

Variable Compleja

Hans Cristian Muller Santa Cruz

2000

Índice general

Prefacio	v
I. Variable Compleja	1
I.1. Los Números Complejos	1
I.1.1. El Plano Complejo \mathbb{C}	3
I.1.2. Conjugado de un número complejo	4
I.1.3. Módulo de un número complejo	5
I.1.4. Sustracción y División	5
I.1.5. Forma Polar	5
I.1.6. Topología del Plano Complejo \mathbb{C}	6
I.1.7. El plano complejo acabado $\bar{\mathbb{C}}$	6
I.2. Funciones Complejas	7
I.2.1. Representaciones Gráficas de Funciones Complejas	8
I.2.2. Funciones Complejas Remarcables	8
I.2.3. El Logaritmo Complejo	12
I.2.4. Funciones Trigonométricas Complejas	14
I.3. Funciones Diferenciables	15
I.3.1. Funciones Holomorfas	17
I.4. Funciones Conformes	18
I.4.1. Homografías	20
I.4.2. Representación Conforme	24
I.5. Integración Compleja	27
I.6. Un Teorema de Cauchy	36
I.7. Fórmulas Integrales de Cauchy	41
I.8. Series Enteras	43
I.8.1. Cálculos con Series Enteras	45
I.8.2. Teoremas de Unicidad y Prolongamiento Análítico	49
I.8.3. Otros Resultados de las Funciones Holomorfas	51
I.9. Series de Laurent	55
I.9.1. Puntos Singulares Aislados de Funciones Holomorfas	58
I.10. Residuos y Aplicaciones	60
I.10.1. Cálculo de Residuos	61
I.10.2. Cálculo de Integrales	63
I.10.3. Valor Principal de Cauchy	68
I.11. Funciones Meromorfas	69
I.11.1. Desarrollo en Fracciones Parciales de Funciones Meromorfas	70
I.11.2. Número de Ceros y Polos de Funciones Meromorfas	73

Índice de figuras

I.1.1.	Transformaciones de \mathbb{R}^2	2
I.1.2.	Proyección Estereográfica.	7
I.2.1.	Gráfica de los Grafos	8
I.2.2.	Gráfica Transformación	9
I.2.3.	Gráfica del Campo de Vectores	9
I.2.4.	Función Lineal no Nula	10
I.2.5.	Función Exponencial	11
I.2.6.	Imagen de una Banda	12
I.3.1.	Función continua, Cauchy-Rieman, pero no \mathbb{C} -diferenciable	16
I.4.1.	Ejemplo de Función Conforme	19
I.4.2.	Transformación de Cayley	24
I.4.3.	Representación conforme de \sin	26
I.8.1.	Polinomio de Taylor $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{z^{25}}{25}$ en \mathbb{R} y en \mathbb{C}	45
I.8.2.	Gráficas de parte real e imaginaria de $(z - 1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots \pm \frac{(z-1)^n}{n}$	46
I.8.3.	Composición de Series	47
I.8.4.	Principio del Prolongamiento Análítico	51
I.8.5.	Demostración Teorema de la Aplicación Abierta	54
I.11.1.	Mapas de $\cot z$ y $\csc z$	72
I.11.2.	Índice de Cauchy para $f(z) = \frac{z^2-4}{e^z-i}$	74

Prefacio

Capítulo I

Variable Compleja

En lo que concierne la teoría del análisis complejo, tres puntos de vista predominan en la actualidad:

- Integración Compleja (Cauchy 1814-1830).
- Aplicaciones holomorfas $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ (Tesis de Riemann 1851).
- Series enteras (Cauchy 1831-1846, Weirstraß).

Comenzaremos este capítulo por el cálculo diferencial y las funciones holomorfas según Riemann. Luego, seguiremos la evolución de Cauchy (integrales complejas, fórmula de Cauchy). Veremos que cada función holomorfa es analítica (admite un desarrollo en serie de potencias). Estas series simplifican la teoría (punto de vistas de Weirstraß),

I.1. Los Números Complejos

Si bien los números complejos son familiares para todos los que siguen este curso, se vio, por ejemplo, en el primer de año de Análisis, en esta sección abordaremos el plano complejo con una óptica geométrica, para comprender y asimilar la riqueza y potencia que tiene esta teoría.

Sabemos que el conjunto de los números reales \mathbb{R} provisto de la adición y la multiplicación es un cuerpo completo con un orden compatible con dichas operaciones. Geométricamente \mathbb{R} asociamos a una recta, que la llamamos recta real. Como es de conocimiento de todos, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0,$$

no tiene solución en \mathbb{R} . Nuestro objetivo será construir un cuerpo que contenga \mathbb{R} en el cual dicha ecuación tenga solución.

Como \mathbb{R} está asociado a una recta, vamos a construir un cuerpo que este asociado a un plano (real); ya que la extensión inmediata de una recta constituye un plano. Consideremos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

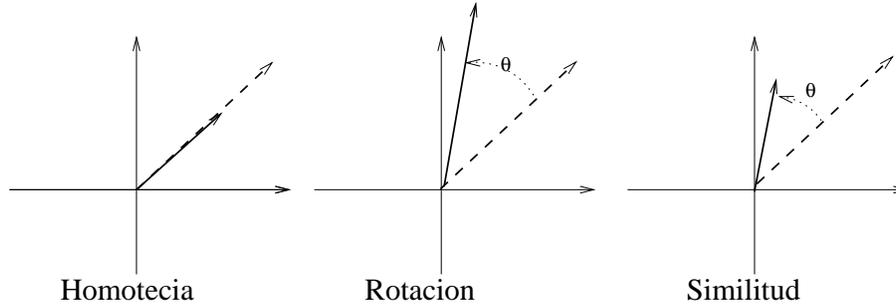
Este conjunto con la adición definida por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y la multiplicación por escalar

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

es un espacio vectorial real. En el curso de Geometría, se estudió con detalle las propiedades de los diferentes objetos y las transformaciones que les están asociadas.

Figura I.1.1: Transformaciones de \mathbb{R}^2

Para tener un cuerpo conmutativo, solamente nos falta definir una multiplicación, la cual provendrá de un tipo especial de transformaciones lineales del plano \mathbb{R}^2 ; más precisamente de aquellas transformaciones que conservan los ángulos en tamaño y orientación.

Definición I.1.1 Una **similitud directa**, en tanto que aplicación lineal, es una aplicación lineal $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $s = h_\lambda \circ r_\theta$, donde h_λ es la homotecia de razón λ ($\lambda > 0$) y r_θ es una rotación de ángulo θ .

En la figura I.1.1, tenemos una representación gráfica de una homotecia, una rotación y finalmente una similitud. Como se vio en el curso de Algebra Lineal es más comodo trabajar con las matrices asociadas (respecto a las bases canónicas). Recordemos que toda aplicación lineal está enteramente determinada por los elementos de las bases canónicas y que existe un isomorfismo natural entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices de 2×2 a coeficientes reales. En lo que sigue solamente consideremos como base la canónica o otra base ortonormal directa. Denotemos por H_λ la matriz asociada a la homotecia de razón $\lambda > 0$, h_λ ; R_θ la matriz asociada a la rotación r_θ . Se tiene:

$$H_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

por lo tanto, la matriz $S_{\lambda,\theta}$ asociada a la similitud $s_{\lambda,\theta} = h_\lambda \circ r_\theta$, está dada por

$$S_{\lambda,\theta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.1})$$

Una simple inspección da

$$\det S_{\lambda,\theta} = \lambda > 0.$$

Ejercicio.- Verificar que una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$, es la matriz asociada a una similitud directa.

Teorema I.1.1 El conjunto de las similitudes (directas) de \mathbb{R}^2 forman un grupo abeliano para la composición de aplicaciones.

Demostración.- Ejercicio.

□

Denotamos por $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}, 2)$ al grupo de las similitudes directas, que por cierto no solamente es un grupo abeliano para la composición de aplicaciones, sino también:

Teorema I.1.2 $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}, 2) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial real de dimensión 2 del espacio $\text{End}(\mathbb{R}^2)$ de las aplicaciones lineales en \mathbb{R}^2 .

Demostración.- Puesto que existe un isomorfismo natural (por la elección de las bases canónicas) entre $\text{End}(\mathbb{R}^2)$ y $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales de 2×2 es suficiente ver que las matrices asociadas a las similitudes más la matriz nula forman un subespacio vectorial. El resto lo dejamos como ejercicio. □

I.1.1. El Plano Complejo \mathbb{C}

Hemos visto que \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial para la adición, para que \mathbb{R}^2 tenga la estructura de un cuerpo conmutativo, solo falta dotarle de una multiplicación.

Consideremos la aplicación φ dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{S}_+(\mathbb{R}, 2) \cup \{0\} \\ (a, b) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando el ejercicio y la proposición precedentes, se demuestra (nuevamente otro ejercicio para el alumno) que φ es un isomorfismo de espacios vectoriales reales. Denotamos por $\pi : \mathcal{S}_+(\mathbb{R}, 2) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación inversa de φ . Se ve inmediatamente que

$$\pi \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a, b). \quad (\text{I.1.2})$$

Definamos la multiplicación en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera. Sean $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 , planteamos

$$z_1 \cdot z_2 = \pi(\varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)). \quad (\text{I.1.3})$$

Desarrollando (I.1.3), se obtiene explícitamente:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= \pi \left(\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \pi \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.1.4})$$

Remarca.- Utilizando la notación columna para elementos de \mathbb{R}^2 , la multiplicación de $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ puede expresarse como

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Teorema I.1.3 \mathbb{R}^2 con la adición usual y la multiplicación definida más arriba es un cuerpo conmutativo.

Demostración.- En efecto, \mathbb{R}^2 con la adición es un grupo abeliano, ya visto en un cursos anteriores. Remarquemos que el elemento cero es $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ y el opuesto de (a_1, a_2) , $-(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$.

$\mathbb{R}^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ es un grupo abeliano para la multiplicación, porque la multiplicación definida más arriba es una ley de composición interna, verificación simple, y por que $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}, 2)$ es un grupo para la multiplicación.

La distributividad de la multiplicación respecto a la adición está asegurada por que φ y ϕ son aplicaciones lineales. □

Definición I.1.2 \mathbb{R}^2 provistos de la adición y la multiplicación definida más arriba se llama cuerpo de los números complejos o plano complejo y se lo denota por \mathbb{C} .

Remarcas.-

1. $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$. Se define $i = (0, 1)$. Un pequeño cálculo da $i^2 = -1_{\mathbb{C}}$.
2. La inyección natural $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $j(a) = (a, 0)$ es compatible con la adición y la multiplicación, lo que hace que \mathbb{R} sea un subcuerpo de \mathbb{C} . En el lenguaje algebraico, esto se llama extensión de cuerpos.
3. En realidad $j(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$, pero para darle fluidez a la teoría, se acostumbra a suponer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, con lo que utilizamos los símbolos 1 y 0 para referirnos al uno y cero de \mathbb{R} o \mathbb{C} dependiendo el contexto. Es frecuente utilizar la notación

$$z = a + ib,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ para representar $z = (a, b)$. Este tipo de notación facilita los cálculos aritméticos en \mathbb{C} .

4. Si $z = (a, b) = a + ib$, $\Re z = a$ es la parte real de z , $\Im z = b$, la parte imaginaria de z . \mathbb{R} se lo conoce como el eje real del plano complejo y $i\mathbb{R} = \{ia | a \in \mathbb{R}\}$ el eje imaginario.
5. El algebra en \mathbb{C} es idéntica a la de \mathbb{R} , con además $i^2 = -1$.

I.1.2. Conjugado de un número complejo

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define $\bar{z} = a - ib$ el conjugado de z . Geométricamente, la acción de conjugar números complejos, corresponde a la simetría respecto al eje real. El conjugado satisface las siguientes propiedades.

Proposición I.1.1 *Se tiene:*

$$z + \bar{z} = 2\Re z, \tag{I.1.5}$$

$$z - \bar{z} = 2i\Im z, \tag{I.1.6}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2, \tag{I.1.7}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \tag{I.1.8}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \tag{I.1.9}$$

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}, \tag{I.1.10}$$

$$z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}, \tag{I.1.11}$$

$$-\bar{z} = \overline{(-z)}, \tag{I.1.12}$$

$$(\bar{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})}, \quad z \neq 0. \tag{I.1.13}$$

Demostración.- Ejercicio. □

I.1.3. Módulo de un número complejo

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Remarca.-** El módulo de z es lo mismo que la norma euclidiana de z visto como un elemento de \mathbb{R}^2 . Cuando $z \in \mathbb{R}$, el módulo es lo mismo que el valor absoluto de \mathbb{R} .

Proposición I.1.2 *El módulo verifica:*

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad (\text{I.1.14})$$

$$|\Re z| \leq |z|, \quad (\text{I.1.15})$$

$$|\Im z| \leq |z|, \quad (\text{I.1.16})$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (\text{I.1.17})$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (\text{I.1.18})$$

Demostración.- Ejercicio. □

I.1.4. Sustracción y División

Completando la construcción de los números complejos, la sustracción se la define como

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

La división se la define

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1(z_2)^{-1},$$

donde $z_2 \neq 0$. Utilizando la notación de fracciones, las reglas de cálculo para fracciones son válidas y su demostración es un simple ejercicio.

I.1.5. Forma Polar

Tradicionalmente, la forma polar de un número complejo es abordada como un tópico independiente. Sin embargo, en nuestra construcción hemos asociado a cada número complejo a una similitud de ángulo θ y razón r . Por consiguiente, si $z \neq 0$, se puede escribir como

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$|z| = r$, θ es único con una diferencia de $2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$

La forma polar es útil para realizar multiplicaciones y divisiones.

Proposición I.1.3 *Si*

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = |w|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

se tiene

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos(\theta + \vartheta) + i \sin(\theta + \vartheta)),$$

$$z/w = |z| \cdot |w| (\cos(\theta - \vartheta) + i \sin(\theta - \vartheta)),$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La última fórmula es conocida como Fórmula de Moivre

Demostración.- Ejercicio. □

I.1.6. Topología del Plano Complejo \mathbb{C}

El módulo $|\cdot|$ de \mathbb{C} es la norma euclidiana de \mathbb{R}^2 , los conceptos de convergencia, límites, conjuntos abiertos, cerrados, compactos, puntos aislados, puntos de acumulación, etc, son los mismos, que ya han sido vistos en el curso de Análisis de Primer Año.

Por otro lado, el módulo en \mathbb{C} tiene el mismo comportamiento del valor absoluto de \mathbb{R} en lo que respecta la multiplicación. Por lo tanto, se justifica recordar, complementar y aclarar algunos conceptos.

Las sucesiones $\{z_k\}$ con $z_k \in \mathbb{C}$ pueden ser vistas: como una sucesión propiamente compleja, o bien como dos sucesiones reales, $\{\Re z_k\}$ y $\{\Im z_k\}$. Por lo tanto, dependiendo la situación y el contexto, se debe utilizar el punto de vista que más convenga. Como \mathbb{R} es un cuerpo ordenado, se tiene el concepto de sucesiones monótonas y la divergencia por valores infinitos; en \mathbb{C} eso no es posible, sin embargo esos conceptos y sus consecuencias pueden ser aplicados por separado a la parte real y la parte imaginaria de la sucesión. Una definición que será útil posteriormente es la siguiente.

Definición I.1.3 Una sucesión $\{z_k\}$ en \mathbb{C} diverge por valores en el infinito, si la sucesión $\{|z_k|\}$ en \mathbb{R} diverge por valores en el infinito. Dicho de otra manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Los conceptos de sucesiones, series, vistos en el Primer Año de Análisis, como convergencia absoluta, serie productos se los amplía al caso complejo sin ningún problema. Solamente hay que remplazar el valor absoluto por el módulo. Por lo tanto, las reglas de cálculo, criterios de convergencia son válidos también para series complejas.

En lugar de hablar de bolas abiertas, en \mathbb{C} , se prefiere hablar de discos abiertos.

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

I.1.7. El plano complejo acabado $\bar{\mathbb{C}}$

En el curso de Análisis se definió la recta real acabada $\bar{\mathbb{R}}$, agregando dos elementos adicionales a \mathbb{R} ;

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

definiendo algunas operaciones con los nuevos elementos y los reales, prolongando la relación de orden.

El caso complejo tendrá un desarrollo bastante similar. Como motivación, consideremos la **proyección estereográfica**, que consiste en proyectar el plano complejo \mathbb{C} , sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con la proyección de centro el polo norte $(0, 0, 1)$. ver figura I.1.2. En la figura observamos que la imagen del punto $P' \in \mathbb{C}$ se proyecta sobre la esfera en el punto $P \in \mathbb{S}^2$. También remarcamos que esta proyección es inyectiva, pero no es sobreyectiva ya que el polo Norte no es imagen de ningún punto del plano complejo. Si queremos que la proyección esteográfica sea biyectiva, debemos agregar un elemento a \mathbb{C} ; por otro lado, no es difícil observar que N es el límite de la proyección, cuando $z \rightarrow \infty$.

Definición I.1.4 El plano complejo acabado es el conjunto

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

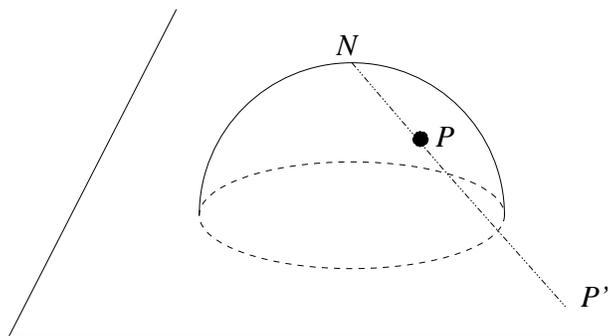
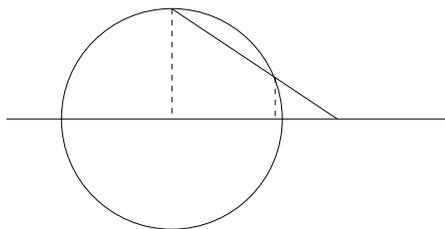


Figura I.1.2: Proyección Estereográfica.

Explicitemos la proyección estereográfica, utilizando un corte transversal, ver figura , relaciones de triángulos semejantes, se obtiene:

$$\pi : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{2\Re z}{|z|^2+1}, \frac{2\Im z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases}$$



Aparte de las operaciones heredadas de \mathbb{C} , sobre $\bar{\mathbb{C}}$ definimos:

$$\frac{a}{0}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \text{ si } a \neq \infty,$$

$$a \cdot \infty = \infty \text{ si } a \neq 0,$$

$$a + \infty = \infty.$$

Al igual que la recta acabada $\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{C}}$ ya no es un cuerpo.

Lo interesante de la proyección estereográfica es que se pueden dotar de operaciones internas a \mathbb{S}^2 a partir de las operaciones de $\bar{\mathbb{C}}$, de donde, si $\xi, \zeta \in \mathbb{S}^2$ se define

$$\xi + \zeta = \pi(\pi^{-1}(\xi) + \pi^{-1}(\zeta)),$$

$$\xi \cdot \zeta = \pi(\pi^{-1}(\xi) \cdot \pi^{-1}(\zeta)).$$

Ejercicio.- Explicitar analíticamente la adición y la multiplicación en la esfera.

Remarca.-En el curso de Topología, se dice que la proyección estereográfica compactifica \mathbb{C} agregando un elemento a \mathbb{C} , porque la esfera es compacta en \mathbb{R}^3 .

I.2. Funciones Complejas

El módulo $|\cdot|$ hace a \mathbb{C} un espacio normado con norma idéntica a la norma euclidiana de \mathbb{R}^2 ; por lo que, los conceptos de límite, continuidad, continuidad uniforme, convergencia simple de sucesiones de funciones, convergencia uniforme, etc son los mismos que en el Primer Año de Análisis y no es necesario repetirlos. Las novedades provendrán del cálculo diferencial e integral de funciones complejas.

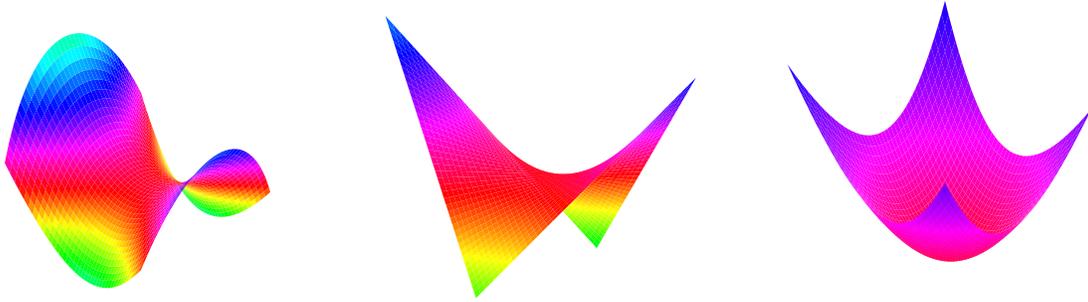


Figura I.2.1: Gráfica de los Grafos

Sin embargo, podemos remarcar que una función compleja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser vista como una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} f : U \subset \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) \end{array}$$

trivialmente, se tiene $\Re(f(z)) = u(x, y)$ y $\Im(f(z)) = v(x, y)$. De acuerdo a la necesidad, se puede jugar con diferentes puntos de vista equivalentes.

I.2.1. Representaciones Gráficas de Funciones Complejas

Para poder comprender la acción de una función compleja, es en muchos casos necesario visualizar gráficamente. Recordando los cursos de Cálculo, las gráficas de los grafos son recursos valiosos que permiten estudiar las funciones reales, pero en el caso de los grafos de funciones complejas no se los puede representar gráficamente, porque hacen parte de un espacio de cuatro dimensiones. Sin embargo tenemos los siguientes recursos para representar la función compleja en cuestión:

- Gráfica del grafo de la función $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde g es por ejemplo: la parte real de f , la parte imaginaria de f , el módulo de f .
- Gráfica de la transformación o mapeo. Util para entender la acción geométrica.
- Gráfica del campo de vectores asociado. Util en aplicaciones físicas.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(z) = (z + 0,2)^2$. En la figura I.2.1, vemos las gráficas de los grafos de $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ y $|f(z)|$. En la figura I.2.2, la gráfica de la transformación. Si un punto z_1 comienza a moverse a lo largo de una curva γ , entonces el punto imagen w_1 se moverá a lo largo de la curva $f(\gamma)$; si un punto z_2 está dentro una superficie H , entonces el punto imagen w_2 estará dentro una superficie $f(H)$. En la figura I.2.3 observamos la gráfica del campo de vectores asociado a la función $f(z)$.

I.2.2. Funciones Complejas Remarcables

Las funciones elementales estudiadas en los cursos de Cálculo y el Primer Año de Análisis tienen su prolongación respectiva a una función compleja. Esta prolongación es de tipo analítico, que será vista más adelante. Por el momento, nos contentaremos en conocer estas prolongaciones y adentrarnos al espíritu mismo de lo que significa prolongación.

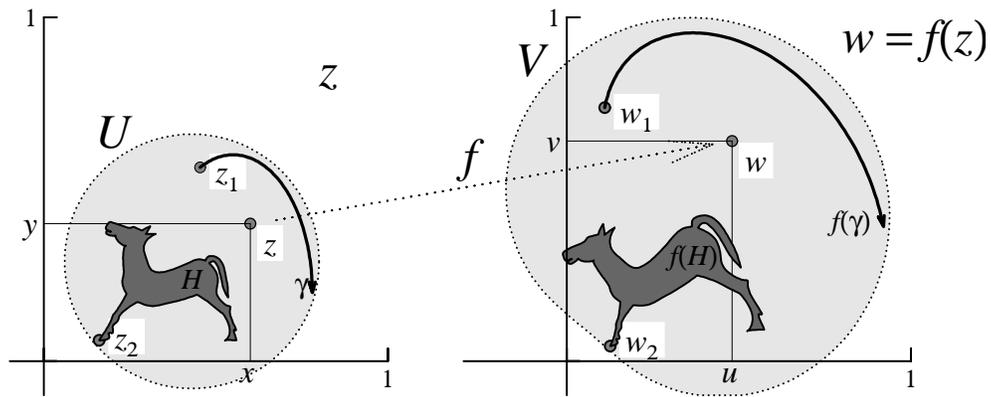


Figura I.2.2: Gráfica Transformación

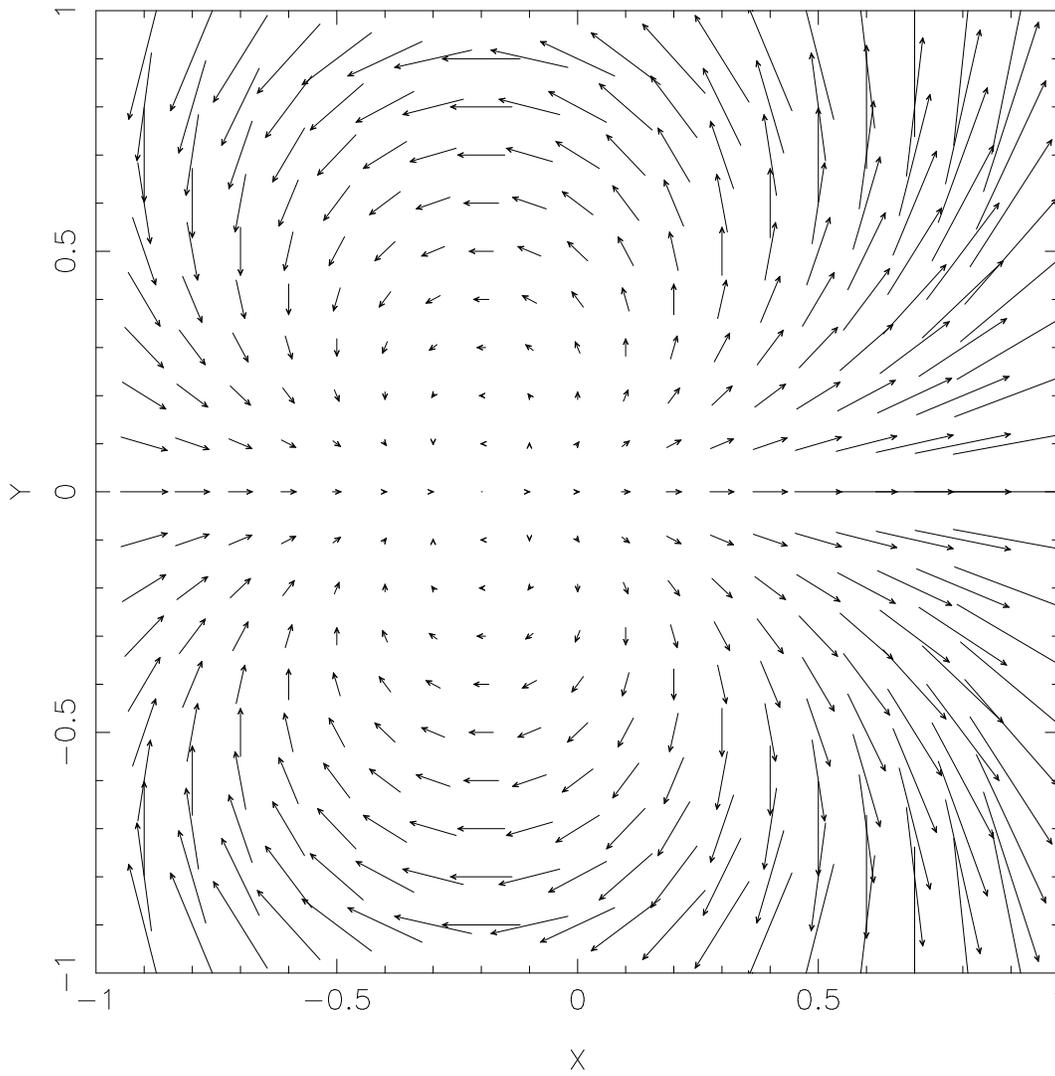


Figura I.2.3: Gráfica del Campo de Vectores

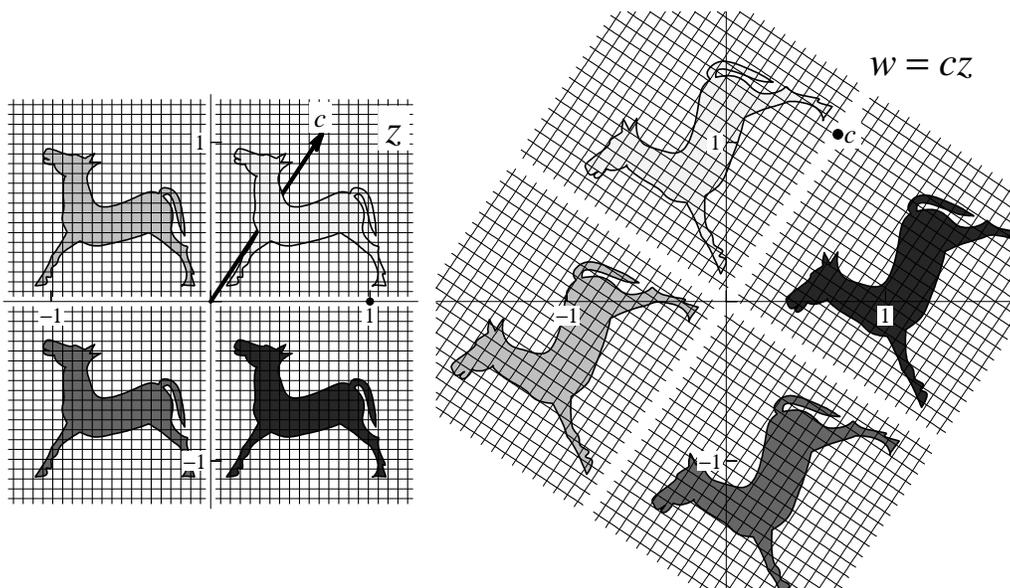


Figura I.2.4: Función Lineal no Nula

Funciones Polinomiales y Racionales

Al igual que en el caso real, una función $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es polinomial, si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, donde los $a_i \in \mathbb{C}$. Este tipo de funciones es siempre continua, porque solamente intervienen adiciones y multiplicaciones y las reglas de cálculo aseguran continuidad. **Ejemplo**

1. Consideremos la aplicación polinomial $f(z) = cz$ con $c \neq 0$. Esta función es una aplicación \mathbb{C} -lineal, y vista como una aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 es una similitud. Ver sección precedente y figura I.2.4.

En la construcción de los números complejos, hemos visto que la multiplicación está asociada a la composición de similitudes del plano real. Por lo tanto, las aplicaciones lineales complejas, desde el punto de vista real, son similitudes. La interrogante es cómo reconocer si una transformación lineal del plano real es una aplicación \mathbb{C} -lineal.

Proposición I.2.1 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal. Entonces f es \mathbb{C} lineal, si y solamente si f es una similitud o la aplicación nula.*

Demostración.- \Leftarrow ya visto.

\Rightarrow Si $f = 0$ está demostrado, sino la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con a, b, c, d no todos nulos. La imagen de $1 = (1, 0)$ es (a, c) y la imagen de $i = (0, 1)$ es (b, d) . Como f es \mathbb{C} lineal, se tiene

$$f(-1) = f(i^2) = if(i),$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} -a \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ b \end{pmatrix},$$

de donde $a = d$ y $b = -c$. Es decir f es una similitud.

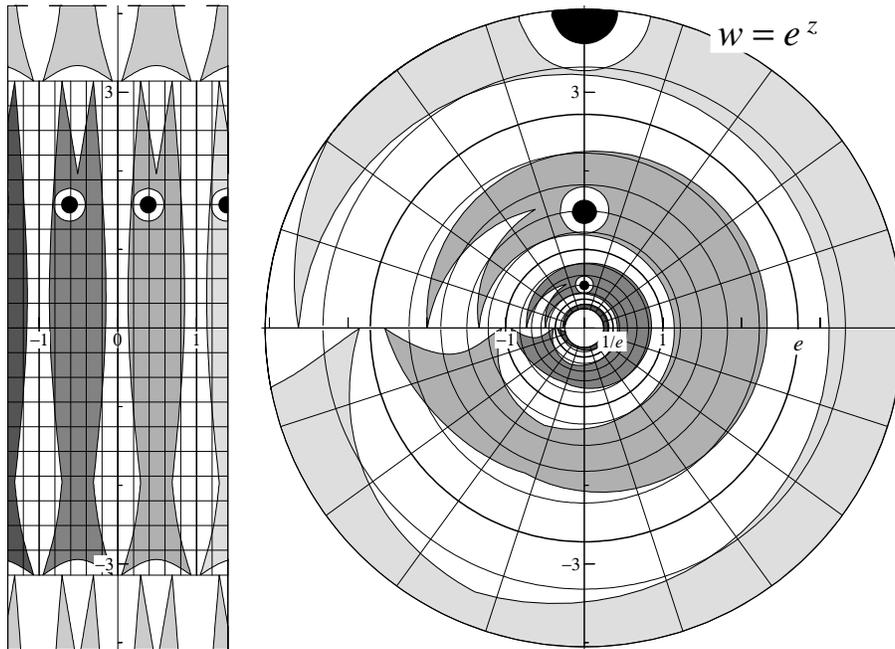


Figura I.2.5: Función Exponencial

□

Las funciones racionales son de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinomiales. Son continuas sobre \mathbb{C} , excepto en los puntos donde $q(z)$ se anula.

La Función Exponencial Compleja

Definición I.2.1 La función $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, está dada por

$$\exp_{\mathbb{C}}(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{\Re z}(\cos(\Im z) + i \sin(\Im z)).$$

Una verificación, nos muestra que si $z \in \mathbb{R}$, se tiene $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{R}}(z)$, por lo que podemos escribir simplemente \exp en lugar de $\exp_{\mathbb{C}}$ o $\exp_{\mathbb{R}}$, e interpretar \exp de acuerdo al contexto. En la figura I.2.5 vemos la acción de la función exponencial. Observando la definición de la exponencial, se ve que es una similitud de razón $e^{\Re z}$ y ángulo $\Im z$.

Proposición I.2.2 La función exponencial compleja satisface:

1. $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$,
2. $\exp(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.
3. $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ si y solamente si $z_1 - z_2 = 2i\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

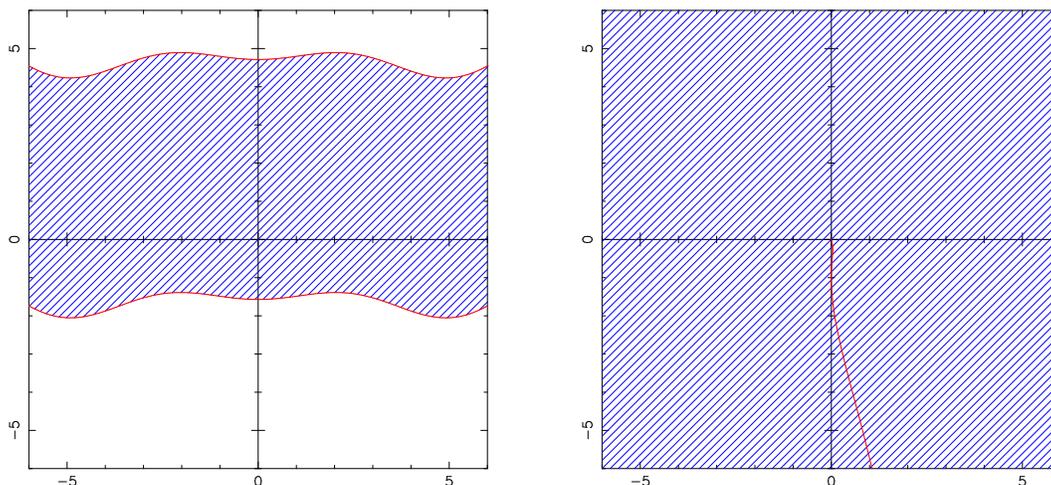


Figura I.2.6: Imagen de una Banda

Demostración.- Ejercicio.

□

La prolongación a \mathbb{C} de la exponencial, conserva casi todas las propiedades de la función exponencial real, excepto la inyectividad. En el caso real la inyectividad asegura la existencia de una inversa continua. En el caso complejo nos debemos arreglarnos para construir una función que cumpla el papel de función inversa, tal como se hizo con las funciones arc cos, arcsin en el Primer Curso de Análisis.

I.2.3. El Logaritmo Complejo

Como se ha visto más arriba, la función exponencial no es inyectiva. Por lo tanto si queremos construir una inversa debemos restringir \mathbb{C} a un dominio Ω donde \exp sea inyectiva, pero al mismo tiempo la imagen $\exp(\Omega)$ sea lo más grande posible. Por el punto 3 de la proposición I.2.1, Ω debe ser una banda de ancho $2i\pi$, sin los bordes, para la función inversa sea continua. La imagen del borde de Ω es una curva simple que une el origen con el infinito. Ver figura I.2.6. En consecuencia, sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una banda de ancho $2i\pi$ sin sus bordes. De donde $\exp : \Omega \rightarrow \mathbb{C} - l$ es biyectiva, donde l es una curva simple que une O con ∞ . Tenemos

$$\exp(z) = e^{\Re z} (\cos(\Im z) + i \sin(\Im z)) = w,$$

Pasando a los módulos, se obtiene

$$e^{\Re z} = |w|,$$

de donde $\Re z = \log_{\mathbb{R}}(|w|)$. La determinación de $\Im z$, pasa por la definición de una nueva función.

Definición I.2.2 Una **determinación del argumento** es darse una curva simple l que une O con ∞ y una función $\arg : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ continua tal que

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))), \quad \forall z \in \mathbb{C} - l.$$

Remarcas

1. Una determinación del argumento $\arg : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$ está enteramente determinada por el valor de $\arg(z_0)$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. La determinación principal del argumento es aquella donde

$$l =] - \infty, 0] \subset \mathbb{R} \text{ y } \arg(1) = 0.$$

3. A menos que se diga lo contrario, se toma la determinación principal del argumento.
 4. Si \arg_1 y \arg_2 y $z \in \mathbb{C}$ en el cual ambas determinaciones están definidas, entonces una simple verificación da $\arg_1(z) - \arg_2(z) = 2i\pi k$, con k entero.

Regresemos a la construcción de la inversa de \exp . Tenemos

$$\Im z = \arg(w),$$

donde $\arg : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{R}$ es una determinación del argumento.

Definición I.2.3 Una **determinación del logaritmo** es darse una determinación del argumento $\arg : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{R}$ y la función $\log_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \log_{\mathbb{R}}(|z|) + i \arg(z), \quad z \in \mathbb{C} - l.$$

Remarcas.-

1. La determinación principal del logaritmo, está dada por la determinación principal del argumento. A menos que se diga lo contrario, la opción por defecto es la determinación principal del logaritmo. La determinación principal prolonga al logaritmo real.
2. Para no recargar notación se puede utilizar \log para denotar la determinación del logaritmo y o el logaritmo real. Todo depende del contexto.

Proposición I.2.3 Una determinación del logaritmo $\log : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$, verifica:

1. $\exp(\log z) = z, \forall z \in \mathbb{C} - l$.
2. $\log(\exp(z)) = z + i2\pi k, k$ entero.

Demostración.- Ejercicio.

□

Potencias

Recordamos:

$$z^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$z^{-n} = \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z}}_{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, se define

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z).$$

Se puede mostrar que esta definición es compatible con otras definiciones sobre potencias. Por ejemplo cuando α es entero.

Remarca.- Si bien z^α está definida sobre un conjunto $\mathbb{C} - l$, se puede prolongar a algunos puntos de l por continuidad.

Ejemplo

3.- Veamos el caso $\alpha = 1/2$. Tenemos

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(1/2 \log(z)) &&= \exp(1/2 \log |z| + (1/2)i \arg(z)) \\ &= \sqrt{|z|} (\cos((1/2) \arg(z)) + i \sin((1/2) \arg(z))). \end{aligned}$$

Ahora bien $\lim_{z \rightarrow 0} z^{1/2} = 0$, de donde podemos prolongar la función $z^{1/2}$ al punto $z = 0$, planteando $0^{1/2} = 0$.

Funciones Exponenciales

Siguiendo la misma línea del Primer Año de Análisis, definimos

$$a^z = \exp(z \log a),$$

donde \log es una determinación del logaritmo, (para la cual el valor de $\log a$ existe).

Remarcas.-

1. A menudo se encuentran expresiones de la forma e^z . Nosotros interpretaremos como

$$e^z = \exp(z).$$

2. Las definiciones del argumento, logaritmo, potencia pasan por las definiciones de determinación. Es decir, para obtener funciones continuas, es necesario quitar del plano complejo \mathbb{C} una curva simple que une el origen con el infinito. Sin embargo, mediante las **superficies de Riemann** es posible construir estas funciones, sin necesidad de hacer cortes en el plano Complejo.

I.2.4. Funciones Trigonométricas Complejas

Definición I.2.4

$$\begin{aligned} \sin_{\mathbb{C}} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos_{\mathbb{C}} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \tan_{\mathbb{C}} z &= \frac{\sin_{\mathbb{C}} z}{\cos_{\mathbb{C}} z}, \\ \cot_{\mathbb{C}} z &= \frac{\cos_{\mathbb{C}} z}{\sin_{\mathbb{C}} z}, \\ \sec_{\mathbb{C}} z &= \frac{1}{\cos_{\mathbb{C}} z}, \\ \csc_{\mathbb{C}} z &= \frac{1}{\sin_{\mathbb{C}} z}. \end{aligned}$$

Proposición I.2.4 Las funciones $\sin_{\mathbb{C}}$ y $\cos_{\mathbb{C}}$ verifican:

- i) $\sin_{\mathbb{C}}(z) = \sin_{\mathbb{R}}(z)$, $\cos_{\mathbb{C}}(z) = \cos_{\mathbb{R}}(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$.
- ii) $\sin_{\mathbb{C}}^2(z) + \cos_{\mathbb{C}}^2(z) = 1$.

Demostración.- Ejercicio. □

Como las funciones trigonométricas complejas son prolongaciones de las funciones trigonométricas reales, utilizaremos los símbolos usuales para identificarlas. Más todavía las funciones trigonométricas conservan propiedades de aditividad, etc.

Funciones Trigonométricas Inversas

En lugar de hablar de funciones trigonométricas inversas, es preferible hablar de determinaciones de funciones trigonométricas inversas. Veremos más adelante.

I.3. Funciones Diferenciables

Como para las funciones reales, se tiene para las funciones complejas varias maneras de definir la diferenciabilidad de una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Nosotros utilizaremos:

Definición I.3.1 Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ abierto, es diferenciable en el punto $z_0 \in U$, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad (\text{I.3.1})$$

donde $f'(z_0) \in \mathbb{C}$. O bien

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \rho(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad (\text{I.3.2})$$

con $\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z, z_0) = 0$.

Ambas definiciones son útiles. La primera tiene una óptica calculista, mientras que la segunda tiene una óptica geométrica.

En la definición (I.3.2), la derivada $f'(z_0)$ aparece como una aplicación \mathbb{C} -lineal. Por otro lado, si vemos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para que f sea \mathbb{R} -derivable en (x_0, y_0) , se debe tener

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \|(x - x_0, y - y_0)\| r((x, y), (x_0, y_0)) \quad (\text{I.3.3})$$

con $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} r((x, y), (x_0, y_0)) = (0, 0)$. Escribiendo $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, se tiene

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Utilizando la proposición (I.2.1), se tiene el:

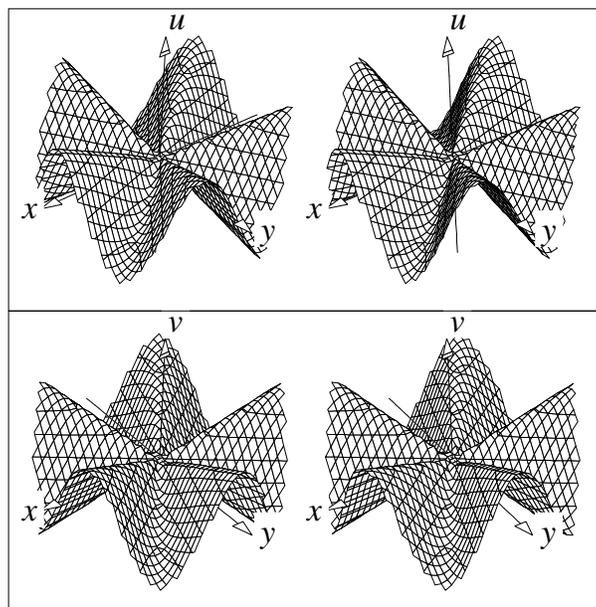


Figura I.3.1: Función continua, Cauchy-Riemann, pero no \mathbb{C} -diferenciable

Teorema I.3.1 (ecuaciones Cauchy-Riemann) Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, U abierto de \mathbb{C} . Entonces f es \mathbb{C} derivable en $z_0 \in U$, si y solamente si f es \mathbb{R} -derivable en z_0 y $f'(z_0)$ es \mathbb{C} -lineal, si y solamente si f es \mathbb{R} -derivable en z_0 y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann} \quad (\text{I.3.4})$$

Corolario I.3.1 Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Si $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen en un vecindario de z_0 , son continuas en z_0 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces f es \mathbb{C} -derivable en \mathbb{C} .

Demostración.- Ejercicio. □

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann por si solas no aseguran la \mathbb{C} diferenciabilidad.

Ejemplo

1. La función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

es continua, tiene las derivadas parciales respecto a x e y y satisface en $z = 0$ las condiciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, no es \mathbb{C} -diferenciable. Ver figura I.3.1.

2. La función exponencial \exp es \mathbb{C} -diferenciable en todo \mathbb{C} . En efecto, $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ son funciones cuyas derivadas parciales existen y son continuas. Además

$$\exp'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

satisface Cauchy-Riemann. Por lo tanto

$$\exp'(z) = \exp(z).$$

Se tiene las mismas reglas de cálculo para la diferenciación de funciones complejas; es decir, suma de funciones, producto de funciones, composición de funciones, etc.

I.3.1. Funciones Holomorfas

Definición I.3.2 Una función que es \mathbb{C} -diferenciable en un abierto U se llama **holomorfa** en U . Una función es **holomorfa** en un punto z_0 si es holomorfa en un vecindario $B(z_0, \epsilon)$.

Proposición I.3.1 Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ abiertos, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que existe $g : \Omega' \rightarrow \Omega$ con $g \circ f = id_{\Omega}$ y $f \circ g = id_{\Omega'}$. Si además g es \mathbb{R} -derivable, entonces g es holomorfa y

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)},$$

en particular $f'(a) \neq 0$, para todo $a \in \Omega$.

Demostración.- La derivada de la composición de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 da

$$g'_{f(a)} f'_a = I_{\mathbb{R}^2}.$$

Por lo tanto f'_a y $g'_{f(a)}$ son inversibles en tanto que aplicaciones lineales del plano real. Como f'_a es \mathbb{C} -lineal, es una similitud. Las similitudes forman un grupo, por lo que, $g'_{f(a)}$ es también una similitud y por lo tanto \mathbb{C} -lineal. En el lenguaje complejo esto se traduce a

$$g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1.$$

□

Ejemplo

3.- Sea $\log : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$ una determinación del logaritmo. Planteando $\Omega' = \mathbb{C} - l$ y $\Omega = \log(\Omega')$, considerando la función exponencial \exp , mostrando que \log es \mathbb{R} -diferenciable (que dejamos como ejercicio), se tiene que \log es holomorfa y

$$\log' z = \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}.$$

4.- Consideremos z^α . Se tiene

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z),$$

composición de funciones holomorfas, luego holomorfa. Determinemos su derivada.

$$z^{\alpha'} = \exp'(\alpha \log z)(\alpha \log z)' = \alpha \exp(\alpha \log z) \frac{1}{z} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

La tabla de derivadas de las funciones complejas es muy similar a la tabla de derivadas de las funciones reales.

Proposición I.3.2 Sea $\gamma :]a, b[\rightarrow \Omega$, diferenciable, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

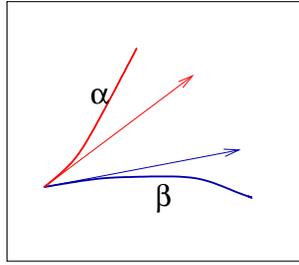
donde $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$.

Demostración.- Ejercicio. □

I.4. Funciones Conformes

Suponemos conocidos los conceptos de ángulo orientado, Recordemos el concepto de ángulo orientado entre curvas.

Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continuamente derivables. Suponemos $\alpha'(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$ y $\alpha(0), \beta(0) = a$, entonces por definición



$$\angle(\alpha, \beta, a) = \angle(\alpha'(0), \beta'(0)) \quad (\text{I.4.1})$$

Definición I.4.1 $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, U abierto, es conforme, si f es \mathbb{R} -derivable y si para todo $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$ continuamente derivable con $\alpha(0) = \beta(0) = a \in U$ y $\alpha'(0), \beta'(0) \neq 0$, se tiene

$$\angle(\alpha, \beta, a) = \angle(f \circ \alpha, f \circ \beta, f(a)).$$

Remarca.- La definición de aplicación conforme, implica automáticamente que f'_a es inversible para todo $a \in U$, sino no se podría medir los ángulos entre las curvas imágenes.

Como ejemplo de aplicaciones lineales que son conformes, tenemos las similitudes. La pregunta natural que surge, es saber si hay otras aplicaciones lineales que conservan los ángulos en medida y orientación.

Proposición I.4.1 $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isomorfismo lineal. A respecta los ángulos en tamaño y orientación, si y solamente si A es una similitud.

Demostración.- \Leftarrow ya visto.

\Rightarrow . La matriz asociada a la aplicación lineal es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Consideremos los vectores ortonormales $(1, 0)$ y $(0, 1)$, sus imágenes por A son (a, c) y (b, d) que son ortogonales por hipótesis, de donde

$$ab + cd = 0.$$

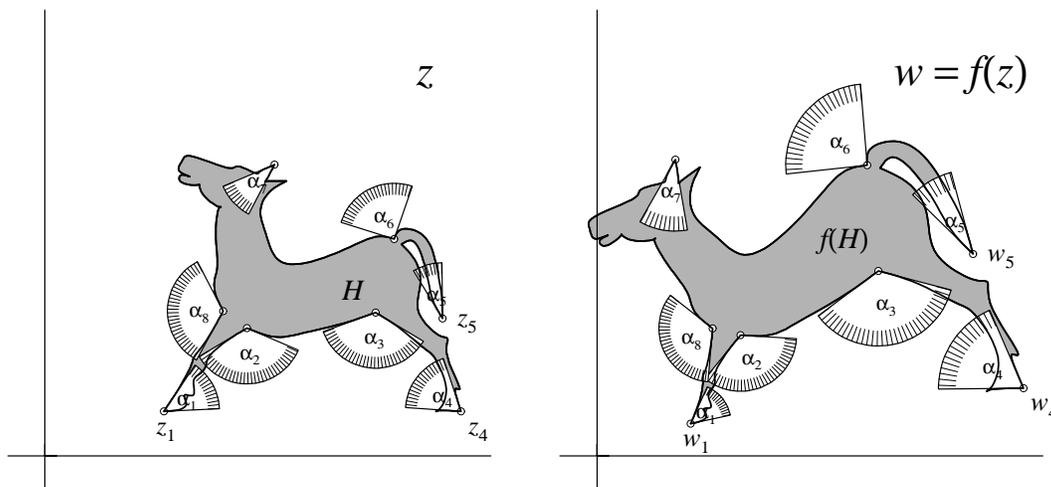


Figura I.4.1: Ejemplo de Función Conforme

Escribiendo esta última condición como

$$\det \begin{pmatrix} a & -d \\ c & b \end{pmatrix} = 0,$$

deducimos que (a, c) y $(-d, b)$ son linealmente independientes, por lo tanto

$$\begin{aligned} -d &= \lambda a \\ b &= \lambda c \end{aligned}$$

La matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & \lambda c \\ c & -\lambda a \end{pmatrix}.$$

Como A conserva la orientación, se tiene $\det A > 0$, de donde $\lambda < 0$. Finalmente viendo las imágenes de $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, se tiene que $(a + \lambda c, c - \lambda a)$ y $(-a + \lambda c, -c - \lambda a)$ son ortogonales, lo que se traduce

$$-a^2 + \lambda^2 c^2 - c^2 + \lambda^2 a^2 = (\lambda^2 - 1)(a^2 + c^2) = 0,$$

de donde $\lambda = -1$. La aplicación lineal A es efectivamente una similitud.

□

Teorema I.4.1 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conforme, si y solamente si f es holomorfa y $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in U$.

Demostración.- f es conforme, si y solamente si f'_a respecta los ángulos en sentido y orientación $\forall a \in U$; si y solamente si f'_a es un isomorfismo \mathbb{C} -lineal; si y solamente si f es holomorfa y $f'(a) \neq 0 \forall a \in \mathbb{C}$.

□

En la figura I.4.1, se observa la acción de la aplicación $f(z) = (z + 0,2)^2$, apreciando la conservación de los ángulos en tamaño y sentido.

Como un ejemplo de familia de funciones conformes estudiaremos con más detalle las homografías.

I.4.1. Homografías

Definición I.4.2 Una transformación homográfica es una expresión de la forma

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarcamos que las homografías pueden prolongarse al plano complejo acabado $\bar{\mathbb{C}}$ así

$$w : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq d/c \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \\ \infty & \text{si } z = d/c. \end{cases}$$

Por otro lado, una homografía, puede ser inducida por una matriz de 2×2 invertible

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow w_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{C}} \\ (u_1, u_2) & \longmapsto & \frac{u_1}{u_2} = z \\ \downarrow A \quad \det A \neq 0 & & \downarrow w_A(z) \\ \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{C}} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \frac{v_1}{v_2} = z \end{array}$$

Es facil verificar que

$$w_A = w_{A'} \iff A = \lambda A', \text{ con } \lambda \neq 0. \quad (\text{I.4.2})$$

Proposición I.4.2 Se tiene las siguientes propiedades:

1. La composición de transformaciones homográficas es una transformación homográfica.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ induce } w_A \\ A' \text{ induce } w_{A'} \end{array} \right\} \Rightarrow A'A \text{ induce } w_{A'} \circ w_A.$$

2. w_A es inversible y su inversa $w_{A^{-1}}$.

Demostración.- El punto (1), sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$w_A = \frac{az + b}{cz + d}, \quad w_{A'} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} w_{A'} \circ w_A(z) &= w_{A'} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \\ &= \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{(a'a+b'c)z + (a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z + (c'b+d'd)} = w_{A' \circ A}(z). \end{aligned}$$

El punto (2), es consecuencia de $w_{A \circ A^{-1}} = w_I = w_A \circ w_{A^{-1}}$.

□

Como consecuencia directa de la última proposición, el conjunto de las homografías es un subgrupo de las funciones biyectivas de \mathbb{C} en \mathbb{C} , que contiene otros subgrupos de transformaciones del plano complejo.

Proposición I.4.3 *Una homografía puede escribirse como composición de:*

- *Similitudes* $z \rightarrow az$, $a \neq 0$.
- *Traslaciones* $z \rightarrow z + c$.
- *Inversiones complejas* $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

Demostración.- Consideremos una homografía

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

ésta se puede escribir como:

$$w(z) = A + \frac{B}{cz + d},$$

con $A, B \in \mathbb{C}$. Por consiguiente, $w = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, donde

$$\begin{aligned} f_1(z) &= cz \text{ similitud,} \\ f_2(z) &= z + b \text{ traslación,} \\ f_3(z) &= \frac{1}{z} \text{ inversión compleja,} \\ f_4(z) &= Bz \text{ similitud,} \\ f_5(z) &= z + A \text{ traslación.} \end{aligned}$$

□

Teorema I.4.2 *Una homografía envía circunferencias y rectas sobre circunferencias o rectas.*

Demostración.- Por la proposición que precede, es suficiente mostrar que la inversión compleja envía circunferencias y rectas sobre circunferencias o rectas; ya que las similitudes y traslaciones conservan las rectas y circunferencias.

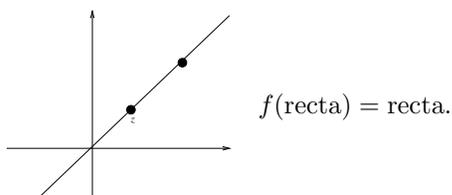
Como $z \rightarrow \bar{z}$ es una simetría respecto a la recta real \mathbb{R} , es suficiente mostrar el teorema para la función $z \rightarrow 1/\bar{z}$.

Ahora bien,

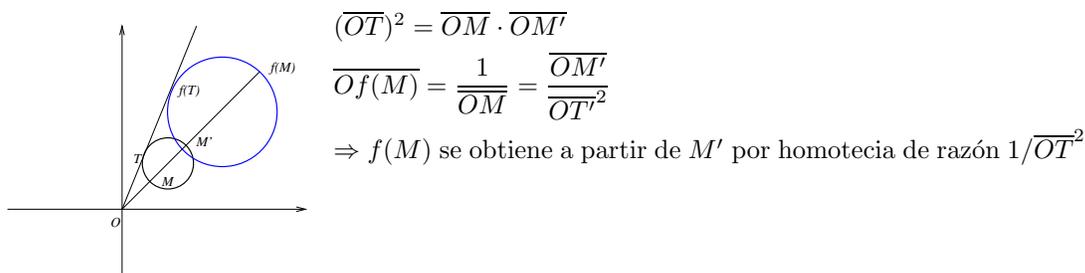
$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2};$$

distinguimos los siguientes casos:

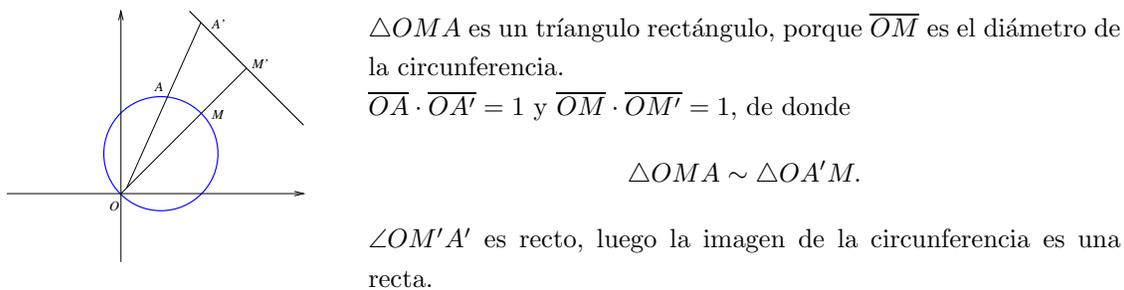
i) Recta por el origen



ii) Origen fuera de la circunferencia.



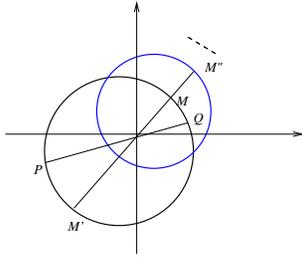
iii) Circunferencia que pasa por el origen.



iv) Recta que no pasa por el origen.

$z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$ es biyectiva, aplicar el caso iii).

v) Origen en el interior de la circunferencia.



Fijamos Q , tenemos $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \lambda$, también $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \lambda$
 $f(M) = M''$, $\overline{OM} \cdot \overline{OM''} = 1$, de donde

$$\overline{OM''} = \frac{1}{\lambda} \overline{OM'}.$$

De donde $f(M) = -\lambda M'$.

□

Proposición I.4.4 Sean z_1, z_2, z_3 elementos distintos de $\bar{\mathbb{C}}$ y z'_1, z'_2, z'_3 otra terna de elementos distintos de $\bar{\mathbb{C}}$. Entonces, existe una sola transformación homográfica w tal que

$$w(z_i) = w(z'_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Demostración.- Primero, vamos a mostrar el caso en que $z'_1 = 1, z'_2 = 0$ y $z'_3 = \infty$, se tiene tres situaciones:

i) $z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty$ y $z_3 \neq \infty$

$$w(z) = \frac{\frac{z-z_2}{z-z_3}}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}}.$$

ii) $z_1 = \infty$

$$w(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}.$$

iii) $z_2 = \infty$

$$w(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}$$

iv) $z_3 = \infty$

$$w(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Para la existencia en el caso general, consideramos las homografías:

$$\begin{aligned} w & : z_1, z_2, z_3 \longrightarrow 1, 0, \infty \\ w' & : z'_1, z'_2, z'_3 \longrightarrow 1, 0, \infty \end{aligned}$$

de donde $(w')^{-1} \circ w$ es la homografía pedida.

Para la unicidad, mostraremos primero que si $w(0) = 0, w(1) = 1$ y $w(\infty) = \infty$, entonces $w = id$. En efecto, la homografía puede escribirse

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

para $z = 0$, se tiene $b/d = 0$, por lo tanto $b = 0$, Para $z = \infty$, se tiene $a/c = \infty$, de donde $c = 0$. Por último, $w(1) = a/d = 1$, tomando $d = 1$, se tiene

$$w(z) = z.$$

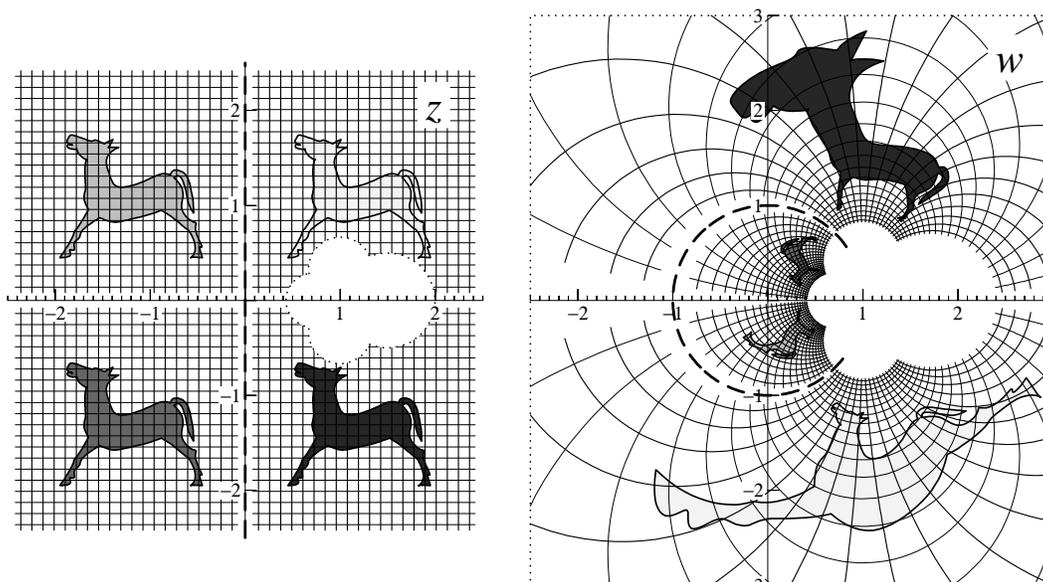


Figura I.4.2: Transformación de Cayley

Ahora veamos el caso general. Sean $w, w' : z_1, z_2, z_3 \rightarrow z'_1, z'_2, z'_3$ dos homografías. Consideremos las homografías: $\tilde{w} : 0, 1, \infty \rightarrow z_1, z_2, z_3$ y $\hat{w} : 0, 1, \infty \rightarrow z'_1, z'_2, z'_3$. Por consiguiente las homografías

$$\begin{aligned}\hat{w} \circ w \circ \tilde{w} &: 0, 1, \infty \rightarrow 0, 1, \infty. \\ \hat{w} \circ w' \circ \tilde{w} &: 0, 1, \infty \rightarrow 0, 1, \infty.\end{aligned}$$

de donde $\hat{w} \circ w \circ \tilde{w} = id$ y $\hat{w} \circ w' \circ \tilde{w} = id$, que escrito de otra forma

$$w = \hat{w}^{-1} \circ \tilde{w}^{-1} = w'.$$

□

Ejemplo

1. Consideremos la transformación de Cayley

$$w(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

función ilustrada en la figura I.4.2

La acción de esta transformación en el plano complejo es convertir el eje imaginario en la circunferencia unitaria y vice-versa.

I.4.2. Representación Conforme

Existen varios problemas de representación conforme, entre los cuales tenemos:

1. Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, inyectiva y Ω abierto, determinar $f(\Omega)$.

Para ilustrar este problema, estudiaremos un problema modelo.

Consideremos $\Omega = \{z \mid \Re z < \pi, \Im z > 0\}$ y $f(z) = \sin z$.

La restricción de $\sin z$ a esta región la convierte en una función inyectiva y conforme. En efecto

$$\sin z_1 = \sin z_2 \iff \sin z_1 - \sin z_2 = 0 \iff \cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) = 0;$$

de donde $\cos(\frac{z_1+z_2}{2}) = 0$ o $\sin(\frac{z_1-z_2}{2}) = 0$. Dejamos al estudiante, la verificación de:

$$\begin{aligned}\sin z = 0 &\iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \cos z = 0 &\iff z = \frac{\pi}{2}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sin z_1 = \sin z_2 \iff \begin{cases} z_1 - z_2 = 2\pi k, \\ \text{o} \\ z_1 + z_2 = \pi(2k + 1) \end{cases} \quad (\text{I.4.3})$$

La equivalencia (I.4.3) nos asegura que la restricción de \sin a la semibanda superior Ω es inyectiva. Por otro lado, en el interior de la banda $\sin z$ es conforme, por que $\cos z \neq 0$, para todo $z \in \Omega$.

Ahora bien, la función $\sin z$, en particular la restricción de $\sin z$ sobre Ω , es la composición de cuatro funciones:

$$\begin{aligned}f_1(z) &= iz, \\ f_2(z) &= e^z, \\ f_3(z) &= z - \frac{1}{z}, \\ f_4(z) &= \frac{1}{2i}z.\end{aligned}$$

El comportamiento de $\sin z$, será analizado a partir del comportamiento de cada una de estas funciones. Denotamos $\Omega_1 = f_1(\Omega)$, como f_1 es una rotación de un ángulo recto, deducimos inmediatamente

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| < \pi \text{ y } \Re z < 0\}$$

Denotamos $\Omega_2 = f_2(\Omega_1)$, un simple ejercicio mostrará que

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} -]-1, 0].$$

Denotamos $\Omega_3 = f_3(\Omega_2)$. Como no tenemos una idea clara de la acción de f_3 sobre Ω_2 , determinaremos Ω_3 conociendo su borde a partir de la acción de f_3 sobre el borde de Ω_2 . El borde de Ω_2 o frontera es la unión de la circunferencia unitaria y el intervalo $[-1, 0]$. Tenemos $f_3([-1, 0]) = [0, +\infty[$ y parametrizando la circunferencia con e^{it} , obtenemos $f_3(e^{it}) = e^{it} - e^{-it}$, por lo que $f_3(e^{it}) = 2i \sin t$. En consecuencia

$$\Omega_3 = \mathbb{C} - ([0, +\infty[\cup 2i[-1, 1]).$$

Denotando $\Omega_4 = f_4(\Omega_3)$, obtenemos finalmente que

$$\sin(\Omega) = \Omega_4 = \mathbb{C} - ([-1, 1] \cup i] - \infty, 0]).$$

En la figura I.4.3 observamos la acción de la composición de las cuatro funciones que dan $\sin z$.

- Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ holomorfa y biyectiva, determinar la función inversa. Consideremos el problema modelo, analizar la determinación

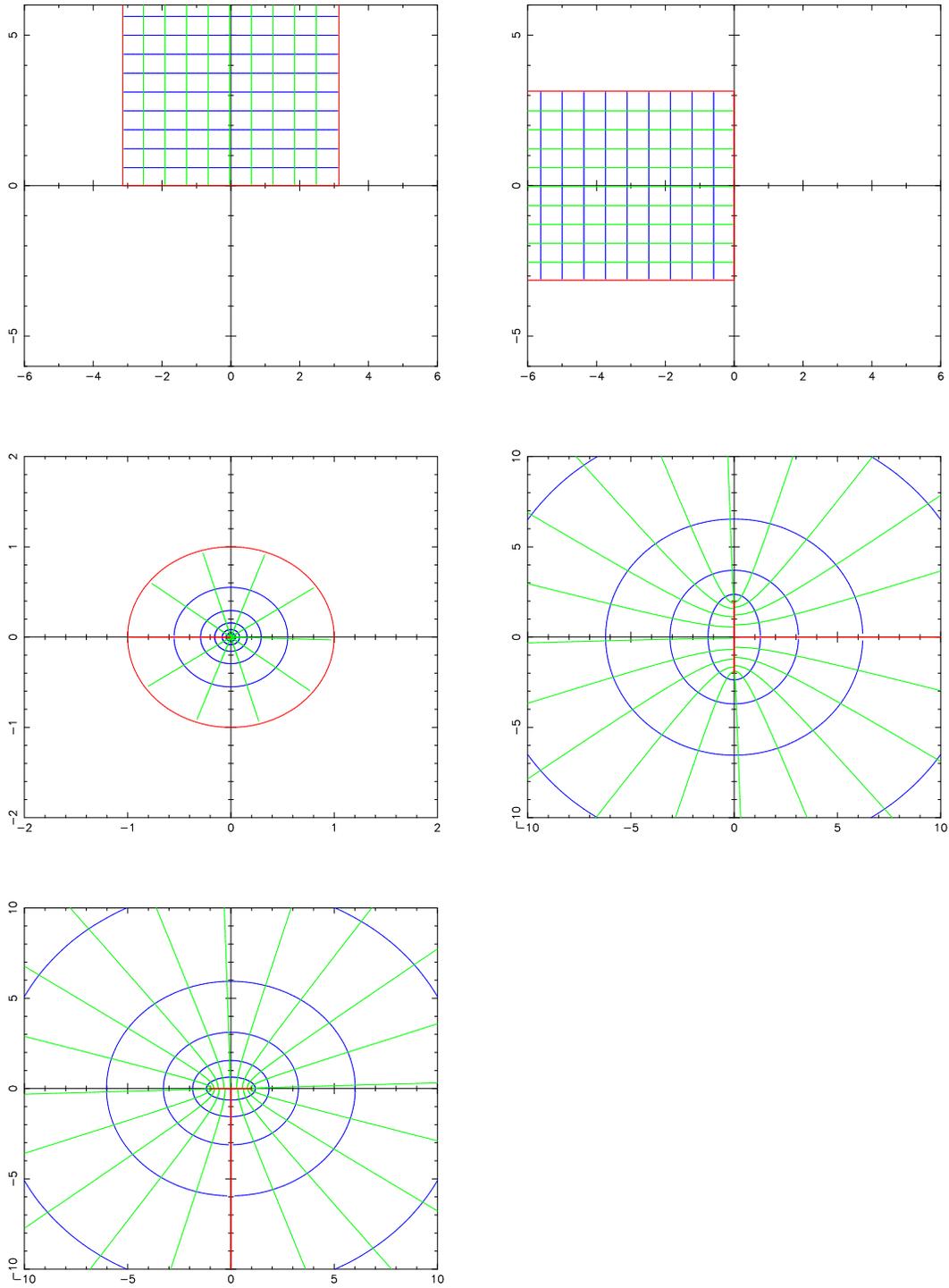
$$\arcsin : \mathbb{C} - ([-1, 1] \cup i] - \infty, 0]) \rightarrow \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| < \pi \text{ e } \Im z > 0\}.$$

Por lo hecho en (1), tenemos

$$\arcsin = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}.$$

Explicitemos, cada una de estas funciones. Facilmente

$$f_4^{-1}(z) = 2iz.$$

Figura I.4.3: Representación conforme de \sin

Ahora, $f_3(w) = w - 1/w = z$, de donde $w^2 - wz - 1 = 0$, ecuación polinomial de segundo grado. Esta ecuación tiene dos raíces: w_1 y w_2 que satisfacen $w_1 + w_2 = z$ y $w_1 w_2 = -1$. Puesto que $f_3 : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} -]-1, 0] \rightarrow \mathbb{C} - ([0, +\infty[\cup 2i[-1, 1])$ se debe elegir aquella raíz w_i que satisfice $|w_i| < 1$. Un simple ejercicio con los módulos nos conduce a que existe a lo más una raíz con esta propiedad.

Explicitemos f_3^{-1} , aplicando la fórmula cuadrática, obtenemos

$$w = \frac{z - \sqrt{z^2 + 4}}{2},$$

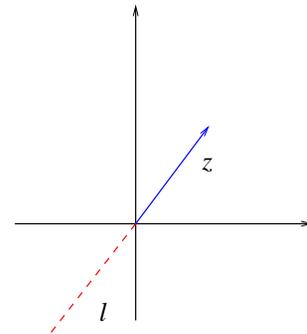
eligiendo como determinación de

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$$

donde $l = [0, +\infty) \cdot z$ y $|\arg z| < \pi$. Una verificación sobre la esta determinación dará $|w| < 1$. Por lo tanto

$$f_3^{-1} = \frac{z - \sqrt{z^2 + 4}}{2},$$

con $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} - l \rightarrow \mathbb{C}$, $l = [0, +\infty) \cdot z$ y $|\arg z| < \pi$.



Si bien, f_3^{-1} ha sido explicitada en función de una determinación de la raíz cuadrada que depende de z , el teorema de la función inversa, ver parte A de este curso de Análisis de segundo año y la proposición I.3.5, aseguran que f_3^{-1} sea holomorfa. Trabajemos con $f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$, tenemos

$$f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(z) = \frac{2iz - \sqrt{-4z^2 + 4}}{2}$$

Para no recargar y confundir determinaciones de la raíz cuadrada, podemos elegir una nueva determinación de la raíz cuadrada y tener una expresión simplificada

$$f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(z) = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

donde $\sqrt{\cdot}$ es una determinación en la cual $\sqrt{1 - z^2}$ está definida y además $iz + \sqrt{1 - z^2}$ está en el disco unitario.

$f_2^{-1}(z) = \log z$ con \log como determinación principal.

$f_1^{-1}(z) = z/i$

Por lo tanto, podemos explicitar esta determinación de arcsin

$$\arcsin(z) = \frac{1}{i} \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

I.5. Integración Compleja

Definición I.5.1 Un arco simple es una aplicación de clase C^1 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ e inyectiva.

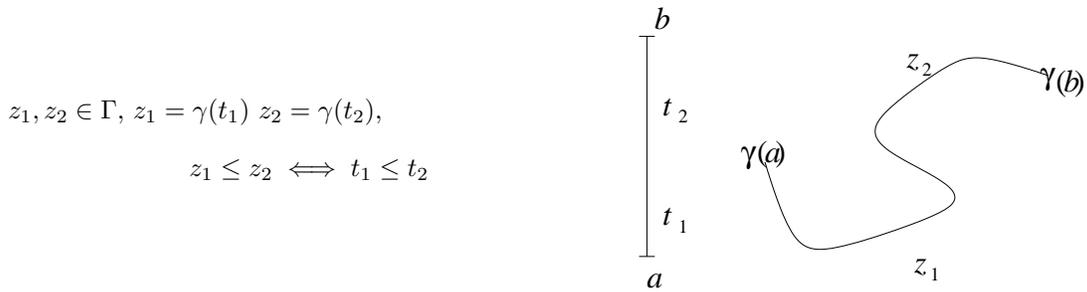
Definición I.5.2 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ arco simple, se define

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (\text{I.5.1})$$

Si escribimos $f(z) = u(z) + iv(z)$ y $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, la relación (I.5.1), se convierte en

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt + i \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t)) dt \quad (\text{I.5.2})$$

Remarca.- Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco simple. Sobre $\Gamma = \gamma([a, b])$, se puede definir un orden:



Definición I.5.3 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ arco simple. Una partición o subdivisión P de $\Gamma = \gamma([a, b])$ es una sucesión finita y ordenada

$$P = \{\gamma(a) = z_0 < z_1 < \dots < z_n = \gamma(b)\};$$

$$\delta(P) = \max_{k=1, \dots, n} \{z_k - z_{k-1}\}$$

es la norma de la subdivisión P .

Proposición I.5.1 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ arco simple, $p = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ división o partición de $[a, b]$. Sea

$$P = \{\gamma(a) < \gamma(t_1) < \dots < \gamma(t_n)\}$$

partición de Γ , entonces ϵ_0 , c y C reales estrictamente positivos (independientes de las particiones) tales que

i) $\delta(P) \leq c\delta(p)$,

ii) $\delta(P) \leq \epsilon_0 \Rightarrow \delta(p) \leq C\delta(P)$.

Demostración.- Mostremos el punto (i). Consideremos las diferencias $\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)$, aplicando el teorema de los incrementos finitos a cada una de las componentes, se tiene

$$\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k) = (\gamma_1'(\xi_k) + i\gamma_2'(\zeta_k))(t_{k+1} - t_k)$$

con $\xi_k, \zeta_k \in (t_k, t_{k+1})$. Puesto que γ' es continua por hipótesis, cada una de sus componentes alcanza sus cotas. Por lo tanto

$$|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq c(t_{k+1} - t_k) \leq c\delta(p).$$

donde

$$c = \sqrt{(\max |\gamma'_1(t)|)^2 + (\max |\gamma'_2(t)|)^2}$$

Por la definición de máx y sup obtenemos

$$\delta(P) \leq c\delta(p).$$

Mostremos el segundo punto. Por hipótesis $\gamma'(t) \neq 0$ y por continuidad de γ' , se tiene

$$\min_{t \in [a, b]} |\gamma'(t)| = \alpha > 0.$$

Afirmamos que existe $\delta_0 > 0$ tal que $|t - t'| < \delta_0$, se tiene

$$|\gamma'_1(t) + \gamma'_2(t')| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} |\gamma'_1(t) + \gamma'_2(t')| &= |\gamma'_1(t) + \gamma'_1(t') - \gamma'_1(t') + \gamma'_2(t')| \\ &\geq |\gamma'_1(t') + \gamma'_2(t')| - |\gamma'_1(t) - \gamma'_1(t')| \\ &\geq \alpha - |\gamma'_1(t) - \gamma'_1(t')| \end{aligned}$$

Por la continuidad de γ' , en particular de γ'_1 , existe $\delta_0 > 0$ tal que $|t - t'| < \delta_0$, implica $|\gamma'_1(t) - \gamma'_1(t')| < \alpha/2$, de donde, para $|t - t'| < \delta_0$, se tiene

$$|\gamma'_1(t) + \gamma'_2(t')| \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Al igual que en (i), se muestra que si $\delta(p) \leq \delta_0$, se tiene

$$\delta(P) \geq \frac{\alpha}{2}\delta(p).$$

Como γ es inyectiva, la restricción de $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ es biyectiva, por lo tanto, utilizando el mismo procedimiento que (i), se muestra que $\gamma^{-1} : \Gamma \rightarrow [a, b]$ es continua, es decir que $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ tal que $|z - z'| < \epsilon$ y $z, z' \in \Gamma$ implica $|t - t'| < \delta$. En particular para δ_0 , existe ϵ_0 .

□

Corolario I.5.1 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ arco simple, $p = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ división o partición de $[a, b]$. Sea

$$P = \{\gamma(a) < \gamma(t_1) < \dots < \gamma(t_n)\}$$

partición de Γ , entonces

$$\delta(p) \rightarrow 0 \iff \delta(P) \rightarrow 0.$$

Teorema I.5.1 Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ arco simple, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, P denota partición de Γ , entonces

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) \right) = \int_a^b f(z) dz. \quad (\text{I.5.3})$$

Demostración.- Se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_{k-1}))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_{k-1}))\gamma'(t_{k-1})\delta t_k + \sum_{k=1}^n r(t_k, t_{k-1})\delta t_k. \end{aligned}$$

Por la diferenciabilidad de γ , se tiene $r(t_k, t_{k-1})/|t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$, cuando $\delta(p) \rightarrow 0$. Por lo tanto, para $\delta(p)$ suficientemente pequeño $|r(t_k, t_{k-1})| < \epsilon(t_k - t_{k-1})$, para un $\epsilon > 0$, dado. De donde

$$\left| \sum_{k=1}^n r(t_k, t_{k-1})\delta t_k \right| < \epsilon(b-a).$$

Lo que significa, de acuerdo al corolario precedente que

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n r(t_k, t_{k-1})\delta t_k = 0.$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(t_{k-1}))\gamma'(t_{k-1})\delta t_k$$

es una suma de Riemann y por las hipótesis de continuidad de f y γ' , se tiene

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_{k-1}))\gamma'(t_{k-1})\delta t_k = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

□

Corolario I.5.2 $\int_{\gamma} f(z) dz$ depende solamente de Γ y del orden de Γ .

Definición I.5.4 Un recorrido \mathcal{C} es darse arcos simples $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, k$ con $\gamma(b_i) = \gamma(a_{i+1})$. Escribimos $\mathcal{C} = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$.

Definición I.5.5 Sea $\mathcal{C} = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ un recorrido, se define

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Ejemplo

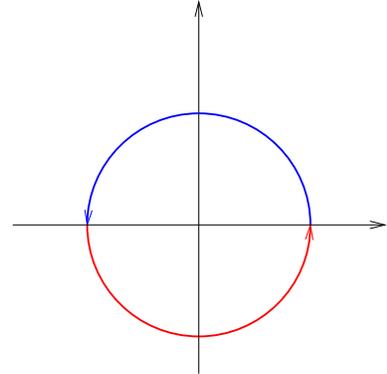
1. Consideremos $f(z) = 1/z$ y $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ define un recorrido, no un arco simple. El

recorrido es la circunferencia unitaria, que es la suma de los arcos simples:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= e^{it}, & t \in [0, \pi]; \\ \gamma_2(t) &= e^{it}, & t \in [\pi, 2\pi].\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_0^\pi f(e^{it})ie^{it} dt + \int_\pi^{2\pi} f(e^{it})ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2i\pi.\end{aligned}$$



Proposición I.5.2 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que existe una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. (F se llama **primitiva** de f). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un arco simple. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(B) - F(A),$$

donde $A = \gamma(a)$ y $B = \gamma(b)$.

Demostración.- Por un lado tenemos, aplicando la regla de derivación para la composición de funciones

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Por otro lado, el Segundo Teorema del Cálculo Integral da

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

□

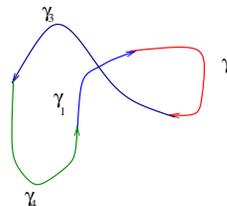
Definición I.5.6 Sea $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ un recorrido. Se dice que Γ es un recorrido cerrado o contorno si $\gamma_1(a_1) = \gamma_k(b_k)$

Corolario I.5.3 Si Γ es un contorno dentro de $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua que admite primitiva, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración.- Utilizando la definición de integral para recorridos y la proposición precedente, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \cdots + \int_{\gamma_k} f(z) dz \\ &= (F(B_1) - F(A_1)) + (F(B_2) - F(A_2)) \\ &\quad + \cdots + (F(B_k) - F(A_k)) \\ &= F(B_k) - F(A_k) = 0. \end{aligned}$$



□

Corolario I.5.4 La función $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z$ no admite primitiva.

Ejemplos

2.- Consideremos la función $f(z) = z^m$ con m natural. $F(z) = z^{m+1}/(m+1)$ es una primitiva, de donde

$$\int_{\Gamma} z^m dz = \frac{z_0^{m+1}}{m+1}$$

2.- Si bien, $1/z$ no admite primitiva sobre $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, podemos restringir Ω de manera que esta función admita primitiva. Por ejemplo, considerando $\Omega_1 = \mathbb{C} -]-\infty, 0]$, la determinación principal de \log es una primitiva. Tomando $\Omega_2 : \mathbb{C} - [0, +\infty[$, la determinación $\log_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ con $\arg_2(-1) = \pi$. Por lo tanto, podemos evaluar $\int_{z=1} \frac{1}{z} dz$ tomando la circunferencia como el recorrido $\gamma_1 + \gamma_2$ donde

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\gamma_2(t) = e^{it}, \quad t \in [\pi/2, 3\pi/2]$$

por lo tanto

$$\int_{z=1} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \log(i) - \log(-i) + \log_2(-i) - \log_2(i) = 2i\pi.$$

Proposición I.5.3 (cambio de variable) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $g : U \rightarrow \Omega$ holomorfa y $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ arco simple, entonces

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(\zeta))g'(\zeta) d\zeta.$$

Demostración.- Se tiene

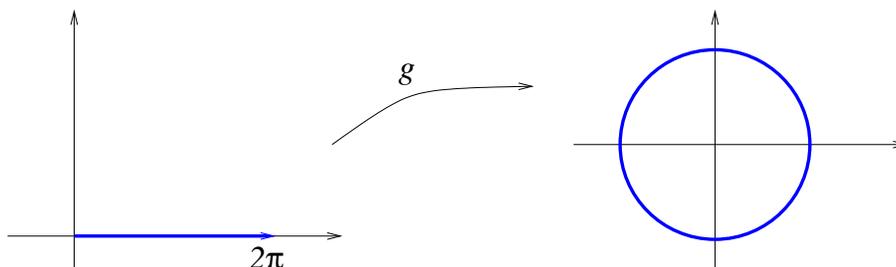
$$\begin{aligned} \int_{g \circ \gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(g \circ \gamma(t)) \cdot (g \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_a^b f(g(\gamma(t))) \cdot (g'(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ g)(\gamma(t)) \cdot g'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z) dz. \end{aligned}$$

□

Ejemplo

4.- Consideremos nuevamente la integral $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$. Planteamos $g(z) = e^{iz}$ que es una función holomorfa y $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = t$, obtenemos

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{e^{iz}} i e^{iz} dz = i \int_{\gamma} dz = iz \Big|_0^{2\pi} = 2i\pi.$$



Proposición I.5.4 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ arco simple. Entonces

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} (\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L : \text{longitud del arco.} \tag{I.5.4}$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L \quad M = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \tag{I.5.5}$$

donde P denota particiones o subdivisiones de $\gamma([a, b])$

Demostración.- Demostración.- El punto I.5.4 ya ha sido visto en el curso de Geometría, dejamos como ejercicio el repaso de la demostración.

Demostremos el punto I.5.5. Por el teorema I.5.1, se tiene

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right|.$$

Por otro lado

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| \cdot |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq M \cdot L.$$

Pasando al límite obtenemos la desigualdad I.5.5.

□

Proposición I.5.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k \subset \mathbb{C}$ un recorrido.

i) Si $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas que convergen simplemente a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y uniformemente sobre Γ , entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

ii) Si $F : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ función con $U \subset \mathbb{C}$ abierto tal que para todo $u \in U$ fijo la función $z \rightarrow F(z, u)$ es continua y si $F(z, u) \rightarrow F(z, u_0)$ uniformemente sobre Γ cuando $u \rightarrow u_0 \in U$ entonces

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_{\Gamma} F(z, u) dz = \int_{\Gamma} F(z, u_0) dz.$$

Demostración.- Mostremos el punto (i). La convergencia uniforme, significa que $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow \forall z \in \Gamma |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. De donde

$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) dz - \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \epsilon L.$$

El punto (ii), la convergencia uniforme, significa que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|u - u_0| < \delta$ implica que $\forall z \in \Gamma$ se tiene $|F(z, u) - F(z, u_0)| < \epsilon$, de donde

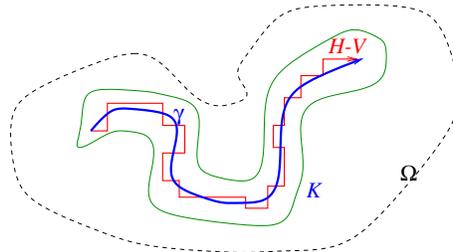
$$\left| \int_{\Gamma} F(z, u) dz - \int_{\Gamma} F(z, u_0) dz \right| \leq \epsilon L.$$

□

Definición I.5.7 Un recorrido $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ se dice de tipo H-V (horizontal-vertical) si $\Re(\gamma_j) = C$ o $\Im(\gamma_i) = C$.

Proposición I.5.6 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $\gamma; [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ arco simple, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists$ recorrido H-V $\gamma_1 + \dots + \gamma_k$ tal que $\gamma_1(a_1) = \gamma(a)$ y $\gamma_k(b_k) = \gamma(b)$ y además

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\text{H-V}} f(z) dz \right| < \epsilon.$$



Demostración.- Se requiere utilizar algunas propiedades topológicas del plano complejo, que en el momento se enunciará sin demostración, dejando éstas para el curso de topología. Utilizando el hecho que $\gamma([a, b])$ es un compacto, se muestra mediante la noción de recubrimiento, que existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $\Gamma \subset K^\circ$. (Esta es la parte topológica). La demostración asegura que existe $\eta > 0$ tal que $D(z, \eta) \subset K^\circ$ para todo $z \in \Gamma$.

Como K es compacto, f es uniformemente continua sobre K , por lo tanto para $\epsilon' > 0$ dado, existe $\delta(\epsilon') > 0$ tal que

$$z, z' \in K \text{ y } |z - z'| < \delta(\epsilon') \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \epsilon'.$$

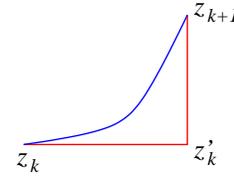
Podemos suponer también que $\delta(\epsilon') < \eta$.

Ahora consideremos $p = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ una subdivisión de $[a, b]$ tal que $\delta(P) \leq \delta(\epsilon')$, donde

$P = \{z_0 = \gamma(a) < z_1 = \gamma(t_1) < \dots < \gamma(t_m) = z_m\}$, definimos los

$$z'_k = z_k + \Re(z_{k+1} - z_k), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Por hipótesis sobre $\delta(P)$, $\delta(\epsilon')$ se tiene que los segmentos $\overline{z_k z'_k}$ y $\overline{z'_k z_{k+1}}$ están dentro K .



Si es necesario, reducir de tamaño $\delta(P)$, se puede suponer que

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| < \epsilon' \quad (\text{I.5.6})$$

El recorrido H-V es de la forma $H_1 + V_1 + \dots + H_{m-1} + V_{m-1}$, deducimos que:

$$\left| \int_{H_k} f(z) dz - f(z_k)(z'_k - z_k) \right| \leq \epsilon' |z'_k - z_k| \quad (\text{I.5.7})$$

$$\left| \int_{V_k} f(z) dz - f(z'_k)(z_{k+1} - z'_k) \right| \leq \epsilon' |z_{k+1} - z'_k|. \quad (\text{I.5.8})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{H-V} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{H_k} f(z) dz + \int_{V_k} f(z) dz \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} (f(z_k)(z_{k+1} - z_k) - f(z_k)(z'_k - z_k) - f(z'_k)(z_{k+1} - z'_k)) \right| \\ &\quad + \epsilon' + \epsilon' \sum_{k=0}^{m-1} (|z'_k - z_k| + |z_{k+1} - z'_k|) \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} ((f(z_k) - f(z'_k))(z_{k+1} - z'_k)) \right| + \epsilon'(1 + 2L) \\ &\leq \epsilon' \sum_{k=0}^{m-1} |z_{k+1} - z'_k| + \epsilon'(1 + 2L) \\ &\leq \epsilon'(1 + 3L). \end{aligned}$$

L es la longitud de γ . Tomando $\epsilon' = \epsilon/(1 + 3L)$ se tiene la proposición.

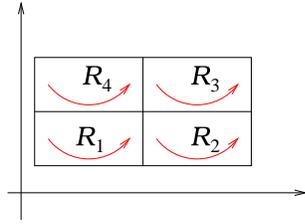
□

I.6. Un Teorema de Cauchy

Proposición I.6.1 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} | a \leq \Re z \leq b, c \leq \Im z \leq d\} \subset \Omega$. Entonces

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

Demostración.- Suponemos del contorno (borde del rectángulo) en sentido positivo.



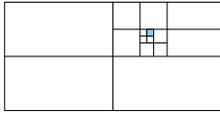
Dividimos el rectángulo \mathcal{R} en cuatro subrectángulos iguales $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ y \mathcal{R}_4 . Se tiene

$$I = \int_{\mathcal{R}} f(z) dz = \int_{\mathcal{R}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{R}_2} f(z) dz + \int_{\mathcal{R}_3} f(z) dz + \int_{\mathcal{R}_4} f(z) dz.$$

Se debe observar que las integrales de los lados comunes de los subrectángulos se anulan, porque tienen sentido opuestos, quedando para el cálculo final los lados no compartidos.

Sea $j_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\mathcal{R}_{j_1}} f(z) dz \right| \geq \left| \int_{\mathcal{R}_i} f(z) dz \right|, i = 1, 2, 3, 4.$$



Denotando por \mathcal{R}^1 este subrectángulo, $I_1 = \int_{\mathcal{R}^1} f(z) dz$.

Por otro lado si p es el perímetro de \mathcal{R} , se tiene que el perímetro p_1 de \mathcal{R}^1 es igual a $p/2$ y si δ es el diámetro de \mathcal{R} , $\delta_1 = \delta/2$ es el diámetro de \mathcal{R}^1 .

Una verificación sencilla da:

$$|I| \leq 4|I_1|,$$

Podemos construir una sucesión de subrectángulos \mathcal{R}^k , con $k = 1, 2, \dots$, de manera que \mathcal{R}^{k+1} sea un subrectángulo que divide en partes iguales a \mathcal{R}^k . Si denotamos por $I_k = \int_{\mathcal{R}^k} f(z) dz$, δ_k, p_k el diámetro y el perímetro de \mathcal{R}^k se tiene

$$|I| \leq 4^k |I_k|, \quad \delta_k = \frac{\delta}{2^k}, \quad p_k = \frac{p}{2^k}.$$

Utilizando el principio de los intervalos encajonados del primer Curso de Análisis en la parte real e imaginaria de la sucesión mostramos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}^k = \{z_0\}.$$

Por hipótesis f es holomorfa, en particular f es \mathbb{C} diferenciable en z_0 , de donde podemos escribir

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)r(z), \quad \text{con } \lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = 0.$$

Ahora bien para \mathcal{R}^k , se tiene

$$\int_{\mathcal{R}^k} f(z) dz = \int_{\mathcal{R}^k} f(z_0) dz + \int_{\mathcal{R}^k} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\mathcal{R}^k} r(z)(z - z_0) dz = \int_{\mathcal{R}^k} r(z)(z - z_0) dz$$

por que $f(z_0)$ y $f'(z_0)(z - z_0)$ tienen como primitivas $f(z_0)z$ y $f'(z_0)(z - z_0)^2/2$ respectivamente y sus integrales sobre contornos son nulas.

Por otro lado

$$|I_k| = \left| \int_{\mathcal{R}^k} r(z)(z - z_0) dz \right| \leq p_k \cdot \max_{z \in \mathcal{R}^k} |r(z)(z - z_0)|.$$

Elijamos $\epsilon > 0$, entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \eta \Rightarrow |r(z)| < \epsilon,$$

más todavía, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K$ se tiene $\mathcal{R}^k \subset D(z_0, \eta)$.

Por consiguiente, para $k \geq K$, se tiene $|z - z_0| \leq \delta_k$ y $|r(z)| \leq \epsilon$, de donde

$$|I_k| \leq \epsilon p_k \delta_k = \epsilon \frac{p\delta}{4^k},$$

por lo que

$$|I| \leq 4^k \cdot \epsilon \frac{p\delta}{4^k} = \epsilon p\delta.$$

Esto significa que $|I| = 0$ y en consecuencia $I = 0$.

□

Definición I.6.1 Sea $\mathcal{C} = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ un recorrido. Se dirá que \mathcal{C} es un recorrido simple si

$$i \neq j \Rightarrow \gamma_i([a_i, b_i]) \cap \gamma_j([a_j, b_j]) = \emptyset,$$

excepto quizás $\gamma_1(a_1) = \gamma_k(b_k)$.

Definición I.6.2 Se dirá que \mathcal{C} es un contorno simple o recorrido cerrado simple, si $\mathcal{C} = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ es un recorrido simple con $\gamma_1(a_1) = \gamma_k(b_k)$.

Interior de un Contorno Simple

Sea \mathcal{C} un contorno simple. En el curso de topología se muestra que existe $R > 0$ tal que $\mathcal{C} \subset B(0, R)$

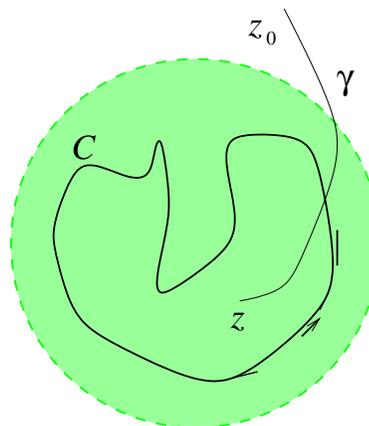
Sea $z_0 \notin B(0, R)$. Se dirá que z está en el interior de \mathcal{C} , si para todo camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (γ continua) con $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = z_0$, se tiene

$$\gamma([0, 1]) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \text{ y } z_0 \in \mathcal{C}.$$

El interior de \mathcal{C} es el conjunto

$$\text{Int } \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} | z \text{ es un punto interior de } \mathcal{C}\}.$$

La orientación o sentido de \mathcal{C} se elige de manera que el interior de \mathcal{C} esté a la izquierda de \mathcal{C} .



Definición I.6.3 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ es un **dominio simple** si \mathcal{D} es de la forma

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \text{Int } \mathcal{C},$$

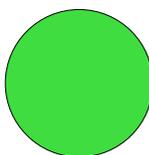
donde \mathcal{C} es un contorno simple.

Ejemplos

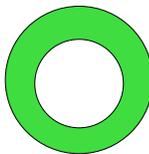
1. Un rectángulo \mathcal{R} es un dominio simple



2. Un disco cerrado $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ es un dominio simple.



3. Un corona $\{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$ no es un dominio simple.



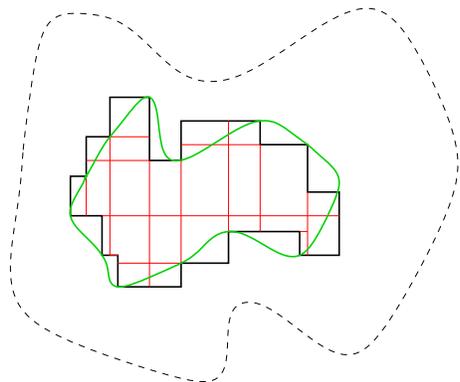
Teorema I.6.1 (Cauchy) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $\mathcal{D} \subset \Omega$ dominio simple, entonces

$$\int_{\partial \mathcal{D}} f(z) dz = 0,$$

$\partial \mathcal{D}$ orientada dejando el interior a la izquierda.

Demostración.- Utilizando la proposición I.5.6, para $\epsilon > 0$, existe un recorrido cerrado H-V tal que

$$\left| \int_{\partial \mathcal{D}} f(z) dz - \int_{\text{H-V}} f(z) dz \right| < \epsilon.$$



Si es necesario afinar H-V, se puede suponer que es un recorrido simple, lo que nos permite construir una cuadrícula del interior de H-V en que los arcos de H-V son lados de algún o algunos rectángulos. Utilizando el mismo argumento que la proposición precedente, se tiene

$$\int_{\text{H-V}} f(z) dz = \sum_{\mathcal{R}_i} \int_{\mathcal{R}_i} f(z) dz = 0,$$

por la proposición precedente.

Por consiguiente

$$\left| \int_{\partial \mathcal{D}} f(z) dz \right| < \epsilon$$

cualquiera que sea $\epsilon > 0$, por lo tanto el teorema es cierto.

□

Corolario I.6.1 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $\mathcal{D} \subset \Omega$ dominio simple, $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$, $\gamma_i[a_i, b_i] \rightarrow \mathcal{D}$ arcos simples, con $\gamma(a_i) = z_1$ y $\gamma(b_i) = z_2$ con $i = 1, 2$. Entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Demostración.- Ejercicio.

□

Notación.- Como la integral solo depende de las extremidades es válida la notación

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Corolario I.6.2 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{D} \subset \Omega$, entonces existe $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F'(z) = f(z)$.

Demostración.- Fijemos $z_0 \in \mathcal{D}^\circ$. Planteamos

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Mostremos que F es holomorfa y que $F'(z) = f(z)$. En efecto, consideremos el cociente de Newton

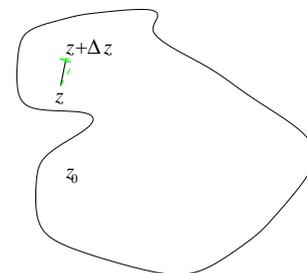
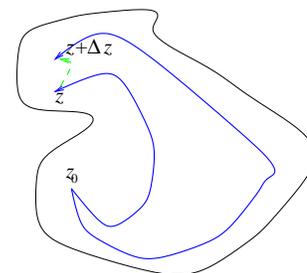
$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Supongamos que Δz es lo suficientemente pequeño, para que $z + t\Delta z \in \mathcal{D}$ para $t \in [0, 1]$.

Por otro lado

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + r(\zeta) \quad \text{con} \quad \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{r(\zeta)}{(\zeta - z)} = 0,$$

de donde para, $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que si $|\Delta z| < \delta$ se tiene $|r(\zeta)| < \epsilon |z - \zeta|$.



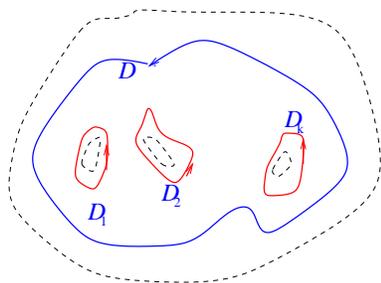
El cociente de Newton se convierte

$$q(z) = \underbrace{\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\zeta}_{=f(z)} + \underbrace{\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f'(z)(\zeta - z) d\zeta}_{=\frac{1}{2}\Delta z f'(z) \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} r(\zeta) d\zeta}_{|\cdot| \leq \epsilon |\Delta z| \rightarrow 0}$$

si $\Delta z \rightarrow 0$ y tomando como arco, el segmento que une z con $z + \Delta z$.

□

Corolario I.6.3 Sean \mathcal{D} dominio simple y $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}^\circ$ dominios simples con $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. $\Omega \supset (\mathcal{D} - \bigcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i)$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces



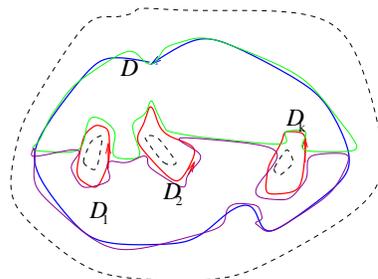
$$\int_{\partial \mathcal{D}} f(z) dz = \int_{\partial \mathcal{D}_1} f(z) dz + \dots + \int_{\partial \mathcal{D}_k} f(z) dz.$$

Demostración.- Realizamos un corte del dominio simple \mathcal{D} en dos subdominios simples: $\hat{\mathcal{D}}$ y $\check{\mathcal{D}}$ de manera que

los bordes de ambos caminos cubran en su totalidad los bordes del dominio \mathcal{D} y los dominios \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, k$. Por lo tanto

$$0 = \int_{\hat{\mathcal{D}}} f(z) dz + \int_{\check{\mathcal{D}}} f(z) dz = \int_{\mathcal{D}} f(z) dz + \sum_{i=1}^k - \int_{\partial \mathcal{D}_i} f(z) dz$$

porque f es holomorfa sobre los dominios $\hat{\mathcal{D}}$ y $\check{\mathcal{D}}$ y la integrales se anulan en los bordes comunes (diferentes sentidos de integración)

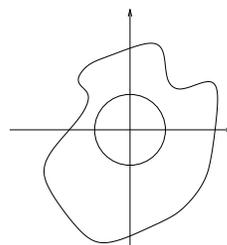


□

Ejemplo

4.- Consideremos \mathcal{D} dominio simple con $0 \in \mathcal{D}^\circ$, $\mathcal{D}_1 = \{z \mid |z| \leq r\}$ con r lo suficientemente pequeño de manera que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}^\circ$ y por corolario que antecede deducimos que

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2i\pi.$$



Corolario I.6.4 Sea \mathcal{C} un contorno simple y $a \notin \mathcal{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} a \in \text{Int } \mathcal{C} &\iff \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} dz = 2i\pi, \\ a \notin \text{Int } \mathcal{C} &\iff \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} dz = -. \end{aligned}$$

Demostración.- Ejercicio. □

I.7. Fórmulas Integrales de Cauchy

Teorema I.7.1 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. $\mathcal{D} \subset \Omega$ dominio simple, $z_0 \in \mathcal{D}^\circ$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Demostración.- Utilizando el corolario I.6.8 y con $r > 0$ lo suficientemente pequeño se tiene

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

La parametrización $z_0 + re^{2i\pi t}$ de la circunferencia de centro z_0 y radio r da

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t}) dt.$$

El valor de la segunda integral es independiente de r , a condición que la circunferencia esté dentro del dominio.

Puesto que f es continua, se puede pasar al límite $r \rightarrow 0$ y la independencia de la integral respecto a r nos conduce a que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t}) dt = \int_0^1 f(z_0) dt = f(z_0).$$

□

Teorema I.7.2 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $\mathcal{D} \subset \Omega$ dominio simple y $z \in \mathcal{D}^\circ$. Entonces f es indefinidamente \mathbb{C} -derivable y

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demostración.- Por inducción; para $n = 0$ es el teorema precedente. Suponemos cierto para $n - 1$, sea $z_0 \in \mathcal{D}^\circ$ que lo dejamos fijo.

Como $z_0 \in \mathcal{D}^\circ$, existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset \mathcal{D}$. Consideremos el cociente de Newton y apliquemos la hipótesis de inducción

$$\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) \frac{1}{z - z_0} d\zeta. \quad z \in D(z_0, r) - \{z_0\}.$$

Definamos la función $\varphi : \partial\mathcal{D} \times D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(\zeta, z) = \begin{cases} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) \frac{1}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f(\zeta) \frac{n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

La función φ es continua, lo que conduce a que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \varphi(\zeta, z) d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(\zeta, z) d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \varphi(\zeta, z_0) d\zeta \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

□

Teorema I.7.3 (Morera) *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que para todo recorrido simple $\mathcal{C} \subset \Omega$*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0,$$

entonces f es holomorfa sobre Ω .

Demostración.- Fijemos $z_0 \in \Omega$. Planteamos

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w) dw,$$

donde γ arco simple con $\gamma(a) = z_0$ y $\gamma(b) = z$. Por hipótesis $F(z)$ no depende de γ que une z_0 con z . Si mostramos que $F'(z) = f(z)$, por el teorema I.7.2 F es indefinidamente derivable y por consiguiente $F''(z) = f'(z)$ y de donde f es holomorfa.

Ahora verifiquemos que $F'(z) = f(z)$.

Consideremos el cociente de Newton, para Δz lo suficientemente pequeño,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta,$$

integrado sobre el segmento $z + t\Delta z$, con $0 \leq t \leq 1$.

Como f es continua, para $\epsilon > 0$ fijo, existe $\delta > 0$ tal que $|\delta z| < \delta$ implica que

$$|f(z) - f(z + t\Delta z)| \leq \epsilon;$$

de donde

$$\left| f(z) - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(z) - f(\zeta)) d\zeta \right| \leq \epsilon.$$

□

I.8. Series Enteras

En el primer año de análisis se estudió a profundidad la noción de series numéricas, al igual que las series de funciones en el ámbito real. Las definiciones, propiedades son válidas si se reemplaza \mathbb{R} por \mathbb{C} , exceptuando la noción de \mathbb{C} -derivabilidad que será vista en esta sección. Por consiguiente es conveniente que el estudiante no solo repase el curso de primer año de análisis, sino que lo domine. La primera novedad

Teorema I.8.1 (Weierstraß) *Sea Ω un dominio simple, $\{f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones holomorfas. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre Ω cuando $n \rightarrow \infty$, entonces f es holomorfa y $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente sobre Ω cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración.- Consideremos Γ contorno simple de Ω , por la proposición I.5.5 se tiene

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz = 0.$$

El teorema de Morera implica que f es holomorfa sobre Ω . Mostremos que $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente. Sea $z \in \Omega^\circ$, de donde podemos encontrar $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned} f'(z) - f'_n(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta, \\ |f'(z) - f'_n(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{r} \sup_{|\zeta-z|=r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|. \end{aligned}$$

Por consiguiente la derivada converge uniformemente. □

Recordemos lo que es una serie entera. Sea a_0, a_1, a_2, \dots una sucesión de coeficientes en \mathbb{C} y z una variable independiente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (\text{I.8.1})$$

se llama una **serie entera**. Sin ocuparnos de la cuestión de convergencia, estas series forman el algebra $\mathbb{C}[[z]]$ de las series formales. Para la convergencia, tal como se dijo se retoma las definiciones dadas en el curso de Primer Año de Análisis, con los respectivos criterios y condiciones de convergencia. Solo agregamos una fórmula para el radio de convergencia.

Proposición I.8.1 (Fórmula de Hadamard) *La serie de potencias con coeficientes $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tiene como radio de convergencia*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ 0 \text{ si } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty \text{ si } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases} \quad (\text{Fórmula de Hadamard})$$

donde $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|a_k| \mid k \geq n\}$.

Demostración.- Ejercicio. □

Teorema I.8.2 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

- i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente sobre $|z| \leq r, \forall r < R$.
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge sobre $|z| > R$.
- iii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa sobre $|z| < R$.
- iv) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, converge uniformemente sobre $|z| \leq r, \forall r < R$.

Demostración.- Para los dos primeros puntos revisar el curso de análisis de primer año. Los puntos iii) y iv) son consecuencia del teorema de Weirstraßenunciado má arriba.

□

Definición I.8.1 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z_0 \in \Omega$, f indefinidamente \mathbb{C} derivable en z_0 , la serie de Taylor de f en el punto z_0 es

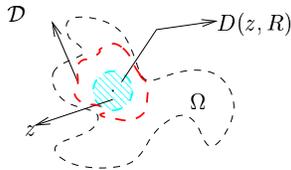
$$\text{ST } f_{z_0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Teorema I.8.3 ((Cauchy-Taylor)) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tal que $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

uniformemente sobre $\bar{D}(z_0, R)$.

Demostración.- Sea \mathcal{D} un dominio simple que contiene $\bar{D}(z_0, R)$, esto es posible por Ω es un abierto.



Las fórmulas integrales de Cauchy dan:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \zeta, \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

porque $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ y además la convergencia es uniforme sobre el disco centrado en z_0 . Por consiguiente se puede integrar término a término garantizando la convergencia uniforme de la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_0)^n.$$

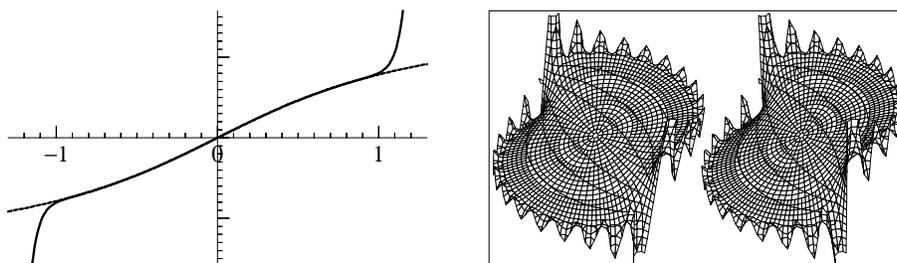


Figura I.8.1: Polinomio de Taylor $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{z^{25}}{25}$ en \mathbb{R} y en \mathbb{C}

□

Remarca.-Acabamos de ver que una función que puede expresarse como una serie de potencias es holomorfa y lo mismo una función holomorfa puede expresarse como serie de potencias. Las funciones que tienen esta propiedad se llaman funciones analíticas; es decir que son indefinidamente derivables y que la serie de Taylor de la función coincide con la función en la región de convergencia.

Remarca.-Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en el punto $z_0 \in \Omega$, está dada por

$$\text{dist}(z_0, \partial\Omega),$$

verificación que dejamos como ejercicio.

Ejemplo

1. La función $y = \arctan x$ es completamente lisa para $-\infty < x < \infty$, y no se comprendería porque el polinomio de Taylor no funciona fuera de $[-1, 1]$, pero visto en \mathbb{C} , recordando la sección I.4 vemos que en la determinación de \arctan que no está definida para $\pm i$.
2. Consideremos la determinación principal del logaritmo,

$$\begin{aligned} \log z &= \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^z \frac{d\zeta}{1+(\zeta-1)} = \int_1^z (1 - (\zeta - 1) + (\zeta - 1)^2 - \dots) d\zeta \\ &= (z - 1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

En la figura I.8.2 se ve que la serie converge para $|z - 1| < 1$, lo que no es sorprendente, porque en $z = 0$ \log no está definido.

I.8.1. Cálculos con Series Enteras

A continuación se enunciará algunas propiedades de las series enteras.

Proposición I.8.2 Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ dos series con radios de convergencia ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Entonces

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \tag{I.8.2}$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) z^n, \tag{I.8.3}$$

las dos series, la suma y la producto, tienen un radio de convergencia $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$.

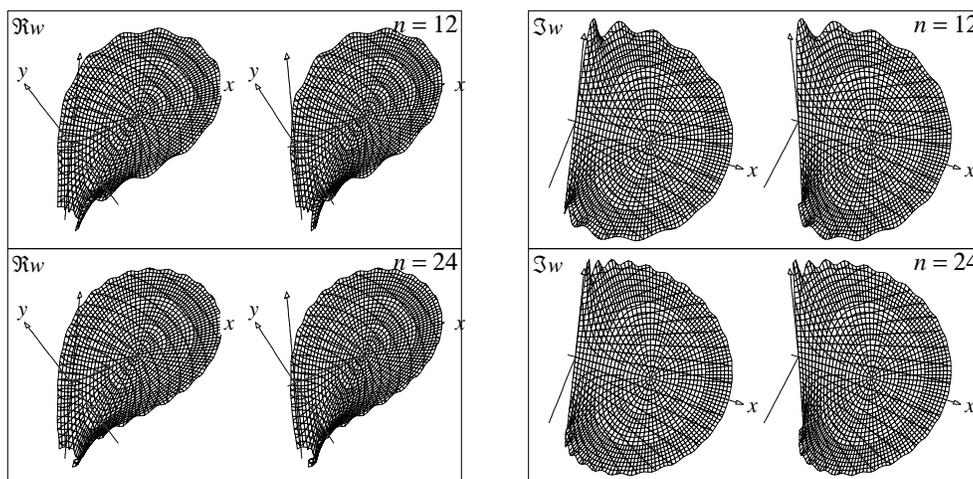


Figura I.8.2: Gráficas de parte real e imaginaria de $(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots \pm \frac{(z-1)^n}{n}$

Demostración.- Ver demostraciones en el curso de Primer Año de Análisis. □

Para determinar los coeficientes de la serie cociente $f(z)/g(z)$, es suficiente conocer la serie $1/g(z)$ y se puede dividir $g(z)$ por el $b_0 = g(0) \neq 0$ y comenzar la serie $g(z)$ por 1. Además podemos escribir los otros coeficientes de la serie $g(z)$ con signo $-$. Tenemos la proposición:

Proposición I.8.3 Sea $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -b_n z^n$ una serie de radio de convergencia $\rho > 0$. Entonces los coeficientes c_i de la serie

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

satisfacen $c_0 = 1$ y

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k b_{n-k} + b_n \quad (\text{I.8.4})$$

y el radio de convergencia es no nulo.

Demostración.- Para las relaciones recursivas dadas por (I.8.4) los productos de Cauchy de la serie producto $g(z) \cdot (1/g(z)) = 1$ darán lo deseado. Mostremos ahora, que el radio de convergencia de la serie cociente es mayor o igual a $1/2\rho$. La fórmula de Hadamard para el radio de convergencia ρ , asegura que la sucesión

$$|b_1|, \sqrt{|b_2|}, \sqrt[3]{|b_3|}, \dots$$

son por $q > \rho$, es decir $|b_n| \leq q^n$. Insertamos sucesivamente esta mayoración en (II.8.4) y tenemos

$$\begin{aligned} |c_1| &\leq q, \\ |c_2| &\leq q^2 + q^2 = 2q^2, \\ |c_3| &\leq 2q^3 + q^3 + q^3 = 4q^3, \\ |c_4| &\leq 4q^4 + 2q^4 + q^4 + q^4 = 8q^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De donde aplicando el criterio de la raíz n -sima, se tiene que $1/g(z)$ converge para $|z| < 1/(2q)$.

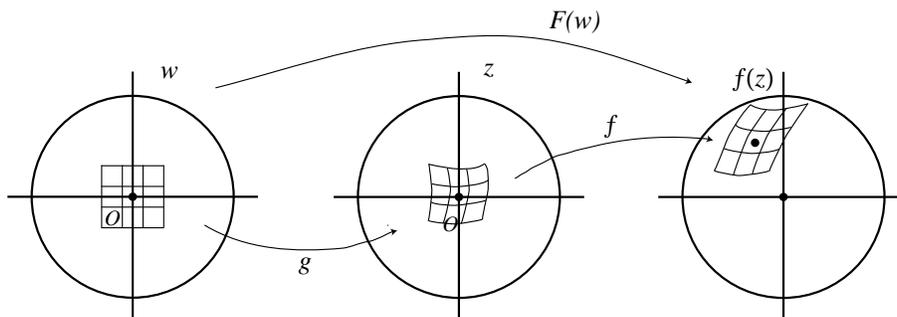


Figura I.8.3: Composición de Series

□

Aparte de las operaciones aritméticas con series, se tiene la composición de series enteras. Para ubicar el problema, consideramos las series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k,$$

observamos que $b_0 = 0$, para asegurar que $g(0) = 0$ y buscamos determinar los coeficientes c_n de la serie $F(w) = f(g(w))$. Insertamos la segunda serie en la primera serie y se reordena la serie en potencias de w :

$$\begin{aligned} F(w) &= a_0 + a_1(b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots) + a_2(b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 b_1 w + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) w^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) w^3 + \dots \\ &= a_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 + \dots \end{aligned}$$

Observamos nuevamente que los coeficientes de la nueva serie son determinados recursivamente por expresiones finitas, gracias a que $b_0 = 0$, de coeficientes conocidos.

Para justificar que los reordenamientos son correctos y la prueba que la serie tiene un radio de convergencia no nulo, mediante el criterio de la serie mayorante. Nuevamente la formula de Hadamard conduce a que

$$|a_n| \leq q^n \quad \text{y} \quad |b_n| \leq p^n.$$

Substituimos $z = pw + p^2 w^2 + p^3 w^3 + \dots = pw/(1 - pw)$ para $|w| < 1/p$. Reemplazamos z en la serie doble obteniendo la mayoración para la serie doble dada por $1 + qz + qz^2 + \dots = 1/(1 - qz)$ siempre y cuando $|z| < q$. Reemplazando en la mayoración de la segunda serie, obtenemos una mayoración en función de w dada por

$$\frac{1}{1 - q \frac{pw}{1 - pw}} = (1 - pw) \frac{1}{1 - (q+1)pw},$$

mayoración válida si $|w| < 1/(p(q+1))$.

Otro problema es el cálculo de la serie entera de la función inversa de una serie entera. Sea $w = f(z)$ con $w_0 = f(z_0)$ dada por un desarrollo

$$w - w_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

Se busca el desarrollo de la función inversa $z = g(w)$ bajo la forma

$$z - z_0 = b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + b_3(w - w_0)^3 + \dots$$

Después de realizar traslaciones al origen, podemos suponer que z_0 y w_0 ubicados en el origen, se tiene por consiguiente $w = f(g(w))$ y utilizamos el reordenamiento de la serie composición en potencias de w . Se obtiene

$$w = a_1 b_1 w + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) w^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) w^3 + \dots$$

comparando coeficientes, se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 b_1 && \Rightarrow b_1 \\ 0 &= a_1 b_2 + a_2 b_1^2 && \Rightarrow b_2 \\ 0 &= a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 && \Rightarrow b_3 \\ &\vdots && \\ 0 &= a_1 b_n + \text{valores conocidos} && \Rightarrow b_n. \end{aligned}$$

La discusión de la convergencia utilizando el criterio de la serie mayorante es posible, ver H. Cartan I.2.9, pero muy complicada. La cuestión de la convergencia será resuelta utilizando una ecuación diferencial.

Sea $F(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots$ una función dada, se busca una función $w = f(z)$ con

$$\frac{dw}{dz} = F(w), \quad w(0) = 0,$$

remarcando que la traslación del sistema de coordenadas al valor inicial ha sido ya realizada. Se plantea, como de costumbre, $w = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$ e remplazamos en la ecuación diferencial. Se tiene

$$b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \dots = a_0 + a_1(b_1 z + b_2 z^2 + \dots) + a_2(b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^2 + \dots$$

Comparamos los coeficientes de la serie del lado izquierdo, con la del lado derecho, de donde

$$\begin{aligned} b_1 &= a_0, \\ b_2 &= \frac{1}{2} a_1 b_1, \\ b_3 &= \frac{1}{3} (a_1 b_2 + a_2 b_1^2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

En este caso el análisis de la convergencia es sencillo, mayoramos los b_i pasando a los modulos los a_i y remplazando los a_j por una cota, proe ejemplo $|a_j| \leq q^j$. Esto quiere decir que hemos resuelto la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dz} = (1 + wq + w^2 q^2 + \dots) = \frac{1}{1 - wq}, \quad w(0) = 0.$$

Esta última ecuación es de tipo separable, ver curso de Primer Año de Análisis, obteniendo como solución, después de integrar e despejar w , teniendo el cuidado de verificar $w(0) = 0$, se obtiene

$$w = \frac{1 - \sqrt{1 - 2qz}}{q}$$

solución, cuya serie converge para $|z| < 1/(2q)$.

Regresemos al caso de determinar la serie de la función inversa de $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$. Se tiene

$$\frac{dw}{dz} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots,$$

por lo tanto, para la función inversa, se tiene

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \quad (\text{I.8.5})$$

donde los coeficientes b_i se calculan mediante la serie cociente y esta serie como se ha visto converge. (I.8.5) es una ecuación diferencial que la resolvemos mediante el algoritmo planteado más arriba.

Remarca.- En muchos casos solo se requiere determinar los primeros coeficientes de una serie, por lo que es conveniente en estos casos utilizar desarrollos en serie limitados a un número finito de terminos y utilizar la notación o y O .

I.8.2. Teoremas de Unicidad y Prolongamiento Análítico

Definición I.8.2 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in \Omega$. f tiene un cero de orden k en z_0 si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Proposición I.8.4 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, f tiene un cero de orden k en $z_0 \in \Omega$ si y solamente si existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(z_0) \neq 0$ tal que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Demostración.- Ejercicio. □

Teorema I.8.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $f \not\equiv 0$, entonces todos los ceros de f son puntos aislados; es decir, si $f(z_0) = 0 \exists r > 0$ tal que $|z - z_0| < r \implies f(z) \neq 0 \implies z = z_0$.

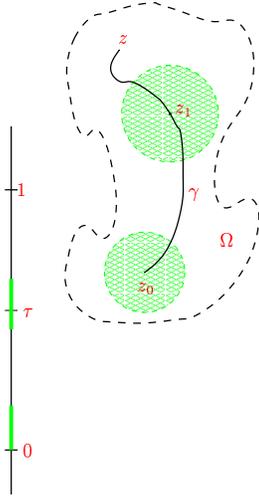
Demostración.- Mostraremos la contrarecíproca “existe un cero no aislado de f , entonces f es idénticamente nula”

Si z_0 el cero no aislado de f , entonces para todo disco $D(z_0, r) \subset \Omega$ $f|_{D(z_0, r)} \equiv 0$. En efecto, como $D(z_0, r) \subset \Omega$, f puede escribirse como serie $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$, para $|z - z_0| < r$. Se tiene que $a_k = 0$ para todo k , sino sea k el entero más pequeño tal que $a_k \neq 0$ obteniendo

$$f(z) = (z - z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots) = (z - z_0)^k g(z).$$

$g(z)$ es holomorfa sobre el disco $D(z_0, r)$ y $g(z_0) = a_k$. Por continuidad de g $g(z)$ es diferente de 0 en un vecindario de z_0 , por lo tanto z_0 sería un cero aislado, lo que contradice que z_0 no sea un cero aislado. Como $a_k = 0$ para todo k , se tiene $f(z) = 0$ sobre el disco $D(z_0, r)$.

Ahora mostremos que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Sea $z_0 \in \Omega$ un cero no aislado. Puesto que Ω es un abierto conexo, también es conexo por arcos. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un arco tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z$.



Consideremos el subconjunto

$$I = \{t \in [0, 1] \mid f \circ \gamma|_{[0,t]} \equiv 0\} \subset [0, 1].$$

$I \neq \emptyset$ porque $0 \in I$. Por consiguiente al ser I no vacío y acotado admite un supremo τ . $\tau > 0$, en efecto en un disco $D(z_0, r)$ la restricción de f en la porción del arco incluida en el disco es idénticamente nula. $z_1 = \gamma(\tau)$ es un cero de f por la continuidad de γ y f , en efecto es suficiente hacer tender t a τ por la izquierda. $\tau = 1$, porque si $\tau < 1$, se tendría que $z_1 \neq z$, en cualquier disco $D(z_1, r) \subset \Omega$ z_1 no es un cero aislado, por lo que f es idénticamente nula en este disco y en particular en la porción del arco incluida en ese disco y por lo tanto τ no sería el supremo de I .

□

Corolario I.8.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Si $E = \{z \mid f(z) = g(z)\} \neq \emptyset$ y contiene un punto no aislado en Ω , entonces $f \equiv g$.

Corolario I.8.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para todo $k \geq 0$, entonces $f \equiv 0$.

En base al teorema precedente y el primer corolario se tiene las bases para el principio de prolongamiento analítico. Consideremos una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde Ω es un abierto. Sea $z_0 \in \Omega$. Por consiguiente, f puede escribirse como una serie entera alrededor de z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \rho,$$

donde $\rho > 0$ es el radio de convergencia de la serie. Sea $z_1 \neq z_0$ un punto dentro el disco $|z - z_0| < \rho$, entonces la substitución $z - z_0 = z - z_1 + (z_1 - z_0)$ en la serie permite

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z_1 - z_0) + (z - z_1))^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_1)^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{n} a_{n+k} (z_1 - z_0)^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n. \end{aligned}$$

Remarcamos que las series de la primera fila y la tercera fila son reordenamientos de la serie de la segunda fila que es una serie doble. El reordenamiento está permitido porque para z fijo con $|z_1 - z_0| + |z - z_1| < \rho$ la serie doble converge absolutamente; en efecto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n < \infty$$

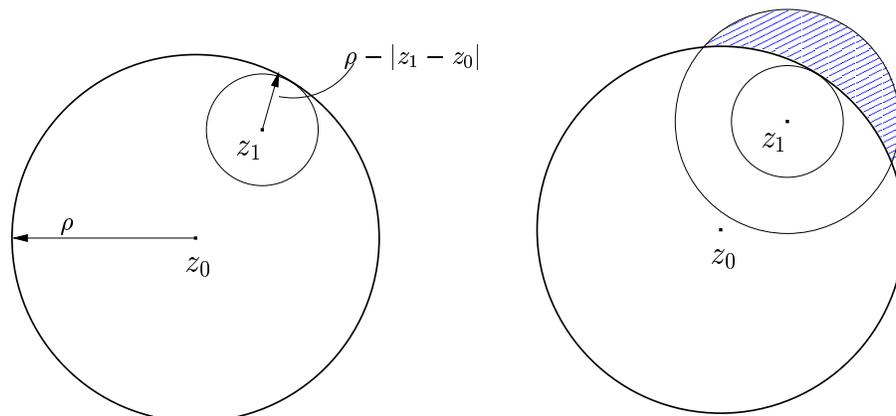


Figura I.8.4: Principio del Prolongamiento Análítico

converge absolutamente.

La conclusión es que si $|z - z_1| < \rho - |z_1 - z_0|$, la serie $\sum_n b_n(z - z_1)^n$ converge y representa la misma función $f(z)$. Pero es posible que el radio de convergencia sea mayor que $\rho - |z_1 - z_0|$ y por lo tanto converga en una región fuera del disco inicial. Viendo la Figura I.8.4, la función $f(z)$ ha sido prolongada de manera única. Este procedimiento puede ser repetido y permite llenar una región de más en más hasta llegar a un borde natural. La unicidad del prolongamiento se garantiza en tanto que los discos llenan un dominio simplemente conexo (sin huecos).

I.8.3. Otros Resultados de las Funciones Holomorfas

Por lo que se ha visto hasta ahora, las funciones holomorfas tienen un comportamiento ejemplar y previsible, nada que ver con la palabra compleja. A continuación presentamos una serie de teoremas que mostrarán cuán poderosa es la teoría de las funciones complejas.

Teorema I.8.5 (Desigualdad de Cauchy) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde Ω es un abierto, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ con $D(z_0, R) \subset \Omega$ y $M > 0$ tal que $f(z) \leq M$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

Entonces:

i) $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$.

ii) Si existe n_0 con $a_{n_0} = \frac{M}{R^{n_0}}$, entonces $a_n = 0$ para todo $n \neq n_0$, es decir $f(z) = a_{n_0}(z - z_0)^{n_0}$.

Demostración.- Sin perder generalidad podemos suponer que $z_0 = 0$. Sea $\rho < R$ y planteamos $I(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$. Tenemos

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{ni\theta},$$

$$\begin{aligned}
I(\rho) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{ni\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m e^{-mi\theta} \right) d\theta \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m \rho^{m+n} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right)}_{\begin{array}{l} \parallel \\ \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi & \text{si } m=n \\ 0 & \text{sino} \end{array} \right.} \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq 2\pi M^2, \quad \forall \rho < R.
\end{aligned}$$

Haciendo $\rho \rightarrow R$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2 \Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Los cálculos en la doble serie están justificados porque trabajamos con una serie absolutamente convergente. □

Definición I.8.3 Una función entera es una función $f(z)$ holomorfa sobre todo el plano complejo \mathbb{C} .

Teorema I.8.6 (Teorema de Liouville) Toda función entera y acotada es constante.

Demostración.- Sea M la cota es decir $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para todo $R > 0$ por la desigualdad de Cauchy se tiene, para $n \geq 1$

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n} \Rightarrow a_n = 0,$$

de donde $f(z) = a_0$. □

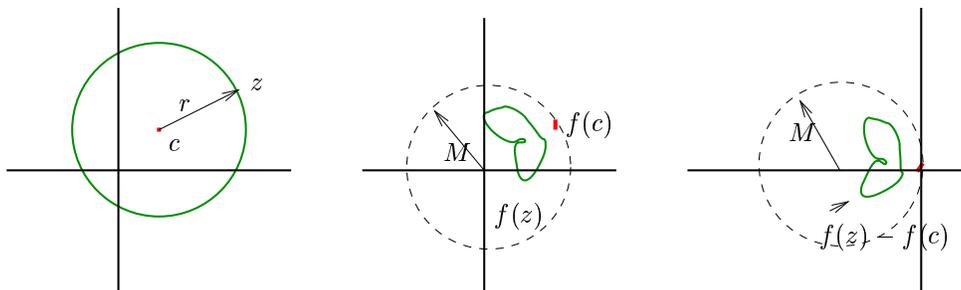
Teorema I.8.7 (Teorema del Valor Medio) Si f es holomorfa en un disco de radio r y centro z , entonces

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración.- Ejercicio. □

Proposición I.8.5 Sea f holomorfa en un disco abierto D , continua en \bar{D} . Si un punto $c \in D$ es un punto máximo de $|f(z)|$, entonces f es constante en un vecindario de c .

Demostración.- Si $f(c) = 0$ el resultado es evidente. Sino planteamos $M = |f(c)|$. La hipótesis sobre c implica que exista $R > 0$ tal que para todo $0 < r < R$ se tenga $|f(z)| < M$ para $z = c + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Observemos la imagen de esta circunferencia ubicada en el disco $\bar{D}(0, M)$. Mediante una rotación llevamos $f(c)$ al eje real y despues de la sustracción $g(\theta) = f(z) - f(c) = f(c + re^{i\theta}) - f(c)$ este punto se convierte el origen, ver figura más arriba. Por el teorema del valor medio

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0.$$

La curva $g(\theta) \in \bar{D}(-M, M)$, por lo que $\Re(g(\theta)) \leq 0$, salvo si $g(\theta) = 0$. La continuidad de g y el valor de la integral implican que $\Re(g(\theta)) = 0$ para todo θ . Ahora bien, el único punto, donde el disco $\bar{D}(-M, M)$ en cuestión toca el eje imaginario es O . De esta manera $g(\theta) = 0$ y como $f(z)$ es constante sobre el borde de $D(c, r)$ la continuidad de f implica que f sea constante en este disco.

□

Teorema I.8.8 (Principio del Máximo) *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no constante, $\mathcal{D} \subset \Omega$ dominio simple, entonces para todo $z_0 \in \mathcal{D}^\circ$*

$$|f(z_0)| < \sup_{z \in \partial \mathcal{D}} |f(z)|.$$

Demostración.- Sea $M = \sup_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|$. Si los puntos máximos se encuentran sobre $\partial \mathcal{D}$, entonces el teorema es correcto, sino existe $c \in \mathcal{D}^\circ$ con $|f(c)| = M$. Consideremos el conjunto $E = \{z \in \mathcal{D} | f(z) = f(c)\}$, ahora bien por la continuidad de f E es cerrado en \mathcal{D} y por la proposición precedente E es abierto en \mathcal{D} , como \mathcal{D} es un dominio simple, por lo tanto conexo, $E = \mathcal{D}$ lo que contradice la hipótesis de que f no es constante.

□

Teorema I.8.9 (Fundamental del Algebra) *Todo polinomio de grado mayor o igual a 1 y coeficientes complejos*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$.

Demostración.- Supongamos que el teorema no es correcto; es decir que existe un polinomio de grado mayor o igual a 1 $p(z)$ que no admita raíces. Por lo tanto $p(z) \neq 0$ para todo z y la función $f(z) = 1/p(z)$ es entera.

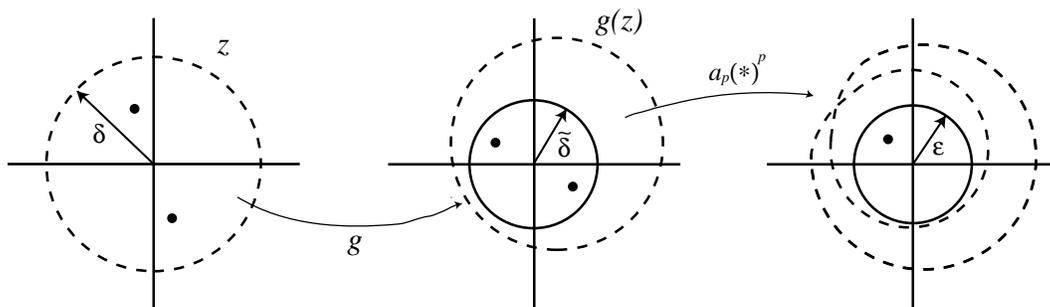


Figura I.8.5: Demostración Teorema de la Aplicación Abierta

Por otro lado, se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

lo que significa que existe $R > 0$ tal que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| < 1$. Para el disco $\bar{D}(0, R)$ aplicamos el principio del máximo, con lo que la función $f(z)$ es acotada. El teorema de Liouville implica que $f(z)$ es constante, lo que contradice que p sea un polinomio de grado mayor o igual a 1. □

Teorema I.8.10 (Teorema de la Función Abierta) *Sea Ω un abierto y f una función holomorfa no constante, entonces para todo abierto $U \subset \Omega$ $f(U)$ es un abierto.*

Demostración.- Se debe mostrar que la imagen de un disco $D(z_0, \delta)$ contiene un disco $D(f(z_0), \epsilon)$. En el caso en que $f'(z_0) \neq 0$, la función es biyectiva en un vecindario de z_0 y el resultado es trivial.

El caso $f'(z_0) = 0$, si es necesario realizar traslaciones, suponemos que $z_0 = 0$ y $f(z_0) = 0$. Sea a_n ($n \geq 2$) el primer término no nulo de la serie de Taylor de f alrededor de 0. Podemos escribir

$$f(z) = a_n z^n (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots).$$

Veamos el caso en que todos los $b_k = 0$. $f(z)$ actúa sobre un disco de radio δ convirtiéndolo en un disco de radio $\epsilon = |a_n| \delta^n$, recorriéndolo n veces. Es decir cada punto del disco $D(0, \epsilon)$, a excepción del origen, tiene exactamente n preimágenes.

El caso en que existen b_k no nulos, para $|z|$ lo suficientemente pequeño, utilizando la serie binomial de Newton, ver Curso Primer Año de Análisis, se tiene

$$(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^{1/n} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

de donde

$$f(z) = a_n (z(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^n = a_n (g(z))^n.$$

Sea $\delta > 0$, como $g'(0) \neq 0$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $D(0, \tilde{\delta}) \subset g(D(0, \delta))$. Por último, al elevar a la potencia n estamos en el caso en que los b_k son nulos. Por consiguiente $\epsilon = |a_n| \tilde{\delta}^n$. □

I.9. Series de Laurent

En la sección precedente hemos estudiado el hecho que las funciones que son holomorfas sobre un disco, admiten desarrollos en serie de potencias. En esta sección se pretende generalizar este desarrollo en serie de potencias a regiones más generales.

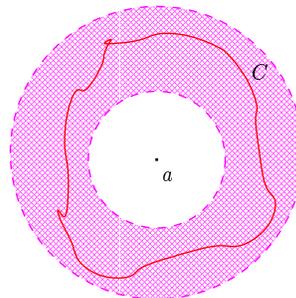
Definición I.9.1 Sean $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R$. La corona de centro a , radio inferior r y radio superior R es el conjunto

$$C(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}.$$

Consideremos una función $f(z)$ holomorfa sobre una corona $C(a, r, R)$, planteamos

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta, \quad (\text{I.9.1})$$

donde C es un recorrido cerrado dentro la corona, $a \in \text{Int } C$.



a_k no depende de C , consecuencia de uno de los corolarios del teorema de Cauchy. La serie de Laurent de f respecto a la corona $C(a, r, R)$ es

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - a)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k. \quad (\text{I.9.2})$$

Teorema I.9.1 Sean $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ y f holomorfa sobre la corona $C(a, R_1, R_2)$. Entonces para todo ρ_1, ρ_2 con $R_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < R_2$, se tiene

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z - a)^k$$

uniformemente sobre $\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$.

Demostración.- Sean ρ_1, ρ_2 con $R_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < R_2$, como la corona $C(a, R_1, R_2)$ es un conjunto abierto,

existen ρ'_1 y ρ'_2 tales que

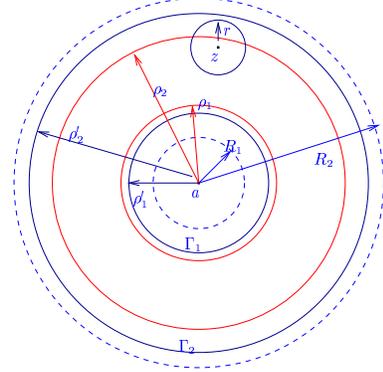
$$R_1 < \rho'_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < \rho'_2 < R_2.$$

Sea $z \in \{z \mid \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2\}$. Para $r > 0$ lo suficientemente pequeño $D(z, r) \subset C(a, \rho'_1, \rho'_2)$. Por lo tanto, de acuerdo a otro colorario del teorema de Cauchy sobre integrales, se tiene

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Por otro lado, la fórmula integral de Cauchy da

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right).$$



Sobre Γ_2 , es decir la circunferencia de centro a y radio ρ_2 , se tiene

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}.$$

Como $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| \leq \frac{\rho_2}{\rho'_2} < 1$, se tiene que

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k$$

uniformemente. Por consiguiente, al existir convergencia uniforme sobre el disco $\bar{D}(a, \rho_2)$, se tiene

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta}_{a_k, k \geq 0} (z-a)^k.$$

Sobre Γ_1 , es decir la circunferencia de centro a y radio ρ'_1 , se tiene

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}.$$

Como $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| \leq \frac{\rho'_1}{\rho_1} < 1$, se tiene que

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k$$

uniformemente. Por consiguiente, al existir convergencia uniforme sobre $\{z \mid |z-a| \geq \rho_1\}$, se tiene

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = -\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-k+1}} d\zeta}_{a_{-k}, k \geq 1} (z-a)^{-k}.$$



Proposición I.9.1 Si $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k(z-a)^k$ en una corona $C(a, r, R)$, entonces

$$A_k = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

donde C es un contorno simple en la corona $C(a, r, R)$, en cuyo interior se encuentra a .

Demostración.- Dejamos al estudiante la justificación de los cálculos, se tiene

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{l+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k(\zeta-a)^k}{(\zeta-a)^{l+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{A_k}{2i\pi} \underbrace{\int_C \frac{(\zeta-a)^k}{(\zeta-a)^{l+1}} d\zeta}_{= \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 2i\pi & k = l \end{cases}} = A_l. \end{aligned}$$



Al igual que las series enteras, con las series de Laurent, en lugar de utilizar la fórmula integral (I.9.1) para determinar la serie de Laurent de una función es preferible utilizar propiedades de series y series ya conocidas.

Ejemplos

- Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Esta función no está definida en $z = i$ y $z = -i$. Determinemos la serie de Laurent en la corona $C(i, 0, 2) = \{z | 0 < |z-i| < 2\}$, remarcando que existen otras tres coronas donde se puede desarrollar en serie de Laurent la función $f(z)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{z-i+2i} \right) \\ &= \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \right) \right). \end{aligned}$$

Como $|z-i|/|2i| < 1$, se tiene

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^k} (z-i)^k \right) \right) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2i)^{k+2}} (z-i)^k.$$

- Consideremos la función $f(z) = 1z(z-)$ y hallems las series de Laurent para las coronas $0 < |z| < 1$ y la corona $1 < |z|$.

3. Como $|z| < 1$, se tiene

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

en la corona $0 < |z| < 1$.

Para la corona $|z| > 1$, se tiene

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

I.9.1. Puntos Singulares Aislados de Funciones Holomorfas

Consideremos una función holomorfa sobre una corona de radio inferior 0, $\{0 < |z - a| < R\}$, sea

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k=-1} a_k(z-a)^k}_{\text{parte principal}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$$

la serie de Laurent respecto a la corona $C(a, 0, R)$. De acuerdo al comportamiento de la parte principal de la serie de Laurent, podemos clasificar el punto a :

i.- $a_k = 0$ para $k < 0$ (la parte principal de la serie de Laurent es nula), en este caso f es holomorfa sobre el disco $D(a, R)$ y se dirá que a es una singularidad suprimible. Por ejemplo

$$\frac{\sin z}{z}$$

tiene 0 como singularidad suprimible.

ii.- Existe $k_0 < 0$ tal que $a_{k_0} \neq 0$ y $a_k = 0$ para $k < k_0$, (la parte principal contiene un número finito de términos no nulos). En este caso, la serie de Laurent es

$$f(z) = a_{k_0}(z-a)^{k_0} + a_{k_0+1}(z-a)^{k_0+1} + \dots + a_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k.$$

Se dirá que a es un polo de orden $-k_0$.

iii.- Existe una infinidad de $k < 0$ con $a_k \neq 0$, (la parte principal contiene una infinidad de términos no nulos). Se dirá que a es una singularidad esencial. Por ejemplo, para $0 < |z|$

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z} \right)^k.$$

Proposición I.9.2 Sea $f : \{z | 0 < |z - a| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces f posee un polo de orden n en a si y solamente si $1/f$ posee un cero de orden n en a .

Demostración.- Se tiene

$$f(z) = a_{-n}(z-a)^{-n} + a_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots = h(z)(z-a)^{-n}.$$

$h(z)$ es holomorfa sobre todo el disco $D(a, r)$ y $h(a) = a_{-n} \neq 0$. Por consiguiente, f tiene un polo de orden n , si y solamente si $h(z)$ es holomorfa y $h(a) \neq 0$, si y solamente si

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \frac{1}{h(a)},$$

si y solamente si $1/f$ tiene un cero de orden n .

□

Corolario I.9.1 f posee una singularidad esencial en a , si y solamente si $1/f$ posee una singularidad esencial en a .

Proposición I.9.3 Sea $f : \{z | 0 < |z - a| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si f es acotada, entonces la singularidad es suprimible.

Demostración.- Consideremos la serie de Laurent de f en la corona $\{z | 0 < |z - a| < r\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k (z - a)^k, \\ a_k &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

con $0 < \rho < r$. Si f es acotada, existe $M > 0$, tal que $|f(z)| \leq M$, por consiguiente

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{k+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^k}.$$

Para $k < 0$, hacemos tender $\rho \rightarrow 0$, lo que conduce $|a_k| = 0$.

□

Corolario I.9.2 Si f posee una singularidad esencial en a , entonces existe una sucesión $z_n \rightarrow a$ tal que $f(z_n) \rightarrow 0$.

Demostración.- Por el absurdo, supongamos lo contrario; es decir que toda sucesión $z_n \rightarrow a$ verifica $f(z_n) \not\rightarrow 0$. Esto es posible, si existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, se tiene

$$0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)| \geq \epsilon.$$

Sino sería posible construir una sucesión con las características señaladas.

Por lo tanto, tomemos $\delta > 0$ con f holomorfa sobre $0 < |z - a| < \delta$, se tiene que $|1/f(z)| \leq \epsilon$ sobre $0 < |z - a| < \delta$, de donde $1/f$ es acotada y a es una singularidad suprimible de acuerdo a la proposición precedente. Lo que conduce a una contradicción.

□

Corolario I.9.3 *f posee una singularidad esencial en a , entonces para todo $c \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $z_n \rightarrow a$ tal que $f(z_n) \rightarrow c$.*

Demostración.- Planteamos $g(z) = f(z) - c$ y aplicamos la proposición precedente.

□

I.10. Residuos y Aplicaciones

El concepto de residuo y sus aplicaciones provienen de manera natural de las Series de Laurent. Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, un conjunto $\mathbb{D} \subset \Omega$ discreto y sea $f : \Omega - \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Por lo tanto, si z^* es un punto singular de f , entonces existe $r > 0$ tal que f es holomorfa sobre la corona $\mathbb{C}(z^*, 0, r)$ y la serie de Laurent respecto a esta corona es

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k (z - z^*)^k,$$

si $z^* \notin \mathbb{D}$, entonces la serie de Laurent se confunde con la serie de Taylor alrededor de x^* .

Definición I.10.1 *Sea $f : \Omega - \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde \mathbb{D} es un conjunto discreto. El residuo de f en el punto $z^* \in \Omega$ es*

$$\text{Res}_{z=z^*}(f) = a_{-1}(z^*) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z^*| = \rho} f(\zeta) d\zeta,$$

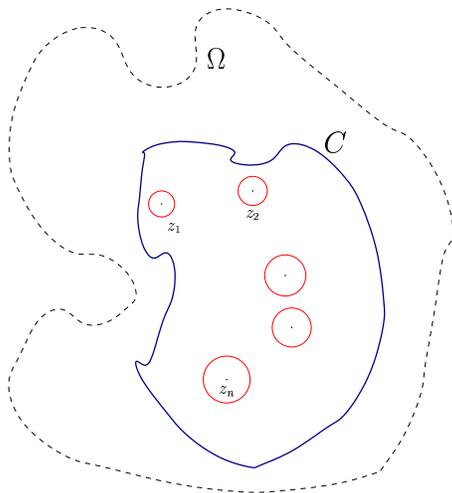
con $\rho > 0$ lo suficientemente pequeño.

Teorema I.10.1 (Teorema de los Residuos) *Sea $f : \Omega - \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde \mathbb{D} es un conjunto discreto $C \subset \Omega$ contorno simple con $C \cap \mathbb{D} = \emptyset$, entonces*

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 2i\pi \left(\sum_{\substack{z^* \in \mathbb{D} \\ z^* \in \text{int } C}} \text{Res}_{z=z^*}(f) \right) \quad (\text{I.10.1})$$

Demostración.- $\text{int } C$ es un conjunto acotado, se tiene $\mathbb{D} \cap \text{int } C$ es un conjunto a lo más finito. Por

consiguiente $\mathbb{D} \cap \text{int } C = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.



Por corolario del teorema de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned} \int_C f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=1}^n \int_{|\zeta - z_k| = \rho_k} f(\zeta) d\zeta \\ &= 2i\pi \left(\sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k}(f) \right). \end{aligned}$$

□

I.10.1. Cálculo de Residuos

Si bien, el residuo de una función f en punto a está definido mediante una integral, la utilización de residuos se justifica para el cálculo de integrales por medio del teorema del residuo. Por consiguiente, la determinación del residuo en un punto singular pasa por la determinación de la serie de Laurent alrededor del punto aislado.

Polos Simples

En este caso

$$f(z) = a_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k.$$

Ahora bien, la función

$$(z - a)f(z) = a_{-1} + a_0(z - a) + \dots$$

es holomorfa en $z = a$, de donde

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(z) = 1/\sin z$, ésta tiene un polo simple en el origen,

$$\text{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{\sin z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

2. Supongamos que la función $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)R(z)},$$

con $P(a) \neq 0$, $R(a) \neq 0$, $Q(a) = 0$ y $Q'(a) \neq 0$, en este caso, se tiene

$$\text{Res}_{z=a}(f(z)) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)(z - a)}{Q(z)R(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(a)}{z - a} R(z)} = \frac{P(a)}{Q'(a)R(a)}.$$

Como ilustración, consideremos $f(z) = \cot z$, esta función tiene polos simples en $z = \pi k$ con k entero, sabiendo que $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, los residuos en los polos simples $z_k = \pi k$, están dados por

$$\operatorname{Res}_{z=z_k}(\cot z) = \frac{\cos(\pi k)}{\cos(\pi k)} = 1.$$

Polos de orden superior

Supongamos que f tiene un polo de orden n en el punto a , el desarrollo de la serie de Laurent alrededor de este polo está dada por

$$f(z) = a_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots.$$

La función $g(z) = f(z)(z-a)^n$ es holomorfa alrededor de a , por que a es una singularidad suprimible para g . El desarrollo en serie de potencias alrededor de a de la función g es por consiguiente

$$g(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots.$$

El residuo buscado de f es el coeficiente del término de grado $n-1$, por consiguiente

$$\operatorname{Res}_{z=a}(f(z)) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(g(z))_{z=a}.$$

Ejemplo

3.- Consideremos la función $f(z) = 1/(1+z^2)^n$, que tiene polos de orden n en $z = \pm i$. Calculemos el residuo en $z = i$. Se tiene

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z)(z-i)^n = \frac{1}{(z+i)^n} = (z+i)^{-n}, \\ a_{-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z+i)^{-n})_{z=i} = \frac{1}{(n-1)!} (-n) \cdot (-n-1) \cdot (-2n+2)(i+i)^{-2n+1}, \\ &= -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, calcular la $n-1$ -sima derivada de una función, generalmente no es una tarea simple por lo que también es útil realizar desarrollos de series de Laurent limitados a un número finito de términos.

Ejemplo

4.- La función $\csc^3 z$ tiene un polo de orden 3 en el origen. Realizando desarrollos en serie de potencias limitados a un número finito de términos, se tiene

$$\begin{aligned} \csc^3 z &= (z - z^3/3! + \mathcal{O}(z^5))^{-3} = z^{-3}(1 - z^2(1/3! + \mathcal{O}(z^2)))^{-3} \\ &= z^{-3}(1 - \binom{-3}{1} z^2(1/3! + \mathcal{O}(z^2)) + \cdots) \\ &= z^{-3}(1 + z^2/2 + \cdots) = z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-1} + \cdots. \end{aligned}$$

de donde

$$\operatorname{Res}_{z=0}(\csc^3 z) = \frac{1}{2}.$$

I.10.2. Cálculo de Integrales

Una de las aplicaciones de los residuos está dada por el cálculo de integrales definidas y/o impropias reales. A continuación veremos algunas situaciones típicas, en las cuales la utilización de residuos permite fácilmente evaluar integrales.

1. **Integrales del tipo:** $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Donde $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ polinomios.

Suponemos además que $Q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Planteando $z = e^{i\theta}$ y γ la circunferencia unitaria, la integral se convierte

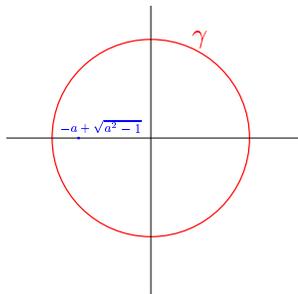
$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Ejemplo

5.- Consideremos la integral, con $|a| > 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta,$$

que mediante la transformación dada más arriba, se convierte en



$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = -2i \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz$$

Ahora bien $f(z) = 1/(z^2 + 2az + 1)$ tiene un polo simple al interior de la circunferencia dado por $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, que dicho sea de paso es real. El residuo de $f(z)$ en z_1 es

$$\text{Res}_{z=z_1}(f(z)) = \frac{1}{2z_1 + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

aplicamos el teorema de los residuos y obtenemos

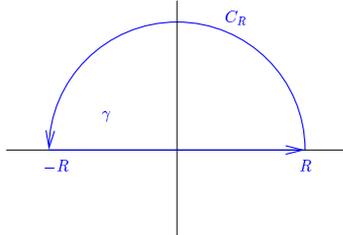
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = (-2i)(2i\pi) \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

2. **Integrales del tipo:** $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$

Donde $R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si por ejemplo $\deg P(x) + 2 \leq \deg Q(x)$, se tiene $\lim_{z \rightarrow \infty} zP(z)/Q(z) = 0$.

Por consiguiente la integral impropia en cuestión existe y además



$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx.$$

Observando la figura, si γ es el contorno cerrado, C_r la mitad de la circunferencia, se tiene

$$\int_{-r}^r R(x) dx = \int_{\gamma} R(z) dz - \int_{C_r} R(z) dz,$$

Pasando al límite, se verifica

$$\left| \int_{C_r} R(z) dz \right| \leq \pi r \max_{z \in C_r} |P(z)/Q(z)| \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

Para el contorno γ , el teorema de los residuos da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} R(z) dz = 2i\pi \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ \Im z_i > 0}} \text{Res}_{z=z_i}(R(z)),$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2i\pi \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ \Im z_i > 0}} \text{Res}_{z=z_i}(R(z)).$$

Ejemplo

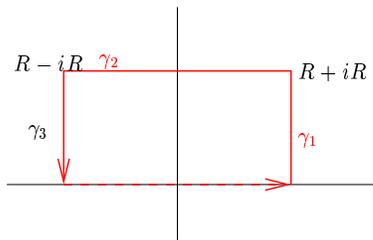
6.- La integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \pi \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} \tag{I.10.2}$$

porque i es un polo de orden n , el único que se encuentra en el semiplano complejo superior y utilizando el resultado del ejemplo 3 se llega al resultado enunciado.

3. **Integrales del tipo** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$

Donde $f(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Para resolver este tipo de integrales, al igual que se ha hecho en el caso precedente, la idea es construir un contorno en el semiplano superior o inferior, de manera que el recorrido que no se encuentra sobre la recta real tienda a O y aplicar el teorema de los residuos.



Consideremos el caso en que $a > 0$, usualmente se toma semicircunferencias para construir un contorno; esta vez, trabajaremos sobre un rectángulo, observando la figura de la derecha, se tienen γ_1 , γ_2 y γ_3 arcos simples que no están sobre la recta real. Para γ_1 , se tiene

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq M(R) \int_0^1 e^{-aRt} R dt = M(R) \frac{1 - e^{-aR}}{a}$$

donde $M(R) = \max |f(z)| \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$. De esta manera la integral sobre γ_1 tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. Similarmente la integral sobre γ_3 tiende a 0. Para el arco γ_2 , se tiene la mayoración

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq M(R) \int_{-R}^R e^{-R} dt = 2M(R)e^{-R}R \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow 0$.

Para $a < 0$ se procede de la misma manera, pero tomando el rectángulo en el semiplano inferior.

Ejemplo

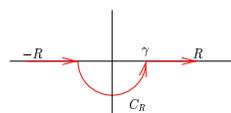
7.- Determinar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx.$$

La función $f(z) = \sin z/z$ tiene una singularidad (suprimible en $z=0$), por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0^+}} \left(\int_{-R}^{-\delta} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx \right).$$

Ahora bien, en lugar de considerar el intervalo $[-R, R]$ como habitualmente hemos hecho, consideramos el recorrido dado por $\gamma = [-R, -\delta] + C_\delta + [\delta, R]$, ver figura. Se tiene



$$\int_{-R}^{-\delta} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = \int_{\gamma} \left(\frac{\sin z}{z} \right) dz - \int_{C_\delta} \left(\frac{\sin z}{z} \right) dz.$$

Por otro lado $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, por lo que

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\sin z}{z} \right) dz = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{2iz} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz.$$

Para $e^{iz}/2iz$ agregamos a γ un recorrido, de manera que obtengamos un rectángulo en el semiplano superior. Esta función tiene un polo simple en $z = 0$, de donde

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{2iz} dz = 2i\pi \operatorname{Res}_{z=0}(e^{iz}/(2iz)) = \pi.$$

Para $e^{-iz}/2iz$ agregamos a γ un recorrido, de manera que obtengamos un rectángulo en el semiplano inferior, esta función no tiene polos en el interior del rectángulo, por lo tanto

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz = 0$$

Hacemos tender $R \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0_+$, obteniendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = \pi.$$

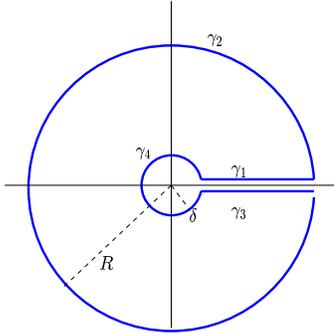
4. **Integrales del tipo $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$**

Donde $-1 < \alpha < 1$ y $f(z)$ es una función holomorfa que no se anula sobre el semieje positivo real, $z^{1+\alpha}f(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ y que satisface

$$(xe^{i2\pi})^\alpha f(xe^{i2\pi}) = \beta x f(x). \tag{I.10.3}$$

Para encontrar el valor de la integral, consideramos el recorrido

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$



donde γ_1 es el segmento de origen $\delta > 0$ y llegada $R > 0$, γ_2 es la circunferencia de radio R , γ_3 es el segmento de origen R y llegada δ y finalmente γ_4 es la circunferencia de radio δ .

La condición sobre $z^{1+\alpha}f(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ hace que la integral sobre γ_1 tienda a 0 cuando $R \rightarrow \infty$.

La condición $-1 < \alpha < 1$ hace que la integral sobre γ_4 tienda a 0 cuando $\delta \rightarrow 0_+$.

Aplicando el teorema de los residuos sobre el contorno γ , se tiene

$$\int_{\gamma} z^{\alpha} f(z) dz = 2i\pi \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ z_i \neq 0}} z_i^{\alpha} \text{Res}_{z=z_i}(f(z)), \quad (\text{I.10.4})$$

tomando como determinación del logaritmo, aquella en que $\arg(-1) = \pi$.

Gracias a I.10.3, la integral sobre γ_3 , vale

$$\int_R^{\delta} (xe^{i2\pi})^{\alpha} f(xe^{i2\pi}) dx = -\beta \int_{\delta}^R x^{\alpha} f(x) dx.$$

Por lo tanto, haciendo tender $R \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0_+$, y utilizando I.10.4, se obtiene

$$(1 - \beta) \int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx = 2i\pi \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ z_i \neq 0}} z_i^{\alpha} \text{Res}_{z=z_i}(f(z)).$$

Suponiendo que $\beta \neq 0$, se deduce fácilmente que

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx = \frac{2i\pi}{1 - \beta} \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ z_i \neq 0}} z_i^{\alpha} \text{Res}_{z=z_i}(f(z)).$$

Ejemplo

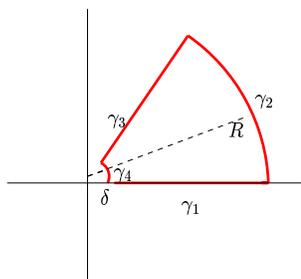
8.- Determinar la integral de Euler

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx \quad 0 < a < b. \quad (\text{I.10.5})$$

Observando el contorno, para este tipo de integrales, la condición $a > 0$ asegura que la integral sobre γ_4 tienda a 0 cuando δ tiende a 0 y la condición $a < b$ asegura que la integral sobre la circunferencia de radio R tienda a 0 cuando $R \rightarrow \infty$.

Sin embargo, es muy posible que en esta integral no se pueda cumplir la condición I.10.3; por lo

que, en lugar de elegir el contorno sugerido más arriba, elegimos otro contorno.



La novedad consiste en tomar como γ_3 el segmento de recta de dirección dada por $e^{i\theta}$ donde $\theta = 2\pi/b$. Existe un único polo simple en el interior del contorno dado por $z = e^{i\theta/2}$.

Haciendo tender δ a 0 y R al infinito, se tiene

$$(1 - e^{i\theta(a-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = 2i\pi \frac{e^{i(a-1)\theta/2}}{be^{i(b-1)\theta/2}} = -2i\pi \frac{e^{ia\theta/2}}{b}$$

porque $e^{ib\theta/2} = -1$.

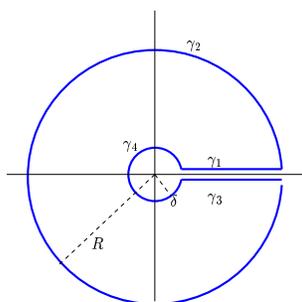
Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = -\frac{\pi e^{ia\theta/2}}{b \frac{1-e^{i(a-1)\theta}}{2i}} = \frac{\pi i}{b} \frac{1}{\sin \frac{a\pi}{b}}$$

5. **Integrales del tipo** $\int_0^\infty \log x R(x) dx$

Donde $R(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional que no se anula sobre el semi eje real positivo y $\deg P + 2 \leq \deg Q$. Para resolver esta integral consideramos la función

$$f(z) = \log^2 z R(z), \tag{I.10.6}$$



con determinación del argumento dada por $\arg(-1) = \pi$ y el contorno de la figura de la izquierda.

Mayoreros las integrales sobre los diferentes arcos, sobre γ_2 el arco de circunferencia de radio R , se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} (\log z)^2 R(z) dz \right| &\leq (2\pi R)(\log^2 R + 4\pi^2) + \mathcal{O}(R^{-2}) \\ &= \log^2 R \mathcal{O}(R^{-1}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $R \rightarrow 0$.

De la misma manera

$$\left| \int_{\gamma_4} (\log z)^2 R(z) dz \right| \leq (2\pi\delta)(\log^2 \delta + 4\pi^2)\mathcal{O}(1) = \log^2 \delta \mathcal{O}(\delta) \rightarrow 0$$

cuando $\delta \rightarrow 0$.

Luego

$$\int_{\gamma_1} (\log z)^2 R(z) dz = \int_\delta^R \log^x R(x) dx, \quad \int_{\gamma_3} (\log z)^2 R(z) dz = \int_R^\delta (\log x + i2\pi)^2 R(x) dx.$$

Por consiguiente

$$\int_{\gamma_1} (\log z)^2 R(z) dz + \int_{\gamma_3} (\log z)^2 R(z) dz = -2i\pi \int_\delta^R \log x R(x) dx + 4\pi^2 \int_\delta^R R(x) dx.$$

Aplicamos el teorema de los residuos, hacemos tender $\delta \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, para obtener

$$\int_0^\infty \log x R(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{z_i \text{ polo} \\ z_i \neq 0}} \log^2(z_i) \text{Res}_{z=z_i}(R(z)) - i\pi \int_0^\infty R(x) dx. \tag{I.10.7}$$

Ejemplo

9.- Calcular la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$

Utilizamos las fórmulas (I.10.7) y (I.10.2) con $n = 1$. La función $R(z) = 1/(1+z^2)$ tiene polos simples en $z = i$ y $z = -i$, de donde

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8i} + \frac{9\pi}{-8i} \right) - \frac{\pi^2}{2} i = 0.$$

6. Integrales de otro tipo

Referirse a textos de consulta, como Variable Compleja de la Serie Schaum.

I.10.3. Valor Principal de Cauchy

En el curso de Primer Año de Análisis se trató el concepto de integral impropia y la característica esencial era que el límite de la integral no dependía de los límites de las extremidades.

Definición I.10.2 Sea $f : \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. El valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, si existe, está dado por

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{a_1-\delta} f(x) dx + \int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} f(x) dx + \dots + \int_{a_n+\delta}^R f(x) dx \right). \quad (\text{I.10.8})$$

Ejemplo

1. Se tiene

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 0.$$

Remarca.- La definición de valor principal dada por (I.10.8), presenta dos límites, uno alrededor de los puntos singulares y otro límite en las extremidades. Esta definición puede adaptarse a otras situaciones, donde el valor principal puede tener cierto rol.

Remarca.- Si una integral impropia existe, obviamente existe su valor principal y este es igual a la integral impropia.

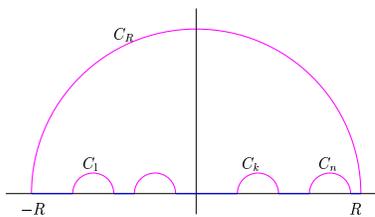
Teorema I.10.2 Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{H} = \{z | \Im z \geq 0\} \subset \Omega$ abierto. Si f es holomorfa sobre Ω , salvo en z_1, z_2, \dots, z_n , si $\Im z_k = 0$ z_k es un polo simple y si además

$$\int_{C_R} f(z) \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty, \quad C_R = \{Re^{it} | t \in [0, \pi]\},$$

entonces

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2i\pi \sum_{\substack{z_k \text{ punto singular} \\ \Im z_k > 0}} \text{Res}_{z=z_k}(f(z)) + i\pi \sum_{\substack{z_k \text{ polo simple} \\ \Im z_k = 0}} \text{Res}_{z=z_k}(f(z)) \quad (\text{I.10.9})$$

Demostración.- Consideramos el contorno γ dado por la semicircunferencia C_R de radio R , los segmentos $[a_k + \delta, a_{k+1} - \delta]$ y las semicircunferencias $C_k = \{z = a_k + \delta e^{it} | t \in [\pi, 2\pi]\}$.



Para $R > 0$ lo suficientemente grande y $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño se tiene, por el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{\substack{z_k \text{ punto singular} \\ \Im z_k > 0}} \text{Res}_{z=z_k}(f(z)) \quad (\text{I.10.10})$$

Por otro lado, si z_k polo simple con $\Im z_k = 0$, se tiene alrededor de z_k

$$f(z) = \frac{\text{Res}_{z=z_k}(f(z))}{z - z_k} + g_k(z)$$

con g_k holomorfa, de donde

$$\int_{C_k} f(z) dz = -i\pi \text{Res}_{z=z_k}(f(z)). \quad (\text{I.10.11})$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \left(\int_{-R}^{a_1-\delta} f(x) dx + \int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} f(x) dx + \dots + \int_{a_n+\delta}^R f(x) dx \right) &= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz - \sum_{\substack{z_k \text{ polo simple} \\ \Im z_k = 0}} \int_{C_k} f(z) dz \\ &= 2i\pi \sum_{\substack{z_k \text{ punto singular} \\ \Im z_k > 0}} \text{Res}_{z=z_k}(f(z)) + i\pi \sum_{\substack{z_k \text{ polo simple} \\ \Im z_k = 0}} \text{Res}_{z=z_k}(f(z)) - \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

Pasando a los límites se tiene el resultado deseado. □

I.11. Funciones Meromorfas

Definición I.11.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, Se dirá que $f : \Omega - \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa es meromorfa, si \mathbb{D} es un conjunto discreto y para todo $z \in \mathbb{D}$ z es un polo o singularidad suprimible. Denotamos por $\mathfrak{M}(\Omega)$ el conjunto de funciones meromorfas sobre Ω .

Proposición I.11.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío, entonces $\mathfrak{M}(\Omega)$ es un cuerpo que prolonga \mathbb{C} .

Demostración.- Ejercicio. □

Ejemplos

1. $\mathbb{C}(z) = \{R(z) = P(z)/Q(z) | P, Q \text{ polinomio, } Q \neq 0\}$ el conjunto de las funciones racionales sobre \mathbb{C} es un subcuerpo de $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$. La verificación es un simple ejercicio.
2. Las funciones trigonométricas $\cos z$, $\sin z$, $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$ y $\csc z$ son funciones meromorfas. De las cuales, excepto $\sin z$ y $\cos z$ tienen una infinidad de polos simples.

I.11.1. Desarrollo en Fracciones Parciales de Funciones Meromorfas

Para las funciones racionales, la descomposición en fracciones parciales es conocida desde hace 300 años y es muy útil, por ejemplo en integración. Consideremos la fracción

$$f(z) = \frac{6z^4 - 20z^2 + 4z + 19}{(z-1)^3(z+2)^2} \quad (\text{I.11.1})$$

Tenemos un polo de orden 3 en $z = 1$ y uno de orden 2 en $z = -2$.

Las series de Laurent, alrededor de coronas de centros $z = 1$ y $z = -2$ están dadas por:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} - \frac{8}{27} - \frac{7}{27}(z-1) + \frac{2}{27}(z-1)^2 + \dots, \quad (\text{I.11.2})$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3}{z+2} - \frac{34}{27} - \frac{14}{27}(z+2) - \frac{17}{81}(z+2)^2 + \dots \quad (\text{I.11.3})$$

Denotando las partes principales de estos desarrollos por

$$p_1(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} \quad \text{y} \quad p_2(z) = -\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3}{z+2}, \quad (\text{I.11.4})$$

la función $f(z) - p_1(z) - p_2(z)$ tiene ningún polo y por consiguiente es holomorfa sobre todo \mathbb{C} , como $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ y por el teorema de Liouville, esta diferencia es 0. Por lo tanto, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} - \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3}{z+2} \quad (\text{I.11.5})$$

que es un desarrollo en fracciones parciales de $p(z)$.

Caso de una infinidad de polos

El resultado (I.11.5) nos hace pensar que es posible expresar funciones meromorfas en desarrollos de fracciones parciales, inclusive en el caso en que la función en cuestión tenga una infinidad de polos.

Este es el caso de $\cot z$ y $\csc z$ que presentan polos simples en $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene

$$\text{Res}_{z=k\pi}(\cot z) = 1, \quad \text{y} \quad \text{Res}_{z=k\pi}(\csc z) = (-1)^k, \quad (\text{I.11.6})$$

de donde tomando las partes principales se obtendría:

$$\begin{aligned} \cot z &= \text{[Gráfico de cot z con polos en } k\pi \text{]} \\ &= \dots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.11.7})$$

$$\begin{aligned} \csc z &= \text{[Gráfico de csc z con polos en } k\pi \text{]} \\ &= \dots + \frac{1}{z+2\pi} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.11.8})$$

Ahora bien, (I.11.5) es correcto, porque trabajamos con un número finito de términos y por que la función f tiende a 0 cuando z tiende a infinito. En el caso de una infinidad de polos existe dos inconvenientes: el primero, tanto (I.11.7), como (I.11.8) no son sumas finitas, sino al contrario son series, por lo que es necesario hacer un análisis de convergencia; segundo, $f(z) \not\rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$.

En consecuencia, es necesario proceder de otra manera. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa. Consideramos una sucesión de contornos C_n tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int } C_n = \mathbb{C}$ y para todo n no hay polos de f sobre C_n .

Para $k \in \mathbb{N}$ dado, planteamos

$$g_k(z) = f(z) - \sum_{\substack{z_j \in \text{Int } C_k \\ z_j \text{ polo}}} p_j(z) \quad (\text{I.11.9})$$

donde p_k es la parte principal del desarrollo de Laurent alrededor del polo z_j . Puesto que C_k es acotado y f es meromorfa, la suma (I.11.9) es finita y la función g_k es holomorfa en el dominio definido por C_k . Aplicando la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$g_k(z) = \int_{C_k} \frac{g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in \text{Int } C_k,$$

es decir

$$f(z) = \sum_{\substack{z_j \in \text{Int } C_k \\ z_j \text{ polo}}} p_j(z) + \int_{C_k} \frac{g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in \text{Int } C_k, \quad (\text{I.11.10})$$

Ahora bien,

$$\int_{C_k} \frac{g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{\substack{z_j \in \text{Int } C_k \\ z_j \text{ polo}}} \int_{C_k} \frac{p_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

y las integrales, para $R > 0$ arbitrariamente grande, se tiene

$$\int_{C_k} \frac{p_j(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{|\zeta|=R} \frac{p_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow 0,$$

cuando $R \rightarrow \infty$, de donde (I.11.10), puede escribirse como

$$f(z) = \sum_{\substack{z_j \in \text{Int } C_k \\ z_j \text{ polo}}} p_j(z) + \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in \text{Int } C_k, \quad (\text{I.11.11})$$

Teorema I.11.1 (Series de fracciones parciales) *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa, denotamos por p_k la parte principal del desarrollo de la serie de Laurent de f alrededor del polo z_k . Si existe una sucesión $\{C_n\}$ de contornos, con $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \mathbb{C}$, tal que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tenga*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (\text{I.11.12})$$

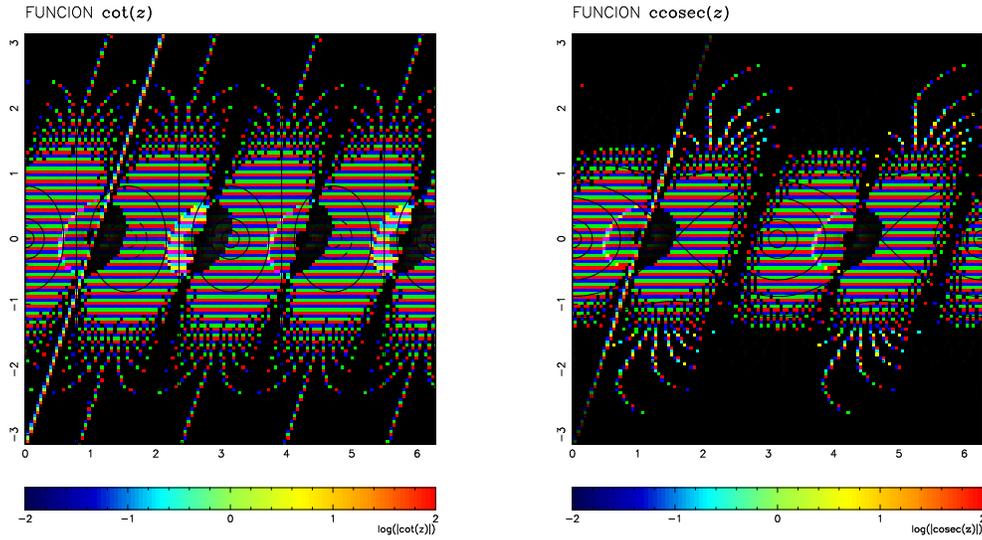
entonces, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se tiene

$$f(z) = \sum_{z_k \text{ polo}} p_k(z). \quad (\text{I.11.13})$$

Si además para $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ compacto, se tiene para todo $z \in \mathcal{M}$

$$\left| \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \kappa_n \rightarrow 0 \quad (\text{I.11.14})$$

cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la serie (I.11.13) converge uniformemente sobre \mathcal{M} .

Figura I.11.1: Mapas de $\cot z$ y $\csc z$

Ilustremos el teorema (I.11.1) con la función $\csc z = 1/\sin z$. Esta función tiene polos simples en $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{C}$ y la serie en fracciones parciales conjeturada está dada por la fórmula (I.11.8). Mostremos que esta fórmula es correcta. La segunda gráfica de la figura I.11.1 nos sugiere inmediatamente que contornos elegir. Elegimos como contornos los cuadrados C_n de centro el origen, de lados verticales que pasan por $(\pi/2 + 2(n-1)\pi)$ y lados horizontales que pasan por $i(\pi/2 + 2(n-1)\pi)$. Utilizando el hecho que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta(\zeta - z)}, \quad (\text{I.11.15})$$

se tiene

$$\int_{C_n} \frac{\csc \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_n} \frac{\csc \zeta}{\zeta} d\zeta + \int_{C_n} \frac{z \csc \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta. \quad (\text{I.11.16})$$

La función $\csc \zeta/\zeta$ es una función par, por lo que

$$\int_{C_n} \frac{\csc \zeta}{\zeta} d\zeta = 0, \quad (\text{I.11.17})$$

de donde es suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{z \csc \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0 \quad (\text{I.11.18})$$

Ahora mayoramos $\csc \zeta$ sobre C_n . Comencemos por el lado vertical que pasa por $(\pi/2 + 2(n-1)\pi)$, como \csc es 2π periódica, se tiene $\csc((\pi/2 + 2(n-1)\pi) + iy) = \csc(\pi/2 + iy)$ y por consiguiente, utilizando identidades trigonométricas, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + iy)} &= \frac{1}{\cos(iy)}, \\ \left| \csc(\frac{\pi}{2} + iy) \right| &= \frac{1}{\cosh y} \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{I.11.19})$$

Para el lado horizontal que pasa por $i(\pi/2 + 2(n-1)\pi) = i\delta_n$, se tiene

$$\sin(x + i\delta_n) = \sin x \cos(i\delta_n) + \cos x \sin(i\delta_n) = \sin x \cosh \delta_n - i \cos x \sinh \delta_n,$$

$$\begin{aligned}
|\sin(x + i\delta_n)| &= \sqrt{\cos^2 x \sinh^2 \delta_n + \sin^2 x \cosh^2 \delta_n} \leq \sinh \delta_n \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right), \\
|\csc(x + i\delta_n)| &\leq \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \leq 1.
\end{aligned}
\tag{I.11.20}$$

Como $\csc z$ es una función impar, se tiene sobre el cuadrado C_n , $|\csc \zeta| \leq 1$. Por lo tanto

$$\left| \int_{C_n} \frac{z \csc \zeta}{\zeta(\zeta - z)} dz \right| \leq \frac{1}{r_n(r_n - |z|)} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ donde r_n es el radio de la circunferencia inscrita en C_n . Es fácil, deducir que para un compacto \mathcal{M} , se tiene (I.11.14). Por lo tanto (I.11.8) converge uniformemente.

I.11.2. Número de Ceros y Polos de Funciones Meromorfas

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa sobre un abierto Ω y γ un contorno en Ω tal que f no tenga, ni ceros, ni polos sobre γ .

El campo de vectores

$$\begin{aligned}
\Phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{C} \\
z &\mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}
\end{aligned}$$

está definido y es continuo sobre Ω , excepto sobre los ceros y polos de f . En particular es continuo sobre el arco γ .

Definición I.11.2 (Índice de Cauchy) *El índice de Cauchy, $\text{Ind}(f, \gamma)$, de la función f sobre el contorno γ , es el número de vueltas, (tomando como sentido positivo el movimiento de las manecillas de un reloj), que da el campo Φ al recorrer el contorno γ . Ver figura I.11.2.*

Para un contorno $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, sin polos, ni ceros sobre el contorno, consideremos la función continua

$$\begin{aligned}
\Phi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\
t &\mapsto \vartheta \quad \frac{f(\gamma(t))}{|f(\gamma(t))|} = e^{i\vartheta}.
\end{aligned}
\tag{I.11.21}$$

Esta función está bien definida si se conoce por ejemplo $\Phi(a)$ y su cálculo puede efectuarse cambiando determinaciones del argumento.

Se tiene

$$\text{Ind}(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi} (\Phi(b) - \Phi(a)).
\tag{I.11.22}$$

(I.11.22) muestra que Φ cumple el rol de una primitiva y por consiguiente nos permite pensar que es posible determinar $\text{Ind}(f, \gamma)$ utilizando una integral.

Ahora bien, tal como se ha definido Φ , se utiliza de alguna manera determinaciones de \arg , que no es holomorfa. Sin embargo las determinaciones de \log si lo son y podemos utilizarlas y tendríamos

$$\text{Ind}(f, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} (\log_2(f(\gamma(b))) - \log_1(f(\gamma(a)))) \cdot,
\tag{I.11.23}$$

donde \log_1 y \log_2 son determinaciones de \log de manera que Φ sea continua.

Por otro lado, se tiene

$$\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = (f(\gamma(b))) - \log_1(f(\gamma(a))).
\tag{I.11.24}$$

Por lo tanto, tenemos el teorema siguiente

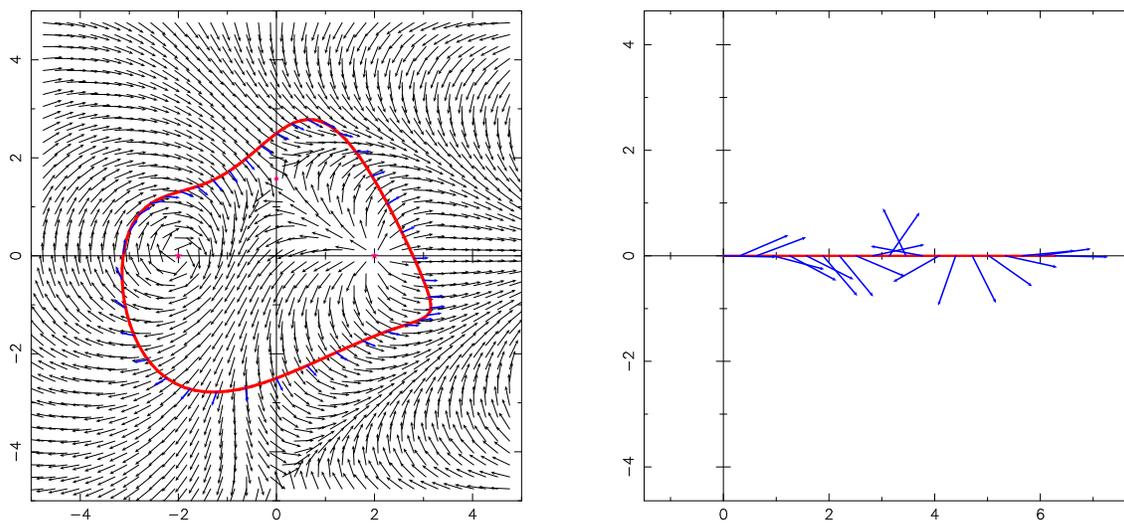


Figura I.11.2: Índice de Cauchy para $f(z) = \frac{z^2 - 4}{e^z - i}$.

Teorema I.11.2 Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y C un contorno en Ω en el cual no hay, ni polos, ni ceros de f , entonces

$$\text{Ind}(f, C) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (\text{I.11.25})$$

Demostración.- Ejercicio

□

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección es bueno recordar el siguiente resultado

Lema I.11.1 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, entonces

a) z_0 es un cero de multiplicidad m , si y solamente si existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y holomorfa en z_0 tal que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0. \quad (\text{I.11.26})$$

b) z_0 es un polo de orden m , si y solamente si existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y holomorfa en z_0 tal que

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z), \quad g(z_0) \neq 0. \quad (\text{I.11.27})$$

Demostración.- Ejercicio

□

Teorema I.11.3 (Principio del Argumento) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y C un contorno sin ceros, ni polos de f , entonces

$$\mathbf{Z} - \mathbf{P} = \text{Ind}(f, C) \quad (\text{I.11.28})$$

donde \mathbf{Z} es el número de ceros, contando su multiplicidad, de f en el interior de C y \mathbf{P} es el número de polos, contando su orden en el interior de C .

Demostración.- Puesto que f es meromorfa y el interior de C es acotado, el número de polos y ceros son en cantidad finita. Denotemos por $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ los ceros y polos, dos a dos diferentes. Con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño aplicamos el corolario 1.6.3 del teorema de Cauchy lo que da

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (\text{I.11.29})$$

Sea z_k un polo o un cero, veamos cada uno de los casos

i) z_k es un polo, supongamos de orden n_k , por el lema precedente se tiene

$$f(z) = (z - z_k)^{-n_k} g(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_k(z - z_k)^{-n_k-1}g(z) + (z - z_k)^{-n_k}g'(z)}{(z - z_k)^{-n_k}g(z)} = -n_k \frac{1}{(z - z_k)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

de donde

$$\int_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -n_k 2i\pi. \quad (\text{I.11.30})$$

ii) z_k es un cero, supongamos de multiplicidad n_k , por el lema precedente se tiene

$$f(z) = (z - z_k)^{n_k} g(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k(z - z_k)^{n_k-1}g(z) + (z - z_k)^{n_k}g'(z)}{(z - z_k)^{n_k}g(z)} = n_k \frac{1}{(z - z_k)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

de donde

$$\int_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_k 2i\pi. \quad (\text{I.11.31})$$

Por lo tanto

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi(\mathbf{Z} - \mathbf{P}),$$

es decir

$$\mathbf{Z} - \mathbf{P} = \text{Ind}(f, C).$$

□

Teorema I.11.4 (Teorema de Rouché) Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, C un contorno con $\text{Int } C \subset \Omega$. Si $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in C$, entonces f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el interior del contorno C .

Demostración.- Consideramos la función definida por $h(t, z) = f(z) + tg(z)$ con $t \in [0, 1]$. Esta función es continua respecto a t y holomorfa respecto a z . Por otro lado, se tiene

$$|h(t, z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0. \quad (\text{I.11.32})$$

Por lo tanto, está bien definido para todo $t \in [0, 1]$

$$\text{Ind}(h(t, z), C) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{h'(t, z)}{h(t, z)} dz$$

Considerando $\text{Ind}(h(t, z), C)$ como una función respecto a t está es continua y que solo toma valores enteros, lo que significa que necesariamente es constante.

□

Índice alfabético

- índice
 - Cauchy, 73
- ángulo
 - orientado, 18
- arco simple, 27
 - división, 28
 - partición, 28
- argumento
 - determinación, 12
- cálculo de integrales
 - residuos, 63
- cambio variable, 33
- Cauchy
 - índice, 73
 - desigualdad, 51
 - teorema, 38
 - valor principal, 68
- Cayley
 - transformación, 24
- cero, 49
 - orden, 49
- complejos
 - adición, 3
 - conjugado, 4
 - cuerpo de los, 4
 - división, 5
 - forma polar, 5
 - módulo, 5
 - multiplicación, 3
 - parte imaginaria, 4
 - parte real, 4
 - sustracción, 5
- conforme
 - función, 18
- contorno, 31
 - simple, 37
 - interior, 37
- convergencia, 6
 - radio, 43
- corona, 55
- cuerpo de los complejos, 4
- desigualdad
 - Cauchy, 51
- determinación
 - argumento, 12
 - principal, 13
 - logaritmo, 13
- división
 - arco simple, 28
- dominio simple, 38
- ecuaciones
 - Cauchy-Riemann, 16
- fórmula
 - Hadamard, 43
- Fórmula de Moivre, 5
- forma polar, 5
- función
 - \mathbb{C} -diferenciable, 15
 - conforme, 18
 - diferenciable, 15
 - entera, 52
 - exponencial, 11
 - holomorfa, 17
 - logaritmo complejo, 12
 - meromorfa, 69
 - parte compleja, 8
 - parte real, 8
 - polinomial, 10
 - representación gráfica, 8
 - trigonométrica
 - compleja, 14
 - inversa, 15
- funciones complejas, 7
- funciones exponenciales, 14
- Hadamard
 - fórmula, 43
- holomorfa, 17
- homografía, 20

- homotecia, 2
- integral
 - recorrido, 30
 - sobre arco simple, 28
- límites, 6
- logaritmo
 - determinación, 13
- logaritmo complejo, 12
- Louiville
 - teorema, 52
- módulo, 5
- meromorfa
 - función, 69
- Morera
 - teorema, 42
- parte imaginaria, 4
 - de una función, 8
- parte principal
 - serie de Laurent, 58
- parte real, 4
 - de una función, 8
- plano complejo, 3
 - compactificación, 7
- polo, 58
- potencias, 13
- primitiva
 - función, 31
- Principio del Máximo
 - teorema, 53
- proyección estereográfica, 7
- radio de convergencia, 43
- recorrido, 30
 - H-V, 34
 - horizontal-vertical, 34
 - integral, 30
 - simple, 37
- representación conforme, 24
- residuo, 60
- residuos
 - cálculo de integrales, 63
 - polo de orden superior, 62
 - polo simple, 61
 - teorema, 60
- rotación, 2
- Rouché
 - teorema, 75
- serie
 - entera, 43
 - Laurent, 55
 - Taylor, 44
- serie de Laurent
 - parte principal, 58
- similitud, 2
- singularidad
 - esencial, 58
 - suprimible, 58
- Taylor
 - serie, 44
- teorema
 - Cauchy, 38
 - Cauchy-Taylor, 44
 - función abierta, 54
 - fundamental del álgebra, 53
 - Louiville, 52
 - Morera, 42
 - Principio del Máximo, 53
 - residuos, 60
 - Rouché, 75
 - valor medio, 52
 - Weistraß, 43
- transformación
 - Cayley de, 24
 - homográfica, 20
- valor medio
 - teorema, 52
- valor principal
 - Cauchy, 68
- Weistraß
 - teorema, 43