones, respectivamente, dadas por

$$X = a_1e^{3cx}. \qquad Y = a_2e^{-cy} \tag{15}$$

Así de (11).

$$U = XY = a_1a_2e^{c(3x-y)} = Be^{c(3x-y)} \tag{16}$$

donde $B = a_1a_2$ es una constante. Si ahora usamos la condición en (10), debemos tener

$$Be^{-cy} = 4e^{-2y} + 3e^{-6y} \tag{17}$$

Desafortunadamente, (17) no puede ser cierta para ninguna selección de las constantes B y c y pareceria como si el método fallara. Por supuesto, si tuviéramos sólo uno de los términos a la derecha de (17) el método funcionaría. Así, si tuviéramos sólo $4e^{-2y}$, por ejemplo, tendríamos $Be^{-cy} = 4e^{-2y}$, lo cual se satisfaría si $B = 4$, $c = 2$, y conduciría a la solución deseada de (16) dada por $U = 4e^{2(3x-y)}$.

La situación se salva, sin embargo, si usamos el Teorema 2, página 561, sobre la superposición de soluciones. Vemos de (16) que $U_1 = b_1 e^{c_1(3x-y)}$ y $U_2 = b_2 e^{c_2(3x-y)}$ son ambas soluciones, y así debemos tener también como solución

$$U = b_1 e^{c_1(3x-y)} + b_2 e^{c_2(3x-y)} \tag{18}$$

La condición de frontera de (10) nos lleva ahora a

$$b_1 e^{-c_1 y} + b_2 e^{-c_2 y} = 4e^{-2y} - 3e^{-6y}$$

la cual se satisface si escogemos $b_1 = 4$, $c_1 = 3$. $b_2 = -3$. $c_2 = 6$

Esto lleva a la solución deseada (18) dada por

$$U = 4e^{2(3x-y)} - 3e^{6(3x-y)} \tag{19}$$

Observación 1. El estudiante se puede preguntar por qué no trabajamos el problema anterior encontrando primero la solución general y luego la solución particular. Una razón es que excepto en casos muy sencillos la solución general con frecuencia es difícil de encontrar, y aún cuando se pueda encontrar, puede ser difícil determinar la solución particular a partir de ella. Sin embargo, la experiencia muestra que para problemas más difíciles que surgen en la práctica el método de separación de variables combinado con el principio de superposición resulta ser útil. Por esta razón, emplearemos el método de separación de variables, a menos que se diga otra cosa, en los restantes capítulos del libro.

Como un ejemplo más complicado del método de separación de variables, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Resuelva el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U(0, t) = 0, \qquad U(10, t) = 0, \qquad U(x, 0) = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Solución Aqui las variables independientes son x y t, así que sustituimos $U = XT$ en la ecuación diferencial dada, donde X depende solo de x y T depende sólo de t, encontrando

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \quad \text{o} \quad XT' = 2X''T \tag{20}$$

donde $X'' = d^2X/dx^2$, $T' = dT/dt$. Escribiendo (20) como

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X}$$

vemos que cada lado debe ser una constante denotada por c, así que

$$T' - 2cT = 0, \qquad X'' - cX = 0 \tag{21}$$

Ahora para escribir la solución de la segunda ecuación en (21), debemos saber si la constante c es positiva, negativa, o cero. Deberíamos así considerar tres casos.

Caso 1, $c = 0$. En este caso las soluciones a (21) están dadas por $T = c_1$ y $X = c_2x + c_3$, donde c_1, c_2, c_3 son constantes, así que una solución de la ecuación diferencial dada es

$$U = XT = c_1(c_2x + c_3) \tag{22}$$

De la primera y segunda condiciones de frontera tenemos

$$c_1c_3 = 0, \qquad c_1(10c_2 + c_3) = 0 \tag{23}$$

Estas se satisfacen si $c_1 = 0$, pero en tal caso la solución es la trivial $U = 0$, la cual no puede satisfacer la tercera condición de frontera. Por tanto $c_1 \neq 0$. Sin embargo, en tal caso vemos de (23) que $c_3 = 0$, y así $c_2 = 0$, dando de nuevo $U = 0$. Vemos así que c no puede ser cero

Caso 2, $c > 0$. Aquí las soluciones de (21) están dadas por

$$T = c_1e^{2ct}, \qquad X = c_2e^{\sqrt{c}x} + c_3e^{-\sqrt{c}x}$$

lo cual da $\qquad U = XT = e^{2ct}(Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x})$

donde $\qquad A = c_1c_2, \qquad B = c_1c_3$

De la primera condición de frontera tenemos

$$U(0, t) = e^{2ct}(A + B) = 0 \text{ o } A + B = 0 \quad \text{y} \quad A = -B$$

puesto que e^{2ct} no puede ser cero. La solución hasta ahora está dada por

$$U(x, t) = Be^{2ct}(e^{\sqrt{c}x} - e^{-\sqrt{c}x}) \tag{24}$$

De la segunda condición de frontera tenemos

$$U(10, t) = Be^{2ct}(e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}}) = 0$$

Puesto que $e^{2ct} \neq 0$, entonces $B = 0$ ó $e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}} = 0$, esto es, $e^{20\sqrt{c}} = 1$. Ahora si $B = 0$, la solución (24) es la trivial $U = 0$, que por supuesto no puede satisfacer la tercera condición de frontera, la cual ni siquiera ha sido considerada todavía. También es imposible tener $e^{20\sqrt{c}} = 1$ para valores positivos de c, puesto que para $c > 0$, $e^{20\sqrt{c}} > 1$. Este estado de cosas muestra que no podemos tener $c > 0$.

Caso 3, $c < 0$. Es conveniente en este caso escribir $c = -\lambda^2$ para mostrar que c es negativo. Entonces (21) llega a ser

$$T' + 2\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0$$

ó

$$T = c_1 e^{-2\lambda^2 t}, \qquad X = c_2 \cos \lambda x + c_3 \operatorname{sen} \lambda x$$

Esto da $\quad U = XT = e^{-2\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)$

donde $A = c_1 c_2$, $B = c_1 c_3$. De la primera condición de frontera tenemos

$$U(0, t) = Ae^{-2\lambda^2 t} = 0 \text{ o } \quad A = 0$$

puesto que $e^{-2\lambda^2 t}$ no puede ser cero. La solución hasta ahora es

$$U(x, t) = Be^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x \tag{25}$$

De la segunda condición de frontera tenemos

$$U(10, t) = Be^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} 10\lambda = 0$$

Puesto que $B \neq 0$ (de otra manera tenemos la solución trivial $U = 0$), debemos tener

$$\operatorname{sen} 10\lambda = 0. \quad \text{esto es,} \quad 10\lambda = m\pi \quad 0 \quad \lambda = \frac{m\pi}{10}$$

donde $m = 0, \pm 1, \pm 2,$. y (25) llega a ser

$$U(x, t) = Be^{-m^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{10} \tag{26}$$

La ultima condición de frontera produce

$$U(x, 0) = B \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{10} = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Sin embargo, no podemos encontrar un solo par de constantes m y B que satisfagan esta condición. Afortunadamente, el principio de superposición viene en nuestra ayuda, puesto que sabemos que sumas de soluciones del tipo (26) para diferentes valores de B y enteros m también serán una solución. Puesto que sólo necesitamos tres términos con la forma (26), consideramos la solución

$$U(x, t) = b_1 e^{-m_1^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_1 \pi x}{10} + b_2 e^{-m_2^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_2 \pi x}{10} + b_3 e^{-m_3^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_3 \pi x}{10} \tag{27}$$

de modo que la última condición de frontera da

$$b_1 \operatorname{sen} \frac{m_1 \pi x}{10} + b_2 \operatorname{sen} \frac{m_2 \pi x}{10} + b_3 \operatorname{sen} \frac{m_3 \pi x}{10} = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Esto se puede satisfacer si escogemos

$$b_1 = 50, \quad \frac{m_1\pi}{10} = \frac{3\pi}{2} \quad 0 \quad m_1 = 15; \qquad b_2 = 20, \quad \frac{m_2\pi}{10} = 2\pi \quad 0 \quad m_2 = 20;$$

$$b_3 = -10, \quad \frac{m_3\pi}{10} = 4 \quad \text{o} \quad m_3 = 40$$

Usando éstas en (27) da la solución deseada

$$U(x,t) = 50e^{-9\pi^2 t/2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{3} + 20e^{-8\pi^2 t}\operatorname{sen}2\pi x - 10e^{-32\pi^2 t}\operatorname{sen}4\pi x \tag{28}$$

Observación 2. Para la mayoría de problemas podemos anticipar el hecho de que debemos hacer la selección $c = -\lambda^2$, puesto que de otra manera no obtenemos los términos seno presentes en la última condición de frontera del Ejemplo ilustrativo 1. Así no necesitamos preocuparnos con cualquier otra selección para la constante distinta de λ^2. Este hecho se puede también deducir desde un punto de vista físico si U representa alguna variable física, tal como temperatura, y t denota tiempo. Si c fuera positiva entonces cuando $t \to \infty$ tendríamos $U \to \infty$, o como a menudo decimos U sería ***no acotada,*** y esto contradeciría el principio de conservación en la naturaleza. También, si c fuera cero, U sería independiente del tiempo, lo cual no es el caso corriente.

EJERCICIOS A

Use el método de "separación de variables" para obtener soluciones a cada uno de los siguientes problemas de valor de frontera.

1. $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y};\ U(0,y) = e^{2y}.$

2. $\dfrac{\partial U}{\partial x} + U = \dfrac{\partial U}{\partial y};\ U(x,0) = 4e^{-3x}.$

3. $\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = U;\ U(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}.$

4. $4\dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 3Y;\ Y(x,0) = 4e^{-x} - e^{-5x}.$

5. $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2};\ U(0,t) = 0,\ U(10,t) = 0,\ U(x,0) = 5\operatorname{sen}2\pi x$

6. $2\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2};\ U(0,t) = 0,\ U(\pi,t) = 0,\ U(x,0) = 2\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}4x.$

7. $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2};\ Y(0,t) = 0,\ Y(20,t) = 0,\ Y_t(x,0) = 0,\ Y(x,0) = 10\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}$

8. $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2};\ Y(0,t) = 0,\ Y(10,t) = 0,\ Y_t(x,0) = 0,\ Y(x,0) = 3\operatorname{sen}2\pi x - 4\operatorname{sen}\dfrac{5\pi x}{2}.$

9. $9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2};\ Y(0,t) = 0,\ Y(\pi,t) = 0,\ Y_t(x,0) = 2\operatorname{sen}x - 3\operatorname{sen}2x,\ Y(x,0) = 0.$

10. $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U;\ U(0,t) = 0,\ U(10,t) = 0,\ U(x,0) = 5\operatorname{sen}2\pi x - \operatorname{sen}4\pi x$

EJERCICIOS B

1. Se puede aplicar el método de separación de variables a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

2. (a) Muestre que la ecuación diferencial $\quad A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + C\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

donde A, B y C son constantes, tiene soluciones de la forma e^{ax+by} donde a y b son constantes. Muestre que si $A \neq 0$, entonces $a = m_1 b$ y $a = m_2 b$ así que $e^{b(y+m_1 x)}$ y $e^{b(y+m_2 x)}$ son soluciones, donde b es arbitraria. (b) Por sustitución directa muestre que $F(y + m_1 x)$ y $G(y + m_2 x)$, donde F y G son funciones arbitrarias, son también soluciones. Podemos considerar que éstas se obtienen al superponer soluciones de los tipos $ce^{b(y+m_1 x)}$ y $ce^{b(y+m_2 x)}$, donde b y c pueden asumir cualesquiera valores. ¿Qué modificaciones si hay alguna se deberían hacer si $A = 0$? (c) Use (b) para mostrar que la solución general de la ecuación en (a) es $U = F(y + m_1 x) + G(y + m_2 x)$. (d) Use los resultados de (c) para obtener la solución general de la ecuación del Ejercicio 1. (El estudiante debería comparar el supuesto e^{ax+by} con el supuesto e^{mx} usado en ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes.)

3. Muestre cómo el Ejercicio 2 se puede usar para hallar soluciones generales a cada una de las siguientes:

(a) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$ (b) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$

(c) $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ (d) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = 0.$

4. ¿Se puede aplicar el método del Ejercicio 2 a la ecuación $x\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$?

¿Se podría aplicar aquí el método de separación de variables? ¿A qué tipos de ecuaciones diferenciales parciales piensa usted que se les puede aplicar los métodos?

5. Si m_1 y m_2 del Ejercicio 2 son iguales, entonces $F(y + m_1 x)$ es una solución. Muestre que $xG(y + m_1 x)$ ó $yG(y + m_1 x)$ es también una solución, y por lo tanto que $F(y + m_1 x) + xG(y + m_1 x)$ es una solución general. Use esto para obtener las soluciones generales de cada una de las siguientes:

(a) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$ (b) $4\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 12\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial t} + 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0.$

(Compare con el caso de raíces repetidas en la ecuación auxiliar en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias.)

6. Use el Teorema 1, página 561para obtener la solución general de

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} + 3\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 4e^{2x+3y}.$$

(*Sugerencia:* Asuma una solución particular ae^{2x+3y} y determine a.)

7. Encuentre la solución general de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 3\ \text{sen}(x - 4y) + x^2$$

8. Encuentre la solución general de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 6e^{y-3x} + \cos(x - 2y)$$

(*Sugerencia:* Correspondiente al término $6e^{y-3x}$, asuma la solución particular axe^{y-3x} ó aye^{y-3x} y determine a.)

9. Pruebe (a) Teorema 1 y (b) Teorema 2 en la página 561.

EJERCICIOS C

1. (a) Si el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

donde P, Q y R son funciones de x, y y z, tiene solución $u(x, y, z) = c_1$, $v(x, y, z) = c_2$, muestre que la ecuación diferencial parcial

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

tiene solución $F(u, v) = 0$, donde F es una función diferenciable arbitraria. Compare con el Ejercicio 2C, página 559.

(b) Use el resultado de (a) para encontrar la solución de

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = y.$$

2. (a) Dada la función $U(x, t)$. Asumiendo restricciones apropiadas, encuentre la transformada de Laplace de $\partial U/\partial t$ con respecto a la variable t, mostrando que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = su - U(x, 0) \quad \text{donde} \quad u = u(x, s) = \mathscr{L}\{U(x, t)\}$$

(b) Muestre que $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = s^2 u - sU(x, 0) - U_t(x, 0)$.

(c) Muestre que $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{du}{dx}, \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}$

(d) Muestre cómo se pueden usar las transformadas de Laplace para resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(0, t) = 0,\ U(1, t) = 0,\ U(x, 0) = 8 \operatorname{sen} 2\pi x$$

(Sugerencia: Tome las transformadas de Laplace de las dos primeras condiciones de frontera.)

3. Use el método de las transformadas de Laplace como en el Ejercicio 2 para obtener soluciones al (a) Ejercicio 7A; (b) Ejercicio 8A; (c) Ejercicio 10A.

4. Puede usted *usar* los métodos de la transformada de Laplace para resolver el problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(0, t) = 0,\ U(1, t) = 0,\ U(x, 0) = x(1 - x)$$

3 Algunas ecuaciones diferenciales parciales importantes que surgen de problemas físicos

Ya hemos visto cómo se resuelven algunos problemas de valor de frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales. Volvemos ahora a las derivaciones de algunas ecuaciones dií'erenciales parciales importantes que surgen en varios problemas aplicados. Hay tres tipos importantes de problemas que consideraremos.

1. Problemas que involucran vibraciones u oscilaciones.
2. Problemas que involucran conducción o difusión de calor.
3. Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional.

3.1 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN VIBRACIONES U OSCILACIONES. LA CUERDA VIBRANTE

Uno de los problemas más simples en vibraciones u oscilaciones que conducen a problemas de valor de frontera involucrando ecuaciones diferenciales parciales es el problema de una cuerda vibrante, tal como una cuerda de violín o piano. Suponga que tal cuerda está fuertemente tensa entre dos puntos fijos $x = 0$ y $x = L$ en el eje x de la Figura 12.2(a). En el tiempo $t = 0$ la

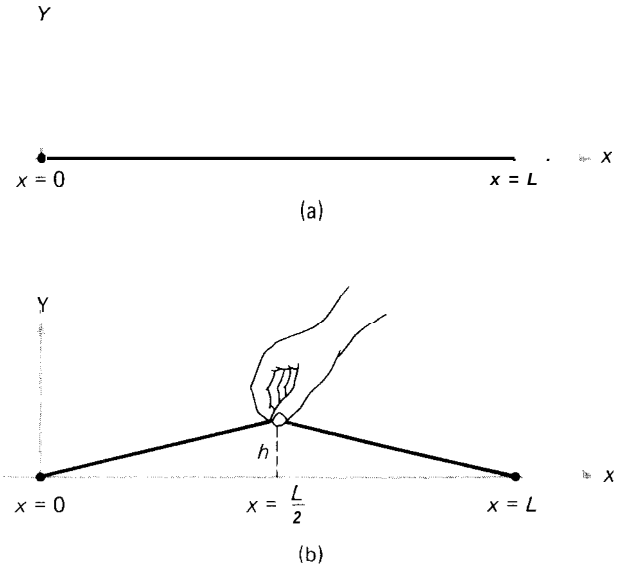


Figura 12.2

cuerda se alza en el punto medio [Figura 12.2(b)] una distancia h. Luego la cuerda se suelta. El problema es describir el movimiento resultante.

Claramente muchas cosas pueden suceder. La cuerda puede estar demasiado tensa que cuando la alzamos por la mitad una altura h la cuerda se rompe. Este caso es simple y no lo consideraremos. Es más natural asumir que la cuerda es perfectamente f'lexible y elástica. También, para simplificar el problema, asumimos que h es pequeño comparado con L. Otros supuestos se harán a medida que avanzamos.

Formulación matemática. Supongamos que en algún tiempo t, la cuerda tiene la forma que se muestra en la Figura 12.3. Llamamos $Y(x, t)$ el des-

;

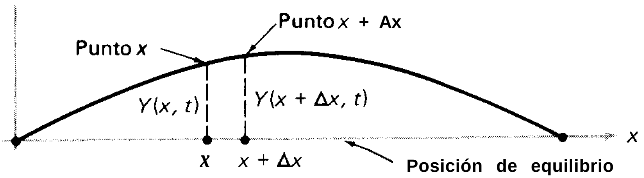


Figura 12.3

plazamiento del punto x en la cuerda (medido desde la posición de equilibrio, la cual tomamos como el eje x) en el tiempo t. El desplazamiento, en el tiempo t, en el punto vecino $x + \Delta x$ estará entonces dado por $Y(x + \text{IX}, t)$.

Para describir el movimiento resultante, consideramos las fuerzas que actúan sobre el pequeño elemento de cuerda de longitud Δs entre x y $x + \Delta x$, mostrado ampliado en la Figura 12.4. Habrá dos fuerzas actuando sobre el elemento, la tensión T(X) debida a la porción de cuerda a la izquierda, y la tensión $\tau(x + \Delta x)$ debida a la porción a la derecha. Note que hemos asumi-

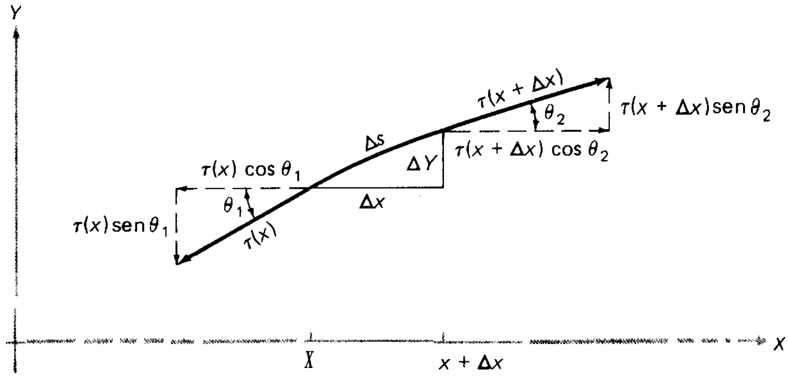


Figura 12.4

do por el momento que la tensión depende de la posición. Descomponiendo estas fuerzas en componentes se obtiene

$$\left.\begin{aligned} &\text{fuerza neta vertical (hacia arriba)} = \tau(x + Ar)\ \text{sen}\,\theta_2 - \tau(x)\ \text{sen}\,\theta_1 \\ &\text{fuerza neta horizontal (a la derecha)} = \tau(x + \Delta x)\cos\theta_2 - \tau(x)\cos\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Asumimos ahora que no hay movimiento a la izquierda ni a la derecha de la cuerda, esto es, a un alto grado de aproximación la fuerza neta horizontal es cero. Esto está de acuerdo con la situación física.* La fuerza vertical neta en (1) produce una aceleración del elemento. Asumiendo que la cuerda tiene densidad (masa por unidad de longitud) ρ, la masa del elemento es $\rho\Delta s$. La aceleración vertical de la cuerda está aproximadamente dada por $\partial^2 Y/\partial t^2$.† De donde por la ley de Newton,

$$\tau(x + \Delta x)\operatorname{sen}\theta_2 - \tau(x)\operatorname{sen}\theta_1 = p \text{ As } \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \tag{2}$$

a un alto grado de precisión. Si *H* es el ángulo que forma la tangente en cualquier punto del elemento con el eje positivo x, entonces θ es una función de la posición y escribimos $\theta_1 = \theta(x)$, $\theta_2 = \theta(x + \Delta x)$. Sustituyendo en (3) y dividiendo por Δx tenemos

$$\frac{\tau(x + \Delta x)\operatorname{sen}\theta(x + \text{As}) - \tau(x)\operatorname{sen}\theta(x)}{\text{AS}} = \rho \frac{\text{As}}{\Delta x} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \tag{3}$$

Anora la pendiente de la tangente en cualquier punto de la cuerda está dada por

$$\tan \theta(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

de modo que
$$\operatorname{sen}\theta(x) = \frac{\partial Y/\partial x}{\sqrt{1 + (\partial Y/\partial x)^2}} \tag{4}$$

Así si asumimos que la pendiente es pequeña comparada con 1, podemos despreciar $(\partial Y/\partial x)^2$ en el denominador de (4) lo cual equivale a la aproximación‡

$$\text{sen\%(x)} = \tan \theta(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Usando esto en (3) y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, (3) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x) \tan \theta(x)\right] = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[(s) \frac{\partial Y}{\partial x}\right] = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \tag{5}$$

la cual se llama la ***ecuación de la cuerda vibrante.*** Si T(X) = τ, una constante,

$$\tau \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{6}$$

donde $a^2 \equiv \tau/\rho$. Tomaremos la tensión como constante a menos que se especifique lo contrario.

Veamos ahora cuáles son las condiciones de frontera. Puesto que la cuerda está fija en los puntos $x = 0$ y $x = L$, tenemos

$$Y(0, t) = 0, \qquad Y(L, t) = 0, \qquad \text{para} \qquad t \geqq 0 \tag{7}$$

*Realmente esta consecuencia sigue de algunos otros supuestos que hacemos.
†Más exactamente esto es $(\partial^2 Y/\partial t^2) + \epsilon$ donde ϵ -0 cuando Δx -0.
‡El grado de pequeñez depende, por supuesto, de la precisión deseada.

Estas establecen que los desplazamientos en los extremos de la cuerda son siempre cero. Refiriéndonos a la Figura 12.2(b) se ve que

$$Y(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 \leqq x \leqq \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{2h}{L}(L - x), & \dfrac{L}{2} \leqq x \leqq L \end{cases} \tag{8}$$

Esto simplemente da las ecuaciones de los dos segmentos de recta en esa figura. $Y(x, 0)$ denota el desplazamiento de cualquier punto x en $t = 0$. Puesto que la cuerda se suelta desde el reposo, su velocidad inicial en cualquier parte es cero. Denotando por Y_t la velocidad $\partial Y/\partial t$ podemos escribir

$$Y_t(x, 0) = 0 \tag{9}$$

la cual dice que la velocidad en cualquier lugar x en tiempo $t = 0$ es cero.

Hay muchos otros problemas de valor de frontera que se pueden formular usando la misma ecuación diferencial parcial (6). Por ejemplo, la cuerda se podría alzar en otro punto distinto del punto medio o aun en dos o más puntos. Podríamos también tener una cuerda o soga con uno de sus extremos fijo mientras que el otro se mueve arriba y abajo de acuerdo a alguna ley de movimiento.

Es también posible generalizar la ecuación de la cuerda vibrante (6). Por ejemplo suponga que tenemos una membrana o piel de tambor en la forma de un cuadrado en el plano ny cuyo contorno está fijo (ver Figura 12.5). Si la ponemos a vibrar, tal como ocurre cuando se golpea un tambor, cada punto (x, y) del cuadrado se pone en movimiento en una dirección perpendicular al plano.

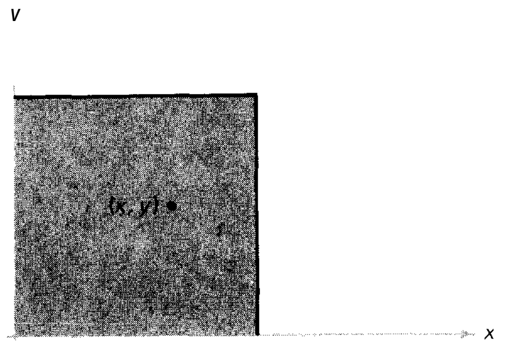


Figura 12.5

Si denotamos por Z el desplazamiento de un punto (x, y) a partir del plano, el cual es la posición de equilibrio, en cualquier tiempo t, entonces la ecuación diferencial parcial para la vibración está dada por

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right), \qquad a^2 = \frac{\tau}{\rho} \tag{10}$$

donde τ es la tensión por unidad de longitud a lo largo de cualquier curva en la piel de tambor la cual se asume constante, y ρ es la densidad (masa por unidad de área). Aquí Z es una función de x, y y t, y se puede denotar por $Z(x, y, t)$.

Podemos generalizar (6) y (10) a tres dimensiones. Esta generalización sería

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{11}$$

y se podría pensar que esto tiene aplicaciones a las vibraciones de una superficie esférica o de otra forma. La ecuación (ll) también aparece en la teoría electromagnética en relación a la propagación de ondas tales como ondas de radio o televisión. Por esta razón con frecuencia llamamos a (ll), o cualesquiera de los casos (6) o (10), la ecuación de *onda*. Cuando sea necesario distinguir las ecuaciones diferenciales de cada caso, nos referimos a (6), (10) y (ll) como las ecuaciones de onda en *una, dos y tres dimensiones* respectivamente.

Si introducimos el operador de derivada parcial

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12}$$

la ecuación (ll) se puede escribir como

$$\nabla^2 U = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{13}$$

En el caso de que U no dependa de t, esta ecuación se convierte en

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{14}$$

Con frecuencia llamamos a (14) la *ecuación de Laplace* y ∇^2 el *Laplaciano* en nombre del matemático *Laplace*, quien investigó muchas de sus importantes e interesantes propiedades.

3.2 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN CONDUCCION 0 DIFUSION DE CALOR

Suponga que una barra delgada de metal de longitud L *se* coloca en el eje x de un sistema de coordenadas xy (Figura 12.6). Suponga que la barra se sumerge en agua hirviendo de modo que su temperatura es de 100” C. Luego se saca y los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen en hielo para que la temperatura en los extremos sea 0” C. Supondremos que no hay escapes de calor de la superficie de la barra, esto es, la barra está aislada. No nos preocuparemos aquí cómo esto se puede conseguir físicamente. Preguntemos cuál será la temperatura de la barra en cualquier lugar en la barra en cualquier tiempo. Denotando la temperatura de la barra por U se ve fácilmente que U depende de la posición x de la barra, como también del tiempo t (medida del tiempo

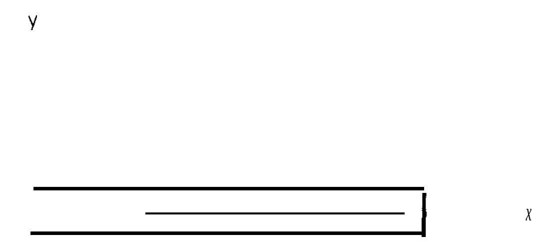


Figura 12.6

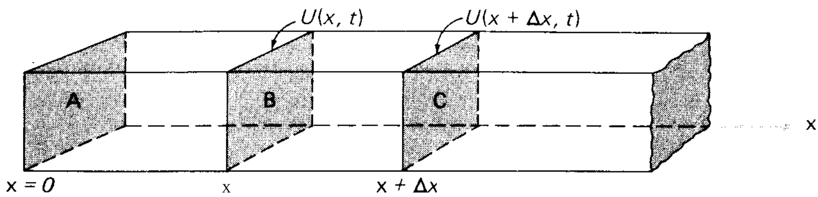


Figura 12.7

cero cuando la barra está a 100" C) de observación. Denotamos esta dependencia por $U(x, t)$. Tenemos así la variable dependiente U dependiendo de dos variables independientes x y t. Tratemos de formular matemáticamente este problema.

Formulación matemática. Suponga que tenemos una barra de sección transversal constante A (como se muestra en la Figura 12.7, donde la sección transversal es rectangular, aunque pudiera tener cualquier forma como la de un cilindro). Considere el elemento de volumen de la barra incluido entre los dos planos vecinos, paralelos a A y denotados por B y C a distancias x y $x + \Delta x$, respectivamente, de A. Denote la temperatura en el plano B en tiempo t por $U(x, t)$; la temperatura en el plano C en tiempo t estará entonces dada por $U(x + \Delta x, t)$. Para seguir adelante necesitamos las siguientes dos leyes físicas concernientes a la transferencia de calor.*

1. *La cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad ΔU es $ms\,\Delta U$, donde s es una constante que depende del material usado, y se llama el calor específico.*
2. *La cantidad de calor que fluye a través de una área (tal como B ó C) por unidad de tiempo es proporcional a la tasa de cambio de la temperatura con respecto a la distancia perpendicular al área (esto es. la distancia normal x).*

Tomando como positiva la dirección de izquierda a derecha en la Figura 12.7, podemos escribir la segunda ley como

*Una discusión de la transferencia de calor se da en el Capítulo tres, página 101

$$Q = -KA\,\Delta t \frac{\partial U}{\partial x} \tag{15}$$

donde Q es la cantidad de calor que fluye a la derecha, Δt es la longitud de tiempo durante el cual ocurre el flujo, y K es la constante de proporcionalidad llamada *conductividad térmica,* la cual depende del material. El signo menos en (15) muestra que Q es positivo (esto es, el flujo es a la derecha) cuando $\partial U/\partial x$ es negativo (esto es, cuando la temperatura está decreciendo a medida que vamos a la derecha). Similarmente Q es negativo cuando $\partial U/\partial x$ es positivo. Esto concuerda con los hechos físicos. Usando (15) podemos decir que la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano B (Figura 12.7) es

$$-KA\,\Delta t \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x$$

Similarmente, la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano C es

$$-KA\,\Delta t \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

La cantidad neta de calor que se acumula en el volumen entre B y C *es* la cantidad que entra por B menos la cantidad que sale por C, esto es,

$$\left[-KA\,\Delta t \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x\right] - \left[-KA\,\Delta t \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\right] = KA\,\Delta t \left[\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x\right] \tag{16}$$

Esta cantidad de calor acumulado eleva o baja la temperatura del elemento de volumen si (16) es + ó – . Por la ley 1, entonces

$$KA\,\Delta t \left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x\right) = ms\,\Delta U = \rho A\,\Delta x\, s\,\Delta U \tag{17}$$

puesto que la masa del elemento de volumen es la densidad ρ veces el volumen $A\Delta x$. Se debería mencionar que (17) es sólo aproximadamente cierta siendo el grado de aproximación mejor, entre más pequeños sean los valores de Δx, ΔU y Δt. Dividiendo ambos lados de (17) por $A\,\Delta x\,\Delta t$ y haciendo que Δx y Δt tiendan a cero, obtenemos

$$K\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho s \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{o} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{18}$$

donde $\kappa \equiv K/\rho s$ se llama la *difusividad* del material. Esta ecuación se llama la *ecuación de flujo de calor o de conducción de calor en una dimensión.*

Se debería notar que si la superficie no estuviera aislada tendríamos que haber considerado un término extra en (17), a saber, la cantidad de calor que escapa (o fluye dentro) del elemento (ver Ejercicio 1B).

Tomando el caso especial donde los extremos se mantienen a 0" C y donde la temperatura inicial de la barra es 100" C, resultan las siguientes condiciones de frontera:

$$\left.\begin{aligned} &U(0,t) = 0, \qquad U(L,t) = 0 \quad \text{para } t > 0 \\ &U(x,0) = 100, \qquad \text{para } 0 < x < L \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Las dos primeras expresan el hecho de que las temperaturas en $x = 0$ y $x = L$ son cero en cualquier tiempo. La tercera expresa el hecho de que la temperatura en cualquier lugar x entre 0 y L en el tiempo cero es 100” C. Así el problema de valor de frontera es el de determinar la solución de la ecuación diferencial parcial (18) que satisfaga las condiciones (19).

Observación. El mismo problema de valor de frontera puede tener diferentes interpretaciones, esto es, puede surgir a partir de situaciones físicas aparentemente diferentes. Por ejemplo, suponga que tenemos una varilla infinita de material conductor inicialmente a 100” C donde los planos de contorno $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a 0” C. Entonces la temperatura $U(x, t)$ en cualquier lugar x de la varilla en cualquier tiempo $t > 0$ está dada por el problema de valor de frontera definido por (18) y (19) anteriores.

Es fácil generalizar la ecuación (18) al caso donde el calor puede fluir en más de una dirección. Por ejemplo, si tenemos conducción de calor en tres dimensiones la ecuación es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{20}$$

donde la constante κ tiene el mismo significado dado antes. Llamamos a (20) la *ecuación de conducción de calor tridimensional.* La temperatura U en este caso es una función de x, y z y t, escrita $U(x, y, z\ t)$. En el caso de que U por alguna razón, tal como simetría por ejemplo, depende solo de x, y y t pero no de z, entonces (20) se reduce a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \tag{21}$$

la cual se llama la *ecuación de conducción de calor bidimensional.*

La ecuación (20) se puede escribir en términos del *operador Laplaciano* | ver (12), página 573 | como

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\,\nabla^2 U \tag{22}$$

En el caso de que U no dependa del tiempo t llamamos a U la *temperatura de estado estacionario,* y esto se reduce a

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{23}$$

la cual es la *ecuación de Laplace* (compare con (14), página 573).

Podemos pensar que la conducción de calor es debida al movimiento aleatorio de las partículas de materia tales como átomos o moléculas; entre mayor sea la velocidad mayor será la temperatura. El flujo de calor desde lugares de alta o baja temperatura es debido a la dispersión *o difusión* de tales partículas desde lugares donde su concentración o densidad es alta a lugares donde es baja. Tales problemas de difusión ocurren en química y biología. Por ejemplo, en biología podemos tener la difusión de drogas desde la corriente sanguínea a células u órganos. La misma ecuación derivada antes para conducción de calor se puede aplicar para difusión. La única diferencia esencial es que U denota la *densidad o concentración* de las partículas que se mueven. La interpretación de difusión de la conducción de calor de hecho ha sido sugerida anteriormente cuando nos referimos a la constante κ como la *difusividad*.

3.3 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN POTENCIAL ELECTRICO 0 GRAVITACIONAL

Considere una región tridimensional $\mathscr{R}$ como en la Figura 12.8, la cual puede representar una distribución continua de cargas eléctricas (o una distribución continua de masa). Sea ρ, que puede variar de punto a punto, para denotar la carga por unidad de volumen (o masa por unidad de volumen), La cantidad ρ es por tanto la densidad de carga (o densidad de masa). El potencial eléctrico en P debido a la carga q en Q (o potencial gravitacional en P debido a la masa m en Q) está definido por q/r (o m/r), donde r *es* la distancia de P a Q dada por

$$r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

Si dV representa el potencial, eléctrico o gravitacional, debido a la carga o masa dada por $\rho\, dX\, dY\, dZ$, entonces tenemos

$$dV = \frac{\rho\, dX\, dY\, dZ}{r} = \frac{\rho\, dX\, dY\, dZ}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}} \tag{24}$$

De esto sigue que el potencial total V debido a la carga total o distribución de masa en la región $\mathscr{R}$ se encuentra por integración de **(24)** sobre la región $\mathscr{R}$ para obtener

$$V = \iiint\limits_{\mathscr{R}} \frac{\rho\, dX\, dY\, dZ}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}} \tag{25}$$

Al trabajar problemas de potencial es conveniente encontrar una ecuación diferencial parcial que sea satisfecha por V. Para obtener tal ecuación diferencial, tomemos las derivadas parciales de V con respecto a x, y y z y veamos si podemos eliminar la integral en **(25).** Al tomar las derivadas segundas con respecto a x, y, z, respectivamente, y luego sumándolas encontramos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 V = 0 \tag{26}$$

la cual de nuevo es la ecuación de Laplace, ya vista en dos oportunidades

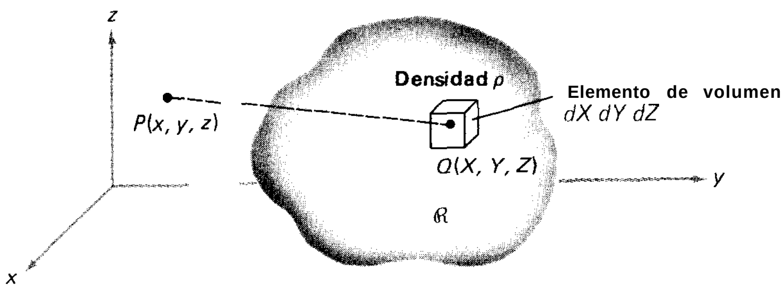


Figura 12.8

(páginas 573 y 576). El resultado (26) no es difícil de establecer. Para ello tomamos ∇^2 de ambos lados de (25). Intercambiando el orden de la derivación e integración (la cual se puede justificar), el resultado equivale a mostrar que el Laplaciano $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$ es cero. Pero por diferenciación ordinaria encontramos fácilmente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2(x-X)^2 - (y-Y)^2 - (z-Z)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2(y-Y)^2 - (z-Z)^2 - (x-X)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2(z-Z)^2 - (x-X)^2 - (y-Y)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{5/2}}$$

donde para ahorrar trabajo podemos obtener los dos últimos resultados a partir del primero al usar la simetría. Puesto que éstas suman a cero, se obtiene el resultado deseado.*

Para llegar a la ecuación de Laplace (26), se asumió que el potencial se va a encontrar en puntos no ocupados por materia o carga eléctrica. En el caso de que queramos encontrar el potencial en puntos ocupados por materia o carga, se obtiene que la ecuación está dada por

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

la cual se llama la ecuación de *Poisson*. El caso especial $\rho = 0$ da (26).

3.4 OBSERVACIONES SOBRE LA DEDUCCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Se puede anotar que hemos sido algo descuidados desde un punto de vista matemático al deducir las ecuaciones diferenciales parciales anteriores. Por ejemplo, al tomar las derivadas bajo el signo de la integral en (25) no hemos establecido las condiciones apropiadas bajo las cuales tal operación se puede justificar. Considerando aún más este punto, no tiene sentido el ser rigurosos en la deducción de una ecuación a partir de algún modelo matemático postulado de la realidad física cuando no sabemos si el modelo puede proporcionar aún una descripción razonablemente precisa de tal realidad. Tiene más sentido, sin embargo, usar el razonamiento, la intuición, el ingenio, etc., para obtener tales ecuaciones y luego simplemente *postular las ecuaciones*. Entonces podemos decir que las ecuaciones son ya sea correctas o incorrectas de acuerdo a si los resultados obtenidos de ellas concuerdan o no con los resultados observados o experimentales. La ecuación más rigurosamente deducida carece de utilidad si conduce a resultados que no concuerdan con los hechos físicos que intentaba describir.

EJERCICIOS A

1. Una cuerda vibra en un plano vertical. Muestre que la ecuación diferencial que describe las vibraciones pequeñas de la cuerda si se considera la gravitación es

*Aunque hemos usado el concepto de potencial eléctrico o gravitacional para obtener la ecuación de Laplace, sucede que esta ecuación también ocurre en otros campos tales como, por ejemplo, en el movimiento de un fluido incompresible de ***aerodinámica*** o ***hidrodinámica.*** En tal caso V es un *potencial de velocidad.*

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g$$

2. La cuerda del Ejercicio 1 vibra en un medio viscoso, y se asume que actúa una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea. Escriba una ecuación diferencial parcial que describa el movimiento.

3. Muestre que la cantidad a en la ecuación de onda (6) tiene dimensiones de velocidad.

4. Si los extremos de la barra en el problema de flujo de calor del texto están aislados en vez de mantenerse a 0° C, exprese matemáticamente las nuevas condiciones de frontera. ¿Puede usted pensar en la solución al problema de valor de frontera por medio de razonamiento físico?

EJERCICIOS B

1. La superficie de una barra delgada de metal no está aislada sino, en vez, la radiación puede ocurrir hacia los alrededores. Asumiendo que la ley de Newton de enfriamiento (página 107) es aplicable, muestre que la ecuación de calor llega a ser

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - c(U - U_0)$$

donde c es una constante y U_0 es la temperatura de los alrededores.

2. Muestre que al hacer el cambio de variable $U - U_0 = Ve^{\alpha t}$, donde α es una constante apropiadamente escogida, la ecuación del Ejercicio 1 se transforma en la ecuación de calor (18), página 575, en la cual la superficie está aislada. Discuta el significado de esto.

3. Una cuerda tiene un punto extremo fijo en $x = L$ mientras que el otro extremo en $x = 0$ se mueve en el plano xy de tal modo que el desplazamiento desde el eje x varía sinusoidalmente con el tiempo. Establezca un problema de valor de frontera que describa las vibraciones de la cuerda, asumiendo que no hay amortiguamiento y una forma inicial y distribución de velocidad apropiadas. Describa físicamente cómo esperaría usted que se mueva la cuerda.

4. Trabaje el Ejercicio 3 si el punto extremo en $x = L$ está libre en vez de estar fijo.

EJERCICIOS C

1. Suponga que se requiere deducir la ecuación de conducción de calor en tres dimensiones. Para ello considere un elemento de volumen dentro de la región $\mathscr{R}$ (Figura 12.9). Este elemento se toma como un paralelepípedo y se muestra considerablemente ampliado en la figura. Muestre que la ecuación de calor es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

donde los diferentes símbolos tienen el mismo significado como en el texto (*Sugerencia:* La cantidad neta de calor que se acumula en el elemento de volumen es la suma de las cantidades de calor que entran por las caras *PQRS, PQTW, PSVW* menos la suma de las cantidades que salen por las caras *WTMV, SRMV, QRMT).*

2. Puesto que $V = 1/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, es una solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones, esto es, la ecuación (26) en la página 577, uno podría esperar que $V = 1/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, es una solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones, esto es,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Muestre que esto de hecho no es correcto y explique por qué

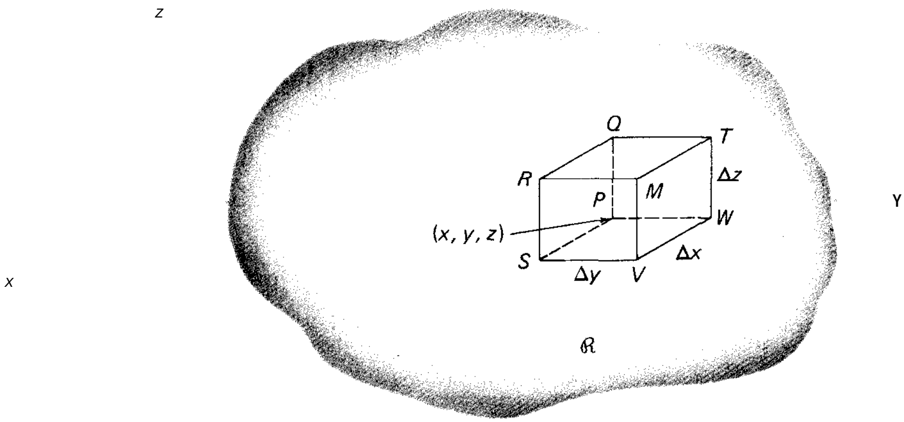


Figura 12.9

3. Muestre que una solución a la ecuación de Laplace bidimensional del Ejercicio 2 está dada por $V = \ln r$, donde $r = \sqrt{x + y^2}$.

4. Deduzca la ecuación de la cuerda vibrante si se asume que el desplazamiento no necesita ser pequeño.

5. Dé interpretaciones físicas a las ecuaciones diferenciales parciales

(a) $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x, t)$. (b) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + F(x, t)$

6. Muestre que $V = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix \cos\theta + iy \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$ satisface la ecuación de Laplace.

7. Muestre que si la conductividad térmica K no es constante sino que aepende de x entonces la ecuación de calor (18), página 575, es remplazada por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right] = \rho s \frac{\partial U}{\partial t}$$

8. Use el método de separación de variables en la ecuación (5), página 571, para mostrar que su solución depende de las soluciones de la ecuación *diferencial de Sturm-Liouville.*

$$\frac{d}{dx}\left[\Gamma(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda^2 \rho X = 0$$

¿De sus conocimientos de los resultados del Capítulo ocho que conclusiones podría usted sacar?

9. Trabaje el Ejercicio 8 para la ecuación de calor en el Ejercicio 7.

trece

soluciones de problemas de valor de frontera usando series de Fourier

1 Problemas de valor de frontera que involucran conducción de calor

1.1 EL PROBLEMA DE FOURIER

En el capítulo anterior, página 575, llegamos al problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$U(0, t) = 0, \qquad U(L, t) = 0. \qquad U(x, 0) = 100 \tag{2}$$

al considerar la conducción de calor en una barra aislada de longitud L la cual estaba inicialmente a 100” C y sus extremos se mantenían a la temperatura de 0” C. Fourier, un científico y matemático francés de principios del siglo XIX, llegó a un problema de valor de frontera muy similar a este en su investigación sobre el calor, y nos referiremos al problema como el *problema de Fourier.*

Al intentar resolver este problema, Fourier usó el método de separación de variables en la ecuación (1) como ya lo hemos hecho en el Capítulo doce, esto es, asumió una solución de la forma $U = XT$, donde X sólo depende de x y T sólo depende de t. Sustituyendo en (1) y separando las variables, Fourier obtuvo así

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} \tag{3}$$

A partir de este punto Fourier usó el mismo razonamiento dado en el Capítulo doce. Puesto que un lado de (3) depende de x, mientras que el otro depende de t, sigue que cada lado es constante. Llamando esta constante c y considerando los casos c = 0, c > 0, $c < 0$, podemos mostrar, como en el Ejemplo ilustrativo en la página 563, que solamente $c < 0$ produce algo.* Por tanto, asumimos que c = $-\lambda^2$ y obtenemos de (3),

$$T' + \kappa\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0$$

o

$$T = c_1 e^{-\kappa\lambda^2 t}, \qquad X = c_2 \cos \lambda x + c_3 \operatorname{sen} \lambda x$$

Como antes, una solución es

$$U(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)$$

Para satisfacer la primera de las condiciones (2), tenemos $A = 0$, y la solución hasta ahora es

$$U(x, t) = Be^{-\kappa\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$$

*Como se indicó en la página 565, esto se puede ver físicamente observando que cuando $t \to \infty$ la temperatura llega a ser no acotada si c > 0, violando así un hecho físico fundamental. También, si c = 0 la temperatura es independiente del tiempo.

Para satisfacer la segunda de las condiciones (2), debemos tener sen $\lambda L = 0$ o $\lambda L = m\pi$, donde m es cualquier entero, de modo que la solución hasta ahora es

$$U(x, t) = Be^{-\kappa m^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \tag{4}$$

Consideremos ahora la última condición de (2). Esto da

$$U(x, 0) = B \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = 100$$

Aquí aparentemente estamos detenidos, y probablemente Fourier lo estuvo, En el Capítulo doce, página 562, vimos que el *principio de superposición* nos ayudó a salir de nuestra dificultad en el Problema para discusión. ¿Nos puede también ayudar aquí? Fourier intentó esto, razonando que la suma de soluciones del tipo (4) satisfacía la ecuación diferencial dada y la primera y segunda de las condiciones de (2). Puesto que un número finito de términos en esta solución todavía no parece que ayude a satisfacer la última condición de (2), él razonó que tal *vez* un *número infinito* de términos sí ayudaría, esto es, que la solución está dada por

$$U(x, t) = b_1 e^{-\kappa\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \quad b_2 e^{-4\kappa\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \tag{5}$$

Sin embargo, cuando tratamos con un número infinito de términos naturalmente debemos preocuparnos de cosas como la convergencia. Asumiendo que tales preguntas se dejan de lado, el supuesto conduce a

$$U(x, 0) = 100 = b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \quad + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + \tag{6}$$

Entre más miramos al requisito (6), más extraño parece. Esto dice que un número infinito de términos senosoidales se debe combinar para dar un valor constante para *todos* los valores de x dentro del rango $0 \leqq x \leqq L$. Vemos de inmediato, sin embargo, que cuando $x = 0$ y $x = L$ el lado derecho es cero, de modo que (6) no puede ser cierto para los puntos extremos. Si es cierto del todo, se puede cumplir sólo para $0 < x < L$.

El problema que enfrentó Fourier fue el determinar las constantes b_1, b_2, para que (6) fuera cierto. El hecho de que él haya tenido éxito en resolver el problema y haya abierto todo un nuevo campo en las matemáticas y ciencia aplicada es ahora un asunto histórico. Es suficiente decir que cuando él publicó sus resultados muchos matemáticos y científicos pensaron que no tenían sentido, puesto que en tal época no estaban escritos sobre bases rigurosas. Ahora los matemáticos han desarrollado la teoría de *series de Fourier* [un ejemplo de la cual es el lado derecho de (6)] a tal grado que se han escrito volúmenes completos.

Observación 1. El estudiante que haya leído el capítulo opcional ocho reconocerá los valores $\lambda = m\pi/L$, $m = 1, 2,$, como los *eigenvalores y* $b_m \operatorname{sen} m\pi x/L$, $m = 1, 2,.$, como las correspondientes eigenfunciones. El problema de determinar las constantes b_1 , b_2 , en la serie (6) no debería ser nuevo para el estudiante, puesto que hemos visto surgir estos problemas en conexión con las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville y funciones ortogonales. Puesto que estos tópicos surgieron mucho más tarde en el siglo XIX, y fueron muy probablemente aún inspirados en el trabajo de Fourier y otros, Fourier por supuesta tuvo que idearse su propio esquema para determinar los coeficientes. El estudiante que no ha tenido la ocasión de leer el Capítulo ocho está así en una situación muy parecida en la que estuvo Fourier, y es interesante especular cómo él ideó la técnica.

Primero, puesto que senos y cosenos tienen mucho en común y las series seno coseno surgieron en varias variaciones del problema de Fourier, Fourier tuvo que considerar el problema más general de expansión de funciones en series teniendo la forma

$$A + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \cdots$$

la cual a menudo denotaremos brevemente usando la notación sumatoria como

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{7}$$

En este problema más general buscamos valores de las constantes A, a_n, b_n de modo que la serie (7) sea igual a una función dada, digamos f(x). Puesto que senos y cosenos son funciones periódicas, Fourier concluyó que f(x) debería ser también periódica. Para determinar el período se puede emplear el siguiente razonamiento. Las funciones $\operatorname{sen}(\pi x/L)$ y $\cos(\pi x/L)$ tienen períodos $2\pi/(\pi/L) = 2L$, o $4L, 6L, .$ Similarmente, $\operatorname{sen}(2\pi x/L)$ y $\cos(2\pi x/L)$ tienen períodos $2\pi/(2\pi/L) = L$, o $2L, 3L, .$ En general, las funciones sen $(n\pi x/L)$ y $\cos(n\pi x/L)$ tienen ambas períodos igual a $2\pi/(n\pi L) = 2L/n$, o $4L/n$, $6L/n, . , 2nL/n = 2L, .$ Se ve así que *todos* los términos tienen un período común $2L$. Esto es realmente *el menor* período para todos los términos. Podemos decir, entonces, que si la serie infinita (7) es igual a f(x) donde x está en un intervalo de longitud $2L$, también se cumplirá para cualquier otro intervalo, con tal que f(x) tenga período $2L$. Nos restringiremos a menudo al intervalo $-L < x < L$, aunque nuestros resultados podrán extenderse a cualquier otro intervalo de longitud $2L$.

Fourier ideó un método ingenioso para determinar las constantes en (7) para las cuales esa serie se supone es igual a f(x). Cómo él llegó al método es, como dicen, una larga historia y no podemos entrar en detalles aquí.* El método final es, sin embargo, muy simple. Consiste de las siguientes etapas:

1. Asuma que $$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \tag{8}$$

Para hallar A integre ambos lados de (8) de $-L$ a L para obtener

$$\int_{-L}^{L} A\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\right) = \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

*Para un interesante recuento vea [17] También vea [10].

Entonces $\int_{-L}^{L} A\,dx = 2LA = \int_{-L}^{L} f(x)dx$ ó $A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$ (9)

puesto que todas las otras integrales son cero.

2. Para hallar a_n, $n = 1, 2, \ldots$, multiplique ambos lados de (8) por cos $(k\pi x/L)$ y luego integre de -L a L para obtener

$$\int_{-L}^{L} A\cos\frac{k\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

$$= \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx \tag{10}$$

Usando
$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases}0, & n \neq k\\ L, & n = k\end{cases} \tag{11}$$

y
$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \tag{12}$$

vemos que todos los términos a la derecha de (10) con una excepción esto es, $n = k$, son cero.* Tenemos así

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \tag{13}$$

3. Para hallar b_n, $n = 1, 2, \ldots$, multiplique ambos lados de (8) por sen $(k\pi x/L)$ y luego integre de $-L$ a L para obtener

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \tag{14}$$

al usar (12) y la análoga de (ll) para senos dada por

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases}0, & n \neq k\\ L, & n = k\end{cases} \tag{15}$$

Observación 2. El estudiante que ha leído el Capítulo ocho observará que (ll), (12) y (15) son simplemente enunciados de la ortogonalidad de las funciones en el intervalo $-L$ a L.

Es interesante observar que si formalmente colocamos $n = 0$ en (13) obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{16}$$

Pero encontramos en (9) que $$A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{17}$$

Comparando (16) y (17), $$A = \frac{a_0}{2} \tag{18}$$

*Para mostrar esto use las fórmulas trigonométricas
$\operatorname{sen} A\cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$, $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

Una ventaja de esta observación es que no necesitamos tener *tres* fórmulas separadas para A, a_n, b,, sino en vez necesitamos solamente dos, (13) y (14), con *tal* que recordemos que $A = a_0/2$. También es evidente que (13) y (14) son parecidas excepto que una tiene un coseno mientras que la otra tiene un seno.

Estos resultados son de tal importancia en la solución de problemas de valor de frontera por series de Fourier que los pondremos en la forma de un

Resumen. Si se requiere obtener la expansión de una función dada *f(x)*, $-L < x < L$, en una serie de Fourier de modo que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{19}$$

entonces los coeficientes de Fourier a_n, b_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{20}$$

Puesto que *f(x)* tiene período $2L$, estos coeficientes se pueden escribir más generalmente como

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\,sen\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{21}$$

donde c es cualquier número real. La selección especial c = -L da entonces (20). Otro caso que puede surgir en la práctica es c = 0. Una simplificación resulta en el caso de que la serie involucre sólo términos seno o sólo términos coseno, como sigue:

Término seno. En este caso *f(x)* es una *función impar,* esto es, $f(-x) =$ -f(x), y podemos mostrar fácilmente de (20) que

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{22}$$

Término coseno. En este caso *f(x)* es una *función par,* esto es, $f(-x) =$ *f(x), y* podemos mostrar fácilmente de (20) que

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad b_n = 0 \tag{23}$$

Las series (19) con coeficientes (22) y (23) se conocen, respectivamente,como *serie seno de Fourier y serie coseno de Fourier* para *f(x).* Como claramente se ve de las fórmulas (22) y (23), necesitamos solamente conocer la función *f(x)* para $0 < x < L$, los valores correspondientes para- $L < x < 0$ se determinan *automáticamente* una vez conozcamos si la función es impar 0 par.

Para ilustrar el uso de estos resultados, completemos la solución al problema de Fourier. Como se indicó en la página 583, para hacer esto debemos hallar b_n para así obtener la expansión.

$$100 = b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

en el intervalo $0 < x < L$. Puesto que esto sólo contiene términos seno, usamos (22) para obtener

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L 100\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{200}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

o $\quad b_1 = \frac{400}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{400}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{400}{5\pi}, \quad b_6 = 0, \ .$

Así (5) llega a ser

$$U(x, t) = \frac{400}{\pi}\left(e^{-\kappa\pi^2t/L^2}\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L} + \tfrac{1}{3}e^{-9\kappa\pi^2t/L^2}\,\mathrm{sen}\frac{3\pi x}{L} + \tfrac{1}{5}e^{-25\kappa\pi^2t/L^2}\,\mathrm{sen}\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right) \tag{24}$$

Esto es solamente una solución formal, puesto que todavía tenemos que mostrar que ella satisface la ecuación diferencial dada y las condiciones de frontera, y también tenemos que mostrar que si es una solución ésta es única. Todo esto se puede mostrar, pero los detalles son difíciles y se omiten aquí.*

Como otra variación del problema de Fourier consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Una barra metálica de 100 cm de longitud tiene los extremos $x = 0$ y $x = 100$ mantenidos a 0" C. Inicialmente, la mitad de la barra está a 60" C, mientras que la otra mitad está a 40" C. Asumiendo una difusividad de 0,16 unidades cgs y que la superficie de la barra está aislada, encuentre la temperatura en toda parte de la barra al tiempo t.

Formulación matemática. La ecuación de conducción del calor es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0{,}16\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{25}$$

donde $U(x, t)$ es la temperatura en el sitio x al tiempo t. Las condiciones de frontera son

$$U(0, t) = 0, \qquad U(100, t) = 0, \qquad U(x, 0) = \begin{cases} 60, & 0 < x < 50 \\ 40, & 50 < x < 100 \end{cases} \tag{26}$$

Solución Asumiendo una solución $U = XT$, en (25) encontramos

$$XT' = 0{,}16X''T \quad \text{o} \quad \frac{T'}{0{,}16T} = \frac{X''}{X}$$

Haciendo estos iguales a una constante la cual, como nuestras experiencias previas indicaban era negativa, y a la cual denotamos por tanto por $-\lambda^2$, encontramos

$$T' + 0{,}16\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0$$

y así obtenemos la solución $U(x, t) = e^{-0.16\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x)$.

*Ver por ejemplo [5]

Las dos primeras condiciones de (26) muestran que $A = 0$, $\lambda = n\pi/100$. Para satisfacer la última condición usamos la superposición de las soluciones para obtener

$$U(x, t) = b_1 e^{-16\cdot 10^{-6}\pi^2 t}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{100} + b_2 e^{-64\cdot 10^{-6}\pi^2 t}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{100} + \cdots \tag{27}$$

Para $t = 0$,
$$b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{100} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{100} + \quad = U(x, 0)$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{100}\int_0^{100} U(x, 0)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}\,dx \\ &= \frac{2}{100}\int_0^{50} (60)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}\,dx + \frac{2}{100}\int_{50}^{100} (40)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}\,dx \\ &= \frac{120}{n\pi}\left(1 \quad \cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) \end{aligned}$$

Así $b_1 = 200/\pi$, $b_2 = 40/\pi, . ,$ y (27) llega a ser

$$U(x, t) = \frac{200}{\pi} e^{-16\cdot 10^{-6}\pi^2 t}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{100} + \frac{40}{\pi} e^{-64\cdot 10^{-6}\pi^2 t}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{100} + \cdots$$

la cual se puede mostrar que es una solución única.

1.2 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRONTERAS AISLADAS

En el problema de Fourier, ambos extremos de la barra metálica se mantuvieron a 0” C. Sin embargo, también son posibles otras condiciones en los extremos. Por ejemplo, los extremos se pueden aislar de modo que el calor no pueda ni escapar ni entrar por los extremos. Sin embargo, esto conduce a un problema algo trivial, puesto que si la barra inicialmente tiene una temperatura de 100” C y si el calor no puede escapar ni entrar por los extremos o por la superficie, entonces la temperatura claramente permanecerá a 100” C en todo tiempo. Para hacer un problema no trivial tendríamos que asumir que la temperatura inicial no es constante. Asumamos por tanto que la barra está aislada en ambos extremos como también en la superficie, pero que la distribución de la temperatura inicial está especificada por alguna función f(x) donde $0 < x < L$.

Formulación matemática. La ecuación diferencial para este problema es, como en el problema de Fourier, la ecuación de conducción de calor unidimensional

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{28}$$

Debemos ahora expresar matemáticamente las condiciones de aislamiento en los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la barra. Para ello recordemos de la ecuación (15), página 575, que la cantidad de calor que atraviesa el extremo $x = 0$ es proporcional a la derivada parcial de la temperatura U con respecto a x en $x = 0$, esto es, $U_x(0, t)$. Así, si el extremo $x = 0$ está aislado, significa que ningún calor atraviesa este extremo, de modo que $U_x(0, t) = 0$. En forma similar, la formulación matemática de la condición de que $x = L$ esté aislado es $U_x(L, t) = 0$. Combinando éstas con la condición de que la temperatura inicial está dada por f(x), tenemos las siguientes condiciones de frontera

$$U_x(0, t) = 0, \qquad U_x(L, t) = 0, \qquad U(x, 0) = f(x) \tag{29}$$

Solución El problema de valor de frontera consiste en determinar aquella solución de (28) que satisfaga las condiciones (29). Usando el método de separación de variables como en la página 582, llegamos a la solución de (28) dada por

$$U(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x) \tag{30}$$

Para satisfacer la primera condición en (29), diferencie (30) con respecto a x y obtenga

$$U_x(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(-A\lambda \operatorname{sen} \lambda x + B\lambda \cos \lambda x)$$

Entonces tenemos $$U_x(0, t) = B\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} = 0$$

de modo que $B = 0$ y $$U(x, t) = Ae^{-\kappa\lambda^2 t} \cos \lambda x \tag{31}$$

Para satisfacer la segunda condición en (29), diferencie (31) con respecto a x para obtener

$$U_x(x, t) = -A\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$$

de modo que $$U_x(L, t) = -A\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda L = 0$$

o $$\operatorname{sen} \lambda L = 0, \qquad \lambda L = n\pi, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y así $$U(x, t) = Ae^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{32}$$

Para satisfacer la última condición en (29), debemos usar el principio de superposición para llegar a la posible solución

$$U(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{33}$$

La última condición produce entonces

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{34}$$

de la cual podemos concluir que (vea (23), página 586,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{35}$$

Usando éstas en (33) produce la solución requerida. Como un ejemplo de este tipo, considere el siguiente

Trabaje el Ejemplo ilustrativo 1 si los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados en vez de estar mantenidos a 0” C.

Solución Podríamos proceder como antes, esto es, usar separación de variables, satisfaciendo las varias condiciones, etc., pero puesto que ya tenemos la solución requerida en (33) con coeficientes (35), sólo necesitamos adaptar aquella solución usando

$$L = 100, \qquad \kappa = 0.16, \qquad f(x) = \begin{cases} 60, & 0 < x < 50 \\ 40, & 50 < x < 100 \end{cases}$$

En tal caso, si $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$a_n = \frac{2}{100}\int_0^{50} 60 \cos\frac{n\pi x}{100}\,dx + \frac{2}{100}\int_{50}^{100} 40 \cos\frac{n\pi x}{100}\,dx = \frac{40}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

y

$$a_0 = \frac{2}{100}\int_0^{50} 60\,dx + \frac{2}{100}\int_{50}^{100} 40\,dx = 100$$

Así

$$U(x, t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{40}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) e^{-16\cdot 10^{-6} n^2\pi^2 t} \cos\frac{n\pi x}{100} \tag{36}$$

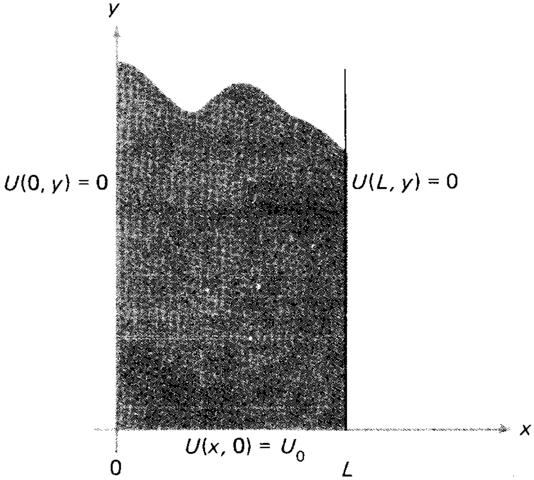


Figura 13.1

1.3 TEMPERATURA DE ESTADO ESTACIONARIO EN UNA PLACA SEMI-INFINITA

Considere una placa metálica delgada rectangular como se muestra en la Figura 13.1 cuyo ancho es L y cuya longitud es tan grande comparada con su ancho que para todos los propósitos prácticos se puede considerar infinita. Asumamos que los lados infinitos se mantienen a 0” C y que la base de la placa (en el eje x) se mantiene a una temperatura constante U_0 ° C. Asumiremos también que las caras de la placa están aisladas de modo que el calor no puede entrar ni escapar de ellas. Buscamos determinar la temperatura de *estado estacionario* de la placa, esto es, la temperatura que es independiente del tiempo.

Formulación matemática. Puesto que este es un problema de conducción de calor en dos dimensiones donde la temperatura depende sólo de x y y y no del tiempo t, la ecuación diferencial parcial requerida está dada por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{37}$$

Las condiciones de frontera están dadas por

$$U(0, y) = 0, \qquad U(L, y) = 0, \qquad U(x, 0) = U_0 \tag{38}$$

siendo las dos primeras las condiciones sobre los dos lados infinitos y la última la condición en la base. Puesto que es físicamente imposible que la temperatura llegue a ser infinita en todo punto de la placa, asumiremos también que $U(x, y)$ permanece *acotada,* esto es, existe alguna constante M, que no depende de x y y para la cual

$$|U(x, y)| < M \tag{39}$$

para todo x y y en la placa. Tales condiciones de acotamiento generalmente están asumidas implícitamente en problemas aplicados, aún si no se enuncian explícitamente.

Solución Para hallar una solución de (37), ensayemos el método de separación de variables, esto es, asumamos que $U = XY$, donde X depende sólo de x y Y depende sólo de y. Entonces (37) llega a ser

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{o} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \tag{40}$$

al dividir por XY. Haciendo cada lado de la segunda ecuación en (40) igual a $-\lambda^2$,

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad Y'' \quad \lambda^2 Y = 0 \tag{41}$$

o $$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x, \qquad Y = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y}$$

Entonces $$U(x, y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y})$$

Asumiendo que $\lambda > 0$, esta solución llega a ser no acotada cuando $y \to \infty$ violando así la condición (39). Para evitar esta "catástrofe", escogemos $c_3 = 0$ para que la solución llegue a ser

$$U(x, y) = e^{-\lambda y}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)$$

al colocar $A = c_1 c_4$, $B = c_2 c_4$.

De la primera condición de frontera en (38) tenemos

$$U(0, y) = Ae^{-\lambda y} = 0$$

lo cual da $A = 0$, y
$$U(x, y) = Be^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x \tag{42}$$

De la segunda condición de frontera en (38), tenemos

$$U(L, y) = Be^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda L = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \lambda L = 0, \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \; n = 1, 2, \ldots$$

dando la solución
$$U(x, y) = Be^{-n\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

De esto vemos por el principio de superposición que

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{43}$$

es también una solución. Usando la tercera condición de frontera en (38), vemos que

$$U(x, 0) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

de la cual por la técnica acostumbrada de series de Fourier tenemos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2U_0(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

Así
$$U(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{44}$$

o, escribiendo los primeros términos,

$$U(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \left(e^{-\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \tfrac{1}{3} e^{-3\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + \tfrac{1}{5} e^{-5\pi y/L} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} + \cdots \right) \tag{45}$$

Es interesante que esta serie se pueda sumar en forma cerrada por un procedimiento largo y tedioso descrito en el Ejercicio 1C, siendo el resultado final

$$U(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi x/L)}{\operatorname{senh}(\pi y/L)} \right] \tag{46}$$

Podemos verificar directamente qce ésta es una solución (ver Ejercicio 2C).

Interpretación. Usando esta solución podemos determinar la temperatura de estado estacionario en cualquier punto en la placa. En vez de esto, sin embargo, es de interés obtener las curvas de igual temperatura. o *curvas **isotérmicas*** como frecuentemente se llaman. Haciendo (46) igual a una constante, vemos que éstas están dadas por

$$\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} = \alpha \operatorname{senh} \frac{\pi y}{L} \tag{47}$$

donde α es un parámetro, de modo que (47) es una familia de curvas de un parámetro. Las trayectorias ortogonales de esta familia están dadas por (ver el Ejercicio 3C)

$$\cos\frac{\pi x}{L} = \beta\cosh\frac{\pi y}{L} \tag{48}$$

donde β es un parámetro. Estas son las *curvas de flujo* e indican las direcciones en las cuales el calor fluye para mantener las temperaturas estables.

1.4 INTERPRETACION DE **DIFUSION** DE LA CONDUCCION DE CALOR

Como ya hemos mencionado en el Capítulo doce, problemas que involucran difusión de una sustancia química, droga, etc., se pueden formular de una manera similar a uno que involucre conducción de calor puesto que ocurren las mismas ecuaciones diferenciales parciales. La única diferencia es que la temperatura U se interpreta como una densidad o concentración de la sustancia química, droga, etc. Así podemos resolver problemas de difusión en química, biología, etc., de la misma manera como hemos resuelto problemas de conducción de calor, siendo la única cuestión la interpretación de las variables.

Para ilustrar la solución de tal problema de difusión, consideremos un cilindro situado como se muestra en la Figura 13.2, el cual está hecho de algún material poroso a través del cual puede pasar un químico. Supongamos que la mitad del cilindro contiene el químico de concentración constante o densidad C_0 kg/m^3, mientras que la otra mitad tiene el mismo químico pero con concentración C_1 kg/m^3. A medida que pasa el tiempo el químico por supuesto se difundirá desde lugares de más alta concentración a lugares de más baja concentración, y finalmente se debería alcanzar algún equilibrio o condición de estado estacionario. La pregunta que naturaimente surge es, ¿cuál es la concentración del químico en cualquier parte del cilindro en cualquier tiempo? Supondremos por simplicidad que

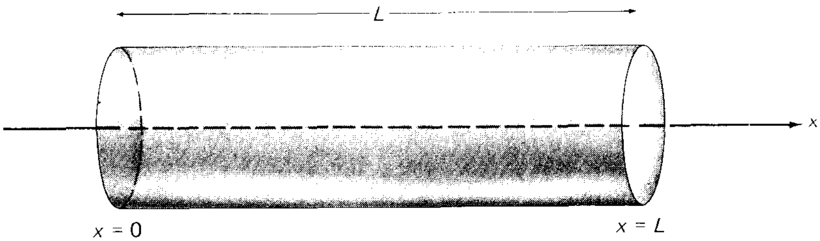


Figura 13.2

toda la superficie del cilindro, incluyendo los extremos, está recubierta con una sustancia a través de la cual no pasa el químico. La correspondiente interpretación de conducción de calor de esto es por supuesto que el cilindro entero está aislado de modo que el calor no puede escapar ni entrar.

Formulación matemática. Puesto que hemos visto que las leyes que gobiernan difusión son bastante análogas a aquellas que gobiernan la conducción de calor, la ecuación de difusión se puede escribir

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) = D\nabla^2 C \tag{49}$$

donde C o más específicamente $C(x, y, z, t)$ denota la concentración del químico en la posición (x, y, z) en cualquier tiempo t y D es una constante llamada la *constante de difusión.**

Para el presente problema asumamos que la difusión se lleva a cabo solamente en la dirección x así que no hay dependencia de y o de z. Entonces (49) llega a ser

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{50}$$

donde $C = C(x, t)$. Puesto que la concentración del químico está dada por C_0 en la mitad del cilindro y C_1 en la otra mitad, obtenemos la condición de frontera

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_0, & 0 < x < L/2 \\ C_1, & L/2 < x < L \end{cases} \tag{51}$$

El hecho de que el químico no se pueda difundir a través de la parte convexa de la superficie cilíndrica ya se ha considerado en la ecuación (50). Para expresar que el químico no se puede difundir a través de los extremos $x = 0$ y $x = L$, imponemos las condiciones

$$C_x(0, t) = 0 \qquad C_x(L, t) = 0 \tag{52}$$

Esto es porque, como en el caso del flujo de calor, la cantidad $-D\,\partial C/\partial x$ representa el flujo del químico a través de un plano perpendicular al eje x en la posición x, y esto es cero cuando no hay químico cruzando el plano.

Nuestro problema de valor de frontera consiste así de la ecuación diferencial parcial (50) a resolverse sujeto a las condiciones (51) y (52) y por supuesto a la condición de acotamiento, la cual siempre se sobreentiende y no necesitamos enunciarla explícitamente.

Solución Como ya hemos visto varias veces antes, una solución de (50) obtenida por el método de separación de variables está dada por

$$C(x, t) = e^{-D\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x)$$

Puesto que $$C_x(x, t) = e^{D\lambda^2 t}(-A\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda x + B\lambda\cos\lambda x)$$

las condiciones de frontera (52) requieren que

$$C_x(0, t) = B\lambda e^{-D\lambda^2 T} = 0, \qquad C_x(L, t) = e^{-D\lambda^2 T}(-A\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda L + B\lambda\cos\lambda L) = 0$$

de donde $\qquad B = 0 \quad$ y $\quad \mathrm{sen}\,\lambda L = 0$

*Usamos D en vez de κ, reservando esta última para la conducción de calor esto es, $$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, 3,$$

Así $$C(x, t) = Ae^{-n^2\pi^2 Dt/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{53}$$

La superposición de soluciones teniendo la forma (53) conduce a la solución

$$C(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n e^{-n^2\pi^2 Dt/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{54}$$

La condición de frontera (51) lleva entonces a requerir

$$C(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Por los métodos de las series de Fourier tenemos así

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L C(x, 0)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} C_0\, dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} C_1\, dx = C_0 + C_1$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L C(x, 0)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} C_0 \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} C_1 \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{2(C_0 - C_1)}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

para $n = 1, 2, .$ Sustituyendo éstas en (54) produce la solución

$$C(x, t) = \tfrac{1}{2}(C_0 + C_1) + \frac{2(C_0 - C_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n} e^{-n^2\pi^2 Dt/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \tfrac{1}{2}(C_0 + C_1) + \frac{2(C_0 - C_1)}{\pi}\left[e^{-\pi^2 Dt/L^2}\cos\frac{\pi x}{L} - \tfrac{1}{3}e^{-9\pi^2 Dt/L^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right]$$

Interpretación. Cuando t crece la concentración en cualquier sitio tiende a la media $\frac{1}{2}(C_0 + C_1)$ de las concentraciones iniciales como podríamos haber esperado. El tiempo necesario para alcanzar un valor específico cercano a este valor de equilibrio o de estado estacionario depende de la constante de difusión. Entre más pequeña sea la constante de difusión, más tiempo se necesita.

EJERCICIOS A

1. Una barra metálica de 100 cm de longitud tiene sus extremos $x = 0$ y $x = 100$ mantenidos a 0” C. Inicialmente, la mitad derecha de la barra está a 0° C, mientras que la otra mitad está a 80” C. Asumiendo una difusividad de 0,20 unidades cgs y una superficie aislada, encuentre la temperatura en cualquier posición de la barra en cualquier tiempo.

2. Si la barra del ejercicio anterior tiene temperatura inicial $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0. & 0 < x < 40 \\ 100. & 40 < x < 60 \\ 0. & 60 < x < 100 \end{cases}$$

calcule la temperatura de la barra en cualquier tiempo.

3. Una barra metálica de 40 cm de longitud con una difusividad de 0,20 unidades cgs tiene su superficie aislada. Si los extremos se mantienen a 20” C y la temperatura inicial es 100” C, encuentre la temperatura de la barra en cualquier tiempo (Sugerencia: Disminuya todas las temperaturas en 20” C.)

4. Dé una analogía tridimensional del problema de Fourier. página 582.

5. Trabaje el problema de la página 590 si las aristas semi infinitas se aislan en vez de mantenerlas a 0” C.

EJERCICIOS B

1. (a) Una barra de difusividad κ cuya superficie está aislada y cuyos extremos están localizados en $x = 0$ y $x = L$ tiene una distribución de temperatura inicial f(x). Asumiendo que los extremos de la barra están aislados, determine la temperatura de la barra en cualquier tiempo. (b) Encuentre la temperatura de la barra si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2U_0x}{L}, & 0 < x \leqq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2U_0}{L}(L - x), & \dfrac{L}{2} \leqq x < L \end{cases}$$

2. Trabaje el Ejercicio 1 si un extremo está aislado, y el otro está a temperatura U_0.

3. Si la superficie de una barra metálica no está aislada sino que en vez irradia calor a un medio de temperatura constante U_0 de acuerdo a la ley de Newton de enfriamiento, la ecuación diferencial para el flujo de calor se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - c(U - U_0)$$

Asumiendo que los extremos de la barra de longitud L se mantienen a 0” C y la distribución de la temperatura inicial es f(x), mientras U_0 = 0” C, encuentre $U(x, t)$.

4. Dé una interpretación de difusión al (a) Ejercicio 1A; (b) Ejercicio 5A; (c) problema de la placa semi infinita en la página 590.

5. Una placa rectangular de dimensiones a y b, como se muestra en la Figura 13.3, tiene sus caras planas aisladas. Tres de sus aristas se mantienen a temperatura cero mientras que la cuarta se mantiene a la temperatura constante U_0, como se indica. en la figura. Muestre que la temperatura de estado estacionario esta dada por

$$U(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k\pi)\operatorname{sen}(k\pi x/a)\operatorname{senh}(k\pi y/a)}{k\operatorname{senh}(k\pi b/a)}$$

6. Trabaje el Ejercicio 5 si U_0 se remplaza por la distribución de temperatura f(x).

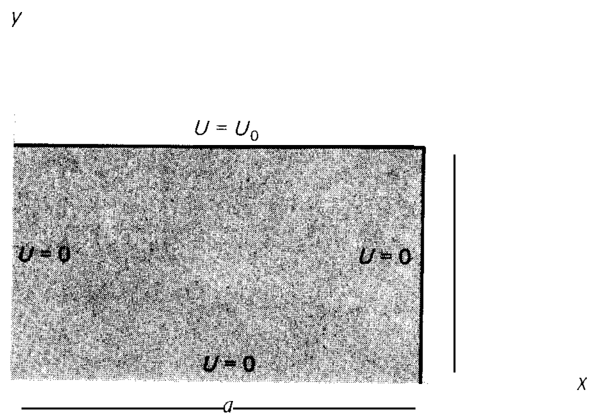


Figura 13.3

EJERCICIOS C

1. Deduzca el resultado (46) en la página ,592 a partir de (45). [*Sugerencia:* Escriba la serie de (45) como la parte imaginaria de

$$ue^{i\phi} + \tfrac{1}{3}(ue^{i\phi})^3 + \tfrac{1}{5}(ue^{i\phi})^5 + \cdots$$

donde $u = e^{-\pi y/L}$, $\phi = \pi x/L$ usando la fórmula de Euler (14) en la página 178. Luego use el hecho que para $v < 1$

$$v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} + \cdots = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

colocando $v = ue^{i\phi}$ y tomando la parte imaginaria.]

Muestre que (46) es una solución del problema de valor de frontera dado por (37) y (38), página 591. Muestre así que *(45)* es una solución. ¿Podría usted mostrar directamente que (45) es una solución? Discuta qué dificultades se tienen si las hay.

3. Obtenga la familia de curvas de flujo (48) a partir de las curvas isotérmicas (47). Dibuje algunas curvas de la familia y discuta la interpretación física.

2 Problemas de valor de frontera que involucran movimiento vibratorio

2.1 EL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

Si a una cuerda flexible fuertemente tensionada se le da algún desplazamiento inicial f(x) y luego se suelta, el problema de valor de frontera para el desplazamiento $Y(x, t)$ de la cuerda desde su posición de equilibrio en el eje x es (vea la página 571).

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(L, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad Y_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

donde L es la longitud de la cuerda. Asumiendo una solución de la forma $Y = XT$ donde X depende sólo de x y T depende sólo de t, (1) llega a ser

$$XT'' = a^2X''T \quad \text{o} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} \tag{3}$$

lo cual muestra que sirve el método de separación de variables. Haciendo cada lado de la segunda ecuación en (3) igual a $-\lambda^2$, tenemos

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \qquad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

o $\quad X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x, \qquad T = c_3 \cos \lambda at + c_4 \operatorname{sen} \lambda at$

Así $\quad Y(x, t) = XT = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 \cos \lambda at + c_4 \operatorname{sen} \lambda at) \qquad (4)$

Usando la primera condición de frontera en (2), vemos que $c_1 = 0$ de modo que (4) se convierte en

$$Y(x, t) = (c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 \cos \lambda at + c_4 \operatorname{sen} \lambda at)$$

De la segunda condición de frontera tenemos

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0, \text{ esto es, } \quad \lambda L = n\pi \text{ ó } \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

de modo que $\quad Y(x, t) = \left(c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\right)\left(c_3 \cos \frac{n\pi at}{L} + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L}\right) \qquad (5)$

Puesto que la tercera condición de frontera en (2) es algo complicada, pasamos a la cuarta condición de frontera más simple. Esto da $c_4 = 0$. Así la solución de (1) la cual satisface la primera, segunda, y cuarta condiciones en (2) está dada por

$$Y(x, t) = B \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} \tag{6}$$

donde $B = c_2 c_3$. Para satisfacer la tercera condición en (2), primero superponemos soluciones de la forma (6) para obtener la solución

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} \tag{7}$$

Luego la tercera condición de frontera en (2) requiere que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{8}$$

De esto tenemos usando el método de las series de Fourier

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{9}$$

y usando esto en (7) obtenemos la solución requerida

$$Y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} \tag{10}$$

La forma precisa de la serie depende por supuesto del desplazamiento inicial particular f(x) de la cuerda. Independiente de este desplazamiento inicial, sin embargo, es posible dar una interpretación interesante a los varios tipos de términos en la serie (10).

Consideremos el primer término en (10) correspondiente a $n = 1$. Aparte de una constante, este término tiene la forma

$$\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi a t}{L}$$

Si suponemos que f(x) es tal que sólo este término está presente en la serie, esto es, $f(x)$ tiene la forma sen $(\pi x/L)$ aparte de alguna constante multiplicativa, entonces inicialmente la cuerda tiene la forma que se muestra en la Figura 13.4, donde la escala vertical ha sido aumentada. A medida que t varía la cuerda tiende a vibrar como un todo alrededor de la posición de equilibrio con una frecuencia determinada a partir de cos $(\pi at/L)$ y dada por

$$f_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{11}$$

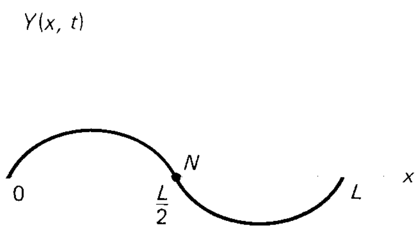
donde τ es la tensión y ρ es la masa por unidad de longitud (ver página 571). Este tipo de vibración se llama el *primer modo o modo fundamental de vibración*, y la correspondiente frecuencia (11) se llama la *frecuencia fundamental 0 primera armónica.*

Si $f(x)$ es tal que sólo el segundo término $n = 2$ en (10) está presente, esto es, $f(x)$ tiene la forma sen $(2\pi x/L)$ aparte de una constante multiplicativa, la cuerda aparecerá inicialmente como en la Figura 13.5. A medida que t varía la cuerda vibra de modo que la parte por encima del eje x inicialmente se mueve por debajo del eje mientras que al mismo tiempo la parte por debajo del eje x se mueve por encima de él, estando fijo el punto N en $x = L/2$, llamado un *nodo o punto nodal.* Este tipo de vibración se llama el *segundo modo de vibración* y la correspondiente frecuencia de vibración está dada por

$$f_2 = \frac{a}{L} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{12}$$

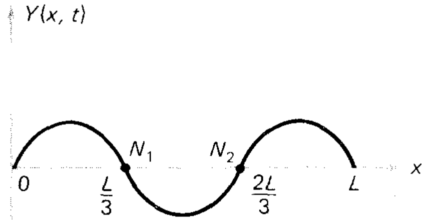
Primer modo

Figura 13.4



Segundo modo

Figura 13.5



Tercer modo

Figura 13.6

y se llama la *segunda armónica o primer sobre tono.* Note que la frecuencia es dos veces la frecuencia fundamental (ll).

Similarmente, si f(x) es tal que sólo el tercer término está presente en (10), la forma inicial de la cuerda es como se muestra en la Figura 13.6, y la cuerda vibra en tres secciones, los puntos N_1 o $L/3$ y N_2 o $2L/3$ representan los *nodos o puntos nodales,* los cuales son fijos. Este tipo de vibración se llama el *tercer modo de vibración,* y la correspondiente frecuencia está dada por

$$f_3 = \frac{3a}{2L} = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{13}$$

llamada la *tercera armónica o segundo sobre tono.* Note que esta frecuencia es tres veces la frecuencia fundamental. Prosiguiendo con esto, el n-ésimo término en (10) representa el n-ésimo *modo de vibración* en el cual la cuerda vibra en n secciones con $n - 1$ puntos fijos o nodales. La frecuencia de esta vibración se llama la n-ésima armónica o el sobre tono $(n - 1)$ y está dada por

$$f_n = \frac{na}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{14}$$

la cual es n veces la frecuencia fundamental.

Observación 1. En la terminología del Capítulo ocho, las frecuencias (14) con n = 1, 2,. representan los *eigenvalores* (y algunas veces se llama *eigenfrecuencias),* mientras que los varios modos de vibración descritos en las figuras anteriores representan las *eigenfunciones.* Estos modos se llaman también *ondas suspendidas.*

Para un desplazamiento inicial arbitrario $f(x)$ de la cuerda, el movimiento es más complicado puesto que representa una combinación en general de todos los modos de vibración y por tanto de todas las frecuencias. Sin embargo, todas las frecuencias armónicas o sobre tonos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Cuando tal situación aparece en un sistema vibrante, como en un violín o piano, decimos que tenemos *música,* con tal de que se produzcan sonidos, esto es, que las frecuencias estén en un rango audible. Si un sistema vibrante produce sonidos cuyas frecuencias no son múltiplos enteros de alguna frecuencia fundamental, decimos que tenemos *ruido.* Como veremos más tarde, tal situación prevalece cuando por ejemplo tenemos una piel de tambor circular que se pone a vibrar al golpearla.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Trabaje el problema de la cuerda dado en la página 569.

Solución Como se ve en las páginas 571-572, el problema de valor de frontera está dado por

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$Y(0, t) = 0, \; Y(L, t) = 0, \; Y(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 \leqq x \leqq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2h(L - x)}{L}, & \dfrac{L}{2} \leqq x \leqq L \end{cases}, \quad Y_t(x, 0) = 0 \tag{16}$$

Podríamos usar el método de separación de variables en la ecuación (15) y proceder a satisfacer las condiciones de frontera (16). Sin embargo, puesto que esto ya se hizo en la página 599 para el desplazamiento inicial f(x), sólo necesitamos usar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L} & 0 \leqq x \leqq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2h(L - x)}{L}, & \dfrac{L}{2} \leqq x \leqq L \end{cases} \tag{17}$$

En tal caso tenemos de (9) y (10), página 598,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2hx}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2h(L-x)}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

de modo que
$$Y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} \tag{18}$$

o
$$Y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi at}{L} + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi at}{L} + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi at}{L} + \cdots\right]$$

Este resultado muestra que para una cuerda alzada en el centro sólo están presentes los modos impares de vibración y las armónicas impares asociadas.

2.2 LA CUERDA VIBRANTE CON AMORTIGUAMIENTO

Desde un punto de vista real el modelo matemático que conduce a la solución de la cuerda vibrante acabada de obtener falla puesto que la vibración continúa indefinidamente, mientras que en realidad debería cesar gradualmente. La situación es algo análoga al resorte vibrante del Capítulo cinco y nos lleva a introducir un término de amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea de la cuerda. Si esto se hace, la ecuación diferencial para el movimiento llega a ser

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial Y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{19}$$

donde llamamos a β la *constante de amortiguamiento* como en el caso del resorte. Si usamos el método de separación de variables en (19), esto es, haciendo $Y = XT$, encontramos

$$XT'' + \beta XT' = a^2 X''T \quad o \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} + \frac{\beta T'}{a^2 T} \tag{20}$$

Haciendo cada lado de la última ecuación igual a $-\lambda^2$ se obtiene

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad T'' + \beta T' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

o $\qquad X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x, \qquad T = e^{-\beta t/2}(c_3 \cos \omega t + c_4 \operatorname{sen} \omega t)$

donde

$$\omega = \sqrt{\lambda^2 a^2 - \beta^2/4} \tag{21}$$

Entonces una solución de (19) está dada por

$$Y(x, t) = XT = e^{-\beta t/2}(c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 \cos \omega t + c_4 \operatorname{sen} \omega t) \tag{22}$$

Busquemos ahora aquella solución que satisfaga las mismas condiciones de frontera (16) para la cuerda sin amortiguamiento. Usando la primera condición de frontera en (16) conduce a $c_1 = 0$ y

$$Y(x, t) = c_2 e^{-\beta t/2} \operatorname{sen} \lambda x (c_3 \cos \omega t + c_4 \operatorname{sen} \omega t) \tag{23}$$

Usando la segunda condición de frontera en (16) conduce a

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0 \quad o \quad \lambda L = n\pi, \text{esto es,} \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0.\ 1,\ 3.$$

y

$$Y(x, t) = c_2 e^{-\beta t/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} (c_3 \cos \omega t + c_4 \operatorname{sen} \omega t) \tag{24}$$

La última condición de frontera en (16) conduce a $c_4 = 0$ y

$$Y(x, t) = B e^{-\beta t/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \sqrt{\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}\, t \tag{25}$$

donde hemos hecho $B = c_2 c_3$ y usado el valor ω dado en (21) con $\lambda = n\pi/L$. Para satisfacer la tercera y condición final en (16), superponemos las soluciones (25) para encontrar

$$Y(x, t) = e^{-\beta t/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \sqrt{\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}\, t \tag{26}$$

de modo que la tercera condición de frontera conduce a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

de donde $$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

la cual es idéntica con (9) para el caso no amortiguado. Como un chequeo podemos notar que, para $\beta = 0$, (26) se reduce a (10) como debería ser.

Hay varias interpretaciones importantes que podemos darle a (26). Primero, debido al factor de amortiguamiento $e^{-\beta t/2}$ las sucesivas oscilaciones de la cuerda tienden a disminuir con el tiempo, dependiendo el grado de rapidez de la magnitud de β, entre más grande sea el valor de β, mayor la disminución. Segundo, la frecuencia de la n-ésima armónica es una función de la constante de amortiguamiento y está dada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n^2\pi^2\tau}{L^2\rho} - \frac{\beta^2}{4}} \tag{27}$$

Se debería notar que estas frecuencias son más pequeñas que las correspondientes frecuencias en el caso no amortiguado. Los modos normales como se describen en las figuras en las páginas 599-600 aún existen, pero sus frecuencias son más pequeñas y sus amplitudes decrecen con el tiempo. Se debería notar que para que el análisis anterior sea válido la frecuencia fundamental obtenida al colocar $n = 1$ en (27) debe ser real, lo cual implica que

$$\beta < \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Esto significa que el amortiguamiento no debe ser demasiado grande si se quiere que la frecuencia fundamental aparezca.

2.3 VIBRACIONES DE UNA VIGA

Suponga que tenemos una viga delgada localizada en el eje x con sus extremos en $x = 0$ y $x = L$. Si ponemos la viga a vibrar en la dirección del eje x al golpear el extremo $x = 0$ con un martillo, por ejemplo, decimos que la viga ***vibra longitudinalmente*** o sufre ***vibraciones longitudinales.*** Si denotamos el ***desplazamiento longitudinal*** de cualquier sección transversal al tiempo t desde su posición de equilibrio en x por $Y(x, t)$, no es difícil mostrar (ver el Ejercicio 9C) que la ecuación diferencial para el movimiento, asumiendo pequeñas vibraciones está dada por la misma ecuación diferencial como aquella para el resorte vibrante, esto es,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{28}$$

En este caso a es una constante dada por

$$a^2 = \frac{E}{\rho} \tag{29}$$

donde E es el módulo de Young y ρ es la densidad o masa por unidad de volumen. Resolviendo (28) sujeta a varias condiciones de frontera, muchos problemas que involucran vibraciones longitudinales de una viga se pueden trabajar, siendo idéntico el procedimiento con aquel para el resorte vibrante. Algunos problemas de este tipo se dan en los ejercicios.

Si la viga se pone a vibrar en una dirección perpendicular al eje x, tal como por ejemplo golpeando el lado con un martillo en vez de un extremo, decimos que la viga *vibra transversalmente* o sufre *vibraciones transversales*.

Observación 2. Nos podríamos haber referido a las vibraciones de una cuerda como *vibraciones transversales* puesto que ellas ocurren en una dirección perpendicular al eje x, y esto es de hecho la terminología usada por algunos autores. Hemos evitado tal terminología en conexión con la cuerda vibrante porque no había necesidad de considerar vibraciones longitudinales.

La ecuación diferencial del movimiento para las vibraciones transversales de una viga se puede deducir usando las ideas del Ejercicio 8C, página 147 Si $Y(x, t)$ denota el desplazamiento transversal desde la posición de equilibrio de una sección transversal x en tiempo t encontramos, de nuevo asumiendo pequeñas vibraciones, que

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \tag{30}$$

En este caso a es una constante dada por

$$a^2 = \frac{EI}{A\rho} \tag{31}$$

donde EI es la rigidez flexural (ver página 138), A es el área de la sección transversal de la viga asumida constante, y ρ es la densidad. El estudiante debería observar las similitudes y diferencias de las dos ecuaciones (28) y (30). Varias aplicaciones que involucran (30) también se consideran en los ejercicios.

Es posible generalizar las ecuaciones (28) y (30) a las vibraciones de placas y conchas. Tales problemas se consideran en la *teoría de elasticidad** y tienen aplicaciones importantes a la mecánica, aeronáutica, e ingeniería civil.

EJERCICIOS A

1. Una cuerda fuertemente estirada tiene sus puntos extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$. Si se le da un desplazamiento inicial $f(x) = \alpha x(L - x)$ desde la posición de equilibrio , donde α es una constante y luego se suelta, encuentre el desplazamiento en cualquier tiempo $t > 0$. Discuta los modos de vibración.

2. Una cuerda de longitud de 2pies pesa 4onzas y se estira hasta que la tensión sea de 1 lb fuerza. El centro de la cuerda se alza $\frac{1}{4}$ pul por encima de la posición de equilibrio y luego se suelta. Encuentre el desplazamiento resultante de la cuerda como una función del tiempo, y describa los modos.

3. Una cuerda de longitud de 4 pies pesa 2 onzas y se estira hasta que la tensión sea de 4 lb fuerzas. Se asume que la cuerda yace sobre el eje x con un extremo fijo en $x = 0$ y el otro en $x = 4$. Si en $t = 0$ se le da a la cuerda una forma f(x) y luego se suelta, determine el desplazamiento resultante de la cuerda como una función del tiempo para los casos (a) $f(x) = 0{,}25 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4}$. (b) $f(x) = 0{,}1 \operatorname{sen} \pi x \quad 0{,}02 \operatorname{sen} 3\pi x$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0{,}02x, & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0{,}02(4 - x), & 2 \leqq x \leqq 4. \end{cases}$

*Ver por ejemplo [27]

4. Muestre que la constante a en la ecuación de onda tiene las dimensiones de velo. cidad.

5. Suponga que la cuerda del texto se alza en el punto $x = b$, una distancia pequeña h desde su posición de equilibrio, y luego se suelta. Muestre que el desplazamiento resultante está dado por

$$Y(x, t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 b(L-b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi a t}{L}$$

6. Trabaje el Ejercicio 1 si hay una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea.

7. Trabaje el Ejercicio 2 si hay un amortiguamiento numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea.

EJERCICIOS B

1. Una cuerda fuertemente estirada con puntos extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ esta inicialmente en equilibrio. En $t = 0$ se pone a vibrar al darle a cada uno de sus puntos extremos una distribución de velocidad definida por $g(x)$. (a) Establezca el problema de valor de frontera, y (b) muestre que el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda para cualquier tiempo $t > 0$ está dado por

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{L} \qquad \text{donde} \qquad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

2. Trabaje el Ejercicio 1 si $g(x) = \alpha x(L - x)$.

3. Una cuerda flexible está estirada fuertemente entre $x = 0$ y $x = L$. En $t = 0$ se golpea en la posición $x = b$, donde $0 < b < L$, de tal forma que la velocidad inicial v está dada por

$$v = \begin{cases} v_0/2\epsilon, & |x - b| < \epsilon \\ 0, & |x - b| \geq \epsilon \end{cases}$$

donde $\epsilon > 0$ se asume pequeño. Encuentre el desplazamiento resultante de cualquier punto x de la cuerda en tiempo t. Discuta el movimiento y examine el caso donde $\epsilon \to 0$.

4. Muestre que la solución al problema de la cuerda vibrante del texto dada por (15) en la página 601 se puede escribir en la forma

$$Y(x, t) = \tfrac{1}{2}\{f(x + at) + f(x - at)\}$$

donde $f(x)$ satisface ciertas "condiciones de extremos". Muestre cómo se puede llegar a esta solución (con frecuencia llamada la *solución de D'Alembert* en nombre del matemático quien primero la descubrió) usando el Ejercicio 2B, página 566.

5. (a) Muestre que $f(x + at)$ y $f(x - at)$ representan "ondas" viajando a la izquierda y a la derecha, respectivamente con velocidad a. (b) Usando esta interpretación y el Ejercicio 4 muestre cómo se puede describir la forma de la cuerda en varios tiempos. (*Sugerencia:* Debido a las "condiciones de extremos" del Ejercicio 4, las ondas se *reflejan* en los extremos.)

EJERCICIOS C

1. Si una viga delgada está fija en ambos extremos $x = 0$ y $x = L$, muestre que las frecuencias naturales de sus vibraciones longitudinales están dadas por

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Muestre que los modos normales para la viga del Ejercicio 1 están dados por c_n sen $n\pi x/L$, donde c_n es una función apropiada de t y encuentre esta función. ¿Cuál sería el desplazamiento longitudinal de cualquier punto de la viga en cualquier tiempo?

3. Suponga que una viga está fija en ambos extremos $x = 0$ y $x = L$. Si una fuerza axial constante (esto es, una fuerza en la dirección de la viga) se aplica en la mitad de la viga y luego se suelta, el desplazamiento inicial está dado por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leqq x \leqq L/2 \\ \alpha(L - x), & L/2 \leqq x \leqq L \end{cases}$$

donde la constante α depende de la magnitud de la fuerza. Muestre que el desplazamiento longitudinal resultante está dado por

$$Y(x, t) = \frac{4\alpha L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L} \cos \frac{(2n-1)\pi a t}{L}$$

donde $a = \sqrt{E/\rho}$. ¿Este resultado contradice el Ejercicio 1? Explique.

4. Muestre que si la fuerza axial del Ejercicio 3 tiene magnitud F_0 entonces $\alpha = F_0/2AE$, donde A es el área seccional transversal de la viga, y E es el módulo de Young.

5. Una viga de longitud L se mueve a la izquierda a lo largo del eje x con velocidad constante v_0. Repentinamente se detiene en $x = 0$ en tiempo $t = 0$. Muestre *que* las vibraciones longitudinales resultantes inducidas en la viga están dadas por

$$Y(x, t) = \frac{8v_0 L}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi a t}{2L} \qquad \text{donde } a = \sqrt{E/\rho}$$

6. Trabaje el Ejercicio 1 si (a) un extremo está fijo y el otro está libre; (b) ambos extremos están libres.

7. Una viga tiene sus extremos fijos o empotrados en concreto. (a) Muestre que si a la viga se le inducen vibraciones transversales las frecuencias naturales están dadas por

$$f_n = \frac{\beta_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $\beta = \beta_n$ son las raíces de la ecuación $\cos \beta L \cosh \beta L = 1$. (b) Muestre que existen infinitas raíces positivas. (*Sugerencia:* En los extremos el desplazamiento Y y la pendiente $\partial Y/\partial x$ deben ser cero. Para la segunda parte obtenga los gráficos de $y = \cos x$ y $y = 1/\cosh x$ y obtenga sus intersecciones.)

8. Una viga está simplemente apoyada *en* ambos extremos $x = 0$ y $x = L$ lo cual significa que el desplazamiento Y y el momento flexionante $-EI\partial^2 Y/\partial x^2$ son cero en ambos extremos. (a) Muestre que las frecuencias naturales para las vibraciones transversales de la viga están dadas por

$$f_n = \frac{\pi n^2}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{A\rho}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Si una fuerza transversal constante de magnitud F_0 se aplica a la viga en su punto medio y luego se suelta, muestre que el desplazamiento transversal resultante está dado por

$$Y(x, t) = \frac{2F_0 L^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L} \cos \frac{(2n-1)^2 \pi^2 a t}{L^2} \qquad \text{donde } a = \sqrt{EI/A\rho}$$

9. Deduzca la ecuación (28), página 603, para las vibraciones longitudinales de una viga como sigue. Considere una viga de área seccional transversal A y un elemento de volumen localizado entre x y $x + \Delta x$ (tal como el que se indica en la Figura 12.7 página 574). Denote por $Y(x, t)$, $Y(x + \Delta x, t)$ respectivamente los desplazamientos longitudinales de los extremos x y $x + \Delta x$ desde sus posiciones de equilibrio en cualquier tiempo y por $P(x, t)$, $P(x + \Delta x, t)$ las fuerzas por unidad de área (esfuerzos) actuando en estos extremos en la dirección longitudinal. (a) Muestre que la tensión en la localización x está dada por $\partial Y/\partial x$ y por tanto que el esfuerzo está dado por $P = E\,\partial Y/\partial x$ (ver página 144). (b) Use la ley de Newton para mostrar que aproximadamente

$$[P(x + \Delta x, t) - P(x, t)]A = \rho A\, \Delta x \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

donde ρ es la densidad. (c) Divida ambos lados del resultado en (b) por $A \Delta x$, tome el límite cuando $\Delta x \to 0$ y luego use el resultado en (a).

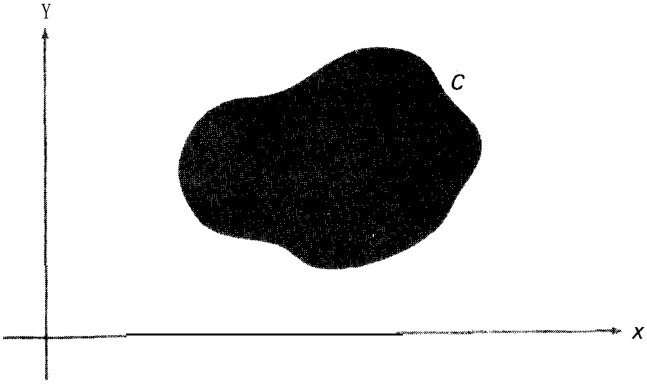


Figura 13.7

3 Problemas de valor de frontera que involucran la ecuación de Laplace

Como se dedujo en el Capítulo doce, página 577, el potencial eléctrico o gravitacional debido a una distribución de carga eléctrica o de masa satisface la ***ecuación de Laplace***

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Esta ecuación que involucra tres variables independientes es el caso tridimensional. Sin embargo, podemos tener la ecuación de Laplace en menos de tres dimensiones como en el caso bidimensional

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

o como una generalización en más de tres dimensiones, aunque en tales casos se pierden las visualizaciones geométricas. La ecuación de Laplace (1) *o* (2) se pueden también interpretar como una ecuación de conducción de calor para la determinación de temperatura de estado estacionario, esto es, temperatura independiente del tiempo. Así ya hemos en efecto trabajado un problema que involucra la ecuación de Laplace en la página 590, el cual recíprocamente se le puede dar una interpretación de potencial eléctrico o gravitacional.

Investigación avanzada en la teoría de la ecuación de Laplace o, como algunas veces se llama, la *teoría* de potencial revela el siguiente importante e interesante

Teorema 1. Sea $\mathscr{R}$ una región en el plano xy como en la Figura 13.7 acotada por una curva cerrada C la cual no se intersecta a sí misma en ninguna parte, con frecuencia llama una *curva cerrada simple.* Entonces existe una solución única V de la ecuación de Laplace en la región la cual toma valores prescritos en la frontera C, esto es, V es alguna función especificada en la curva C. El teorema se puede generalizar a regiones acotadas por superficies cerradas.

El problema de valor de frontera que busca determinar la solución V descrita en este teorema con frecuencia se refiere como un ***problema de Dirichlet.*** Una función que es una solución de la ecuación de Laplace con frecuencia se llama una ***función armónica.***

Desde un punto de vista práctico es fácil entender por qué el Teorema 1 debería ser cierto. Suponga que la región representa una placa metálica de ***espesor*** despreciable cuyas caras están aisladas de modo que el calor no puede entrar ni escapar a través de ellas. La especificación de V en la frontera C equivale a mantener esta frontera a alguna distribución de temperatura prescrita, y esperaríamos que cada punto de la placa finalmente alcanzara algún equilibrio único o temperatura de estado estacionario y permanecería a esta temperatura siempre que las condiciones se mantengan.

El Teorema **1** se puede extender a regiones no acotadas por procedimientos de límites apropiados. El problema de temperatura de estado estacionario resuelto en la página 590 ofrece un ejemplo. También es posible llegar a teoremas similares al Teorema **1** que involucren diferentes condiciones prescritas en la frontera C (tal como la especificación de la derivada), o que involucren la ecuación de Laplace en dimensiones mayores.

En muchas ocasiones ya hemos resuelto la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares en conexión con problemas de conducción de calor en estado estacionario en cuadrados, rectángulos, etc., y así hemos ilustrado el Teorema 1 para estos casos. Para presentar una ilustración de un tipo diferente aprovechamos esta oportunidad para resolver la ecuación de Laplace para un círculo. En particular, consideremos el siguiente

PROBLEMA PARA DISCUSION

Resuelva la ecuación de Laplace en una región $\mathscr{R}$ acotada por un círculo C de radio unitario (ver Figura 13.8) si V es una función especificada en la frontera C. Como se ve del Teorema 1 esto es un problema de Dirichlet para el cual existe una solución única.

Formulación matemática. Como bien podríamos esperar, las coordenadas rectangulares no son apropiadas para resolver problemas que involucran círculos, y por esta razón usamos coordenadas polares. Puesto que la relación entre coordenadas rectangulares (x, y) y coordenadas polares (r, ϕ) se expresan por las ecuaciones de transformación

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{3}$$

podemos transformar (2), usando los métodos aprendidos en cálculo, en la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \tag{4}$$

(Ver Ejercicio 5C, página 559.) En esta ecuación V es por supuesto una función de r y ϕ escrita $V(r, \phi)$.

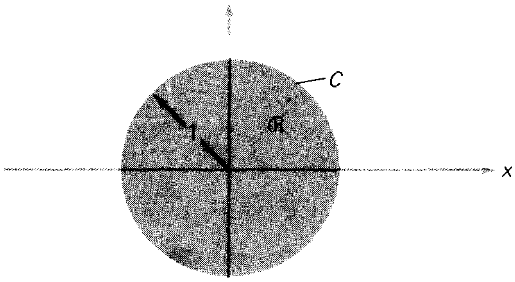


Figura 13.8

Para completar el problema de valor de frontera, necesitamos condiciones de frontera. Una condición involucra la especificación de V sobre el círculo C. Puesto que el círculo unitario está representado por $r = 1$, el valor de V en C está dado por $V(1, \phi)$, donde el ángulo ϕ es tal que $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$. Asumiendo que esta es alguna función prescrita de ϕ, digamos $f(\phi)$, tenemos la condición de frontera

$$V(1, \phi) = f(\phi) \tag{5}$$

en adición a esto, puesto que desearíamos que V sea acotada en todos los puntos de $\mathscr{R}$, tenemos

$$|V(r, \phi)| < M \tag{6}$$

para todo r y ϕ en $\mathscr{R}$, donde M es alguna constante independiente de r y ϕ.

Solución Encontremos soluciones de (4) que tengan variables separables. Para este propósito hacemos $V = R\Phi$, donde se asume R una función sólo de r y Φ es una función sólo de ϕ. Usando esto en (4) llega a ser

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \quad \text{o} \quad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \tag{7}$$

al dividir por $R\Phi$. Esta última ecuación se puede escribir con R en un lado y Φ en el otro en la forma

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{8}$$

Sin embargo, aunque el lado izquierdo depende sólo de r, el lado derecho depende de r y ϕ, de modo que no tenemos separadas las variables. La situación afortunadamente se remedia fácilmente al multiplicar ambos lados de (8) por r^2 para obtener

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{9}$$

Si ahora hacemos cada lado de (9) igual a λ^2, obtenemos las dos ecuaciones

$$r^2R'' + rR' - \lambda^2R = 0, \qquad \Phi'' + \lambda^2\Phi = 0 \tag{10}$$

La primera ecuación en (10) es una ecuación de Euler que puede resolverse como en la página 216. Como resultado las soluciones de (10) están dadas, respectivamente, por

$$R = c_1r^{\lambda} + c_2r^{-\lambda}, \qquad \Phi = c_3\cos\lambda\phi + c_4\operatorname{sen}\lambda\phi$$

si $\lambda \neq 0$, y
$$R = c_5 + c_6\ln r, \qquad \Phi = c_7 + c_8\phi$$

si $\lambda = 0$. Llegamos así a las posibles soluciones

$$(c_1r^{\lambda} + c_2r^{-\lambda})(c_3\cos\lambda\phi + c_4\operatorname{sen}\lambda\phi) \quad \text{y} \quad (c_5 + c_6\ln r)(c_7 + c_8\phi) \tag{11}$$

Ahora, es evidente que una solución debe estar acotada en $r = 0$. Tomando $\lambda \geqq 0$, esto requiere seleccionar $c_2 = 0$ y $c_6 = 0$ en (Il). Es claro que si cambiamos ϕ a $\phi + 2\pi$ en cualquier solución, la solución no debería cambiar puesto que los puntos (r, ϕ) y $(r, \phi + 2\pi)$ son lo mismo. Esta periodicidad de ϕ requiere que escogamos $c_8 = 0$ y λ sea un entero, esto es,

$$\lambda = n \qquad \text{donde} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \tag{12}$$

Nos podemos restringir así a las soluciones teniendo la forma

$$V(r, \phi) = r^n(A\cos n\phi + B\operatorname{sen}n\phi) \tag{13}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

Para satisfacer la condición de frontera (5), primero superponemos soluciones de la forma (13) correspondientes a $n = 0, 1, 2,$ para obtener la solución

$$V(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\phi + b_n\operatorname{sen}n\phi) \tag{14}$$

La condición de frontera (5) requiere entonces que

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\phi + b_n\operatorname{sen}n\phi) \tag{15}$$

Por el método de las series de Fourier vemos que esto produce los coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,\text{sen}\, n\phi\, d\phi \tag{16}$$

Así (14) con los coeficientes (16) da la solución requerida. Como una ilustración, consideremos el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) Encuentre aquella solución de la ecuación de Laplace dentro del círculo unitario $r = 1$ que tenga valores en la frontera dados por

$$f(\phi) = \begin{cases} V_0, & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \tag{17}$$

donde V_0 es una constante. (b) Dé dos interpretaciones físicas.

Solución (a) Usando (16) y (17), tenemos si $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_0 \cos n\phi\, d\phi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (0)\cos n\phi\, d\phi = 0$$

Si $n = 0$, tenemos
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_0\, d\phi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (0) d\phi = V_0$$

Similarmente, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_0\,\text{sen}\, n\phi\, d\phi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (0)\,\text{sen}\, n\phi\, d\phi = \frac{V_0(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

Entonces de (14) tenemos la solución requerida

$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right) r^n\,\text{sen}\, n\phi$$

o
$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi}\left[r\,\text{sen}\,\phi + \frac{r^3\,\text{sen}\, 3\phi}{3} + \frac{r^5\,\text{sen}\, 5\phi}{5} + \cdots\right] \tag{18}$$

(b) El problema tiene las siguientes dos interpretaciones:

(i) ***Interpretación de flujo de calor de estado estacionario.*** En este caso (18) representa la temperatura de estado estacionario en cualquier punto (r, ϕ) de la placa circular indicada en la Figura 13.7, la cual tiene espesor despreciable, caras aisladas, y donde la mitad superior de la frontera se mantiene a temperatura V_0 mientras que la mitad inferior se mantiene a temperatura cero.

(ii) ***Interpretación de potencial eléctrico o gravitacional.*** En este caso (18) representa el potencial eléctrico o gravitacional en cualquier punto (r, ϕ) dentro del círculo unitario debido a un sistema de cargas eléctricas o masas distribuidas de tal modo que la mitad superior de la frontera se mantiene al potencial V_0 mientras que la mitad inferior se mantiene al potencial cero (algunas veces referido como ***potencial de tierra).***

Es de interés e importancia que la serie (14) con coeficientes (16) se pueda sumar en forma cerrada. El resultado, conocido como la *fórmula de la integral de Poisson,* está dado por

$$V(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(w - \phi) + r^2} f(w)\,dw \tag{19}$$

El método de sumatoria como también problemas relacionados se dan en los ejercicios.

En el Ejemplo ilustrativo 1 encontramos el potencial dentro del círculo. Es natural preguntar si también podemos encontrar el potencial por fuera de este círculo unitario. Esto se puede hacer, como se ve en el siguiente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Encuentre el potencial por fuera del círculo unitario $r = 1$, dado que el potencial sobre el circulo es aquel del Ejemplo ilustrativo 1.

Solución En este caso no necesitamos acotamiento en $r = 0$ puesto que este no está en la región dada. Sin embargo, sí requerimos acotamiento para r infinito. Si $\lambda \geqq 0$, vemos de (11) que debemos tener $c_1 = 0$, $c_6 = 0$. También, como antes, debemos tener la condición (12) para asegurar la periodicidad de la solución como una función de ϕ. Así llegamos a las posibles soluciones

$$V(r, \phi) = r^{-n}(A \cos n\phi + B \operatorname{sen} n\phi)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Para satisfacer el potencial dado sobre el círculo, usamos el principio de superposición para obtener

$$V(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\phi + b_n \operatorname{sen} n\phi)$$

La condición de frontera requerida conduce entonces a

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \operatorname{sen} n\phi)$$

lo cual es lo mismo como en (15) del Ejemplo ilustrativo 1. Así los coeficientes a_n y b_n son los mismos a los ya obtenidos, lo cual lleva a la solución requerida

$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} \phi}{r} + \frac{\operatorname{sen} 3\phi}{3r^3} + \frac{\operatorname{sen} 5\phi}{5r^5} + \cdots\right] \tag{20}$$

Se debería notar que esto es lo mismo como en (18) con r remplazado por $1/r$.

Como en el Ejemplo ilustrativo 1, página 611, podemos dar a (20) una interpretación de temperatura de estado estacionario. Para dar tal interpretación, consideramos una placa conductora infinita (o prácticamente hablando, muy grande) representada por el plano xy con sus caras aisladas. Si una parte de esta placa representada por el interior de un círculo unitario se remueve de la placa, y si la distribución de temperatura dada por $f(\phi)$ se aplica a esta frontera, entonces la temperatura de estado estacionario en la placa esta dada por (20).

Observación *1*. El resultado obtenido en el Ejemplo ilustrativo 2 se puede considerar como un caso especial del Teorema 1, página 608, en el cual C

es la frontera de la región representada por $r > 1$, y así también tenemos en este caso un problema de Dirichlet.

Observación 2. El hecho de que (20) se obtiene de (18) al remplazar r por $1/r$ sugiere que la fórmula de la integral de Poisson (19) también se cumple para $r > 1$ si r se remplaza por $1/r$. Esto es cierto como se ve en el Ejercicio 6B.

Observación 3. El resultado (18) se puede expresar en forma cerrada por

$$\frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2r\,\mathrm{sen}\,\phi}{1 - r^2}\right) \tag{21}$$

Ver el Ejercicio 2B. El resultado (20) se obtiene de (21) remplazando r por $1/r$.

EJERCICIOS A

1. Encuentre el potencial (a) dentro y (b) fuera del círculo unitario $r = 1$ si el potencial sobre el círculo está dado por $f(\phi) = V_0$, $0 < \phi < \pi/2$; $-V_0$, $\pi/2 < \phi < \pi$; 0, $\pi < \phi < 2\pi$. Dé una interpretación de temperatura a este problema.

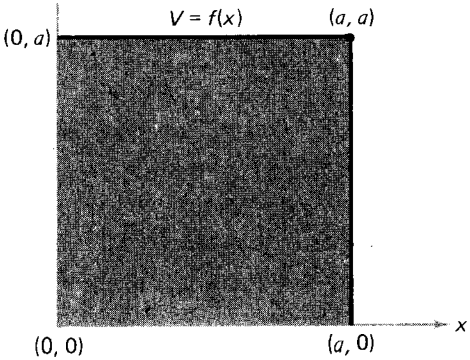


Figura 13.9

2. Un cuadrado de lado a (ver Figura 13.9) tiene tres aristas al potencial cero y la cuarta al potencial dado por $f(x) = V_0\,x/a$, $0 < x < a/2$; $V_0\,(a - x)/a$, $a/2 < x < a$. Muestre que el potencial en cualquier punto interior está dado por

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2n+1)\pi x/a\ \mathrm{senh}\,(2n+1)\pi y/a}{(2n+1)^2\,\mathrm{senh}\,(2n+1)\pi}$$

3. Verifique que (21) es una solución al Ejemplo ilustrativo 1, página 611, para el caso donde $0 < r < 1$.

4. Verifique que (21) con r remplazarlo por $1/r$ es una solución al Ejemplo ilustrativo 2, página 612, para el caso donde $r > 1$.

5. Trabaje los Ejemplos ilustrativos 1 y 2 si el círculo tiene radio c en vez de 1. Explique por qué el resultado se puede obtener simplemente remplazando r por r/c.

6. Muestre que la temperatura de estado estacionario en el centro de una placa circular es la temperatura promedio (media) de la frontera. Dé una interpretación que involucre potencial. Ilustre usando los resultados del (a) Ejemplo ilustrativo 1, página 611; (b) Ejercicio 1. [Sugerencia: Use (19) con $r = 0$.]

7. Verifique el el resultado del Ejercicio 6 si la temperatura de frontera es

(a) $f(\phi) = 100\operatorname{sen}^3 \phi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi,$ (b) $f(\phi) = \begin{cases} 50\cos\phi, & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$

EJERCICIOS B

1. Muestre que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(w - \phi) + r^2}\,dw = 1$ e interprete físicamente.

2. Deduzca (21) directamente de la fórmula de la integral de Poisson (19).

3. Una placa tiene la forma de una región anular acotada por dos círculos concéntricos de radio r_1 y r_2, respectivamente, como se indica en la Figura 13.10. Tomando $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, y asumiendo que las temperaturas de frontera están dadas, respectivamente, por

$$U_1 = 100\operatorname{sen}\phi, \qquad U_2 = 50\cos\phi, \qquad 0 < \phi < 2\pi$$

encuentre la temperatura de estado estacionario en cada punto de la placa. Interprete los resultados en términos de la teoría de potencial

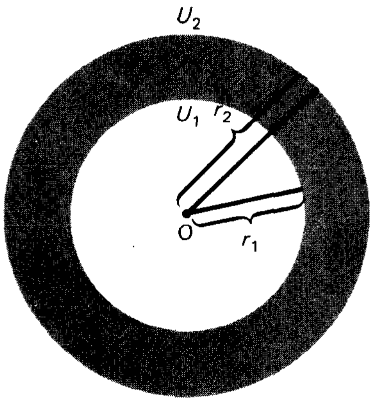


Figura 13.10

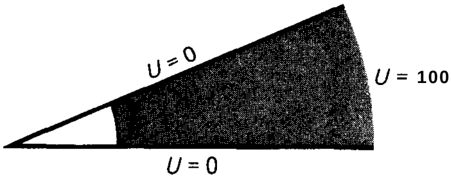


Figura 13.1 1

4. (a) Encuentre la temperatura de estado estacionario en una placa en la forma de un sector circular de radio unitario y ángulo $\pi/6$, como se indica en la Figura 13.11, si las temperaturas de los lados se mantienen a 0, la temperatura del arco circular se se mantiene a 100, y las caras planas están aisladas. (b) Describa un problema tridimensional teniendo la misma solución como (a). (c) ¿Cuál es la solución si el sector tiene radio c?

5. Trabaje el Ejercicio 4 si el sector tiene ángulo $\pi/2$.

6. Verifique la Observación 2.

1. Use el Ejercicio 1C, página 597, para sumar (18) y (20) en forma cerrada.
2. Deduzca la fórmula de la integral de Poisson (19) de los resultados (14) y (16) en las páginas 610-611. [Sugerencia: Cambie la variable muda en (16) de ϕ a w, sustituya los resultados en (14), y escriba como la integral de una serie la cual se puede sumar con el uso del Ejercicio 1C, página 597.]
3. Suponga que la temperatura (o potencial) $U(1, \phi)$ sobre el círculo unitario es tal que $|U(1, \phi)| \leqq M$, donde M es alguna constante. (a) Pruebe que $|U(r, \phi)| \leqq M$ para todos los puntos dentro del círculo. (b) Deduzca de (a) que la temperatura (o potencial) máxima o mínima no puede ocurrir dentro del círculo a menos que $U(r, \phi)$ sea constante en todo lugar.
4. Trabaje el Ejercicio 3B si la segunda condición de frontera se remplaza por la condición que la frontera $r = 2$ está aislada.
5. El resultado en el Ejercicio 6A de que la temperatura (o potencial) en el centro de un círculo es igual a la temperatura media de la frontera se puede extender a otros casos tal como un rectángulo. Usando esto en el Ejercicio 5B, página 596, con $a = b = 1$, obtenga la interesante serie

$$\frac{1}{\cosh(\pi/2)} - \frac{1}{3\cosh(3\pi/2)} + \frac{1}{5\cosh(5\pi/2)} \cdots = \frac{\pi}{8}$$

6. Obtenga una serie similar a la del Ejercicio 5 usando el Ejercicio 2A, página 613.

4 Problemas misceláneos

En las últimas tres secciones resolvimos algunos tipos de problemas de valor de frontera que requerían el uso de series de Fourier. En esta sección extendemos las técnicas o, como podemos decir, los “trucos del negocio” para trabajar varios problemas que son algo más complicados por la naturaleza de las condiciones de frontera o por las ecuaciones diferenciales parciales que involucran. Se debería enfatizar que los métodos se pueden aplicar a diferentes campos, de modo que, por ejemplo, no significa que porque usamos un problema en conducción de calor para ilustrar un procedimiento particular no se pueda también aplicarlo a algún, problema en vibraciones, teoría de potencial, etc.

4.1 LA CUERDA VIBRANTE BAJO LA GRAVEDAD

Al deducir la ecuación de una cuerda vibrante se despreciaron los efectos de la gravedad sobre la cuerda. Mostremos ahora cómo se pueden tener en cuenta tales efectos. Para ello consideremos la misma cuerda como se consideró en el Capítulo doce y supongamos que está horizontal a lo largo del eje x con sus extremos fijos como antes en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. También asumiremos como antes que a la cuerda se le da alguna forma o desplazamiento inicial, por ejemplo alzándola, y luego soltándola.

Si g es la aceleración debido a la gravedad, podemos entonces mostrar (Ejercicio 1A, página 578) que la ecuación diferencial parcial para la cuerda vibrante es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g \tag{1}$$

donde Y= $Y(x, t)$ es como costumbre el desplazamiento del punto x de la cuerda desde la posición de equilibrio (eje x) en cualquier tiempo t. Podemos escoger como condiciones de frontera las mismas usadas en la página 597,

$$Y(0, t) = 0, \qquad Y(L, t) = 0, \qquad Y(x, 0) = f(x), \qquad Y_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

Si asumimos de acuerdo al método de separación de variables que Y = XT en (1), es fácil encontrar que el método falla. No es difícil ver que la causa de esta falla es la presencia de g, y sería bueno si de alguna manera la pudiéramos eliminar. Después de pensar cómo se podria hacer esto, podemos llegar a la idea de cambiar o transformar la variable dependiente Y a alguna otra variable. Una posibilidad es hacer

$$Y(x, t) = W(x, t) + \psi(x) \tag{3}$$

donde $W(x, t)$ es una nueva variable dependiente y $\psi(x)$ es una función desconocida de x que nos gustaría determinar para eliminar g en (1). Si sustituimos (3) en (1), obtenemos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a^2\psi'' - g \tag{4}$$

Nuestro objetivo de eliminar g se consigue si escogemos ψ en (4) de modo que

$$\psi'' = \frac{g}{a^2} \quad \text{o} \quad \psi = \frac{gx^2}{2a^2} + \alpha x + \beta \tag{5}$$

donde α y β son constantes arbitrarias. En tal caso (4) llega a ser

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{6}$$

Las condiciones de frontera (2) en términos de W y ψ se convierte en

$$W(0, t) = -\psi(0), \qquad W(L, t) = -\psi(L), \qquad W(x, 0) = f(x) - \psi(x), \qquad W_t(x, 0) = 0 \tag{7}$$

La ecuación (6) tiene ahora la misma forma como la ecuación de la cuerda vibrante sin la gravedad, la cual por supuesto es separable. El único inconveniente ahora es que las dos primeras condiciones en (7) son complicadas por el hecho de que los lados derechos no son cero. Sin embargo, esto no ofrece dificultad porque podemos hacer el lado derecho cero a través de las selecciones

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi(L) = 0 \tag{8}$$

De hecho estas dos selecciones son justo las que necesitamos para determinar las dos constantes α y β en (5). Usando las condiciones (8) en (5) conduce a

$$\beta = 0, \; \frac{gL^2}{2a^2} + \alpha L = 0 \quad \text{esto es,} \quad \alpha = \frac{-gL}{2a^2}, \beta = 0$$

de modo que

$$\psi(x) = -\frac{gx(L - x)}{2a^2} \tag{9}$$

Nuestras condiciones de frontera (7) así llegan a ser

$$W(0, t) = 0, \qquad W(L, t) = 0, \qquad W(x, 0) = f(x) - \psi(x), \qquad W_t(x, 0) = 0 \quad (10)$$

Ahora el problema de valor de frontera consistente de (6) y (10) es exactamente igual al de la página 597, excepto que tenemos W en vez de Y y $f(x) - \psi(x)$ en vez de $f(x)$, de modo que de (10), página 598, vemos que la solución requerida es

$$W(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi a t}{L} \tag{11}$$

de la cual obtenemos el desplazamiento requerido $Y(x, t)$ usando (3). Pudimos por supuesto obtener (11) usando el método de separación de variables y satisfaciendo las condiciones de frontera como antes.

4.2 CONDUCCION DE CALOR EN UNA BARRA CON CONDICIONES NO CERO EN LOS EXTREMOS

En el enunciado del problema de Fourier en la página 582, los extremos de la barra en $x = 0$ y $x = L$ se mantuvieron ambos a 0° C. Desde un punto de vista *físico* no hay razón de no haber escogido otras dos condiciones, tales como por ejemplo el extremo $x = 0$ mantenido a 20° C y el extremo $x = L$ a 60° C. El problema de valor de frontera revisado en este caso sería

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{12}$$

$$U(0, t) = 20, \qquad U(L, t) = 60, \qquad U(x, 0) = 100 \tag{13}$$

Como antes, la separación de variables en la ecuación (12) produce la solución

$$U(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x) \tag{14}$$

pero estamos *matemáticamente* frustrados en nuestro intento de satisfacer aún la primera condición en (13) porque no se puede sacar ninguna conclusión a menos que el lado derecho en esta condición sea cero. Nuestra primera idea podría ser, ya que temperatura es un concepto relativo, introducir una nueva escala de temperatura en la cual todas las temperaturas centígradas se reduzcan en 20° C. Esto ayudaría con la primera condición, pero la segunda condición en (13) serviría sólo para frustrarnos de nuevo.

Sin embargo, el haber tenido éxito con el problema de la cuerda vibrante bajo la gravedad, nos podría llevar a tratar una transformación de la variable dependiente de $U(x, t)$ a $W(x, t)$, dada por

$$U(x, t) = W(x, t) + \psi(x) \tag{15}$$

donde nos gustaría determinar $\psi(x)$ de modo que satisfaga nuestras necesidades. Usando (15), el problema de valor de frontera anterior llega a ser

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \kappa \psi'' \tag{16}$$

$$W(0, t) = 20 - \psi(0), \qquad W(L, t) = 60 \quad \psi(L), \qquad W(x, 0) = 100 - \psi(x) \tag{17}$$

Puesto que nos gustaría que (16) sea tal que el método de separación de variables fuera aplicable, sería bueno escoger ψ de modo que

$$\psi'' = 0 \quad 0 \quad \psi = \alpha x + \beta \tag{18}$$

En tal caso (16) llega a ser
$$\frac{\partial W}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{19}$$

También sería bueno si los lados derechos de las dos primeras condiciones de (17) fueran ambos cero. Esto se conseguiría si escogiéramos ψ de modo que

$$\psi(0) = 20, \qquad \psi(L) = 60 \tag{20}$$

Afortunadamente, las dos constantes arbitrarias α y β son suficientes para satisfacer las dos condiciones en (20); usando estas condiciones en (18) da

$$\beta = 20, 60 = \alpha L + 20 \text{ esto es,} \qquad \alpha = \frac{40}{L}, \beta = 20$$

de modo que
$$\psi(x) = \frac{40x}{L} + 20 \tag{21}$$

Así las condiciones de frontera (17) pueden escribirse

$$W(0, t) = 0, \qquad W(L, t) = 0, \qquad W(x, 0) = 100 - \psi(x) \tag{22}$$

Para resolver el problema de valor de frontera dado por (19) y (22), usamos el mismo procedimiento como en el problema de Fourier. Así de (19) encontramos por el método de separación de variables la solución

$$W(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \text{ sen } Ax) \tag{23}$$

Las dos primeras condiciones en (22) entonces llevan a

$$A = 0, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3,$$

de modo que
$$W(x, t) = Be^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2} \text{ sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{24}$$

Para satisfacer la última condición en (22) primero usamos el principio de superposición en (24) para obtener la solución

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t\ L^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \tag{25}$$

Entonces de la última condición en (22) tenemos

$$100 - \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen} \frac{n\pi x}{L}$$

de modo que
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [\,100 - \psi(x)] \text{ sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{26}$$

Usando estos valores en (25) nos da $W(x, t)$, y la solución requerida $U(x, t)$ se obtiene entonces de (15).

Es interesante hallarle una interpretación física a la función ψ. Esto se puede lograr notando que después de haber transcurrido un tiempo largo, esto es, cuando $t \to \infty$, $W(x, t)$ tiende a cero así que $U(x, t)$ tiende a ψ (x). Esto significa que $\psi(x)$ ***es*** la ***temperatura de estado estacionario.*** Esto también es claro desde el punto de vista matemático, puesto que para una temperatura independiente del tiempo t, (12) se reduce a (18), lo cual conduce a (21).

4.3 LA CUERDA VIBRANTE CON VELOCIDAD INICIAL NO CERO

En el problema sobre la cuerda vibrante, resuelto en la página 598, la cuerda se le dió alguna forma inicial y luego se soltó de modo que la velocidad inicial se tomó como cero. Una pregunta que surge es cómo se modifica la solución en el caso de que la velocidad inicial no sea cero, mientras que las otras condiciones permanecen las mismas.

Formulación matemática. En tal caso la ecuación diferencial para el movimiento es, como antes,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{27}$$

y las condiciones de frontera son

$$Y(0, t) = 0, \qquad Y(L, t) = 0, \qquad Y(x, 0) = f(x), \qquad Y_t(x, 0) = g(x) \tag{28}$$

además de la acostumbrada sobre acotamiento.

Solución Como antes una solución que satisface las dos primeras condiciones en (28) es

$$Y(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left(A \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} + B\cos\frac{n\pi at}{L}\right) \tag{29}$$

La superposición de estas conduce a la solución

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left(a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} + b_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right) \tag{30}$$

Las dos últimas condiciones de frontera conducen entonces a exigir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{31}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L}\, a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{32}$$

Estas son dos series seno de Fourier para determinar a_n y b_n, respectivamente. Encontramos

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{33}$$

Y

$$\frac{n\pi a}{L} a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{o} \quad a_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{34}$$

Usando estos valores de a_n y b_n en (30) produce la solución deseada.

Otro método. En la página 598,resolvimos el problema de valor de frontera definido por (27) y (28) con $g(x) = 0$. El resultado está dado por (30) con b_n dado por (33) y $a_n = 0$. También es fácil resolver el problema de valor de frontera definido por (27) y (28) con $f(x) = 0$. El resultado, que dejamos al estudiante verificar (ver Ejercicio 7A), está dado por (30) con a_n dado por (34) con $b_n = 0$. Si denotamos estas dos soluciones, respectivamente, por $Y_1(x, t)$ y $Y_2(x, t)$, vemos que la solución $Y(x, t)$ para el caso $f(x) \neq 0$, $g(r) \neq 0$ es igual a la suma de las soluciones $Y_1(x, t)$ [para el caso $f(x) \neq 0$, $g(x) = 0$] y $Y_2(x, t)$ [para el caso $f(x) = 0$, $g(w) \neq 0$]. Una prueba de esto se obtiene fácilmente. Para ello suponga que $Y = Y(x, t)$ es una solución al problema de valor de frontera dado por (27) y (28). Haciendo $Y = Y_1 + Y_2$ y usando el subíndice t para denotar las derivadas parciales con respecto a t, de modo que $Y_{1t} = \partial Y_1/\partial t$, etc., el problema se puede escribir

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2}\right) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &Y_1(0, t) + Y_2(0, t) = 0, \qquad && Y_1(L, t) + Y_2(L, t) = 0,\\ &Y_1(x, 0) + Y_2(x, 0) = f(x), && Y_{1t}(x, 0) + Y_{2t}(x, 0) = g(x) \end{aligned} \tag{36}$$

Escojamos ahora Y_1 de modo que sea una solución al problema de valor de frontera

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \tag{37}$$

$$Y_1(0, t) = 0, \qquad Y_1(L, t) = 0, \qquad Y_1(x, 0) = f(x), \qquad Y_{1t}(x, 0) = 0 \tag{38}$$

Entonces sigue de (35) y (36) que Y_2 debe ser una solución al problema de valor de frontera

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} \tag{39}$$

$$Y_2(0, t) = 0, \qquad Y_2(L, t) = 0, \qquad Y_2(x, 0) = 0, \qquad Y_{2t}(x, 0) = g(x) \tag{40}$$

y esto completa la prueba requerida.

Observación. Esta técnica de "partir" un problema dado en un número de problemas diferentes usando ceros en lugares apropiados y luego sumar las varias soluciones de estos problemas más simples con frecuencia es referido también como el *método de superposición* de soluciones. Esta técnica también se puede usar en otros problemas tales como conducción de calor, teoría de potencial, etc., y por supuesto sólo es aplicable en casos que involucran ecuaciones diferenciales y condiciones lineales.

4.4 VIBRACIONES DE UNA PIEL DE TAMBOR CUADRADA: UN PROBLEMA QUE INVOLUCRA SERIES DOBLES DE FOURIER

En la página 572describimos un problema relacionado con las vibraciones de una piel de tambor cuadrada. La ecuación de estas vibraciones está dada por

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) \tag{41}$$

donde $Z(x, y, t)$ es el desplazamiento de cualquier punto (x, y) de la piel de tambor desde su posición de equilibrio (en el plano xy) en cualquier tiempo t, y a^2 es una constante que depende de la tensión y densidad de la piel de tambor. Asumiremos que la piel de tambor está situada como en la **Figura** 12.5, pagina 572, y que las aristas están fijas y son de longitud unitaria. Asumamos también que la piel de tambor se pone a vibrar al darle alguna forma inicial, como se describe por ejemplo por la superficie con ecuación $Z = f(x, y)$ y luego se suelta.

Formulación matemática La ecuación diferencial parcial para el movimiento está dada por (41). El hecho de que las aristas estén fijas implica tener cuatro condiciones de frontera

$$Z(0, y, t) = 0, \qquad Z(1, y, t) = 0, \qquad Z(x, 0, t) = 0, \qquad Z(x, 1, t) = 0 \tag{42}$$

El hecho de darle a la piel de tambor una forma inicial especificada conduce a

$$Z(x, y, 0) = f(x, y) \tag{43}$$

Finalmente, el hecho de soltar la piel. de tambor después de haberle dado esta forma nos dice que

$$Z_t(x, y, 0) = 0 \tag{44}$$

Estas condiciones se cumplen por supuesto para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $t > 0$. Además se es claro que Z debe estar acotada.

Solución Asuma que (41) tiene una solución separable de la forma $Z = XYT$, donde X, Y, T son funciones de x, y, t, respectivamente. Entonces sustituyendo en (41) se obtiene

$$XYT'' = a^2(X''YT + XY''T) \quad 0 \quad \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \tag{45}$$

después de dividir por a^2XYT. Puesto que un lado es una función sólo de t, mientras que el otro lado es una función de x y y, sigue que cada lado debe ser una constante, la cual denotamos por $-\lambda^2$, esto es,

$$\frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2 \qquad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \tag{46}$$

Si ahora escribimos la segunda ecuación de (46) en la forma

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \lambda^2\right) \tag{47}$$

vemos que cada lado debe ser una constante, la cual denotamos por $-\mu^2$. Entonces

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -\nu^2 \tag{48}$$

donde por brevedad hemos escrito $\nu^2 = \lambda^2 - \mu^2$ así que $\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2$. De las ecuaciones (48) y la primera ecuación en (46) tenemos entonces

$$X'' + \mu^2 X = 0, \qquad Y'' + \nu^2 Y = 0, \qquad T'' + a^2(\mu^2 + \nu^2)T = 0$$

de modo que
$$\left.\begin{array}{l} X = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x, \qquad Y = c_3 \cos \nu y + c_4 \operatorname{sen} \nu y, \\ T = c_5 \cos a\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,t + c_6 \operatorname{sen} a\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,t \end{array}\right\} \tag{49}$$

De la primera y tercera condiciones en (42) encontramos $c_1 = 0$, $c_3 = 0$ de modo que
$$Z = c_2 c_4 \operatorname{sen} \mu x \operatorname{sen} \nu y (c_5 \cos a\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,t + c_6 \operatorname{sen} a\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,t) \tag{50}$$

De la segunda y cuarta condiciones en (42) encontramos
$$\mu = m\pi, \qquad \nu = n\pi, \qquad \text{donde } m, n = 1, 2, 3, 4, .$$

de modo que $Z = c_2 c_4 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y (c_5 \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\,\pi t + c_6 \operatorname{sen} a\sqrt{m^2 + n^2}\,\pi t)$

La condición (44) conduce a $c_6 = 0$ de modo aue
$$Z = B \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\,\pi t \tag{51}$$

donde $B = c_2 c_4 c_5$.

Para satisfacer (43) tendremos que usar el principio de superposición, esto es, la sumatoria de soluciones de la forma (51) sobre todos los valores enteros de m y n. Esto conduce a la solución de *serie doble*
$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\,\pi t \tag{52}$$

donde hemos remplazado B en (51) por B_{mn} puesto que cada solución puede tener un coeficiente diferente. Esto satisfará la condición (43) si
$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \tag{53}$$

Podemos escribir la serie doble (53) en la forma
$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} n\pi y \right) \operatorname{sen} m\pi x \tag{54}$$

esto es,
$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi x \tag{55}$$

donde
$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} n\pi y \tag{56}$$

Puesto que (55) representa una serie seno de Fourier en x tenemos por los metodos acostumbrados
$$b_m = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x, y) \operatorname{sen} m\pi x \, dx \tag{57}$$

Puesto que (56) representa una serie de Fourier en y, tenemos similarmente
$$B_{mn} = \frac{2}{1} \int_0^1 b_m \operatorname{sen} n\pi y \, dy \tag{58}$$

S sustituimos (57) en (58), encontramos

$$B_{mn} = 4\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \, dx \, dy \tag{59}$$

Remplazando estos coeficientes en (52) produce entonces la solución deseada.

Por razones obvias la serie (53) con coeficientes (59) se llama una *serie seno doble de Fourier* correspondiente a $f(x, y)$. Podríamos haber obtenido en forma similar series coseno doble de Fourier o series dobles de Fourier involucrando senos y cosenos. Como se podría esperar también es posible tener series triples de Fourier, cuadriples, etc. Algunas aplicaciones que involucran tales series se dan en los ejercicios.

Interpretación. Es de interés examinar el posible significado físico de los varios términos en la serie (52). Para ello, asumamos que $f(x, y)$ es tal que todos los términos de la serie (52) son cero excepto aquel para el cual $m = 3$ y $n = 3$. Entonces este término es

$$B_{33} \operatorname{sen} 3\pi x \operatorname{sen} 3\pi y \cos \pi a\sqrt{3^2 + 3^2}\, t \tag{60}$$

Como en el caso de la cuerda, llamamos esto un modo *de vibración*. Se notara que, para todos los valores de tiempo t, el desplazamiento (60) sera cero a lo largo de las líneas $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ y $y = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, como se indica en la Figura **13.12.** Debido a que todos los puntos sobre estas líneas nunca se mueven, nos referimos a las líneas como ***líneas nodales.*** Si pudiéramos tomar una película de la vibración que ocurre en un intervalo de tiempo, observariamos que los segmentos de piel de tambor dentro de los pequeños cuadrados acotados por estas líneas nodales vibran cada uno, algunas veces en una dirección y luego en la otra. Por ejemplo, en la Figura 13.12 hemos indicado este movimiento usando sombra para indicar el movimiento en una dirección y sin sombra para el movimiento en la dirección opuesta donde los movimientos ocurren simultáneamente. El hecho de que dos cuadrados adyacentes estén vibrando en direcciones opuestas en un tiempo dado a menudo se indica diciendo que las vibraciones de estas regiones están *fuera de fase* entre sí. **Lo** que hemos mostrado en la Figura 13.12 es por supuesto una fotografía en un tiempo particular.

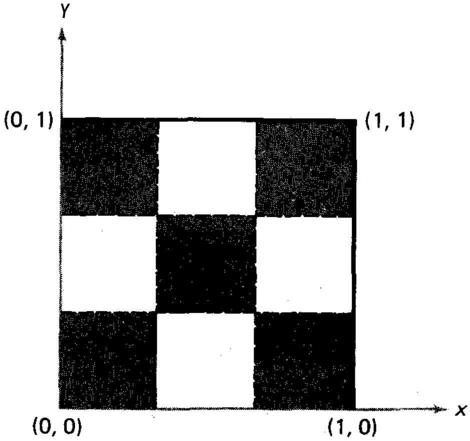


Figura 13.12

En otro tiempo la fotografía podría cambiar de modo que las direcciones de vibración se invierten.

Al observar el factor de tiempo en (60) es evidente que existe una periodicidad *en* las fotografías, esto es, si encontramos la piel de tambor en un estado particular de movimiento en un instante de tiempo, entonces estará exactamente en el mismo estado en algún tiempo mínimo más tarde llamado el *período.* La frecuencia correspondiente la cual es el recíproco de este período está dada para el caso (60) por

$$f_{33} = \frac{\pi a\sqrt{3^2+3^2}}{2\pi} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\tau}{\rho}} \tag{61}$$

En una manera similar, cada término en (52) correspondiente a un par de valores m y n representa un modo particular de vibración teniendo una frecuencia característica dada por

$$f_{mn} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{62}$$

Por brevedad podemos hablar del modo *(m, n) o* la *frecuencia del modo (m, n).*

Es posible que dos o más modos diferentes tengan la misma frecuencia. Por ejemplo, si consideramos sólo los dos términos en (52) correspondientes a los modos (1, 2) y (2, 1), encontramos que la suma de estos términos es

$$(B_{12}\operatorname{sen}\pi x\operatorname{sen}2\pi y + B_{21}\operatorname{sen}2\pi x\operatorname{sen}\pi y)\cos\sqrt{5}\pi at \tag{63}$$

Se ve de inmediato que para todas las selecciones de los coeficientes B_{12} y B_2 , la frecuencia está dada por

$$f_{12} = \frac{\sqrt{5}\pi a}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\tau}{\rho}}$$

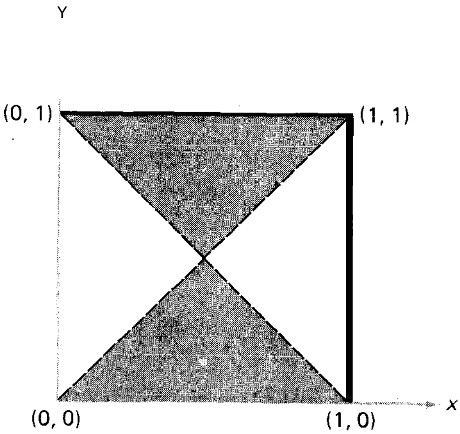


Figura 13.13

Si en particular $B_{12} = B_{21}$, entonces el desplazamiento para este caso está dado por

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t(\operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen} 2\pi y \text{ i-sen } 2\pi x \operatorname{sen}\pi y) \\ &= B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t \{\operatorname{sen}\pi x(2 \operatorname{sen}\pi y \cos \pi y) + (2\operatorname{sen} \pi x \cos \pi x)\operatorname{sen} \pi y\} \\ &= 2B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t \operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen}\pi y(\cos \pi x + \cos \pi y) \end{aligned}$$

de lo cual podemos concluir que las líneas nodales son $x \pm y = 1$ (para lo cual $\cos \pi x + \cos \pi y = 0$) como se indica por las líneas punteadas en la Figura 13.13. También se indican en la figura sombreando y sin sombrear las direcciones de las vibraciones de las regiones triangulares acotadas por estas líneas en un instante particular de tiempo, invirtiéndose éstas a medio período más tarde.

Algunas veces nos referimos a dos o más modos diferentes que tienen la misma frecuencia como *modos degenerados.* Como se vió antes, todo los modos correspondientes a los casos $m \neq n$ son degenerados.

La serie (52) muestra que el desplazamiento general de una piel de tambor se puede considerar como una suma o superposición de desplazamientos correspondientes a los varios modos. Una pregunta interesante que surge por analogía con la cuerda vibrante es si una piel de tambor cuadrada puede crear un tono musical. Recordemos que en el caso de la cuerda vibrante tenemos una frecuencia más pequeña o fundamental, y que hemos definido *música como* el estado donde todas las frecuencias más altas o armónicas son múltiplos enteros de esta frecuencia fundamental. Si usamos aquí la misma definición, resulta que tenemos una mezcla de música y ruido (esto es, no música), puesto que hay frecuencias que son enteros múltiplos de una frecuencia fundamental como también frecuencias que no lo son. Una consideración importante en este respecto son las magnitudes de los coeficientes B_{mn}, los cuales sirven para indicar aquellos modos y correspondientes frecuencias de gran importancia.

4.5 CONDUCCION DE CALOR CON RADIACION

En el problema de Fourier que involucra una barra de metal de longitud L, las condiciones de frontera en los extremos $x = 0$ y $x = L$ consideradas hasta ahora asumen que los extremos se mantienen a ciertas temperaturas o están aislados, o una combinación de estos. Una posibilidad interesante que puede surgir es el caso donde uno de los extremos, digamos $x = 0$, se mantiene a alguna temperatura, digamos 0” C, mientras que el otro extremo $x = L$ irradia a un medio circundante, el cual se asume que está también a la temperatura 0” C. Podemos asumir como antes que la distribución de temperatura inicial está especificada por f(x).

Formulación matemática. Como en el problema de Fourier, asumimos que la superficie convexa de la barra está aislada de modo que la ecuación de calor está dada como antes por

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{64}$$

La única pregunta que podemos tener en relación a las condiciones de frontera es sobre la formulación matemática de la condición de radiación en el extremo $x = L$. Para obtener esta formulación, recordemos primero que el flujo de calor a través del extremo $x = L$ está dado por $-KU_x(L, t)$, donde K es la conductividad térmica la cual se asume constante. Usando una ley de Newton del tipo de enfriamiento de radiación (esto es, donde el flujo es proporcional a la diferencia en temperatura entre la temperatura $U(L, t)$ del extremo de la barra y la temperatura del medio circundante tomada como cero) obtenemos la condición de frontera requerida

$$U_x(L, t) = -hU(L, t) \tag{65}$$

donde h es una constante positiva. Las demás condiciones de frontera están dadas por

$$U(0, t) = 0, \qquad U(x, 0) = f(x) \tag{66}$$

y la condición obvia de que U sea acotada.

Solución Por el método acostumbrado de separación de variables, encontramos una solución de (64) dada por

$$U(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x) \tag{67}$$

Para satisfacer la primera condición de frontera en (66), requerimos $A = 0$ de modo que

$$U(x, t) = Be^{-\kappa\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$$

De la condición de frontera (65) vemos que

$$B\lambda e^{-\kappa\lambda^2 t} \cos \lambda L = -hBe^{-\kappa\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda L, \text{ esto es,} \quad \tan \lambda L = -\lambda/h$$

Para determinar los valores de λ que satisfacen esta última ecuación, escribamos $\alpha = \lambda L$ y notemos que la ecuación se puede escribir

$$\tan \alpha = -\frac{\alpha}{hL} \tag{68}$$

Las raíces requeridas de la ecuación (68) se pueden obtener como la intersección de los gráficos de las ecuaciones

$$y = \tan \alpha \quad \text{y} \quad y = -\frac{\alpha}{hL} \tag{69}$$

esquematizada en la Figura 13.14. Como se ve, existen infinitas intersecciones, indicando que hay infinitas raíces positivas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de la ecuación (68), y así infinitos valores positivos de λ correspondientes, denotados por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ De esto sigue que hay infinitas soluciones dadas por

$$U(x, t) = Be^{-\kappa\lambda_n^2 t} \operatorname{sen} \lambda_n x \tag{70}$$

donde $n = 1, 2, \ldots$ Para satisfacer la segunda condición de frontera en (66), superponemos las soluciones (70) para obtener

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t} \operatorname{sen} \lambda_n x \tag{71}$$

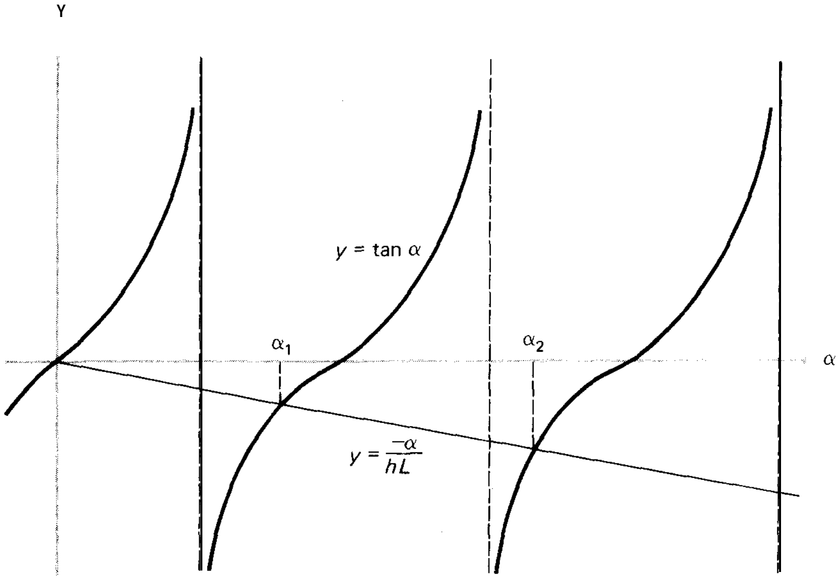


Figura 13.14

La segunda condición en (66) nos lleva a requerir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \lambda_n x \tag{72}$$

lo cual como en el problema de Fourier requiere la expansión de $f(x)$ en una serie de funciones trigonométricas. La serie (72) se asemeja mucho a la serie seno de Fourier excepto por el hecho de que mientras los valores de λ_n no son igualmente espaciados (como se ve en la Figura 13.10), los correspondientes valores $\lambda_n = n\pi/L$ en la serie seno de Fourier sí son igualmente espaciados.

El mismo método usado en la serie seno de Fourier para hallar los coeficientes también funcionará en este caso si se cumple que

$$\int_0^L \operatorname{sen} \lambda_m x \operatorname{sen} \lambda_n x \, dx = 0. \qquad \lambda_m \neq \lambda_n \tag{73}$$

El estudiante familiarizado con el concepto de ortogonalidad de funciones discutido en el Capítulo ocho seguramente reconocerá que lo enunciado en (73) es lo mismo que decir que las funciones sen $\lambda_n x$, $n = 1, 2, \ldots$, son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq x \leqq L$. Esto se puede probar por integración directa de (73), como se indica en el Ejercicio 5C, o por el método que usa la teoría de las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville presentadas en el Capítulo ocho. No importa el método que se use, el resultado final equivale al hecho de que, si multiplicamos ambos lados de (72) por sen $\lambda_m x$ y luego integramos de $x = 0$ a $x = L$, encontramos

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \lambda_m x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \operatorname{sen} \lambda_m x \operatorname{sen} \lambda_n x \, dx$$

o usando (73)

$$b_n = \frac{\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \lambda_n x \, dx}{\int_0^L \operatorname{sen}^2 \lambda_n x \, dx} \tag{74}$$

El denominador de (74) se evalúa fácilmente como

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2 \lambda_n x \, dx = \frac{Lh + \cos^2 \lambda_n L}{2h} \tag{75}$$

de modo que

$$b_n = \frac{2h}{Lh + \cos^2 \lambda_n L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \lambda_n x \, dx \tag{76}$$

Sustituyendo (76) en (71) obtenemos la solución requerida.

EJERCICIOS A

1. Suponga que en el problema del texto relacionado con la cuerda vibrante bajo la gravedad (página 615) tenemos $f(x) = 0$. (a) Muestre que

$$Y(x, t) = \frac{4gL^2}{\pi^3 a^2}\left(\frac{1}{1^3} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi a t}{L} + \frac{1}{3^3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi a t}{L} + \cdots\right) - \frac{gx(L - x)}{2a^2}$$

(b) Discuta el significado físico.

2. Una barra de metal de 50 cm de longitud cuya superficie está aislada está a una temperatura de 60° C. En $t = 0$ una temperatura de 30° C se aplica a un extremo y una temperatura de 80° C se aplica al otro extremo, y estas temperaturas se mantienen. Determine la temperatura de la barra en cualquier tiempo asumiendo $\kappa = 0{,}15$ unidades cgs.

3. Una lámina de material de difusividad κ está acotada por los planos $x = 0$ y $x = L$. Si las caras planas se mantienen a temperaturas constantes U_1 y U_2 respectivamente, mientras que la temperatura inicial es U_0, encuentre la temperatura en cualquier punto en cualquier tiempo posterior.

4. Trabaje el Ejercicio 3 si la temperatura inicial está dada por $U_0\,(1 - x/L)$.

5. Una cuerda tiene sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$. Suponga que inicialmente la cuerda tiene una forma parabólica y que cada punto se mueve en la misma dirección con la misma velocidad. Encuentre el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda en cualquier tiempo.

6. Resuelva e interprete físicamente el problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, t > 0$$

$$U(0, t) = 0, \qquad U(1, t) = 0, \qquad U(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x$$

7. Complete el segundo método dado en la página 620.

EJERCICIOS B

1. Si una cuerda con sus puntos extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ está bajo la influencia de la gravedad pero no vibra, muestre que su forma está dada por la porción de la parábola

$$Y = -\frac{gx(L - x)}{2a^2}$$

entre $x = 0$ y $x = L$. ¿Está esto en conflicto con los resultados obtenidos en las páginas 111-114 para el cable colgante? Explique.

2. Resuelva y dé una interpretación física al problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, t > 0$$

$$Y(0, t) = 0. \qquad Y_x(L, t) = K. \qquad Y(x, 0) = 0. \qquad Y_t(x, 0) = 0$$

3. Resuelva e interprete físicamente el problema de valor de frontera

$$Y_{tt} = 1 + Y_{xx}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0$$

$$Y(0, t) = 1, \qquad Y(x, 0) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\pi x, \qquad Y_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad Y_t(x, 0) = 0$$

4. Encuentre la temperatura de estado estacionario en una placa cuadrada de lado unitario como se indica en la Figura 13.15 si las caras planas están aisladas y los lados se mantienen a temperaturas constantes U_1, U_2, U_3, U_4, respectivamente. (Sugerencia: Resuelva el problema para el caso donde tres lados se mantienen a temperatura cero y el cuarto se mantiene a una temperatura constante diferente de cero. Luego aplique el método de superposición a los cuatro casos.)

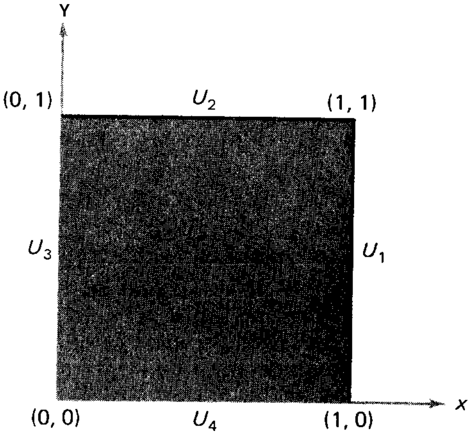


Figura 13.15

5. Trabaje el problema de la cuerda vibrante bajo la gravedad si se toma en cuenta el amortiguamiento proporcional a la velocidad.

6. Una barra delgada con extremos en $x = 0$ y $x = L$ tiene difusividad constante κ y temperatura inicial U_0. Debido al fenómeno nuclear que ocurre en la barra, el calor se genera a una tasa constante α. Asumiendo que los extremos se mantienen a temperaturas U_1 y U_2, respectivamente, y que la superficie está aislada, encuentre la temperatura en cualquier lugar de la barra en cualquier tiempo.

7. Trabaje el Ejercicio 6 si $U_0 = U_1 = 0$ y el extremo $x = L$ está aislado.

8. Trabaje el Ejercicio 6 si $U_0 = U_1 = U_2 = 0$ y la tasa de generación de calor en la barra es proporcional a la distancia desde el extremo $x = 0$.

9. Una cuerda vibrante tiene extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$. En $t = 0$ la forma está dada por f(x) y la distribución de velocidad por g(x). Muestre que

$$Y(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(u)du$$

10. Interprete el problema de valor de frontera definido por (1) y (2), página 597 como un problema sobre vigas.

11. Trabaje el Ejercicio 4 para un cubo sólido de lado unitario.

12. Interprete los Ejercicios 4 y ll como problemas que involucran potencial.

EJERCICIOS C

1. Suponga que a la piel tambor cuadrada del texto se le da un desplazamiento inicial $f(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)$ y luego se suelta. Describa las vibraciones resultantes que ocurren al encontrar el desplazamiento de cada punto de la piel desde la posición de equilibrio.

2. Trabaje el problema de la piel de tambor vibrante si se le da una forma y distribución de velocidad iniciales.

3. Describa los modos de vibración de la piel de tambor cuadrada en los casos (a) $m = 2$, $n = 2$. (b) $m = 1$, $n = 3$.

4. Si la piel de tambor cuadrada del texto se "recoge" levantando el centro una pequeña distancia h y luego se suelta, investigue las vibraciones resultantes.

5. Verifique por integración directa los resultados (73) y (75), páginas 627 y 628.

6. Muestre que las raíces sucesivas de la ecuación (68), página 626, se aproximan bastante por los valores $(2n - 1)\pi/2$.

7. Discuta la barra conductora con radiación del texto para los casos (a) $h = 0$; (b) $h = \infty$.

8. Trabaje el problema de la barra conductora con radiación asumiendo que el extremo $x = 0$ está aislado.

9. Una esfera de radio unitario y difusividad constante κ tiene una temperatura inicial que depende sólo de la distancia r del centro, el cual se escoge como el origen de un sistema coordenado tridimensional. La superficie de la esfera se mantiene a temperatura cero. (a) Si $U(r, t)$ es la temperatura en cualquier punto de la esfera en tiempo t, muestre que el problema de valor de frontera está dado por

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

$$U(1, t) = 0, \qquad U(r, 0) = f(r), \qquad |U(r, t)| < M$$

(b) Resuelva el problema de valor de frontera en (a) mostrando que

$$U(r, t) = \frac{2}{r}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2\kappa t}\operatorname{sen} k\pi r \int_0^1 v f(v) \operatorname{sen} k\pi v \, dv$$

[Sugerencia: Haga la transformación $V(r, t) = rU(r, t)$ o use el Ejercicio 3A, página 335.1

10. Trabaje el Ejercicio 9 si (a) $f(r) = U_0$; (b) $f(r) = \begin{cases} U_0, & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < r < 1 \end{cases}$; e interprete físicamente.

11. Una región de difusividad κ está acotada por las esferas $r = 1$ y $r = 2$ cuyas superficies se mantienen a temperatura cero. Si la temperatura inicial de la región es U_0, muestre que la temperatura en cualquier punto distante r del centro común está dada en cualquier tiempo $t > 0$ por

$$U(r, t) = \frac{2U_0}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1 - 2 \cos k\pi}{k} \right) e^{-k^2\pi^2\kappa t} \operatorname{sen} k\pi r, \qquad 1 < r < 2$$

12. Resuelva e interprete físicamente el problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$U(1, t) = 0, \qquad U(r, 0) = f(r), \qquad U_t(r, 0) = 0, \qquad |U(r, t)| < M$$

catorce

◆ soluciones de problemas de valor de frontera usando funciones de Bessel y de Legendre

1 Introducción

En el último capítulo resolvimos varios problemas de valor de frontera en conducción de calor, vibraciones, y teoría de potencial usando series de Fourier u otras series trigonométricas. Fundamental en la solución de tales problemas fue la idea de la expansión de una función en una serie teniendo la forma

$$f(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \cdots = \sum_{n=1} c_nu_n(x) \tag{1}$$

donde las funciones u,(x), $n = 1, 2,$, tienen la propiedad

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x)dx = 0, \qquad m \neq n \tag{2}$$

Observación. Un conjunto de funciones que tienen la propiedad (2) se llama (como recordará el estudiante que leyó el Capítulo ocho) un *conjunto ortogonal* en el intervalo $a \leqq x \leqq b$, y las funciones se dice que son mutuamente ortogonales en este intervalo. La serie (1) se llama entonces con frecuencia una *serie ortogonal.**

Partiendo del hecho de que la mayoría de problemas del último capítulo involucró coordenadas rectangulares y series de Fourier, podríamos sospechar que al escoger otros tipos de coordenadas, tales como coordenadas cilíndricas o esféricas, conduciría a series ortogonales de la forma (1) involucrando funciones distintas a las funciones trigonométricas. Encontraremos en este capítulo que esta sospecha es efectivamente correcta. De hecho, las funciones ortogonales que se usan en tales casos son funciones de Bessel y de Legendre ya familiares a nosotros del Capítulo siete. En la primera parte de este capítulo trataremos problemas parecidos a aquellos del último capítulo, esto es, que involucran conducción de calor, vibraciones, teoría de potencial, formulados en coordenadas cilíndricas que conducen a funciones de Bessel. En la segunda parte hacemos la misma cosa con coordenadas esféricas y funciones de Legendre.

2 Problemas de valor de frontera que conducen a funciones de Bessel

2.1 EL LAPLACIANO EN COORDENADAS CILINDRICAS

Con el objeto de tratar problemas de valor de frontera que involucran cilindros con sección transversal circular, es natural usar coordenadas cilíndricas las cuales están conformadas de coordenadas polares (r, ϕ) en el plano xy junto con la coordenada adicional z para dar (r, ϕ, z). Estas coordenadas se usan para representar cualquier punto P en tres dimensiones como se muestra en la Figura 14.1. Los valores r, ϕ y z son tales que

$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \phi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty \tag{1}$$

*Puesto que estaremos incrementanao el uso de los resultados en el Capítulo ocho, el estudiante que desee derivar el mayor beneficio del presente capítulo se le aconseja leer el Capítulo ocho.

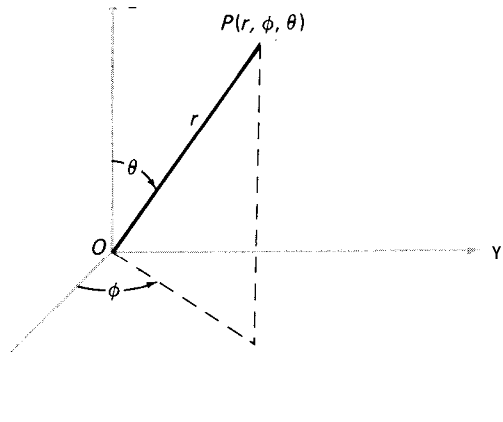


Figura 14.1

aunque cualquier otro intervalo de longitud 2π, tal como $-\pi < \phi \leqq \pi$, también se puede escoger para ϕ. Las ecuaciones de transformación entre coordenadas cilíndricas y coordenadas rectangulares están dadas por

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\,\text{sen}\,\phi, \quad z = z \tag{2}$$

Note que puesto que z permanece inalterada la transformación es la misma a aquella que involucra coordenadas polares en el plano xy. Ahora como hemos visto en problemas de los dos últimos capítulos, las ecuaciones diferenciales parciales con frecuencia involucran el operador Laplaciano definido en coordenadas rectangulares por

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{3}$$

Es natural por tanto buscar una expresión correspondiente para esto en coordenadas cilíndricas. Puesto que ya hemos encontrado esto para los dos primeros términos al trabajar el problema en la página 608, vemos que la expresión reauerida es

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{4}$$

2.2 CONDUCCION DE CALOR EN UN CILINDRO CIRCULAR

Como una primera ilustración, consideremos una varilla metálica en la forma de cilindro circular de radio unitario, la cual es tan larga que para propósitos prácticos se puede considerar de longitud infinita. Asumiremos que inicialmente, esto es, $t = 0$, la temperatura de la varilla a una distancia r del eje está dada por $f(r)$, y que su superficie se mantiene a 0” C para $t > 0$. El problema consiste en determinar la temperatura de la varilla en cualquier punto en cualquier tiempo.

Formulación matemática. Escojamos el cilindro de modo que su sección transversal en el plano xy sea el círculo de radio unitario mostrado en la Figura 14.2. Puesto que la varilla es infinita, la temperatura U no debería involucrar dependencia alguna de z. También puesto que la frontera se mantiene a 0” C, vemos que por la simetría no hay dependencia de ϕ.

Puesto que la ecuación de conducción de calor es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \nabla^2 U \tag{5}$$

y puesto que no hay dependencia de z ni de ϕ, (5) se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \right) \tag{6}$$

donde $U = U(r, t)$, esto es, la temperatura U depende sólo de r y t. Con U igual a cero en $r = 1$ para todo $t > 0$, tenemos la condición de frontera

$$U(1, t) = 0 \tag{7}$$

También puesto que U inicialmente es igual a $f(r)$, esto es, para $t = 0$, tenemos la condición de frontera

$$U(r, 0) = f(r) \tag{8}$$

Adicionalmente a estas tenemos también la condición habitual de que U debe ser acotada en todos los puntos del cilindro, lo cual por supuesto está implicado por la realidad física. El problema de valor de frontera consiste así en determinar aquella solución acotada de (6) que satisfaga las condiciones (7) y (8).

Observación. Se debería indicar que se llega al mismo problema de valor de frontera al considerar una placa metálica circular de espesor despreciable cuyas caras están aisladas y cuya temperatura inicial es $f(r)$ mientras que la temperatura en el borde se mantiene a 0” C.

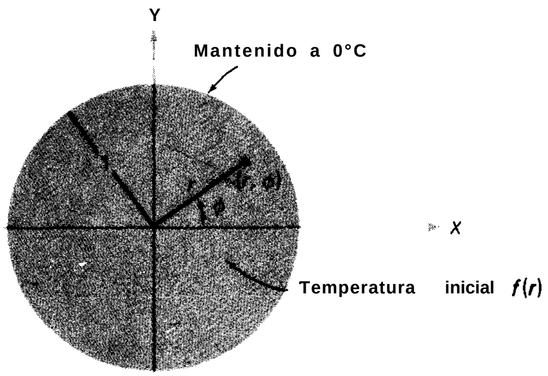


Figura 14.2

Solución Asumiendo, de acuerdo al método de separación de variables, que $U = RT$, donde R depende sólo de r y T depende sólo de t, (6) llega a ser

$$RT' = \kappa\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right) \quad ó \quad \frac{T'}{\kappa T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} \tag{9}$$

al dividir por κRT. Haciendo cada lado de la segunda ecuación en (9) igual a la constante $-\lambda^2$, tenemos

$$T' + \kappa\lambda^2 T = 0, \qquad R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0 \tag{10}$$

La primera ecuación en (10) tiene solución $T = c_1 e^{-\kappa\lambda^2 t}$ (11)

Para resolver la segunda ecuación en (10) haga $\lambda r = u$. Entonces la ecuación llega a ser

$$\frac{d^2R}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dR}{du} + R = 0 \tag{12}$$

Esto se reconoce como la ecuación diferencial de Bessel de orden cero cuya solución es

$$R = c_2 J_0(u) + c_3 Y_0(u) \tag{13}$$

(ver página 342). Así la segunda ecuación en (10) tiene solución

$$R = c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r) \tag{14}$$

De (ll) y (14) vemos que una solución de (6) es

$$U(r, t) = RT = c_1 e^{-\kappa\lambda^2 t}[c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r)] \tag{15}$$

Ahora la solución (15) debe estar acotada dentro del cilindro y en particular en $r = 0$. Sin embargo, para $r = 0$ la función $Y_0(\lambda r)$ es infinita. Para evitar esta catástrofe, escogemos $c_3 = 0$ de modo que la solución (15) llega a ser

$$U(r, t) = Ae^{-\kappa\lambda^2 t}J_0(\lambda r) \tag{16}$$

donde $A = c_1c_2$. Usando la condición de frontera (7) en (16), obtenemos

$$J_0(\lambda) = 0 \tag{17}$$

Afortunadamente, como ya sabemos de nuestra discusión en la página 343 la ecuación (17) tiene infinitas raíces positivas las cuales denotaremos por*

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \quad \text{esto es,} \quad \lambda = \lambda_n, \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Así

$$U(r, t) = Ae^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r) \tag{19}$$

Para satisfacer la última condición de frontera (8), usamos primero el principio de superposición sumando las soluciones de la forma (19) con coeficientes diferentes. Esto lleva a

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r) \tag{20}$$

*En este capítulo las raíces se denotan por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, en vez de las equivalentes r_1, r_2, r_3,. del Capítulo ocho.

y de (8)
$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \tag{21}$$

Este problema es similar al de Fourier excepto que, en vez de requerir la expansión de una función en una serie trigonométrica, la requerimos en términos de una serie de funciones de Bessel con frecuencia llamada una *serie de Bessel* o una *serie de Fourier-Bessel* debido a la analogía con las series de Fourier.

El estudiante familiarizado con el Capítulo ocho (ver página 403) se da cuenta que los coeficientes a_n en (21) se pueden determinar al multiplicar ambos lados de (21) por $rJ_0(\lambda_m r)$ y luego integrar de $r = 0$ a $r = 1$, obteniendo

$$\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_m r)dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)dr \tag{22}$$

Usando el hecho que
$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)dr = 0, \qquad m \neq n \tag{23}$$

esto es, que las funciones $\sqrt{r}J_0(\lambda_n r)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son mutuamente ortogonales en el intervalo $0 \leqq r \leqq 1$, todos los términos en la serie a la derecha de (22) son cero excepto aquel donde $m = n$ de modo que

$$\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr = a_n \int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\, dr \quad \text{o} \quad a_n = \frac{\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr}{\int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\, dr} \tag{24}$$

Esto también se puede escribir de acuerdo a la Tabla 8.1, página 375,

$$a_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2}\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr \tag{25}$$

Usando (25) en (20) produce la solución deseada.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Encuentre la temperatura en cualquier punto de la varilla cilíndrica si la temperatura inicial es 100" C.

Solución En este caso tenemos $f(r) = 100$, de modo que los coeficientes (25) están dados por

$$a_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2}\int_0^1 r(100)J_0(\lambda_n r)dr = \frac{200}{\lambda_n^2[J_1(\lambda_n)]^2}\int_0^{\lambda_n} uJ_0(u)du = \frac{200}{\lambda_n J(\lambda_n)}$$

donde hemos hecho la sustitución $u = \lambda_n r$ y usado el resultado (73), página 375. Sustituyendo estos valores de a_n en (20) se obtiene el resultado deseado

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200e^{-\kappa\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n r) \tag{26}$$

2.3 CONDUCCION DE CALOR EN UN CILINDRO RADIANTE

Suponga que en vez de mantener la superficie de la varilla cilíndrica a 0" C hay una radiación de calor desde la superficie a un medio circundante, el cual se asume está a 0" C. Si asumimos una ley de Newton del tipo de enfriamiento de radiación, entonces la condición de frontera en la superficie $r=1$, está dada por

$$U_r(1, t) = -hU(1, t) \tag{27}$$

lo cual expresa el hecho que el flujo a través de la superficie es proporcional a la diferencia en temperatura entre la temperatura de la superficie $U(1, t)$ y la temperatura cero del medio circundante. Usando la solución (16), página 636, la-condición (27) da

$$\lambda J_0'(\lambda) = -hJ_0(\lambda) \tag{28}$$

Como se indicó en el Capítulo ocho, página 375, la ecuación (28) tiene infinitas raíces positivas, las cuales denotaremos por $\lambda_1, \lambda_2,$. o λ_n, $n = 1, 2, 3,$. Así como en (19),

$$U(r, t) = Ae^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r) \tag{29}$$

donde λ_n son las raíces positivas de (28). Para satisfacer la última condición de frontera (8) usamos primero la superposición para obtener la solución

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r) \tag{30}$$

de donde

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \tag{31}$$

Multiplicando ambos lados de (31) como antes por $rJ_0(\lambda_m r)$ e integrando de $r=0$ a $r=1$ se obtiene

$$\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_m r)dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)dr \tag{32}$$

Puesto que

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)dr = 0, \qquad m \neq n$$

como se ve en la página 375.del Capítulo ocho, encontramos de (32)

$$a_n = \frac{\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr}{\int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\,dr} \quad \text{o} \quad a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)[J_0(\lambda_n)]^2}\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr \tag{33}$$

el último resultado obtenido al hacer uso de la tabla en la página 375,

2.4 VIBRACIONES DE UNA PIEL DE TAMBOR CIRCULAR

En el último capítulo analizamos las vibraciones de una piel de tambor en la forma de un cuadrado. Examinamos ahora las vibraciones de una piel de tambor más convencional, la cual tiene una forma circular. Asumamos que la piel de tambor es de radio unitario y está fija en el borde, de modo que se puede indicar por la región que se muestra sombreada en la Figura 14.2.

Formulación matemática. La ecuación diferencial parcial está dada por

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 Z \tag{34}$$

o en coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2}\right) \tag{35}$$

donde $Z = Z(r, \phi, t)$ es el desplazamiento de cualquier punto (r, ϕ) de la piel de tambor es cualquier tiempo t desde la posición de equilibrio en el plano xy. Las condiciones de frontera son

$$Z(1, \phi, t) = 0, \qquad Z(r, \phi, 0) = f(r, \phi), \qquad Z_t(r, \phi, 0) = 0 \tag{36}$$

expresando la primera el hecho que el borde de la piel de tambor está fijo, la segunda que la piel de tambor se le da inicialmente una forma prescrita, esto es, en $t = 0$, dependiente de r y ϕ, y la tercera que la piel de tambor se suelta de modo que su velocidad inicial es cero. Un requisito adicional que no enunciaremos explícitamente es el obvio de que Z está acotada.

Solución Asumiendo una solución separable de la forma $Z = R\Phi T$ donde R, Φ, T dependen sólo de r, ϕ, t, respectivamente, (35) llega a ser

$$R\Phi T'' = a^2\left(R''\Phi T + \frac{1}{r}R'\Phi T + \frac{1}{r^2}R\Phi''T\right) \quad \text{o} \quad \frac{T''}{a^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{37}$$

al dividir por $a^2 R\Phi T$. Haciendo cada lado de la segunda ecuación en (37) igual a $-\lambda^2$, tenemos

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \qquad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \tag{38}$$

La primera ecuación en (38) tiene solución $T = c_1 \cos \lambda at + c_2 \operatorname{sen} \lambda at$ (39)

La segunda ecuación en (38) se puede escribir

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \lambda^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{40}$$

y si multiplicamos ambos lados de (40) por r^2 podemos hacer un lado una función sólo de r y el otro lado una función sólo de ϕ. En tal caso (40) se convierte en

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{r} + \lambda^2 r^2 = \frac{\Phi''}{\Phi} \tag{41}$$

Haciendo cada lado igual a μ^2 conduce a las ecuaciones

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - \mu^2)R = 0, \qquad \Phi'' + \mu^2\Phi = 0 \tag{42}$$

Haciendo $\lambda r = u$ en la primera ecuación de (42), se tiene

$$u^2R'' + uR + (u^2 \quad \mu^2)R = 0 \tag{43}$$

la cual es la ecuación de Bessel de orden μ teniendo como solución (ver página 342).

$$R = c_3J_\mu(u) + c_4Y_\mu(u)$$

Así la solución de la primera ecuación de (42) es $R = c_3 J_\mu(Xr) + c_4 Y_\mu(\lambda r)$.

La solución de la segunda ecuación en (42) es $\Phi = c_5 \cos \mu\phi + c_6 \operatorname{sen} \mu\phi$

De estos resultados vemos que una solución de (35) es

$$Z = R\Phi T = [c_3J_\mu(\lambda r) + c_4Y_\mu(\lambda r)][c_5 \cos \mu\phi + c_6 \operatorname{sen} \mu\phi][c_1 \cos \lambda at + c_2 \operatorname{sen} \lambda at] \tag{44}$$

y trataremos ahora de satisfacer las condiciones de frontera. Puesto que Z debe ser acotada y puesto que $Y_\mu(\lambda r)$ es infinita para $r = 0$, el cual es el centro de la piel de tambor, debemos tomar $c_4 = 0$ de modo que la solución llega a ser

$$Z = c_3 J_\mu(\lambda r)[c_5 \cos \mu\phi + c_6 \operatorname{sen} \mu\phi][c_1 \cos \lambda at + c_2 \operatorname{sen} \lambda at] \tag{45}$$

De la primera condición de frontera en (36) podemos ver entonces que

$$J_\mu(\lambda) = 0$$

Como se discutió en el Capítulo siete, esta ecuación tiene infinitas raíces positivas, que podemos denotar por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Sin embargo, puesto que las raíces son en general diferentes para diferentes órdenes μ, podemos añadir el suscrito μ y escribir estas raíces como $\lambda_{1\mu}$, $\lambda_{2\mu}$, o $\lambda_{m\mu}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ La solución (45) es entonces

$$Z = c_3 J_\mu(\lambda_{m\mu} r)[c_5 \cos \mu\phi + c_6 \operatorname{sen} \mu\phi][c_1 \cos \lambda_{m\mu} at + c_2 \operatorname{sen} \lambda_{m\mu} at] \tag{46}$$

La tercera condición en (36) se satisface si escogemos $c_2 = 0$, y así tenemos

$$Z = J_\mu(\lambda_{m\mu} r)[A \cos \mu\phi + B \operatorname{sen} \mu\phi] \cos \lambda_{m\mu} at \tag{47}$$

donde $A = c_1 c_3 c_5$, $B = c_1 c_3 c_6$.

Puesto que cualquier punto (r, ϕ) de la **piel de** tambor también se puede expresar como $(r, \phi + 2\pi)$ de modo que Z es una función periódica de ϕ, el orden μ debe ser un entero denotado por n, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ Esto nos lleva a escribir (47) como

$$Z = J_n(\lambda_{mn} r)[A \cos n\phi + B \operatorname{sen} n\phi] \cos \lambda_{mn} at \tag{48}$$

Para satisfacer la última condición de frontera en (36) debemos usar el principio de superposición sobre las soluciones dadas por (48). Puesto que los coeficientes A y B pueden depender de m y n y puesto que m puede asumir los valores 1, 2, 3, ... , mientras que n puede asumir los valores 0, 1, 2, 3, ... , esta solución se puede escribir

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\lambda_{mn} r)[a_{mn} \cos n\phi + b_{mn} \operatorname{sen} n\phi] \cos \lambda_{mn} at \tag{49}$$

Así la condición de frontera conduce a

$$f(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} J_n(\lambda_{mn} r) \right\} \cos n\phi + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} J_n(\lambda_{mn} r) \right\} \operatorname{sen} n\phi \right] \tag{50}$$

Podemos pensar en la sumatoria sobre n en (50) como una serie de Fourier en la variabie ϕ. De acuerdo al método habitual para encontrar coeficientes de Fourier, vemos que el coeficiente de $\cos n\phi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ está dado por

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} J_n(\lambda_{mn} r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \phi) \cos n\phi \, d\phi \tag{51}$$

estando el coeficiente para $n = 0$ dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m0} J_0(\lambda_{m0} r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \phi) d\phi \tag{52}$$

De manera similar, el coeficiente de sen $n\phi$, n = 1, 2, 3,. , está dado por

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{mn}J_n(\lambda_{mn}r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\,\text{sen}\,n\phi\, d\phi \tag{53}$$

Para hallar los coeficientes a_{mn} para m = 1, 2, 3,. , usamos el hecho de que (15) es una serie de Bessel, y por el método habitual obtenemos

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi[J_{n+1}(\lambda_{mn})]^2}\int_0^1 rJ_n(\lambda_{mn}r)\left[\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\cos n\phi\, d\phi\right] dr \tag{54}$$

De manera similar, de (52) tenemos

$$a_{m0} = \frac{1}{\pi[J_1(\lambda_{m0})]^2}\int_0^1 rJ_0(\lambda_{m0}r)\left[\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\, d\phi\right] dr \tag{55}$$

En la misma manera (53) lleva a

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi[J_{n+1}(\lambda_{mn})]^2}\int_0^1 rJ_n(\lambda_{mn}r)\left[\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\,\text{sen}\,n\phi\, d\phi\right] dr \tag{56}$$

La solución requerida está así dada por (49) usando los coeficientes acabados de encontrar.

Interpretación. Como en el caso de la piel de tambor cuadrada, cada término en la solución de la serie doble (49) correspondiente a un par dado de valores m y n representa un modo particular de vibración. A cada modo le corresponde también una frecuencia característica. Por ejemplo, el término correspondiente al modo (m, n) es

$$J_n(\lambda_{mn}r)[a_{mn}\cos n\phi + b_{mn}\,\text{sen}\,n\phi]\cos\lambda_{mn}at \tag{57}$$

y la frecuencia correspondiente a este modo es

$$f_{mn} = \frac{\lambda_{mn}a}{2\pi} = \frac{\lambda_{mn}}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{58}$$

Las frecuencias son los *eigenvalores* y los modos representan las *eigenfunciones*. La frecuencia más baja, llamada la *frecuencia fundamental,* corresponde al modo para el cual $m = 1$ y n = 0. Este modo está dado, aparte de una constante, por

$$J_0(\lambda_{10}r)\cos\lambda_{10}at \tag{59}$$

La frecuencia fundamental, usando λ_{10} = 2,405 como la menor raíz positiva de $J_0(x)$ = 0, está dada por

$$f_{10} = \frac{\lambda_{10}a}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \frac{2{,}405}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{60}$$

Puesto que se puede mostrar que las frecuencias más altas no son múltiplos enteros de esta frecuencia fundamental, esperaríamos *ruido* y no música de las vibraciones de una piel de tambor, lo cual por supuesto se confirma en la realidad.

Es de interés examinar las vibraciones para varios modos. En el caso n = 0 los modos son independientes de ϕ y, como se ve de (57), están dados por

$$J_0(\lambda_{m0}r)\cos\lambda_{m0}at$$

Modo $m = 1, n = 0$

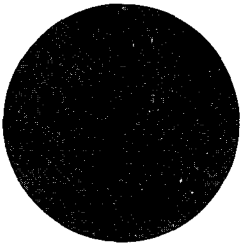


Figura 14.3

Modo $m = 2, n = 0$

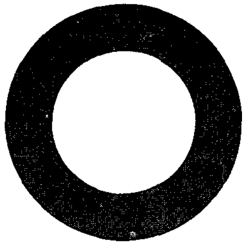


Figura 14.4

Modo $m = 2, n = 1$

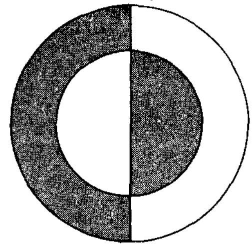


Figura 14.5

En el caso $m = 1$, esto se reduce a (59) y corresponde a la situación indicada en la Figura 14.3 donde la piel de tambor vibra adelante y atrás como un todo con frecuencia dada por (60). Para $m = 2$ el modo está dado por

$$J_0(\lambda_{20}r) \cos \lambda_{20}at \tag{61}$$

y la frecuencia correspondiente es
$$f_{20} = \frac{\lambda_{20}a}{2\pi} = \frac{5{,}520}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{62}$$

puesto que la segunda raíz positiva $J_0(x) = 0$ es 5,520, Sólo hay una raíz entre $r = 0$ y $r = 1$ para la cual (61) es cero, esto es, $\lambda_{20} r = \lambda_{10}$ o $r = 2{,}405/5{,}520 = 0{,}436$. Esto está representado en la Figura 14.4 por el círculo situado dentro de la piel de tambor. Se llama ***círculo nodal*** debido a que los puntos sobre éste no se mueven, Las vibraciones para este modo son tales que las partes sombreadas y sin sombrear de la membrana se mueven en direcciones opuestas en cualquier instante dado de tiempo. En general, si $n = 0$, habrá $m - 1$ círculos nodales en la piel de tambor.

En el caso de dependencia de ϕ, los modos de vibración son más complicados. Como un ejemplo, considere el modo correspondiente a $m = 2$, $n = 1$ dado por

$$J_1(\lambda_{21}r)[a_{21} \cos \phi + b_{21} \operatorname{sen} \phi] \cos \lambda_{21}at \tag{63}$$

estando la frecuencia dada por
$$f_{21} = \frac{\lambda_{21}a}{2\pi} = \frac{7{,}016}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{64}$$

Si tomamos el caso particular $a_{21} = 1$, $b_{21} = 0$, esto se puede escribir

$$J_1(\lambda_{21} r) \cos \phi \cos \lambda_{21} at \tag{65}$$

Ahora $J_1(\lambda_{21}r) = 0$ para sólo un valor de r entre 0 y 1, esto es, para $\lambda_{21}r = \lambda_{11}$ o, $r = \lambda_{11}/\lambda_{21} = 3{,}832/7{,}016 = 0{,}546$. Esto representa un círculo nodal como se indica en la Figura 14.5. También $\cos \phi = 0$ para $\phi = x/2$, $3\pi/2$, lo cual representa dos líneas nodales como se indica en la Figura 14.5. La vibración para este modo se indica así en la Figura 14.5 donde las partes sombreadas de la piel de tambor están vibrando en una dirección y las partes restantes en la dirección opuesta, ambas con frecuencia (64).

EJERCICIOS A

1. Encuentre la temperatura en cualquier punto de la varilla cilíndrica de la página 634 si la temperatura inicial está dada por (a) $f(r) = 50J_0(\lambda_1 r)$; (b) $f(r) =$

$20J_0(\lambda_1 r) - 10J_0(\lambda_2 r)$ donde λ_1 y λ_2 son las raíces positivas más pequeñas de $J_0(\lambda) = 0$.

2. Una placa circular de radio unitario y difusividad κ tiene temperatura inicial dada por

$$f(r) = \begin{cases} 100, & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < r < 1 \end{cases}$$

donde r es la distancia de cualquier punto desde el centro. Asumiendo que la temperatura del borde se mantiene a cero y que las caras planas están aisladas, encuentre la temperatura en cualquier punto de la placa en cualquier punto. Dé una interpretación que involucre una varilla.

3. Trabaje el Ejercicio 2 si la temperatura inicial es

(a) $f(r) = 100(1 - r^2)$, (b) $f(r) = \begin{cases} 90 & 0 < r < 1/3 \\ 60 & 1/3 < r < 2/3 \\ 30 & 2/3 < r < 1 \end{cases}$

4. Trabaje el Ejemplo ilustrativo de la página 637 si la frontera se mantiene a 25” C.

5. Trabaje el Ejemplo ilustrativo de la página 637 si el radio es c.

6. Una placa semicircular de radio unitario tiene sus caras y su diámetro fronterizo aislados. Si la temperatura inicial de la placa es 60° C y la temperatura del borde semicircular se mantiene a 0” C, encuentre la temperatura de la placa. Dé una interpretación involucrando un sólido.

7. Trabaje el Ejercicio 6 si el borde semicircular se mantiene a la temperatura de 100” c.

8. Trabaje el problema del texto en la página 634 si la superficie de la varilla está aislada en vez de mantenerse a 0” C.

9. Trabaje el Ejercicio 2 si la frontera está aislada.

10. Encuentre la temperatura en cualquier punto del cilindro circular de la página 637 si la temperatura inicial es (a) $f(r) = U_0$; (b) $f(r) = U_0(1 - r^2)$.

11. Trabaje el Ejercicio 2 si la condición de temperatura en el borde se remplaza por la condición de radiación en el borde dada por $U_r(1, t) = -2U(1, t)$.

12. Discuta los casos (a) $h = 0$, (b) $h = \infty$ en el problema del cilindro radiante en la página 637.

EJERCICIOS B

1. Un sólido tiene la forma de un cuarto de cilindro de longitud infinita con radio unitario y difusividad κ. Los lados planos están aislados mientras que la parte curvada se mantiene a 100” C. Asumiendo que la temperatura inicialmente varía con la cuarta potencia de la distancia desde el eje, encuentre la temperatura en cualquier punto en cualquier tiempo.

2. Discuta los modos de la piel de tambor circular definidos por (a) $m = 2$, $n = 2$; (b) $m = 3$, $n = 1$.

3. (a) Suponga que la piel de tambor circular del texto se le da un desplazamiento $f(r)$ y luego se suelta. Encuentre el desplazamiento en cualquier tiempo posterior. (b) ¿Cuál es el desplazamiento en cualquier tiempo si $f(r) = \alpha(1 - r^2)$?

4. Trabaje el problema de la piel de tambor circular si (a) inicialmente está en equilibrio y se le da una distribución de velocidad inicial $g(r, \phi)$; (b) se le da una forma y distribución de velocidad iniciales definidas por $f(r, \phi)$ y $g(r, \phi)$, respectivamente.

5. Un cilindro de radio unitario y longitud L (ver Figura 14.6) tiene su superficie convexa y base en el plano xy mantenidas a temperatura cero mientras que el extremo superior se mantiene a temperatura f(r). (a) Escriba el problema de valor de frontera para la temperatura de estado estacionario en cualquier punto del cilindro.

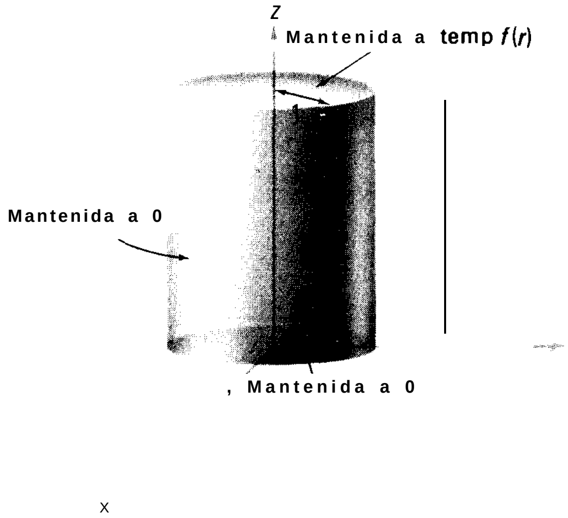


Figura 14.6

(b) Muestre que la temperatura de estado estacionario en cualquier punto del cilindro está dada por

$$U(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{senh} \lambda_n z J_0(\lambda_n r) \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2 \operatorname{senh} \lambda_n L} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\,dr$$

Y λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$. (c) Jnterprete los resultados como un problema en teoría de potencial.

6. Un cilindro de altura y radio unitarios tiene sus extremos circulares $z = 0$ y $z = 1$ mantenidos a temperatura 0 y 1 respectivamente mientras que su superficie convexa se mantiene a temperatura 1. Encuentre la temperatura de estado estacionario en cualquier punto dentro del cilindro.

7. Trabaje el Ejercicio 6 si la superficie convexa está aislada pero las otras condiciones son las mismas.

8. Trabaje el problema de la piel de tambor circular si se "recoge" en su centro una distancia h y luego se suelta.

9. Trabaje el problema de la piel de tambor circular si el radio es c.

EJERCICIOS C

1. Una placa circular de radio unitario y difusividad κ tiene sus caras aisladas y su borde mantenidos a temperatura cero. Si la temperatura inicial está dada por

$f(r, \phi)$ muestre que la temperatura en cualquier punto de la placa en cualquier tiempo $t > 0$ está dada por

$$U(r, \phi, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=0} (a_{mn} \cos n\phi + b_{mn} \operatorname{sen} n\phi) e^{-\kappa\lambda_{mn}^2 t} J_n(\lambda_{mn} r)$$

donde
$$a_{m0} = \frac{1}{\pi[J_1(\lambda_{m0})]^2} \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} r f(r, \phi) J_0(\lambda_{m0} r) dr\, d\phi$$

$$\begin{Bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\pi[J_{n+1}(\lambda_{mn})]^2} \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} r f(r, \phi) J_n(\lambda_{mn} r) \begin{Bmatrix} \cos n\phi \\ \operatorname{sen} n\phi \end{Bmatrix} dr\, d\phi$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, y donde λ_{mn} es la m-ésima raíz positiva de $J_n(x) = 0$.

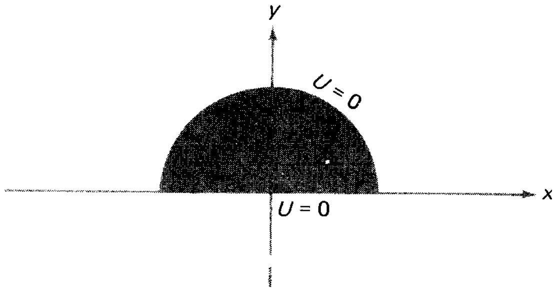


Figura 14.7

2. Trabaje el Ejercicio 1 si la temperatura inicial está dada por $U_0 r \operatorname{sen} \phi$ donde U_0 es una constante.
3. Una placa semicircular de radio unitario tiene sus bordes mantenidos a temperatura cero y sus caras aisladas (ver Figura 14.7). Si la temperatura inicial está dada por $f(r, \phi) = 100r^2 \cos 2\phi$, encuentre la temperatura $U(r, \phi, t)$ en cualquier punto dentro de la región en cualquier tiempo.
4. Resuelva e interprete físicamente el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \alpha r \qquad 0 < r < 1, t > 0$$

$$U(1, t) = 0, \qquad U(r, 0) = 0, \qquad |U(r, t)| < M$$

5. Un cilindro semicircular infinito $z \geqq 0$, $0 \leqq r \leqq 1$ tiene su superficie convexa $r = 1$ mantenida a potencial cero mientras que su base $z = 0$ se mantiene al potencial $f(r)$. Muestre que el potencial en cualquier punto interior del cilindro está dado por

$$V(r, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_n(\lambda_{mn} r) \operatorname{sen} n\phi \operatorname{senh} (\lambda_{mn} z)$$

donde λ_{mn} es la m-ésima raíz de la ecuación $J_n(x) = 0$ y

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi(\operatorname{senh} \lambda_{mn} L)\, J_{n+1}^2(\lambda_{mn})} \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{\pi} r f(r, \phi) J_n(\lambda_{mn} r) \operatorname{sen} n\phi\, dr$$

6. Un sólido en la forma de medio cilindro circular de radio unitario y longitud L tiene su base en el plano como se indica en la Figura 14.8. Si la superficie $z = L$ se

mantiene al potencial $f(r, \phi)$, $0 < r < 1$, $0 < \phi < \pi$ mientras que las superficies restantes se mantienen a potencial cero muestre que el potencial en cualquier punto dentro del cilindro está dado por

$$V(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r), \quad a_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr$$

donde λ_n es la n-ésima raíz positiva de $J_0(x) = 0$.

7. Un cilindro circular sólido está acotado por las superficies $r = 1$, $z = 0$ y $z = 1$. Si $r = 1$ se mantienen a temperatura f(z) mientras que $z = 0$ y $z = 1$ se mantienen a temperatura cero, muestre que la temperatura de estado estacionario está dada por

$$U(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(u) \operatorname{sen} n\pi u\, du \right) \frac{I_0(n\pi r)}{I_0(n\pi)} \operatorname{sen} n\pi z$$

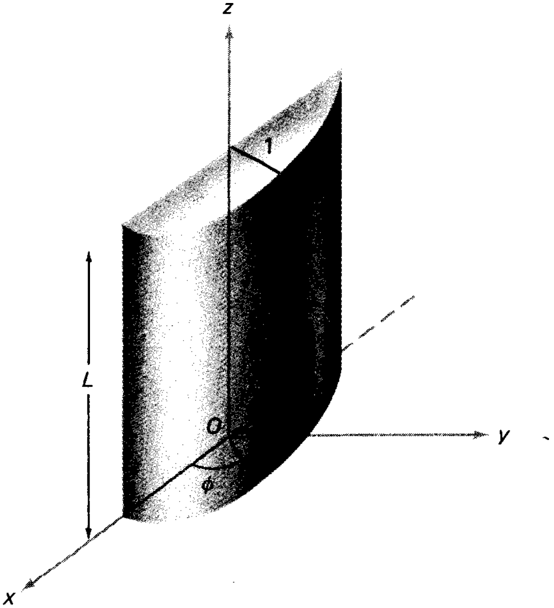


Figura 14.8

donde I_0 es la función modificada de Bessel de orden cero dada por

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

3 Problemas de valor de frontera que conducen a funciones de Legendre

3.1 EL LAPLACIANO EN COORDENADAS ESFERICAS

Con el objeto de tratar con problemas de valor de frontera que involucran esferas, es natural usar *coordenadas esféricas.* Estas coordenadas para la localización de cualquier punto P están dadas por (r, ϕ, θ), como se indica en la Figura 14.9.* Estos valores son tales que

$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \phi < 2\pi, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{1}$$

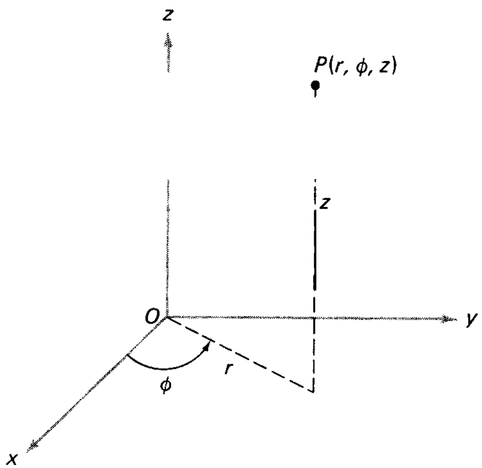


Figura 14.9

Las ecuaciones de transformación entre las coordenadas rectangulares y coordenadas esféricas están dadas por (ver el Ejercicio 9A)

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \; y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \; z = r\cos\theta \tag{2}$$

Usando éstas encontramos que el Laplaciano en coordenadas esféricas está dado por (ver Ejercicio 6C, página 560).

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}\right] \tag{3}$$

*No hay una notación estándar para coordenadas esféricas (o cilíndricas) y como consecuencia varias notaciones están en uso. La mayoría de los autores parecen favorecer las coordenadas esféricas usadas en la Figura 14.9 aunque las coordenadas de P algunas veces se escriben como (r, θ, ϕ). Otros intercambian θ y ϕ o usan ρ en lugar de r. Siguiendo a la mayoría que usa la Figura 14.9 se tiene que para el caso especial donde el punto P está en el plano xy, tenemos $\theta = \pi/2$ y entonces (r, ϕ) son las coordenadas polares planares de P. Esto es consistente con la notación ya usada y también está en concordancia con el uso de (r, ϕ, z) para coordenadas cilíndricas dadas en la página 633. En este último el caso especial $z = 0$ también produce las coordenadas polares (r, ϕ) en el plano xy.

Como una primera ilustración, consideremos una esfera metálica sólida de radio unitario situada como se muestra en la Figura 14.10. Asumamos que la superficie de la mitad superior de la esfera (para la cual $0 \leqq \theta < \pi/2$) se mantiene a alguna temperatura constante $U_0 \neq 0$, mientras que la mitad inferior (para la cual $\pi/2 < \theta \leqq \pi$) se mantiene a temperatura cero. Para hacer esto físicamente posible podemos suponer por ejemplo que las mitades superior e inferior de la superficie están ligeramente separadas o aisladas una de otra. Como un resultado de la conducción de calor la esfera finalmente alcanzará alguna distribución de temperatura de estado estacionario la cual depender!, debido a la manera como hemos escogido la orientación de la esfera en la Figura 14.10, de las variables r y θ pero no de ϕ y t. Nos gustaría determinar esta temperatura de estado estacionario.

Formulación matemática. La ecuación diferencial parcial que debemos resolver es la ecuación de Laplace $\nabla^2 U = 0$. Usando (3) y el hecho que U depende sólo de r y θ, esto es, $U = U(r, \theta)$, esta ecuación es

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{4}$$

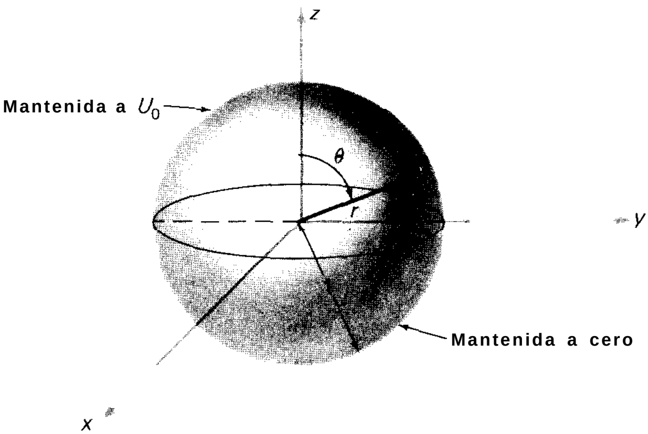


Figura 14.10

Las condiciones de frontera son $$U(r, \theta) = \begin{cases} U_0, & 0 \leqq \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leqq \theta \leqq \pi \end{cases} \tag{5}$$

junto con la obvia de que U está acotada dentro de la esfera.

Solución Asuma la solución separable a (4) dada por $U = R\Theta$, donde R depende sólo de r y Θ depende sólo de θ. Entonces (4) llega a ser

$$r\Theta \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{R}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{r}{R} \frac{d^2}{dr^2}(rR) = \frac{-1}{\Theta \operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) \tag{6}$$

al dividir por $R\Theta$. Puesto que la segunda ecuación en (6) tiene un lado que depende sólo de r y el otro sólo de θ. cada lado debe ser igual a una constante que tomamos como λ^2. Tenemos así las ecuaciones

$$r\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \lambda^2 R = 0, \qquad \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \lambda^2\Theta\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{7}$$

La primera ecuación en (7) se puede escribir como

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0 \tag{8}$$

la cual se reconoce como una ecuación de Euler teniendo como solución

$$R = c_1 r^n + \frac{c_2}{r^{n+1}}, \quad \text{donde } \lambda^2 = -n(n+1) \tag{9}$$

La segunda ecuación en (7) es más complicada. Debido a la presencia de $\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación podríamos ser llevados a tratar la transformación de la variable independiente θ a otra variable independiente x dada por $x = \operatorname{sen}\theta$. Sin embargo esto no conduce a nada útil. Una mejor selección la da la transformación

$$x = \cos\theta \tag{10}$$

En tal caso tenemos de la regla de la cadena para la diferenciación

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{dx}, \text{ de modo que } \operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}^2\theta\frac{d\Theta}{dx} = (x^2-1)\frac{d\Theta}{dx}$$

Entonces $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d\Theta}{dx}\right]\frac{dx}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]$

Usando este último resultado en la segunda de las ecuaciones (7) junto con $\lambda^2 = -n(n+1)$, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + n(n+1)\Theta = 0 \tag{11}$$

Esta *es* la *ecuación diferencial de Legendre,* la cual ya hemos investigado en el Capítulo siete. Su solución está dada por

$$\Theta = c_3P_n(x) + c_4Q_n(x) \tag{12}$$

donde $P,(n)$ y $Q_n(x)$ son funciones de Legendre. De (9) y (12) vemos que

$$U(r,\theta) = \left[c\ r^n{}_1 + \frac{c_2}{r^{n+1}}\right]\left[c_3P_n(x) + c_4Q_n(x)\right] \tag{13}$$

Puesto que esta solución llega a ser infinita para $r = 0$, esto es, en el centro de la esfera, debemos escoger $c_2 = 0$. Sin embargo, esto no es suficiente para satisfacer la condición de acotamiento para U, debido a que las funciones de Legendre también llegan a ser infinitas para $x = \pm 1$ o equivalentemente para $\theta = 0, \pi$. Podemos obtener acotamiento si tomamos n como un entero no negativo, esto es, n = 0, 1, 2,. , en cuyo caso las funciones $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre, y escojamos $c_4 = 0$ para evitar las funciones $Q_n(x)$ las cuales son no acotadas para $x = \pm 1$ o $\theta = 0, \pi$. Así (13) da

$$U(r, \theta) = Ar^n P_n(x) \tag{14}$$

tomando $A = c_1 c_3$. Al superponer las soluciones que tienen la forma (14), tenemos

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(x) \tag{15}$$

Podemos ahora determinar los coeficientes a_n de las condiciones de frontera (5). Para ello notemos primero que en términos de $x = \cos\theta$ la condición de frontera (5) es

$$U(1, \theta) = f(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x \leqq 1 \\ 0, & -1 \leqq x < 0 \end{cases} \tag{16}$$

o usando (15)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{17}$$

Esto, sin embargo, requiere la expansión de f(x) en una serie de polinomios de Legendre ***o serie de Legendre,*** ya hecho en el Capítulo ocho, página 408. Como en el caso de las series de Fourier y Bessel, multiplicamos ambos lados de (17) por una función apropiada, en este caso ***P,(x),*** e integramos ambos lados de $x = -1$ a 1 para obtener

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx \tag{18}$$

Puesto que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad m \neq n \tag{19}$$

la serie a la derecha de (18) se reduce a un solo término, donde $m = n$, esto es

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = a_n \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx \quad \text{o} \quad a_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx}{\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx} \tag{20}$$

Puesto que

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

(20) se reduce a

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \tag{21}$$

Usando (16) esto da

$$a_n = \frac{2n+1}{2} U_0 \int_0^1 P_n(x)dx$$

Colocando n = 0, 1, 2,. , usando los primeros polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, .$$

encontramos

$$a_0 = \frac{U_0}{2}, \quad a_1 = \frac{3U_0}{4}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{7U_0}{16}, .$$

Así $$U(r, \theta) = \frac{U_0}{2}\left[1 + \tfrac{3}{2}rP_1(x) - \tfrac{7}{8}r^3P_3(x) + \cdots\right] \tag{22}$$

Observación 1. El término general de esta serie se puede encontrar al hacer uso del resultado (93) obtenido en la página 410. Usando esto encontramos

$$U(r, \theta) = \frac{U_0}{2} + \tfrac{3}{4}U_0rP_1(x) + \frac{U_0}{2}\sum_{n=3,5,7}(-1)^{(n-1)/2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdots(n+1)}r^nP_n(x) \tag{23}$$

donde solamente los términos correspondientes a $n = 3, 5, 7,$. aparecen en la última sumatoria.

3.3 POTENCIAL ELECTRICO 0 GRAVITACIONAL DEBIDO A UNA ESFERA

El problema acabado de resolver se puede interpretar como uno en teoría de potencial en el cual hay una carga eléctrica o una masa de tal modo distribuida para dar potenciales U_0 y 0, respectivamente, a las mitades superior e inferior de la superficie esférica. El potencial dentro de la esfera está entonces dado por (23).

En tal caso es natural preguntar por el potencial por fuera de la esfera. Para determinar esto debemos resolver la ecuación de Laplace (4) para la región $r > 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ donde $U(r, \theta)$ se reduce a (5) para $r = 1$. Para satisfacer el acotamiento en la región $r > 1$, debemos escoger $c_1 = 0$ en (13), de otra manera la solución llegaría a ser infinita cuando $r \to \infty$. En forma similar, puesto que debemos tener acotamiento para $\theta = 0, \pi$, esto es, $x = \pm 1$, debemos escoger $c_4 = 0$ como antes. Esto nos lleva a la solución

$$U(r, \theta) = \frac{A}{r^{n+1}}P_n(x)$$

0 por superposición $$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}P_n(x) \tag{24}$$

Debemos ahora determinar los coeficientes a_n para que (24) se reduzca a (16) para $r = 1$. Esto lleva a (17). Así obtenemos los mismos valores de a_n como antes, esto es, aquellos dados por (21). Usando éstos en (24) vemos que el potencial requerido por fuera de la esfera está dado por

$$U(r, \theta) = \frac{U_0}{2r} + \frac{3}{4}\frac{U_0}{r^2}P_1(x) + \frac{U_0}{2}\sum_{n=3,5,7,\ldots}(-1)^{(n-1)/2}\frac{1\cdot 3\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdots(n+1)}\frac{P_n(x)}{r^{n+1}} \tag{25}$$

Observación 2. El resultado (25) también tiene una interpretación de flujo de calor. Este representa la temperatura de estado estacionario en una región conductora infinita que tiene "agujero esférico" de radio unitario, donde los bordes del agujero se mantienen a la temperatura dada por (16).

EJERCICIOS A

1. La superficie de una esfera de radio c con centro en el origen está cargada de modo que su potencial es constante e igual a V_0. (a) Encuentre el potencial dentro de la esfera. (b) Encuentre el potencial por fuera de la esfera. (c) ¿Qué carga q en la superficie se necesita para producir el potencial en (b)?
2. Suponga que la parte superior de la superficie esférica mostrada en la Figura 14.10, página 648, está cargada al potencial V_0 mientras que la mitad inferior está car-

gada al potencial $-V_0$, donde V_0 es una constante. Encuentre el potencial dentro y (b) fuera de la esfera.

3. Muestre que en los puntos bastante alejados de la superficie esférica del Ejercicio **2** el potencial está dado a un alto grado de aproximación por $V = 3V_0 \cos\theta/2r^2$.

4. Encuentre la temperatura de estado estacionario dentro de un sólido conductor esférico de radio unitario situado como en la Figura 14.10, página 648, si la temperatura de la superficie está dada por $40\cos\theta - 20\cos^3\theta$.

5. Encuentre el potencial (a) dentro y (b) fuera de la esfera unitaria de la Figura 14.10, página 648, si el potencial en la superficie está dada por $V_0 \cos 2\theta$. Dé una interpretación que involucre flujo de calor.

6. Encuentre el potencial (a) dentro y (b) fuera de una superficie esférica de radio unitario cuya mitad superior se mantiene al potencial $V_0\cos\theta$ y cuya mitad inferior se mantiene al potencial cero.

7. Un hemisferio sólido de radio unitario tiene su base en el plano xy y centro en el origen. Si la base está aislada y la superficie convexa se mantiene a temperatura $60\cos\theta$, encuentre la temperatura en cualquier punto del sólido.

8. Deduzca las ecuaciones de transformación (2), página 647, para coordenadas esféricas.

EJERCICIOS B

1. Una concha esférica tiene un radio interior r_1, y radio exterior r_2. Las temperaturas de las superficies interior y exterior están dadas, respectivamente, por $F_1(x)$ y $F_2(x)$, donde $x = \cos\theta$. Muestre que la temperatura en cualquier punto de la concha está dada por

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right) P_n(x)$$

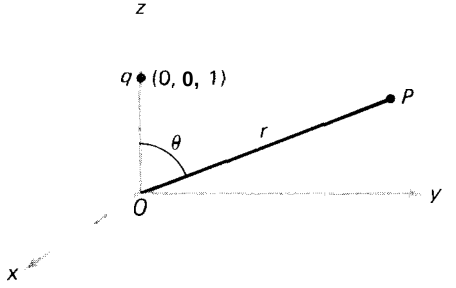


Figura 14.1 1

donde a_n y b_n se determinan al resolver simultáneamente las ecuaciones

$$a_n r_1^n + \frac{b_n}{r_1^{n+1}} + \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F_1(x)P_n(x)dx, \quad a_n r_2^n + \frac{b_n}{r_2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F_2(x)P_n(x)dx$$

2. Trabaje el Ejercicio 1 si $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $F_1(x) = 100 - 20x$, y $F_2(x) = 50 + 30x$

3. Una carga q está localizada en el **punto** (0, 0, 1) de un sistema de coordenadas rectangulares (ver Figura 14.11). Muestre que el potencial debido a esta carga en cualquier punto P distante r del origen está dado por

$$V = \frac{q}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = q\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta)$$

Discuta la relación con la función generatriz para polinomios de Legendre (página 351).

4. Dos cargas q y $-q$ (ver Figura 14.12) están localizadas en los puntos A y B, respectivamente, separados una distancia d. Si $OP = r$ es la distancia de cualquier punto P desde el punto medio 0 de AB, y θ es el ángulo entre OP y OA, muestre que el potencial en P está dado aproximadamente por

$$V = \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

donde $p = qd$. La combinación de las dos cargas opuestas q y $-q$ con frecuencia se llama un *dipolo* y el producto $p = qd$ se llama el *momento dipolo*.

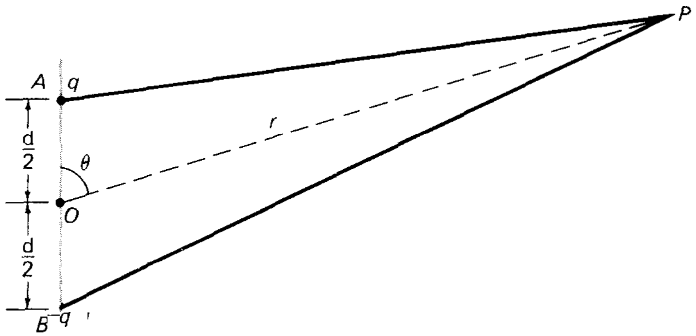


Figura 14.12

5. Use el Ejercicio 4 para mostrar que la distribución de carga esférica del Ejercicio 2A es equivalente a un dipolo que tiene momento dipolo de $3V_0/2$.

6. Muestre que la fuerza sobre una carga unitaria colocada en el punto P del dipolo de la Figura 14.12 tiene magnitud

$$\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Use el resultado para hallar la magnitud de la fuerza debido a la distribución de carga del Ejercicio A. (*Sugerencia:* La relación entre la fuerza F y el potencial V está dada por $F = -\nabla V$, esto es, la fuerza es el negativo del gradiente del potencial).

7. Describa las superficies de igual potencial *o superficies equipotenciales* a distancias alejadas de la distribución de carga del Ejercicio 2A. ¿Cuáles son las trayectorias ortogonales correspondientes a estas superficies y explique su significado físico?

EJERCICIOS C

1. Si la ecuación de Laplace se escribe en coordenadas esféricas, el resultado es

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0$$

usando (3) en la página 647. (a) Asumiendo que las variables son separables de modo que $U = R\Theta\Phi$, donde R, Θ, Φ son funciones sólo de r, θ, ϕ, respectivamente, muestre que

$$r^2R'' + 2rR' = n(n+1)R, \qquad \Phi'' + m^2\Phi = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\theta\,\Theta'' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Theta' + [n(n+1)\operatorname{sen}^2\theta - m^2]\Theta = 0$$

(b) Muestre que la tercera ecuación en (a) llega a ser

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

al hacer $x = \cos\theta$. Esta ecuación que se reduce a la ecuación de Legendre para el caso $m = 0$ a menudo se llama la ecuación. asociada de Legendre.

2. (a) Muestre que si $m = 0, 1, 2,$. una solución a la ecuación asociada de Legendre en el Ejercicio 1(b) está dada por

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

las cuales se llaman las *funciones de Legendre asociadas*. ¿Cuáles son éstas si (i) $m = 0$; (ii) $m > n$?

(b) Muestre que para cualquier entero $n \geqq 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^k(x)\,dx = 0, \quad m \neq k$

esto es, las funciones $P_n^m(x)$, $m = 0, 1, 2,$. , son mutuamente ortogonales en $1 \leqq x \leqq 1$.

(c) Verifique para algunos casos especiales el resultado

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

¿Puede usted probar esto en general?

(d) Muestre usando los resultados anteriores cómo expandir una función dada en una serie de funciones de Legendre asociadas e ilustre con un ejemplo.

3. Use los Ejercicios 1 y 2 para mostrar que una solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas la cual está acotada por $r = 0$ y $1 \leqq x \leqq 1$ es

$$U = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_{mn}\cos m\phi + b_{mn}\operatorname{sen} m\phi)P_n^m(\cos\theta)$$

4. Muestre cómo se puede usar la ortogonalidad de las funciones de Legendre asociadas para resolver varios problemas involucrando esferas en las cuales puede haber una dependencia ϕ como también dependencia r y θ. Ilustre construyendo y resolviendo un ejercicio.

5. ¿Cómo modificaría usted la solución del Ejercicio 2 en los casos donde (a) U debe estar acotada en $r = \infty$; (b) la región para la cual buscamos U está dada por $r_1 < r < r_2$?

6. Construya y resuelva ejercicios para ilustrar los casos en el Ejercicio 5.

4 Problemas misceláneos

Hay muchas clases de problemas que surgen en ciencia e ingeniería los cuales requieren el uso de funciones de Bessel o de Legendre y algunas veces una combinación de éstas. Los problemas no necesitan involucrar necesariamente la geometría de cilindros o esferas asociadas con tales problemas. También, en muchos casos las ecuaciones diferenciales que surgen de sus formulaciones matemáticas no son precisamente las estándares dadas en el Capítulo doce. Dedicamos esta sección a tres ejemplos de tales problemas, los dos primeros algo inofensivos que involucran vibraciones de una cadena y el potencial debido a un alambre circular, y el tercero un problema de bomba atómica.

4.1 EL PROBLEMA DE LA CADENA VIBRANTE

Supongamos, como se indica en la Figura 14.13, que tenemos una cadena uniforme de longitud L y masa M suspendida verticalmente de un punto fijo 0. Suponga que a cada punto de la cadena se le da un pequeño desplazamiento horizontal en tiempo $t = 0$, y luego se suelta la cadena. Como resultado la cadena sufrirá vibraciones, y nos gustaría, como en los casos de la cuerda vibrante o vibraciones de la piel de tambor, investigar estas vibraciones. Puesto que este problema es al menos tan complicado como el problema del péndulo vibrante simple, para el cual surgen dificultades cuando las vibraciones no son pequeñas, asumiremos pequeñas vibraciones para la cadena.

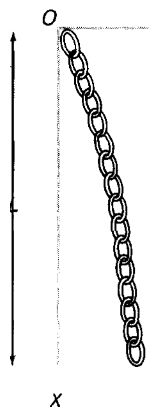


Figura 14.13

Formulación matemática. Es conveniente escoger un sistema de coordenadas rectangulares con origen en 0 y con ejes positivos x y y como se indica en la Figura 14.13. La posición de equilibrio de la cadena coincide con el eje x. El desplazamiento transversal u horizontal de cada punto x de la cadena en tiempo t se puede denotar por $Y(x, t)$ o simplemente Y. Esta es la función que deseamos determinar.

Puesto que la cadena tiene masa, habrá una tensión en cada punto x la cual es igual al peso de aquella parte de la cadena por debajo de x. Si denotamos por $p = M/L$ la masa por unidad de longitud de la cadena, entonces puesto que la longitud de aquella parte de la cadena por debajo de x es $L - x$, la masa de esta parte es $\rho(L - x)$. Así el peso o tensión es $\tau = \rho g(L - x)$. Ahora en el Capítulo doce, página 571, cuando formulamos la ecuación para una cuerda vibrante, permitimos la posibilidad de que la cuerda tenga tensión variable. Esa misma ecuación del movimiento servirá para nuestro problema de la cadena, con tal que asumamos condiciones de desplazamiento y pendiente pequeñas, las cuales se asumieron en esa deducción. En este caso la ecuación del movimiento es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{[\rho g(L - x)]\frac{\partial Y}{\partial x}\right\} = \rho\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad g\frac{\partial}{\partial x}\left\{(L - x)\frac{\partial Y}{\partial x}\right\} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \tag{1}$$

Puesto que el extremo $x = 0$ está fijo, $Y(0, t) = 0, \quad t > 0$ (2)

Si asumimos que inicialmente a cada punto de la cadena se le da un desplazamiento f(x), tenemos la condición

$$Y(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < L \tag{3}$$

También, el hecho que la cadena se suelta de modo que cada punto tiene velocidad cero conduce a

$$Y_t(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < L \tag{4}$$

Como de costumbre también imponemos el requisito de acotamiento.

Solución Haciendo $Y(x, t) = X(x)T(t)$ en (1), y separando las variables, obtenemos

$$\frac{1}{X}\frac{d}{dx}\left\{(L - x)\frac{dX}{dx}\right\} = \frac{1}{gT}\frac{d^2T}{dt^2} \tag{5}$$

Haciendo cada lado igual a la constante $-\lambda^2$. obtenemos las ecuaciones

$$x)\frac{\cdots}{\cdot}\} + \lambda^2 X = 0, \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^2 gT = 0 \tag{6}$$

La segunda ecuación es fácil de resolver, y encontramos

$$T = c_1 \cos \lambda\sqrt{g}t + c_2 \operatorname{sen} \lambda\sqrt{g}t \tag{7}$$

La primera ecuación puede escribirse en la forma

$$(L - x)\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0 \tag{8}$$

pero ciertamente no es obvio cuál es su solución. La presencia de $L - x$ en el coeficiente de d^2X/dx^2 sugiere la transformación $L\text{-}x = u$. Esto da

$$u\frac{d^2X}{du^2} + \frac{dX}{du} + \lambda^2 X = 0 \tag{9}$$

Podemos resolver esta ecuación usando el método de Frobenius (ver Capítulo siete), pero en vez emplearemos otro método que involucra transformación de variables el cual con frecuencia es útil al resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales. De acuerdo a este método, cambiamos la variable independiente de u a v usando la transformación $u = cv^{\alpha}$, donde por el momento no sabemos qué valores escoger para las constantes c y α, pero esperamos escogerlas apropiadamente para obtener una ecuación diferencial que podamos reconocer. Con esta transformación encontramos

$$\frac{dX}{du} = \frac{dX}{dv}\frac{dv}{du} = \frac{dX/dv}{du/dv} = \frac{1}{c\alpha v^{\alpha-1}}\frac{dX}{dv}$$

$$\frac{d^2X}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dX}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{c\alpha v^{\alpha-1}}\frac{dX}{dv}\right) = \frac{\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{c\alpha v^{\alpha-1}}\frac{dX}{dv}\right)}{du/dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{c\alpha v^{\alpha-1}}\frac{dX}{dv}\right)\left(\frac{1}{c\alpha v^{\alpha-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2\alpha^2}\left\{v^{2-2\alpha}\frac{d^2X}{dv^2} + (1-\alpha)v^{1-2\alpha}\frac{dX}{dv}\right\}$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (9) y simplificando, obtenemos

$$\frac{v^{2-\alpha}}{c\alpha^2}\frac{d^2X}{dv^2} + \frac{v^{1-\alpha}}{c\alpha^2}\frac{dX}{dv} + \lambda^2X = 0$$

o

$$\frac{d^2X}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dX}{dv} + \frac{c\alpha^2\lambda^2}{v^{2-\alpha}}X = 0 \tag{10}$$

Si hacemos la selección $\alpha = 2$ y $c\alpha^2\lambda^2 = 1$ ó $c = \frac{1}{4\lambda^2}$ (10) se convierte en

$$\frac{d^2X}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dX}{dv} + X = 0 \quad \text{o} \quad v\frac{d^2X}{dv^2} + \frac{dX}{dv} + vX = 0 \tag{11}$$

la cual reconocemos como la ecuación de Bessel de orden cero teniendo la solución general

$$X = c_3J_0(v) + c_4Y_0(v) \tag{12}$$

Recordando ahora que $u = cv^{\alpha} = \frac{v^2}{4\lambda^2}$ o $v = 2\lambda\sqrt{u}$

y que $u = L - x$, encontramos $v = 2\lambda\sqrt{L - x}$, y así (12) se puede escribir

$$X = c_3J_0(2\lambda\sqrt{L-x}) + c_4Y_0(2\lambda\sqrt{L-x}) \tag{13}$$

la cual es la solución general de la primera de las ecuaciones (6).

Así una solución posible a nuestro problema de valor de frontera tiene la forma

$$Y(x, t) = \{c_3J_0(2\lambda\sqrt{L-x}) + c_4Y_0(2\lambda\sqrt{L-x})\}\{c_1\cos(\lambda\sqrt{g}t) + c_2\operatorname{sen}(\lambda\sqrt{g}t)\} \tag{14}$$

Puesto que la solución debe ser acotada, en particular en $x = L$, debemos escoger $c_4 = 0$ en (14). También por la condición (4) debemos escoger $c_2 = 0$. Así la solución obtenida hasta ahora es

$$Y(x, t) = AJ_0(2\lambda\sqrt{L-x})\cos(\lambda\sqrt{g}t) \tag{15}$$

donde $A = c_3c_1$.

La condición (2) produce $J_0(2\lambda\sqrt{L}) = 0$ (16)

Denotando las raíces positivas de esta ecuación por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tenemos

$$2\lambda\sqrt{L} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{2\sqrt{L}}, \frac{\lambda_2}{2\sqrt{L}}, \ldots \tag{17}$$

Esto lleva a la solución
$$a_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{1-\frac{x}{L}}\right)\cos\left(\frac{\lambda_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) \tag{18}$$

Superponiendo estas soluciones para satisfacer la condición (3), encontramos la solución posible

$$Y(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{1-\frac{x}{L}}\right)\cos\left(\frac{\lambda_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) \tag{19}$$

La condición (3) requiere que
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{1-\frac{x}{L}}\right) \tag{20}$$

Para hallar los coeficientes a_n en (20), es conveniente hacer $\sqrt{1-x/L} = u$ de modo que $x = L[1-u^2]$. Entonces (20) llega a ser

$$f(L[1-u^2]) = F(u) = \sum_{n=1} a_n J_0(\lambda_n u) \tag{21}$$

Por tanto
$$a_n = \frac{\int_0^1 uF(u)J_0(\lambda_n u)\,du}{\int_0^1 u[J_0(\lambda_n u)]^2\,du} = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2}\int_0^1 uF(u)J_0(\lambda_n u)\,du \tag{22}$$

Usando estos coeficientes en (19), obtenemos la solución requerida a nuestro problema.

Interpretación. Los términos en (19) correspondientes a $n = 1, 2, \ldots$ representan los varios modos de vibración de la cadena. Si la cadena está vibrando en el modo correspondiente a $n = 1$, el coeficiente a_1 en (19) no es cero, mientras que los otros coeficientes $a_2, a_3, \ldots$ son cero. En este caso la forma de la cadena en $t = 0$ está dada por $a_1 J_0(\lambda_1\sqrt{1-x/L})$. Entonces a medida que transcurre el tiempo la cadena vibra como un todo alrededor de la posición de equilibrio. La frecuencia de este modo más bajo, algunas veces llamada la *frecuencia fundamental* por analogía con la cuerda vibrante, está dada por

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2{,}405}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{23}$$

Similarmente, la frecuencia correspondiente al n-ésimo modo está dada por

$$f_n = \frac{\lambda_n}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Las frecuencias correspondientes a $n = 2, 3, \ldots$, algunas veces llamadas la *segunda, tercera,. armónicas*, están dadas aproximadamente por

$$f_2 = \frac{5{,}520}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad f_3 = \frac{8{,}654}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}, \ldots \tag{25}$$

Es posible mostrar que estas frecuencias altas no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, de modo que en un movimiento general de la cadena, el cual corresponde a una superposición de los varios modos, no esperaríamos escuchar "música".

Es de interés comparar el período de una cadena vibrante en su modo más bajo con aquel de un péndulo simple. En el caso de un péndulo simple de longitud L, el período está dado por

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{26}$$

En el caso de la cadena éste está dado por

$$T_c = \frac{4\pi}{2{,}405} \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{27}$$

Por tanto el período para la cadena es algo más pequeño que para el péndulo simple.

4.2 POTENCIAL ELECTRICO DEBIDO A UN ALAMBRE CIRCULAR UNIFORMEMENTE CARGADO

Considere un alambre circular de radio unitario al cual se le da una densidad de carga eléctrica constante ρ. Deseamos determinar el potencial eléctrico debido a esta distribución de carga. Claramente, el problema podría también interpretarse como uno que involucra potencial gravitacional, en cuyo caso ρ es la densidad de masa en vez de una densidad de carga.

Formulación matemática. Escojamos el alambre en el plano xy, como se muestra en la Figura 14.4 de modo que no haya dependencia de ϕ. El potencial V en cualquier punto P debe entonces satisfacer la ecuación de Laplace sin la dependencia de ϕ, como se da por la ecuación (4) en la página 648. Sin embargo, no hay condición de frontera evidente en este problema distinta de la acostumbrada sobre acotamiento, y podría así parecer que no podemos seguir adelante. Razonamos sin embargo que si de alguna manera podemos determinar el potencial para algún conjunto de puntos, esto podría servir como una condición de frontera. Escogemos como el conjunto de puntos una línea perpendicular al plano del alambre circular (el plano xy) que pasa por el centro de este círculo, esto es, el eje z.

Puesto que ρ es la carga por unidad de longitud del alambre, la carga en un arco del alambre circular de longitud ds es ρds. El potencial en el punto P debido a esta carga es

$$\frac{\rho\, ds}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{\rho(1\; d\phi)}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{\rho\, d\phi}{\sqrt{z^2+1}}$$

De donde, por integración, el potencial en P debido al alambre circular es

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho\, d\phi}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{z^2+1}}$$

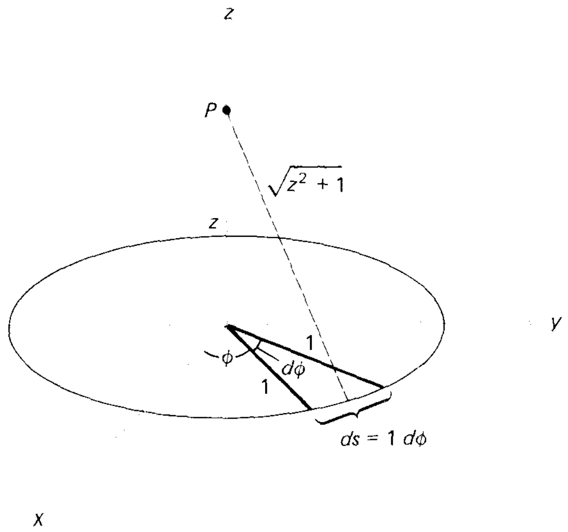


Figura 14.14

Puesto que V depende sólo de r y θ, podemos tomar como nuestra condición de frontera para $V(r, \phi)$ la condición que para $r = z$ y $\theta = 0$

$$V(z, 0) = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{z^2 + 1}} \tag{28}$$

Consideraremos $z > 0$. El caso $z < 0$ se obtiene por simetría.

Solución Se deben considerar dos casos.

Caso 1, $0 < r < 1$. En este caso, como ya lo hemos notado, una solución posible está dada por [ver (15) en la página 650],

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Entonces usando la condición de frontera (28) y el hecho que $P_n(1) = 1$, tenemos

$$V(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{z^2 + 1}} \tag{29}$$

Para encontrar a_n debemos expandir la función a la derecha en una serie de potencia en z. Esto se puede hacer ya sea usando el método de la serie de Taylor o más fácilmente por el teorema binomial. Usando este último enfoque, encontramos

$$\frac{2\pi\rho}{\sqrt{1 + z^2}} = 2\pi\rho(1 + z^2)^{-1/2} = 2\pi\rho\left\{1 + (-\tfrac{1}{2})z^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}z^4 + \cdots\right\}$$

$$= 2\pi\rho\left\{1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \cdots\right\} \tag{30}$$

Comparando (29) y (30), vemos que

$$a_0 = 2\pi\rho, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\pi\rho, a_3 = 0, \quad a_4 = \tfrac{3}{4}\pi\rho,$$

o
$$a_{2k} = (-1)^k 2\pi\rho\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right], \quad a_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{31}$$

De donde $V(r, \theta) = 2\pi\rho\,\{1 - \tfrac{1}{2}r^2P_2(\cos\theta) + \tfrac{3}{8}r^4P_4(\cos\theta) - \cdots\}$

o
$$V(r, \theta) = 2\pi\rho\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right]r^{2k}P_{2k}(\cos\theta)\right\} \tag{32}$$

Cuso 2, $r > 1$. En este caso debemos tomar $c_1 = 0$ en la solución (13) en la página 649 debido a que la solución debe ser acotada a medida que $r \to \infty$. También, como antes, escogemos $c_4 = 0$. Entonces tenemos

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \tag{33}$$

La condición de frontera (28) produce

$$V(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^{n+1}} = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{z^2+1}} \tag{34}$$

Para encontrar b_n debemos expandir la función a la derecha en una serie de potencia en $1/z$. Usando el teorema binomial una vez más, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\rho}{\sqrt{z^2+1}} &= \frac{2\pi\rho}{z}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^{1/2} \\ &= \frac{2\pi\rho}{z}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{z^4}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{z^6}\right) + \cdots\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

Entonces comparando (34) y (35) se tiene que

$$b_0 = 2\pi\rho, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\pi\rho, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \tfrac{3}{4}\pi\rho, \tag{36}$$

y sustituyendo en (33) se ve que la solución requerida es

$$V(r, \theta) = \frac{2\pi\rho}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{P_2(\cos\theta)}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{P_4(\cos\theta)}{r^4} - \cdots\right\} \tag{37}$$

o
$$V(r, \theta) = \frac{2\pi\rho}{r}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right]\frac{P_{2k}(\cos\theta)}{r^{2k}}\right\} \tag{38}$$

Observación 3. De (38) vemos que una buena aproximación para el potencial lejos del alambre está dado por

$$V(r, \theta) = \frac{2\pi\rho}{r} - \frac{\pi\rho P_2(\cos\theta)}{r^3} = \frac{2\pi\rho}{r} - \frac{\pi\rho(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} \tag{39}$$

el segundo término proporciona una corrección indicando la dependencia angular. Si la distancia es lo suficientemente grande, esta dependencia angular es despreciable, y el resultado para todos los propósitos prácticos está dado por q/r, donde $q = 2\pi\rho$ es la carga total en el alambre lo cual concuerda con nuestra expectativa.

4.3 EL PROBLEMA DE LA BOMBA ATOMICA

Si el núcleo de un átomo de uranio es bombardeado con neutrones, puede suceder que el núcleo "capture" un neutrón. Cuando esto ocurre, el núcleo se divide en dos partes, produciéndose la liberación de neutrones Ya presentes en el núcleo y también liberándose una cantidad de energía relativamente grande. Este proceso se llama *fisión nuclear*. Los neutrones que se liberan de esta manera pueden a su vez bombardear los núcleos de otros átomos de uranio, produciéndose una fisión nuclear mayor. Esto resulta en una *reacción en cadena* en la cual mayores y mayores cantidades de energía se pueden liberar.

Si el proceso se puede hacer que ocurra en un intervalo de tiempo suficientemente corto, habrá una liberación tremenda de energía y una explosión.

Esto, en breve, es la base de la bomba atómica. Sin embargo, así como acabamos de observar que el principio de resonancia se puede usar para propósitos constructivos o destructivos, así ocurre que la naturaleza nos ha dado la opción de emplear la fisión nuclear constructiva o destructivamente. Grandes cantidades de energía se pueden obtener por períodos largos de tiempo cuando la reacción en cadena, "controlándola apropiadamente", se lleva a cabo en un ***reactor nuclear.*** Esta energía nos proporciona energía eléctrica tan vital a nuestra civilización.

Aunque es obvio que con la información anterior no somos capaces de salir a construir una bomba atómica o un reactor nuclear, es de interés que con una formulación matemática de los simples hechos presentados anteriormente podamos llegar a algunas ideas importantes.

Para empezar en algún lado, supongamos que por algún medio somos capaces de introducir neutrones dentro de una masa de material fisionable el cual ocupa algún tipo de recipiente, tal como un cilindro, esfera, etc. Esta fuente de neutrones produce fisión nuclear la cual a su vez produce mas neutrones y más fisión nuclear, etc. Nos gustaría formular esto matemáticamente.

Formulación matemática. Supongamos para nuestros propósitos que el recipiente es un cilindro* teniendo altura h y radio a situado en un sistema de coordenadas rectangulares de modo que su base esta en el plano xy y su eje coincide con el eje z, como se muestra en la Figura 14.15. Ahora el proceso de tener neutrones viajando en este cilindro es análogo a la difusión de un químico en un medio poroso, el cual discutimos en la parte inicial de este libro. En vez de hablar de la concentración de una sustancia química que se difunde, podemos hablar de la densidad de neutrones, esto es, el numero de neutrones por unidad de volumen. Si N representa esta densidad de neutrones, nos gustaría tener, por analogía con la habitual ecuación de difusión, una ecuación para N dada por

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\nabla^2 N \tag{40}$$

*En los ejercicios se consideran otros tipos de recipientes.

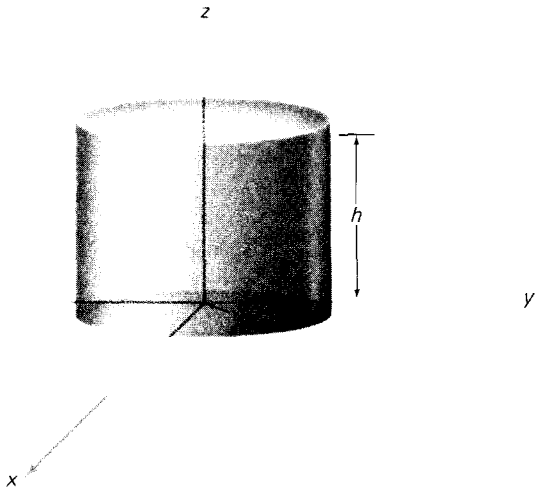


Figura 14.15

El coeficiente D, el cual depende, de varios factores físicos y que asumiremos constante, se llamará la *difusividad* de neutrones. La ecuación (40), sin embargo, no tiene en cuenta el hecho de que una nueva fuente de neutrones está siendo constantemente generada dentro del cilindro por el proceso de fisión. Debemos por tanto modificar la ecuación incluyendo un término fuente para este suministro extra de neutrones. Un supuesto simple de hacer es que el suministro extra de neutrones por unidad de volumen por unidad de tiempo es proporcional a la densidad instantánea de neutrones, esto es, tomamos como término fuente γN, donde γ es una constante de proporcionalidad. La ecuación resultante es

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\nabla^2 N + \gamma N \tag{41}$$

Si asumimos que la distribución instantánea de neutrones depende sólo de las coordenadas cilíndricas r y z pero no de ϕ, entonces podemos denotar la densidad de neutrones por $N(r, z, t)$, y la ecuación (41) se convierte en

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) + \gamma N \tag{42}$$

Debemos ahora investigar algunas condiciones posibles de frontera. Una condición que siempre hemos asumido en previas formulaciones de problemas de valor de frontera fue la condición de acotamiento de una variable física en espacio y en tiempo. Nos hacemos la pregunta si deseamos tal acotamiento en el problema presente. Para responder esto primero preguntamos si deseamos que la densidad de neutrones aumente con el tiempo. La respuesta es que si deseamos hacer una bomba atómica o un reactor nuclear controlado sería deseable que la densidad de neutrones incrementara con el tiempo; ciertamente no desearíamos que disminuyera con el tiempo. Tenemos así la condición

$$N(r, z, t) \text{ no debe decrecer a medida que } t \text{ crece} \tag{43}$$

Como una función de r y z para un t fijo, sería de hecho físicamente imposible que la densidad fuera no acotada. Por tanto debemos exigir la condición

$$N(r, z, t) \text{ **acotada** para } 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq z \leqq h \text{ en cualquier } t \text{ fijo} \tag{44}$$

Condiciones adicionales se obtienen al notar que la densidad de neutrones debe ser cero sobre la superficie del cilindro. Así

$$N(r, 0, t) = 0, \qquad N(a, z, t) = 0, \qquad N(r, h, t) = 0 \tag{43}$$

También si asumimos que existe alguna distribución inicial de neutrones, tenemos

$$N(r, z, 0) = f(r, z) \tag{46}$$

Solución Haciendo $N = RZT$, donde R, Z, T son, respectivamente, funciones de r, z, t, encontramos de (42)

$$RZT' = D\left(R''ZT + \frac{1}{r}R'ZT + RZ''T\right) + \gamma RZT$$

Dividiendo por $DRZT$,
$$\frac{T'}{DT} - \frac{\gamma}{D} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} \tag{47}$$

Puesto que cada lado es una constante, que denotamos por λ^2, obtenemos

$$\frac{T'}{DT} - \frac{\gamma}{D} = -\lambda^2 \tag{48}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \tag{49}$$

De (49),
$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} - \lambda^2 \tag{50}$$

y puesto que cada lado es una constante que llamamos $-\mu^2$, tenemos

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\mu^2, \qquad \frac{Z''}{Z} - \lambda^2 = -\mu^2 \tag{51}$$

Si definimos $\lambda^2 = \mu^2 + \upsilon^2$, las ecuaciones (48) y (51) llegan a ser

$$T' - [\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]T = 0, \qquad R'' + \frac{1}{r}R' + \mu^2 R = 0, \qquad Z'' + \nu^2 Z = \tag{52}$$

Estas tienen las soluciones

$$T = c_1 e^{[\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]t}, \qquad R = c_2 J_0(\mu r) + c_3 Y_0(\mu r), \qquad Z = c_4 \cos \nu z + c_5 \operatorname{sen} \nu z$$

Así
$$N(r, z, t) = c_1 e^{[\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]t}[c_2 J_0(\mu r) + c_3 Y_0(\mu r)]\,[c_4 \cos \nu z + c_5 \operatorname{sen} \nu z] \tag{53}$$

De la condición (44), esto es, el acotamiento en $r = 0$, debemos escoger $c_3 = 0$. También de la primera de las condiciones (45) encontramos $c_4 = 0$. Llamando $c_1 c_2 c_5 = A$, tenemos

$$N(r, z, t) = Ae^{[\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]t} J_0(\mu r) \operatorname{sen} \nu z \tag{54}$$

La segunda condición en (45) requiere que

$$J_0(\mu a) = 0 \quad \text{o} \quad \mu = \frac{\lambda_m}{a}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{55}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas sucesivas de $J_0(x) = 0$. Similarmente la tercera condición en (45) requiere

$$\operatorname{sen} \nu h = 0 \quad \text{o} \quad \nu = \frac{n\pi}{h}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

Por tanto

$$N(r, z, t) = a_{mn} e^{[\gamma - D(\mu_m^2 + \nu_n^2)]t} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{h} \tag{57}$$

donde $\mu_m = \dfrac{\lambda_m}{a}$ y $\nu_n = \dfrac{n\pi}{h}$ para $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Así por el principio de superposición tenemos la solución

$$N(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{[\gamma - D(\mu_m^2 + \nu_n^2)]t} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{h} \tag{58}$$

De (46),

$$f(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{h} \tag{59}$$

de modo que

$$a_{mn} = \frac{\displaystyle\int_0^a \int_0^h r f(r, z) J_0(\lambda_m r/a) \operatorname{sen} (n\pi z/h)\, dr\, dz}{\displaystyle\int_0^a \int_0^h r [J_0(\lambda_m r/a)]^2 \operatorname{sen}^2 (n\pi z/h)\, dr\, dz} \tag{60}$$

Sustituyendo éstos en (58) se obtiene la solución requerida.

Interpretación. Para tener una densidad de neutrones que incremente con t, miremos al factor de tiempo en la solución (58), esto es,

$$e^{[\gamma - D(\mu_m^2 + \nu_n^2)]t} \tag{61}$$

El coeficiente de t en este factor es

$$\gamma - D\left(\frac{\lambda_m^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{h^2}\right) \tag{62}$$

y de inmediato se ve claro que este será negativo para enteros muy grandes m y n. Sin embargo, no estamos interesados en los valores negativos puesto que en este caso la densidad de neutrones decrece, esto es, tenemos ***atenuación.*** Para nuestros propósitos es de gran interés el caso donde los coeficientes (62) son positivos. El mayor valor posible ocurre cuando $m = 1$ y $n = 1$, en cuyo caso el coeficiente es

$$\gamma - D\left(\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2}\right) \tag{63}$$

donde λ_1, la raíz positiva más pequeña de $J_0(x) = 0$ es 2,405 aproximadamente. Si deseamos que (63) sea no negativo, debemos escoger el radio a y altura h del cilindro de modo que

$$\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2} \leqq \frac{\gamma}{D} \tag{64}$$

Ahora la masa M del material fisionable está dada por

$$M = \pi\rho a^2 h \tag{65}$$

donde ρ es la densidad. Si a y h se escogen de modo que

$$\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2} = \frac{\gamma}{D} \tag{66}$$

entonces para estos valores nos referimos a la masa M dada por (65) como la *masa crítica*, debido a que cualquier incremento en las dimensiones a y h, y por tanto M, resultaría en una reacción en cadena la cual, si es lo suficientemente violenta, causaría una explosión como en la bomba atómica.

Se debería indicar que las mismas conclusiones se podrían haber obtenido directamente de la ecuación (53), de modo que no fue realmente necesario obtener la solución completa. La misma conclusión se tendría aún si asumiéramos dependencia de ϕ. Por supuesto, estas soluciones son importantes si deseáramos determinar las variaciones reales de la densidad de neutrones en el cilindro.

EJERCICIOS A

1. Obtenga el desplazamiento de la cadena del texto en cualquier tiempo si se le da un desplazamiento inicial $f(x) = \alpha x$, donde α es una constante y luego se suelta.
2. Trabaje el Ejercicio 1 si (a) $f(x) = \beta x^2$; (b) $f(x) = \alpha x + \beta x^2$ donde α y β son constantes.
3. Determine el desplazamiento de la cadena en cualquier tiempo si (a) el desplazamiento inicial es $f(x) = 0$ y la velocidad inicial es $g(x) \neq 0$; (b) el desplazamiento inicial $f(x) \neq 0$ y la velocidad inicial $g(x) \neq 0$.
4. Trabaje el problema de la cadena vibrante si el desplazamiento inicial es cero y la cadena se le da una velocidad inicial constante v_0 en una dirección horizontal.
5. Discuta usando diagramas los varios modos de la cadena vibrante
6. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial (9), página 656, usando el método de Frobenius.
7. Deduzca los coeficientes (60), página 665, necesarios para determinar la densidad de neutrones en una bomba o reactor atómico cilíndrico.
8. Discuta la densidad de neutrones en el cilindro de la página 662 para el modo más bajo correspondiente a $m = 1$, $n = 1$.
9. Trabaje el Ejercicio 8 para los modos altos y discuta las diferencias.

EJERCICIOS B

1. Trabaje el problema de la cadena vibrante si se tiene en cuenta un amortiguamiento proporcional a la velocidad.
2. Suponga que inicialmente la cadena tiene el extremo más bajo fijo en $x = L$ mientras que el punto medio es desplazado horizontalmente una distancia h. Si éste luego se suelta desde esta posición encuentre el desplazamiento en cualquier tiempo más tarde.
3. Suponga que el alambre circular del texto se remplaza por una placa circular de radio unitario y densidad de carga constante ρ. (a) Muestre que el potencial en cual. quier punto en el eje z (asumido perpendicular y pasando por su centro) esta dado por $2\pi\rho(\sqrt{z^2+1} - z)$.

(b) Use (a) para mostrar que el potencial en cualquier punto debido a la placa cargada está dado por

$$2\pi\rho\left[1 - rP_1(x) + \tfrac{1}{2}r^2P_2(x) - \frac{1}{2\cdot 4}r^4P_4(x) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}r^6P_6(x) - \cdots\right],\ 0 \leqq r < 1$$

$$2\pi\rho\left[\frac{1}{2r} - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{P_2(x)}{r^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{P_4(x)}{r^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{P_6(x)}{r^7} + \cdots\right],\ r > 1$$

4. Muestre que las proporciones más económicas para una bomba o reactor atómico cilíndrico se obtienen si el radio a y altura h están dados por

$$a = 2{,}405\sqrt{\frac{3D}{\gamma}}, \qquad h = \pi\sqrt{\frac{3D}{\gamma}}$$

EJERCICIOS C

1. Suponga que el potencial en todos los puntos en una línea, tomada como el eje z, en una región infinita está dado por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donde la serie converge para todo z. (a) Muestre que el potencial está dado por

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

(b) Interprete el resultado en (a) en términos de un problema de temperatura.

2. Trabaje el Ejercicio 1 para el caso f(z) $= e^{-|z|}$.

3. Un cono infinito $\theta = \alpha$, donde $0 < \alpha < \pi/2$, tiene su superficie mantenida al potencial

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \qquad r > 0$$

donde r, ϕ son las coordenadas esféricas habituales. (a) Muestre que el potencial en todos los puntos dentro del cono está dado por

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n P_n(\cos\theta)}{P_n(\cos\alpha)}$$

(b) Interprete el resultado en (a) en términos de un problema de temperatura,

4. El extremo x = 0 de una cadena de longitud L está acoplado a un vástago vertical el cual rota con velocidad angular constante ω como se indica en la Figura 14.16. Si ω es suficientemente grande, la cadena permanecerá en un plano horizontal y los efectos de la gravedad son despreciables. (a) Si la cadena está sujeta a pequeños desplazamientos transversales, muestre que la ecuación del movimiento está dado por

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \tfrac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(L^2 - x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right]$$

(b) Muestre que la frecuencia del n-ésimo modo está dada por $f_n = \dfrac{\omega}{2\pi}\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

(c) Si a la cadena se le da un desplazamiento inicial $f(x)$ y luego se suelta, encuentre el desplazamiento en cualquier tiempo posterior

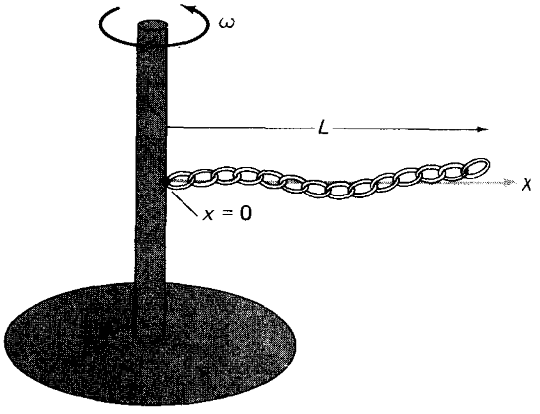


Figura 14.16

5. Trabaje el problema de la bomba o reactor atómico para el caso de un paralelepípedo con lados a, b, c mostrando que la masa crítica está dada por

$$M = \rho abc \quad \text{donde} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\gamma}{\pi^2 D}$$

y que las proporciones más económicas ocurren para un cubo.

6. (a) Muestre que la ecuación para la densidad de neutrones N en un recipiente esférico asumiendo sólo dependencia radial está dada por

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial N}{\partial r}\right) + \gamma N$$

(b) Muestre que la masa crítica está dada por $M = \frac{4}{3}\rho\pi^4\left(\frac{D}{\gamma}\right)^{3/2}$ donde ρ es la densidad.

7. Asumiendo alguna distribución de densidad inicial de neutrones en el Ejercicio 6 dependiendo sólo de r, muestre cómo se puede encontrar la densidad de neutrones después del tiempo t.

8. Trabaje los Ejercicios 6 y 7 si la densidad de neutrones depende (a) sólo de r y θ (b) de todas las coordenadas esféricas.

apéndice
determinantes

Considere el sistema lineal de ecuaciones con dos incógnitas x y y dado por

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Resolviendo para x y y por el método de eliminación tenemos

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

En un esfuerzo de escribir éstas en una forma que se recuerde fácilmente notamos que los denominadores en (2) son los mismos y pueden obtenerse escribiendo los cuatro coeficientes de x y y de las ecuaciones (1) en una forma llamada un *determinante* de 2 por 2, 2×2 o de segundo orden dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

donde multiplicamos los números del lado superior izquierdo e inferior derecho y luego sustraemos el producto de los números del lado superior derecho e inferior izquierdo como indican las flechas. Usando el mismo procedimiento para los numeradores en (2) la solución requerida se puede entonces escribir como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

Esto se puede recordar fácilmente si notamos las siguientes reglas llamadas *reglas de Cramer*.

Reglas de Cramer

(i) Los denominadores iguales en (4) se escriben como en (3) lo cual se llama el *determinante de los coeficientes* de x y y en las ecuaciones (1).

(ii) El numerador para x en (4) se obtiene remplazando las entradas en la ***primera*** columna del denominador por las constantes b_1, b_2 del lado derecho de las ecuaciones (1) y dejando inalteradas las entradas en la ***segunda*** columna.

(iii) El numerador para y en (4) se obtiene remplazando las entradas en la ***segunda*** columna del denominador por las constantes b_1, b_2 y dejando inalteradas las entradas en la ***primera*** columna

Ejemplo 1. Para resolver

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= 30 \\ 5x + 7y &= -32 \end{aligned}\right\}$$

escribamos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -4 \\ -32 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(30)(7) - (-4)(-32)}{(3)(7) - (-4)(5)}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 5 & -32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-32) - (30)(5)}{(3)(7) - (-4)(5)}$$

Esto es,

$$x = 82/41 = 2, \; y = -246/41 = -6,$$

lo cual se puede chequear por sustitución.

El éxito en resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas naturalmente lo inspira a uno a ver si el mismo procedimiento trabaja para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, digamos

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{12}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En tal caso por analogía con la regla de Cramer para el caso de 2 ecuaciones escribiríamos la solución en términos de determinantes de 3 por 3, 3 x 3, o de tercer orden como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{6}$$

donde el determinante de los coeficientes en (5) está dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{7}$$

El esquema para evaluar los determinantes en (6) se puede alcanzar prácticamente resolviendo el sistema (5) por el método de la eliminación. Si esto se hace los resultados coinciden con tal que usemos el siguiente diagrama esquemático para la evaluación.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{8}$$

$(-)\quad(-)\quad(-)\qquad(+)\quad(+)$

En este diagrama hemos repetido las primeras dos columnas del determinante (7) como se muestra. Luego formamos los productos indicados siguiendo las flechas en el diagrama usando signos más para las flechas que apuntan a la derecha y signos menos para las flechas que apuntan a la izquierda y sumamos los resultados.

Ejemplo 2. Para resolver

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 7 \\ 2x + y - z &= -6 \\ 4x - 3y + 2z &= -5 \end{aligned}\right\}$$

usamos las reglas de Cramer para escribir

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Evaluando todos estos determinantes encontramos

$$x = \frac{74}{-37} = -2, \qquad y = \frac{-37}{-37} = 1, \qquad z = \frac{-111}{-37} = 3$$

lo cual puede chequearse en las ecuaciones originales como la solución requerida.

Estas ideas se pueden extender a sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas en cuyo caso tenemos el determinante de n por n, $n \times n$, o de orden n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Puesto que la evaluación se hace más difícil para $n > 3$ (ejemplo, un determinante de 4×4 o de cuarto orden tiene $4! = 24$ términos) se usan varias definiciones y teoremas para simplificar los procedimientos. Ilustramos éstos a continuación con determinantes de tercer orden, pero ellos se pueden usar para determinantes de cualquier orden n.

Definición 1. Sea a_{jk} el elemento en la fila j y en la columna k del determinante (10). Entonces el menor de a_{jk} es el determinante M_{jk} obtenido anulando la fila y la columna en las cuales aparece a_{jk}.

Ejemplo 3. En el determinante (9), dado a continuación, el menor del elemento -3 en la tercera fila y segunda columna se obtiene anulando la tercera fila y la segunda columna y luego escribiendo todos los demás elementos, esto es,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Definición 2. El cofactor de a_{jk} se obtiene al multiplicar el menor *M*,, por $(-1)^{j+k}$, esto es, + 1 si la suma de los índices de la fila y la columna en las cuales aparece ***a*,,** es par, y 1 si la suma es impar. Denotando el cofactor de a_{jk} por *A*,,, tenemos

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

Ejemplo 4. En el determinante del Ejemplo 3 el cofactor del elemento -3 en la tercera fila y segunda columna es

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Definición 3. El determinante (10) se obtiene encontrando la suma de los productos de los elementos en cualquier fila (o columna) por su correspondiente cofactor. En símbolos si escogemos elementos en la fila j, por ejemplo, entonces

$$A = a_{j1} A_{j1} + a_{j2} A_{j2} + \cdot \cdot \cdot + a_{jn} A_{jn} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} A_{jr} \tag{11}$$

Ejemplo 5. Usando los elementos en la tercera fila el determinante del Ejemplo 3 se puede evaluar así

$$(4)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -37$$

Note que ocurren simplificaciones si los elementos en una fila (o columna) son cero puesto que no tenemos que preocuparnos de tales términos. El Teorema 5 dado luego nos permite generar elementos cero en una fila (o columna).

Teorema 1. El valor del determinante permanece el mismo si se intercambian filas y columnas.

Ejemplo 6.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ s & -1 & 2 \end{vmatrix} = -37$$

Teorema 2. Si multiplicamos todos los elementos de cualquier fila (o columna) de un determinante dado por alguna constante c entonces el nuevo determinante tiene un valor igual a c veces el del determinante dado. Este teorema también nos permite tomar un factor común cuando $c \neq 0$ de cualquier fila (0 columna).

Ejemplo 7.

$$-2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & (-2)(-2) & 5 \\ 2 & (-2)(1) & -1 \\ 4 & (-2)(-3) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 8.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & (4)(1) \\ 5 & 1 & (4)(-2) \\ -7 & 5 & (4)(-1) \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Teorema 3. Si intercambiamos cualesquiera dos filas (o columnas) de un determinante dado, el nuevo determinante tiene un valor igual a -1 veces el del determinante dado.

Ejemplo 9. Intercambiando la primera y segunda columnas da

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Teorema 4. Si cualesquiera dos filas (o columnas) de un determinante tiene los mismos elementos, entonces el valor del determinante es cero.

Ejemplo 10. Puesto que la primera y tercera columnas tienen los mismos elementos

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 5. Si los elementos de cualquier fila (o columna) se cambian sumando a estos elementos los correspondientes elementos de cualquiera otra fila (o columna) multiplicados por una constante el valor del determinante no cambia. Escogiendo estratégicamente la constante, este teorema nos permite producir ceros en una fila (o columna) y simplificar la evaluación.

Ejemplo ll. En el determinante (9) multiplique los elementos de la segunda fila por 2 y súmelos a los elementos correspondientes de la primera fila. También multiplique los elementos de la segunda fila por 3 y súmelos a los correspondientes elementos de la tercera fila. Entonces obtenemos

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2)(2)+3 & (2)(1)-2 & (2)(-1)+5 \\ 2 & 1 & -1 \\ (3)(2)+4 & (3)(1)-3 & (3)(-1)+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -37$$

donde el último determinante de 3×3 se expande de acuerdo a la Definición 3 usando los elementos en la segunda columna.

Teorema 6. Suponga que nos dan un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas con el lado derecho todo igual a cero, por ejemplo

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sea Δ para denotar el determinante de los coeficientes. Entonces

1. Todas las incógnitas serán iguales a cero *(solución trivial)* si y sólo si $\Delta \neq 0$.
2. No todas las incógnitas son iguales a cero *(soluciones no triviales)* si y sólo si $\Delta = 0$.

Ejemplo 12. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y \quad z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x - 3y + 5z &= 0 \end{aligned}\right|$$

tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces el sistema tiene soluciones no triviales. Para encontrar éstas hagamos que z tome diferentes valores esto es, $z = 1, \frac{1}{2},\quad 1$, etc., y encuentre los valores correspondientes de x y y. Obtenemos las soluciones $(x, y, z) = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1), (-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -1)$, etc. Hay infinitas soluciones no triviales.

respuestas a los ejercicios

Capitulo uno

EJERCICIOS **A, pág.** 12

1.

Ecuación diferencial	Ordinaria o parcial	Orden	Variables independientes	Variables dependientes
(a)	Ordinarias	1	x	y
(b)	Ordinarias	2	x	y
(c)	Parcial	2	x, y, t	U
(d)	Ordinarias	3	t	s
(e)	Ordinarias	1	ϕ	r
(f)	Ordinarias	2	y	x
(g)	Parcial	2	x, y	V
(h)	Ordinarias	1	x o y	y o x
(i)	Ordinarias	2	x	y
(j)	Parcial	2	x, y, z	T

3. (a), (b), (f) Lineal; (d), (e), (h), (i) No lineal.

6. (b) $x = 12r - t^3 - 16$. (c) $x = 0$, $x = -7$.

(d) $t = 2$, $t = -4$ (asumiendo que la ley del movimiento se cumple para $t < 0$).

7. (b) $x = 5t^2 - t^4 - 4$. (c) $x = 0$, $v = 6$.

8. (b) $x = 5t^2 - t^4 - 6r + 3$. (c) $x = 1$, $v = 0$.

9. (b) $y = 4x - x^2$.

10. (b) $y = 2 - 2e^{-2x}$.

11. (a) $y = -3\cos x - 4$. (b) $x = 7 - 2t - 4e^{-t}$. (c) $x = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 4t^2 - 3t + 1$

(d) $s = 6u^{3/2} - 32$. (e) $y = 8x^3 - x^4 - 14x + 7$.

12. (a) $y = \frac{4 + cx}{x}$; $y = \frac{4 - 2x}{x}$.

(b) $y = \frac{x^2}{2} + \cos x + c_1x + c_2$; $y = \frac{x^2}{2} + \cos x + 2x - 1$.

(c) $y = \frac{(2x + 1)^{5/2}}{15} + c_1x + c_2$; $y = \frac{(2x + 1)^{5/2}}{15} - \frac{181x}{30} + \frac{74}{15}$.

EJERCICIOS B, pág. 14

2. (a) $m = 2$. (b) $m = 1, -4$. (c) $m = 1, 2, 3$.

4. (b) $y = c_1e^x + c_2e^{-4x}$. (c) $y = \frac{3}{5}(4e^x + e^{-4x})$.

8. (a) $y = \frac{192}{\pi^3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + c_1x^2 + c_2x + c_3$.

(b) $y = \frac{192}{\pi^3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \left(2 + \frac{192}{\pi^3}\right)x^2 + \left(2 - \frac{384}{\pi^3}\right)x - 4$.

EJERCICIOS **C, pág. 14**

3. (a) $y = e^x$. (b) $y = -\ln(1 - x)$. (c) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

4. (b) $y = c_1x + c_2 - \operatorname{sen} x$.

EJERCICIOS **A,** pág. 21

1. Soluciones particulares son (a) $y = -4\cos x$. (b) $y = 3e^x - e^{-x} - 4x$.
   (c) $x^2 - y^2 + 2xy = 17$, o explícitamente $y = x + \sqrt{2x^2 + 17}$.
   (d) $y = 1 - 2x + 3x^2$.
   (e) $xy^2 = 13x - 36$, o explícitamente $y = \sqrt{\frac{13x - 36}{x}}$.

2. (a) $y' + 2y = 6x(x + 1)$. (b) $y' = 1 + (y - x)\cot x$.
   (c) $(x^2 - 1)y' = xy$. (d) $xy'\ln x = y(\ln x - 1)$.
   (e) $y'' + 16y = 16x$. (f) $\frac{d^2I}{dt^2} + 2\frac{dI}{dt} + I = 12\cos 3t - 16\operatorname{sen}3t$
   (g) $2xyy' = y^2 - x^2$. (h) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.
   (i) $y''' - 3y'' - 10y' + 24y = 0$. (j) $\phi^2(1 - \ln\phi)\frac{d^3r}{d\phi^3} + \phi\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{dr}{d\phi} = 0$

3. (a) $yy' + x = 0$. (b) $2xy' = y$. (c) Sea (c, c) cualquier punto sobre $y = x$. Entonces el círculo requerido es $(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$. La ecuación diferencial requerida es $(x - y)^2[1 + (y')^2] = (x + yy')^2$. (d) $xyy'' - yy' + x(y')^2 = 0$.

EJERCICIOS B, pág. 22

3. $A = B = 0$ da la solución particular requerida **5.** $x = -\frac{1}{2}y^{-2} + c$.

EJERCICIOS **C, pág.** 22

2. (a) $y'' \quad y' - 6y = 0$. (b) $(y''' + y')(x^3 + 12.x) = (y'' + y)(4x^2 + 24)$

7. $xy' \ln y - xy' \ln y' + yy' - y^2 = 0$.

Capítulo dos

EJERCICIOS **A, pág.** 37

1. (a) $x^2 + y^2 = 5$. (b) $xy = 3$. (c) $(x^2 + 2)^3(y^2 + 1) = c$.
(d) $2e^{3x}$ **+ 3** $\ln y = c$. (e) $x^2 \quad$ **4** $\ln(1 + y^2) = 1$. (f) $\ln r - \tan^{-1}\phi = c$.
(g) tanxtany = 1. (h) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2} = c$. (i) y^3**sen**^{2} x = 8.
(j) $y = ce^{4x^2+3x}$. (k) $I = 2(1 - e^{-5t})$. (l) $x^{-2} - y^2 - 2 \ln y = c$.

2. $(x^2 + 2)(y^2 + 3) = 24$.

EJERCICIOS B, pág. 37

1. $(x - 1)(y + 3)^5 = c(y - 1)(x + 3)$'. 2. $2\tan^{-1}$ (e') $+ \tan^{-1}(\cos\phi) = \frac{\pi}{2}$.

3. $25(3x^2 - 1)e^{3x^2} + 9(5y^2 + 1)e^{-5y^2} = c$.

4. 2 , U + In $(U + 1) - 2\tan^{-1}\sqrt{U} = 2, s + c$.

EJERCICIOS **C, pág.** 37

1. $x = 32/3$. **2.** $x^4 + 4y^2 = cx^2$. **3.** $x^3 - 3\cos xy = c$

EJERCICIOS A, **pág.** 40

1. $y = x \ln x + cx$. **2.** $x = y \quad y \ln x$. **3.** $y = cx^3 \quad x$.

4. $x^3 \quad 3xy^2 = c$. **5.** $x^2 + 4xy + y^2 = c$. **6.** $1 + \ln x = \tan \frac{y}{x}$.

7. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$. **8.** $x + 3y = cy^2$. **9.** $y^3 = 3x^3 \ln x$

lb. $x^2 - y^2 = cx$. **11.** $\frac{2y}{x} + \text{sen}\,\frac{2y}{x} = 4\ln x + c$

12. $(Y + y)^5 = c(x \quad 2y)^2$.

EJERCICIOS B, **pág.** 40

1. $y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \quad 3x^2 \ln x = cx^2$.

2. $(x + y)^3 = c(2x + y)^4$. **3.** $(y \quad x)(y - 3x)" = c(y - 2.x)$".

4. $x \quad \tan^{-1}(x + y) = c$.

5. $6\sqrt{2x + 3y} - 4 \ln(3\sqrt{2x + 3y} + 2) - 9x = c$.

6. $\ln[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] - 3\tan^{-1}\left(\frac{y + 1}{x - 1}\right) = c$.

7. $y - 2x + 7 = c(x + y + 1)^4$.

8. $\ln(2x + 3y + 2) = 2y - x + c$.

9. $2x + y - 3\ln(x + y + 2) = c$.

10. $x^2\left(\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}\right) = c$.

EJERCICIOS C, pág. 41

1. (a) $x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$. (b) $x \quad y - 2, \ x - y = 2x + c$; solución singular $y = x$.

2. $x^2\cos\dfrac{y}{x^2} + y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x^2} = cx^3$.

3. $\frac{1}{2}\ln(x^6 + y^4) + \tan^{-1}\dfrac{x^3}{y^2} = c$.

4. Elija $n = \frac{3}{4}$, $2 + 5xy^2 = cx^{5\ 2}$.

5. (a) $(Y \quad \alpha X)^{2+\sqrt{2}}(Y - \beta X)^{2-\sqrt{2}} = c(Y - X)^2$ donde $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$, $X = x \quad 2$, $Y = y + 1$.

(b) $v^2 + 2v - v\sqrt{v^2 - 1} + \ln(v + \sqrt{v^2 - 1}) = 4x + c$ donde $v = x + y$.

6. $xy + \ln(x/y) = c$.

EJERCICIOS A, pág. 47

1. **(a)** $3x^2 + 4y^2 = c$. (b) $x^2 - 2xy - y^2 = c$. (c) $3xy^2 \quad x^3 = c$.

(d) No exacta. (e) $x^2 - y^2 - 2y\operatorname{sen}x = c$. (f) $r^2\cos\phi - r = c$.

(g) $ye^{-x} \quad \cos x + y^2 = c$. (h) $x^3 + 3y\ln x + 3y^2 = c$. (i) $ye^{x} - xy^2 = c$.

(j) No exacta.

2. (a) $x^2 - xy + y^2 = 3$. (b) $x^2y + y + 6 = 0$. (c) $x^2 - x\operatorname{sen}y = 4$.

(d) $2x\tan y + \cos 2x = 2\pi + 1$. (e) $x^2y + y^2e^{2x} = 1$.

3. (a) $x^2y^2 + x^4 = c$. (b) $6xy^4 \quad y^6 = c$. (c) $y\cos^2 x + 3\operatorname{sen}x = c$.

(d) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = c$

EJERCICIOS B, pág. 48

1. $x + y^2 - x^2 = c(x + y)$.

4. $N(x, y) = -\cos x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\sec y\tan y + F(y)$,

$\frac{1}{3}x^3y - y\cos x - \frac{1}{2}x^2\sec y + \int F(y)dy = c$.

EJERCICIOS C, pág. 48

2. $y^4(3 \quad xy)^5 = cx^2$.

EJERCICIOS A, pág. 52

1. (a) $x^3 + x^2y^2 = c$. (b) $y = 2x - x^3$. (c) $y^2 - x = y(c - \operatorname{sen}x)$.

(d) $x^2(c + \cos 2y) = 2y$. (e) $x = \left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)\operatorname{sen}y$. (f) $y = (x + c)\cos^2 x$.

(g) $6x^4y - x^6 = c$. (h) $6xy^3 - y^6 = c$. (i) $I = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

(j) $y^3e^x + ye^{2x} = c$.

2. $y = x \ln\left(\frac{x}{3}\right)$

EJERCICIOS B, pág. 52

1. $y^2 + \operatorname{sen}^2 x = c \operatorname{sen}^3 x$.
2. $x^2 + y^2 + 1 = ce^{y^2}$.
3. $e^{x^3}(1 + xy) = c$.
4. $(x^2 + y^2)\sqrt{1 + y^2} = c$.

EJERCICIOS C, pág. 52

2. $e^{xy}(x + y) = c$.
3. $x^2y^4 + x^4y^3 = c$.

EJERCICIOS A, pág. 55

1. (a) $x^2 - 2xy = c$. (b) $x^5 - 5x^3y = c$. (c) $xy = y^2 + \ln y + c$.
(d) $x^2 \cos 3s + 3y = cx^2$ (e) $I = e^{-2t} + 4e^{-3t}$. (f) $2y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x = c$.
(g) $x - 3y \quad 3 = ce^y$. (h) $7r = 3\phi^2 + 4\phi^{-1/3}$.
2. $I = 10te^{-2t}$.

EJERCICIOS B, pág. 55

3. $y = (1 - x + ce^{-x})^{-1}$.
4. $2x^2 - 3y = cx^2y^3$.
5. $y = c_1x^4 - \frac{4}{3}x^3 + c_2$.
7. $y = \left[\frac{\beta}{\alpha} + ce^{(1-n)\alpha x}\right]^{1/(1-n)}$

EJERCICIOS C, pág. 55

2. $\ln y = 2x^2 + cx$.
4. $y = \ln(x - 8x^{-3})$.

EJERCICIOS A, pág. 57

1. $xy^2 - y = cx$.
2. $y^3 + 2x = cy$.
3. $x^2 - 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c$.
4. $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + c$.
5. $x^3 + xy^2 - 2y = cx$.
6. $x + y - \tan^{-1}\frac{y}{x} = c$.
7. $\ln(x^2 + y^2) + 2y - 2x = c$.
8. $\ln(x^2 + y^2) = 2xy + c$.

EJERCICIOS B, pág. 57

1. $(x^2 + y^2)^{3/2} - 3xy = c$.
2. $3x' + 3xy^2 + 2(xy)^{-3} = c$.
3. $x^2 - y^2 + \ln\left|\frac{x - y}{x + y}\right| = c$.

EJERCICIOS C, pág. 57

1. $\ln(x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2 + c$.
2. $x^3 - x^2y - y = cx^2$.
3. $x^2 - 2\ln(y^2 + \operatorname{sen}^2 x) = c$.
4. $(y - x)^{-1} + \ln\cos(y/x) = c$.

EJERCICIOS A. pág. 60

1. $y = \frac{x^3}{3} + 10x.$

2. $y = \frac{x^5}{360} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$

3. $y = 3\cos x + \frac{x^2}{2} - 2.$

4. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x^3}{6} - x$

5. $I = \frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{2} + 3t + 2.$

6. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{2}.$

7. $y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{8}{3}x^{1/2} + c_1x^2 + c_2x + c_3.$

8. $y = \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + \frac{14}{3}.$

9. $y = 3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x.$

10. $y = \frac{c_1}{x} + c_2.$

11. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}.$

12. $x = \int dy\,(\ln y + c_1) + c_2,\ y = c_3$

13. $y = \ln\cosh(x + c_1) + c_2.$

14. $y + 1 = c_1 \tan \frac{1}{2}(x + c_2).$

15. $y = x + c_1 - c_2 \int e^{-x^2/2}\,dx.$

EJERCICIOS B, pág. 60

1. $y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{25x^4}{288} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{18} - \frac{1}{96}.$

2. $y = \frac{x^5}{240} - \frac{x^4}{96} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{32} + \frac{x}{32} - \frac{1}{64} + \frac{e^{-2x}}{64}$

3. $y = \frac{x^2}{2} + c_1x\ln x + c_2x + c_3.$

4. $y = -4\ln(x + c_1) + c_2x + c_3$

5. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3.$

6. $(x + c_1)^2 + y^2 = c_2^2.$

7. $y = (x + c_1)\ln x + c_2x + c_3.$

EJERCICIOS C, pág. 60

1. $\pm\sqrt{15}.$

2. $(x - A)^2 + (y - B)^2 = 1$

3. $(x - c_1)(y - c_2) = 4.$

4. $y = \ln\sec x.$

5. $y = \int_0^x \frac{u^2\,du}{\sqrt{1 - u^4}}.$

EJERCICIOS A, pág. 63

1. $y = cx - c^2,\ y = x^2/4.$

2. $y = cx + 1 + 4c^2,\ y = 1 - x^2/16.$

3. $y = cx - \tan c;\ x = \sec^2 v,\ y = v\sec^2 v - \tan v$ son ecuaciones paramétricas.

4. $y = cx + \sqrt{1 + c^2};\ x = -\frac{v}{\sqrt{1 + v^2}},\quad y = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}$ or $x^2 + y^2 = 1$

EJERCICIOS B, pág. 64

6. $y = \frac{1}{4}(x + c)^2,\ y = 0.$

EJERCICIOS C, pág. 64

1. $y = c\,\text{sen}\,x - c^2,\ y = \frac{1}{4}\text{sen}^2\,x.$

2. $y = cx^2 + 1/4c,\ y = \pm x$

EJERCICIOS MISCELANEOS, CAPITULO DOS

EJERCICIOS A, pág. 65

1. $x \quad x^{-1} = \frac{1}{3}\ln(y^3 - 1) + c.$

2. $x^2y + y^2x = c.$

3. $x^2 + xy + y^2 = c(x + y).$

4. $5x^2y = x^5 + c.$

5. $(3 - y)^2 = 4x.$

6. $y = 2x - x^2 + c.$

7. $2s^3 + 3t^2 + 24 \ln t = c.$

8. $x^3 + 3xy^2 = c.$

9. $3ye^x - 2x3 = c.$

10. $xy = x + \ln x + c$

11. $\ln x = \int \frac{dv}{\tan^{-1} v} + c$ donde $v = \frac{y}{x}.$

12. $x + y + 1 = ce^x$

13. $y = x^2 - 2 + ce^{-x^2/2}.$

14. $\frac{1}{2}x^2y^2 + 4x - 3y = c.$

15. $r^2 \cos\phi + 10r = c.$

16. $y = ce^{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

17. $x^2y^{-3} - x = c.$

18. $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 6e^{-x}.$

19. $3xy^2 + x^3 - 9y = c.$

20. $y^2 \ln y - x = cy^2.$

21. $u^3v^{-3} - 3 \ln v = c.$

22. $x \cot y - \text{sen}\,x = c.$

23. $x^2 - y^2 + 4xy = c.$

24. $y = (x + c)\,\text{sen}\,x.$

25. $x^2 + y^2 = cx.$

26. $2x^3 - 3ye^x = c.$

27. $y - \ln(x + y + 1) = c.$

28. $x^3 + 3x^2y = c.$

29. $y^2 - 2x\,\text{sen}\,y = c.$

30. $e^{-y/x} + \ln x = c.$

31. $\cos x \cos y = c.$

32. $y = x^3 + cx^2.$

33. $x^3y^2 + x^2 = c.$

34. $xy^{-1} + 2y = c.$

35. $y = c_1e^x - x^2 - 2x + c_2.$

36. $2y^{1/2} + \frac{2}{3}y^{3/2} = \frac{x^2}{2} + c.$

37. $\sec x(\csc y - \cot y)^3 = c.$

38. $\sec\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = cx.$

39. $(1 - s)^{3/2} - (1 - t)^{3/2} = 1$

40. $x^2y + x^3 = c.$

41. $y^3(1 + x^3) = c.$

42. $2xy + 2\cos y + 2x^2 = \pi + 2.$

43. $N = N_0e^{-\alpha t}.$

44. $xye^{x/y} = c.$

45. $I = ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t.$

46. $3xy = x^3 + 5.$

47. $xy^2 - 2y = cx.$

48. $e^{p^2} - e^{q^2} = c.$

49. $y^3\cos x + y^2 + 48 = 0.$

50. $y + \text{sen}\,y = cx.$

51. $y = ce^{-2x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$

52. $y^2 = x(c - y).$

53. $2 \ln r + (\ln r)^2 = 2 \ln\phi + (\ln\phi)^2 - 5$

54. $U = 100t - \frac{100}{a}(1 - e^{-at}).$

55. $(u - 1)v = cu^2.$

56. $I = 3\,\text{sen}\,t - \cos t + e^{-3t}.$

57. $s - \ln(s + t + 2) = c.$

58. $y^2 = c_1x + c_2.$

59. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = c.$

60. $2y\,\text{sen}\,x + \cos^2 x = c.$

61. $(y + 3)^{-1} = (4x)^{-1} + c.$

62. $y = cx^3 - , x^3e^{-x}$

63. In sen y + cos $x = c$.

64. $y^2 = 2x^2$ In $x + cx^2$

65. $2xy^3 - 3y = cx$.

66. In $y = cx$ + In x.

67. $xy - x^2 = c$.

68. $y = x + c_1$ In $x + c_2$.

69. $t^3I^{-3} + 3$ In $I = c$.

70. $x = ye^y - 3 + ce^y$.

71. $r = \frac{1}{4}e^{\phi} + \frac{3}{4}e^{-3\phi}$.

72. $y = ae^{bx}$.

73. $6xy = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + 1$

74. In $(x^2 + 2xy + 3y^2) = 2\sqrt{2}$ tan-'$\left(\frac{x + 3y}{x\sqrt{2}}\right) + c$.

75. y(sec x tan x) = 2 In (1 + sen x) $-$ 2 senr + c.

76. $e^{4x} + 2e^{2y} = c$.

77. $r^4 = a^4$ sen $(4\phi + c)$.

78. $2x^3 - 3ye^x = c$.

79. $x^2y = (x^2$ 2) sen $x + 2x$ cos x + c.

80. 2, $\overline{1 + x^3} = 3$ In $(y + 1) + c$.

81. $x^3y^2 + x^4y = c$.

82. $y^{-1} = -e^{-x^2/2} \int e^{x^2/2}\, dx + ce^{-x^2/2}$.

83. $y = e^{x^2/2} \int x^2e^{-x^2/2}\, dx + ce^{x^2/2}$.

84. $U = 12 + 4$r $r^2 - 2$ In r.

85. $(y - x)(x + 1) = 1$.

86. $(y - 1)e^y - e^x = c$.

EJERCICIOS B, pág. 67

1. $x^2y^2 = 2$ sen $x - 2x$ cos $x + c$.

4. $x + 2y + 1 = ce^{y\ 2}$

5. $\sqrt{y + \text{sen}\,x} = \frac{x}{2} + c$.

6. sen$(x + y)$ + cos $(x + y) = ce^{x-y}$.

7. $3e^{4x} + 4e^{3x-3y} = c$.

8. $y = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}$.

9. $xy + 2$ In $(x/y) - (xy)^{-1} = c$.

10. $(y - ce^{-3x})(y - x^2 - c) = 0$.

ll. $y = \sqrt{2e^x - x - 1}$.

12. $(x + 2\sqrt{y})(x - \sqrt{y})^2 = c$.

EJERCICIOS C, pág. 66

1. In $|x|$ = In $|u^2 + 1| - \frac{16}{31}$ In $|2u - 1| - \frac{23}{31}$ In $|3u^2 + 4u + 5|$

$$-\frac{68}{31\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{3u + 2}{\sqrt{11}}\right), \text{donde}\, u = \sqrt{\frac{5x - 6y}{5x + 6y}}$$

4. $5x^{12}y^{12} + 12x^{10}y^{15} = c$.

5. $x^2 + cxy + y^2 = 1$.

13. $y = 2 + e^{2x^2-2x}[c - \int xe^{2x^2-2x}\, dx]^{-1}$.

14. $y = x + e^{-x^2}[c + \int e^{-x^2}\, dx]^{-1}$.

15. $e^x(y - 1) = c(y - x)$.

Capítulo tres

EJERCICIOS A, pág. 76

1. (b) 4.410 cm, 2.940 cm/seg. (c) 3.430cm, 4.410 cm.

2. (a) 2.940 cm, 490 cm/seg hacia arriba después de 2 seg.
1.960 cm, 1.470 cm/seg hacia abajo después de 4 seg.

(b) 3.062,5 cm por encima del punto inicial (asumiendo $g = 980$ cm/seg² y las respuestas con una precisión de al menos cinco cifras significativas), 2,5 seg.

(c) 2.940 cm, 4.165 cm.

3. 9,08 seg, 290,7 pies/seg.

4. (a) $v = 49(1 - e^{-20t})$, $x = 49t + 2{,}45e^{-20t} - 2{,}45$. (b) 49 cm/seg.

5. (a) 25 pies/seg. (b) $v = 25(1 - e^{-2t/15})$, $x = 25t + \frac{375}{2}e^{-2t/15} - \frac{375}{2}$

6. (a) 50 pies/seg. (b) $v = 50 - 10e^{-0.64t}$, $x = 50t + \frac{125}{8}e^{-0.64t} - \frac{125}{8}$.

7. (a) $v = 16(1 - e^{-2}) = 13{,}8$ pies/seg. (b) $t = \frac{1}{2}\ln 16 = 2\ln 3 = 1{,}39$ seg.

8. (a) $v = 16\left(\frac{e^4 - 1}{e^4 + 1}\right) = 15{,}4$ pies/seg. (b) $t = \frac{1}{4}\ln 31 = 0{,}86$ seg.

9. 2 pies/seg.

EJERCICIOS B, pág. 79

4. (b) $v = p\left[\frac{(p + v_0)e^{\alpha t} - (p - v_0)}{(p + v_0)e^{\alpha t} + (p - v_0)}\right]$ donde $p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$, $\alpha = \frac{2g}{V}\sqrt{\frac{F}{W}}$, velocidad límite $= p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$. Si $v_0 = 0$, $v = p\left[\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}\right] = p \tanh\frac{\alpha t}{2}$ usando funciones hiperbólicas.

(c) $v = \sqrt{p^2 - (p^2 - v_0^2)e^{-2kx}}$ donde $p = V\sqrt{W/F}$, $k = Fg/WV^2$.

5. 37,5 pies, 8 pies/seg.

6. (a) $v = 100\sqrt{1 - e^{-0.0064x}}$. (b) $v = 100\left(\frac{e^{0.64t} - 1}{e^{0.64t} + 1}\right) = 100\tanh(0.32t)$.

(c) 97,9 pies/seg. (d) 100 pies/seg. (e) 784 pies.

10. $\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - a^2}}{a}\right)$.

EJERCICIOS C, pág. 80

1. (b) 200 pies, 80 pies/seg, 16 pies/seg². 5, 130,8 pies, 52,3 pies/seg, 10,5 pies/seg²

7. $v = \frac{cFt}{\sqrt{F^2t^2 + m_0^2c^2}}$, $x = \frac{c}{F}\sqrt{F^2t^2 + m_0^2c^2} - \frac{m_0c^2}{F}$

8. (a) $x = \frac{5}{2}t^2$. (b) $x = \frac{c^2}{5}(\sqrt{1 + 25t^2/c^2} - 1)$.

15. $\sqrt{\frac{L}{g(1 + \operatorname{sen}\alpha)}}\ln\left\{\frac{L + \sqrt{L^2 - [a + (a - L)\operatorname{sen}\alpha]^2}}{a + (a - L)\operatorname{sen}\alpha}\right\}$; $\operatorname{sen}\alpha < \frac{a}{L - a}$

EJERCICIOS A, pág. 88

1. $I = \frac{1}{2}(1 - e^{-20t})$.

2. $I = 2\operatorname{sen}10t - \cos 10t + e^{-20t}$.

3. $I = 20e^{-4t}$.

4. $Q = \frac{1}{4}(1 - e^{-8t})$, $I = 2e^{-8t}$.

5. $Q = 0{,}16\cos 6t + 0{,}12\operatorname{sen}6t - 0{,}16e^{-8t}$,
$I = 0{,}72\cos 6t - 0{,}96\operatorname{sen}6t + 1{,}28e^{-8t}$.

6. $Q = 0{,}05e^{-10t}$, $I = -0{,}5e^{-10t}$

7. $I(t) = 2e^{-4t}\operatorname{sen}50t$.

EJERCICIOS B, pág. BB

3. (a) $Q = 10 - 5(1 + 0{,}01t)^{-1.000}$, $I = 50(1 + 0{,}01t)^{-1.001}$ (b) 10 columbios.

4. (a) $I(t) = 4 - 4(1 + 0{,}02t)^{-10.000}$ (b) 4 amp.

5. $Q = 0{,}99CEe^{-t/RC}$

EJERCICIOS C, pág. 89

1. $I(t) = \begin{cases} 1 - e^{-100t}, & 0 \leqq t \leqq 5 \\ (1 - e^{-500})e^{-100(t-5)}, & t \geqq 5. \end{cases}$

2. $Q = CE_0(e^{-T/RC} - e^{-2T/RC} + e^{-3T/RC} - e^{-4T/RC})$.

EJERCICIOS A, pág. 94

1. (a) $2xy' = y$. (b) $yy' = -2x$, $2x^2 + y^2 = c_1$.

2. $3x^2 + 2y^2 = c_1$.

3. (a) $e^{x^2+y^2} = c_1x^2$; $x^2 - 3y^2 = 1$, $4e^{x^2+y^2-5} = x^2$.
   (b) $x^3 + 3xy^2 = c_1$; $x^2 + 8y = y^2$, $x^3 + 3xy^2 = 36$.
   (c) $4y^2 - 8y + \text{sen}^2\, 2x = c_1$; $y = 1 - \tan 2x$, $8y^2 - 16y + 2\,\text{sen}^2\, 2x = 1$
   (d) $9x - 3y + 5 = c_1e^{-6y}$; $y = 3e^{-2x} + 3x$, $9x - 3y + 5 = -4e^{6(3-y)}$.
   (e) $e^{-x^2-y^2} = c_1x^2$; $y^2 = 5(1 + x^2)$, $4e^{29-x^2-y^2} = x^2$.

EJERCICIOS B, pág. 94

1. $c = \frac{1}{3}$.

4. (a) $y^2 = \dfrac{2x^{2-p}}{2-p} - x^2 + c_1$ si $p \neq 2$; $e^{x^2+y^2} = c_1x^2$ si $p = 2$.
   (b) $x^2 - y^2 = c_1e^{x^2+y^2}$.

EJERCICIOS C, pág. 95

1. $2\tan^{-1}(y/x) + \ln(x^2 + y^2) = c$, o en coordenadas polares $r = ae^{-\phi}$.

2. $\ln(x^2 + y^2) \pm 2\sqrt{3}\tan^{-1}(y/x) = \pm 2\pi\sqrt{3}/3$ o $r = e^{\pm\sqrt{3}(\phi - \pi/3)}$.

3. $\pm y \tan\alpha + \sec^2\alpha \ln|y \mp \tan\alpha| = x + c_1$.

5. $r = c_1\,\text{sen}\,\phi$. 6. $(\ln r)^2 + \phi^2 = c_1$. 7. $r = c_1(1 + \cos\phi)$.

EJERCICIOS A, pág. 97

1. (b) $x = 24 \quad 22e^{-t/2}$. (c) 3 lb/gal aprox. (d) 24 Ib.

2. (a) $x = 40(1 - e^{-t/20})$. (b) 13,9 min.

3. 20,X min. 4. 34,7 min. 184,5 min

5. (a) 5,1 Ib. 6,6 lb. 7,6 lb. (b) 3 hr 53 min.

6. (a) $x = \dfrac{300[(18/17)^t - 1]}{3(18/17)^t - 2}$ (b) 26,6 Ib. (c) 100 Ib.

EJERCICIOS B, pág. 98

1. (a) $x = 1{,}5(10 - t) - 0{,}0013(10 - t)^4$, $0 \leqq t \leqq 10$. (b) 1,5 lb/gal.
2. (a) $3[1 - (1 - t/120)^4]$, $0 \leqq t \leqq 120$. (b) 2,81 lb/gal. (c) Ninguna. (d) 96,3 lb.
3. (a) 2,33 lb. (b) 1,12 lb/gal. (c) 10,3 hr.

EJERCICIOS C, pág. 99

4. (a) $1{,}44 \times 10^{-2}$ litros moles^{-1} min^{-1}. (b) 127 g de acetato, 71 g alcohol etílico.

EJERCICIOS A, pág. 104

1. (a) $75 - \frac{1}{4}x$. (c) 0,0375 cal.
2. (a) $U_0 + \left(\dfrac{U_1 - U_0}{L}\right)x$. (c) $\dfrac{K(U_0 - U_1)}{L}$.
3. (a) $741 \ln r - 2.120$. (b) 265°C. (c) $4{,}2 \times 10^5$ cal/min.
4. (a) $548 - 216 \ln r$ o $200 - 216 \ln (r/5)$, $5 \leqq r \leqq 10$.
   (b) 112°C. (c) $1{,}96 \times 10^5$ cal/min.
5. (a) $0{,}08x + 25$. (b) 144 cal/hr. 6. (a) $C_0(1 - x/L)$.

EJERCICIOS A, pág. 109

1. (a) 65,3° C. (b) 52 min, 139 min. 2. (a) 34,1°C, 37,4°C. (b) 8,5 min.
3. 98%, 96%, 92%. 4. Cerca de 24 años. 5. 64,5 días.
6. 79 min. 7. 1.35 hr, 1,98 hr. 8. 9 días.
9. 10 g. **10.** 3,6 días. **11.** **324** F.

EJERCICIOS B, pág. 110

3. \$ 1.492, 4,92%

EJERCICIOS C, pág. 110

2. 22.400 años.

EJERCICIOS A, pág. 114

1. Tomando el eje horizontal x, con origen en P, $y = x^2/500$, $-100 \leqq x \leqq 100$.
2. $y = x^2/625$, $-250 \leqq x \leqq 250$; valor absoluto de la pendiente = 0,8.
3. $y = 2{,}0 \times 10^{-3}x^2 + 8{,}3 \times 10^{-10}x^4$, $-100 \leqq x \leqq 100$, tomando el eje horizontal x con origen en P.

EJERCICIOS B, pág. 115

1. (a) 15,6. (b) $y = 31{,}2[\cosh (x/31{,}2) - 1]$, escogiendo el punto mínimo en (0, 0).

EJERCICIOS C. pág. 115

2. (a) 66 pies (b) 34 lb.
3. (a) 55 pies (b) 16,4 lb. (c) 21,4 lb.

EJERCICIOS A, pág. 119

1. 1,25 mi sec. 3. 18 hr, 50 hr. 5, 216.000 mi.

EJERCICIOS B, pág. 119

3. A 50 pies/seg, las alturas son 39 pies; a 6 mi/seg, las alturas son 2.970 millas asumiendo constante la aceleración gravitacional y 11.500 millas en otro caso.

EJERCICIOS A, pág. 122

1. $V = b \ln\left(\dfrac{M_0}{M_0 - at}\right) - gt,\ 0 \leqq t < M_0/a.$

2. $x = bt - \dfrac{b}{a}(M_0 - at)\ln\left(\dfrac{M_0}{M_0 - at}\right) - \frac{1}{2}gt^2,\ 0 \leqq t < M_0/a.$

EJERCICIOS B, pág. 122

1. (a) 220 metros/seg, 448 metros/seg, 350 metros/seg. (b) 445 metros

EJERCICIOS A, pág. 129

1. (a) 18 hr. (b) 30 hr. 2. (a) 23,8 min. (b) 2,16 hr

3. 37,7 min, 62,8 min. 4. $T = \dfrac{16A}{15ac}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}$; 100 min, 168 min.

EJERCICIOS A, pág. 135

1. $y = x(1 + \ln x)$. 2. $y = ce^{x/2} - 4x - 8$. 3. $x^2 + y^2 - 4y = 9$.

4. $y = \frac{1}{3}(x + 1)$.

6. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(x/y) = \ln 2 + \pi/2$.

EJERCICIOS B, pág. 135

1. $x(\sqrt{x^2 + y^2} + x)/y^2 + \ln\left|(\sqrt{x^2 + y^2} + x)/y^3\right| = \frac{3}{2} - 3\ln 2$

3. $\sqrt{y^2 + 1} + \ln(\sqrt{y^2 + 1} - 1) = \pm x + c$

5. La línea recta $y = a\sqrt{2m} - mx$ o la hipérbola $xy = a^2/2$.

6. La línea recta $y = am/\sqrt{1 + m^2} - mx$ o la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

7. (a) $y^2 = 2cx + c^2,\ y^2 = 16 - 8x$.

EJERCICIOS C, pág. 136

2. $r = \pm a/(\phi + c)$ donde a es la longitud constante.

3. $r = a\operatorname{sen}(\phi + c)$, donde a es la longitud constante.

4. $r = ce^{\alpha\phi}$ donde $\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}$.

5. $r = \sqrt{3}(\csc\phi - \cot\phi)$ o $r = (\sqrt{3}/3)(\csc\phi + \cot\phi)$.

6. (b) $x\cos c + y\operatorname{sen} c = a$ y la envolvente $x^2 + y^2 = a^2$.

EJERCICIOS A, pág. 145

1. $y = \frac{S}{6EI}(3Lx^2 - x^3),\ 0 \leqq x \leqq L,\ \frac{SL^3}{3EI}.$

2. $y = \frac{S}{48EI}(3L^2x - 4x^3),\ 0 \leqq x \leqq L/2,\ \frac{SL^3}{48EI},\ \frac{SL^2}{16EI}$ (y para $L/2 \leqq x \leqq L$ se obtiene por simetría).

3. (a) $y = \frac{S}{6EI}(3Lx^2 - x^3) + \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$ (b) $\frac{SL^3}{3EI} + \frac{wL^4}{8EI}.$

4. (a) $y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \frac{S}{48EI}(3L^2x - 4x^3),\ 0 \leqq x \leqq L/2$ (y para $L/2 \leqq x \leqq L$ se obtiene por simetría).

(b) $\frac{wL^4}{384EI} + \frac{SL^3}{48EI}.$

5. $y = \begin{cases} \frac{S}{12EI}(3Lx^2 - 2x^3), & 0 \leqq x \leqq L/2. \\ \frac{SL^2}{48EI}(6x - L), & L/2 \leqq x \leqq L. \end{cases}$ $\frac{5SL^3}{48EI}.$

6. $y = \begin{cases} \frac{w}{24EI}(x^4 + 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{S}{12EI}(3Lx^2 - 2x^3),\ 0 \leqq x \leqq \frac{L}{2}. \\ \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{SL^2}{48EI}(6x - L),\ \frac{L}{2} \leqq x \leqq L. \end{cases}$

EJERCICIOS B, pág. 146

1. $y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2),\ 0 \leqq x \leqq L/2,\ \frac{wL^4}{384EI}$ (y para $L/2 \leqq x \leqq L$ se obtiene por simetría).

2. $y = \begin{cases} \frac{1}{48EI}[(3SL + 2wL^2)x^2 - 4(wL + S)x^3 + 2wx^4],\ 0 \leqq x \leqq L/2. \\ \frac{1}{48EI}[(3SL + 2wL^2)(L - x)^2 - 4(wL + S)(L - x)^3 + 2w(L - x)^4],\ L/2 \leqq x \leqq L. \end{cases}$

Deflexión máxima= $\frac{L^3}{384EI}\cdot(2S + wL)$. (Note que esto es válido sólo para $S \geqq 0$; para $S < 0$ la deflexión máxima no ocurre en $x = L/2$.)

3. (a) $y = \frac{w}{48EI}(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2).$

4. $y = \frac{w}{384EI}(16x^4 - 12Lx^3 + L^3x),\ 0 \leqq x \leqq L/2$ (y para $L/2 \leqq x \leqq L$ se obtiene por simetría).

EJERCICIOS C, pág. 146

6. (a) $y = \dfrac{k}{360EI}(3x^5 - 10L^2x^3 + 7L^4x), 0 \leqq x \leqq L.$

(b) $y = \dfrac{k}{360EI}(x^6 - 5L^3x^3 + 4L^5x), 0 \leqq x \leqq L.$

(k es la constante de proporcionalidad en cada caso.)

EJERCICIOS A, pág. 152

1. $y = \dfrac{669}{1 + 2{,}45e^{-31t}}$ o $y = \dfrac{66{,}9}{1 + 2{,}45(0{,}270)^t}$.

3. (a) $y = \dfrac{38{,}47}{1 + 31{,}06e^{1{,}165x}}$ o $y = \dfrac{38{,}47}{1 + 31{,}06(0{,}03061)^{x/3}}$

(b) $y = 1{,}20, 3{,}59, 9{,}52, 19{,}7, 29{,}7, 35{,}2, 37{,}4$ correspondiente a $x = 0, 1,$, 6 respectivamente.

(c) 38,5 cm².

4. (a) 61,3 cm. (b) $y = \dfrac{61{,}27}{1 + (1{,}220)(0{,}3269)^t}$ o $y = \dfrac{61{,}27}{1 + 1.220e^{-1.118t}}$ donde $t = 0, 1, 2,$ corresponde a 16, 32. 48 días respectivamente.

(c) 19,1 cm, 36,6 cm, 58,8 cm.

EJERCICIOS A, pág. 155

2. 37,2%, 66,5%, 86,9%, 95,7%.

EJERCICIOS B, pág. 156

1. En otros 23 días.

EJERCICIOS A, pág. 158

1. (a) $0{,}08(1 - e^{-1/2}), 0{,}08(1 - e^{-2})$. (b) 0,08.
2. (a) 60 ln 2. (b) 120 In 2.
3. (a) $0{,}08 + 0{,}12e^{-1/2}, 0{,}08 + 0{,}12e^{-2}$. (b) 0,08.

EJERCICIOS A, pág. 164

1. (a) $p = 25e^{3t\ 2} - 20$. (b) No hay estabilidad de precio, no hay precio de equilibrio.
2. (a) $p = 15 + 20e^{-2t}$. (b) Hay estabilidad de precio, precio de equilibrio = 20.
3. (a) $p = 30t + 20$. (b) No hay estabilidad de precio ni precio de equilibrio.
4. $p = 14 + 6e^{-15t}$.
5. 2.440 + 360é $^{1\ 5t}$.

EJERCICIOS B, pág. 164

1. (a) $p = 8 + 4e^{-2t} + te^{-2t}$. (b) Hay estabilidad de precio, precio de equilibrio = 8.
2. $p = 18 - 3e^{-2t} - 6e^{-t/3}$.

Capitulo cuatro

EJERCICIOS A, **pág.** 171

1. (a) $(D^2 + 3D + 2)y = x^3$. (b) $(3D^4 - 5D^3 + 1)y = e^{-x} + \operatorname{sen} x$.
   (c) $(D^2 + \beta D + \omega^2)s = 0$, $D \equiv d/dt$. (d) $(x^2D^2 - 2xD - 1)y = 1$.
2. (a) $x^3 + 6x^2 - 12x - 6 - 2e^{-x}$. (b) $48 \operatorname{sen} 2x - 16 \cos 2s$.
   (c) $6x^2 - 6x - 6 - 2e^{-x} - 8 \cos 2.x - 16 \operatorname{sen} 2x$.
   (d) $26x^3 - 36x^2 + (4x^2 - 12x - 8)e^{-x} + (12x^2 + 54s + 6) \operatorname{sen} 2x + (36x^2 - 18x + 18) \cos 2.x$.

EJERCICIOS B, **pág.** 172

1. $(D - 1)(x^3 + 2x) = -x^3 + 3x^2 - 2s + 2$.
   $(D - 2)(D - 1)(x^3 + 2x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 6$.
   $(D^2 - 3D + 2)(x^3 + 2x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 6$.

EJERCICIOS **C,** pág. 172

1. $(D \quad x)(2x^3 - 3x^2) = -2x^4 + 3x^3 + 6s' \quad 6s$.
   $(D + x)(D - x)(2x^3 - 3x^2) = -2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 12s \quad 6$.
   $(D^2 - x^2)(2x^3 - 3x^2) = -2x^5 + 3x^4 + 12x - 6$.
   $(D - x)(D + x)(2x^3 - 3x^2) = -2.x' + 3x^4 + 2x^3 - 3.x' + 12x \quad 6$.

3. $(D - 1)(D - 2)(D - 3)$; no. 5. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$.

6. (a) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$. (b) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} + c_3e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{3}$.
   (c) $y = c_1e^x + c_2xe^x + 1$. (d) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x} \int e^{(x^2/2)+x}\,dx - 1$.

EJERCICIOS **A, pág.** 175

1. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{-5x}$. (b) $y = c_1e^{5x/2} + c_2e^{-5x/2}$ (c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
   (d) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{x/2} + c_3$. (e) $I = c_1e^{(2+\sqrt{2})t} + c_2e^{(2-\sqrt{2})t}$.
   (f) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{2x}$.
2. (a) $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-x}$. (b) $y = e^{2x} - 2e^x$. (c) $y = \frac{1}{2}(e^{4x} + e^{-4x}) - 1$.

EJERCICIOS B, **pág.** 175

1. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{(\sqrt{5}-1)x} + c_3e^{-(\sqrt{5}+1)x}$.

EJERCICIOS C, **pág.** 175

1. $y = c_1e^{(2-\sqrt{6})x} + c_2e^{(2+\sqrt{6})x} + c_3e^{-(2-\sqrt{6})x} + c_4e^{-(2+\sqrt{6})x}$.
2. $y = c_1e^{(3+\sqrt{3})x} + c_2e^{(3-\sqrt{3})x} + c_3e^{-(2+\sqrt{2})x} + c_4e^{-(2-\sqrt{2})x}$.

EJERCICIOS A, **pág.** 177

1. (a) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. (b) $y = c_1e^{x/4} + c_2xe^{x/4}$. (c) $I = c_1e^{3t/2} + c_2te^{3t/2}$.
   (d) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{2x} + c_6e^{-2x}$.
   (e) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x$.
   (f) $y = c_1e^{\sqrt{5/2}x} + c_2xe^{\sqrt{5/2}x} + c_3e^{-\sqrt{5/2}x} + c_4xe^{-\sqrt{5/2}x}$.
2. (a) $y = e^x - 3xe^x$. (b) $y = 1$. (c) $s = -4te^{-8t}$.

EJERCICIOS C, pág. 178

1. $y = c_1 x + c_2[x \int e^{x^2/2}\,dx - e^{x^2/2}]$. **2.** $p = -1,\ y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x$.

3. $y = c_1\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right] + c_2 x$.

$$y = c_1\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right] + c_2 x - \frac{x}{6}\ln(1 - x^2).$$

EJERCICIOS A, pág. 180

1. **(a)** $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$. (b) $y = e^{-2x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)$

(c) $s = c_1 \operatorname{sen}\frac{3t}{2} + c_2 \cos\frac{3t}{2}$. (d) $y = e^x\left(c_1 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(e) $y = c_1 + c_2 x + c_3$ **sen4.u** $+ c_4 \cos$ **4.x.** (f) $y = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x)$.

2. (a) $y = 4 \cos x$. (b) U = sen 4r. (c) $I = e^{-t}(\operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t)$.

EJERCICIOS B, pág. 180

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + e^x(c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_4 \cos \sqrt{3}x) + e^{-x}(c_5 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_6 \cos \sqrt{3}x)$.

3. $y = (c_1 \operatorname{sen} \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{}$ 2.x) $+ x(c_3 \operatorname{sen} \sqrt{2}x + c_4 \cos \sqrt{2}x)$.

EJERCICIOS C, pág. 180

1. $y = e^x(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + e^{-x}(c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x)$.

2. $y = e^x(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos$ 2s) $+ e^{-x}(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x)$

EJERCICIOS MISCELANEOS DE REPASO SOBRE SOLUCIONES COMPLEMENTARIAS

EJERCICIOS A, pág. 180

1. (a) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$. (b) $y = c_1 e^{4x} + c_2 + c_3 e^{-2x}$.

(c) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + c_4 + c_5 x$.

(d) $y = c_1 e^{-x} + c_2$ senr $+ c_3 \cos x + c_4 e^{-2x}$.

(e) $y = e^{2x}(c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos$ 3.x) $+ e^{-x}(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos$ 2x) $+ c_5 e^{5x} + c_6 e^{-x}$.

(f) $y = e^x(c_1 \operatorname{sen}\sqrt{3x} + c_2 \cos \sqrt{3x}) + c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x} + c_5 + c_6 e^{-x}$.

(g) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 + c_6 e^{-2x} + e^{-x}(c_7 \operatorname{sen} 2x + c_8 \cos$ 2s).

(h) $y = e^x(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + x e^x(c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x)$.

(i) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{4x} + c_4 e^{-4x} + e^{x/2}(c_5 \operatorname{sen} 2x + c_6 \cos 2x)$
$+ e^{-x}(c_7 \operatorname{sen} 3x + c_8 \cos$ 3.x).

(j) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 + c_5 x + c_6 \operatorname{sen} x + c_7 \cos x + x(c_8 \operatorname{sen} x + c_9 \cos x)$.

2. (a) $y = e^{-x/2}\left(c_1 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x$.

(c) $y = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x + x(c_5 \operatorname{sen} x + c_6 \cos x)$.

(d) $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}$. (e) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$.

(f) $S = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t + c_3e^{\sqrt{2}t} + c_4e^{-\sqrt{2}t}$.

EJERCICIOS B, **pág.** 181

1. $a = 5$, $b = 24$, $c = 20$.

2. $(D^6 - 2D^5 + 7D^4 + 4D^3 - D^2 + 30D + 25)y = 0$,
$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + e^x(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x) + xe^x(c_5 \operatorname{sen} 2x + c_6 \cos 2x)$.

EJERCICIOS **C,** pág. 181

2. (a) $y = c_1e^x + e^{-x/2}\left(c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(b) $y = c_1e^x + e^{x\cos 4\pi/5}[c_2 \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} 4\pi/5) + c_3 \cos(x \operatorname{sen} 4\pi/5)]$
$+ e^{x\cos 2\pi/5}[c_4 \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} 2\pi/5) + c_5 \cos$ (x si

3. $y = c_1e^{\sqrt[3]{4}x} + e^{-\sqrt[3]{4}x/2}\left(c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}x + c_3 \cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}x\right)$

EJERCICIOS A, pág. **190**

1. 1. d. denota *linealmente dependientes;* l.i. denota *linealmente independientes.*

(a) l.i. (b) l.d. (c) l.i. (d) l.i. (e) l.d. (f) l.i. (g) l.d. (h) l.d.

3. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$. (b) $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$.

(c) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{3x}$. (d) $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + (c_3 + c_4x)e^{-2x}$.

EJERCICIOS **B,** pág. 190

4. La tercera función es la suma de las dos primeras así que las funciones son linealmente dependientes.

EJERCICIOS **A, pág.** 196

1. (a) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{5}e^{3x}$. (b) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{12}{25} \operatorname{sen} 2x - \frac{16}{25}$ c.

(c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - 2x^2 - 1$.

(d) $y = e^{-2x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + \frac{1}{2}e^{-x} + 3x - \frac{12}{5}$.

(e) $I = c_1 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + c_2 \cos \frac{t}{2} + t^2 - 8 - \frac{2}{35} \cos 3t$

(f) $y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \cos 2x + \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{3} \cos x$.

2. la) $y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{12} \operatorname{sen} 4x$. (b) $s = 8e^{2t} - 24e^t + 41''$ $+ 12t + 14 + 2e^{-t}$

EJERCICIOS **B, pág.** 196

1. $y = 3 - 4 \operatorname{sen} x - 2 \cos x - \cos 2x$.

EJERCICIOS C, **pág.** 196

1. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{27}{130} \cos 3x - \frac{21}{130} \operatorname{sen} 3x + \frac{79}{6.970} \operatorname{sen} 9x - \frac{27}{6.970} \cos 9x$.

2. $y = \begin{cases} x - \operatorname{sen} x, & 0 \leqq x \leqq \pi. \\ -\pi \cos x - 2 \operatorname{sen} x, & x \geqq \pi. \end{cases}$

EJERCICIOS **A, pág. 199**

1. (a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} x e^x$. (b) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x^2 - 2 - \frac{1}{2} x \cos x$

(c) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{12} e^{3x}$.

(d) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$.

(e) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + 2x \operatorname{sen} 2x - x$.

(f) $y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x)$.

2. (a) $I = 4 \cos 3t + 2t \operatorname{sen} 3t$. (b) $s = 2 - 2e^{-t} + \frac{t^2}{2} - t - te^{-t}$.

EJERCICIOS **B, pág. 199**

1. $y = c_1 \operatorname{senh} x + c_2 \cosh x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{senh} x$.

2. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{4}(x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x)$.

EJERCICIOS **C, pág. 199**

3. $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{3}{32} - \frac{1}{96} \cos 4x - \frac{x}{8} \operatorname{sen} 2x$

EJERCICIOS **A,** pág. 202

1. (a) $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$; $(ax + b)e^{-x} + x(c \operatorname{sen} x + d \cos x)$.

(b) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$; $(ax + b) \operatorname{sen} 2x + (cx + d) \cos 2x + (fx^4 + gx^3 + hx^2 + kx)e^{3x}$.

(c) $c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x$; $ax^4 + bx^3 + cx^2 + de^x$.

(d) $c_1 e^x + c_2 x e^x$; $(ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$.

(e) $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$; $e^{-x}(a \operatorname{sen} x + b \cos x) + cx + d$.

(f) $c_1 e^x + c_2 e^{3x}$; $axe^x + (bx^3 + cx^2 + dx + f)e^{-x}$.

2. (a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{e^x}{4}(x^2 - x)$

(b) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3x^2}{8} \operatorname{sen} 2x + \frac{3x}{16} \cos 2x$

(c) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x} + \frac{1}{50}(3 \cos 3x + 4 \operatorname{sen} 3x)$

(d) $Q = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + \frac{3}{4} t \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} t^2 \cos t$

EJERCICIOS B, **pág.** 202

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} - \left(\frac{x^3}{15} + \frac{4x^2}{25} + \frac{42x}{125} + c_3\right) e^{3x}$.

2. $y = \frac{t}{4\omega^2} (\operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t) + \frac{t^2}{4\omega} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) - \frac{1}{4\omega^3} \operatorname{sen} \omega t$

3. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-x} + \frac{e^{-x}}{52} (\cos 2x - 5 \operatorname{sen} 2x)$.

EJERCICIOS C, pág. 202

1. $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48} \cos 4x - \frac{1}{128} \cos 6x$

2. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-(3+\sqrt{3})x} + c_3 e^{-(3-\sqrt{3})x} + \dfrac{e^{4x}}{1472} - \dfrac{xe^{2x}}{88} - \dfrac{1}{32} - \dfrac{e^{-2x}}{32} + \dfrac{e^{-4x}}{192}$.

EJERCICIOS A, pág. 205

1. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\csc x - \cot x)$.

2. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln \cos x$.

3. $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{sen} 2x - (x/2) \cos 2x$

4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$. 5. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4} - 3xe^{-2x}$.

6. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \dfrac{1}{2} \ln x + \dfrac{e^x}{3} \displaystyle\int \dfrac{e^{-x}}{x} dx + \dfrac{e^{-2x}}{6} \displaystyle\int \dfrac{e^{2x}}{x} dx$.

7. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2} + \frac{1}{10} e^{-3x}$.

8. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \dfrac{e^x}{48}(8x^3 - 12x^2 + 12x)$.

9. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2e^x \int e^{-x-x^2} dx - 2e^{-x} \int e^{x-x^2} dx$.

10. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad 12e^{2x} \int x^{3/2} e^{-2x} dx + 12xe^{2x} \int x^{1/2} e^{-2x} dx$

EJERCICIOS B, pág. 206

4. (b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} \quad \frac{1}{2} x e^x$.

5. $y = c_1 x^2 + c_2 x - xe^{-x} - (x^2 + x) \displaystyle\int \dfrac{e^{-x}}{x} dx$.

EJERCICIOS A, pág. 211

1. $y = c_1 + c_2 e^x - x$. 2. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$.

3. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x - xe^{-x}$.

4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2x^4 - 24x^2 + 3x - 49$.

5. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + x^4 - 4x^3 + 12x'' - 24x - \frac{1}{3} e^{2x}$.

6. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{12} x^4 e^{-x} + 1$. 7. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{2x} \operatorname{sen} 3x$.

8. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{6} x^6 - 5x^4 - 60x^2 - x$.

EJERCICIOS B, pág. 211

3. $\frac{1}{5} e^{4x}$, $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$.

4. $\dfrac{e^{3x}}{15} + \dfrac{2e^{-5x}}{21}$, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} + \dfrac{e^{3x}}{15} + \dfrac{2e^{-5x}}{21}$

9. (a) $-e^{2x}(x^3 + 6x)$. (b) $2e^{-2x}(x^2 + 4x + 6) + \frac{1}{13} e^{2x}$

11. (a) $-\frac{1}{8} \operatorname{sen} 3x$. (b) $\frac{1}{15}(\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x)$.

13. (a) $\frac{1}{130}(9 \cos 3x - 7 \operatorname{sen} 3x)$. (b) $\dfrac{8 \cos 2x - 19 \operatorname{sen} 2x}{85}$

14. (a) $-\frac{e^{2x}}{50}(3\cos 3.Y + \operatorname{sen} 3x)$. (b) $\frac{e^{-x}}{58}(2\cos 2x \quad 5 \operatorname{sen}2.x)$.

16. (a) $\frac{e^{3x}}{10}$. (b) $-x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 60x^2 - 72s + 12$

(c) $\frac{e^{2x}}{125}(25x^2 - 40s + 22)$. (d) $-\frac{2}{17}(\cos 4x + 4 \operatorname{sen} 4x)$

(e) $\cos s$. (f) $-\frac{1}{64}e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

(g) $\frac{e^x}{5}(4 \operatorname{sen} x + 7 \cos x)$. (h) $e^{-x}\left(\frac{x^6}{120} - \frac{x^5}{10} + \frac{3x^4}{-} - 4x^3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right)$

(i) $-x^2 + 2x - 4 + \frac{3}{4}(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

(j) $e^x(x^2 - 4.x + 4) - \frac{4}{5}x^5 - 4x^4 + 48x^2 + 96x$.

EJERCICIOS **C, pág. 214**

1. $\frac{e^{2x}}{60}\left(x^4 - \frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{25}x^2 - \frac{24}{125}x + \frac{24}{125}\right)$

4. (a) $\frac{1}{2}x^2e^x$. (b) $-2xe^x - xe^{2x}$. (c) $\frac{1}{24}x^4e^{-2x}$.

(d) $-\frac{1}{6}x\cos 3x$. (e) $-\frac{x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos s)$. (f) $-\frac{x}{4}\cos x - \frac{x^2}{8}\operatorname{sen} x$.

5. $y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\cos x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\right)\operatorname{sen} x$.

EJERCICIOS **A, pág.** 216

1. (a) $y = c_1x^2 + c_2x$. (b) $y = \frac{1}{2}x^{1\ 2}(2 - \ln x)$.

(c) $2' = c_1x^2 + \frac{c_2}{x} - \frac{x}{2}$. (d) $y = x[c_1 \operatorname{sen}(\ln x) + c_2\cos(\ln x)] + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}$

(e) $y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2\ln x}{x^2} + \frac{x^2}{16} + 4(\ln x)^2 - 8\ln x + 6$.

(f) $y = x^{1/2}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] + 16\cos(\ln x)$.

(g) $I = \frac{c_1 + c_2\ln t}{t} + \frac{t}{4}(\ln t - 1)$.

(h) $y = 2x^{4\ 5} - 3x'^{\ 5} + x$.

(i) $y = c_1x^3 + c_2x^{-3} - \frac{4}{35}(x^{1/2} + x^{-1\ 2})$.

(j) $y = c_1x^3 + c_2\ln x + c_3 - \frac{5}{2}x\ln x + \frac{15}{4}x$.

2. $y = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3x - \ln x + \frac{1}{2}x\ln x$.

3. (a) $y = c_1x + c_2x\ln x + c_3x(\ln x)^2 + \frac{x(\ln x)^4}{24}$

(b) $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3\cos(\ln x) + c_4\operatorname{sen}(\ln x) - 1$

EJERCICIOS B, pág. 217

1. $-\frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \ln x + c_1 x + c_2.$ 3. $m = -3, 1; y = c_1 x^{-3} + c_2 x.$

5. $y = \dfrac{c_1}{\sqrt{2x+3}} + c_2(2x+3) + \frac{3}{5}(2x+3)^2 - 6(2x+3)\ln(2x+3)$ 27.

6. $y = c_1(x+2)^{(1/2)(1+\sqrt{5})} + c_2(x+2)^{(1/2)(1-\sqrt{5})} - 4.$

7. $R = c_1 r^n + \dfrac{c_2}{r^{n+1}}$

EJERCICIOS C, pág. 217

1. $y = c_1 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + c_2 \cos(\operatorname{sen} x).$ 2. $y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$

6. (a) $y = c_1 e^{\cos x} + c_2 e^{2\cos x}.$ (b) $y = c_1 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + c_2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x^2} - 2.$

EJERCICIOS MISCELANEOS SOBRE EL CAPITULO CUATRO

EJERCICIOS A, pág. 221

1. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \sqrt{3}x - \frac{1}{9}\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}.$

2. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\operatorname{sen} x + 3\cos x).$

3. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$

4. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}xe^{-2x}.$

5. $I = e^{-t}(c_1 \cos 2r + c_2 \operatorname{sen} 2t) + 2(\cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t).$

6. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t - 2te^{-t}.$

7. $y = \dfrac{e^{2x}}{64}(8x^2 - 4x + 1) - \frac{1}{64}e^{-2x}.$

8. $y = \frac{4}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^{-2}.$

9. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x + c_3 - \frac{1}{4}x^2.$

10. $y = c_1 x + c_2 + c_3 \cos 4x + c_4 \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} 4x.$

11. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{x}{4} + \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\operatorname{sen} x.$

12. $r = c_1 e^{\sqrt{2}\phi} + c_2 e^{-\sqrt{2}\phi} - \frac{1}{2}e^{-2\phi}$

13. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 + 3x^2 e^{2x} + 2x^3 + 6x^2 + 9x.$

14. $y = \cos x + 2 \operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x) + x \operatorname{sen} x.$

15. $y = c_1 x^4 + c_2 x \quad 8s \ln x + 6.$

16. $s = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + \cos 3t.$

17. $y = c_1 e^{x^2} + c_2 x e^{x^2} - e^{x^2}\int xe^{-x^2}\ln x\, dx + xe^{x^2}\int e^{-x^2}\ln x\, dx$

18. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{3x} + c_5 e^{-3x} + \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{20x}{81} - \dfrac{xe^x}{16}.$

19. $I = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + c_3 t + c_4 + 2e^{-t}.$

20. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + c_3 + \frac{1}{8}(\ln x)^2 + \frac{1}{4}\ln x$

EJERCICIOS B, pág. 221

1. $y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x + 4x\cos 2x - 4x\operatorname{sen} 2x.$

2. $y = 8x^2.$

3. $x = 2e^{-4t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) - 2e^{-2t}.$

4. $y = c_1\cos x \int e^{-\operatorname{sen} x}\sec^2 x\,dx + c_2\cos x.$

5. $y = \operatorname{sen} x + c_1\cos x \int e^{-\operatorname{sen} x}\sec^2 x\,dx + c_2\cos x.$

6. $y = c_1x^4 + x^{-1/2}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)\right] - x.$

7. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + \frac{e^x}{6}\int\frac{e^{-x}}{x}dx - \frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^x}{x}dx + \frac{e^{-2x}}{3}\int\frac{e^{2x}}{x}dx.$

EJERCICIOS C, pág. 221

1. $y = e^{-x^2}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x).$

2. $y = \frac{c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x}{x}.$

3. Los eigenvalores están dados por $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3,.$ Las eigenfunciones son $B_n \operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, 3,.$, donde B_n, $n = 1, 2, 3,.$ son constantes.

4. (b) $y = \frac{c\operatorname{sen} x - \cos x}{x(c\cos x + \operatorname{sen} x)}.$

5. $x = c_1e^{-y} + c_2ye^{-y} + 4y^2 - 16y + 24.$

6. (a) $Q = Q_0\cos\sqrt{k}t + \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^t E(u)\operatorname{sen}\sqrt{k}(t-u)du.$

9. $y = c_1 - c_1xe^{-x}\int\frac{e^x}{x}dx + c_2xe^{-x}.$

10. $y = c_1e^x + c_2e^x\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx.$

Capítulo cinco

EJERCICIOS A, pág. 229

1. Tomando como positivo la dirección hacia abajo. Entonces

   (b) $x = \frac{1}{4}\cos 16t$ (pies), $v = -4\operatorname{sen} 16t$ (pies/seg).

   (c) Amplitud $= \frac{1}{4}$ pies, período $= T = \pi/8$ seg, frecuencia $f = 8/\pi$ ciclos por seg.

   (d) $x = \sqrt{2}/8$ pies, $v = -2\sqrt{2}$ pies/seg, $a = -32\sqrt{2}$ pies/seg^2.

2. (a) $x = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 8t$ (pies), $v = 2\cos 8t$ (pies/seg).

   (b) Amplitud $= \frac{1}{4}$ pies, $T = \pi/4$ seg, $f = 4/\pi$ ciclos por seg.

   (c) 1,89 pies/seg, 5,33 pies/seg^2.

3. $x = \frac{5}{12}\cos 4\sqrt{3}t$, amplitud $= \frac{5}{12}$ pies, $T = 2\pi/4\sqrt{3} = \pi\sqrt{3}/6$ seg, $f = 2\sqrt{3}/\pi$ ciclos por seg.

4. $x = \frac{5}{12}\cos 4\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{12}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}t = \frac{5}{6}\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6}\right).$

   Amplitud $= \frac{5}{6}$ pies, $T = \pi\sqrt{3}/6$ seg, $f = 2\sqrt{3}/\pi$ ciclos por seg.

5. (a) Amplitud = 5 cm, $T = \pi/\sqrt{5}$ seg, $f = \sqrt{5}/\pi$ ciclos por seg.

   (b) $\pi/6\sqrt{5}, 5\pi/6\sqrt{5}, 7\pi/6\sqrt{5}, 11\pi/6\sqrt{5}, \ldots$ seg.

6. (a) $x = 1,5$ pul por encima de la posición de equilibrio, $v = 5\sqrt{3}/8$ pies/seg moviéndose hacia arriba.

(b) Amplitud= 3 pul, $T = 2\pi/5$ *seg*, $f = 5/2\pi$ ciclos por *seg*.

(c) $2\pi/15, 8\pi/15, 14\pi/15,$. seg.

7. (a) $x = 4\cos 2t - 3$ sen $2t$, $v = -8$ sen $2t - 6\cos 2t$.

(b) Amplitud = 5 cm, período = π seg, frecuencia = $1/\pi$ ciclos por seg. [Sugerencia: $4\cos 2t - 3$ sen $2t = 5(\frac{4}{5}\cos 2t - \frac{3}{5}$ sen $2t) = 5\cos(2t + \phi)$ donde $\cos\phi = \frac{4}{5}$, sen $\phi = -\frac{3}{5}$. Así el máximo valor de x, esto es, la amplitud, es 5. Esto también se puede encontrar por cálculo.]

(c) Velocidad máxima = 10 cm/seg, aceleración máxima = 20 cm/seg^2 .

8. (a) $x = \pm 4$ sen $5t$, $v = \pm 20\cos 5t$, $a = \mp 100$ sen $5t$ (la elección del signo depende de la dirección del movimiento de la partícula en $t = 0$).

(b) Amplitud = 4 cm, período = $2\pi/5$ seg, frecuencia = $5/2\pi$ ciclos por seg.

(c) Magnitud de la fuerza = $100\sqrt{2}$ dinas.

9. $x = 10\cos 3t$, amplitud = 10 cm, período = $2\pi/3$ seg. Frecuencia = $3/2\pi$ ciclos por seg.

10. (a) $2\sqrt{3}$ pies/seg hacia o alejándose de 0.

(b) Amplitud = 1 pie, período = $\frac{\pi}{2}$ seg, frecuencia = $\frac{2}{\pi}$ ciclos por seg.

(c) $\sqrt{2}/2$ pies de 0, $2\sqrt{2}$ pies/seg hacia 0, $8\sqrt{2}$ $pies/seg^2$ hacia 0.

11. (a) $20\sqrt{3}$ cm/seg hacia o alejándose de 0, 40 cm/seg^2 hacia 0.

(b) Amplitud = 20 cm, período = π seg, frecuencia = $1/\pi$ ciclos por seg.

(c) 10 cm de 0, $20\sqrt{3}$ cm/seg alejándose de 0, 40 cm/seg^2 hacia 0.

(d) Después de $\frac{\pi}{4}$ seg, $\frac{3\pi}{4}$ seg, $\frac{5\pi}{4}$ seg, etc.

EJERCICIOS B, pág. 231

3. 4,5 lb.

6. (a) 85 min. (b) 4,9 mi/seg.

EJERCICIOS A, pág. 238

1. (b) $x = \frac{e^{-8t}}{2}(\text{sen } 8t + \cos 8t)$, tomando hacia abajo como positivo.

(c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-8t}\,\text{sen}\left(8t + \frac{\pi}{4}\right)$, $A(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-8t}$, $\omega = 8$, $\phi = \frac{\pi}{4}$,

cuasi período = $2\pi/8 = \pi/4$ seg.

2. (a) $x = -\frac{25}{32}e^{-4,8t}$ sen $6,4t$, $v = e^{-4,8t}$ (3,75 sen $6,4t - 5\cos 6,4t$), tomando hacia abajo como positivo.

(b) $x = \frac{25}{32}e^{-4,8t}$ sen $(6,4t + \pi)$.

3. $x = 1,5e^{-3t}(3\text{ sen } 4t + 4\cos 4t) = 7,5e^{-3t}\text{ sen }(4t + \phi)$ donde $\cos\phi = \frac{3}{5}$, sen $\phi = \frac{4}{5}$ ó $\phi = 0,927$ radianes = 53" . Aquí, x está en pul.

4. (a) $x = 5e^{-3t}$(3 sen 4t + 4 cos 4t) tomando hacia abajo como positivo.

(b) $v = -125e^{-3t}$ sen $4t$.

5. (a) $x = 5e^{-3t}(4\cos 4t + 9\,\text{sen}\,4t)$, $v = 5e^{-3t}(24\cos 4t - 43\,\text{sen}\,4t)$.
(b) $x = 5e^{-3t}(4\cos 4t - 3\,\text{sen}\,4t)$, $v = -5e^{-3t}(24\cos 4t + 7\,\text{sen}\,4t)$.

6. (a) $x = e^{-16t}(0,5 + 8t)$ (pies). (b) Críticamente amortiguado.

7. (a) $x = 10e^{-16t}$ (pies), $v = 10(1 - 16t)e^{-16t}$ (pies/seg). (b) $5/8e = 0,23$ pies.

EJERCICIOS A, pág. 242

1. (a) $x = 0,960e^{-1,56t} - 0,695e^{-6,45t} - 0,298\,\text{sen}\,10t - 0,265\cos 10t$.

(b) Parte de estado estacionario: $0,298\,\text{sen}\,10t - 0,265\cos 10t = 0,397\,\text{sen}\,(10t + 3,87)$.

(c) Amplitud de estado estacionario $=$ 0,397 pies, período $= 2\pi/10 = \pi/5$ seg, frecuencia $= 5/\pi$ ciclos por seg.

2. $x = \frac{2}{3}\cos 2t - 5\,\text{sen}\,2t - \frac{2}{3}\cos 4t$, $v = \frac{8}{3}\,\text{sen}\,4t - \frac{4}{3}\,\text{sen}\,2t - 10\cos 2t$.

3. (a) $x = 10te^{-5t} - 2\,\text{sen}\,5t$. (b) $x = -2\,\text{sen}\,5t$.

EJERCICIOS B, pág. 242

2. (a) $x = 5\cos 10t + \cos 8t$. (b) $x = \text{sen}\,10t - \cos 10t + \cos 8t$

(c) $x = 5\cos 10t + \text{sen}\,10t + \cos 8t$.

EJERCICIOS A, pág. 245

1. (b) $x = 2\,\text{sen}\,2t - 4t\cos 2t$, $v = 8t\,\text{sen}\,2t$.

2. $x = \frac{1}{2}\cos 2t - 4t\cos 2t$, $v = 8t\,\text{sen}\,2t - \text{sen}\,2t - 4\cos 2t$; si.

3. (a) $x = \dfrac{15\cos\omega t}{100 - \omega^2}$. (b) $\omega = 10$.

EJERCICIOS A, pág. 249

1. (a) $Q = 4 - 2e^{-5t/2}(2\cos 5t + \text{sen}\,5t)$, $I = 25e^{-5t/2}\,\text{sen}\,5t$.

(b) Términos transientes de Q e I son $-2e^{-5t/2}(2\cos 5t + \text{sen}\,5t)$ y $25e^{-5}$ sen 5t respectivamente. Término de estado estacionario de Q es 4.

(c) $Q = 4$, $I = 0$.

2. (a) Período $= 2\pi/50 = \pi/25$ seg, frecuencia $= 25/\pi$ ciclo por seg.

(b) 0,04 culombios, 1 amp.

3. $Q = 2(\cos 40t - \cos 50t)$, $I = 20(5\,\text{sen}\,50t - 4\,\text{sen}\,40t)$.

4. $Q = 5,07e^{-5t} - 1,27e^{-20t} + 0,20$, $I = 25,4(e^{-20t} - e^{-5t})$ aproximadamente.

EJERCICIOS A, pág. 257

1. 3,26 pies, 13,04 pies.

2. (a) $\theta = 5\cos 4t$ (grados) o $(\pi/36)\cos 4t$ (radianes).

(b) Frecuencia $= 2/\pi = 0,636$ ciclos por seg.

(c) $2\pi/9$ pies.

(d) Velocidad $= 2\pi/9$ pies/seg, aceleración $= 2\pi^2/81$ pies/seg^2

3. Período $= \pi/5$ seg, frecuencia $= 5/\pi$ ciclos por seg.

4. Frecuencia $= 1{,}6$ ciclos por seg, período $= 0{,}625$ seg.

EJERCICIOS **B, pág.** 257

2. $1/4$ densidad de agua $= 15{,}6$ lb/pies^3.

5. (a) $P = P_0 + \frac{\beta}{k_1k_2} + \frac{\alpha \operatorname{sen}\sqrt{k_1k_2}\,t}{\sqrt{k_1k_2}} - \frac{\beta \cos\sqrt{k_1k_2}\,t}{k_1k_2}$

$S = S_0 + \frac{\alpha + \beta t}{k_1} - \frac{\beta \operatorname{sen}\sqrt{k_1k_2}\,t}{k_1\sqrt{k_1k_2}} \quad \frac{\alpha \cos\sqrt{k_1k_2}\,t}{k_1}$

(b) $P = P_0 + \frac{K\omega(\cos\sqrt{k_1k_2}\,t - \cos wt)}{\omega^2 \quad k_1k_2}$

$S = S_0 + \frac{K}{k_1}\operatorname{sen}\omega t + \frac{K\omega\sqrt{k_1k_2}\operatorname{sen}\sqrt{k_1k_2}\,t \qquad K\omega^2 \operatorname{sen}\omega t}{k_1(\omega^2 - k_1k_2)}$

EJERCICIOS C, **pág.** 258

7. $\frac{WEI}{LF^2}(u \tan u \quad \sec u - \frac{1}{2}u^2 + 1)$ donde $u = L\sqrt{F\;EI}$.

Capítulo seis

EJERCICIOS **A,** Pág. **270**

1. (a) $\frac{3}{s^2} \quad \frac{2}{s}, s > 0.$ (b) $\frac{12}{s^2 + 9}, s > 0$ (c) $\frac{5s}{s^2 + 4}, s > 0$

(d) $\frac{10}{s + 5}, s > -5.$ (e) $\frac{2}{s - 1} - \frac{3}{s + 1} + \frac{8}{s^3}, s > 1.$ (f) $\frac{15 - 4s}{s^2 + 25}, s > 0.$

(g) $\frac{6s}{s^2 - 9} \quad \frac{10}{s^2 - 25}, s > 5.$ (h) $\frac{1}{(s + 3)^2} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2}, s > 0.$

3. (a) $\frac{2}{(s - 3)^3}$, (c) $\frac{}{(s^2 + 1)^2} + \frac{}{(s + 1)^2}$

(d) $\frac{s^4 + 4s^2 + 24}{s^5}.$ (e) $\frac{s^2 + 4}{(s^2 - 4)^2} - \frac{4}{s^3}.$ (f) $\frac{4s}{s^2 - 36} - \frac{4}{s}.$

4. (a) $\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}.$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{2}{s} + \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}.$ (c) $\frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{3s^{5/3}}.$ (d) $\frac{\sqrt{\pi}}{2(s - 1)^{3/2}}.$

5. (b) $\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{4}{s}e^{-4s}.$

7. (a) $1 + H(t - 1).$ (b) $2t + (t^2 - 2t)H(t - 3).$

(c) $\cos t\{1 - H(t \quad 2\pi)\}.$

8. (a) $e^{-s}(s + 1)/s^2.$ (b) $\frac{e^{-2(s-1)}}{s - 1} - \frac{e^{-3(s+1)}}{s + 1}$

EJERCICIOS B, pág. 271

2. $\dfrac{2s+2}{(s^2+2s+2)^2}$.

5. $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{e^{as}-1}{e^{as}+1}\right) = \dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{as}{2}$.

7. $3\,\text{sen}\,t + (t^2 - 3\,\text{sen}\,t)H(t-\pi) + (t - t^2 - \cos t)H(t - 2\pi)$.

EJERCICIOS C, pág. 272

4. (b) $\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}\coth\dfrac{s}{2}$.

EJERCICIOS A, pág. 277

1. (a) --1. (b) $\frac{1}{4}e^{-3/2}$. (c) 1/27.
   (d) 0. (e) 27/8. (f) $\text{sen}(\pi^2/4)$.

2. (a) $e^{-2(s-1)}$. (b) $-\frac{\pi}{2}e^{(s+3)}$. (c) e^{-s}. (d) 0.

EJERCICIOS B, pág. 288

2. $e^{-\pi s}\cos\pi^3$.

5. (a) -1. (b) $\frac{1}{3}e$.

EJERCICIOS A. pág. 283

1. (a) $4e^{-2t}$. (b) $3\cos 3r$. (c) $3\,\text{sen}\,5t$.
   (d) $6\cos 2t - 5\,\text{sen}\,2t - 3e^{4t}$. (e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\text{sen}\sqrt{5}t - \cos\sqrt{5}t$. (f) $t^2 + 3t - 1$.

2. (a) $\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$. (b) $\frac{1}{2}e^{2t}(4\cos 4t - 3\,\text{sen}\,4t)$. (c) $\frac{1}{3}e^{-t/2}\left(3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.
   (d) $\frac{1}{6}e^t(t^3 + 3t^2)$. (e) $\frac{1}{2}e^{-t/2}(\cos t - \text{sen}\,t)$.

3. (a) $\frac{9}{2}e^t - \frac{7}{2}e^{-3t}$. (b) $\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{5}{2}e^{-4t}$.
   (c) $3e^{2t} - e^{-t} - 2e^{3t}$. (d) $(2r - 3)e^{-t} + 5e^{2t}$.
   (e) $2 - e^t(2\cos 2t - \text{sen}\,2t)$. (f) $\frac{1}{6}(2\cos t - 2\cos 2t + 2\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t)$.

4. (a) $\frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2}\,\text{senh}\,2t$. (b) $(t+2)e^{-t} + t - 2$. (c) $\frac{1}{2}(\text{sen}\,t - t\cos t)$.

5. (a) $Y = e^{3t} + 2e^t$. (b) $Y = 3e^{-2t} + 2t - 2$. (c) $Y = 2e^{-t} + \text{sen}\,3r - 2\cos 3t$.
   (d) $Y = 24 + 12t + e^t(9t - 20)$. (e) $Y = 4 - 2e^{-4t}(\cos 3t - 2\,\text{sen}\,3t)$.

EJERCICIOS B, pág. 289

1. sent $2\cos t + 2e^t(\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t)$.

2. $(2t - 1)e^{-t} + (2 -- 3t)e^{-2t}$.

3. $Y = e^{-t}(1 + t - t^2 + 2t^3)$.

4. $Y = \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t + \frac{1}{8}e^t + \frac{5}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}t\,\text{sen}\,t$.

5. (a) $\begin{cases}\frac{1}{2}(t-2)^2, & t \geqq 2\\ 0, & t < 2\end{cases}$ (b) $\begin{cases}2(t-1)^{1/2}e^{-(t-1)}/\sqrt{\pi}, & t \geqq 1\\ 0, & t < 1\end{cases}$

6. $Y = 4\,\text{sen}\,t$.

8. (a) $Y = \frac{1}{3}(e^{3t} + 2)$. (b) $Y = 1 - t$.

9. $\frac{1}{2}t$ senh t.

10. $Y = \pm \operatorname{sen} t$.

EJERCICIOS C, pág. 289

3. $Y = t$.

5. (a) $Y = 2e^{-2t} + 5e^{-2(t-1)}H(t-1) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & t < 1 \\ 2e^{-2t} + 5e^{-2(t-1)}, & t > 1 \end{cases}$.

(b) $Y = 6 \cos t + 3 \operatorname{sen}(t - \pi)H(t - \pi) = \begin{cases} 6 \cos t, & t < \pi \\ 6 \cos t + 3 \operatorname{sen} t, & t > \pi \end{cases}$

(c) $Y = 6(t-2)e^{-2(t-2)}H(t \quad 2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 6(t-2)e^{-2(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$

11. (c) $\dfrac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}(t^2) = \dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}, \dfrac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}\left(\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}\right) = 2t.$

EJERCICIOS A, pág. 301

1. $I = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$.

2. $X = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, si $X = 0$ en $t = 0$.

3. (a) $\begin{cases} (E_0/R)(1 - e^{-Rt/L}), & t \leqq T \\ (E_0/R)(e^{-R(t-T)/L} - e^{-Rt/L}), & t > T \end{cases}$

(b) $\dfrac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \cos \omega t + \omega L e^{-R/t/L})$.

EJERCICIOS B, pág. 301

11. (b) $x = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \dfrac{P_0(t - t_0)}{m}, & t > t_0 \end{cases}$.

Capítulo siete

EJERCICIOS A, pág. 321

1. (a) $y = 4\left(1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots\right) = 4e^{-x}$, todo x.

(b) $y = 5\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^2 2!} + \dfrac{x^6}{2^3 3!} + \dfrac{x^8}{2^4 4!} + \cdots\right) = 5e^{x^2/2}$, todo x.

(c) $y = c - cx + (c+2)\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots\right) = 2x - 2 + (c+2)e^{-x}$, todo x.

(d) $y = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdot = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, todo x.

(e) $y = 2 + 3[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdot]$, $|x - 1| < 1$, de hecho la solución para todo x es $y = 2 + 3 \ln x$.

(f) $y = c_1\left[1 + \frac{2(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} - \cdots\right]$

$+ c_2\left[(x-1) - \frac{5(x-1)^3}{3!} + \frac{2(x-1)^4}{4!} - \frac{(x-1)^5}{5!} + \cdots\right],$

$|x-1| < 1.$

(g) $y = c_1\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right) + c_2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right),$

todo x.

(h) $y = c_1 x + c_2\left[1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{2^3} + \cdots\right]$, $|x-2| < 2$, de hecho la solución para todo $x \neq 0$ es $y = c_1 x + 2c_2/x$.

(i) $y = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{11x^6}{6!} - \frac{311x^8}{8!} - \cdots, |x| < 1$

(j) $y = c_1 + c_2\left[1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^3}{2^3} + \cdots\right], |x-1| < 2$, de hecho la solución para todo $x \neq -1$ es $y = c_1 + 2c_2/(x+1)$.

2. (a) Sí, todo x. (b) Sí; $|x-2| < 2$. (c) sí; $|x| < 1$.
(d) Sí, $|x - \frac{1}{3}| < \frac{1}{3}$. (e) Sí; $|x| < 2$. (f) sí; $|x-1| < 1$.

4. $y = c_1\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \cdots\right)$

$+ c_2\left(x - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^7 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^{10} + \cdots\right),$

convergencia para todo x.

EJERCICIOS B, pág. 321

1. (a) $y_4 = 1 - 3x + \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^3}{3!}$. (b) $y_4 = 2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)$.

(c) $y_4 = 3e^x - \frac{x^2}{2} - 2x - 3.$

(d) $y_4 = c\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{384}\right)$.

2. $y_4 = 2 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{24}$

4. $y = x^2 + 1.$

5. $y = c_1(1 - 2x^2) + c_2\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^7}{210} - \frac{x^9}{1512} - \cdots\right)$.

8. $y = c_1\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \cdots\right) + c_2\left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right)$

$+ \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{5.040} + \cdots.$

EJERCICIOS **C, pág.** 322

1. $y = 1 - \frac{x^{2}}{2!} - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{3x^{5}}{5!} + \frac{9x^{6}}{6!} + \frac{16x^{7}}{7!} + \cdots$, todo x.

EJERCICIOS **A, pág.** 334

1. (a) $y = c_1\left(x^{-1} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots\right) + c_2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)$

$= \frac{c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x}{x}$, todo $x \neq 0$.

(b) $y = c_1\left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)(3\cdot 7)} + \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)(3\cdot 7\cdot 11)} + \cdots\right)$

$+ c_2 x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)(5\cdot 9)} + \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)(5\cdot 9\cdot 13)} + \cdots\right)$ todo x.

(c) $y = cx^{-1} + c_2\left(1 - x + \frac{x^2}{3}\right)$, todo $x \neq 0$.

(d) $y = c_1(x - \frac{5}{3}x^3) + c_2(1 - 6x^2 + 3x^4 + \frac{4}{5}x^6 + \frac{3}{7}x^8 + \frac{2}{7}x^{10} + \cdots)$, la última serie converge para $|x| < 1$.

(e) $y = c_1 U(x) + c_2 V(x)$, donde

$U(x) = x - \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} - \frac{x^4}{3!4!} + \cdots$

$V(x) = U\int \frac{dx}{U^2} = U(x)\ln|x| + 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{48}x^3 + \frac{5x^4}{1728} + \cdots$, todo $x \neq 0$.

(f) $y = c_1\left(x^{-1/2} - \frac{x^{3/2}}{2!} + \frac{x^{7/2}}{4!} - \cdots\right) + c_2\left(x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{3!} + \frac{x^{9/2}}{5!} - \cdots\right)$

$= x^{-1/2}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$, todo $x \neq 0$.

(g) $y = c_1(1 - x) + c_2(1 - x)\int \frac{e^x\,dx}{x(1-x)^2}$

$= c_1(1 - x) + c_2\left[(1 - x)\ln|x| + 3x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} - \frac{x^4}{72} - \cdots\right]$, todo $x \neq 0$.

(h) $y = c_1\left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots\right) + c_2\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)$

$= c_1 \cos x^2 + c_2 \operatorname{sen} x^2$, todo x.

(i) $y = c_1\left(x^{1/2} + \frac{x^{3/2}}{2!} + \frac{x^{5/2}}{4!} + \cdots\right) + c_2\left(x^{3/2} + \frac{x^{7/2}}{3!} + \frac{x^{11/2}}{5!} + \cdots\right)$

$= c_1 x^{1/2}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + c_2 x^{1/2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

$= \sqrt{x}(c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x) = \sqrt{x}(Ae^x + Be^{-x})$, todo x.

(j) $y = c_1U(x) + c_2V(x)$, donde

$$U(x) = 1 - \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \cdots.$$

$$V(x) = U\int \frac{dx}{xU^2}, \text{ todo } x \neq 0.$$

(k) $y = c_1U(x) + c_2V(x)$, donde

$$U(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} +$$

$$V(x) = U\int \frac{dx}{xU^2}, \text{ todo } x \neq 0.$$

(l) $y = c_1U(x) + c_2V(x)$, donde

$$U(x) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{(2)(6)} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)(6\quad 8)} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)(6\cdot 8\cdot 10)} + \cdots\right),$$

$$V(x) = U\int \frac{dx}{xU^2}, \text{ todo } x \neq 0.$$

3. $$U = \begin{cases} r^{-1}(A \operatorname{sen}\beta r + B\cos\beta r) & \text{si } \alpha = \beta^2 > 0 \\ r^{-1}(A \operatorname{senh}\ \beta r + B\cosh\ \beta r) & \text{si } \alpha = -\beta^2 < 0 \\ A + Br^{-1} & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

EJERCICIOS B, pág. 335

2. $$y = c_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right) + c_2\left(x + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots\right).$$
$$+ \tfrac{4}{3}x^{5/2}\left(1 + \frac{2x^2}{9} + \frac{4x^4}{9\cdot 13} + \frac{8x^6}{9\cdot 13\quad 17} + \cdots\right).$$

3. $$y = c_1\left(x^{-1} - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + c_2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) + 2$$
$$= \frac{c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x}{x} + 2.$$

4. (a) $y = c_1x^{-1} + c_2(1 + x + x2 + x^3 + \cdots) = c_1x^{-1} + c_2(1 - x)^{-1}$.
(b) $y = c_1x^{-1} + c_2(1 - x)^{-1} + \tfrac{2}{3}x^5 - \tfrac{4}{3}x^4 + (1 - x)^{-1}(x^4 - \tfrac{8}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^6)$.

EJERCICIOS C, pág. 335

2. (a) $$y = AU(x) + B\left\{U(x)\ln x + 2x\left[1 - \frac{x}{1^2\cdot 2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\right]\right\},$$

donde $$U(x) = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2\cdot 2^2} - \frac{x^3}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \cdots.$$

(b) $y = Axe^{-x} + B\left\{1 - xe^{-x}\ln x - x^2\left[1 - \frac{x}{2!}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right.\right.$
$$\left.\left. + \frac{x^2}{3!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\right]\right\}.$$

(c) $y = AV(x) + B\left\{V(x)\ln x + x^{-2}\left[+ \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^24^2} - \frac{11x^6}{2^24^26^2} + \right]\right\},$

donde $V(x) = -\frac{1}{16}\left(x^2 - \frac{x^4}{(2)(6)} + \frac{x^6}{(2\cdot 4)(6\cdot 8)}\right.$
$$\left. - \frac{x^8}{(2\cdot 4\cdot 6)(6\cdot 8\cdot 10)} + \cdots\right).$$

3. (b) $y = A\left(1 - \frac{x^{-2}}{2!} + \frac{x^{-4}}{4!} + \cdots\right) + B\left(x^{-1} - \frac{x^{-3}}{3!} + \frac{x^{-5}}{5!} + \cdots\right)$
$= A\cos(1/x) + B\,\mathrm{sen}\,(1/x).$

4. (a) $y = A\left(1 + x^{-1} + \frac{x^{-2}}{2!} + \frac{x^{-3}}{3!} + \cdots\right) + B\left(x^{-1} + x^{-2} + \frac{x^{-3}}{2!} + \frac{x^{-4}}{3!} + \cdots\right)$
$= (A + Bx^{-1})e^{1/x}.$

(b) $y = A\left(x^{-1} - \frac{x^{-2}}{3!} + \frac{x^{-3}}{5!} - \cdots\right) + B\left(x^{-1/2} - \frac{x^{-3/2}}{2!} + \frac{x^{-5/2}}{4!} - \cdots\right)$
$= x^{-1/2}[A\,\mathrm{sen}(x^{-1/2}) + B\cos(x^{-1/2})].$

EJERCICIOS A, pág. 346

5. (a) $y = c_1J_3(x) + c_2Y_3(x).$ (b) $y = c_1J_{2/3}(x) + c_2J_{-2/3}(x).$
8. (a) $y = c_1J_2(\sqrt{3}x) + c_2Y_2(\sqrt{3}x).$
(b) $y = c_1J_{1/2}(\sqrt{2}x/2) + c_2J_{-1/2}(\sqrt{2}x/2)$
$$= \frac{A\cos(\sqrt{2}x/2) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x/2)}{\sqrt{x}}$$

EJERCICIOS B, pág. 346

1. $5J_1(2x)/J_1(4).$
5. (a) $xJ_1(x) + c.$ (b) $x^3J_3(x) + c.$ (c) $-x^{-4}J_4(x) + c.$
(d) $-x^{1/2}J_{-1/2}(x) + c$ o $-\sqrt{2/\pi}\cos x + c.$
6. $(x^3 - 4x)J_1(x) + 2x^2J_0(x) + c.$
7. (a) $-J_1(x) - \frac{2J_1(x)}{x} + c.$ (b) $-\frac{1}{3}J_1(x) - \frac{1}{3}\frac{J_2(x)}{x} + \frac{1}{3}\int J_0(x)dx.$
10. $(x^5 - 16x^3 + 64x)J_1(x) + (4x^4 - 32x^2)J_0(x) + c.$

EJERCICIOS A, pág. 351

2. $y = 40 - 120x^2.$
4. (a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ y = c_1 + c_2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$

(b) $1 - \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $y = c_1x + c_2\left(1 - \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$

EJERCICIOS B, pág. 352

1. $y = 4x + 3 - \frac{3x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

EJERCICIOS C, pág. 352

5. (a) $y = c_1H_n(x) + c_2H_n(x)\int \frac{e^{x^2}}{H_n^2(x)}\,dx$.

(b) $y = c_1L_n(x) + c_2L_n(x)\int \frac{e^x}{xL_n^2(x)}\,dx$.

6. $y = c_1(1-x)^{-1} + c_2(1-x)^{-1}\ln x$.

Capítulo ocho

EJERCICIOS A, pág. 359

1. (a) Finito. (b) Infinito no contable. (c) Finito.
   (d) Infinito no contable. (e) Infinito contable.
2. (a) 3, −6. (b) 3, 0. −3. (c) 4, −1.
3. (a) 0. (b) 1/6. (c) 12/5.
4. (a) $\sqrt{30}$. (b) $\sqrt{3.3}$. (c) $2\sqrt{2}$. (d) $\sqrt{34}$.
5. (a) $c = 4$. (b) $c = 14/51$. (c) $c = 0$ 0 $-14/9$.
6. (a) $\vec{u} = \left(-\frac{4}{\sqrt{54}}, \frac{3}{\sqrt{54}}, \frac{5}{\sqrt{54}}, \frac{-2}{\sqrt{54}}\right)$ (b) $\phi(x) = \sqrt{\frac{3}{14}}(2x-3), 0 \leqq x \leqq 2$.

   (c) $\phi(x) = \sqrt{10}e^{-5x}, x \geqq 0$. (d) $\phi(x) = \begin{cases} x/5 & 0 \leqq x < 3 \\ 4/5 & 3 \leqq x \leqq 4. \end{cases}$
7. (a) $c_1 = -6$, $c_2 = 6$, $c_3 = -6$.
   (b) $\phi_1(x) = 2 \quad 3x$, $\phi_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$, $\phi_3(x) = \sqrt{3}(x - 1)$.

EJERCICIOS B, pág. 360

3. (b) $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} x$, $\phi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} 2x$, $\phi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} 3x$.

4. $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

EJERCICIOS A, pág. 379

3. (a) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$. (b) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - x\cos x)$.

5. (a) $\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 + \lambda x)y = 0$. (b) $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + (e^{-2x} + \lambda e^{-x})y = 0$

(c) $y'' + (3 + \lambda \cos x)y = 0$. (d) $\frac{d}{dx}\left(\cos x \frac{dy}{dx}\right) + (\cos x + \lambda \operatorname{sen} x)y = 0$.

6. (a) $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}$; $y_n = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}$; $\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}$ donde $n = 1, 2, \ldots$

(b) $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$; $y_n = A_n \cos \frac{(2n-1)}{2} x$; $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{(2n-1)}{2} x$ donde $n = 1, 2, \ldots$

(c) $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$; $y_n = A_n \cos \frac{n\pi x}{3}$; $\phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2}$ donde $n = 1, 2,$

EJERCICIOS **B,** pág. 379

1. (b) $\lambda_n = n^2\pi^2$; $A_n \cos n\pi x + B_n \operatorname{sen} n\pi x$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

(d) $\phi_n(x) = (A_n \cos n\pi x + B_n \operatorname{sen} n\pi x) \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$.

2. (b) $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2$; $A_n \cos (2n-1)\pi x$ donde $n = 1, 2,$

3. (b) $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$; $A_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} + B_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}$, $n = 1, 2.$

5 (a) $\frac{\sqrt{2x}J_0(r_k x)}{J_1(r_k)}$ donde r_k, $k = 1, 2, \ldots$ son las raíces de $J_0(x) = 0$.

(b) $\frac{\sqrt{2x}J_0(r_k x)}{J_0(r_k)}$ donde, $k = 1, 2,$ son las raíces de $J_0'(x) = 0$ [o $J_1(x) = 0$]

(c) $\frac{\sqrt{2x}r_k J_0(r_k x)}{\sqrt{\frac{1}{4} + r_k^2}J_0(r_k)}$ donde r_k, $k = 1, 2,$ son las raíces de $\frac{1}{2}J_0(x) + xJ_0'(x) = 0$

6. (a) $\frac{\sqrt{2x}r_k J_2(r_k x)}{\sqrt{r_k^2 - 4}J_2(r_k)}$ donde r_k, $k = 1, 2,$ son las raíces de $J_2'(x) = 0$.

(b) $\frac{\sqrt{2x}r_k J_5(r_k x)}{\sqrt{r_k^2 - 221/9}}$ donde r_k, $k = 1, 2, \ldots$ son las raíces de $\frac{2}{3}J_5(x) + xJ_5(x) = 0$.

7. (a) $k^2\pi^2$, $\sqrt{2}\frac{\operatorname{sen} k\pi x}{\sqrt{x}}$ ortogonal en $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso x, $k = 1, 2,$

(b) r_k^2, $k = 1, 2, 3$, donde r_k son las raíces de $\tan x = 2x$, $\frac{\sqrt{2r_k} \operatorname{sen} r_k x}{\sqrt{r_k^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} r_k)}\sqrt{x}}$ ortogonal en $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso x.

(c) $\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}$, $\sqrt{\frac{2}{x}} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2}$ ortogonal en $0 \leqq x \leqq 1$ con respecto a la función peso x.

EJERCICIOS **C, pág. 380**

2. $k^2\pi^2$, $\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(k\pi \ln x)}{x^2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ortogonal con respecto a la función peso x^3.

1. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} nx$

$f(x)$ es impar, puntos de discontinuidad son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, en los cuales la serie converge a 0.

(b) $f(x) = 1$. $f(x)$ es par y no hay puntos de discontinuidad.

(c) $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$

$f(x)$ es impar, puntos de discontinuidad son $x = 0, \pm 3, \pm 6$,. en los cuales la serie converge a 1.

(d) $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}\right)\cos n\pi x - \frac{\cos n\pi}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x\right\}$

$f(x)$ no es ni par ni impar, puntos de discontinuidad son $x = \pm 1, \pm 3$,. en los cuales la serie converge a $\frac{1}{2}$.

(e) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right)\cos nx$

$f(x)$ es par y no hay puntos de discontinuidad.

(f) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{4}$

f(z) es impar, puntos de discontinuidad son $x = 0, \pm 4, \pm 8$,. en los cuales la serie converge a 0.

(g) $f(x) = \frac{8}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$f(x)$ es par y no hay puntos de discontinuidad.

(h) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\operatorname{sen} nx.$

$f(x)$ es impar. Puntos de discontinuidad son $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ en los cuales la serie converge a 0; $x = 2\pi/3 \pm 2m\pi (m = 0, 1, 2, .)$ donde la serie converge a $\frac{1}{2}$ y $x = -4\pi/3 \pm 2m\pi (m = 0, 1, 2,.)$ donde la serie converge a $-\frac{1}{2}$.

2. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{Sen}\frac{n\pi x}{3}$

La serie converge a $f(x)$ excepto en $x = 0, \pm 3, \pm 6$,. donde converge a 0.

(b) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cos nx$

La serie converge a $f(x)$ excepto en $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2$,. donde converge a $\frac{1}{2}$.

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{20}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}$

La serie converge a $f(x)$ excepto en $x = 5 \pm 20m$ $(m = 0, 1, 2,.)$ donde converge a $5/2$ y $x = -5 \pm 20m$ $(m = 0, 1, 2,.)$ donde converge a $-5/2$.

(d) $f(x) = 2$.

(e) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{4}$

La serie converge a f(x) para todo x.

(f) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi x}{4}$

La serie converge a f(r) excepto en $x = \pm 2, \pm 6, \pm 10$,. donde converge a 0.

3. (a) $8\pi = \frac{64}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$. (b) $\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)$.

(c) $\frac{512}{15} = \frac{256}{9} + \frac{512}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$.

EJERCICIOS B, **pág.** 401

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left[(2 - n^2\pi^2)\cos n\pi - 2\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$.

EJERCICIOS **A, pág. 406**

3. $x^2 = 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(r_k x)}{r_k^2 J_3(r_k)}$.

5. $1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k J_1(r_k)}{(1 + r_k^2)J_0^2(r_k)} J_0(r_k x)$.

7. (a) $\frac{1}{64} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^2 J_1^2(r_k) + (r_k^2 - 1)J_1^2(r_k)}{2r_k^6 J_2^2(r_k)}$.

(b) $\frac{1}{6} = 32\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2'^2(r_k)}{r_k^4 J_3^2(r_k)}$.

EJERCICIOS **A, pág. 412**

1. (a) $\frac{4}{3}P_0(x) + \frac{8}{3}P_2(x)$. (b) $\frac{17}{3}P_0(x) + \frac{1}{5}P_1(x) + \frac{10}{3}P_2(x) + \frac{4}{3}P_3(x)$.

(c) $2P_0(x) + 3P_1(x) - \frac{7}{4}P_3(x) + \frac{11}{8}P_5(x) - \frac{75}{64}P_7(x) + \cdots$.

(d) $\frac{5}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) \quad \frac{75}{256}P_7(x) + \cdots$

2. $\frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$.

4. (a) $\int_{-1}^{1} (4x^2)^2\,dx = \frac{16}{9}\int_{-1}^{1} [P_0(x)]^2\,dx + \frac{64}{9}\int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2\,dx$ o $\frac{32}{5} = \frac{16}{9}\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{64}{9}\left(\frac{2}{5}\right)$.

(b)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (2x^3 + 5x^2 - x + 4)^2\,dx &= \frac{289}{9}\int_{-1}^{1} [P_0(x)]^2\,dx + \frac{1}{25}\int_{-1}^{1} [P_1(x)]^2\,dx \\ &\quad + \frac{100}{9}\int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2\,dx + \frac{16}{9}\int_{-1}^{1} [P_3(x)]^2\,dx. \\ &= \frac{289}{9}\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{1}{25}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{100}{9}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{16}{9}\left(\frac{2}{7}\right).\end{aligned}$$

5. $\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2^{2k+1}[(k+1)!]^2}$.

EJERCICIOS B, **pág.** *413*

1. (a) $\frac{3}{2}H_0(x) + \frac{1}{4}H_2(x)$. (b) $\frac{3}{4}H_1(x) + \frac{1}{8}H_3(x)$.

2. (a) $4L_0(x) - 10L_1(x) + 3L_2(x)$. (b) $15L_0(x) \quad 40L_1(x) + 19L_2(x) \quad 2L_3(x)$.

3. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(x^2 + 1)^2\,dx = \frac{9}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_0(x)]^2\,dx + \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_2(x)]^2\,dx$.

(b) $\int_0^x e^{-x}(3x^2 - 2x)^2\,dx = 16\int_0^x e^{-x}[L_0(x)]^2\,dx + 100\int_0^x e^{-x}[L_1(x)]^2\,dx$

$$+ 9\int_0^x e^{-x}[L_2(x)]^2\,dx$$

EJERCICIOS A, pág. 418

1. (a) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + 2x$. (b) $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} + c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x}\int \frac{e^{2x}}{x}\,dx$.

   (c) $y = \frac{5}{2}x\csc^2 x - \frac{5}{2}\cot x + c_1\csc^2 x + c_2\csc x\cot x$.

2. (a) $y = 2x - 2 + c_1e^{-x} + c_2e^{-x}\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$

   (b) $y = (\operatorname{sen} x)\ln(\csc x - \cot x) + c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x$.

3. (b) $y = \dfrac{c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x}{x}$

EJERCICIOS B, pág. 418

2. (a) $\dfrac{d^2\mu}{dx^2} + x^2\dfrac{d\mu}{dx} + 3x\mu = 0$. (b) $\mu = c_1xe^{-x^3/3} + c_2xe^{-x^3/3}\int \frac{e^{x^3/3}}{x^2}\,dx$.

4. $y = c_1xe^{x\cos x - \operatorname{sen} x} + c_2xe^{x\cos x - \operatorname{sen} x}\int \frac{e^{\operatorname{sen} x - x\cos x}}{x}\,dx$.

5. $y = c_1xe^{-(8/3)x^{-3}} + c_2xe^{-(8/3)x^{-3}}\int \frac{e^{(8/3)x^{-3}}\,dx}{x^4}$.

6. Los polinomios de Laguerre.

7. Los polinomios de Hermite.

EJERCICIOS C, pág. 419

3. $y = c_1e^{-x^2/2}\int e^{x^2/2}\,dx + c_2e^{-x^2/2}\int \frac{e^{x^2/2}}{x}\,dx + c_3e^{-x^2/2} + 4e^{-x^2/2}\int x^2e^{x^2/2}\,dx$.

Capítulo nueve

EJERCICIOS A, pág 432

1. 1,95 exacto.
2. 0,81 exacto.
3. 4,6 exacto.
4. 2,00 exacto.
5. 0,80 exacto.
6. 1,33 exacto.
7. 1,96 exacto.

EJERCICIOS B, pág. 432

1. $y(1) = e = 2{,}7183$ aprox.
2. 1,439 exacto.
3. 0,819 exacto.
4. 0,197 exacto.
5. 0,670 exacto.
7. 1,55.

EJERCICIOS C, pág. 433

2. $y(0{,}8) = 1{,}31$, $y'(0{,}8) = 0{,}95$.

EJERCICIOS A. pág. 434

1. 1,946. 2. 0,811. 3. 4,6. 4. 2.80.

Capítulo diez

EJERCICIOS A, pág. 451

1. (a) $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t.$

(b) $u = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2},\ v = c_1e^{2x} - c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}.$

(c) $x = c_1e^{\sqrt{2}t} + c_2e^{-\sqrt{2}t},\ y = c_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - c_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}.$

(d) $x = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t,\ y = c_3e^t + c_4e^{-t}.$

(e) $x = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3e^t + c_4e^{-t} + 2,$
$y = -c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t + c_3e^t + c_4e^{-t} - 2.$

(f) $x = 4e^{2t} - 2e^{-3t},\ y = e^{2t} + 2e^{-3t}.$

(g) $x = c_1e^{3t} + 2c_2e^{-2t} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9},\ y = -2c_1e^{3t} + c_2e^{2t} - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}.$

(h) $x = \frac{3}{5}c_1 e^{-t/8} + \frac{2}{5} \operatorname{sen} t - \frac{1}{5} \cos t,$
$y = c_1e^{-t/8} + \operatorname{sen} t + \cos t.$

3. $x = 12 \cos 2t + 2e^{-2t} - 8e^{-t} + 4t,\ y = -12 \operatorname{sen} 2t + 6e^{-2t} \quad 36e^{-t} + 6$

4. (a) Lineal. (b) No lineal. (c) Lineal. (d) No lineal.

6. $x = 1 + t \quad 2t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + e^{-t} - \operatorname{sen} t,$
$y = -6 - 3t - 4t^2 - \frac{1}{6}t^4 + e^t + e^{-t} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} \cos t.$

EJERCICIOS B, pág. 452

1. $x = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\sqrt{2}t} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t},\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}),\ z = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t} - 2.$

2. (a) $x^2 \quad y^2 = c_1,\ y^2 - z^2 = c_2.$ (b) $x = c_1\sqrt{y^2 + 1},\ \tan^{-1} y = \ln z + c_2$

3. $y = \dfrac{1}{4}(\ln x)^2 + \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{x}{2} + c_1,\ z = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$

4 $x = c_1e^t + c_2e^{\omega t} + c_3e^{\omega^2 t}$
$y = c_1e^t + \omega c_2e^{\omega t} + \omega^2 c_3e^{\omega^2 t}$
$z = c_1e^t + \omega^2 c_2e^{\omega t} + \omega c_3e^{\omega^2 t}$
donde 1, ω y ω^2 son las tres raíces cúbicas de la unidad.

EJERCICIOS C, pág. 452

1. $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ donde $n = 0, 1, 2, 3,$

2. $c_1(z - y) = c_2(x - z) = \sqrt{c_3/(x + y + z)}.$

EJERCICIOS A, pág. 455

1. (b) $x = 80t$, $y = 80\sqrt{3}t - 16t^2$.

   (c) Rango $=$ 400 $\sqrt{3} =$ 693 pies, máx. altura = 300 pies, tiempo de vuelo = 8,66 seg.

   (d) Posición después de 2 seg (160, 213), posición después de 4 seg (320, 298), velocidad después de 2 seg es 109 pies/seg, velocidad después de 4 seg es 80,7 pies/seg.

2. Máx. rango $=$ 165 millas, altura = $41\frac{1}{4}$ millas, tiempo de vuelo = 3 min 53 seg.

3. (a) 4 seg. (b) 200 pies.

EJERCICIOS B, pág. 455

1. 283 pies/seg, 15,8 seg.

EJERCICIOS A, pág 467

6. (a) $2a/(1 - \epsilon)$. (b) En el punto (r, ϕ) donde $r = 2a\epsilon/(1 - \epsilon)$, $\phi = \pi$.

8. (a) 7,7 km/seg. (b) 2.600 km. (c) 6,3 km/seg.

EJERCICIOS B, pág. 466

4. 484 millones de millas.

5. (a) 36,0 millones de millas, 35,2 millones de millas.

   (b) 28,4 millones de millas, 43,6 millones de millas.

6. 236.000 millas.

EJERCICIOS C, pág. 469

7. **La** fuerza es inversamente proporcional a r^5 .

EJERCICIOS A, pág. 474

1. (a) $x_1 = a \cos \omega t$, $x_2 = a \cos \omega t$ (b) $x_1 = a \cos \sqrt{3}\omega t$, $x_2 = -a \cos \sqrt{3}\omega t$.

2. $$x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{v_1 - v_2}{2\sqrt{3}\omega} \operatorname{sen} \sqrt{3}\omega t,$$

   $$x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{v_1 - v_2}{2\sqrt{3}\omega} \operatorname{sen} \sqrt{3}\omega t.$$

EJERCICIOS A, pág. 479

1. $I_1 = 3 - 2e^{-5t} - e^{-20t}$, $I_2 = 4e^{-5t} - e^{-20t} - 3$: $I_1 = 3$, $I_2 = -3$.

2. $I_1 = 2e^{-5t} + e^{-20t} + 3 \operatorname{sen} 10t - 3 \cos 10t$, $I_2 = 3 \cos 10t - 4e^{-5t} + e^{-20t}$;
   $I_1 = 3 \operatorname{sen} 10t \quad 3 \cos 10t$, $I_2 = 3 \cos 10t$.

3. Carga en el condensador = $2 - e^{-t}$, corriente a través del condensador = e^{-t}, corriente a través del inductor = $20 - 20e^{-4t}$, corriente a través de la batería = $20 - 20e^{-4t} - se^{-t}$.

4. Carga en el condensador = $\operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t + 3e^{-t}$, corriente a través del condensador $= 2 \cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t - 3e^{-t}$, corriente a través del inductor $= 40 \operatorname{sen} 2t - 20 \cos 2t + 20e^{-4t}$, corriente a través de la batería = $44 \operatorname{sen} 2t - 18 \cos 2t + 20e^{-4t} - 3e^{-t}$.

5. $I_1 = 500te^{-50t}$, $I_2 = 5e^{-50t} + 250te^{-50t} - 5\cos 50t$.
$I_3 = 5\cos 50t \quad 5e^{-50t} + 250te^{-50t}$,
$Q_3 = 0.1 \operatorname{sen} 50t - 5te^{-50t}$.

EJERCICIOS A, pág. 487

3 (a) $x_1 = \frac{10}{17} + \frac{24}{17}e^{-0,85t}$, $x_2 = \frac{24}{17}(1 \quad e^{-0,85t})$ miligramos,
(b) $\frac{10}{17}$ miligramos4 miligramos.

EJERCICIOS A, pág. 497

1. (a) 500 depredadores, 4.000 presas (b) 100π o 314 días.
(c) $\dfrac{(x - 4.000)'}{16c^2} + \dfrac{(y \quad 500)^2}{c^2} = 1.$

EJERCICIOS A, pág. 500

1. (a) $X = 2\cos t - \operatorname{sen} t$, $Y = -2\operatorname{sen} t - \cos t$.
(b) $X = e^{-3t}(2\operatorname{sen} 4t - \cos 4t)$, $Y = 2e^{-3t}\cos 4t$.
(c) $X = -3te^{-t}$, $Y = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t}$.
(d) $X = 3e^{t} - 9t^2 + 6t + 2$, $Y = -e^{t} - 6t$.
2. (a) $X = 10(1 - e^{-t})$, $Y = 5e^{-t}$.
(b) $X = 2\operatorname{sen} t - 3\cos t + e^{-t} + 2$, $Y = -2\operatorname{sen} t + 3\cos t + e^{-t} - 2$.
3. $X = 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, $Y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$.

EJERCICIOS S, pág. 500

2. $x = -2$, $Y = -1$, $Z = 3$.
5. $x = \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t + e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-t}$, $y = \frac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-t}$.

EJERCICIOS A, pág. 508

1. (a) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{2t} + 5c_2e^{-4t} \\ y = -c_1e^{2t} + c_2e^{-4t} \end{array}\right\}; \left.\begin{array}{l} x = 5e^{-4t} - 3e^{2t} \\ y = 3e^{2t} + e^{-4t} \end{array}\right\}$
(b) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \\ y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} - c_2e^{-2t} \end{array}\right\}$
(c) $\left.\begin{array}{l} x = (2.4 \quad B)\cos t + (A + 2B)\operatorname{sen} t \\ y = A\cos t + B\operatorname{sen} t \end{array}\right\}.$
(d) $\left.\begin{array}{l} x = -8c_1e^{7t/2} + c_2e^{-2t} \\ y = 3c_1e^{7t\ 2} + c_2e^{-2t} \end{array}\right\}$
(e) $\left.\begin{array}{l} x = (1 - \sqrt{7})c_1e^{(\sqrt{7}-2)t} + (1 + \sqrt{7})c_2e^{-(\sqrt{7}+2)t} \\ y = 3c_1e^{(\sqrt{7}-2)t} + 3c_2e^{-(\sqrt{7}+2)t} \end{array}\right\}.$
(f) $\left.\begin{array}{l} x = c_1 + 2c_2t \\ y = -c_1 + c_2 - 2c_2t \end{array}\right\}; \left.\begin{array}{l} x = 10t - 1 \\ y = 2t + 6 \end{array}\right\}$
(g) $\left.\begin{array}{l} x = e^{-t}[(2A - B)\cos t + (A + 2B)\operatorname{sen} t] \\ y = e^{-t}(A\cos t + B\operatorname{sen} t) \end{array}\right\}.$

(h) $\left.\begin{array}{l} x = e^{2t}[(A - 2B)\cos 2t + (2A + B)\,\text{sen}\,2t] \\ y = 5e^{2t}(A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t) \end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l} x = e^{2t}(2\cos 2t - \text{sen}\,2t) \\ y = -5e^{2t}\,\text{sen}\,2t \end{array}\right\}$

(i) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} \\ y = (c_1 - \frac{1}{2}c_2)e^{-3t} + c_2te^{-3t} \end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l} x = 20te^{-3t} \\ y = 20te^{-3t} \quad 10e^{-3t} \end{array}\right\}$

(j) $\left.\begin{array}{l} x = (14B - 27A)\cos 4t - (14A + 27B)\,\text{sen}\,4t \\ y = 25A\cos 4t + 25B\,\text{sen}\,4t \end{array}\right\}.$

2. (a) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{3t} + 2c_2e^{-2t} \cdot t \quad e^{-t} \\ y = -2c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} + 4 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{l} x = 2c_1e^{-t} - c_2e^{2t} + 2e^{2t} \\ y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l} x = 4e^{-t} + 3e^{2t} \\ y = 2e^{-t} \quad e^{2t} \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + 4t \\ y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \quad c_2e^{-2t} + t - 3 \end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = t - 3 \end{array}\right\}.$

(d) $\left.\begin{array}{l} x = A\cos t + B\,\text{sen}\,t - e^{-3t} \\ y = (2A - B)\cos t + (A + 2B)\,\text{sen}\,t \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{l} x = e^{-t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t) + 8\,\text{sen}\,t + 14\cos t - 3 \\ y = e^{-t}[(B - A)\cos t - (A + B)\,\text{sen}\,t] - 14\,\text{sen}\,t - 12\cos t + 6 \end{array}\right\}$

(f) $\left.\begin{array}{l} x = c_1e^{t} + c_2e^{-t} \quad 8te^{-t} \quad Xt \\ y = c_1e^{t} + 3c_2e^{-t} - 24te^{-t} + 24e^{-t} - 16t + 8 \end{array}\right\}$

(g) $\left.\begin{array}{l} x = c_1 + 2c_2e^{-t} \quad 2t^2e^{-t} \\ y = c_1 + 3c_2e^{-t} + 3te^{-t} - 3t^2e^{-t} \end{array}\right\}$

(h) $\left.\begin{array}{l} x = e^{-t}[(2A - B)\cos t + (A + 2B)\,\text{sen}\,t] + 35\,\text{sen}\,2t - 10\cos 2t \\ y = e^{-t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t) - 9\,\text{sen}\,2t - 8\cos 2t \end{array}\right\}.$

o

EJERCICIOS **C, pág. 509**

1. $x = c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + c_3e^{3t} + 2e^{-t}$,
$y = 2c_2e^{2t} + 2c_3e^{3t} - 4e^{-t}$,
$z = 2c_1e^{t} + c_2e^{2t} - 2c_3e^{3t} + 16e^{-t}$

Capítulo once

EJERCICIOS **A, pág.** 518

1. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} -22 & -8 & 7 \\ 19 & -7 & 2 \\ 20 & -19 & 2 \end{pmatrix}$. (c) 2.

(d) 10. (e) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \\ -1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $a = 2$, $b = -1$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. (a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 4t^4 - 2t & 4t^2e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-t} \\ 12t^3 - 8t^2 - 6 & 16t^2e^t + 4te^t - 8e^t \end{pmatrix}$.

8. (a) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$.

(b) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

9. (a) -10. (b) 41

10. (a) Tiene solamente solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

(b) Tiene soluciones no triviales, esto es,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/11 \\ 7/11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}$, etc.

EJERCICIOS B, pág. 619

5. $X = x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ donde x_1, x_2 pueden tomar cualquier valor.

EJERCICIOS C, pág. 520

4. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$. (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/37 & 11/37 & 3/37 \\ 8/37 & 14/37 & -13/37 \\ 10/37 & -1/37 & -7/37 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS A, pág. 537

1. (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-6t}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{-6t}$

or $x = c_1e^{-t} + 4c_2e^{-6t}$, $y = c_1e^{-t} - c_2e^{-6t}$; $x = e^{-6t} - e^{-t}$, $y = -e^{-t} - 4e^{-6t}$.

(b) $x = 5e^{-3t}(A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t)$, $y = 2e^{-3t}[(2B - A)\cos 4t - (2A + B)\operatorname{sen} 4t]$

(c) $x = 3c_1 + c_2e^{-t}$, $y = 2c_1 + c_2e^{-t}$.

(d) $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{6}e^{-3t}(c_1e^{\sqrt{6}t} - c_2e^{-\sqrt{6}t}) \\ y &= e^{-3t}(c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}) \end{aligned}\right\}$; $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{6}e^{-3t}(e^{\sqrt{6}t} - e^{-\sqrt{6}t}) \\ y &= e^{-3t}(e^{\sqrt{6}t} + e^{-\sqrt{6}t}) \end{aligned}\right\}$.

(e) $x = 8(c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t})$, $y = (c_2 - 4c_1)e^{-3t} - 4c_2te^{-3t}$.

$$\text{(f)}\quad \left.\begin{aligned} x &= 14e^{-t/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\ y &= e^{-t/2}\left[(A\sqrt{3} - 23B)\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t - (23A + B\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\end{aligned}\right\}.$$

2. (a) $\left.\begin{aligned} x &= A\cos t + B\,\text{sen}\,t + t^2 - 1\\ y &= -A\,\text{sen}\,t + B\cos t + t\end{aligned}\right\};\ \begin{aligned} x &= 3\cos t - \text{sen}\,t + t^2 - 1\\ y &= -3\ \text{sen}\,t - \cos t + t\end{aligned}$

(b) $\left.\begin{aligned} x &= -2c_1e^{-t} - 2c_2te^{-t} + c_2e^{-t}\\ y &= c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + 2e^{t}\end{aligned}\right\}.$

(c) $\left.\begin{aligned} x &= c_1e^{t} + c_2e^{-t} - \tfrac{1}{2}te^{-t} + t\\ y &= c_1e^{t} + 3c_2e^{-t} \text{[illegible]} \tfrac{3}{2}te^{-t} + \tfrac{3}{2}e^{-t} \text{[illegible]} 2t - 1\end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} x &= c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} + \text{[illegible]}6\,\text{sen}\,t - 12\cos \text{[illegible]} - 6t - 1\\ y &= -c_1e^{-3t} + 4\text{[illegible]}_2e^{2t}\quad 8\cos \text{[illegible]} - 56\,\text{sen}\,t - 12t - 8\end{aligned}\right\};$

$\left.\begin{aligned} x &= 5e^{-3t} + 16\,\text{sen} \text{[illegible]} - 12\cos t - 6t - 1\\ y &= -5e^{-3t} - 8\cos t - 56\,\text{sen} \text{[illegible]} - 12t - 8\end{aligned}\right\}$

(e) $\left.\begin{aligned} x &= 2A\cos 3t + 2B\,\text{sen}\,3t + 3te^{-3t} + e^{-3t} - 3t + 2\\ y &= (B - A)\cos 3t - (A + B)\,\text{sen}\,3t - 3te^{-3t} - \tfrac{1}{2}e^{-3t} + 3t - 3\end{aligned}\right\}$

(f) $x = 3c_1 + c_2e^{-t} - t^2e^{-t}$, $y = 2c_1 + c_2e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t}$.

EJERCICIOS B, pág. 538

1. $\left.\begin{aligned} x &= 5c_1e^{4t} + 2c_2e^{-3t} - 3e^{-t} + 4e^{t}\\ y &= -22c_1e^{4t} + c_2e^{-3t} + c_3e^{-t}\quad 8e^{t} + 21te^{-t}\\ z &= -4c_1e^{4t} + 4c_2e^{-3t} + 2c_3e^{-t} - 9e^{-t} - 8e^{t} + 42te^{-t}\end{aligned}\right\}.$

EJERCICIOS A. pág. 545

1. (a) -20. (b) -2.
2. (a) 7. (b) $3\sqrt{2}$.
3. (a) Vector columna con componentes 0, $-2/7$, $3/7$, $6/7$.
   (b) Vector columna con componentes $\sqrt{2}/6$, $2\sqrt{2}/3$, $-\sqrt{3}/2$, $-2\sqrt{2}/3$, 0.
4. (a) -2.
   (b) Vectores columnas con componentes $\dfrac{3}{\sqrt{11}}, \dfrac{-1}{\sqrt{11}}, 0, \dfrac{-1}{\sqrt{11}}$ y $\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}$ respectivamente.
5. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10}\\ 3/\sqrt{10}\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10}\\ 0\end{pmatrix}$.

EJERCICIOS B, pág. 546

3. $x_1\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ donde x_1 y x_2 pueden tomar cualquier valor.
5. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11/\sqrt{174}\\ -7/\sqrt{174}\\ 2/\sqrt{174}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29}\\ -4/\sqrt{29}\\ -3/\sqrt{29}\end{pmatrix}$.
7. (a) Linealmente dependiente. (b) Linealmente independiente.
   (c) Linealmente dependiente

EJERCICIOS **C, pág.** 547

1. (a) $u = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-8t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$

(b) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-8t}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$

Capitulo doce

EJERCICIOS **A, pág.** 557

1. (a) $U = x \operatorname{sen} y.$ (b) $U = x^2(1 \quad \cos y) - 2x^2y/\pi.$

(c) $V = \frac{1}{3}x^3 + 3 \operatorname{sen} y.$ (d) $U = x^2y^2 + ye^x + \frac{1}{2}y^2 - y + 2.$

(e) $Z = \frac{1}{3}e^{3x}(y^3 \quad 2y^2) - \frac{1}{3}y^2 + x + 3e^{-x}.$

2. (a) $x \frac{\partial U}{\partial x} - 2U + 3xy = 0.$ (b) $\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$

(c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0.$ (d) $2xy(\ln y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2x \frac{\partial U}{\partial x} - y(\ln y) \frac{\partial U}{\partial y} + U = 0.$

(e) $2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$ (f) $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}.$

(g) $y \frac{\partial x}{\partial y} + z \frac{\partial x}{\partial z} = 0.$ (h) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

(j) $2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 3z.$ (j) $3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

EJERCICIOS **B, pág. 558**

2. $2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

5. $n = 3.$

7. $U = 20x^2 \cos(y/x).$

EJERCICIOS **C, pág. 559**

1. (b) $z = (2x \quad 1) \cos \frac{y}{x} + 2(1 - x)e^{-y/x}.$

3. (a) $6 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = -4.$ (b) $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$

(c) $(\tan x) \frac{\partial z}{\partial x} - (\cot y) \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$

(d) $x \frac{\partial z}{\partial x} + (x \quad y) \frac{\partial z}{\partial y} = y.$

EJERCICIOS A, pág. 566

1. $U = e^{2x+2y}$.
2. $U = 4e^{-3x-2y}$.
3. $U = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y}$.
4. $Y = 4e^{-x+t} - e^{-5x+2t}$.
5. $U = 5e^{-16\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x$.
6. $U = 2e^{-4.5t}\operatorname{sen} 3x \quad 5e^{-8t}\operatorname{sen} 4x$
7. $Y = 10 \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}\cos\dfrac{\pi t}{2}$.
8. $Y = 3\operatorname{sen} 2\pi x\cos 4\pi t - 4\operatorname{sen}\dfrac{5\pi x}{2}\cos 5\pi t$.
9. $Y = 6\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(t/3) - 4{,}5\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen}(2t/3)$.
10. $U = 5e^{(1-4\pi^2)t}\operatorname{sen} 2\pi x - e^{(1-16\pi^2)t}\operatorname{sen} 4\pi x$.

EJERCICIOS B, pág. 566

3. (a) $U = F(y+x) + G(y+2x)$. (b) $U = F(x+iy) + G(x-iy)$.
   (c) $Y = F(x-at) + G(x+at)$. (d) $U = F(y \quad 4x) + G(y)$.
5. (a) $U = F(y+2x) + xG(y+2x)$. (b) $Y = F(2x+3r) + xG(2x+3r)$.
6. $Z = F(y-x) + G(y-3x) + \frac{4}{55}e^{2x+3y}$.
7. $U = F(x \quad y) + xG(x \quad y) \quad \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x-4y) + \frac{1}{12}x^4$.
8. $U = F(x+y) + G(y \quad 2x) - \frac{3}{2}xe^{y \quad 3x} + \frac{1}{15}\cos(x-2y)$.

EJERCICIOS C, pág. 568

1. (b) $F(x-y-z,\ x^2-2xy) = 0$.
2. (d) $U = 8e^{-4\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x$.

EJERCICIOS A, pág. 578

2. $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta\dfrac{\partial Y}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g$.
4. $U_x(0,t) = 0,\ U_x(L,t) = 0,\ U(x,0) = 100;\ U(x,t) = 100$

Capítulo trece

EJERCICIOS A, pág. 595

1. $U(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{160}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)e^{-0{,}20(n\pi/100)^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}$.
2. $U(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{5} - \cos\frac{3n\pi}{5}\right)e^{-0{,}20(n\pi/100)^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}$
3. $U(x,t) = 20 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{160}{n\pi}(1 - \cos n\pi)e^{-0{,}20(n\pi/40)^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$.
5. $U(x,y) = U_0$.

EJERCICIOS B, pág. 596

1. (a) $U(x, t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right\}e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$

(b) $U(x, t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4U_0}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - \cos n\pi\right)\right\}e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$

2. $U(x, t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - U_0]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}dx\right\}e^{-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t/L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}$

3. $U(x, t) = e^{-ct}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx\right\}e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\frac{\text{sen}\,n\pi x}{L}.$

EJERCICIOS A. pág. 604

1. $Y(x, t) = \frac{8\alpha L^2}{\pi^3}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi a t}{L} + \frac{1}{3^3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3n a t}{L} + \frac{1}{5^3}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi a t}{L} + \cdots\right)$

2. $Y(x, t) = \frac{1}{6\pi^2}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}\cos 8\pi t - \frac{1}{3^2}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{2}\cos 24\pi t + \frac{1}{5^2}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{2}\cos 40\pi t - \right)$

3. (a) $Y(x, t) = 0{,}25\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{4}\cos 16\pi t.$

(b) $Y(x, t) = 0{,}1\,\text{sen}\,\pi x\cos 64\pi t \quad 0{,}02\,\text{sen}\,3\pi x\cos 192\,\pi t.$

(c) $Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}32}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{4}\cos 16n\pi t.$

6. $Y(x, t) = \frac{8\alpha L^2 e^{-\beta t/2}}{\pi^3}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\cos\sqrt{\frac{\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}\,t + \frac{1}{3^3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{L}\cos\sqrt{\frac{9\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}\,t\right.$

$\left. + \frac{1}{5^3}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{L}\cos\sqrt{\frac{25\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}\,t + \cdots\right)$

7. $Y(x, t) = \frac{e^{-t}}{6\pi^2}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}\cos 2\sqrt{16\pi^2 - 1}\,t - \frac{1}{3^2}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{2}\cos 2\sqrt{144\pi^2 - 1}\,t\right.$

$\left. + \frac{1}{5^2}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{2}\cos 2\sqrt{400\pi^2 - 1}\,t - \cdots\right)$

EJERCICIOS B, pág. 605

2. $Y(x, t) = \frac{4\alpha L^3}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\pi}{n^4}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi a t}{L}.$

3. (a) $Y(x, t) = \frac{2v_0 L}{\pi^2 a\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\,\frac{n\pi\varepsilon}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi b}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi a t}{L}$

EJERCICIOS A, pág. 613

1. (a) $V(r, \phi) = \frac{V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[\frac{2\,\text{sen}\,(n\pi/2)}{n}\cos n\phi + \frac{1 - 2\cos(n\pi/2) + \cos n\pi}{n}\,\text{sen}\,n\phi\right]$

(b) $V(r, \phi) = \frac{V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\left[\frac{2\,\text{sen}(n\pi/2)}{n}\cos n\phi + \frac{1 - 2\cos(n\pi/2) + \cos n\pi}{n}\,\text{sen}\,n\phi\right]$

EJERCICIOS B, pág. 614

3. $U(r, \phi) = 40\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\phi - 25\left(r - \frac{4}{r}\right)\operatorname{sen}\phi.$

4. (a) $U(r, \phi) = \frac{400}{\pi}\left(r^6 \operatorname{sen} 6\phi + \frac{r^{12}\operatorname{sen} 12\phi}{3} + \frac{r^{18}\operatorname{sen} 18\phi}{5} + \cdots\right)$

5. (a) $U(r, \phi) = \frac{400}{\pi}\left(r^2 \operatorname{sen} 2\phi + \frac{r^4\operatorname{sen} 4\phi}{3} + \frac{r^6\operatorname{sen} 6\phi}{5} + \cdots\right).$

EJERCICIOS C, pág. 615

4. $U(r, \phi) = 15\left(r + \frac{4}{r}\right)\operatorname{sen}\phi.$

EJERCICIOS A, pág. 628

2. $U(x, t) = 30 + x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{60 + 40\cos n\pi}{n\pi}\right)e^{-0{,}15(n\pi/50)^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{50}.$

3. $U(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$

donde $b_n = \frac{2}{n\pi}[U_0 - U_1 + (U_2 - U_0)\cos n\pi].$

4. $U(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$

donde $b_n = \frac{2}{n\pi}[U_0 - U_1 + U_2\cos n\pi].$

5. $Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left(a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} + b_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right)$

donde $a_n = \frac{2v_0 L}{n^2\pi^2 a}(1 \quad \cos n\pi)$, $b_n = \frac{4\alpha L^3}{n^3\pi^3}(1 \quad \cos n\pi)$

v_0 = velocidad, α = una constante.

6. $U = \frac{1}{2}x(1 - x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[1 \quad \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3}\right]e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x.$

EJERCICIOS B, pág. 628

2. $Y = Kx + \frac{2KL}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n - 1}\operatorname{sen}\frac{(2n - 1)\pi x}{L}\cos\frac{(2n - 1)\pi at}{L}$

3. $Y = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n - 1)\pi\cos n\pi + 2}{(2n - 1)^3}\right]\operatorname{sen}(2n - 1)s\ \cos(2n - 1)t.$

6. $U = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{L} + \frac{\alpha L}{2\kappa}\right)x - \frac{\alpha x^2}{2\kappa}$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{2\kappa n^2\pi^2(U_2 - U_0) + 2\alpha\}\cos n\pi + 2\kappa n^2\pi^2(U_0 - U_1)}{\kappa L n^3\pi^3}\right]e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

7. $U = \frac{\alpha L x}{\kappa} - \frac{\alpha x^2}{2\kappa} - \frac{16\alpha L^2}{\kappa\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2\kappa t/4L^2}}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$

8. $U = \frac{\beta x(L^2 - x^2)}{6\kappa} + \frac{2\beta L^3}{\kappa\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^3}e^{-n^2\pi^2\kappa t/L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$

donde β es la constante de proporcionalidad

EJERCICIOS C, pág. 630

1. $Z = \frac{16}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{m^3n^3}\operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t$

8. $U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$ donde λ_n donde λ_n son las raíces positivas de

$$\cot\lambda L = \lambda/h \text{ y } a_n = \frac{2h}{Lh + \operatorname{sen}^2\lambda_n L}\int_0^L f(x)\cos\lambda_n x\,dx.$$

10. (a) $U(r, t) = \frac{2U_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}\right)e^{-n^2\pi^2\kappa t}\operatorname{sen} n\pi r.$

(b) $U(r, t) = \frac{2U_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi/2}{n^2\pi^2} - \frac{\cos n\pi/2}{2n\pi}\right)e^{-n^2\pi^2\kappa t}\operatorname{sen} n\pi r.$

12. $U = \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 vf(v)\operatorname{sen} n\pi v\,dv\right)\operatorname{sen} n\pi r\cos n\pi t.$

Capítulo catorce

EJERCICIOS A. pág. 642

1. (a) $U(r, t) = 50e^{-\kappa\lambda_1^2 t}J_0(\lambda_1 r)$. (b) $U(r, t) = 20e^{-\kappa\lambda_1^2 t}J_0(\lambda_1 r) \quad 10e^{-\kappa\lambda_2^2 t}J_0(\lambda_2 r)$.

2. $U(r, t) = 100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n[J_1(\lambda_n)]^2}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0.$

3. (a) $U(r, t) = 800\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0.$

(b) $U(r, t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}[J_1(\lambda_n/3) + 2J_1(2\lambda_n/3) + 3J_1(\lambda_n)]}{\lambda_n[J_1(\lambda_n)]^2}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$

4. $U(r, t) = 25 + 150\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n r).$

5. $U(r, t) = 100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t/c^2}J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n[J_1(\lambda_n)]^2}J_0\left(\frac{\lambda_n r}{c}\right).$

6. $U(r, t) = 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0.$

7. $U(r, t) = 100 - 80\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0.$

8. $U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)$ donde $J_1(\lambda_n) = 0$ y $a_n = \frac{2}{[J_0(\lambda_n)]^2}\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)\,dr.$

9. $U(r, t) = 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n[J_0(\lambda_n)]^2} J_0(\lambda_n r)$ donde $J_1(\lambda_n) = 0$

10. (a) $U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$ donde $a_n = \frac{2U_0 J_1(\lambda_n)}{(\lambda_n^2 + h^2)[J_0(\lambda_n)]^2}$

(b) Lo mismo que en (a) excepto que $a_n = \frac{4U_0[2J_1(\lambda_n) - \lambda_n J_0(\lambda_n)]}{\lambda_n(\lambda_n^2 + h^2)[J_0(\lambda_n)]^2}$

11. $U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$ donde $\lambda_n J_0'(\lambda_n) + 2J_0(\lambda_n) = 0$ y $a_n = \frac{100\lambda_n J_1(\lambda_n/2)}{(\lambda_n^2 + 4)[J_0(\lambda_n)]^2}$.

EJERCICIOS B, **pág.** 643

1. $U(r, t) = 100 - 200\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^3 - 16\lambda_n^2 + 64)}{\lambda_n^5 J_1(\lambda_n)} e^{-\kappa\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$ y α es una constante de proporcionalidad.

3. (a) $Z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$ y $a_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr$.

(b) Lo mismo que en (a) donde $a_n = \frac{8\alpha}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$.

6. $U(r, z) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \lambda_n z J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n \operatorname{senh} \lambda_n J_1(\lambda_n)}$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$.

7. $U(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{senh} \lambda_n z J_0(\lambda_n r)$ donde $J_1(\lambda_n) = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{[J_0(\lambda_n)]^2 \operatorname{senh} \lambda_n} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr.$$

EJERCICIOS **C, pág.** 644

2. $U(r, \phi, t) = 2U_0 \operatorname{sen}\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_m^2 t} J_1(\lambda_m r)}{\lambda_m J_2(\lambda_m)}$

donde λ_m es la m-ésima raíz positiva de $J_1(x) = 0$.

3. $U(r, \phi, t) = 200 \cos 2\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_m^2 t} J_2(\lambda_m r)}{\lambda_m J_3(\lambda_m)}$

donde λ_m es la m-ésima raíz positiva de $J_2(x) = 0$.

4. $U(r, t) = \frac{\alpha}{4}(1 - r^2) - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$.

EJERCICIOS **A, pág.** 651

1. (a) V_0. (b) cV_0/r. (c) $q = CV_0$.

2. (a) $\frac{3}{2}V_0 r P_1(x) + V_0 \sum_{n=3,5,\ldots} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdots (n+1)} r^n P_n(x)$

(b) $\frac{3V_0}{2r^2} P_1(x) + V_0 \sum_{n=3,5,\ldots} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdots (n+1)} \frac{P_n(x)}{r^{n+1}}$

4. $U(r, \theta) = 28rP_1(\cos \theta) - 8r^3P_3(\cos \theta)$.

5. (a) $V(r, \theta) = \frac{4}{3}V_0r^2P_2(\cos \theta) - \dfrac{V_0}{3} P_0(\cos \theta)$. (b) $V(r, \theta) = \dfrac{4V_0}{3r^3} P_2(\cos \theta) \quad \dfrac{V_0}{3r} P_0(\cos \theta)$.

6. (a) $V_0\left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{r}{2}P_1(\cos \theta) + \dfrac{5r^2}{16} P_2(\cos \theta) - \dfrac{3r^4}{32} P_4(\cos \theta) + \cdots\right]$

(b) $V_0\left[\dfrac{1}{4r} + \dfrac{P_1(\cos \theta)}{2r^2} + \dfrac{5P_2(\cos \theta)}{16r^3} \quad \dfrac{3P_4(\cos \theta)}{32r^5} \quad + \right]$

7. $30[1 + \frac{5}{4}r^2P_2(\cos \theta) - \frac{3}{16}r^4P_4(\cos \theta) + \cdot]$.

EJERCICIOS **B. pág.** 652

2. $\dfrac{100}{r} + \left(20r - \dfrac{40}{r^2}\right) P_1(\cos \theta)$.

EJERCICIOS A, pág. 666

1. $Y(x, t) = 8\alpha L \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\lambda_n\sqrt{1 - x/L})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \cos \dfrac{\lambda_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\, t$ donde $J_0(\lambda_n) = 0$.

2. (a) $Y(x, t) = 16\beta L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(8 - \lambda_n^2)J_0(\lambda_n\sqrt{1 - x/L})}{\lambda_n^5 J_1(\lambda_n)} \cos \dfrac{\lambda_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\, t$.

(b) La suma de los resultados en (a) y Ejercicio 1.

3. (a) $Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_nJ_0(\lambda_n\sqrt{1 - x/L})\,\text{sen}\left(\dfrac{\lambda_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\, t\right)$

donde $b_n = \dfrac{4\sqrt{L/g}}{\lambda_n[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 uG(u)J_0(\lambda_n u)du$

$G(u) = g(L[1 - u^2])$ y $J_0(\lambda_n) = 0$.

(b) La suma del resultado en (a) y la ecuación (19) página 658 con coeficientes (22)

4. $Y(x, t) = 4v_0 \sqrt{\dfrac{L}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\lambda_n\sqrt{1 - x/L})}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n)}\,\text{sen}\left(\dfrac{\lambda_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\, t\right)$.

EJERCICIOS **B,** Pág. 666

2. $Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nJ_0(\lambda_n\sqrt{1 - x/L}) \cos\left(\dfrac{\lambda_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\, t\right)$

donde $a_n = \dfrac{8h}{\lambda_n^3[J_1(\lambda_n)]^2}\left[\lambda_nJ_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda_n\right) - 2\sqrt{2}J_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda_n\right) + 2J_1(\lambda_n)\right]$

EJERCICIOS **C, pág.** 667

2. $V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} r^nP_n(\cos \theta)$.

4. (c) $Y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(x/L) \cos\left(\dfrac{\omega\sqrt{n(n + 1)}t}{2}\right)$ donde $a_n = \dfrac{2n + 1}{2L} \int_0^L f(x)P_n(x/L)dx$.

ALGUNAS INTEGRALES UTILES
(La constante de integración se omite en cada integral)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| = \begin{cases} \ln u & \text{si } u > 0 \\ \ln(-u) & \text{si } u < 0 \end{cases}$

3. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u$

4. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u$

5. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u|$

6. $\int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u|$

7. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u|$

8. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u|$

9. $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

10. $\int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

11. $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u$

12. $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u$

13. $\int \sec^2 u \, du = \tan u$

14. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u$

15. $\int e^{au} du = \frac{e^{au}}{a}, a \neq 0$

16. $\int \ln u \, du = u \ln u - u$

17. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

18. $\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$

19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}$

22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| = \cosh^{-1} \frac{u}{a}$

23. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| = \begin{cases} (1/a) \tanh^{-1} (u/a) & \text{si } |u| < |a| \\ (1/a) \coth^{-1} (u/a) & \text{si } |u| > |a| \end{cases}$

24. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u \, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots$

25. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u \, du = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, n = 1, 2, \ldots$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$F(t)$	$f(s)$	$F(t)$	$f(s)$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$	8. $\operatorname{senh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad s > \lvert\omega\rvert$
2. t	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$	9. $\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad s > \lvert\omega\rvert$
3. $t^n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$	10. $e^{at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad s > a$
4. $t^n \quad n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad 0$	11. $e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad s > a$
5. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$	12. te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2} \quad s > a$
6. $\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad s > 0$	13. $t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad s > 0$
7. $\cos \omega t$	$\frac{}{s^2 + \omega^2} \quad s > 0$	14. $t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad s > 0$

$F(t)$	$f(s)$
15. $Y'(t)$	$sy - Y(0)$ donde $y = \mathcal{L}\{Y(t)\}$
16. $Y''(t)$	$s^2 y - sY(0) - Y'(0)$
17. $Y^{(n)}(t) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$s^n y - s^{n-1} Y(0) - \cdots - Y^{(n-1)}(0)$
18. $e^{at} F(t)$	$f(s-a)$
19. $t^n F(t) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$(-1)^n f^{(n)}(s)$
20. $\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du$	$f(s) g(s)$
21. $\int_0^t F(u)\, du$	$\frac{f(s)}{s}$
22. $F(t-a) H(t-a) = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$	$e^{-as} f(s)$
23. $\delta(t-a)$	e^{-as}

bibliografía

[1] Akhiezer, N. I., *The Calculus of Variations,* Blaisdell, 1962.

[2] Allen, R. G. D., *Mathematical Economics,* Macmillan, 1960.

[3] Andronow, A. A. y C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations,* Princeton University Press, 1953.

[4] Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids,* 2a. edición, Oxford University Press, 1959.

[5] Churchill, R. V. y J. V. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems,* 3a. edición, McGraw-Hill, 1978.

[6] Churchill, R. V., *Operational Mathematics,* 3a. edición, McGraw-Hill, 1972.

[7] Davis, H. T., *Introduction to Non-Linear Differential and Integral Equations,* Dover, 1962.

[8] Dirac, P. A. M., *Principles of Quantum Mechanics*, 4a. edición, Oxford University Press, 1958.

[9] Forsyth, A. R., *Calculus of Variations,* Dover, 1960.

[10] Fourier, J., *The Analytic Theory of Heat,* Dover, 1955.

[11] Frazer, R. A., W. J. Duncan y A. R. Collar, *Elementary Matrices,* Cambridge University Press, 1947.

[12] Hildebrand, F. B., *Zntroduction to Numerical Analysis,* 2a. edición, McGraw-Hill, 1974.

[13] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations,* 4a. edición, Dover, 1956.

[14] Jackson, D., *Fourier Series and Orthogonal Polynomials,* Carus Monograph No. 6, Mathematical Association of America, 1941.

[15] Kooros, A., *Elements of Mathematical Economics,* Houghton Mifflin, 1965.

[16] Lancaster, K., *Mathematical Economics,* Macmillan, 1968.

[17] Langer, R. E., Fourier's Series, *The Genesis and Euolution of a Theory,* Slaught Memorial Paper No. 1, Mathematical Association of America, 1947.

[18] Lotka, A. J., *Elements of Mathematical Biology,* Dover, 1956.

[19] Mikusinski, J., *Operational Calculus*, Pergamon, 1959.

[20] Minorsky, *N., Non-Linear Oscillation*, Krieger, 1974.

[21] Oldham, K. B. y J. Spanier, *Fraction Calculus, Theory and Application*, Academic Press, 1974.

[22] Pogorzelski, W., *Integra/ Equations and Their Applications*, Pergamon Press, 1966.

[23] Rashevsky, *Mathematical Biophysics*, 3a. edición, Dover, 1960.

[24] Stoker, J. J., *Non-Linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience. 1950.

[25] *Szego, G., Orthogonal Polynomials*, 2a. edición, American Mathematical Society, 1959.

[26] Taylor, A. E., *Aduanced Calculus*, Ginn, 1955.

[27] Timoshenko, S. y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1951.

[28] Watson, *G. N., Theory of Bessel Functions*, 2a. edición, Cambridge University Press, 1962.

[29] Whittaker, E. T., y G. N. Watson, *Modern Analysis*, 4a. edición, Cambridge University Press, 1958.

[30] Widder, D. V., *The Laplace Transform*, Princeton University Press, 1946.

MATEMATICOS QUE HICIERON APORTES IMPORTANTES AL DESARROLLO DE LA TEORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

(Números en corchetes se refieren a las páginas en este libro)

ABEL, Niels Henrik (Noruego, 1802-1829). Ecuaciones integrales (303 { ; funciones elípticas { 259) ; álgebra (probó que las ecuaciones polinómicas de quinto grado no tienen soluciones exactas); identidad de Abel (186).

BERNOULLI, Daniel* (Suizo, 1700-1792). Dinámica de fluidos (principio de Bernoulli); probabilidad, mecánica incluyendo el problema de la cuerda vibrante {655}.

BERNOULLI, James (Jakob o Jacques)* (Suizo, 1654-1705). Mecánica; geometría, astronomía, probabilidad; cálculo de variaciones y problema de la baquistócrona { 130}. La ecuación de Bernoulli { 55} fue propuesta por él en 1695 pero resuelta independientemente por Leibniz y su hermano John; cadena colgante (catenaria) { 114}

BERNOULLI, John (Johann o Jean)* (Suizo, 1667-1748). Geometría, resolvió problemas de trayectorias ortogonales { 89} en 1698, mecánica, problema tautócrono { 294}; propuso y resolvió el problema de la baquistócrona { 131} (también resuelto por su hermano James); introdujo la idea del factor integrante { 42).

BESSEL, Friedrich Wilhelm (Alemán, 1784-1846). Astronomía, calculó la órbita del cometa Halley { 464) ; introdujo las funciones de Bessel { 342) en 1817 estudió el trabajo de Kepler.

CAUCHY, Augustin Louis (Francés, 1789-1857). Probabilidad, cálculo de variaciones { 130) ; óptica; astronomía; mecánica; elasticidad; análisis matemático; creó la teoría de variable compleja (1820s) y aplicó su teoría a las ecuaciones diferenciales { 48}

CHEBYSHEV, Pafnuti Liwowich (Ruso, 1821-1894). Teoría de números (números primos); probabilidad; funciones ortogonales, polinomios de Chebyshev { 380).

CLAIRAUT, Alexis Claude (Francés, 1713-1765). Geometría; la ecuación de Clairaut y soluciones singulares (1734) {60-63} ; astronomía, el problema de los 3 cuerpos { 463) ; calculó con precisión (1759) el perihelio del cometa Halley { 464}.

D'ALEMBERT, Jean le Rond (Francés, 1717-1783). Mecánica incluyendo el problema de la cuerda vibrante (1747) { 605} ; dinámica de fluidos; ecuaciones diferenciales parciales.

DIRICHLET, Peter Gustave Lejeune (Francés, 1805-1859). Teoría de números; mecánica de fluidos; análisis matemático; estableció condiciones para la convergencia de las series de Fourier { 390}.

EULER, Leonhard (Suizo, 1707-1783). El más prolífico de los matemáticos del siglo XVIII a pesar de sus impedimentos físicos (perdió un ojo en 1735 y quedó totalmente ciego en 1768); mecánica; análisis matemático; teoría de números; geometría, dinámica de fluidos; astronomía; óptica; desarrolló (1739) la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales { 167); identidades de Euler { 178}; inventó la función gamma {266 } .

FOURIER, Jean Baptiste Joseph (Francés, 1768-1830). Descubrió las series de Fourier en las investigaciones sobre flujo de calor { 582) en 1822; acompañó a Napoleón en la campaña de Egipto (1798).

FROBENIUS, Ferdinand George (Alemán, 1849-1917). Método de series para resolver ecuaciones diferenciales { 322) ; álgebra; teoría de grupos.

**Estos fueron los más famosos de los ocho matemático.5 en la familia Bernoulli. James y John fueron hermanos y Daniel fue el hijo de John.*

GAUSS, Karl Friedrich (Alemán, 1777-1855). Uno de los grandes matemáticos del siglo XIX. Teoría de números; astronomía; electricidad y magnetismo; óptica; geometría; ecuación hipergeométrica (352)

GREEN, George (Inglés, 1793-1841). Física matemática; elasticidad; óptica; electricidad y magnetismo; originó el término *potencial* (577) ; función de Green (222).

HEAVISIDE, Oliver (Inglés, 1850-1925). Electricidad y magnetismo; sugirió la presencia de la capa atmosférica ahora llamada *ionosfera;* métodos operacionales no rigurosos para resolver ecuaciones diferenciales (207, 261).

HERMITE, Charles (Francés, 1822-1901). Teoría de números, probó (1873) e transcendental; funciones elípticas (259) ; álgebra; polinomios de Hermite (351).

HILBERT, David (Alemán, 1862-1943). Algebra; geometría; ecuaciones integrales (294); cálculo de variaciones; lógica; espacio de Hilbert (359) ; propuso muchos problemas, algunos todavía sin solución.

HUYGENS, Christian (Holandés, 1629-1695). Física matemática (vibraciones; óptica, teoría matemática de ondas); reloj de péndulo basado en la cicloide (297) lo inventó en 1673; astronomía.

KEPLER, Johannes (Alemán, 1571-1620). Astronomía, geometría, especialmente encontrando áreas que ayudaron en la formulación de sus 3 leyes de movimiento planetario (460).

LAGRANGE, Joseph Louis (Francés, 1736-1813). Uno de los grandes matemáticos del siglo XVIII. Mecánica analítica, incluyendo el problema de los 3 cuerpos (463) ; acústica; cálculo de variaciones; teoría de números; método de variación de parámetros (1774) (202) ; ecuación adjunta (1762) (415) ; álgebra (teoría de grupos); ecuaciones diferenciales parciales.

LAGUERRE, Edmond (Francés, 1834-1886). Análisis matemático; variable compleja, funciones analíticas (312); polinomios de Laguerre (351)

LAPLACE, Pierre Simon (Francés, 1749-1827). Mecánica; astronomía; ecuaciones diferenciales parciales; ecuación de Laplace (577) descubierta alrededor de 1787; probabilidad.

LEGENDRE, Adríen Marie (Francés, 1752-1833). Teoría de números; funciones elípticas (259) ; astronomía; geometría; funciones de Legendre (349).

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (Alemán, 1646-1716). Codescubridor con Newton del cálculo. Análisis matemático; lógica; filosofía; regla de Leibniz (265) ; primero en resolver (1691) ecuaciones diferenciales de primer orden, separables (35), homogéneas (38) y lineales (53).

LIOUVILLE, Joseph (Francés, 1809-1882). Teorías de números (números trascendentales); variable compleja; problemas de Sturm-Liouville (361) ; ecuaciones integrales.

NEWTON, Isaac (Inglés, 1642-1727). Codescubridor con Leibniz del cálculo. Mecánica, 3 leyes del movimiento (71) y ley de la gravitación universal (116) ; flujo de calor (107); óptica; análisis matemático; métodos de series para resolver ecuaciones diferenciales (1671) (304).

PARSEVAL, Marc Antoine (Francés, 1755-1836). Análisis matemático; identidad de Parseval en conexión con la teoría de las series de Fourier (382, 399).

PICARD, Carles Emile (Francés, 1856-1941). Geometría algebraica; topología; variable compleja; método de Picard (319) y teoremas de existencia-unicidad para ecuaciones diferenciales.-

POINCARE, Henri Jules (Francés, 1854-1912). Ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad (490, 498) ; topología; mecánica celestial incluyendo el problema de los 3 cuerpos (463) ; geometría no Euclidiana; filosofía.

POISSON, Simeón Denis (Francés, 1781-1840). Física matemática; electricidad y magnetismo; ecuación de Poisson { 578) ; fórmula de Poisson {612} ; probabilidad; cálculo de variaciones; astronomía.

RICATI, Jacopo Franceso (Italiano, 1676-1754). Análisis matemático; ecuación de Riccati (68} resuelta en 1723 por Daniel Bernoulli y otros miembros más jóvenes de su familia.

RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard (Alemán, 1826-1866). Uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX (estudiante de Gauss, Jacobi y Dirichlet); variable compleja { 48}; geometría no Euclidiana; funciones elípticas { 259) ; ecuaciones diferenciales parciales.

RODRIGUEZ, Olinde (Francés, 1794-1851). Análisis matemático; fórmula de Rodríguez {350}

SCHWARZ, Hermann Amandus (Alemán, 1843-1921). Cálculo de variaciones; teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales parciales; desigualdad de Schwarz { 360).

STURM, Jacques Charles Francois (Suizo, 1803-1855). Algebra (número de raíces reales de ecuaciones algebraicas); geométría; mecánica de fluidos; acústica; problemas de Sturm-Liouville { 361}.

TAYLOR, Brook (Inglés, 1685-1731). Análisis matemático; método de series de Taylor {317} ; soluciones singulares (1715); vibraciones de resortes { 569) ; movimiento de proyectiles { 446}; óptica.

WRONSKI, Hcené (Polaco, 1778-1853). Determinantes; Wronskiano { 452} ; filosofía.

índice

ISBN 968-880-053-8

90000

9 789688 800539

PRENTICE HALL