Variable compleja

Juan Manuel Tejeiro

1 Algebra de los números complejos

La teoría de las funciones complejas es uno de los campos de la matemática más interesantes y tal vez una de las herramientas más útiles en muchas aplicaciones.

El presente tema se dividirá en tres partes, la primera comprende la teoría de los números complejos y las funciones de variable compleja, luego algunos elementos básicos de series y sucesiones de números complejos, para finalizar con las expansiones de series de Taylor y Laurent y los teoremas integrales.

1.1 Números complejos

1-1 Definición: El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ se define como

$$\mathbb{C} := \left\{ z = x + iy \quad | x, y \in \mathbb{R} \, , i^2 = -1 \right\} \tag{1}$$

Con esta definición el álgebra de los números complejos (suma y producto) se sigue del álgebra de los números reales, así

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &\equiv z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Otra notación para los números complejos surge por el hecho que un número complejo z está determinado por dos números reales x, y y así se puede identificar el conjunto $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ y un álgebra definida por las anteriores ecuaciones (2). Así podemos escribir un número complejo y su álgebra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{3}$$

A la primera componente del número complejo z se le llama la parte real y a la segunda la parte imaginaria, i.e.,

$$x = \operatorname{Re} z \quad ; \quad y = \operatorname{Im} z \tag{4}$$

Otra operación fundamental en números complejos es la conjugación, definida por:

$$z = x + iy \Longrightarrow z^* = x - iy \tag{5}$$

entonces,

$$zz^* = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Así, el producto de un número complejo por su conjugado da un real, el cual conduce a la llama norma de z, definida por

$$|z| = \sqrt[2]{zz^*} = \sqrt[2]{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} \tag{6}$$

Otra representación útil de los números complejos surge de la representación en coordenadas polares de $\mathbb{R}^2$, pues

$$\overrightarrow{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{7}$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{8}$$

Así, para un número complejo z tenemos

$$\begin{aligned} z &= (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\ \rho &= |z| \quad ; \quad \tan\theta = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} \end{aligned} \tag{9}$$

Con esta representación el producto de los números complejos se simplifica, pues

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1\cos\theta_1, \rho_1\sin\theta_1)(\rho_2\cos\theta_2, \rho_2\sin\theta_2) \\ &= (\rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2], \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1] \\ &= (\rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2), \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned} \tag{10}$$

Para dividir dos números complejos se utiliza el conjugado,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^* \\ &= (\rho_{1/}\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2), \rho_{1/}\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)) \end{aligned} \tag{11}$$

El ángulo θ se le llama el argumento de z, y para $-\pi < \theta \leq \pi$ se le llama el valor principal. Otra representación muy útil surge de la relación entre las funciones trigonométricas y la función exponencial., la cual se puede establecer si escribimos la expanción en serie de Taylos para estas funciones:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \\ \sin x &= x + \frac{1}{3!}x^3 - \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned} \tag{13}$$

Así, la representación de Moevre de un número complejo toma la forma

$$z = \rho e^{i\theta} \tag{14}$$

con ρ y θ definidos en la representación polar. Con esta nueva representación el producto y el complejo conjugado toman la forma simple

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ z^* &= \rho e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{15}$$

y nos permite obtener las raices de un número complejo. El teorema fundamental del álgebra establece que todo polinomio de grado n posee n raices, teniendo en cuenta que las raices pueden ser iguales reales o complejas. Así la raiz n-ésima de un numero complejo debe tener n valores. Notemos que dentro de los complejos los reales son un caso particular, i.e., son complejos con la parte imaginaria igual a cero.

Entonces, dado $z = \rho e^{i\theta}$, la raiz n-ésima está dada por

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2\pi k)/n} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{16}$$

1.1.1 Problemas

1.- Escribir los siguientes números complejos en notación polar y exponencial:

i.- 1 ii.- -1 iii.- i iv.- $-i$ v.- $1+i$ vi.- $1-i$

2.- Realizar las siguientes operaciones: $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^*, $\sqrt[2]{z_1}$, $\sqrt[3]{z_2}$, $\sqrt[4]{z_1}$, $\sqrt[2]{z_1/z_2}$, $|z_1|$, $|z_1+z_2|$, $|z_1 z_2|$, $|z_1/z_2|$ donde

i.- $z_1 = 1+i \quad ; z_2 = 1-i$ ii.- $z_1 = 1-i \quad ; z_2 = -i$ iii.- $z_1 = e^{3\pi i/2} \quad ; z_2 = 2e^{-13\pi 1/3}$

2.- Demostrar las siguientes propiedades del álgebra de los complejos:

i.- $(z_1+z_2)z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3$ ii.- $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ iii.- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ iv.- $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

3. Calcular:

i.- Re $\frac{1-i}{2+i}$ ii.- Im $\frac{(1+i)^2}{e^{-\pi i}}$ iii.- Re z^n, con $n \in \mathbb{N}$ iv.- $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$

2 Funciones analíticas

1-2 Definición: Definimos una función compleja de variable compleja como

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &: \quad z \longmapsto f(z) \end{aligned} \tag{17}$$

donde D es el dominio de la función. La función f tiene límite en un punto $z_0 \in D$, si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \tag{18}$$

y el límite es único, esto significa que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon$.

La función f se llama continua en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{19}$$

y la función es continua en el dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si ella es continua en todo $z \in D$.

1-3 Definición: Una función de variable compleja f es diferenciable en un punto $z = z_0$ si el límite

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{20}$$

existe. Además este límite es independiente del camino que se siga en el plano complejo para pasar de z a z_0.

Por ejemplo, sea $f(z) = z^2$, entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) \quad : \quad &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z_0 \Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} \\ &= 2z_0 \end{aligned} \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que la variable z se puede escribir el la forma $z = x + iy$, con x, y reales, entonces

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{22}$$

con u y v funciones reales de x, y, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{u(z + \Delta z) - u(z) + i[v(z + \Delta z) - v(z)]}{\Delta z} \\ &= \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

y por lo tanto, en general el límite dependera de la forma (camino) como tomemos $\Delta z \to 0$. Por ejemplo, la función $f(z) = z^*$ no es derivable en ningún punto, pues

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{[x + \Delta x - i(y + \Delta y)] - [x - iy]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

entonces, si primero hacemos tender Δy a cero, y luego Δx a cero, el límite antrior da 1, pero si primero hacemos tender Δx a cero y lugo Δy a cero, el límite da -1, lo cual significa que la función no es diferenciable en ningún punto. Esta situación conduce a la siguiente

1-4. Definición: Una función $f(z)$ de variable compleja se dice analítica en un punto z_0 si $f(z)$ está definida y tiene derivada en todos los puntos de una vecindad abierta de z_0, y se llama analítica en el dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si es analítica en todos los puntos de D.

2.0.2 Problemas

1.- Demostrar las siguientes propiedades de las derivadas:

i.- $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$

ii.- $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

2.- Mostrar que la función $f(z) = |z|^2$ solamente es diferenciable en el punto $z = 0$.

3.- Calcular la derivada en el punto z_0

i.- $f(z) = 2z^2 - 4z + 3i$, $z_0 = 1 + i$

ii.- $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = -i$

iii.- $f(z) = (z^2 - i)^2$, $z_0 = 3 - 2i$

iv.- $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$

v.- $f(z) = \sinh z$

vi.- $f(z) = \cosh z$

vii.- $f(z) = \tanh z$

viii.- $f(z) = \cosh^2 z - \sinh^2 z$

en donde $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$; $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$; $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$

4.- Que relación hay entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas?

2.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente teorema establece un criterio analítico fundamental para determinar si una función de variable compleja es analítica..

1-1 Teorema: Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida en una región $D \subseteq \mathbb{C}$, entonces la condición necesaria y suficiente para que $f(z)$ sea analítica es que las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{23}$$

se cumplan en la región, en donde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$.

Demostración: Sea $f(z)$ analítica, entonces la derivada

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{24}$$

existe, y el límite es independiente del camino para $\Delta z \to 0$. Entonces, sea $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, y tomemos primero el límite cuando $\Delta y \to 0$, y luego $\Delta x \to 0$, así

$$\begin{aligned}
f'(z) \quad : &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (25)
\end{aligned}$$

Intercambiando ahora el orden de los límites, i.e., primero $\Delta x \to 0$ y luego $\Delta y \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
f'(z) \quad : &= \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} \\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (26)
\end{aligned}$$

y comparando las dos ecuaciones anteriores obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Supongamos ahora, que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas, con primeras derivadas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en alguna región D. Sea $(x,y) \in D$, y $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in V \subset D$ un punto en alguna vecindad del punto (x,y). Aplicando el teorema del valor medio, tenemos

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y) = \Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta x\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (27)$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y) = \Delta x\frac{\partial v}{\partial x}+\Delta x\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (28)$$

Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, entonces de las relaciones anteriores tenemos

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) \qquad (29)$$

aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z \end{aligned} \tag{30}$$

y por lo tanto el límite

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{31}$$

existe, y así $f(z)$ es analítica, como se quería probar.

1-2 Teorema: Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica de variable compleja en una región D, entonces las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son soluciones de la ecuación de Laplace:

$$\nabla u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{32}$$

$$\nabla v(x,y) = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{33}$$

Las funciones que satisfacen la ecuación de Lapalce bi-dimensional se llaman funciones armónicas.

Demostración: Dado que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se asumen continuas, con derivadas continuas, entonces sus segundas derivadas mixtas deben ser iguales, es decir

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y\partial x} \tag{35}$$

entonces aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y\partial x} \tag{37}$$

sumando las ecuaciones obtenemos la ecuación de Laplace. Un cálculo similar para la función $v(x,y)$.

2.1.1 Problemas

1.- Cuales (y en que región) de las siguientes funciones son analíticas y encontrar su derivada:

i.- $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ ii.- $f(z) = \mathrm{Im}\, z$ iii.- $f(z) = |z|$ iv.- $f(z) = |z|^2$ v.- $f(z) = 1/(1-z)$

vi.- $f(z) = z + 1/z$ $v$ii.- $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

2.- Demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

donde $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

3 Sucesiones y series

Una sucesión de números complejos es una función de los naturales en $\mathbb{C}$, es decir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \to & z_n \end{array}$$

La sucesión la denotaremos por $z_1, z_2, ...$ o equivalentemente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Una sucesión converge a un punto $a \in \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \tag{38}$$

o en términos más formales, si $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - a| < \epsilon$ para $n \geq N$. Esto significa que la sucesión converge al punto a si para cualquier círculo (de radio ϵ) centrado en el punto a todos los puntos de la sucesión, salvo un número finito están dentro de este círculo.

1-5 Definición: Una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama de Cauchy si

$$\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0 \tag{39}$$

es decir si la diferencia entre cualquier par de puntos de la sucesión tiende a cero. Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero, en general, no toda sucesión de Cauchy es convergente. Así los espaciós donde toda sucesión de Cauchy es convergente, llamados completos, juegan un papel importante en matemáticas. Por ejemplo, los números reales y los complejos son espacios completos, y por lo tanto una sucesión convergente es equivalente a que la sucesión sea de Cauchy. Por ejemplo la sucesión

$$z_n = \frac{1}{n} + i\frac{n+1}{n} \to i \tag{40}$$

pero las sucesiones

$$z_n = n \tag{41}$$

$$z_n = 1 + i(-1)^n \tag{42}$$

no son convergentes, pues, la primera, para n grandes tiende a infinito, y para la segunda los términos de la sucesión son de la forma $1-i, 1+i, 1-i, ...$, y auncuando sus términos permaneces finitos, el límite no existe, pues un resultado importante de la convergencia de las series es que el límite, si existe, es único.

Una sucesión de números complejos, es equivalente a dos sucesiones reales, pues $z_n = x_n + iy_n$, entonces si la sucesión $z_n \to z = x + iy$, es equivalente a que $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

1-6 Definición: Una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice absolutamente convergente si la sucesión $|z_n|$ converge.

1-7 Definición: Una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada si para todo n existe un número real k no negativo tal que $|z_n| \leq k$.

Un resultado útil para la convergencia de las series es que si una sucesión es convergente entonces la sucesión es acotada. Por lo tanto si una sucesión no es acotada entonces no converge.

Existen varios resultados importantes respecto a las sucesiones, pero no entraremos en esos detalles pues nuestro objetivo central es llegar a las expansiones en serie de Taylor y Laurent.

3.1 Series

1-8 Definición: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y definamos la sucesión de sumas parciales por

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} z_j = z_1 + z_2 + \cdots \tag{43}$$

entonces si la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, es decir si $s_n \to s$, entonces se dice que la serie converge a s, i.e.,

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = s \tag{44}$$

Por ejemplo, consideremos la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \tag{45}$$

entonces la sucesión de sumas parciales está dada por

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \tag{46}$$

y por lo tanto $s_n \to 1$, y así la serie anterior converge a 1:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1 \tag{47}$$

Otro ejemplo importante y de gran utilidad es la serie geométrica definida por

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots \tag{48}$$

entonces la sucesión de sumas parciale toma la forma

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \tag{49}$$

ahora, si tomamos esta suma parcial y la multiplicamos por q y el resultado se lo restamos a la suma s_n, obtenemos

$$s_n - qs_n = (1-q)s_n = 1 - q^{n+1} \tag{50}$$

entonces si $q \neq 1$ tenemos que

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{51}$$

y por lo tanto la serie geométrica converge a

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{52}$$

si $|q| < 1$, de lo contrario diverge.

Un resultado importante de las series convergentes es el siguiente

1-3 Teorema: Supongamos que las siguientes series son convergentes

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = s; \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_j = r \tag{53}$$

entonces las series suma, diferencia, producto por un número y el complejo conjugado, también convergen, es decir

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z_j + w_j) = s + r \tag{54}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z_j - w_j) = s - r \tag{55}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} cz_j = cs \tag{56}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j^* = s^* \tag{57}$$

4 Integrales de camino

1-9 Definición: Una curva sobre los complejos $\mathbb{C}$ es una función

$$\begin{aligned} \gamma &: [a,b] \to \mathbb{C} \\ t &\to \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned} \tag{58}$$

1-10 Definición: Una integral de linea sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ de una función $f(z)$ a lo largo de una curva $\gamma(t) = z(t)$ está definida por

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt \tag{59}$$

Ejemplos: a) Sea $f(z) = 1/z$ y la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ el círculo unidad centrado en el origen, partiendo del punto $(1, 0)$ y recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= z(t) = \cos t + i \sin t & (60) \\ \frac{dz}{dt} &= -\sin t + i \cos t & (61) \end{aligned}$$

y por lo tanto la integral es a lo largo de un camino cerrado, así

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t}(-\sin t + i \cos t)dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i & (62) \end{aligned}$$

Otra forma de parametrizar la curva anterior es la siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= z(t) = e^{it} \Longrightarrow \\ \frac{dz}{dt} &= ie^{it} & (63) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i \tag{64}$$

b) Consideremos ahora la función $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ y la curva como la recta que va del origen al punto $1 + i$. Entonces la ecuación paramétrica de la curva está dada por

$$z(t) = x(t) + iy(t) = t + it; \quad t \in [0, 1] \tag{65}$$

entonces

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 x(t)\frac{dz}{dt}dt = \int_0^1 t(1 + i)dt = \frac{1}{2}(1 + i) \tag{66}$$

Consideremos ahora la misma integral pero siguiendo otro camino: primero a lo largo del eje x desde el origen hasta el punto $(1, 0)$, curva γ_1 y luego de este punto a lo largo del eje imaginario y hasta el punto $1 + i$, curva γ_2, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \tag{67}$$

reemplazando, tenemos

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 tdt + \int_0^1 idt = \frac{1}{2} + i \tag{68}$$

c) Sea $f(z) = (z - z_0)^m$ con $m \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}$ fijo y la curva γ un círculo de radio ρ y centro en z_0 recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces la ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \rho e^{it}; \quad t \in [0,1] \Longrightarrow \\ f(z(t)) &= (z - z_0)^m = \rho^m e^{imt} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= i\rho e^{it} \end{aligned} \tag{69}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz \quad : \quad &= \int_0^{2\pi} i\rho^{m+1} e^{i(m+1)t} dt \qquad (70) \\ &= \frac{i\rho^{m+1}}{i(m+1)} \left[e^{i(m+1)t} \right|_0^{2\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases} \qquad (71) \end{aligned}$$

4.1 Problemas

1.- Representar paramétricamente las siguientes curvas:

a) La recta que va del punto a al b, donde

i.- a es el punto $z = 0$ y b el punto $z = 3 - 12i$.

ii.- a el punto $z = 1 - i$ y b el punto $9 - 5i$

b) El círculo de radio ρ y centro en z_0 con:

i.- $\rho = 2$ y $z_0 = i$.

ii.- $\rho = 6$ y $z_0 = -4 + 6i$.

c) Las curvas dadas por las funciones y los puntos extremos a y b:

i.- Una parábola: $y = 4x^2 + 3$; $a := (1,7)$ y $b := (3,39)$

ii.- Una hipérbola: $y = 1 + 2/x$, $a := (1,3)$ y $b := (3,5/3)$

iii.- Una elipse: $(x-2)^2/4 + (y+1)^2/9 = 1T, Ta$:recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj y luego en el mismo sentido.

2.- Que curvas representan las siguientes funciones:

i.- $\gamma(t) = 1 + t - (2 - 2t)i$ con $t \in [-1, 1]$

ii.- $\gamma(t) = -2 + 3i + 4e^{-it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

iii.-$\gamma(t) = t - 2 + (t-1)^4$ con $t \in [0, 2]$

3.- Calcular la integral de linea de $f(z)$ a lo largo de la curva dada:

i.- $f(z) = z^2$ y γ : la de recta del punto $(0,0)$ a $2 + i$

ii.- $f(z) = z^2$ y γ : la parábola $y = x^2$ del punto $(0,0)$ a $(2,4)$

iii.- $f(z) = 1/(z-3)$ y γ : la curva $|z - 3| = 2$ e integrada en contra y luego en la dirección de las agujas del reloj iv.- $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ y γ : un círculo de ardio ρ centrado en el origen y en sentido contrario a las agujas del reloj, partiendo del punto $z = (\rho, 0)$

4.- Las siguientes son las propiedades básicas de las integrales de linea:

$$a: \quad \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz; \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{72}$$

$$b: \quad \int_b^a f(z)dz = -\int_a^b f(z)dz \quad \text{a lo largo de } \gamma \tag{73}$$

$$c: \quad \int_\gamma [\lambda f_1(z) + f_2(z)]dz = \lambda \int_\gamma f_1(z)dz + \int_\gamma f_2(z)dz \tag{74}$$

$$\begin{aligned} d &: \quad \left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq Ml \\ l &= long. \text{ de la curva} \\ |f(z)| &\leq M \quad \forall z \text{ sobre } \gamma \end{aligned} \tag{75}$$

Verificar las anteriores propiedades para los siguientes casos particulares:

i.- Propiedad $a)$ para $f(z) = 1/z$ con γ el círculo $|z| = 1$ y γ_1 el semicírculo superior y γ_1 el inferior.

ii.- Propiedad $b)$ para $f(z) = z^2$ con γ la recta del punto $a : 1 + i$ al punto $b : 2 + 2i$

iii.- Propiedad $c)$ para $f(z) = 4/z - 2z$ con γ el arco menor del círculo unidad $|z| = 1$ comprendido entro los puntos 1 e i.

iv.- Aplicar la propiedad $d)$ y mostrar que

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq 4$$

con $f(z) = 1/z^2$ y γ la recta del punto i al punto $4 + i$.

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq 8\sqrt{2}$$

con $f(z) = z^4$ y γ la recta del punto $-1 - i$ al punto $1 + i$.

v.- Encontrar una cota superior para la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz; \quad \gamma \; el \; círculo \; |z| = 2$$

4.2 Teorema integral de Cauchy

1-11 Definición: Un dominio simplemente conexo es una región $D \subset \mathbb{C}$ tal que toda curva cerrada en D se puede recucir a un punto continuamente.

Por ejemplo el interior de un círculo o un cuadrado son regiones simplemente conexas pero el interior de un anillo no lo es. Antes de enunciar y probar el teorema de Cauchy recordemos el teorema de Green en el plano $\mathbb{R}^2$:

1-4 Teorema de Green en el plano: Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones reales sobre $\mathbb{R}^2$ entonces, si γ es una curva cerrada en el plano y simple, y D es la región interior a la curva, tenemos que

$$\oint_\gamma (f(x,y)dx + g(x,y)dy) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy \tag{76}$$

Con ayuda de este resultado del cálculo real podemos establecer el siguiente teorema fundamental:

1-5. Teorema integral de Cauchy: Si $f(z)$ es una función analítica en una región D simplemente conexa del plano complejo, entonces

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \tag{77}$$

para toda curva cerrada y simple en D. Sin entrar en detalles de definiciones una curva simple es aquella que no se corta a si misma.

Demostración: Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $dz/dt = dx/dt + idy/dt$, entonces

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z)dz &= \oint_\gamma (u+iv)(dx+idy) \\ &= \oint_\gamma (udx - vdy) + i\oint_\gamma (udy + vdx) \end{aligned} \tag{78}$$

entonces, aplicando el teorema de Green a las dos últimas integrales, tenemos

$$\oint_\gamma (udx - vdy) = \iint\limits_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0 \tag{79}$$

donde hemos aplicado las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas. Similarmente se muestra que la parte imaginaria también es cero, lo cual prueba el teorema integral de Cauchy.

Una implicación directa del teorema integral de Cauchy y de las propiedades de las integrales de linea, es que la integral de linea de una función analítica entre dos puntos del plano complejo es independiente del camino, pues si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa D, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \Longrightarrow \\ \int_{\gamma_1} f(z)dz &= -\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\gamma_2} f(z)dz \end{aligned} \tag{80}$$

donde por la curva $-\gamma_2$ entendemos la curva recorrida en sentido contrario. Así, si tomamos un punto fijo $z_0 \in D$ y un punto cualquiera $z \in D$ tenemos que

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')dz' \tag{81}$$

independiente del camino de integración, y solo de los puntos extremos, y por lo tanto la integral se puede considerar una función del punto final z. Calculemos su derivada. Entonces

$$\begin{aligned} F(z+\Delta z) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z')dz' - \int_{z_0}^{z} f(z')dz' \\ &= \int_{z}^{z+\Delta z} f(z')dz' \end{aligned} \tag{82}$$

y por lo tanto

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)]dz' \tag{83}$$

Problema: Probar la igualdad anterior.

Asumamos que Δz es lo suficientemente pequeño, que el camino de integración es la recta que une al punto z con $z + \Delta z$, y como la función $f(z)$ es analítica y por lo tanto continua tenemos que $|f(z') - f(z)| < \epsilon$, entonces aplicando la propiedad d para las integrales, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_{z}^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)]dz' \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \left| \int_{z}^{z+\Delta z} dz' \right| = \epsilon \end{aligned} \tag{84}$$

lo que significa que para Δz tendiendo a cero tenemos que

$$\frac{dF(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \tag{85}$$

este resultado corresponde al teorema fundamental del cálculo integral, y nos permite calcular integrales de linea para funciones analíticas.

Ejemplos: Calcular la integral de linea de la función $f(z) = z^2$ a lo largo de una curva (no se necesita especificar cual) que une los puntos i y $1 + 4i$. Entonces aplicando el teorema anterior

$$\int_{i}^{1+4i} z'^2 dz' = \left[\frac{z^3}{3}\right|_{i}^{1+4i} = -\frac{47}{3} - 17i \tag{86}$$

4.2.1 Problemas

1.- Calcular las siguientes integrales de linea de la función $f(z)$ entre los puntos dados a y b.

i.- $f(z) = \cos z$, $a : i$ y $b : \pi/2$

ii.-$f(z) = e^z$, $a : 0$ y $b : i\pi$

iii.-$f(z) = \cosh 3z$, $a : 0$ y $b : i\pi/6$

iv.-$f(z) = ze^{z^2}$, $a : 0$ y $b : 2 - i\pi$

v.-$f(z) = \sin^2 z$, $a : -i\pi$ y $b : i\pi$

El siguiente teorema es tal vez uno de los de mayor aplicación de la variable compleja y es una consecuencia fundamental del teorema integral de Cauchy:

1-6 Teorema: (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Entonces para todo $z_0 \in D$ y cualquier trayectoria sencilla cerrada γ contenida en D recorrida en sentido contrario a las manecillas del reloj y que encierre el punto z_0 tenemos que

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \tag{87}$$

Demostración: Sea $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$, entonces

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= f(z_0) \oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned} \tag{88}$$

la primera integral fue realizada (ecuación 70) y solo faltaría ver que la última integral es cero, lo cual se deja como ejercicio, conciderando un círculo de radio arbitrariamente pequeño que rodee al punto z_0, y aplicando la propiedad d de las integrales de linea.

Ejemplo: Integrar la función $f(z) = (z^2 + 1)/(z^2 - 1)$ a lo largo del círculo unidad con centro en a) $z = 1$, b) $z = 1/2$ c) $z = -1$ c) $z = i$.

$$\oint_\gamma \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \oint_\gamma \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)} dz \tag{89}$$

para el disco de radio 1 y centro en $z = 1$ la función analítica es

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \tag{90}$$

y $z_0 = 1$, entonces

$$\oint_\gamma \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \tag{91}$$

Para el círculo con centro en $z = 1/2$ el resultado es el mismo anterior. Para el circulo con centro en $z = -1$, la función analítica está dada por $f(z) = (z^2+1)/(z-1)$

y $z_0 = -1$, entonces

$$\oint_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi i f(-1) = -2\pi i \tag{92}$$

y finalmente para el circulo con centro $z = i$ ninguno de los puntos $z = \pm 1$ está en el circulo y por lo tanto la integral es cero.

4.2.2 Problemas

1.- Integrar la función $f(z) = (z^2 1)/(z^2+1)$ sobre el círculo

i.- $|z-i| = 1$ ii,- $|z-2i| = 2$

2.- Para los círculos $|z-i| = 1$ y $|z+1| = 1$ es sentido contrario a las agujas del reloj, integrar las siguientes funciones:

i.- $f(z) = e^z/z$ ii.- $f(z) = \cos z/2z$. iii.- $f(z) = (z^4+1)/(z^2-2iz)$

Otro resultado central, consecuencia del teorema de Cauchy, es que una función de variable compleja, si tiene la primera derivada en una región, a diferencia de las funciones de variable real, tiene derivadas en a todos los ordenes.

1-7 Teorema: Si $f(z)$ es analítica en un dominio $d \subset \mathbb{C}$, entonces existen las derivadas a todos los ordenes en D y su valor en un punto z_0 está dado por:

$$2\pi i f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ ;\ n = 0, 1, 2, ... \tag{93}$$

Demostración. Por definición

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{94}$$

aplicando la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left\{\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right\} \tag{95}$$

un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{z-z_0}\right\} \\ = \quad & \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2} \end{aligned} \tag{96}$$

entonces, de esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} f'(z_0) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \\ & + \lim_{\Delta z \to 0}\frac{1}{2\pi i \Delta z}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz \end{aligned} \tag{97}$$

en donde la última integral tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$, y obtenemos la fórmula integral para la primera derivada. Siguiendo los mismos pasos, i por inducción, se prueba la fórmula general para la n-ésima derivada.

El teorema integral de Cauchy establece que la integral cerrada de una función analítica es cero, y el siguiente teorema establece el iverso:

1-8 Teorema de Morera: Si $f(z)$ es continua en un dominio D simplemente conexo y la integral de linea para cualquier curva cerrada en D se anula, i.e.

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \tag{98}$$

entonces la función es analítica.

La demostración es una aplicación directa del teorema integral de Cauchy 1-5.

Otra relación importante es la desigualdad de Cauchy para funciones analíticas, la cual establece que si $f(z)$ es analítica y consideremos un círculo de radio r centrado en el punto z_0, y sea M el valor máximo que toma la función $f(z)$ sobre el círculo, entonces aplicando la propiedad d) de las integrales de linea, y la fórmula integral para la n-ésima derivada, tenemos

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}M\frac{2\pi r}{r^{n+1}} \tag{99}$$

entonces, de aquí se obtiene la desigualdad de Cauchy:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n} \tag{100}$$

Una consecuencia fundamental de este resultado es el teorema de Liouville:

1-9 Teorema de Liouville: Si $f(z)$ es analítica y acotada en todo el plano complejo, entonces $f(z) =$constante.

Demostración: Por hipótesis $f(z)$ es acotada, es decir $|f(z)| < k$ para todo z, entonces podemos tomar uncírculo de radio r tan grande como queramos, ($r \to \infty$ en la desigualdad de Cauchy) y obtenemos que $f'(z) = 0$ para todo z, y por lo tanto $f(z) = cte.$

4.2.3 Problemas

1,- Aplicando el teorema 1-7, calcular sobre el círculo $|z| = 2$, en sentido contrario a las agujas del reloj, la integral de linea de las siguientes funciones:

i.- $f(z) = (z^4 + z)/(z-1)^2$

ii.- $f(z) = e^z/z^n$ para $n > 0$ entero.

iii.- $f(z) = \sin z/z^{2n}$ para $n > 0$ entero.

iv.- $f(z) = z^3/[(z+3)(z-i)^2]$.

A partir de la relación (teorema 1-6 para la fórmula integral de Cauchy)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}dz' \tag{101}$$

donde la curva γ es círculo centrado en el punto a y que contiene al punto z, y de la relación

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'-z} &= \frac{1}{z'-a-(z-a)} \\ &= \frac{1}{z'-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{z'-a}} \end{aligned} \tag{102}$$

puesto que la variable de integración z' se encuentra sobre el círculo γ y z en su interior, entonces

$$\left|\frac{z-a}{z'-a}\right| < 1 \tag{103}$$

y podemos aplicar la serie geométrica, esto es

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{z'-a}} = 1 + \frac{z-a}{z'-a} + \cdots + \left(\frac{z-a}{z'-a}\right)^2 + \frac{[(z-a)/(z'-a)]^{n+1}}{1-(z-a)/(z'-a)} \tag{104}$$

si introducimos esta expresión en el integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-a}dz' + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-a)^2}dz' \\ &\quad + \cdots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-a)^{n+1}}dz' + R_n(z) \end{aligned} \tag{105}$$

donde el resto $R_n(z)$ está dado por

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-a)^{n+1}(z'-z)}dz' \tag{106}$$

entonces de la formula integral para la n-ésima derivada, obtenemos la serie de Taylor la la función $f(z)$ alrededor del punto $z = a$:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + R_n(z) \tag{107}$$

Teniendo en cuenta que el resto $R_n(z)$ tiende a cero para $n \to \infty$, obtenemos la serie de Taylor para representar una función analítica como una serie de potencias alrededor del punto $z = a$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{108}$$

En el caso particular en el cual $a = 0$ la serie se llama de Maclaurin.

Ejemplo: Encontrar la serie de Maclaurin para la función $f(z) = 1/(1-z)$.

Puesto que $df^{(n)}(z)/dz^n = n!/(1-z)^{n+1}$ entonces $f^{(n)}(0) = n!$, entonces la serie de Maclaurin toma la forma

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \tag{109}$$

Notemos que esta serie converge solo para los z tales que $|z| < 1$. De hecho en el punto $z + 1$ la función anterior no está definida, y por lo tanto no es analítica. A un punto del plano complejo en el cual una función no es analítica se le llama un punto singular, siempre y cuando la función sea analítica en los puntos vecinos de esta singularidad. Aún así es posible expandir una función alrededor de un punto singular, con la condición que la expansión es válida para un anillo (dos círculos concéntricos) centrado en el punto singular. Esta expansión, la cual daremos sin demostración se llama la expansión de Laurent, y contiene como caso particular a la serie de Taylor.

1-10 Teorema: Sea $f(z)$ analítica en el anillo comprendido por dos círculos concéntricos γ_1 y γ_2, centrados en el punto $z = a$. Entonces $f(z)$ puede representarse por la serie, convergente en el anillo, dada por

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} && (110) \\ &= b_0 + b_1(z-a) + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots && (111) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-a)^{n+1}} dz' && (112) \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (z'-a)^{n-1} f(z') dz' && (113) \end{aligned}$$

tomando cada integral en sentido contrario a las agujas del reloj y sobre una curva γ que esté contenida en el anillo.

Por ejemplo, consideremos la función $f(z) = z^2 e^{1/z}$ la cual no es analítica en el punto $z = 0$, entonces su serie de Laurent está dada por:

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots \qquad (114)$$

cuyo cálculo, como se puede verificar directamente, es directo (sin necesidad de calcular las integrales de camino) de la expansión en serie de Taylor para la función exponencial.

Como otro ejemplo consideremos la función $f(z) = \sin z / z^3$, cuya expansión de Laurent alrededor del punto $z = 0$ está dada por (ne nuevo basta con tomar la expansión para el $\sin z$)

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots \qquad (115)$$

Se había definido un punto singular de una función como el punto donde la función no es analítica. La expansión de Laurent nos permite clasificar los diferentes puntos singulares que se pueden presentar en una función analítica. Los términos de la serie que contienen a los coeficientes c_n se le llama la parte principal, entonces si los coeficientes de la parte principal de la serie de Laurent son cero, salvo un número finito de términos, entonces

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n+\ \frac{c_1}{(z-a)}+\cdots+\frac{c_m}{(z-a)^m} \tag{116}$$

al punto singular $z=a$ se le llama un polo de orden m. Por ejemplo en la expansión de la función $\sin z/z^3$ el polo es de orden dos, mientras que para la función $z^2e^{1/z}$ no tiene polos en $z=a$, y a esta singularidad se le llama esencial.

4.3 Residuos

Definimos el residuo de una función analítica, la cual presenta una singularidad aislada en el punto $z=a$, como el coeficiente c_1 de la expansión es serie de Laurent de la función, i.e.

$$Res_{z=a}f(z)=c_1 \tag{117}$$

y por lo tanto

$$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i c_1 \tag{118}$$

Un método sencillo para determinar el residuo de una función $f(z)$ en un punto singular es el siguiente: Supongamos que la función tiene un polo de orden m, entonces su expansión de Laurent está dada por la ecuación (116), multiplicando esta ecuación por $(z-a)^m$, tenemos

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) &= c_m+c_{m-1}+\cdots+c_2(z-a)^{m-2}+c_1(z-a)^{m-1}\\ &\quad +b_0(z-a)^m+b_1(z-a)^{m+1}+\cdots \end{aligned} \tag{119}$$

por lo tanto el residuo de la función está dado por el coeficiente del término $(z-a)^{m-1}$ y así lo podemos calcular utilizando la relación

$$c_1=Res_{z=a}f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] \tag{120}$$

Por ejemplo, sea $f(z)=2z/[(z+4)(z-1)^2]$n entonces la función tiene un polo de orden dos en $z=1$ y por lo tanto el residuo es

$$c_1=Res_{z=1}f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{2z}{4+z}=\frac{8}{25} \tag{121}$$

4.3.1 Problemas

1.- Determinar los residuos de los puntos singulares de las siguientes funciones:

i.- $f(z)=\frac{4}{1-z}$

ii.- $f(z)=\frac{3e^z}{z^4}$

iii.- $f(z)=\frac{4z-1}{z^2+3z+2}$

iii.- $f(z)=\csc^2 z$

2.- Calcular las siguientes integrales sobre el círculo unitario en sentido contrario a las agujas del reloj:

i.- $\oint_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-2z}dz$

ii.- $\oint_\gamma e^{1/z}dz$

iii.- $\oint_\gamma \frac{1}{\sin z}dz$

1-10 Teorema del residuo: Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva cerrada γ, excepto para un número finito de puntos singulares $a_1, a_2, ..., a_n$ en el interior de γ, entonces

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res_{z=a_j} f(z) \tag{122}$$

Ejemplos: a) Sea $f(z) = (4-3z)/(z^2-z)$, es analítica en todas partes excepto en los puntos $z=0$ y $z=1$ donde los residuos son -4 y 1 respectivamente, entonces integrando sobre cualquier trayectoria que encierre a los polos tenemos

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i \tag{123}$$

b) $f(z) = 1/(z-a)^m$, con $m \in \mathbb{N}$. con γ una trayectoria cerrada que contiene al punto $z=a$. El residuo de la función está dado por

$$Res_{z\to a}(f(z)) = \begin{cases} 1 & m=1 \\ 0 & m=2,3,... \end{cases} \tag{124}$$

entonces

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-a)^m}dz = 2\pi i \begin{cases} 1 & m=1 \\ 0 & m=2,3,... \end{cases} \tag{125}$$

4.3.2 Problemas

1.- Calcular las siguientes integrales, donde γ es el circulo unitario utilizando el teorema del residuo:

i.- $\oint_\gamma \frac{1}{1+4z^2}dz$; ii.- $\oint_\gamma \frac{e^z}{\cos \pi z}dz$; iii.- $\oint_\gamma \tan 2\pi z dz$;iv.- $\oint_\gamma \frac{\tan \pi z}{z^3}dz$

Entre las aplicaciones más importantes del teorema del residuo se encuentra el cálculo de integrales. Consideremos en primer lugar integrales de funciones racionales trigonométricas, es decir, integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta \tag{126}$$

entonces, con el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{127}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{128}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{129}$$

llamando $f(z) = R(\cos\theta, \sin\theta)$, la integral toma la forma

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{iz} dz \tag{130}$$

evaluada sobre el círculo unitario centrado en el origen y recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ejemplo. Consideremos la integral, con $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \oint_\gamma \frac{dz}{i(1-rz)(z-r)} \tag{131}$$

entonces solamente el polo $z = r$ está en el círculo unitario, y por lo tanto

$$\begin{aligned} Res \frac{1}{i(1-rz)(z-r)} &= \left. \frac{1}{i(1-rz)} \right|_{z=r} \\ &= \frac{1}{i(1-r^2)} \end{aligned} \tag{132}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{2\pi}{1-r^2} \tag{133}$$

Consideremos ahora integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{134}$$

las cuales se pueden realizar si extendemos la función al plano complejo, e integramos sobre un semicírculo cerrado γ, es decir

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum Res(f(z)) &= \oint_\gamma f(z) dz \\ &= \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{-R}^{R} f(x) dx + \int_{\frown} f(z) dz \right\} \end{aligned} \tag{135}$$

donde la última integral sobre el semicírculo superior $\frown$ en el plano complejo se debe anular, para que el método funcione. Veamos que condiciones debe cumplir la función para que esto sea así. El semicírculo superior está dado por la ecuación paramétrica $Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$ entonces

$$\left| \int_{\frown} f(z) dz \right| \leq \lim_{R\to\infty} \pi R \left| f(Re^{i\theta} \right| \to 0 \tag{136}$$

por lo tanto la función f, como función del radio R debe comportarse como

$$|f(z)| \backsim \frac{1}{R^2} \tag{137}$$

para que la integral se anule.

Ejemplo:Consideremos la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx \tag{138}$$

Los polos de la función $f(z) = 1/(1+z^4)$ están en los puntos $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{2i\pi/4}$, $z_3 = e^{3i\pi/4}$ y $z_4 = e^{4i\pi/4}$, por lo tanto solo los dos primeros polos están en el semiplano superior, y así

$$Res_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z_1} = -\frac{1}{4}e^{i\pi/4} \tag{139}$$

$$Res_{z=z_2} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z_2} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} \tag{140}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}dx \\ &= 2\pi i\frac{1}{8}(e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{141}$$

Otra importante aplicación se encuentra en las integrales de Fourier:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos rx dx \tag{142}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin rx dx \tag{143}$$

con r real y positivo, entonces las dos integrales se pueden considerar como las partes imaginaria y real de la integral

$$\oint_\gamma f(z)e^{irz}dz \tag{144}$$

pues, integrando, como en el caso anterior, sobre un semicírculo en el plano superior, tenemos que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{irx}dx = 2\pi i \sum Res(f(z)e^{irz}) \tag{145}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos rx dx = -2\pi \sum \operatorname{Im} Res(f(z)e^{irz}) \tag{146}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin rx dx = 2\pi \sum \operatorname{Re} Res(f(z)e^{irz}) \tag{147}$$

Por ejemplo, evaluar las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rx}{k^2 + x^2} dx \tag{148}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin rx}{k^2 + x^2} dx \tag{149}$$

La función $e^{irz}/(k^2 + z^2)$ tiene solamente un polo en el semiplano superior, en $z = ik$ y por lo tanto

$$Res_{z=ik} \frac{e^{irz}}{k^2 + z^2} = \left. \frac{e^{irz}}{2z} \right|_{z=ik} = \frac{e^{-kr}}{2ik} \tag{150}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irx}}{k^2 + x^2} dx = 2\pi i \frac{e^{-kr}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-kr} \tag{151}$$

4.3.3 Problemas

1.- Evaluar las siguientes integrales:

i.- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$

ii.- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta} d\theta$

iii.- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx$

iv.- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$