Carlos Ivorra Castillo

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

CON APLICACIONES A LA TEORÍA DE NÚMEROS

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo.

Jacques Hadamard

Índice General

Introducción **ix**

Capítulo I: El plano complejo **1**
1.1 Funciones de variable compleja 3
1.2 Transformaciones de Möbius 8
1.3 Las funciones trigonométricas inversas 12
1.4 Arcos 17
1.5 Índices de arcos cerrados 21

Capítulo II: Funciones holomorfas **25**
2.1 Derivación de funciones complejas 26
2.2 La integral curvilínea 32
2.3 El teorema y las fórmulas de Cauchy 41

Capítulo III: Series de Taylor **49**
3.1 Series 50
3.2 Convergencia casi uniforme 56
3.3 Series de potencias 62
3.4 Consecuencias de los desarrollos de Taylor 68

Capítulo IV: Productos infinitos **79**
4.1 Productos numéricos 80
4.2 Productos de funciones 84
4.3 Factorización de funciones holomorfas 91
4.4 Números de Bernoulli 99
4.5 La fórmula de Stirling 106

Capítulo V: El teorema de Cauchy **111**
5.1 El teorema de Cauchy para ciclos 111
5.2 Abiertos simplemente conexos 116
5.3 Series de Laurent 120
5.4 Clasificación de singularidades aisladas 126
5.5 Funciones periódicas 133
5.6 El teorema de Runge 139

Capítulo VI: La función factorial **145**
6.1 Construcción de la función factorial 146
6.2 Otras expresiones para la función factorial 149
6.3 El teorema de Wielandt 152

Capítulo VII: Series de Dirichlet **159**
7.1 Convergencia de las series de Dirichlet 160
7.2 Funciones aritméticas 169
7.3 Permutaciones circulares 181
7.4 El teorema de Dirichlet 184
7.5 La distribución de los números primos 194

Capítulo VIII: El teorema de los residuos **217**
8.1 Residuos 217
8.2 Aplicaciones al cálculo de integrales 220
8.3 El teorema de Rouché 236
8.4 Sumas de Gauss cuadráticas 244

Capítulo IX: Funciones Harmónicas **255**
9.1 Relación con las funciones holomorfas 256
9.2 Propiedades de las funciones harmónicas 259
9.3 Funciones subharmónicas 267
9.4 El problema de Dirichlet 272

Capítulo X: Funciones enteras **279**
10.1 Orden de crecimiento 280
10.2 El teorema pequeño de Picard 290
10.3 El teorema grande de Picard 295

Capítulo XI: La función dseta de Hurwitz **299**
11.1 Definición y prolongación analítica 299
11.2 La ecuación funcional 305
11.3 Los ceros de la función dseta 310
11.4 Funciones L 317

Capítulo XII: Transformaciones conformes **325**
12.1 Transformaciones de Möbius 327
12.2 Dominios simplemente conexos 332
12.3 El teorema de Jordan 342

Capítulo XIII: Funciones multiformes **361**
13.1 Prolongación analítica 361
13.2 Funciones multiformes meromorfas 365
13.3 Singularidades aisladas 368
13.4 Superficies de Riemann 376
13.5 Superficies de gérmenes 381
13.6 Planos tangentes y diferenciales 387

Capítulo XIV: Funciones algebraicas **393**
14.1 Singularidades algebraicas 394
14.2 La configuración analítica de una función algebraica 397
14.3 Raíces de polinomios 401
14.4 Superficies de Riemann compactas 410
14.5 Funciones harmónicas en superficies de Riemann 413

Bibliografía **427**

Índice de Materias **428**

Introducción

Los números complejos son una creación esencialmente algebraica. Cardano introdujo la unidad imaginaria en 1545 para expresar las soluciones, aunque fueran "imaginarias", de las ecuaciones de segundo grado, y desde este momento los algebristas encontraron cada vez más evidencias de que los números imaginarios resultantes de admitir al número i como si fuera un número real más eran suficientes para resolver cualquier ecuación polinómica. Sin embargo, una prueba de esta conjetura tuvo que esperar hasta el siglo XIX, cuando Gauss demostró en su tesis doctoral que todo polinomio con coeficientes complejos se descompone en factores lineales, es decir, que tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}$: éste es el teorema fundamental del álgebra. Otro descubrimiento de Gauss mucho más simple, pero no menos importante, fue que la aritmética de los números complejos, introducida formalmente a partir de la relación $i = \sqrt{-1}$, tiene una interpretación geométrica sencilla si identificamos los elementos de $\mathbb{C}$ con los puntos del plano. Esta interpretación puede considerarse como el punto de partida del estudio analítico de los números complejos. En términos modernos $\mathbb{C}$ recibe la topología de $\mathbb{R}^2$ y la relación de esta topología con su aritmética es la misma que se da en $\mathbb{R}$. En particular tiene sentido la expresión

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

para cualquier función compleja f definida en un entorno del punto z_0. Se abre así una teoría de derivación de funciones complejas similar a su análoga real. Sus sólidos cimientos fueron establecidos por Cauchy en los numerosos artículos que dedicó a esta materia. Como cabe esperar, las funciones derivables en el sentido complejo y las funciones derivables reales comparten sus propiedades básicas con demostraciones prácticamente idénticas (se trata de las propiedades que dependen directamente de la topología y la estructura de cuerpo), pero al profundizar en la teoría pronto se advierte una diferencia esencial con el caso real: mientras que el análisis real es esencialmente geométrico, en el sentido de la mayoría de sus resultados son conjeturables a partir de la interpretación geométrica de la derivada, la geometría apenas interviene en el análisis complejo.

Existe ciertamente una interpretación geométrica de la derivada compleja (o, más precisamente, del módulo y del argumento de la derivada), pero normalmente es de poca ayuda. Pensemos por ejemplo en los dos teoremas siguientes:

- Si una función real derivable tiene un máximo relativo en un punto entonces su derivada es nula en dicho punto.

- Si una función compleja derivable tiene un máximo relativo (en módulo) en un punto entonces es constante.

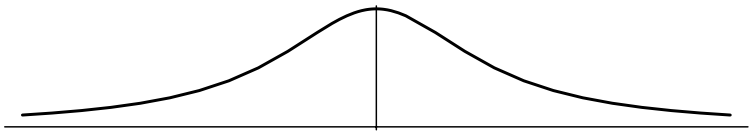
El primero es geométricamente evidente, el segundo no. Sin embargo no hemos de pensar por esto que la derivación compleja es una mera abstracción formal de la derivación real. Lo que sucede es que en lugar de ser una teoría descriptiva superficial, en el sentido de que la distancia entre las definiciones y los teoremas se salva a menudo formalizando ideas geométricas sencillas, la derivación compleja combina las técnicas analíticas con la estética y la profundidad del álgebra, en el sentido de que toda ella gira en torno a unos pocos principios fáciles de enunciar, pero abstractos y lógicamente distantes de las definiciones. Parece como si el origen algebraico del cuerpo complejo impregnase toda la teoría y así, mientras la guía del análisis real es que las funciones derivables son las que admiten tangente en cada punto, en el caso complejo es útil pensar que las funciones derivables son como "polinomios de grado infinito", hecho nada evidente a partir de la definición, pero que vuelve naturales los teoremas básicos. He aquí un ejemplo :

- Si el conjunto de puntos donde una función derivable compleja se anula tiene un punto de acumulación (en el dominio de la función) entonces dicha función es idénticamente nula.

Se trata del análogo infinito al hecho de que si un polinomio se anula en un conjunto infinito de puntos entonces es idénticamente nulo. El caso infinito es un resultado profundo en el sentido de que no es evidente a partir de la definición de derivada, ni aún de los hechos básicos sobre funciones derivables, pero es natural a partir de la analogía con los polinomios que acabamos de explicar.

Este carácter algebraico-analítico de la teoría se refleja en sus aplicaciones. Aunque muchas de ellas pertenecen al análisis real, análisis de Fourier o incluso a la física (mecánica de fluidos, electricidad, etc.), una parte importante corresponde a la teoría de números, y lo más notable es que no sólo permite probar resultados analíticos del tipo de relaciones asintóticas, como el teorema de los números primos, sino también profundos teoremas de enunciados estrictamente aritméticos o algebraicos.

De hecho, muchos de los problemas en que se puede aplicar con éxito la teoría de funciones de variable compleja no muestran en principio relación alguna con los números complejos. Pongamos un ejemplo sencillo pero ilustrativo de este fenómeno.



Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Es una función infinitamente derivable, luego podemos investigar la convergencia de su serie de Taylor alrededor de 0. Si intentamos calcular sus derivadas sucesivas obtenemos expresiones cada vez más complicadas, pero podemos observar que si $|x^2| < 1$ entonces $1/(1 + x^2)$ es la suma de la serie geométrica de razón $-x^2$. Por lo tanto

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Una serie de potencias es siempre su serie de Taylor, luego hemos encontrado el desarrollo de Taylor de la función f. Es inmediato que la serie converge sólo cuando $|x| < 1$. Surge entonces la pregunta de por qué la convergencia se interrumpe en -1. O tal vez no surge. Podría pensarse que esto es así, como acabamos de probar, y que no tiene sentido buscar un porqué más alla de la prueba anterior u otra similar. Sin embargo, la teoría de funciones de variable compleja aporta una explicación más profunda.

Consideremos la función $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/(1 + z^2)$, la extensión natural de la función de partida. El mismo argumento de antes prueba que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Las series de potencias convergen siempre en discos a funciones continuas, y ahora está claro por qué no puede convergen más allá del disco unidad: porque f presenta discontinuidades en los puntos $\pm i$, luego no existe ninguna extensión continua de f a un disco abierto mayor que $|z| < 1$.

La función original f tenía un problema (o mejor dicho, dos problemas), pero fuera de la recta real. Considerar su restricción a $\mathbb{R}$ oscurece la situación, a pesar de que f puede aparecer al abordar un problema que sólo involucre números reales.

Similarmente, las técnicas complejas se aplican al cálculo de límites, integrales, suma de series de funciones, cálculo de series de Fourier, y muchos otros problemas de planteamiento estrictamente real. En este libro veremos muchos ejemplos de este tipo, pero a la hora de mostrar aplicaciones menos sencillas nos hemos inclinado hacia la teoría de números por dos razones. Por una parte es más fácil exponer de forma "casi autocontenida" y motivada problemas aritméticos, a menudo de planteamiento elemental, y por otro lado las aplicaciones a la teoría de números muestran el sorprendente papel de "bisagra" que juega la derivación compleja entre el álgebra y el análisis, que es, a nuestro juicio, una de las características más notables de la teoría.

También debemos recordar que la derivación compleja está relacionada con la geometría deferencial. La memoria de Riemann sobre variedades diferenciables que dio origen a la geometría diferencial moderna estuvo motivada en parte por sus investigaciones sobre la materia que nos ocupa. Veremos algo acerca de esto en los últimos capítulos. También daremos una demostración del teorema de la curva de Jordan basada en las propiedades de los logaritmos complejos.

La mayor parte de este libro está dedicada a exponer los resultados básicos de la teoría, acompañados de numerosas aplicaciones que muestren su potencia. Para seguirla adecuadamente el lector debe conocer los resultados topológicos básicos: propiedades de los espacios compactos, conexos, topología producto, funciones continuas, límites, etc. (por lo general en $\mathbb{R}^n$), los resultados elementales sobre espacios de funciones: convergencia puntual y uniforme, etc. (también para funciones en $\mathbb{R}^n$, especialmente en $\mathbb{R}^2$, aunque una cierta familiaridad con el caso de $\mathbb{R}$ puede ser suficiente), así como los resultados fundamentales del análisis real: diferenciabilidad, integrales, series, etc. (incluyendo la teoría básica de la integral de Lebesgue). Algunas aplicaciones a la teoría de números requieren la aritmética elemental (números primos, divisores, etc.) y un mínimo de álgebra (no más allá de saber qué es un grupo o un anillo cociente).

Para acabar debo hacer constar que la primera versión de los ocho primeros capítulos del libro (aproximadamente) fue elaborada conjuntamente con mi amiga Pilar Rueda, y a ella le deben mucho de lo que son. Sin duda, en los capítulos posteriores se echará de menos su buen criterio y su eficiencia pues, en contra de lo que ambos hubiéramos deseado, tuvimos que descomponer nuestro proyecto común en dos proyectos independientes, uno de los cuales termina en este libro.

Capítulo I

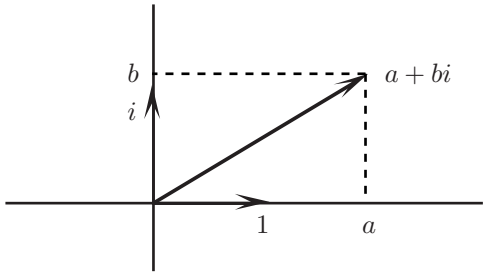
El plano complejo

Dedicamos este primer capítulo a introducir los conceptos básicos relacionados con los números complejos junto con algunos resultados analíticos y topológicos que vamos a necesitar más adelante. Recordemos que los *números complejos* son de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la *unidad imaginaria,* caracterizada por que $i^2 = -1$. Esta ecuación, junto a las leyes de cuerpo, determina la suma y el producto de los números complejos, pues

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Los números reales a y b de la expresión binómica anterior están unívocamente determinados por el número complejo z. Se llaman respectivamente *parte real* ($\operatorname{Re} z$) y *parte imaginaria* ($\operatorname{Im} z$) de z. Esta unicidad nos permite identificar el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con el espacio $\mathbb{R}^2$, asociando a cada número $a + bi$ el par ordenado (a, b). Esto nos da una interpretación geométrica de $\mathbb{C}$ como el conjunto de todos los puntos de un plano coordenado, de modo que los números reales ocupan el eje horizontal (eje real) mientras que el eje vertical (eje imaginario) está ocupado por los números de la forma bi, llamados también *imaginarios puros.*



Con esta identificación, las funciones $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ son simplemente las proyecciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Existe un único automorfismo de $\mathbb{C}$ que fija a los números reales (y no es la identidad), llamado *conjugación* y que viene dado por $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$. Geométricamente se trata de la simetría respecto al eje real. Como ya hemos dicho, la conjugación es un automorfismo, es decir, cumple

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

Además $\overline{\overline{z}} = z$ y $z = \overline{z}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$.

La norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ se corresponde con el *módulo* de un número complejo

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

De las propiedades de la conjugación se deduce inmediatamente que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Notemos que el módulo extiende al valor absoluto en $\mathbb{R}$, por lo que usamos la misma notación. Puesto que $z\overline{z} = |z|^2$, para $z \neq 0$ se cumple $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

Consideraremos a $\mathbb{C}$ como espacio topológico con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, que es la topología dada por el módulo, o también la topología producto inducida por $\mathbb{R}$.

Es costumbre usar llamar *discos* a lo que en la teoría general de espacios métricos se llaman bolas. Usaremos la notación

$$D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}.$$

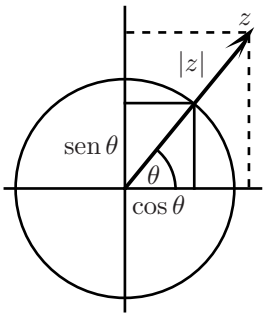
Los discos cerrados los expresaremos como las clausuras de los discos abiertos:

$$\overline{D(z_0, \epsilon)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \epsilon\}.$$

Conviene extender el plano complejo $\mathbb{C}$ añadiéndole un punto infinito, con lo que obtenemos el espacio compacto $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde los entornos abiertos de ∞ son los complementarios de los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

La proyección estereográfica nos da un homeomorfismo entre $\mathbb{C}^\infty$ y una esfera, por lo que a $\mathbb{C}^\infty$ se le llama *esfera de Riemann.* Formalmente no necesitaremos este hecho.

Además de la representación binómica $a + bi$, todo número complejo admite la *representación polar,* de la forma $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.



Si $z \neq 0$, el número real θ está determinado por z salvo múltiplos enteros de 2π y se llama *argumento* de z. Así, todo número complejo $z \neq 0$ está unívocamente determinado por su módulo y por uno cualquiera de sus argumentos. Llamaremos $\operatorname{Arg} z$ al conjunto de los argumentos de z. Tenemos que si θ es un argumento de z entonces

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

1.1 Funciones de variable compleja

Las funciones de variable real más importantes admiten una extensión natural a funciones de variable compleja. El caso más simple es el de los polinomios. Cada polinomio con coeficientes reales define una función sobre $\mathbb{C}$ que extiende a la función que define sobre $\mathbb{R}$. Claramente se trata de una función continua. Más aún, todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ define una función continua en $\mathbb{C}^\infty$ si admitimos que $p(\infty) = \infty$.

Lo mismo ocurre con las funciones racionales, con la precaución de que toman el valor infinito en los puntos donde se anulan sus denominadores (en ∞ se extienden con el valor del límite, finito o infinito, y el resultado es siempre una función continua). Por ejemplo, la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

toma el valor ∞ en $\pm i$ y toma el valor 0 en ∞.

Quizá la función real más importante sea la función exponencial. Ésta admite una extensión al plano complejo que es sin duda la función más importante de variable compleja. La definición que vamos a dar puede parecer muy artificial, pero veremos enseguida que así se conservan las muchas propiedades de la función real, y más adelante probaremos que es la única extensión posible derivable en todo punto en el sentido de derivabilidad compleja que definiremos en el capítulo siguiente.

Definición 1.1 Definimos la *función exponencial* $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y. \tag{1.1}$$

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de la exponencial compleja. Todas ellas se demuestran sin ninguna dificultad a partir de las propiedades de la exponencial real y las funciones trigonométricas.

Teorema 1.2 *La función exponencial compleja es continua y extiende a la exponencial real. Además verifica*

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,

b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$,

c) $|e^{a+bi}| = e^a$,

d) $e^z \neq 0$,

e) $e^{-z} = 1/e^z$.

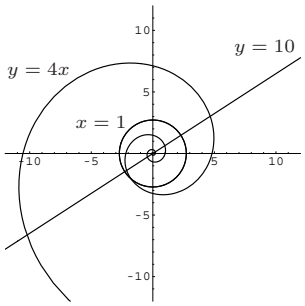
Las funciones complejas presentan el inconveniente de que no pueden ser representadas gráficamente, ya que su gráfica tiene cuatro dimensiones. Para hacernos una idea del comportamiento de la exponencial podemos fijarnos en cómo transforma las rectas.

Por ejemplo, si fijamos x, al variar y la expresión (1.1) describe un círculo de centro 0 y radio e^x, luego la función exponencial biyecta el conjunto de las rectas verticales con el de los círculos de centro 0.

Si por el contrario fijamos la variable y, entonces (1.1) recorre todos los múltiplos positivos del vector unitario $(\cos y, \operatorname{sen} y)$, es decir, la imagen de una recta horizontal es una semirrecta.

En el caso de una recta oblicua, resulta que a medida que "avanzamos" por la recta aumentan tanto el módulo como el argumento de las imágenes, por lo que el resultado es una espiral, lo que se conoce como una *espiral logarítmica.*

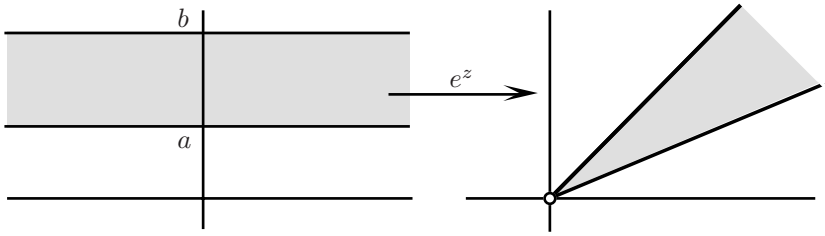
La figura muestra las imágenes por la función exponencial de las rectas $x = 1$, $y = 10$ e $y = 4x$.



Centrémonos en las rectas horizontales. Si llamamos $S_\alpha = \{e^x + ia \mid x \in \mathbb{R}\}$, es decir, la semirrecta formada por todos los números complejos de argumento α, hemos visto que S_α es la imagen por la función exponencial de la recta $y = \alpha$. Una banda de anchura menor que 2π, esto es, un conjunto de la forma

$$\{x + i\alpha \mid x \in \mathbb{R},\ a < \alpha < b\} \qquad \text{con } b - a < 2\pi$$

es la unión de las rectas horizontales de altura $a < \alpha < b$, luego su imagen por la función exponencial será la unión de las semirrectas S_α con $a < \alpha < b$, o sea, un ángulo de $b - a$ radianes:

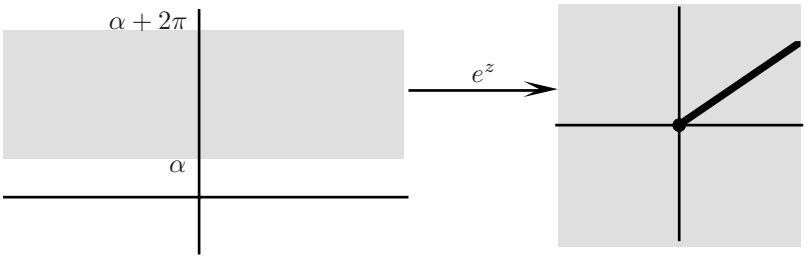


Así pues, la función exponencial biyecta las bandas con los ángulos. La mayor banda que podemos tomar sin perder la biyectividad es la de anchura 2π, siempre que la tomemos abierta (o al menos semiabierta).

Teorema 1.3 *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la función exponencial biyecta la banda abierta*

$$\{x + iy \mid x \in \mathbb{R},\ \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$$

con el abierto $H_\alpha = \mathbb{C} \setminus (S_\alpha \cup \{0\})$, es decir, con el complementario de la semirrecta cerrada de argumento α.



DEMOSTRACIÓN: Si un número complejo $z \neq 0$ no tiene argumento α, tiene un argumento y de manera que $\alpha < y < \alpha + 2\pi$. Si $|z| = e^x$, entonces $z = e^{x+iy}$, luego la función exponencial entre los conjuntos considerados es suprayectiva.

Para probar la inyectividad vemos primero que $e^{x+iy} = 1$ si y sólo si

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1, \text{ si y sólo si } e^x = 1, \cos y = 1 \text{ y } \operatorname{sen} y = 0,$$
$$\text{si y sólo si } x = 0 \text{ e } y = 2k\pi \text{ para cierto } k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto $e^{z_1} = e^{z_2}$ si y sólo si $e^{z_1 - z_2} = 1$, si y sólo si $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ para un $k \in \mathbb{Z}$.

Si tomamos z_1 y z_2 en una banda abierta de anchura 2π, esta condición equivale a $z_1 = z_2$, luego la función exponencial es biyectiva sobre estas bandas. ∎

Definición 1.4 Un número complejo L es un *logaritmo* de otro número z si cumple $e^L = z$. Llamaremos $\operatorname{Log} z$ al conjunto de todos los logaritmos de z.

Del teorema anterior se deduce que todo número complejo no nulo tiene infinitos logaritmos, aunque vamos a verlo directamente:

Si $L = a + bi$ es un logaritmo de z, entonces $z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$, luego $|z| = e^a$ y por lo tanto $a = \log|z|$. Por definición, b es un argumento de z.

Recíprocamente, es obvio que si θ es un argumento de z, entonces $L = \log|z| + i\theta$ es un logaritmo de z. Así pues, hay una biyección entre los logaritmos de z y los argumentos de z dada por

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Log} z & \longrightarrow & \operatorname{Arg} z \\ L & \mapsto & \operatorname{Im} L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Arg} z & \longrightarrow & \operatorname{Log} z \\ \theta & \mapsto & \log|z| + i\theta \end{array}$$

En particular, si L_1 y L_2 son logaritmos de z, entonces $L_1 = L_2 + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$ y, si L_1 es un logaritmo de z, entonces $\operatorname{Log} z = \{L_1 + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos la función $\log_\alpha : H_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ como la inversa de la restricción de la función exponencial a la franja $\alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi$. Equivalentemente, si $z \in H_\alpha$ entonces $\log_\alpha z$ es el único logaritmo de z cuya parte imaginaria está en $]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Con más detalle, $\log_\alpha z = \log|z| + i \arg_\alpha z$, donde $\arg_\alpha z$ es el único argumento de z en el intervalo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

A las funciones $\log_\alpha$ y $\arg_\alpha$ se las llama *ramas uniformes*[1] del logaritmo y el argumento en H_α.

Teorema 1.5 *Para cada número real α, las ramas uniformes* $\arg_\alpha : H_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\log_\alpha : H_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ *son continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Dada la relación $\log_\alpha z = \log|z| + i\arg_\alpha z$, basta probar que $\arg_\alpha$ es continua.

Si $z \in H_\alpha$, entonces $z = |z|e^{i\theta}$, donde $\theta = \arg_\alpha z \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Por lo tanto $e^{-i\alpha}z = |z|e^{i(\theta-\alpha)}$ tiene argumento $\theta - \alpha \in]0, 2\pi[$, es decir, $e^{-i\alpha}z \in H_0$. Además $\arg_0(e^{-i\alpha}z) = \theta - \alpha$, luego $\arg_\alpha z = \alpha + \arg_0(e^{-i\alpha}z)$. Por consiguiente basta probar que $\arg_0$ es continua.

Llamemos $S = \{e^{i\theta} \mid 0 < \theta < 2\pi\}$. La función $f : H_0 \longrightarrow S$ dada por $f(z) = z/|z|$ es continua y conserva los argumentos, es decir, $\arg_0 z = \arg_0 f(z)$. Por lo tanto basta probar la continuidad de la restricción a S de $\arg_0$, es decir, de la inversa de la función $g :]0, 2\pi[\longrightarrow S$ dada por $g(\theta) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.

A su vez ésta es consecuencia de la continuidad de las funciones

$$\arccos :]-1, 1[\longrightarrow]0, \pi[\,, \qquad \operatorname{arcsen} :]-1, 1[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

pues sobre el conjunto $\{z \in S \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ se cumple $g^{-1}(z) = \arccos \operatorname{Re} z$, sobre $\{z \in S \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ es $g^{-1}(z) = 2\pi - \arccos \operatorname{Re} z$ y sobre $\{z \in S \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ tenemos $g^{-1}(z) = \pi - \operatorname{arcsen} \operatorname{Im} z$, y estos tres conjuntos son abiertos en S y cubren todos sus puntos. ∎

En la práctica no usaremos la notación $\log_\alpha$, sino que diremos que log es el logaritmo que toma argumentos entre α y $\alpha + 2\pi$. Si no se indica lo contrario, log representará al logaritmo con argumentos entre $-\pi$ y π. De este modo, si $r \in \mathbb{R}$, su argumento es 0, luego $\log r \in \mathbb{R}$ y así log extiende a la función logaritmo real.

Observar que no es cierto en general que $\log_\alpha(z_1 z_2) = \log_\alpha z_1 + \log_\alpha z_2$. El segundo miembro es, en efecto, un logaritmo de $z_1 z_2$, pero su parte imaginaria no tiene por qué estar entre α y $\alpha + 2\pi$.

Ahora vamos a extender las funciones seno y coseno. Partiremos del hecho de que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$, luego $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

Nos interesa definir que las extensiones sean derivables en el sentido que definiremos en el capítulo siguiente, pero veremos allí que las funciones parte real y parte imaginaria no son derivables, por lo que si definiéramos $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$ y $\operatorname{sen} z = \operatorname{Im} e^{iz}$ no obtendríamos funciones derivables. Esto se resuelve observando que en general $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2$, $\operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/2i$.

[1]La palabra "uniforme" no está relacionada con su uso en otros contextos, como en "convergencia uniforme" o "función uniformemente continua". Aquí "función uniforme" se opone a "función multiforme", que es una función que asigna a cada z un conjunto de valores, como ocurre con las funciones Arg y Log. En general, una rama uniforme de una función multiforme F es una función f tal que $f(z) \in F(z)$ para todo z.

Definición 1.6 Llamaremos funciones *seno* y *coseno* a las dadas por

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Con esta definición la derivabilidad será obvia a partir de la derivabilidad de la función exponencial. La prueba del teorema siguiente no presenta ninguna dificultad.

Teorema 1.7 *Las funciones seno y coseno complejas extienden a las correspondientes funciones reales. Además cumplen:*

a) $sen^2 z + cos^2 z = 1$.

b) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$.

c) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

d) Si $k \in \mathbb{Z}$ *entonces* $\operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \operatorname{sen} z$, $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$.

e) $\cos(-z) = \cos z$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.

Sin embargo, no es cierto que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$. Por ejemplo, para todo número real x se cumple

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sen} ix = i\,\frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y estas funciones no están acotadas.

Ahora tenemos definida de forma natural la función *tangente compleja,* dada por $\tan z = \operatorname{sen} z / \cos z$. Esta función está definida en el plano complejo salvo en los puntos donde el coseno se anula que, como vemos a continuación, son exactamente los números reales donde el coseno se anula.

Teorema 1.8 *Los ceros de las funciones seno y coseno complejas son los mismos que los de las funciones reales correspondientes, es decir,*

$$\cos z = 0 \text{ } \textit{si y sólo si } z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \operatorname{sen} z = 0 \text{ } \textit{si y sólo si } z = k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Veámoslo para el coseno. $\cos z = 0$ si y sólo si $e^{iz} = -e^{-iz}$, si y sólo si $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$, si y sólo si $2iz = i\pi + 2k\pi i$, si y sólo si $z = \pi/2 + k\pi$. El caso del seno es análogo. ∎

A partir de la exponencial y el logaritmo se pueden definir otras funciones de interés. Por ejemplo, podemos definir *exponenciales* de base arbitraria no nula:

$$a^z = e^{z \log a},$$

donde $\log a$ es un logaritmo cualquiera de a. Podemos considerar a^z como una función multiforme, aunque es mejor pensar que tenemos infinitas funciones

independientes definidas sobre todo el plano complejo, una para cada logaritmo posible de la base. La exponencial usual se obtiene como caso particular al tomar $\log e = 1$.

También tenemos las funciones *potenciales*:

$$z^a = e^{a \log z}.$$

Éstas son funciones multiformes, de las que podemos separar ramas uniformes continuas (es decir, funciones continuas que asignan a cada z una de sus potencias z^a) en los abiertos donde el logaritmo las tiene, en particular en los abiertos H_α y, por consiguiente, en un entorno de cada punto no nulo. No obstante, si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $z^a = (e^{\log z})^a$, donde las exponenciales del segundo miembro son la función exponencial usual y la exponenciación respecto a enteros, definida algebraicamente en cualquier cuerpo, es decir, z^a es simplemente la exponenciación usual, es una función uniforme y está definida en todo el plano complejo.

De entre las funciones potenciales con exponente no entero, las más importantes son las de exponente $1/n$, donde n es un número natural no nulo. Entonces escribimos $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$, pues claramente $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$, pero debemos recordar que $\sqrt[n]{z}$ es una función multiforme, pues cada número complejo no nulo tiene exactamente n raíces n-simas distintas.

Ejercicio: Probar que dos logaritmos $\log_1 z$ y $\log_2 z$ de un número complejo $z \neq 0$ determinan una misma raíz n-sima $e^{(1/n)\log_1 z} = e^{(1/n)\log_2 z}$ si y sólo si sus partes imaginarias se diferencian en un múltiplo entero de $2n\pi$.

Cada rama uniforme continua del logaritmo determina una rama uniforme continua de la raíz n-sima. En particular todo número complejo no nulo tiene en un entorno una rama uniforme continua de la raíz n-sima. De hecho es fácil ver que en un entorno suficientemente pequeño tiene exactamente n ramas distintas (las que hemos descrito).

1.2 Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius son una familia muy importante de funciones de variable compleja, por lo que les dedicamos esta sección. Son los cocientes no triviales de polinomios de primer grado:

Definición 1.9 Llamaremos *transformaciones de Möbius* a las funciones

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Notar que si fuera $ad - bc = 0$ entonces $M(z)$ sería simplemente una constante. Tal y como hemos comentado en la sección anterior para el caso de

funciones racionales arbitrarias, el dominio de una transformación de Möbius es todo $\mathbb{C}^\infty$ si convenimos en que

$$M(\infty) = \lim_{z\to\infty} M(z) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}^\infty, \qquad M(-d/c) = \infty.$$

Claramente $M : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función continua y tiene inversa

$$M^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

que, como vemos, es también una transformación de Möbius.

En consecuencia las transformaciones de Möbius resultan ser homeomorfismos de $\mathbb{C}^\infty$ en sí mismo. Un cálculo directo muestra que la composición de dos transformaciones de Möbius es de nuevo una transformación de Möbius, luego éstas forman un grupo con la composición de aplicaciones.

Comenzamos el estudio de estas funciones con una propiedad geométrica:

Teorema 1.10 *La imagen de una recta o de una circunferencia por una transformación de Möbius es una recta o una circunferencia.*

Demostración: El teorema no afirma que la imagen de una recta sea una recta y la imagen de una circunferencia sea una circunferencia, sino que las rectas pueden ser transformadas en circunferencias y viceversa.

La circunferencia de centro un punto (a, b) y radio $r > 0$ está formada por los puntos (x, y) que cumplen la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$.

Operando y multiplicando por un número real $A \neq 0$ arbitrario queda:

$$A(x^2+y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2+b^2-r^2) = 0,$$

luego las circunferencias son los conjuntos de puntos que cumplen una ecuación del tipo

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{1.2}$$

donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ (ya que $B^2 + C^2 - AD = A^2r^2$). Recíprocamente, el conjunto de los puntos que cumple una ecuación en estas condiciones es una circunferencia.

Por otra parte si $A = 0$ la ecuación se reduce a $2Bx + 2Cy + D = 0$ que, admitiendo $(B, C) \neq (0, 0)$, es la ecuación de una recta, y toda recta está formada por los puntos que cumplen una ecuación de este tipo.

En resumen, las rectas y las circunferencias son los conjuntos de puntos (x, y) que cumplen una ecuación del tipo (1.2), donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ o bien $A = 0$ y $(B, C) \neq (0, 0)$.

Si consideramos (x, y) como un número complejo z, entonces (1.2) equivale a

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \tag{1.3}$$

donde $E = B + Ci$, y las condiciones sobre los coeficientes son $A = 0$ y $E \neq 0$ o bien $A \neq 0$ y $E\overline{E} - AD > 0$.

Convendremos en que ∞ pertenece a cualquier recta y no pertenece a ninguna circunferencia, luego una recta es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (1.3) con $A = 0$ más el punto ∞ y una circunferencia es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (1.3) con $A \neq 0$.

Consideremos en primer lugar la función $M(z) = 1/z$. El conjunto de los números complejos $z \neq 0$ que cumplen la ecuación (1.3) se transforma en el conjunto de los números complejos no nulos que cumplen

$$A\frac{1}{z\overline{z}} + \overline{E}\,\frac{1}{z} + E\,\frac{1}{\overline{z}} + D = 0$$

o, equivalentemente,

$$Dz\overline{z} + Ez + \overline{E}\,\overline{z} + A = 0.$$

Si $A \neq 0$ y $D \neq 0$ (con lo que $z = 0$ no cumple (1.2)) tenemos que el conjunto inicial era una circunferencia y su imagen también. Si $A \neq 0$ pero $D = 0$ entonces el conjunto inicial era una circunferencia y el final es una recta. El 0 pertenecía a la circunferencia y su imagen es ∞, que pertenece a la recta.

Si $A = 0$ y $D \neq 0$ tenemos una recta que no pasa por 0 y se transforma en una circunferencia. El 0 está en la imagen porque es la imagen de ∞, que estaba en la recta. Finalmente si $A = D = 0$ tenemos una recta que pasa por 0 y que se transforma en otra recta que pasa por 0 (de modo que 0 e ∞ se intercambian).

Así pues, el teorema es cierto para la función $1/z$. Análogamente se puede comprobar que es válido para una función del tipo $M(z) = az + b$, aunque también se puede probar geométricamente teniendo en cuenta que en tal caso $M(z)$ consiste en la homotecia $z \mapsto |a|z$, seguida del giro de ángulo $\arg z$ y seguida de la traslación $z \mapsto z + b$, y todas estas operaciones conservan rectas y circunferencias.

En el caso general (si $c \neq 0$) expresamos

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)},$$

con lo que M se expresa como composición de tres transformaciones de Möbius que ya sabemos que conservan o intercambian rectas y circunferencias, a saber, $z \mapsto cz + d$, seguida de $z \mapsto 1/z$, seguida de

$$z \mapsto \frac{bc-ad}{c}\,z + \frac{1}{c}.$$

El caso $c = 0$ es claro. ∎

Con más precisión, si M es una transformación de Möbius y $M(z_0) = \infty$, entonces las imágenes de las rectas y circunferencias que pasan por z_0 han de contener a ∞, luego han de ser rectas, y las imágenes de las rectas y circunferencias que no pasan por z_0 no han de contener a ∞, luego han de ser circunferencias.

Por otra parte, tanto las rectas como las circunferencias dividen a $\mathbb{C}^\infty$ en dos componentes conexas (dos semiplanos o el interior y exterior de la circunferencia) y es obvio que si una función M transforma una recta/circunferencia A en una recta/circunferencia B, entonces M es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}^\infty \setminus A$ y $\mathbb{C}^\infty \setminus B$, luego biyecta sus dos componentes conexas, es decir, si por ejemplo M transforma una recta en una circunferencia, entonces M envía los puntos de uno de los semiplanos definidos por la recta al interior de la circunferencia y los puntos del otro semiplano al exterior.

Teorema 1.11 *Toda transformación de Möbius M deja fijo al menos a un punto de $\mathbb{C}^\infty$ y si M no es la identidad entonces tiene a lo sumo dos puntos fijos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Supongamos primero que $c = 0$ (luego $d \neq 0$, $a \neq 0$). Entonces se cumple $M(\infty) = \infty$, luego M tiene un punto fijo. En el plano finito $M(z) = z$ tiene a lo sumo la solución $b/(d-a)$ (siempre que $a \neq d$), luego en total hay a lo sumo dos puntos fijos. Ahora supongamos $c \neq 0$, con lo que $M(\infty) = a/c \neq \infty$, luego ∞ no es un punto fijo. Tampoco lo es el punto $-d/c$, pues su imagen es ∞. Entre los puntos restantes, la ecuación $M(z) = z$ equivale a $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, que tiene una o dos soluciones en $\mathbb{C}$. ∎

En la prueba anterior hemos usado el teorema fundamental del álgebra. Daremos una prueba de este resultado en el capítulo III (la cual, por supuesto, no usará el teorema anterior).

Una consecuencia del teorema anterior es que si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad. El teorema siguiente generaliza considerablemente este hecho.

Teorema 1.12 *Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de $\mathbb{C}^\infty$ y w_1, w_2, w_3 son también distintos entre sí (aunque no necesariamente distintos de los anteriores) existe una única transformación de Möbius M que cumple $M(z_1) = w_1$, $M(z_2) = w_2$, $M(z_3) = w_3$.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad es consecuencia del teorema anterior: si dos transformaciones M y N cumplen estas condiciones entonces MN^{-1} deja fijos a z_1, z_2, z_3, luego es la identidad y por lo tanto $M = N$.

Supongamos que z_1, z_2, z_3 son finitos y que $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$. Para que una transformación

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

cumpla $M(z_1) = 0$ se ha de cumplir que $az_1+b = 0$, o sea, que $az+b = a(z-z_1)$. Del mismo modo la condición $M(z_2) = \infty$ equivale a $cz + d = x(z - z_2)$. Así pues,

$$M(z) = \frac{a}{c}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

La condición $M(z_3) = 1$ determina el cociente

$$\frac{a}{c} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

y el resultado es

$$M(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\,\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Es claro que esta transformación cumple lo pedido.

Si uno de los puntos z es infinito es fácil ver que la función que resulta de tomar límites en la expresión anterior cumple lo buscado. Concretamente sirven las funciones

$$M(z) = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}, \quad M(z) = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}, \quad M(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

según sea $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$ o $z_3 = \infty$.

En general podemos obtener dos transformaciones M y N tales que

$$M(z_1) = 1, \quad M(z_2) = \infty, \quad M(z_3) = 1,$$

$$N(w_1) = 1, \quad N(w_2) = \infty, \quad N(w_3) = 1,$$

y entonces MN^{-1} es la transformación buscada. ∎

Teniendo en cuenta que por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia es claro que dadas dos rectas/circunferencias existe una transformación de Möbius que transforma una en otra.

1.3 Las funciones trigonométricas inversas

Las últimas funciones de variable compleja que vamos a presentar en este capítulo son las funciones trigonométricas inversas:

$$\operatorname{Arcsen} z, \qquad \operatorname{Arccos} z, \qquad \operatorname{Arctan} z.$$

Definimos el *arco seno* $\operatorname{Arcsen} z$ como el conjunto de todos los números complejos w tales que $\operatorname{sen} w = z$. Similarmente se definen el *arco coseno* y el *arco tangente*. Se trata, pues, de funciones multiformes, y vamos a estudiar la existencia de ramas uniformes continuas. Ante todo, observamos que la relación $\operatorname{sen}(w + \pi/2) = \cos w$ hace que $\operatorname{Arcsen} z = \operatorname{Arccos} z + \pi/2$, en el sentido de que cualquier arco coseno de z se convierte en un arco seno sumándole $\pi/2$ y cualquier arco seno se convierte en un arco coseno restándole $\pi/2$. Esto permite traducir todas las propiedades del arco coseno a propiedades del arco seno, por lo que sólo nos ocuparemos de las funciones $\operatorname{Arccos} z$ y $\operatorname{Arctan} z$.

Teniendo en cuenta la definición que hemos dado de la función coseno, conviene que estudiemos primero la función racional

$$w = \lambda(z) = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Observemos que λ toma el valor ∞ exactamente en los puntos 0 e ∞. Dado $w \in \mathbb{C}$, un número z cumplirá $w = \lambda(z)$ si y sólo si $z^2 - 2wz + 1 = 0$, lo que a su vez equivale a que $z = w + \sqrt{w^2-1}$, donde $\sqrt{w^2-1}$ es cualquiera de las raíces cuadradas de $w^2 - 1$.

Así, si $w \neq \pm 1, \infty$ entonces $w^2 - 1$ es un número complejo no nulo y tiene dos raíces cuadradas distintas, con lo que w tiene exactamente dos antiimágenes por λ (esto último también vale para $w = \infty$). Los puntos $w = \pm 1$ son los únicos que tienen una única antiimagen por λ, a saber, $\lambda(1) = 1$, $\lambda(-1) = -1$.

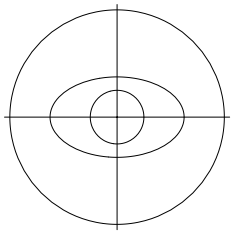
Para comprender con más detalle el comportamiento de λ estudiaremos en primer lugar cómo transforma las circunferencias de centro 0. La circunferencia unitaria $|z| = 1$ es un caso especial. Sus puntos son de la forma $z = e^{it}$, con $t \in \mathbb{R}$, y se transforman en

$$\lambda(z) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t.$$

Por consiguiente la circunferencia unitaria se transforma en el segmento $[-1, 1]$. Geométricamente, λ "aplasta" la circunferencia sobre el segmento, de modo que todos los puntos de éste salvo sus extremos tienen dos antiimágenes por λ, una en el semiplano superior y otra en el inferior.

Consideremos ahora una circunferencia de radio $r > 0$, $r \neq 1$. Sus puntos son de la forma $z = re^{it}$, con $t \in \mathbb{R}$. Al aplicar λ obtenemos

$$w = \lambda(z) = \frac{re^{it} + r^{-1}e^{-it}}{2} = \frac{r^{-1} + r}{2}\cos t - i\,\frac{r^{-1} - r}{2}\operatorname{sen} t. \tag{1.4}$$



Por lo tanto, la circunferencia de radio r se transforma en la elipse cuyos ejes son el eje real y el eje imaginario y cuyos semiejes miden

$$a = \frac{r^{-1} + r}{2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{r^{-1} - r}{2}.$$

La distancia focal c está determinada por la relación $a^2 = b^2 + c^2$, luego es $c = 1$, es decir, los focos son ± 1. En realidad, son dos las circunferencias cuya imagen por λ es dicha elipse, las de radios r y r^{-1}. Cada punto de la elipse tiene exactamente una imagen en cada una de las circunferencias. Es fácil ver que las elipses de focos ± 1 cubren todo el plano complejo menos el intervalo $[-1, 1]$. Por consiguiente λ biyecta tanto el disco abierto $D(0, 1)$ como el complementario del disco cerrado $\overline{D(0, 1)}$ con $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

La observación siguiente tendrá importancia un poco más abajo: Si $r > 1$ entonces $-(r^{-1} - r)/2 > 0$, luego la fórmula (1.4) muestra que z y $\lambda(z)$ están en el mismo semiplano respecto al eje real. Así, los puntos de la semicircunferencia $\operatorname{Im} z > 0$ se transforma en la semielipse $\operatorname{Im} z > 0$. Por el contrario, si $r < 1$ entonces la semicircunferencia $\operatorname{Im} z > 0$ se transforma en la semielipse $\operatorname{Im} z < 0$. Como consecuencia, los puntos $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ se transforman en el semiplano $\operatorname{Im} z < 0$, mientras que los puntos $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ se transforman en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$.

Estudiemos ahora la forma en que λ transforma las semirrectas de origen en 0, es decir, de la forma $z = te^{i\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo y $t > 0$. De forma similar a (1.4) obtenemos que

$$w = \lambda(z) = \frac{t^{-1} + t}{2} \cos\alpha - i\,\frac{t^{-1} - t}{2} \operatorname{sen}\alpha.$$

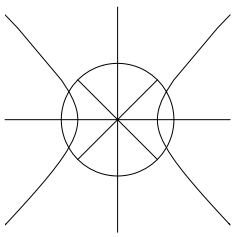
Si suponemos $\cos\alpha \neq 0 \neq \operatorname{sen}\alpha$ y llamamos $w = u + iv$, podemos despejar

$$t^{-1} + t = \frac{2u}{\cos\alpha}, \qquad t^{-1} - t = -\frac{2v}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Elevando al cuadrado y restando queda

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1.$$

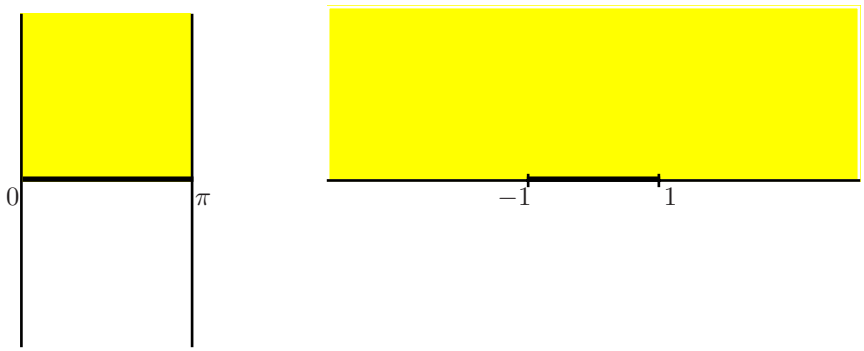
Esto implica que la imagen de la semirrecta está contenida en la hipérbola cuyos ejes son el eje real y el eje imaginario y sus semiejes miden $a = \cos\alpha$, $b = \operatorname{sen}\alpha$. De nuevo los focos son ± 1.



Con más detalle, cuando t varía entre 0 y 1 la expresión $(t^{-1}+t)/2$ varía entre $+\infty$ y 1, y cuando t varía entre 1 y $+\infty$ vemos que $(t^{-1} + t)/2$ varía entre 1 y $+\infty$. Por otra parte, el signo de $(t^{-1} - t)/2$ permanece constante en cada uno de los dos casos. La conclusión es que λ transforma la semirrecta $t > 1$ en el cuarto de hipérbola (media rama) situado en el mismo cuadrante que la semirrecta, y el segmento $0 < t < 1$ en el cuarto de hipérbola situado en el cuadrante conjugado al del segmento. Las cuatro semirrectas exceptuadas se estudian aparte sin dificultad.

Todo esto se aplica claramente a la función coseno. En efecto, $\cos z$ puede obtenerse componiendo la función $z \mapsto iz$, con la función $z \mapsto e^z$ y luego con la función λ.

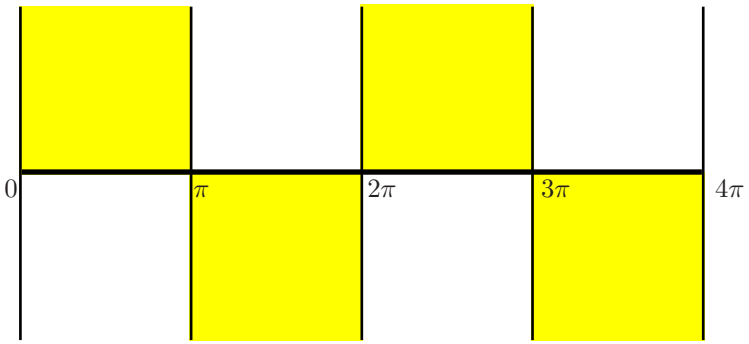
Consideremos la banda vertical $0 < \operatorname{Re} z < \pi$. La función iz la transforma en la banda horizontal $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, la función exponencial la transforma en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (cada recta horizontal se transforma en una semirrecta de argumento entre 0 y π) y por último la función λ transforma el semiplano en todo el plano complejo menos las semirrectas $]-\infty, -1]$ y $[1, +\infty[$ (el semicírculo unitario abierto se transforma en el semiplano inferior, la semicircunferencia en el segmento $]-1, 1[$ y el complementario del semicírculo cerrado se transforma en el semiplano superior). Si llamamos G a este abierto, tenemos que el coseno biyecta la banda $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ con el conjunto G. Si precisamos el argumento veremos que la parte superior de la banda, $\operatorname{Re} z > 0$, se transforma en el semiplano superior y la parte inferior $\operatorname{Re} z < 0$ en el semiplano inferior, mientras que el segmento $]0, \pi[$ se transforma en $]-1, 1[$.



Las semirrectas $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ y $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ se transforman ambas en $]1, +\infty[$, e igualmente las semirrectas $\operatorname{Re} z = \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ y $\operatorname{Re} z = \pi$, $\operatorname{Im} z < 0$ se transforman ambas en $]-\infty, -1[$.

Ejercicio: Determinar cómo transforma el coseno una recta vertical y una recta horizontal.

El comportamiento de la función coseno en la banda $\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$ se sigue fácilmente de la relación $\cos z = -\cos(z - \pi)$. Es fácil ver que la semibanda superior se transforma ahora en el semiplano inferior y viceversa. Como el coseno tiene periodo 2π, ya sabemos su comportamiento sobre todas las bandas $k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi$, para todo entero k.



Sobre el eje real, el coseno se comporta como es conocido, y toma imágenes en el intervalo $[-1, 1]$. Las zonas sombreadas (abiertas) se transforman biyectivamente en el semiplano superior y las zonas blancas en el inferior. Las semirrectas verticales que separan las bandas se transforman unas en la semirrecta $]1 + \infty[$ y otras en $]-\infty, -1[$.

Esto muestra la existencia de ramas uniformes sencillas de la función arco coseno. Por ejemplo, la inversa de $\cos z$ restringida a la banda $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ es una rama uniforme de la función arco coseno definida sobre el abierto G, pero tenemos otras posibilidades. También podemos restringir $\cos z$ a la semibanda $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$, y entonces obtenemos una rama uniforme del arco coseno definida sobre $\mathbb{C}$ menos la semirrecta $[-1, +\infty[$. Similarmente podemos

definir una rama uniforme del arco coseno sobre $\mathbb{C}$ menos la semirrecta $]-\infty,1]$. Vamos a probar que todas estas ramas uniformes son continuas. Más en general, vamos a ver que si la función coseno restringida a un abierto de $\mathbb{C}$ que no contenga múltiplos de π es inyectiva, entonces su inversa en una rama uniforme continua del arco coseno.[2]

Para ello basta ver que si $\cos z_0 = w_0$ (con $w_0 \neq \pm 1$) existe una rama uniforme continua del arco coseno definida en un entorno de z_0 y que tal que $\arccos w_0 = z_0$.

En efecto, admitamos esto y sea $f : A \longrightarrow B$ la inversa de la restricción de la función coseno a un abierto B, de modo que $A \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. Sea $w_0 \in A$ y $z_0 = f(w_0)$. Entonces $w_0 = \cos z_0$ y podemos tomar un entorno V de w_0 en el que esté definida una rama uniforme continua g del arco coseno tal que $g(w_0) = z_0$. Restringiéndolo podemos suponer $V = g^{-1}[B]$. Así, si $w \in V$ se cumple $f(w)$, $g(w) \in B$ y $\cos f(w) = \cos g(w) = w$, luego $f(w) = g(w)$. Por lo tanto f y g coinciden en V y así f es continua en w_0.

Para probar la existencia de ramas uniformes continuas del arco coseno las construiremos a partir de logaritmos y raíces cuadradas. Notemos que si

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

despejando resulta que $(e^{iz})^2 - 2we^{iz} + 1 = 0$, luego

$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

y en conclusión

$$z = \frac{1}{i}\,\log\bigl(w + \sqrt{w^2 - 1}\,\bigr), \tag{1.5}$$

donde hay que entender que elegimos una raíz cuadrada y un logaritmo. Recíprocamente, cualquier número de la forma (1.5) es un arco coseno de w. Si partimos de un número complejo $w \neq \pm 1$ entonces $w^2 - 1 \neq 0$, luego podemos tomar una rama uniforme continua de la raíz cuadrada en un entorno, y $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$ (pues en caso contrario elevaríamos al cuadrado y resultaría $1 = 0$), con lo que podemos tomar una rama uniforme continua del logaritmo en un entorno. En definitiva, todo $w \neq \pm 1$ tiene en un entorno una rama uniforme continua del arco coseno dada por (1.5), donde el logaritmo y la raíz cuadrada son ahora ramas uniformes continuas de estas funciones, elegidas adecuadamente.

Esto es lo que queríamos probar, pero se cumple más. Localmente, toda rama uniforme continua es de esta forma. En efecto, si $f(w)$ es una rama uniforme continua del arco coseno definida alrededor de un punto $w_0 \neq \pm 1$, entonces podemos tomar otra de la forma (1.5) definida en un entorno conexo Ω de w_0 contenido en el dominio de f. Entonces

$$f(w) = \frac{1}{i}\,\log\bigl(w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}\,\bigr) + 2k_w\pi,$$

[2]En realidad esto es consecuencia inmediata del teorema de la función inversa 8.15.

donde $\epsilon_w = \pm 1$ y $k_w \in \mathbb{Z}$. La función

$$e^{if(w)} = w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}$$

es continua, lo que obliga a que ϵ_w sea continua, y por tanto constante, en Ω. De aquí se sigue que k_w también es continua y también es constante. Cambiando $\sqrt{w^2-1}$ por $\epsilon\sqrt{w^2-1}$ obtenemos otra rama uniforme continua de la raíz cuadrada y cambiando $\log\bigl(w + \epsilon_w\sqrt{w^2-1}\bigr)$ por $\log\bigl(w + \epsilon_w\sqrt{w^2-1}\bigr) + 2k\pi i$ obtenemos otra rama uniforme continua del logaritmo con las cuales f tiene la forma (1.5).

Más sencillo es el caso del arco tangente. Si

$$w = \tan z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

entonces

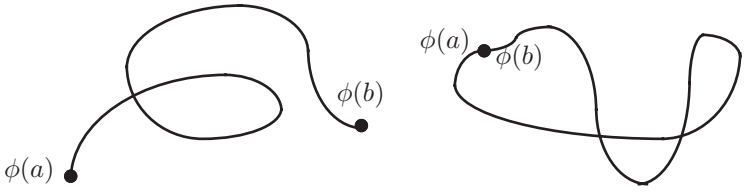
$$z = \frac{1}{2i}\,\log\frac{1 + iw}{1 - iw},$$

para una elección adecuada del logaritmo. Recíprocamente, esta expresión determina un arco tangente de w para cualquier elección del logaritmo. Puesto que la expresión dentro del logaritmo es una transformación de Möbius M, concluimos que la función multiforme Arctan tiene las mismas propiedades que la función logaritmo con las variaciones obvias que exige M. Así, al igual que el logaritmo tiene ramas uniformes continuas en un entorno de cada punto distinto de 0 (y de ∞), la función arco tangente tiene ramas uniformes continuas en un entorno de cada punto distinto de $\pm i$. Al igual que el logaritmo tiene ramas uniformes continuas en $\mathbb{C}^\infty$ menos las semirrectas que conectan 0 e ∞, la función arco tangente tiene ramas uniformes continuas menos en los arcos de circunferencia que conectan a i con $-i$, incluyendo el segmento de extremos $\pm i$ y las dos semirrectas verticales de extremos $\pm i$.

1.4 Arcos

Una importante herramienta topológica en el estudio del plano complejo es el concepto de *arco,* que estudiaremos en esta sección.

Definición 1.13 Un *arco* es una aplicación continua $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Llamaremos *rango* del arco ϕ al conjunto $\phi^* = \phi\bigl[[a, b]\bigr]$, que es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Los puntos $\phi(a)$ y $\phi(b)$ se llaman *extremos* de ϕ. Concretamente $\phi(a)$ es el *punto inicial* de ϕ y $\phi(b)$ es el *punto final.* Diremos que ϕ es un *arco cerrado* si $\phi(a) = \phi(b)$.



Arco Arco cerrado

Es importante que un arco no es el conjunto de puntos ϕ^*, sino la aplicación ϕ, pues ϕ contiene más información que ϕ^*. Por ejemplo, ϕ determina sus extremos en un orden fijo mientras que ϕ^* no lo hace.

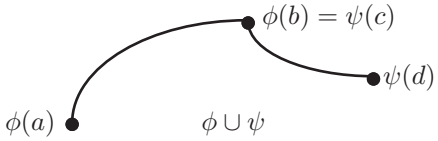
Definición 1.14 Si $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un arco, su *arco opuesto* será el arco $-\phi : [-b,-a] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $(-\phi)(t) = \phi(-t)$.

Geométricamente, $-\phi$ es el mismo arco que ϕ salvo que está recorrido en sentido contrario.

Consideremos dos arcos $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que ϕ y ψ pueden unirse, o que existe su unión, si $\phi(b) = \psi(c)$, en cuyo caso definimos el arco $(\phi \cup \psi) : [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$(\phi \cup \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \psi(t-b+c) & \text{si } b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

Geométricamente $\phi \cup \psi$ es el arco que se obtiene al recorrer ϕ y seguidamente recorrer ψ. Es claro que $(\phi \cup \psi)^* = \phi^* \cup \psi^*$, así como que el punto inicial de $\phi \cup \psi$ es $\phi(a)$ y el punto final es $\psi(d)$.



Los arcos más sencillos son los segmentos. Definimos el *segmento* de extremos z_1 y z_2 como el arco $[z_1, z_2] : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $[z_1, z_2](t) = (1-t)z_1 + tz_2$.

Una *poligonal* es una unión finita de segmentos. Es un hecho conocido de la topología de $\mathbb{R}^2$ que si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y z_1, $z_2 \in \Omega$, entonces existe una poligonal de extremos z_1 y z_2 cuyo rango está contenido en Ω.

Definición 1.15 Diremos que una aplicación $f :]c,d[\longrightarrow \mathbb{C}$ es *derivable* si lo es como función $f :]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, es decir, si las funciones $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f :]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables en el sentido del análisis real. En tal caso se define la derivada $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$. La función f es de clase C^1 si su derivada es continua.

Diremos que un arco $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es *derivable* si se puede extender a una aplicación de clase C^1 en un intervalo abierto que contenga al intervalo $[a,b]$. Notemos que entonces que $\phi' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no depende de la extensión considerada ni siquiera sobre los extremos a y b.

Es conocido que los arcos derivables son rectificables, en el sentido de que se les puede asignar una *longitud.* Además ésta puede calcularse por la fórmula siguiente, que nosotros adoptaremos como definición:

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|\, dt.$$

Por ejemplo, para calcular la longitud de un segmento $[z_1, z_2]$ observamos que su derivada es constante y vale $z_2 - z_1$, por lo que su longitud es $|z_2 - z_1|$, es decir, la distancia entre sus extremos.

Ejemplo Consideremos los arcos $\phi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dados ambos por $t \mapsto e^{it}$. Claramente cumplen que $\phi^* = \psi^*$ (ambos conjuntos son la circunferencia de centro 0 y radio 1), pero su longitud no es la misma. En efecto, $\phi(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, luego $\phi'(t) = -\operatorname{sen} t + i \cos t$ y por consiguiente $|\phi'(t)| = 1$. Así pues

$$L(\phi) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \quad L(\psi) = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi.$$

Lo que sucede es que ϕ recorre una vez la circunferencia, mientras que ψ da dos vueltas. ∎

Si ϕ es un arco derivable lo mismo le sucede a $-\phi$. Más aún, $(-\phi)'(t) = -\phi(-t)$, de donde

$$L(-\phi) = \int_{-b}^{-a} |\phi'(-t)|\, dt = -\int_b^a |\phi'(t)|\, dt = L(\phi).$$

Es de esperar que $L(\phi \cup \psi) = L(\phi) + L(\psi)$, lo cual es esencialmente cierto, pero aparece el problema de que la unión de arcos derivables no es necesariamente derivable en el punto de unión. En lugar que imponer condiciones para que lo sea, conviene trabajar con una familia más amplia de arcos:

Definición 1.16 Diremos que un arco $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es *derivable a trozos* si existen puntos

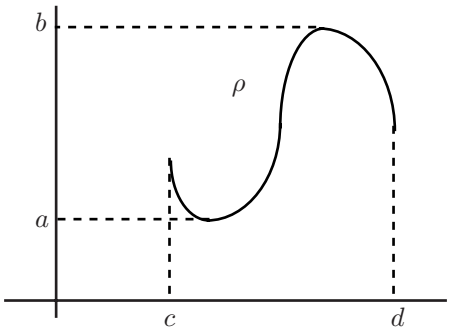
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de modo que la restricción de ϕ a cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ sea un arco derivable.

Por ejemplo, las poligonales son arcos derivables a trozos. Podemos definir la longitud de un arco en estas condiciones como la suma de las longitudes de los trozos donde es derivable. No es difícil probar que esta longitud no depende de la partición que se elija. La unión de arcos derivables a trozos es de nuevo un arco derivable a trozos y ahora se cumple evidentemente la relación $L(\phi \cup \psi) = L(\phi) + L(\psi)$.

La definición de arco que hemos dado contiene algunos elementos arbitrarios de los que conviene prescindir. Por ejemplo, dados dos puntos z_1 y z_2, si escribimos explícitamente las definiciones de los segmentos $[z_1, z_2]$ y $-[z_2, z_1]$ veremos que no son exactamente el mismo arco, pues el dominio del primero es $[0, 1]$ y el del segundo es $[-1, 0]$. Por lo demás ambos tienen los mismos extremos en el mismo orden, el mismo rango y la misma longitud. En todos los contextos en que necesitaremos trabajar con arcos será indistinto considerar uno u otro. Ello nos lleva a introducir un concepto de equivalencia de arcos.

Observemos en primer lugar que si $\rho : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es una aplicación continua y suprayectiva y $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un arco, entonces la composición $\psi = \rho \circ \phi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un arco que cumple $\psi^* = \phi^*$. No obstante ambos arcos distan mucho de ser "equivalentes". Por ejemplo, si ρ es como indica la figura



entonces el arco ψ comienza en un punto intermedio de ϕ, retrocede hasta su punto inicial, avanza hasta su punto final y retrocede hasta otro punto intermedio. En particular ϕ y ψ tienen distintos extremos y (admitiendo que sean derivables) distinta longitud.

Para evitar esto debemos exigir que ρ sea biyectiva, con lo que necesariamente ha de ser monótona creciente o decreciente. En el primer caso ϕ y ψ tendrán los mismos extremos. En el segundo los tendrán intercambiados, que es lo que sucede al pasar de un arco a su opuesto, donde $\rho(t) = -t$. Estas consideraciones nos llevan a la definición siguiente:

Definición 1.17 Diremos que dos arcos $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ son *equivalentes* si existe una función $\rho : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ biyectiva, monótona creciente y continua tal que $\psi = \rho \circ \phi$.

De este modo, dos arcos equivalentes tienen el mismo rango y los mismos extremos en el mismo orden. Cuando trabajemos con arcos derivables a trozos exigiremos que ρ sea también derivable a trozos, con lo que además se cumple que dos arcos equivalentes tienen la misma longitud. En efecto, podemos suponer que ϕ, ψ y ρ son derivables, pues en general podemos restringirnos a un número finito de intervalos donde así ocurra. Aplicando la regla de la cadena a las partes real e imaginaria de ψ obtenemos la relación

$$\psi'(t) = (\operatorname{Re}\phi)'(\rho(t))\rho'(t) + (\operatorname{Im}\phi)'(\rho(t))\rho'(t) = \phi'\big(\rho(t)\big)\rho'(t),$$

y el teorema de cambio de variable nos da

$$L(\psi) = \int_c^d |\psi'(t)|\,dt = \int_c^d \big|\phi'\big(\rho(t)\big)\big|\,\rho'(t)\,dt = \int_a^b |\phi'(t)|\,dt = L(\phi).$$

Notemos que ρ' no necesita valor absoluto porque ρ es monótona creciente, luego $\rho' > 0$.

Es evidente que la equivalencia de arcos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Una familia de arcos equivalentes representa una misma forma de moverse de un punto a otro por un mismo camino. Si pensamos en $\phi(t)$ como la posición de un móvil en el instante t, entonces la equivalencia de arcos hace abstracción del sistema de referencia temporal (tanto da viajar entre el instante 0 y el instante 1 como entre el instante -1 y el instante 0) así como de la velocidad del móvil.

1.5 Índices de arcos cerrados

En toda la teoría posterior será muy importante el número de vueltas que da un arco cerrado $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ alrededor de un punto z. Para que esto tenga sentido es necesario que ϕ no pase por z. Supongamos en primer lugar que $z = 0$. El número complejo $\phi(t)$ tendrá un argumento $\theta(t)$. En realidad tiene infinitos, como ya sabemos, pero probaremos enseguida que es posible hacer una elección $t \mapsto \theta(t)$ que resulte continua sobre todo el dominio del arco. Por ejemplo, si $[a,b] = [0,2\pi]$ y $\phi(t) = e^{it}$, entonces una determinación continua del argumento es $\theta(t) = t$. Observamos que, aunque $\phi(0) = \phi(2\pi) = 1$, tenemos $\theta(0) \neq \theta(2\pi)$, pues al ir aumentando de forma continua el argumento, al dar una vuelta completa hemos acumulado 2π radianes. En general, $\theta(a)$ y $\theta(b)$ han de ser dos argumentos de un mismo número $\phi(a) = \phi(b)$, luego se ha de cumplir $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$, para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Este entero k es el número de vueltas que ϕ ha dado alrededor de 0. El teorema siguiente prueba la existencia de la determinación continua del argumento respecto a un punto z arbitrario, no necesariamente nulo. Por razones técnicas probamos también que θ es continua respecto de z.

Teorema 1.18 *Consideremos un arco $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y un punto z_0 que no esté en ϕ^*. Entonces existen un $r > 0$ tal que $D(z_0,r) \cap \phi^* = \varnothing$ y una función continua $\theta : [a,b] \times D(z_0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(t,z) \in [a,b] \times D(z_0,r)$ se cumple*

$$\phi(t) - z = |\phi(t) - z| e^{\theta(t,z)}.$$

Demostración: Sea $r > 0$ tal que $D(z_0,2r)$ no corte a ϕ^*. Como ϕ es uniformemente continua existen puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de modo que dos puntos cualesquiera de $\phi[x_i, x_{i+1}]$ distan menos de r. Llamemos $\Phi : [a,b] \times D(z_0,r) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a la función dada por $\Phi(t,z) = \phi(t) - z$. Consideremos los discos $D_i = D(\Phi(x_i,z_0), 2r)$.

Como $|\Phi(x_i,z_0)| = |\phi(x_i) - z_0| \geq 2r$ (por definición de r), tenemos que 0 no pertenece a ninguno de los discos D_i. Así mismo, si $(t,z) \in [x_i, x_{i+1}] \times D(z_0,r)$, tenemos

$$|\Phi(t,z) - \Phi(x_i,z_0)| \leq |\phi(t) - \phi(x_i)| + |z - z_0| < 2r,$$

luego $\Phi\big[[x_i, x_{i+1}] \times D(z_0,r)\big] \subset D_i$.

Es claro que cada disco D_i está contenido en uno de los abiertos H_α, donde según el teorema 1.5 hay definida una rama uniforme continua del argumento. Si componemos la restricción de Φ a un conjunto $[x_i, x_{i+1}] \times D(z_0,r)$ con dicha rama del argumento obtenemos una función continua θ_i que asigna a cada (t,z) un argumento de $\phi(t) - z$. Entonces $\theta_i(x_{i+1}, z)$ y $\theta_{i+1}(x_{i+1}, z)$ son dos argumentos de $\phi(x_{i+1}) - z$, luego $\theta_i(x_{i+1}, z) - \theta_{i+1}(x_{i+1}, z) = 2k_z\pi$, con k_z entero. Como la función $z \mapsto k_z$ es continua en $D(z_0,r)$, ha de ser constante por conexión.

Inductivamente, podemos modificar cada función θ_{i+1} sumándole la constante adecuada para que $\theta_i(x_{i+1}, z) = \theta_{i+1}(x_{i+1}, z)$ y así obtenemos una función continua θ en las condiciones del enunciado. ∎

Definición 1.19 Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$. Una *determinación del argumento* de ϕ relativo a z_0 es una aplicación $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in [a,b]$ se cumpla $\phi(t) - z = |\phi(t) - z|e^{i\alpha(t)}$.

El teorema anterior afirma que dado un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$ es posible definir una determinación *continua* del argumento de ϕ respecto a cada punto z de un entorno de z_0, concretamente, $\alpha_z(t) = \theta(t,z)$, de modo que no sólo sea continua respecto de t, sino simultáneamente respecto a t y z.

Notemos también que si α_1 y α_2 son son determinaciones continuas del argumento de ϕ respecto a z entonces $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$ son dos argumentos del número complejo $\phi(t) - z$, luego $\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k_t\pi$, para un cierto $k_t \in \mathbb{Z}$. Puesto que la función $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ es continua en $[a,b]$, lo mismo le sucede a la función $t \mapsto k_t$ y, como el intervalo $[a,b]$ es conexo, de hecho k_t ha de ser una constante k, es decir, $\alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi$, para un cierto $k \in \mathbb{Z}$.

Definimos el *índice* de un arco cerrado $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ respecto a un número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$ como

$$I(\phi, z) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi},$$

donde α es cualquier determinación continua del argumento de ϕ respecto de z. Según lo visto en el párrafo anterior, el índice no depende de la elección de α. Más aún, puesto que $\alpha(b)$ y $\alpha(a)$ son dos argumentos del mismo número complejo $\phi(b) - z = \phi(a) - z$, concluimos que $I(\phi, z) \in \mathbb{Z}$.

Geométricamente $\alpha(t)$ es el ángulo que forma con la horizontal el segmento que une z con $\phi(t)$ y varía continuamente a medida que t recorre el arco. Cada vez que ϕ da una vuelta completa alrededor de z en sentido antihorario la función $\alpha(t)$ aumenta en 2π y disminuye en esta misma cantidad si la vuelta es en sentido horario. Por lo tanto $I(\phi, z)$ es el número de vueltas que da ϕ alrededor de z teniendo en cuenta que vueltas en sentido opuesto se cancelan.

Dado un arco $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$, para calcular el índice de ϕ respecto a los puntos de un entorno de z_0 podemos usar la función θ del teorema 1.18, es decir, para $|z - z_0| < r$ se cumple

$$I(\phi, z) = \frac{\theta(b,z) - \theta(a,z)}{2\pi},$$

lo que implica que $I(\phi, z)$ es una función continua en cada punto z_0 de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$. Puesto que sólo toma valores enteros, concluimos que el índice es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$.

Ejemplo Si $\phi(t) = e^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$I(\phi, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

En efecto, para calcular el índice de los puntos del interior del círculo basta calcularlo en $z = 0$, pero una determinación continua del argumento respecto a 0 es $\alpha(t) = t$, con lo que es claro $I(\phi, 0) = 1$. El cálculo fuera del círculo lo dejamos pendiente, pues dentro de poco será inmediato. ∎

Aunque desde un punto de vista geométrico es natural calcular el índice a partir de una determinación continua del argumento, en ocasiones es técnicamente más cómodo trabajar con determinaciones continuas del logaritmo:

Definición 1.20 Sea $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco que no pase por 0. Una *determinación del logaritmo* de ϕ es una función $L : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $t \in [a, b]$ se cumpla $\phi(t) = e^{L(t)}$, es decir, tal que $L(t)$ sea un logaritmo de $\phi(t)$.

Es claro que si α es una determinación (continua) del argumento de ϕ entonces $L = \log|\phi| + i\alpha$ es una determinación (continua) del logaritmo de ϕ. Recíprocamente, si L es una determinación (continua) del logaritmo de ϕ entonces $\operatorname{Im} L$ es una determinación (continua) del argumento. Dos determinaciones del logaritmo de un mismo arco se diferencian en $2k\pi i$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que ϕ es un arco cerrado, $z \in \mathbb{C}\setminus\phi^+$ y que $L = \log|\phi| + i\alpha$ es una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$. Entonces α es una determinación continua del argumento de $\phi - z$ o, lo que es lo mismo, una determinación continua del argumento de ϕ respecto de z. Por consiguiente,

$$L(b) - L(a) = i(\alpha(b) - \alpha(a)) = 2\pi i I(\phi, z)$$

o, equivalentemente,

$$I(\phi, z) = \frac{L(b) - L(a)}{2\pi i},$$

donde L es cualquier determinación continua del logaritmo del arco $\phi - z$.

Veamos una aplicación de esta expresión para el índice. Como ϕ^* es compacto, está contenido en un disco de centro 0. El complementario de este disco es un conexo, luego está contenido en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$. Esto significa que las demás componentes conexas están todas en el disco, luego $\mathbb{C}\setminus\phi^*$ tiene una única componente conexa no acotada. Vamos a probar que el índice es nulo en esta componente. Incluimos esto en el teorema siguiente, que recopila todas las propiedades que hemos obtenido hasta ahora:

Teorema 1.21 *Sea $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ un arco cerrado. Entonces la función $I(\phi, z)$ es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$, toma sólo valores enteros y se anula en la componente no acotada. Además, si α es una determinación continua del argumento de $\phi - z$ y L es una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$ se cumple*

$$I(\phi, z) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi} = \frac{L(b) - L(a)}{2\pi i}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo queda probar que el índice se anula en la componente conexa no acotada. Puesto que es constante en toda la componente podemos trabajar con cualquiera de sus puntos. Tomemos z de modo que $|z|$ sea mayor que el módulo de cualquier punto de ϕ^*. Definimos

$$\alpha(t) = \log_0\left(\frac{\phi(t)}{z} - 1\right).$$

Notemos que $\phi(t)/z \in D(0,1)$, luego $\phi(t)/z - 1 \in D(-1,1) \subset H_0$. Por consiguiente α está bien definida y es continua. Sea w un logaritmo de z y llamemos $\beta(t) = \alpha(t) + w$. Entonces β es continua y

$$e^{\beta(t)} = e^{\alpha(t)}e^w = \left(\frac{\phi(t)}{z} - 1\right) z = \phi(t) - z,$$

es decir, β es una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$. Así pues,

$$I(\phi, z) = \frac{\beta(b) - \beta(a)}{2\pi i} = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi i} = 0,$$

pues $\phi(b) = \phi(a)$ implica $\alpha(b) = \alpha(a)$. ∎

Esto completa cálculo del índice respecto a la circunferencia unidad que habíamos dejado pendiente en el ejemplo de la página 22.

Capítulo II

Funciones holomorfas

Consideremos las *integrales de Fresnel:*

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} t^2\, dt$$

Su cálculo es, en principio, un problema de análisis real, pero sucede que no existen fórmulas explícitas para las primitivas de los integrandos, por lo que calcular estas integrales mediante el análisis real elemental requiere cierto ingenio; en cambio, la teoría de funciones de variable compleja proporciona una solución relativamente sencilla. Hasta el final del capítulo no dispondremos de la teoría necesaria para obtenerla, pero de momento aceptemos el principio (falso) de que "todo lo que vale para números reales vale para números complejos". Entonces, desde el punto de vista de las funciones de variable compleja es natural agrupar ambas integrales en una:

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt + i \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} t^2\, dt = \int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt. \tag{2.1}$$

Esta integral compleja recuerda a una conocida integral real, la integral de Poisson:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.2}$$

En el capítulo 6 veremos cómo calcularla con técnicas de variable compleja, aunque una forma fácil de hacerlo es aplicar el teorema de Fubini por una parte y el cambio a polares por otra a la integral doble

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

El parecido entre (2.1) y (2.2) se hace más evidente si introducimos el número complejo

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

que cumple $\omega^2 = -i$. Entonces (2.1) es igual a

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\omega t)^2}\, dt. \tag{2.3}$$

Si ω fuera un número real, podríamos reducir (2.3) a (2.2) mediante el cambio de variable $x = \omega t$. Hagámoslo, de todos modos. Tenemos $dt = \omega^{-1}\, dx$, luego

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt = \omega^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

y separando la parte real de la imaginaria llegamos a

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} t^2\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Por increíble que pueda parecer, esta conclusión es correcta. A lo largo del capítulo iremos introduciendo los resultados necesarios para dar rigor al argumento precedente y rellenar sus lagunas.

Al calcular dt hemos derivado la función compleja ωt (siguiendo las reglas válidas para funciones reales). Dedicamos la primera sección a introducir la derivada de funciones de variable compleja y comprobar que, efectivamente, las reglas de derivación real le son aplicables.

2.1 Derivación de funciones complejas

Definición 2.1 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es *derivable* en un punto $z_0 \in \Omega$ si existe

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Las propiedades elementales de los límites nos dan que si una función compleja f es derivable en un punto $x \in \mathbb{R}$ y f asigna números reales a los números reales, entonces f es derivable como función real y las derivadas coinciden. El recíproco no es cierto pues, por definición, para que una función tenga derivada compleja en un punto es necesario que esté definida en un entorno del punto en $\mathbb{C}$, y puede ocurrir que una función derivable en el sentido real no pueda extenderse a una función derivable en el sentido complejo.

Una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ puede verse como una aplicación definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^2$ con imágenes en $\mathbb{R}^2$, por lo que podemos estudiar la relación entre la derivabilidad en el sentido de la definición anterior y su diferenciabilidad en el sentido del análisis de varias variables reales. Sabemos que una función de una variable real es derivable si y sólo si es diferenciable, donde la diferenciabilidad significa en esencia que los incrementos de la función en el punto se pueden aproximar por una aplicación lineal. El análogo en nuestro contexto es que una función de una variable compleja es derivable si y sólo si sus incrementos se pueden aproximar por una aplicación $\mathbb{C}$-lineal:

Teorema 2.2 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Entonces una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en un punto $z_0 \in \Omega$ si y sólo si es diferenciable en z_0 y $df(z_0) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. En tal caso, $df(z_0)(z) = f'(z_0)z$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es derivable en z_0 entonces existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \tag{2.4}$$

luego también existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0.$$

El cociente $(z-z_0)/|z-z_0|$ tiene módulo 1, luego está acotado en $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. El producto de una función acotada por una función que tiende a 0 sigue tendiendo a 0, luego

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0. \tag{2.5}$$

Esto significa que f es diferenciable en z_0 y que $df(z_0)(z) = f'(z_0)z$.

Recíprocamente, si f es diferenciable en z_0 y su diferencial es $\mathbb{C}$-lineal, ésta será de la forma $df(z_0)(z) = cz$, para cierto $c \in \mathbb{C}$. Por definición de diferenciabilidad tenemos (2.5) con $f'(z_0)$ reemplazado por c, de donde pasamos a (2.4) con el mismo cambio, lo que prueba que f es derivable. ∎

Hay una forma más operativa de expresar la condición del teorema anterior. Consideremos una aplicación $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que sea $\mathbb{C}$-lineal, es decir, tal que exista un $c = a + bi \in \mathbb{C}$ de modo que $\phi(z) = cz$. Vista como $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la aplicación ϕ viene determinada por una matriz 2×2, digamos A, de modo que $\phi(x, y) = (x, y)A$. Las filas de la matriz A son $\phi(1, 0) = c$ y $\phi(0, 1) = ic$. En definitiva,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, la aplicación lineal asociada a una matriz de esta forma, para cualesquiera números reales a y b es la dada por $\phi(z) = cz$, donde $c = a+bi$.

Si aplicamos esto a la diferencial de una aplicación $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tenemos que la matriz A es la matriz jacobiana de f, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} & \dfrac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} & \dfrac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 2.3 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Entonces una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en un punto $z_0 \in \Omega$ si y sólo si es diferenciable en z_0 y satisface las* ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0), \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0).$$

En tal caso

$$f'(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Notemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\,\frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Más aún, de las consideraciones anteriores se sigue que el determinante jacobiano de f en z_0 es $|f'(z_0)|$.

Las propiedades reunidas en el teorema siguiente pueden probarse transcribiendo literalmente las pruebas de sus análogas reales o bien deduciéndolas de las propiedades análogas para funciones diferenciables. Por ejemplo, toda función diferenciable es continua, lo que nos da el apartado a).

Teorema 2.4 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sean f, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \Omega$.*

a) Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.

b) Si f es constante en Ω, entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0) = 0$.

c) Si $f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0) = 1$.

d) Si f y g son derivables en z_0 y α, $\beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es derivable en z_0 y $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$.

e) Si f y g son derivables en z_0 entonces fg también lo es y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

f) Si f y g son derivables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en z_0 y

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Para acabar con las propiedades básicas de las funciones derivables probamos la regla de la cadena y el teorema de la función inversa:

Teorema 2.5 (Regla de la cadena) *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en un punto $z_0 \in \Omega$ y $g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $f(z_0) \in \Omega'$, entonces $f \circ g$ es derivable en z_0 y $(f \circ g)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big)f'(z_0)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.2 tenemos que f es diferenciable en z_0 y g es diferenciable en $f(z_0)$, luego por la regla de la cadena en $\mathbb{R}^2$ tenemos que $f \circ g$ es diferenciable en z_0 y su diferencial es

$$d(f \circ g)(z_0)(z) = \big(df(z_0) \circ dg\big(f(z_0)\big)\big)(z) = g'\big(f(z_0)\big)f'(z_0)z.$$

Por lo tanto la diferencial es $\mathbb{C}$-lineal y la derivada es la que indica el enunciado. ∎

Teorema 2.6 (Teorema de la función inversa) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^1 en Ω, inyectiva y derivable en todos sus puntos con derivada no nula. Entonces $\Omega' = f[\Omega]$ es abierto en $\mathbb{C}$, f^{-1} es derivable en Ω' y si $z \in \Omega$ y $z' = f(z)$ entonces $(f^{-1})'(z') = 1/f'(z)$.*

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis de que la derivada no se anule equivale a que el determinante jacobiano sea no nulo. Podemos aplicar el teorema de la función inversa para funciones de $\mathbb{R}^2$ y concluir que Ω' es abierto y que f^{-1} es diferenciable en Ω'. Entonces $df^{-1}(z') = df(z)^{-1}$, luego $df^{-1}(z')$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $z' \in \Omega$, luego f^{-1} es derivable. Aplicando la regla de la cadena a f y f^{-1} obtenemos que $(f^{-1})'(z')f(z) = 1$, de donde se sigue la expresión para la derivada. ∎

Más adelante veremos que las hipótesis de este teorema se pueden relajar notablemente: la derivabilidad de Ω implica que es de clase C^1 y la inyectividad implica que la derivada no se anula.

Definición 2.7 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* en Ω si es derivable en todos los puntos de Ω. En tal caso está definida la función $f' : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada punto le asigna su derivada. Diremos que f es *holomorfa* en un punto z si es holomorfa en un entorno de z.

Notar que, de acuerdo con la definición anterior, la holomorfía en un punto es más fuerte que la derivabilidad. El término "holomorfa" (gr. = de forma entera) hace referencia a que el comportamiento de estas funciones es muy similar al de los polinomios, que antiguamente se llamaban funciones enteras.

El teorema 2.4 implica que los polinomios son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Más aún, su derivada se calcula con las reglas algebraicas usuales. Así mismo, las funciones racionales son derivables en todos los puntos donde el denominador no se anula.

Ejercicio: Probar que las funciones parte real, parte imaginaria, el módulo y la conjugación no son holomorfas en ningún punto (no cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Teorema 2.8 *Las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son holomorfas en $\mathbb{C}$ y sus derivadas son respectivamente e^z, $\cos z$ y $-\operatorname{sen} z$.*

DEMOSTRACIÓN: La holomorfía de la función exponencial se sigue del teorema 2.3, que también nos da su derivada. La regla de la cadena justifica la

derivabilidad de las funciones trigonométricas y nos proporciona sus derivadas. ∎

El teorema de la función inversa nos da también la holomorfía de las ramas uniformes del logaritmo definidas en el capítulo anterior:

Teorema 2.9 *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la rama uniforme $\log_\alpha : H_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en H_α y su derivada es $1/z$.*

Demostración: La función $\log_\alpha$ es la inversa de la función exponencial restringida a un abierto donde es inyectiva. Obviamente e^z es de clase C^∞ y su derivada no se anula, luego $\log_\alpha$ es holomorfa y si $z = e^w$, entonces $\log_\alpha z = 1/(e^w)' = 1/e^w = 1/z$. ∎

Más en general:

Teorema 2.10 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una rama uniforme del logaritmo en Ω. Entonces L es holomorfa en Ω y $L'(z) = 1/z$.*

Demostración: Dado $z \in \Omega$, podemos tomar un disco abierto $D = D(z, r) \subset \Omega$. Es claro que existe un α tal que $D \subset H_\alpha$, con lo que L y $\log_\alpha$ son dos logaritmos continuos definidos en D. Su diferencia es continua y sólo puede tomar valores múltiplos enteros de $2\pi i$, y como D es conexo ha de ser constante, es decir, $L = \log_\alpha + 2k\pi i$. Por consiguiente L es derivable y su derivada es la misma que la de $\log_\alpha$, o sea, $1/z$. ∎

Podemos aplicar el mismo argumento para calcular la derivada de una determinación continua del logaritmo de un arco derivable. Antes conviene probar un resultado general que usaremos más veces:

Teorema 2.11 *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa de clase C^1 en el abierto Ω y $\phi : [a, b] \longrightarrow \Omega$ un arco derivable. Entonces $\psi = \phi \circ f$ es un arco derivable, y su derivada vale $\psi'(t) = f'\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$.*

Demostración: La composición de dos funciones de clase C^1 es una función de clase C^1. Además la regla de la cadena para funciones diferenciables implica que

$$\psi'(t) = df\big(\phi(t)\big)\big(\phi'(t)\big) = f'\big(\phi(t)\big)\phi'(t).$$

∎

Como ya comentamos tras la prueba del teorema de la función inversa, más adelante veremos que toda función holomorfa es de clase C^1, por lo que la hipótesis es redundante.

Teorema 2.12 *Sea $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un arco derivable y $L : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una determinación continua del logaritmo de ϕ. Entonces L es un arco derivable y su derivada es*

$$L'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado un punto $t_0 \in [a,b]$ podemos tomar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0) \in L_\alpha$. Las funciones L y $\phi \circ \log_\alpha$ son dos determinaciones continuas del logaritmo de ϕ definidas en un intervalo de centro t_0. Por conexión, en dicho intervalo ha de ser $L(t) = \log_\alpha\big(\phi(t)\big) + 2k\pi i$, para un cierto entero k. Por el teorema anterior L es derivable en t_0 (sabemos que $\log_\alpha$ es de clase C^1 porque es la inversa de la exponencial, que es de clase C^1) y su derivada es la indicada en el enunciado. ∎

Ejercicio: Probar que las ramas uniformes continuas de las raíces n-simas, del arco seno, del arco coseno y del arco tangente son holomorfas. Calcular sus derivadas.

Para terminar la sección veremos que es posible definir la derivabilidad de una función en el infinito.

Definición 2.13 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$ tal que $\infty \in \Omega$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces la función $g(z) = f(1/z)$ está definida en un entorno de 0. Diremos que f es *derivable* en ∞ si g es derivable en 0. Así mismo diremos que f es *holomorfa* en ∞ si es derivable en un entorno de ∞ (lo que equivale a que g sea holomorfa en 0).

Observemos que en los puntos distintos de ∞ la regla de la cadena nos da la siguiente relación entre las derivadas de f y g: $f'(z) = g'(1/z)(-1/z^2)$. Según esto resulta natural definir $f'(\infty) = g'(0) \cdot 0 = 0$. De este modo, si la derivada de g es continua en 0 —lo cual siempre ocurre, según veremos— entonces la derivada de f es continua en ∞.

Puesto que la transformación $f(z) \mapsto f(1/z)$ conserva sumas, productos y cocientes, es inmediato que la suma, el producto y el cociente de funciones derivables en ∞ es derivable en ∞ (con la restricción obvia en el caso de los cocientes). El convenio que hemos adoptado según el cual $f'(\infty) = 0$ hace que las fórmulas para el cálculo de derivadas de sumas, productos y cocientes se cumplan trivialmente en ∞.

Si f es holomorfa en ∞ entonces $f(1/z)$ es holomorfa en 0, luego $f(1/z)$ es continua en 0, luego $f(z)$ es continua en ∞. Así pues, la continuidad de las funciones holomorfas es cierta incluso en ∞.

La regla de la cadena también se cumple trivialmente. En efecto, si f es derivable en ∞ y g es derivable en $f(\infty)$, entonces $f(1/z)$ es derivable en 0 y g es derivable en $f(1/0) = f(\infty)$, luego $g\big(f(1/z)\big)$ es derivable en 0, es decir, $g\big(f(z)\big)$ es derivable en ∞. De nuevo, la fórmula para la derivada de la función compuesta es trivial.

Ejercicio: Probar que las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no son derivables en ∞.

Observemos que una transformación de Möbius

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}^\infty$ excepto en el punto $-d/c$ (donde vale ∞). En efecto, para los puntos finitos es claro y en ∞ (suponiendo $c \neq 0$ para que $-d/c \neq \infty$)

tenemos

$$M(1/z) = \frac{a+bz}{c+dz},$$

que es derivable en 0.

Notemos que la transformación $1/z$ que hemos usado para definir la derivada en ∞ es una transformación de Möbius. En su lugar podíamos haber usado cualquier otra transformación M con la única condición de que $M(\infty) \neq \infty$. En efecto, se cumple:

Teorema 2.14 *Sea Ω un entorno de ∞ en $\mathbb{C}^\infty$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea M una transformación de Möbius tal que $M(\infty) \neq \infty$. Entonces f es derivable en ∞ si y sólo si $f\big(M(z)\big)$ es derivable en $M^{-1}(\infty)$.*

Demostración: Si $f\big(M(z)\big)$ es derivable en $M^{-1}(\infty)$, como M^{-1} es derivable en ∞, la regla de la cadena generalizada nos da que $f(z) = f\big(M(M^{-1}(z)\big)$ es derivable en ∞.

Si f es derivable en ∞, sea $N(z) = 1/z$. Entonces por definición $f\big(N(z)\big)$ es derivable en 0. Por la regla de la cadena, para probar que la función

$$f\big(M(z)\big) = f\big(N(N(M(z)))\big)$$

es derivable en $M^{-1}(\infty)$ basta ver que así le ocurre a $N\big(M(z)\big)$, pero ésta es una función de Möbius que en $M^{-1}(\infty)$ vale $N(\infty) = 0$, luego efectivamente es derivable. ∎

El concepto de función derivable en el infinito proporciona una mayor simetría a la teoría que hemos comenzado a estudiar y permite enunciar con más sencillez formal algunos de sus resultados. En ocasiones es útil incluso como herramienta. A pesar de ello entendemos que puede desorientar al lector al atraer la atención sobre aspectos técnicos secundarios en las demostraciones, razón por la cual la mayoría de resultados en torno a derivadas en ∞ se indicarán en notas a pie de página en cada teorema generalizable en esta dirección. Cuando no demos indicaciones sobre la prueba para infinito se sobrentenderá que ésta consiste simplemente en aplicar una transformación de Möbius y usar el resultado ya probado para puntos finitos. En el capítulo XIII sistematizaremos estos hechos.

2.2 La integral curvilínea

Introducimos ahora una integral de funciones complejas a lo largo de arcos que dé rigor a fórmulas como (2.1). Veremos que la integral curvilínea no sólo conecta la teoría de funciones holomorfas con sus aplicaciones, como es el cálculo de las integrales de Fresnel, sino que está enclavada en el núcleo mismo de la teoría. Primeramente recordamos las propiedades básicas de las integrales de funciones vectoriales de una variable, definidas componente a componente. Para el caso particular de funciones en $\mathbb{C}$ tenemos:

Definición 2.15 Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} h(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} h(t)\,dt.$$

Notar que si $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la definición anterior se reduce a la integral usual de una función real. El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de las integrales complejas.

Teorema 2.16 *Se cumple:*

a) Si h_1, $h_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ son continuas y α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_a^b \big(\alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t)\big)dt = \alpha_1 \int_a^b h_1(t)\,dt + \alpha_2 \int_a^b h_2(t)\,dt.$$

b) Si $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^c h(t)\,dt + \int_c^b h(t)\,dt.$$

c) Si $h : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\rho : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ es biyectiva, derivable y con derivada continua, entonces

$$\int_{\rho(a)}^{\rho(b)} h(t)\,dt = \int_a^b h\big(\rho(s)\big)\rho'(s)\,ds,$$

con el convenio de que invertir los límites de integración equivale a cambiar el signo a la integral.

d) Si $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |h(t)|\,dt.$$

Demostración: Para probar las tres primeras afirmaciones se separa la parte real de la parte imaginaria según la definición de integral compleja, se aplica la propiedad correspondiente de integrales reales y se vuelven a agrupar los sumandos. Veamos la cuarta propiedad.

Si $\int_a^b h(t)\,dt = 0$ el resultado es obvio. En otro caso sea

$$\alpha = \frac{\left|\int_a^b h(t)\,dt\right|}{\int_a^b h(t)\,dt} \in \mathbb{C}.$$

Así

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \alpha\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b \alpha h(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\big(\alpha h(t)\big)dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\big(\alpha h(t)\big)dt,$$

pero como se trata de un número real, la segunda parte ha de ser nula, o sea,

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\big(\alpha h(t)\big)dt \le \int_a^b |\alpha h(t)|\,dt = \int_a^b |h(t)|\,dt$$

donde hemos usado que, en general, $\mathrm{Re}\, z \le |z|$, así como que $|\alpha| = 1$. ∎

A continuación introducimos las integrales curvilíneas que nos proponemos estudiar:

Definición 2.17 Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco derivable y $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos la *integral curvilínea* de f a lo largo de ϕ como

$$\int_\phi f(\zeta)\,d\zeta = \int_a^b f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt.$$

Si f es derivable a trozos, la integral se define como la suma de las integrales en los trozos. Los resultados del teorema siguiente valen para arcos ya sean derivables o derivables a trozos. La prueba en el segundo caso se reduce a aplicar el primero a cada trozo. En lo sucesivo, sobrentenderemos que todos los arcos considerados son derivables a trozos.

Teorema 2.18 *La integral curvilínea cumple las propiedades siguientes:*

a) Sea ϕ un arco, sean f, $g : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas y α, $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_\phi \big(\alpha f(\zeta) + \beta g(\zeta)\big)d\zeta = \alpha \int_\phi f(\zeta)\,d\zeta + \beta \int_\phi g(\zeta)\,d\zeta.$$

b) Si ϕ y ψ son arcos equivalentes y $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_\phi f(\zeta)\,d\zeta = \int_\psi f(\zeta)\,d\zeta.$$

c) Si ϕ es un arco y $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{-\phi} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_\phi f(\zeta)\,d\zeta.$$

d) Si ϕ y ψ son arcos tales que existe $\phi \cup \psi$ y $f : (\phi^* \cup \psi^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{\phi\cup\psi} f(\zeta)\,d\zeta = \int_\phi f(\zeta)\,d\zeta + \int_\psi f(\zeta)\,d\zeta.$$

e) Si ϕ es un arco y $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\left|\int_\phi f(\zeta)\,d\zeta\right| \le L(\phi)\sup\big\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \phi^*\big\}.$$

DEMOSTRACIÓN: a) se sigue inmediatamente de la definición.

b) Sean $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $\rho : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ creciente biyectiva, derivable y con derivada continua tal que $\phi = \rho \circ \psi$. Entonces

$$\int_{\psi} f(\zeta)\,d\zeta = \int_c^d f\big(\psi(s)\big)\psi'(s)\,ds = \int_a^b f\big(\psi(\rho(t))\big)\psi'\big(\rho(t)\big)\rho'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta.$$

c) Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_{-\phi} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{-b}^{-a} f\big((-\phi)(t)\big)(-\phi')(t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f\big(\phi(-t)\big)\big(-\phi'(-t)\big)\,dt$$

$$= \int_b^a f\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,ds = -\int_a^b f\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,ds = -\int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta.$$

d) se demuestra de forma similar.

e) Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $S = \sup\big\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \phi^*\big\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta\right| &= \left|\int_a^b f\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,ds\right| \leq \int_a^b \big|f\big(\phi(s)\big)\big|\,|\phi'(s)|\,ds \\ &\leq S\int_a^b |\phi'(s)|\,ds = L(\phi)\,S.\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado sobre integrales curvilíneas y convergencia uniforme resulta útil en muchas ocasiones:

Teorema 2.19 *Sea ϕ un arco y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas sobre ϕ^* que converge uniformemente a una función f. Entonces existe*

$$\lim_n \int_{\phi} f_n(\zeta)\,d\zeta = \int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Notar que la función f es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \epsilon/(L(\phi)+1)$ para todo $\zeta \in \phi^*$.

Entonces $\sup\big\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \mid \zeta \in \phi^*\big\} \leq \epsilon/(L(\phi)+1)$ y, por consiguiente,

$$\left|\int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\phi} f_n(\zeta)\,d\zeta\right| = \left|\int_{\phi} \big(f(\zeta) - f_n(z)\big)\,d\zeta\right| \leq \frac{L(\phi)\epsilon}{L(\phi)+1} < \epsilon.$$

Esto prueba lo pedido. ■

El último resultado básico sobre la integral curvilínea es la siguiente generalización de la regla de Barrow:

Teorema 2.20 *Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco, Ω un abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\phi^* \subset \Omega$ y $f : \omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que f' sea continua sobre ϕ^*. Entonces*

$$\int_\phi f'(\zeta)\,d\zeta = f\big(\phi(b)\big) - f\big(\phi(a)\big).$$

En particular, si ϕ es un arco cerrado se cumple

$$\int_\phi f'(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Recordemos una vez más que toda función holomorfa es de clase C^1, por lo que la hipótesis sobre la continuidad de la derivada puede eliminarse.

Demostración: Podemos suponer que el arco ϕ es derivable, pues si es derivable a trozos basta aplicar este caso a cada trozo. El teorema 2.11 implica que $\phi \circ f$ es otro arco derivable y $(\phi \circ f)'(t) = f'\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$. Por lo tanto:

$$\int_\phi f'(\zeta)\,d\zeta = \int_a^b f'\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_a^b (\phi \circ f)'(t)\,dt = f\big(\phi(b)\big) - f\big(\phi(a)\big),$$

donde hemos aplicado en cada componente la regla de Barrow para integrales de funciones reales . ∎

Ahora podemos probar el análogo complejo de un hecho básico de la derivación real: Si una función real tiene derivada nula en un intervalo, entonces es constante. La prueba se basa en el teorema del valor medio, pero este teorema resulta ser falso para funciones holomorfas. A pesar de ello podemos probar el teorema sobre funciones con derivada nula usando el teorema anterior.

Teorema 2.21 *Sea $\Omega \neq \varnothing$ un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f' = 0$. Entonces f es constante en Ω.*

Demostración: Sea $z_0 \in \Omega$. Como Ω es conexo, es conexo por poligonales, luego si z es cualquier otro punto de Ω existe una poligonal P con extremos z_0 y z. Por el teorema anterior

$$0 = \int_P f'(\zeta)\,d\zeta = f(z) - f(z_0),$$

luego $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \Omega$, es decir, f es constante. ∎

Una consecuencia interesante del teorema 2.20 es que hay funciones holomorfas que no tienen primitiva. Consideremos por ejemplo la función $1/z$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si la integramos sobre la circunferencia $\phi(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, vemos que

$$\int_\phi \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \int_0 \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i. \tag{2.6}$$

Si $1/z$ tuviera primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (o en cualquier abierto que contenga a la circunferencia) la integral debería ser nula.

El teorema 2.10 implica que no puede existir una rama uniforme del logaritmo en ningún abierto que contenga a la circunferencia, pues sería una primitiva de $1/z$. Por ello la existencia de ramas uniformes del logaritmo en un abierto dado es una propiedad no trivial del mismo. La integral (2.6) tiene una interpretación muy importante. Si $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un arco derivable que no pasa por un punto z, entonces $\phi - z$ es un arco derivable que no pasa por 0, luego tiene una determinación continua del logaritmo L, cuya derivada es

$$L'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t) - z}.$$

Ahora bien:

$$\int_\phi \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_a^b \frac{\phi'(t)}{\phi(t) - z}\, d\zeta = \int_a^b L'(t)\, dt = L(b) - L(a).$$

Evidentemente la conclusión vale también si ϕ es derivable a trozos. Ahora basta aplicar el teorema 1.21 para obtener:

Teorema 2.22 *Sea ϕ un arco cerrado derivable a trozos y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$. Entonces*

$$I(\phi, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\phi \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Así, pues, la integral (2.6) expresa simplemente que el índice de 0 respecto a la circunferencia unidad vale 1.

Integrales paramétricas Una función de la forma $F(z) = \int_\phi f(z,\zeta)\, d\zeta$ se llama *integral paramétrica* (la variable z es el *parámetro* de la integral). Vamos a probar que las integrales paramétricas de funciones holomorfas son funciones holomorfas. Probaremos un resultado previo sobre integrales reales:

Teorema 2.23 *Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$ y sean $f : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por*

$$F(z) = \int_a^b f(z,t)g(t)\, dt.$$

Entonces F es continua en Ω y si (para $i = 1, 2$) existe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

y es continua en $\Omega \times [a,b]$, entonces existe

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(z,t)g(t)\, dt$$

y es continua en Ω.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y sea D un disco cerrado de centro z_0 contenido en Ω. Sea M una cota de g en $[a,b]$. Como f es uniformemente continua en $D \times [a,b]$, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z,t) - f(z_0,t)| < \epsilon/M(b-a)$, para todo $t \in [a,b]$. Por consiguiente, si $|z - z_0| < \delta$ se cumple

$$|F(z) - F(z_0)| \leq \int_a^b |f(z,t) - f(z_0,t)|\,|g(t)|\,dt \leq \epsilon.$$

Esto prueba que F es continua en z_0.

Supongamos ahora la hipótesis de derivabilidad, por ejemplo respecto a x. Como $\partial f/\partial x$ es uniformemente continua en $D \times [a,b]$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)\right| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}, \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Si $|h| < \delta$ y $t \in [a,b]$, el teorema del valor medio nos da que existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $|r| < |h|$ y

$$f(x_0+h,y_0,t) - f(x_0,y_0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r,y_0,t)h.$$

(Notar que r depende de t.) Por consiguiente,

$$\left|\frac{f(x_0+h,y_0,t)g(t) - f(x_0,y_0,t)g(t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r,y_0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)\right| |g(t)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}.$$

De aquí se sigue claramente que

$$\left|\frac{F(x_0+h,y_0) - F(x_0,y_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\,dt\right| \leq \epsilon,$$

siempre que $|h| < \delta$, luego existe

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h,y_0) - F(x_0,y_0)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\,dt.$$

Además la derivada es continua por la primera parte de este mismo teorema. ∎

A partir de aquí podemos probar:

Teorema 2.24 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco derivable a trozos y $f : \Omega \times \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua con derivada compleja respecto a la primera variable $f' : \Omega \times \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$, continua. Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $F(z) = \int_\phi f(z,\zeta)\,d\zeta$. Entonces F es holomorfa en Ω y su derivada es $F'(z) = \int_\phi f'(z,\zeta)\,d\zeta$.*

DEMOSTRACIÓN: Como es habitual, podemos suponer que ϕ es derivable. Entonces

$$F(z) = \int_a^b f\big(z, \phi(t)\big)\phi'(t)\,dt.$$

Para aplicar el teorema anterior hemos de separar las partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_a^b \operatorname{Re} f\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Re}\phi'(t)\,dt - \int_a^b \operatorname{Im} f\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Im}\phi'(t)\,dt \\ &+ i\int_a^b \operatorname{Re} f\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Im}\phi'(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Re}\phi'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Las cuatro integrales están en las condiciones del teorema anterior. Al aplicarlo concluimos que F tiene derivadas parciales continuas. Concretamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Re}\phi'(t)\,dt - \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Im}\phi'(t)\,dt \\ &+ i\int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Im}\phi'(t)\,dt + i\int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\big(z,\phi(t)\big)\operatorname{Re}\phi'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\big(z,\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_\phi \frac{\partial f}{\partial x}(z,\zeta)\,d\zeta. \end{aligned}$$

Lo mismo vale para la derivada respecto de y. Del hecho de que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue ahora que F también las cumple, luego F es holomorfa en Ω. La ecuación anterior es entonces equivalente a la relación entre las derivadas que aparece el enunciado. ∎

Acabamos la sección extendiendo el concepto de integral curvilínea a curvas más generales que los arcos. Por una *curva* entenderemos una función derivable y con derivada continua (o derivable a trozos) definida sobre un intervalo cualquiera de la recta real (si es cerrado se entiende que la función se extiende a un intervalo abierto mayor).

Las definiciones de curva opuesta, unión de curvas, curvas equivalentes etc. son válidas igualmente en este contexto.

Por simplificar la exposición trabajaremos con curvas derivables definidas sobre todo $\mathbb{R}$, si bien todo cuanto digamos vale con pequeños cambios obvios para cualquier intervalo. Nos interesarán especialmente las curvas definidas sobre intervalos de la forma $]-\infty, b]$ y $[a, +\infty[$.

Sea pues $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable y con derivada continua y sea $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. La definición

$$\int_\phi f(\zeta)\,d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt$$

sigue siendo válida y con idénticas propiedades, supuesto que el integrando del segundo miembro sea realmente una función integrable.

En general una función continua $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable (por definición) si lo son las funciones $\operatorname{Re} h$ e $\operatorname{Im} h$ como funciones reales y, en tal caso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} h(t)\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} h(t)\,dt.$$

Si una función h es integrable, entonces su integral se calcula mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \lim_n \int_{-n}^{+n} h(t)\,dt.$$

En general se puede tomar cualquier par de sucesiones de límites de integración que converjan monótonamente a los extremos. Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, entonces la existencia de uno de estos límites equivale a la integrabilidad.

Un criterio útil de integrabilidad (el único que usaremos en la práctica) afirma que si una función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cumple que $|h|$ es integrable, entonces h también lo es y además

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt.$$

En realidad, si entendemos la integral en el sentido de Lebesgue, la integrabilidad de $|h|$ equivale a la de h.

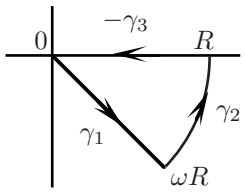
También es posible justificar bajo condiciones muy generales que las integrales paramétricas sobre curvas de funciones holomorfas son funciones holomorfas, pero para ello habremos de esperar hasta el capítulo siguiente.

Llegados hasta aquí, tenemos justificados todos los pasos del cálculo de las integrales de Fresnel que hemos anticipado al comienzo del capítulo salvo el "cambio de variable" $x = \omega t$ entre las integrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \omega\int_0^{+\infty} e^{-(\omega t)^2}\,dt \tag{2.7}$$

Observemos que los dos miembros son integrales de la misma función e^{-z^2} a lo largo de dos curvas distintas, a saber, $\phi(x) = x$ y $\phi(t) = \omega t$.

Consideremos el arco cerrado $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup -\gamma_3$ que indica la figura. Supongamos que pudiéramos probar que la integral de e^{-z^2} a lo largo de dicho arco es nula. Por ejemplo, por el teorema 2.20 bastaría justificar que e^{-z^2} tiene una primitiva en $\mathbb{C}$. Admitiendo esto, tendríamos



$$\int_{\gamma_1} e^{-\zeta^2}\,d\zeta + \int_{\gamma_2} e^{-\zeta^2}\,d\zeta - \int_{\gamma_3} e^{-\zeta^2}\,d\zeta = 0, \tag{2.8}$$

o sea,

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \omega\int_0^R e^{-(\omega^2 t)}\,dt + \int_{-\pi/4}^0 e^{-R^2e^{2it}}\,iRe^{it}\,dt, \quad \text{para todo } R > 0.$$

Si probamos que la última integral tiende a 0 cuando R tiende a $+\infty$, al tomar límites en esta igualdad obtenemos (2.7). Ahora bien,

$$\left|\int_{-\pi/4}^{0} e^{-R^2e^{2it}}iRe^{it}\,dt\right| \le R\int_{-\pi/4}^{0}|e^{-R^2e^{2it}}|\,dt \le R\int_{-\pi/4}^{0} e^{-R^2\cos 2t}\,dt$$

El cambio de variable $t = t' - \pi/4$ sustituye el coseno por un seno y, dado que la función $(\operatorname{sen} x)/x$ es decreciente[1] en $[0, \pi/2]$, resulta que $\operatorname{sen} 2t \ge 4t/\pi$, para $0 \le t \le \pi/4$, y el módulo de la integral queda acotado por

$$R\int_0^{\pi/4} e^{-4R^2t/\pi}\,dt = -\frac{\pi}{4R}\left[e^{-4R^2t/\pi}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4R}.$$

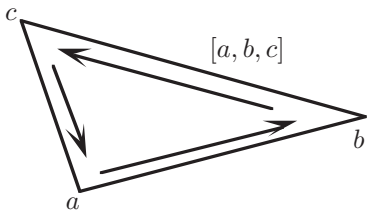
El último término tiende claramente a 0, luego hemos probado (2.7) supuesto (2.8). Esta relación la justificaremos en la sección siguiente, con lo que habremos demostrado que las integrales de Fresnel existen como integrales impropias en el sentido de Riemann. Puede probarse que las funciones $\operatorname{sen} t^2$ y $\cos t^2$ no son integrables Lebesgue en el intervalo $[0, +\infty[$.

2.3 El teorema y las fórmulas de Cauchy

Vamos a encontrar una condición suficiente para que una función holomorfa en un abierto tenga primitiva en el mismo, y por consiguiente sus integrales a lo largo de arcos cerrados sean nulas. Para ello investigaremos cuándo las integrales son nulas a lo largo de los arcos cerrados más sencillos: los triángulos.

Definición 2.25 Llamaremos *triángulo* de vértices a, b, $c \in \mathbb{C}$ a la poligonal cerrada

$$[a, b, c] = [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a].$$

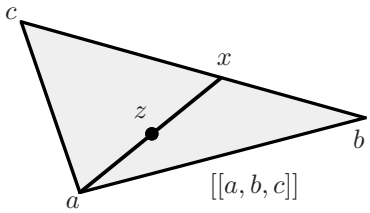


Observar que el sentido de las flechas es importante. El triángulo $[a, b, c]$ no es el mismo que $[c, b, a]$. De hecho uno es equivalente al opuesto del otro. También conviene notar que en ningún momento se exige que los puntos a, b, c no estén alineados. Si esto ocurre el triángulo se reduce a un segmento recorrido dos veces. Definimos

$$[[a, b, c]] = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1],\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Geométricamente se trata de los puntos rodeados por el triángulo. Esto lo expresa más claramente la igualdad siguiente:

$$[[a, b, c]] = \bigcup_{x \in [b,c]^*} [a, x]^*. \qquad (2.9)$$



[1] Derivándola, basta ver que $x\cos x - \operatorname{sen} x < 0$ y, volviendo a derivar basta con que $\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x < 0$, lo cual es obvio.

La prueba es muy simple: si $z = \alpha a + \beta b + \gamma c \in [[a, b, c]]$, o bien $\alpha = 1$, en cuyo caso $z = a$, o bien $\alpha \neq 1$, en cuyo caso

$$z = \alpha a + (1-\alpha)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\, b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\, c\right) \quad \text{y} \quad x = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\, b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\, c \in [b, c]^*.$$

En cualquier caso $z \in [a, x]^*$ para un cierto $x \in [b, c]^*$. Recíprocamente, si z cumple esto, entonces $x = (1-\gamma)b + \gamma c$, con $0 \leq \gamma \leq 1$ y $z = (1-\beta)a + \beta x$, con $0 \leq \beta \leq 1$. Así $z = (1-\beta)a + \beta(1-\gamma)b + \beta\gamma c$ y los coeficientes suman 1, luego $z \in [[a, b, c]]$. ∎

Recordemos que un conjunto A es *convexo* si cuando a, $b \in A$, entonces $[a, b]^* \subset A$, así como que el *diámetro* de un conjunto A es

$$\delta(a) = \sup\{|z - z'| \mid z, z' \in A\}.$$

El teorema siguiente recoge las propiedades de los triángulos que vamos a necesitar:

Teorema 2.26 *Sea T un triángulo. Entonces*

a) El conjunto $[T]$ es compacto y convexo.

b) Si $A \subset \mathbb{C}$ es convexo y los vértices de T están en A, entonces $[T] \subset A$.

c) $\delta([T]) \leq L(T)$.

Demostración: Supongamos que $T = [a, b, c]$.

a) La aplicación $f : [0, 1]^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$ es continua, luego el conjunto $C = f^{-1}[\{1\}] = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ es cerrado y por lo tanto compacto.

La aplicación $g : [0, 1]^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$ también es continua, y $[T] = g[C]$, luego es compacto.

La convexidad se prueba inmediatamente a partir de las definiciones de conjunto convexo y de $[T]$.

b) Si A es convexo y a, b, $c \in A$, entonces $[b, c]^* \subset A$, luego si $x \in [b, c]^*$, entonces $[a, x]^* \subset A$. Por (2.9), concluimos que $[T] \subset A$.

c) Se cumple $|c - a| \leq |c - b| + |b - a|$, luego

$$2|c - a| \leq |c - b| + |b - a| + |c - a| = L(T).$$

Esto prueba que $c \in \overline{D(a, L(T)/2)}$, y lo mismo le ocurre a b. Puesto que el disco cerrado es convexo, por b) resulta que $[T] \subset \overline{D(a, L(T)/2)}$, luego $\delta([T]) \leq \delta(\overline{D(a, L(T)/2)}) = L(T)$. ∎

Ahora vamos a probar uno de los teoremas más profundos de la teoría de funciones holomorfas. En este mismo capítulo y en otros posteriores obtendremos varias generalizaciones del mismo, pero la pieza clave es la que vamos a ver ahora.

Teorema 2.27 (Teorema de Cauchy para triángulos) *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{C}$, sea $p \in \Omega$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces para todo triángulo T tal que $T^* \subset \Omega$ se cumple que $\int_T f(\zeta)\, d\zeta = 0$.*

Más adelante veremos que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$, de hecho es holomorfa en Ω, pero ahora no estamos en condiciones de probarlo y exceptuar a p será esencial para justificar que la derivada de una función holomorfa es de nuevo una función holomorfa (en particular, que las funciones holomorfas son de clase C^1, como ya hemos indicado en varias ocasiones).

Demostración: Sea $T = [a, b, c]$. Distinguiremos tres casos:

1) $p \in [T]$, 2) $p \in \{a, b, c\}$, 3) el caso restante.

Caso 1) Si $p \notin [T]$ vamos a demostrar que existe una sucesión $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ de triángulos tal que $T_0 = T$ y además

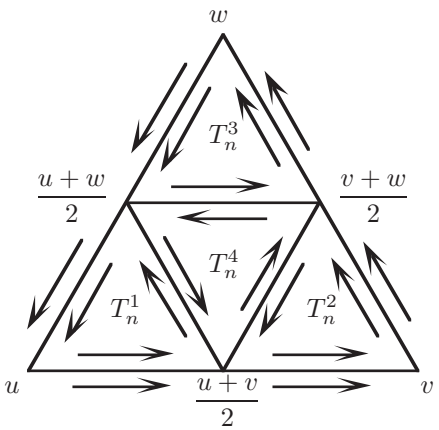
a) $[T_{n+1}] \subset [T_n] \subset \Omega$.

b) $L(T_{n+1}) = L(T_n)$.

c) $\frac{1}{4}\left|\int_{T_n} f(\zeta)\, d\zeta\right| \leq \left|\int_{T_{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta\right|$.

Supongamos construidos $T_0, \ldots, T_n$ y sea $T_n = [u, v, w]$. Definimos los triángulos

$$T_n^1 = \left[u, \frac{u+v}{2}, \frac{u+w}{2}\right], \qquad T_n^2 = \left[\frac{u+v}{2}, v, \frac{v+w}{2}\right],$$
$$T_n^3 = \left[\frac{v+w}{2}, w, \frac{u+w}{2}\right], \qquad T_n^4 = \left[\frac{u+w}{2}, \frac{u+v}{2}, \frac{v+w}{2}\right].$$



Observar que la definición formal de los triángulos puede recuperarse a partir de la figura (salvo permutación cíclica de los vértices, pero esto es irrelevante pues es obvio que una integral sobre un triángulo no varía si permutamos

cíclicamente sus vértices). A menudo es más cómodo definir arcos mediante figuras como ésta. El lector debe tener presente que cualquier definición mediante una figura puede sustituirse fácilmente por una definición formal.

Claramente los vértices de los triángulos T_n^i están contenidos en $[T_n]$. Como éste es convexo, $[T_n^i] \subset [T_n]$. También es obvio que $L(T_n^i) = L(T_n)/2$. Esto significa que cualquier T_n^i sirve como T_{n+1} en lo que respecta a las condiciones a) y b). Basta probar que al menos uno de ellos cumple c). Consideremos la suma

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{T_n^i} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Al descomponer cada integral como suma de las integrales sobre cada uno de los lados del triángulo vemos la función se integra dos veces sobre los lados de T_n^4, pero en sentidos opuestos (ver la figura), luego estas integrales se cancelan, y lo que queda es la integral sobre los lados de T_n. Así pues

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{T_n^i} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{T_n} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Por consiguiente

$$\left| \int_{T_n} f(\zeta)\, d\zeta \right| \le \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{T_n^i} f(\zeta)\, d\zeta \right|,$$

lo que implica que al menos una de las integrales de la derecha ha de ser mayor o igual que la cuarta parte del miembro izquierdo, luego tomando como T_{n+1} el triángulo correspondiente a dicha integral se cumple c).

Con esto tenemos probada la existencia de la sucesión $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$. Por compacidad hay un punto $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [T_n]$.

Bajo la hipótesis del caso 1) tenemos $z_0 \neq p$, luego f es derivable en z_0. En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ y si $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon,$$

luego $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|$. Por la propiedad b) tenemos que $\delta([T_n]) \le L(T_n) = 2^{-n} L(T)$. Como los diámetros tienden a 0 existe un n_0 tal que $[T_{n_0}] \subset D(z_0, \delta)$. La función $-f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ es un polinomio, luego tiene primitiva, luego por el teorema 2.20

$$\int_{T_{n_0}} (-f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0))\, d\zeta = 0.$$

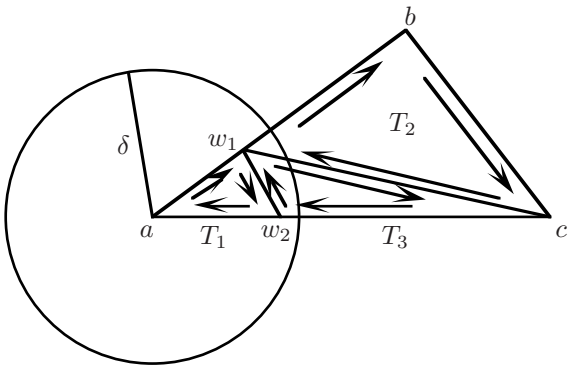
Teniendo en cuenta esto y la propiedad c) resulta

$$\left| \int_T f(\zeta)\, d\zeta \right| \le 4^{n_0} \left| \int_{T_{n_0}} f(\zeta)\, d\zeta \right| = 4^{n_0} \left| \int_{T_{n_0}} (f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0))\, d\zeta \right|$$

$$4^{n_0}\epsilon \int_{T_{n_0}} |\zeta - z_0|\, d\zeta \le 4^{n_0}\epsilon L(T_{n_0})\delta([T_{n_0}]) \le 4^{n_0}\epsilon L(T_{n_0})^2 \le \epsilon L(T)^2.$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ concluimos que la integral es nula.

Caso 2) Supongamos por ejemplo que $p = a$. Sea $\delta_0 > 0$ de manera que $\overline{D(a,\delta_0)} \subset \Omega$. Sea $0 < \delta < \delta_0$. Tomemos $w_1 \in D(a,\delta) \cap ([a,b]^* \setminus \{a\})$ y $w_2 \in D(a,\delta) \cap ([a,c]^* \setminus \{a\})$. Consideramos los triángulos T_1, T_2 y T_3 definidos en la figura:



Como antes, al descomponer las integrales sobre T_1, T_2 y T_3 en las sumas de las integrales sobre sus lados, las integrales correspondientes a los lados interiores se cancelan y queda que

$$\int_T f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{i=1}^{3} f(\zeta) d\zeta 2.$$

Por el caso 1) las integrales sobre T_2 y T_3 son nulas, luego

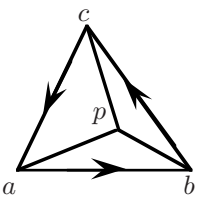
$$\int_T f(\zeta)\, d\zeta = \int_{T_1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Sea $M = \sup\{|f(\zeta)| \mid z \in \overline{D(a,\delta_0)}\}$. Así

$$\left|\int_T f(\zeta)\, d\zeta\right| = \left|\int_{T_1} f(z) dz\right| \le ML(T_1) \le M(|w_1 - a| + |w_2 - a| + |w_1 - w_2|) \le 4M\delta$$

para todo $\delta > 0$, luego la integral es nula.

Caso 3). Ahora $p \in [T]$, pero no es un vértice (aunque quizá esté en un lado). Dividimos T en tres triángulos como indica la figura. Una vez más la integral de f sobre T se descompone en suma de las integrales sobre los tres triángulos, y las tres integrales son nulas por el caso 2). ∎



Ahora ya podemos probar que las funciones holomorfas sobre abiertos convexos tienen primitiva. Conviene separar en un teorema previo el argumento que vamos a emplear, pues nos será útil después.

Teorema 2.28 *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua con la propiedad de que para todo triángulo T tal que $T^* \subset \Omega$ se cumple que $\int_T f(\zeta)\,d\zeta = 0$. Sea $z_0 \in \Omega$. Entonces la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ es holomorfa en Ω y $F' = f$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_1 \in \Omega$. Sea $r > 0$ tal que $D(z_1, r) \subset \Omega$. Sea $\epsilon > 0$. Por continuidad existe un δ tal que $0 < \delta < r$ y si $|z - z_1| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_1)| < \epsilon$.

Sea $z \neq z_1$ tal que $|z - z_1| < \delta$. Todos los segmentos que se consideran a continuación están en Ω por convexidad.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1)\right| &= \left|\frac{1}{z-z_1}\left(\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z_1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{z-z_1}\left(\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{[z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z_1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{z-z_1}\left(\int_{[z_0,z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z_1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{z-z_1}\int_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{z-z_1}\int_{[z_1,z]} f(z_1)\,d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|z-z_1|}\int_{[z_1,z]} \big|f(\zeta) - f(z_1)\big|\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Como $[z_1, z] \subset D(z_1, \delta)$, el integrando está acotado por ϵ, luego queda

$$\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1)\right| \leq \epsilon, \qquad \text{si } |z - z_1| < \delta.$$

Por lo tanto F es derivable en z_1 y $F'(z_1) = f(z_1)$. ∎

Combinando los dos últimos teoremas obtenemos inmediatamente:

Teorema 2.29 *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces existe una función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.*

En cuanto probemos que la derivada de una función holomorfa es holomorfa quedará demostrado que la hipótesis de este teorema equivale a exigir simplemente que f sea holomorfa en Ω. De momento hemos de conservar esta hipótesis aparentemente más general porque hace falta para probar precisamente lo que estamos afirmando.

El teorema anterior junto con 2.20 nos dan ahora el teorema de Cauchy para abiertos convexos:

Teorema 2.30 (Teorema de Cauchy) *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Entonces para todo arco cerrado ϕ contenido en Ω se cumple que*

$$\int_\phi f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Esto completa el argumento que hemos seguido para calcular las integrales de Fresnel. Finalmente probamos que las funciones holomorfas son infinitamente derivables. En particular son de clase C^1.

En lo sucesivo escribiremos

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)\, d\zeta$$

cuando el arco sobre el que integramos sea la circunferencia $\phi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(t) = z_0 + re^{it}$. Claramente $L(\phi) = 2\pi r$.

Teorema 2.31 (Fórmulas de Cauchy para circunferencias) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces f es infinitamente derivable*[2] *y si $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ cumplen que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, se tiene que para todo $z \in D(z_0, r)$ y todo número natural n*

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demostración: Comenzamos probando la fórmula para $n = 0$. Es claro que podemos tomar un $r' > r$ de modo que $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, r') \subset \Omega$. Así $D(z_0, r')$ es un abierto convexo al que podemos aplicar 2.29.

Consideremos la función en $D(z_0, r')$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z \end{cases}$$

Claramente es continua en el disco y derivable salvo quizá en z. Por el teorema 2.29 tiene primitiva en el disco y por el teorema 2.20

$$0 = \int_{|\zeta - z_0| = r} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Según el teorema 2.22, la última integral es el índice respecto a z de la circunferencia $|\zeta - z_0| = r$ multiplicado por $2\pi i$, o sea, es $2\pi i$, lo que nos da la fórmula buscada.

[2] Si llamamos $g(z) = f(1/z)$ entonces $f'(1/z) = -g'(z)z^2$, lo que implica que una función holomorfa en ∞ es infinitamente derivable en ∞. Las fórmulas integrales no valen en ∞.

Admitiendo la validez de la fórmula para n el teorema 2.24 implica que $f^{n)}$ es derivable y su derivada es la dada por la fórmula para $n+1$. ∎

Para acabar probaremos un recíproco del teorema de Cauchy que jugará un papel muy importante en el capítulo siguiente:

Teorema 2.32 (Teorema de Morera) *Sea Ω una abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow C$ una función continua con la propiedad de que para todo triángulo T tal que $T^* \subset \Omega$ se cumple que $\int_T f(\zeta)\,d\zeta = 0$. Entonces f es holomorfa en Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Por el teorema 2.28 existe una función holomorfa $F : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F' = f$. Por el teorema anterior f es holomorfa. ∎

Capítulo III

Series de Taylor

Supongamos que $f :]a-r, a+r[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable. Entonces podemos calcular los polinomios de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

El teorema de Taylor permite probar en determinadas circunstancias que estos polinomios son aproximaciones cada vez mejores de la función f alrededor del punto a o, equivalentemente, que la función f puede expresarse como la suma de su serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Sin embargo, esto sucede con menos frecuencia de lo que podría parecer. En muchos casos la serie converge a la función en un entorno del punto a mucho menor que el intervalo $]a-r, a+r[$ y diverge fuera de él sin que se pueda dar una explicación satisfactoria de por qué se interrumpe la convergencia. En casos extremos la serie no aproxima a la función en ningún punto salvo el propio a.

Cuando una función real coincide con su serie de Taylor en un intervalo se dice que es *analítica* en dicho intervalo. Las funciones analíticas son (por definición) infinitamente derivables, es decir, de clase C^∞, pero el recíproco no es cierto.

En el caso de las funciones de variable compleja la situación es radicalmente distinta. Toda función f holomorfa en un punto z_0 es infinitamente derivable, luego podemos considerar su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Veremos que una restricción a la convergencia de una serie de potencias es que ha de converger sobre un disco, pero probaremos también que ésta es, de

hecho, la única restricción a la que están sometidas las series de Taylor de las funciones holomorfas, es decir, que si una función f es holomorfa en un disco, entonces su serie de Taylor converge a f en dicho disco. Esto significa que una función de variable compleja es analítica en un disco si y sólo si es holomorfa en dicho disco. Por ello los términos función holomorfa y función analítica son sinónimos al referirse a las funciones de variable compleja.

Este capítulo está dedicado a probar estos hechos. Por completitud, recogemos en la primera sección las propiedades elementales de las series de números complejos. Supondremos que el lector conoce ya los resultados básicos, al menos para series de números reales, por lo que daremos algunos resultados sin prueba. De todos modos demostraremos aquellos que puedan ser ilustrativos.

3.1 Series

Definición 3.1 La *serie* determinada por una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos es la sucesión $\left\{\sum_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$, que representaremos siempre por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Cuando la serie sea convergente la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ denotará también a su límite.

Los números a_n se llaman *términos* de la serie, las sumas $\sum_{n=0}^{k} a_n$ se llaman *sumas parciales* y las sumas $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ se llaman *colas* de la serie.

Es fácil ver que una serie converge si y sólo si la sucesión de las colas converge a 0, así como que una condición necesaria para la convergencia es que los términos generales tiendan a 0.

Análogamente, las sucesiones funcionales $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde cada $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, definen series funcionales $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, que a su vez definen una función sobre el conjunto Y de los puntos donde convergen, y que representaremos igualmente por $\sum_{n=0}^{\infty} f_n : Y \longrightarrow \mathbb{C}$.

La completitud de $\mathbb{C}$ aplicada a las series nos da que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy, es decir, si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un natural n_0 tal que si $n_0 \leq m \leq p$, entonces $\sum_{n=m}^{p} |a_n| < \epsilon$.

De aquí se sigue fácilmente que si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente,* es decir, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie es convergente. La series convergentes que no son absolutamente convergentes se llaman *condicionalmente convergentes.*

Esto permite reducir en muchos casos la convergencia de una serie compleja a la de una serie de números reales positivos. Puesto que éstas son sucesiones

monótonas crecientes, su convergencia equivale a que sus sumas parciales $\sum_{n=0}^{k} a_n$ estén acotadas.

Otro hecho obvio es que si se cumple $|a_n| \leq b_n$ para todo número natural n y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también es convergente.

También suelen ser útiles los siguientes criterios de convergencia, el primero para series de términos positivos y el segundo para series funcionales, ambos muy conocidos:

Criterio de D'Alembert *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de números reales positivos y supongamos que existe $L = \lim_n a_{n+1}/a_n$. Entonces si $L < 1$ la serie converge y si $L > 1$ la serie diverge.*

Criterio de Mayoración de Weierstrass *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie funcional en un espacio X y $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en el intervalo $[0, +\infty[$ tal que para todo natural n y todo $x \in X$ se cumpla $|f_n(x)| \leq M_n$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente en X.*

Las propiedades elementales de los límites nos dan los hechos siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \quad \text{y} \quad \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n,$$

entendiendo que si las series de la izquierda convergen, las de la derecha también lo hacen y se da la igualdad. Un resultado análogo para productos de series ya no es tan sencillo.

Definición 3.2 Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series en $\mathbb{C}$. Llamaremos *producto de Cauchy* de estas series a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot b_{n-k}).$$

La intención es que la serie que acabamos de definir converja al producto de las dos series de partida, pero esto no ocurre necesariamente si al menos una de ellas no converge absolutamente.

Teorema 3.3 *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son dos series convergentes en* $\mathbb{C}$ *al menos una de las cuales converge absolutamente, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la serie que converge absolutamente es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y definamos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ \beta_n = B_n - B.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + \cdots + c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + \cdots + a_nB_0 = a_0(B + \beta_n) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + (a_0\beta_n + \cdots + a_n\beta_0) \end{aligned}$$

El teorema quedará probado si vemos que $a_0\beta_n + \cdots + a_n\beta_0$ tiende a 0.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Sea $M = \sup\{|\beta_n| \mid n \geq 0\}$ (la sucesión β_n tiende a 0, luego está acotada).

Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\beta_n| < \epsilon/2K$ y si $k \geq n_0$, entonces $\sum_{k=n_0+1}^{q} |a_k| < \epsilon/2M$. En consecuencia, si $n \geq 2n_0$,

$$\begin{aligned} |a_0b_n + \cdots + a_nb_0| &\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k\beta_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k\beta_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k\beta_{n-k}| \\ &< \frac{\epsilon}{2K}\sum_{k=0}^{n} |a_k| + M\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k| \leq \frac{\epsilon}{2K}K + \frac{\epsilon}{2M}M = \epsilon. \end{aligned}$$

■

La convergencia absoluta es esencial para garantizar que los términos de una serie puedan ser reordenados sin alterar su límite.

Teorema 3.4 *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es una serie absolutamente convergente y* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es una aplicación biyectiva, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *es absolutamente convergente y tiene la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si las sumas parciales de sus módulos forman un conjunto acotado. Toda suma parcial de los módulos de la reordenación está mayorada por una suma parcial de los módulos de la serie original (tomando los sumandos necesarios para incluir todos los que aparecen en la suma dada). Por tanto las sumas parciales de los módulos de la reordenación están acotadas y la serie converge absolutamente.

Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $m_0 \geq n_0$ tal que $\{0, 1, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(m_0)\}$. Entonces si $n \geq m_0$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \\ &< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. ∎

Como consecuencia, si I es cualquier conjunto infinito numerable y $\{a_i\}_{i\in I}$ es cualquier familia de elementos de $\mathbb{C}$ con la propiedad de que las sumas $\sum\limits_{i\in F} |a_i|$, con $F \subset I$ finito estén acotadas, tiene sentido la expresión $\sum\limits_{i\in I} a_i$, definida como la suma de la serie determinada por cualquier ordenación del conjunto I, y es un número independiente de la ordenación elegida. Obviamente la expresión $\sum\limits_{i\in I} a_i$ tiene también sentido cuando I es un conjunto finito.

Observar que si $\epsilon > 0$, existe un $F_0 \subset I$ finito tal que para todo $F_0 \subset F \subset I$, se cumple $\left|\sum\limits_{i\in I} a_i - \sum\limits_{i\in F} a_i\right| < \epsilon$. En efecto, basta considerar una ordenación de I y tomar como F_0 los primeros términos de la sucesión, de modo que el módulo de las colas con y sin módulos sea menor que $\epsilon/2$. Entonces

$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| \leq \left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F_0} a_i\right| + \left|\sum_{i\in F_0} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i\in F\setminus F_0} |a_i| < \epsilon.$$

Si $\sum_{i\in I} a_i$ y $\sum_{j\in J} b_j$ son series absolutamente convergentes el teorema 3.3 puede reescribirse como

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big). \tag{3.1}$$

Ésta es la interpretación más clara del teorema 3.3: El producto de dos series absolutamente convergentes se obtiene sumando todos los productos posibles entre sus términos.

Las series absolutamente convergentes se pueden manipular exactamente igual que si fueran sumas finitas. El siguiente teorema justifica cualquier operación razonable entre ellas.

Teorema 3.5 *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $\mathbb{C}$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ una división de I en partes disjuntas. Entonces $\sum_{i\in I} a_i$ es (absolutamente) convergente si y sólo si lo son las series $\sum_{i\in I_n} a_i$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_i|$. Además en tal caso*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\sum_{i\in I} a_i$ es absolutamente convergente, sus sumas parciales en módulo están acotadas, pero toda suma parcial en módulo de cada $\sum_{i\in I_n} |a_i|$ lo es también de la primera, luego éstas están acotadas, o sea, las series $\sum_{i\in I_n} |a_i|$ convergen absolutamente. Dado cualquier natural k, tomamos para cada $n \le k$ un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que $\sum_{i\in I_n} |a_i| - \sum_{i\in F_n} |a_i| < 1/(k+1)$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n} |a_i| < \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in F_n} |a_i| + 1 \le \sum_{i\in I} |a_i| + 1,$$

luego las sumas parciales están acotadas y así todas las series convergen absolutamente.

Supongamos ahora que las series $\sum_{i\in I_n} |a_i|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} |a_i|$ convergen absolutamente. Si $F \subset I$ es finito, para un cierto k suficientemente grande se cumple

$$\sum_{i\in F} |a_i| = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n\cap F} |a_i| \le \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n} |a_i| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} |a_i|,$$

luego las sumas parciales de $\sum_{i\in I} |a_i|$ están acotadas y la serie converge absolutamente.

Ahora supongamos la convergencia de todas las series y probemos la igualdad de las sumas. Notemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$$

es convergente porque es absolutamente convergente. Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural n_0 tal que

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i \right| < \epsilon/4.$$

Para cada $n \le n_0$ existe un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que si $F_n \subset F \subset I_n$, entonces

$$\left|\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in F_n} a_i\right| < \frac{\epsilon}{2(n_0+1)}.$$

Sea F un conjunto finito que contenga a todos los F_n y tal que

$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| < \epsilon/4.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right| &\le \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i\in I_n} a_i\right| + \left|\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| \\ &+ \left|\sum_{i\in F} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{n_0}\left(\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in I_n\cap F} a_i\right)\right| + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto ambas sumas coinciden. ∎

Damos un último criterio de convergencia de series en términos de convergencia de integrales infinitas:

Teorema 3.6 *Sea $f : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ una función continua monótona decreciente y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Sea $d_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$.*

a) $0 \le f(n+1) \le d_{n+1} \le d_n \le f(1)$.

b) Existe $\lim_n d_n$.

c) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y sólo si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

Demostración: Es claro que a) implica b) y que b) implica c), luego basta probar a). Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ y $t_n = \int_1^n f(x)\,dx$. Se cumple

$$t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(k)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n.$$

En consecuencia $0 \le f(n+1) = s_{n+1} - s_n \le s_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, que es una parte de a). Además

$$d_n - d_{n+1} = t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1)$$

$$\geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx - f(n+1) = 0,$$

luego $d_{n+1} \leq d_n \leq d_1 = f(1)$. ∎

Como aplicación damos la siguiente definición que nos será necesaria más adelante.

Definición 3.7 Se llama *constante de Euler* al número real

$$\gamma = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n,$$

que existe por el teorema anterior. A veces s la representa por C en lugar de γ.

Se desconoce si γ es un número racional o irracional. Sus cien primeras cifras decimales son

$$\begin{aligned}\gamma \;=\;& 0,57721566490153286060651209008240243104215933593 99\\ & 23598805767234884867726777664670936947063291746749 5\ldots\end{aligned}$$

3.2 Convergencia casi uniforme

En esta sección estudiaremos la convergencia de sucesiones de funciones holomorfas. Esto supone considerar a los espacios de funciones como espacios topológicos. Trabajaremos con funciones definidas en abiertos de $\mathbb{C}^\infty$ porque las diferencias con el caso de abiertos en $\mathbb{C}$ son mínimas.

En general, si X es un espacio topológico, llamaremos $F(X) = \mathbb{C}^X$ al conjunto de todas las funciones de X en C. Tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente. También podemos definir puntualmente el producto, con el que se convierte en un álgebra conmutativa y unitaria. Entre sus subálgebras más destacadas se encuentran el espacio $F^*(X)$ de las funciones acotadas y el espacio $C(X)$ de las funciones continuas. Cuando X es un abierto de $\mathbb{C}^\infty$ tenemos también la subálgebra $\mathcal{H}(X)$ de las funciones holomorfas en X.

En todos estos espacios podemos definir diversas topologías. La más sencilla es la topología de la *convergencia puntual,* que no es sino la topología producto de $\mathbb{C}^X$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ en $F(X)$ *converge puntualmente* a una función f si y sólo si para cada $x \in X$ la sucesión de números complejos $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ converge a $f(x)$.

Con la topología de la convergencia puntual $F(X)$ es un espacio vectorial topológico, es decir, la suma y el producto por un escalar son funciones continuas (al igual que el producto interno), pero aquí terminan las ventajas; los inconvenientes son muchos: salvo casos triviales los espacios $F(X)$, $F^*(X)$, $C(X)$, $\mathcal{H}(X)$ no son metrizables. En particular las sucesiones no determinan la topología. Además $F^*(X)$, $C(X)$, $\mathcal{H}(X)$ no son cerrados, es decir, un límite puntual de funciones continuas, acotadas u holomorfas no tiene por qué ser una función continua, acotada u holomorfa.

Una topología que subsana estos inconvenientes es la *topología de la convergencia uniforme.* Podemos definirla directamente con una métrica:

$$d(f,g) = \text{mín}\{1, \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|\}.$$

Con esta distancia, $F(X)$ es un espacio métrico completo y los subespacios $F^*(X)$, $C(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ (éste último cuando X es un abierto en $\mathbb{C}^\infty$) son cerrados, luego completos (el caso de $\mathcal{H}(X)$ lo demostraremos luego).

Más aún, $F^*(X)$ es un espacio de Banach con la norma supremo, dada por

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

y la topología inducida por la norma es la de la convergencia uniforme. En particular si K es un espacio compacto, $C(K) \subset F^*(K)$ es también un espacio de Banach con la norma supremo.

Sin embargo las funciones holomorfas están definidas en abiertos y existen funciones holomorfas no acotadas. El límite uniforme de una sucesión de funciones acotadas es una función acotada y el límite uniforme de una sucesión de funciones no acotadas es una función no acotada. De aquí se siguen varias consecuencias negativas: Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}^\infty$, los espacios $\mathcal{H}(\Omega) \subset C(\Omega)$ no son espacios normados con la topología de la convergencia uniforme. De hecho ni siquiera son espacios vectoriales topológicos, pues si f es una función no acotada, entonces la sucesión de funciones no acotadas $(1/n)f$ no puede converger uniformemente a 0, que es una función acotada, luego el producto por un escalar no es una función continua. Un inconveniente más grave es que si Ω está acotado, entonces los polinomios son funciones acotadas, por lo que no es posible aproximar mediante polinomios a una función holomorfa no acotada.

En resumen, sucede que la topología de la convergencia puntual no es lo suficientemente fina, mientras que la topología de la convergencia uniforme es demasiado fina.

Vamos a definir en $F(X)$ una topología intermedia entre las dos topologías anteriores, de modo que posea las ventajas de la topología de la convergencia uniforme pero no sus inconvenientes.

Definición 3.8 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$. Llamaremos *topología de la convergencia casi uniforme* en $F(\Omega)$ a aquella en la que una base de entornos abiertos de cada función $f_0 \in F(\Omega)$ está formada por los conjuntos

$$V(f_0, K, \epsilon) = \big\{f \in F(\Omega) \;\big|\; \sup_{x\in K} |f(x) - f_0(x)| < \epsilon\big\},$$

donde $K \subset \Omega$ es un compacto y $\epsilon > 0$.

Para comprobar que efectivamente estos conjuntos definen una topología observamos que si $f \in V(f_0, K, \epsilon) \cap V(f_1, K', e')$, podemos tomar un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x\in K} |f(x) - f_0(x)| + \delta < \epsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x\in K'} |f(x) - f_0(x)| + \delta < \epsilon',$$

y entonces $V(f, K \cap K', \delta) \subset V(f_0, K, \epsilon) \cap V(f_1, K', \epsilon')$.

La convergencia respecto de esta topología se denomina, como cabía esperar, *convergencia casi uniforme.* Observar que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge casi uniformemente a una función f si y sólo si está finalmente en cada entorno $V(f, K, \epsilon)$, es decir, si y sólo si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ existe un índice n_0 de modo que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Esto significa que para todo compacto $K \subset \Omega$, la sucesión $\{f_n|_K\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a $f|_K$.

En resumen: una sucesión converge casi uniformemente a una función f si y sólo si converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω.

De aquí se desprende que la convergencia uniforme implica la convergencia casi uniforme y que la convergencia casi uniforme implica la convergencia puntual (pues los puntos son compactos). Más tarde veremos con ejemplos que los recíprocos son falsos en general, aunque, dado que $\mathbb{C}^\infty$ es compacto, la convergencia casi uniforme en $\mathbb{C}^\infty$ sí equivale a la convergencia uniforme.

En lo sucesivo y mientras no se diga lo contrario consideraremos a $F(\Omega)$ como espacio topológico con la topología de la convergencia casi uniforme. Veamos que $F(\Omega)$ es metrizable, con lo que las sucesiones determinan la topología. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ definimos los conjuntos

$$K_n = \{z \in \Omega \mid |z| \leq n \text{ y } d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\}, \tag{3.2}$$

donde d denota la distancia euclídea en $\mathbb{C}$. Es inmediato comprobar que los conjuntos K_n son compactos, satisfacen $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset \Omega$, su unión es todo el abierto Ω y además todo subconjunto compacto de Ω está contenido en uno de estos conjuntos.

Claramente si $K \subset K_n$ y $1/n < \epsilon$, entonces $V(f, K_n, 1/n) \subset V(f, K, \epsilon)$, para toda función $f \in F(\Omega)$, luego los conjuntos $V(f, K_n, 1/n)$ forman una base numerable de entornos de f.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ pero $\Omega \neq \mathbb{C}^\infty$ entonces Ω es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}$ (mediante cualquier transformación de Möbius M que cumpla $M(\infty) \notin \Omega$). Por lo tanto Ω también tiene una sucesión de compactos K_n con las mismas propiedades. El caso $\Omega = \mathbb{C}^\infty$ es trivial (por ejemplo podemos tomar todos los K_n iguales a $\mathbb{C}^\infty$).

Teorema 3.9 *Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}^\infty$, entonces $F(\Omega)$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n > 0$ y cada par de funciones $f, g \in F(\Omega)$, sea

$$\rho_n(f, g) = \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)| \in [0, +\infty].$$

Es muy fácil comprobar que $\rho_n(f, g) \geq 0$, $\rho_n(f, g) = \rho_n(g, f)$, así como la desigualdad triangular: $\rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g)$, donde entendemos que $\infty + \infty = \infty$.

Sea $d_n(f, g) = \min\{1, \rho_n(f, g)\}$. Entonces d_n tiene las mismas propiedades que ρ_n y además $0 \leq d_n(f, g) \leq 1$.

Finalmente definimos

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f,g)}{2^n} \leq 1.$$

Claramente se trata de una distancia en $F(\Omega)$. Observemos, por ejemplo, que $d(f,g) = 0$ si y sólo si $d_n(f,g) = 0$ para todo natural n, si y sólo si $(f-g)|_{K_n} = 0$ para todo n, si y sólo si $f = g$.

Ahora veremos que la topología inducida por d es la topología de la convergencia casi uniforme. En el resto de la prueba $B(f,\epsilon)$ denotará a la bola abierta de centro f y radio ϵ para la distancia d.

Si $f_0 \in F(\Omega)$, un entorno básico de f_0 para la métrica es $B(f_0, 1/2^n)$. Veamos que $V(f_0, K_{n+1}, 1/2^{n+1}) \subset B(f_0, 1/2^n)$.

Si $f \in V(f_0, K_{n+1}, 1/2^{n+1})$, la definición de d_m nos da $d_m(f_0,f) < 1/2^{n+1}$, para $m = 1, \ldots, n+1$. Así

$$d(f_0,f) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{d_m(f_0,f)}{2^m} + \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{d_m(f_0,f)}{2^m} < \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}.$$

Un entorno básico de f_0 para la topología de la convergencia casi uniforme es $V(f_0, K_n, 1/n)$. Veamos que $B(f_0, 1/2^{2n}) \subset V(f_0, K_n, 1/n)$.

Si $d(f,f_0) < 1/2^{2n}$, entonces $d_n(f,f_0)/2^n < 1/2^{2n}$, con lo que se cumple $d_n(f,f_0) < 1/2^n < 1/n$, y esto implica $f \in V(f_0, K_n, 1/n)$.

Con esto hemos probado todas las funciones tienen los mismos entornos para ambas topologías, luego éstas coinciden. ∎

Es fácil ver que si $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$, una sucesión de funciones en $F(\Omega)$ es de Cauchy si y sólo si es uniformemente de Cauchy en cada compacto K_n y, por lo tanto, en cada compacto de Ω. De aquí se desprende la completitud de $F(\Omega)$:

Teorema 3.10 *Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}^\infty$, entonces $F(\Omega)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración: Sea $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy. Si K es un subconjunto compacto de Ω, entonces la sucesión $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ es de Cauchy en $F(K)$ para la topología de la convergencia uniforme. Como $F(K)$ es completo con esta topología, resulta que $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a una función $f_K \in F(K)$.

Aplicando esto a los conjuntos de un punto, que son compactos, obtenemos en particular que $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge puntualmente a una cierta $f \in F(\Omega)$, luego para todo compacto $K \subset \Omega$ ha de ser $f_K = f|_K$. Así pues, la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a f en cada compacto K, luego la sucesión converge casi uniformemente. ∎

Hasta aquí los resultados generales sobre convergencia casi uniforme en $F(\Omega)$. Ahora veremos hechos adicionales para $C(\Omega)$. En primer lugar demostramos que $C(\Omega)$ es cerrado en $F(\Omega)$, luego es también un espacio métrico completo.

Teorema 3.11 *El límite casi uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$ y $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión en $C(\Omega)$ que converja casi uniformemente a una función $f \in F(\Omega)$. Para cada $z \in \Omega$ sea $K \subset \Omega$ un entorno compacto de z. Como $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a f en K, tenemos que f es continua en K y, en particular, en z, luego $f \in C(\Omega)$. ∎

Cualquier ejemplo de sucesión de funciones continuas que converja puntualmente a una función discontinua justifica ahora que la convergencia puntual no implica la convergencia casi uniforme.

No es difícil demostrar que la topología de la convergencia casi uniforme en $C(\Omega)$ tiene por subbase a los conjuntos $F(K,G) = \{f \in C(\Omega) \mid f[K] \subset G\}$, donde $K \subset \Omega$ es un compacto y $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto (aunque esto es falso en $F(\Omega)$). Por este motivo a la topología de la convergencia casi uniforme en $C(\Omega)$ se la denomina también *topología compacto-abierto.*

En general $F(\Omega)$ no es un espacio vectorial topológico, pues si $K \subset \Omega$ es un compacto y $f \in F(\Omega)$ es una función no acotada en K, entonces la sucesión $\{(1/n)f\}_{n=1}^\infty$ no converge uniformemente a 0 en K, luego no converge casi uniformemente a 0 en Ω. Esto significa que el producto escalar no es continuo. En $C(\Omega)$ la situación es diferente:

Teorema 3.12 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$. Entonces $C(\Omega)$ es un espacio vectorial topológico, es decir, la suma y el producto por un escalar son funciones continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ son sucesiones en $C(\Omega)$ que convergen respectivamente a las funciones f y g, entonces para cada compacto $K \subset \Omega$ se cumple que las sucesiones $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ y $\{g_n|_K\}_{n=0}^\infty$ convergen uniformemente a $f|_K$ y $g|_K$ respectivamente.

Como $F(K)$ es un espacio de Banach, resulta que $\{f_n|_K + g_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $(f+g)|_K$, luego $\{(f_n+g_n)|_K\}_{n=0}^\infty$ converge casi uniformemente a $f+g$. Esto prueba la continuidad de la suma, e igualmente se prueba la del producto. ∎

De hecho, el mismo argumento demuestra que el producto de funciones de $C(\Omega)$ es una función continua, luego $C(\Omega)$ es lo que se denomina un álgebra topológica o, más aún, un álgebra de Fréchet (un álgebra topológica completamente metrizable).

El próximo teorema muestra que la topología de la convergencia casi uniforme es adecuada para trabajar con funciones holomorfas. Desde un punto de vista topológico puede enunciarse como que el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ es cerrado en $C(\Omega)$ (o en $F(\Omega)$) y que el operador $D : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(W)$ dado por $D(f) = f'$ es una función continua.

Teorema 3.13 (Teorema de Weierstrass) *Para todo Ω abierto en $\mathbb{C}^\infty$, si $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge casi uniformemente a una*

función f, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la sucesión converge casi uniformemente a la función f'.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $\Omega \subset \mathbb{C}$. Por el teorema 3.11 sabemos que f es continua. Sea $z_0 \in \Omega$. Vamos a ver que f es derivable en z_0. Existe un $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Sea T un triángulo tal que $T^* \subset \Omega$.

Como el disco es convexo, el teorema de Cauchy nos da que $\int_T f_n(\zeta)\, d\zeta = 0$. Como T^* es compacto, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f en T^*, luego por el teorema 2.19 concluimos que $\int_T f(\zeta)\, d\zeta = \lim_n \int_T f_n(\zeta)\, d\zeta = 0$.

El teorema de Morera nos da entonces que f es holomorfa en $D(z_0, R)$, para todo $z_0 \in \Omega$, luego $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Tomamos ahora un $R > 0$ tal que $\overline{D(z_0, 2R)} \subset \Omega$. Por la fórmula de Cauchy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta, \\ f_n'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta, \end{aligned}$$

para todo $z \in D(z_0, 2R)$.

La sucesión converge uniformemente a f en la circunferencia $\partial D(z_0, 2R)$, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \epsilon R/4$ para todos los puntos $\zeta \in \partial D(z_0, 2R)$.

Por otro lado, si $\zeta \in \partial D(z_0, 2R)$ y $z \in D(z_0, R)$, es claro que $|\zeta - z| \geq R$. Así

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2R} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} 4\pi R \frac{\epsilon R}{4} \frac{1}{R^2} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$.

Esto prueba que $\{f_n'\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f' en $D(z_0, R)$. Como todo compacto de Ω puede ser cubierto por un número finito de discos como éste, concluimos que la sucesión de las derivadas converge casi uniformemente a f' en Ω.

Si $\infty \in \Omega$ tenemos claramente que $f_n(1/z)$ converge casi uniformemente a $f(1/z)$ en un entorno de 0, luego $f(1/z)$ es derivable en 0 y f es derivable en ∞. Falta probar que f_n' converge casi uniformemente a f'. Si llamamos $g_n(z) = f_n(1/z)$ y $g(z) = f(1/z)$, entonces

$$f_n'(z) = g_n'(1/z)(-1/z^2), \quad f'(z) = g'(1/z)(-1/z^2)$$

para todo $z \in \Omega$. Usando la parte ya probada es fácil ver que $g_n'(1/z)$ converge casi uniformemente a $g'(1/z)$ en Ω, y de aquí se concluye que f_n' converge casi uniformemente a f'. ∎

Ahora podemos dar un criterio que garantice que las integrales paramétricas de funciones holomorfas sobre curvas son funciones holomorfas.

Teorema 3.14 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\phi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva y $f : \Omega \times \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua con derivada compleja respecto a la primera variable $f' : \Omega \times \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$, continua. Supongamos además que existe una función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que para todo punto $t \in I$ y todo $z \in \Omega$ se cumpla $|f\big(z, \phi(t)\big)\phi'(t)| \leq g(t)$. Entonces la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \int_\phi f(z,\zeta)\, d\zeta$ es holomorfa en Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Notar ante todo que la hipótesis implica que f es integrable sobre ϕ para todo $z \in \Omega$. Por simplificar la prueba supondremos que $I = [0, +\infty[$, aunque los demás casos se tratan análogamente.

Para cada número natural n definamos el arco $\phi_n = \phi|_{[0,n]} : [0, n] \longrightarrow \mathbb{C}$ y la función $F_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F_n(z) = \int_{\phi_n} f(z,\zeta)\, d\zeta$.

Por el teorema 2.24 es claro que cada función F_n es holomorfa en Ω. Bastará demostrar que $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a F en Ω. En efecto, si $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |F(z) - F_n(z)| &= \left| \int_\phi f(z,\zeta)\, d\zeta - \int_{\phi_n} f(z,\zeta)\, d\zeta \right| = \left| \int_n^{+\infty} f\big(z, \phi(t)\big)\phi'(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_n^{+\infty} g(t)\, dt \end{aligned}$$

y, como la última expresión tiende a 0 con n, la convergencia uniforme es obvia. ∎

Así pues, sobre curvas generales la única condición que hay que añadir al teorema 2.24 para garantizar la derivabilidad de una integral paramétrica es que el integrando (una vez efectuado el cambio que convierte a la integral en una integral sobre $\mathbb{R}$) *esté uniformemente acotado por una función integrable.* Como el resto de las condiciones se comprueban mecánicamente en cada caso concreto, cuando apliquemos este teorema nos limitaremos a obtener la acotación del integrando.

3.3 Series de potencias

El siguiente paso para obtener los desarrollos de Taylor de las funciones holomorfas es estudiar las series de potencias. Aplicaremos el teorema de Weierstrass para probar que toda serie de potencias define una función holomorfa donde converge. En primer lugar probaremos que la región de convergencia es siempre un disco abierto y quizá algunos de los puntos de su frontera.

Definición 3.15 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La *serie de potencias* de coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ y centro z_0 es la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Recordemos que el *límite superior* de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales es el supremo (quizá $+\infty$) del conjunto de sus puntos adherentes. Lo representaremos mediante $\overline{\lim_n} a_n$. Se cumple que

$$\overline{\lim_n} a_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Es evidente que el límite superior de una sucesión convergente es su límite en el sentido topológico.

Teorema 3.16 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias y* $R = 1/\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$ *(entendiendo que* $1/0 = +\infty$ *y* $1/(+\infty) = 0$*). Entonces la serie converge absoluta y casi uniformemente en* $D(z_0, R)$ *y diverge en todo punto de* $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$*. Convenimos que* $D(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$*).*

Demostración: Sea K un compacto en $D(z_0, R)$. Veamos que la serie converge absoluta y uniformemente en K. La función $|x - z_0|$ es continua en K, luego alcanza su máximo r en un punto $x \in K$, es decir, $|x - z_0| = r$ y para todo $y \in K$ se cumple $|y - z_0| \leq r$. Así $K \subset \overline{D(z_0, r)}$.

Como $x \in D(z_0, R)$ ha de ser $r < R$, luego $r \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Tomemos ρ tal que $r \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} < \rho < 1$. Como $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|}$, existe un natural k tal que $\sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$, luego si $n \geq k$ se cumple $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$ y por lo tanto $|a_n| r^n < \rho^n$.

Si $y \in K$ entonces $|y - z_0| \leq r$, luego $|y - z_0|^n \leq r^n$, luego $|a_n(y - z_0)^n| \leq |a_n| r^n < \rho^n$. Así pues, la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n(y - z_0)^n$ está mayorada en K por $\sum_{n=k}^{\infty} \rho^n$, que es convergente por ser geométrica de razón menor que 1. El criterio de Weierstrass nos da que la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en K.

Ahora veamos que la serie diverge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$. Sea $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x - z_0| > R$. Entonces $1 < |x - z_0| \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$. Por lo tanto, para todo natural k se cumple $1/|x - z_0| < \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|}$, luego hay un $n \geq k$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|}|x - z_0| > 1$, o sea, $|a_n(y - z_0)^n| > 1$. Esto significa que $a_n(y - z_0)^n$ no tiende a 0, luego la serie diverge. ∎

El número R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias, y el disco $D(z_0, R)$ se llama *disco de convergencia* de la serie. Tenemos, pues, que una serie de potencias converge absolutamente en un círculo y diverge fuera de ese círculo. En cada punto de la frontera del círculo la serie puede converger absolutamente, condicionalmente o diverger, según los casos.

A la hora de determinar el radio de convergencia de una serie suele ser útil el siguiente caso particular del criterio de D'Alembert:

Teorema 3.17 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias tal que exista*

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

Entonces su radio de convergencia es $1/L$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, el radio de convergencia de la serie dada es el mismo que el de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|z^n$. Si $x > 0$, tenemos que

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|x^{n+1}}{|a_n|x^n} = Lx,$$

luego el criterio de D'Alembert implica que la serie converge cuando $Lx < 1$ y diverge si $LX > 1$. Consecuentemente el radio de convergencia ha de ser $1/L$. ∎

El ejemplo más sencillo de serie de potencias es la *serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyo radio de convergencia es $R = 1$ y su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Vemos así un ejemplo de serie de polinomios (acotados en $D(0,1)$) que convergen casi uniformemente a una función no acotada, luego la convergencia no es uniforme.

En su disco de convergencia, una serie de potencias es el límite casi uniforme de una sucesión de polinomios. Como los polinomios son funciones holomorfas, el teorema de Weierstrass nos da que las series de potencias también lo son. Recogemos este hecho junto con algunas precisiones adicionales en el teorema siguiente:

Teorema 3.18 *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias y* $R > 0$ *su radio de convergencia. Entonces* $f \in \mathcal{H}(D(z_0,R))$ *y para todo* $z \in D(z_9,R)$ *se cumple que*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Además el radio de convergencia de la serie derivada es exactamente R.

DEMOSTRACIÓN: Todo el teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass salvo que el radio R' de la serie derivada cumpla $R' \le R$. Para probarlo observamos que R y R' son también los radios de convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}$$

respectivamente, luego si $0 < x < R'$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^{n-1} < +\infty$, con lo que también

$$x\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|nx^n < +\infty.$$

Para n suficientemente grande, $|a_n|x^n \leq n|a_n|x^{n-1}$, luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|x^n$ es convergente, lo que significa que $x \leq R$. Esto prueba que $R' \leq R$. ∎

Si aplicamos repetidas veces el teorema anterior a una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

obtenemos la fórmula siguiente para su derivada m-sima:

$$f^{m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z - z_0)^{n-m}.$$

Si evaluamos en el punto z_0 queda $f^{m)}(z_0) = m!a_m$, luego hemos obtenido que los coeficientes de una serie de potencias pueden recuperarse a partir de la función f que ésta define mediante la fórmula

$$a_n = \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dicho de otro modo, si una función f en un disco $D(z_0, R)$ puede desarrollarse como serie de potencias centrada en z_0, el único desarrollo posible es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n,$$

es decir, la *serie de Taylor* de f en z_0. Ahora probamos que este desarrollo siempre es posible.

Teorema 3.19 *Sea $f : D(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in D(z_0, R)$.

Demostración: Sea $z \in D(z_0, R)$ y sea ρ tal que $|z - z_0| < \rho < R$. Tenemos $z \in D(z_0, \rho) \subset \overline{D(z_0, \rho)} \subset D(z_0, R)$. Podemos aplicar la fórmula de Cauchy, que nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta.$$

El teorema 2.19 nos permite intercambiar la suma y la integral si probamos que la serie converge uniformemente en la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$. Como es compacta, existe un $M > 0$ tal que sobre sus puntos

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| < M$$

Entonces

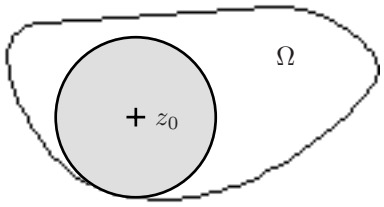
$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\right| \leq M\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n.$$

Por lo tanto hemos mayorado la serie funcional por una serie geométrica de razón menor que 1, luego el criterio de mayoración de Weierstrass nos asegura la convergencia uniforme y podemos continuar:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \end{aligned}$$

por las fórmulas de Cauchy para las derivadas. ∎

Por lo tanto, la única restricción para la convergencia de la serie de Taylor de una función holomorfa es que el dominio de convergencia ha de ser un disco. Si una función f es holomorfa en un abierto cualquiera Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces la serie de Taylor de f en z_0 convergerá en el mayor disco abierto de centro z_0 contenido en Ω.



Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman funciones *enteras,* aludiendo, al igual que con el término "holomorfa", al gran parecido entre estas funciones y los polinomios, mucho mayor en este caso.

La serie de Taylor centrada en 0 de una función entera converge en los discos de todos los radios, luego converge en todo $\mathbb{C}$. Esto significa que toda función entera admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!}\, z^n, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

lo cual se interpreta como que una función entera es un "polinomio de grado infinito".

Éste es el caso de las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$. Puesto que todas las derivadas de la función exponencial valen 1 en $z_0 = 0$, es evidente que su serie de Taylor es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Las derivadas de $\operatorname{sen} z$ en $z_0 = 0$ son

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad -\operatorname{sen} 0 = 0, \quad -\cos 0 = -1, \quad \operatorname{sen} 0 = 0, \ldots$$

y a partir de aquí se repiten cíclicamente. Por lo tanto la serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$ en el origen tiene sólo potencias impares y con derivada $1, -1, 1, -1, \ldots$ Así pues,

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}.$$

Un razonamiento similar nos lleva a

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

La función $\log z$ no está definida en 0, luego no podemos desarrollarla en una serie de este tipo. Podríamos desarrollarla en $z_0 = 1$, aunque es mejor trabajar en 0 con la función $\log(1+z)$. Su primera derivada vale $(1+z)^{-1}$, y de aquí se sacan fácilmente las siguientes:

$$-(1+z)^{-2},\ 2(1+z)^{-3},\ -3\cdot 2(1+z)^{-4},\ 4\cdot 3\cdot 2(1+z)^{-5},\ \ldots$$

con lo que las derivadas sucesivas en 0 valen $0!$, $-1!$, $2!$, $-3!$, $4!$, $-5!$, ...

La serie de Taylor será, por lo tanto:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, z^n,$$

convergente para $|z| < 1$, pues la función es holomorfa en dicho disco y no puede extenderse a un disco mayor (tiende a infinito en -1).

Consideremos finalmente la función $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. Observemos que cuando el exponente α es un número entero z^α coincide con la definición algebraica en cualquier cuerpo. Un sencillo cálculo nos da

$$(z^\alpha)' = \alpha e^{\alpha \log z} z^{-1} = \alpha e^{\alpha \log z} e^{-\log z} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

La derivada n-sima es claramente $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)z^{\alpha-n}$. Teniendo en cuenta que $1^\alpha = 1$, la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 1$ resulta ser

$$z^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!}\,(z-1)^n.$$

Si definimos el número combinatorio generalizado

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots$$

y cambiamos z por $1+z$, obtenemos la *fórmula binomial*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

que generaliza a la fórmula del binomio de Newton para exponentes arbitrarios y es válida para $|z| < 1$ (ya que $\log(1+z)$ es infinito en -1).

3.4 Consecuencias de los desarrollos de Taylor

El hecho de que las funciones holomorfas admitan desarrollos en serie de potencias alrededor de cada punto tiene muchas consecuencias, algunas de las cuales las mostraremos en esta sección. Comenzamos probando un sencillo pero útil resultado técnico:

Teorema 3.20 (desigualdades de Cauchy) *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie convergente en $D(z_0, R)$ y sea $M(r) = \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial D(z_0, r)\}$ para $0 < r < R$. Entonces $|a_n| \le M(r)/r^n$.*

Demostración: El teorema 3.19 y la unicidad del desarrollo en serie nos dan que $a_n = f^{n)}(z_0)/n!$, y por las fórmulas de Cauchy resulta que

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \, \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}.$$

■

Como aplicación inmediata tenemos el hecho siguiente, muy importante en la teoría:

Teorema 3.21 (Teorema de Liouville) *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración: Sea f una función entera y supongamos que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $r > 0$ y sea $M(r)$ según el teorema anterior. Obviamente $M(r) \le M$ para todo $r > 0$. Desarrollamos f en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

y el teorema anterior nos da que $|a_n| \leq M(r)/r^n \leq M/r^n$, pero si $n \geq 1$ entonces $\lim_n M/r^n = 0$, luego $a_n = 0$ para $n \geq 1$, luego $f(z) = a_0$ es constante. ∎

En particular el teorema de Liouville implica que $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\infty)$ está formado tan sólo por las funciones constantes, pues las funciones de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\infty)$ son continuas, luego están acotadas (y son enteras). He aquí otra consecuencia notable:

Teorema 3.22 (Teorema fundamental del álgebra) *Todo polinomio no constante en $\mathbb{C}[z]$ tiene al menos una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P(z)$ un polinomio no nulo. Si $P(z)$ no tuviera raíces complejas la función $f(z) = 1/P(z)$ sería entera y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, luego f estaría acotada y, por el teorema anterior, sería constante, luego $P(z)$ también. ∎

El teorema siguiente es una pieza central de toda la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 3.23 (Principio de prolongación analítica) *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*[1]

a) f es constante en Ω.

b) Existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\{z \in \Omega \mid f(z) = \lambda\}$ tiene un punto de acumulación en Ω.

c) Existe un $z \in \Omega$ tal que $f^{n)}(z) = 0$ para todo $n \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN: a) → b) es evidente.

b) → c). Sea $z_0 \in \Omega$ un punto de acumulación de $\{z \in \Omega \mid f(z) = \lambda\}$. Por la continuidad de f es claro que $f(z_0) = \lambda$. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Consideremos el desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad \text{para } z \in D(z_0, r).$$

Supongamos que alguna derivada $f^{p)}(z_0)$ es no nula, con $p \geq 1$. Tomemos el mínimo valor posible de p. Claramente entonces

$$f(z) = \lambda + \sum_{n\geq p} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \lambda + (z - z_0)^p \sum_{n\geq p} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-p}.$$

La función

$$h(z) = \sum_{n\geq p} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-p}$$

[1] Esto es válido también si $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ siempre y cuando en la condición c) se exija $z \neq \infty$, pues ∞ cumple siempre c).

es holomorfa en el disco $D(z_0, r)$ y cumple $h(z_0) = f^{p)}(z_0)/p! \neq 0$. Como es continua, podemos concluir que h no se anula en un entorno U de z_0. Como $f(z) = \lambda + (z - z_0)^p h(z)$, resulta que $f(z) \neq \lambda$ en $U \setminus \{z_0\}$, lo cual contradice la elección de z_0. Así, todas las derivadas de f son nulas en z_0.

c) $\to$ a). Sea

$$H = \{z \in \Omega \mid f^{n)}(z) = 0 \text{ para todo } n \geq 1\} = \bigcap_{n\geq 1} {f^{n)}}^{-1}[\{0\}] \cap \Omega,$$

cerrado en Ω. Vamos a probar que también es un abierto en Ω y así, por conexión, coincidirá con todo Ω.

Si $z_0 \in H$, existe un $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$ y en este disco la función f tiene un desarrollo en serie de Taylor que, por la definición de H, se reduce a $f(z) = f(z_0)$, o sea, f es constante en $D(z_0, r)$, luego todas sus derivadas son nulas en el disco, luego $D(z_0, r) \subset H$. En particular hemos obtenido que $f' = 0$ en Ω, luego f es constante en Ω. ∎

Quizá la importancia de este teorema se comprenda mejor si lo reenunciamos del modo siguiente:

Teorema 3.24 (Principio de prolongación analítica) *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y f, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f y g coinciden sobre un subconjunto de Ω con un punto de acumulación en Ω, entonces f y g coinciden sobre todo W.*

(Pues el conjunto de puntos $z \in \Omega$ donde $(f - g)(z) = 0$ tiene un punto de acumulación en Ω, luego $f-g$ es constante y, como se anula, ha de ser $f-g = 0$.)

Esto es una generalización del hecho conocido en virtud del cual si un polinomio tiene infinitas raíces es nulo, o si dos polinomios coinciden en infinitos puntos entonces son iguales. Para el caso de funciones holomorfas no basta un número infinito de puntos (un contraejemplo son las funciones seno y coseno, que tienen infinitas raíces), sino que es necesario un conjunto con un punto de acumulación.

Ejemplo Según hemos definido la función exponencial, la igualdad

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

se cumple cuando $z \in \mathbb{R}$, luego el principio de prolongación analítica implica que la igualdad vale para todo $z \in \mathbb{C}$. (Por supuesto es fácil probar directamente la igualdad a partir de las definiciones de las funciones seno y coseno complejas, pero así es más simple. En muchas ocasiones similares a ésta el principio de prolongación analítica es esencial.) ∎

Otra consecuencia inmediata es que las funciones exponencial, seno y coseno complejas son las únicas extensiones holomorfas posibles de las correspondientes funciones reales. Veamos una consecuencia más sofisticada:

Teorema 3.25 (Principio del módulo máximo) *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω no constante.*

a) Si $D(z_0, r) \subset \Omega$ entonces existe un $z \in D(z_0, r)$ tal que $|f(z)| > |f(z_0)|$.

b) Para todo $z \in \Omega$ se cumple que $|f(z)| < \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$.

c) Si Ω está acotado y f es continua en $\overline{\Omega}$, entonces para todo $z \in \Omega$ se cumple que $|f(z)| < \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$.

DEMOSTRACIÓN: a) Supongamos que por el contrario $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Sea $r' < r$. Entonces la fórmula de Cauchy nos da que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z_0|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r'e^{it})}{r'e^{it}}\, r'ie^{it}\, dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r'e^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|,$$

luego todas las desigualdades son en realidad igualdades y en particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r'e^{it})|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, dt,$$

o sea,

$$\int_0^{2\pi} \big(|f(z_0)| - |f(z_0 + r'e^{it})|\big)\, dt = 0.$$

Como el integrando es mayor o igual que 0 en todos los puntos y se trata de una función continua, podemos concluir que $|f(z_0)| - |f(z_0 + r'e^{it})| = 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y todo $r' < r$. Esto significa que $|f|$ es constante en $D(z_0, r)$. Vamos a probar que de hecho f es constante en el disco.

Si $|f| = 0$ es obvio. En otro caso sea $|f| = c$. Como las funciones constantes son holomorfas, resulta que la composición de f con la conjugación es también holomorfa, pues se tiene $\bar{f} = |f|^2/f$. De aquí se sigue que también son holomorfas en el disco las funciones

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Pero las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que las únicas funciones holomorfas con valores en $\mathbb{R}$ son las constantes, luego $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son constantes en el disco y, consecuentemente, también lo es f. Por el principio de prolongación analítica f es constante en Ω, en contra de lo supuesto.

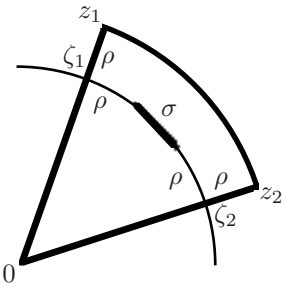
b) es inmediato: Si $z_0 \in \Omega$ existe un $z \in \Omega$ tal que

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \geq |f(z)| > |f(z_0)|.$$

c) Como $\overline{\Omega}$ es compacto, existe $z_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$. Por el apartado anterior $z_0 \notin \Omega$, luego $z_0 \in \partial\Omega$, con lo que $|f(z_0)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. Además es claro que $\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq |f(z_0)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. ∎

El apartado a) del principio del módulo máximo afirma que una función holomorfa nunca tiene extremos relativos (en contraste con la situación en $\mathbb{R}$). El apartado b) dice que tampoco hay extremos absolutos en un abierto. El apartado c) significa que el máximo que toda función continua ha de alcanzar en los compactos, para el caso de una función holomorfa, se alcanza siempre en la frontera. Se trata de un comportamiento muy peculiar de estas funciones del que se siguen muchas consecuencias. Vamos a demostrar como ejemplo un teorema sobre el comportamiento de una serie de potencias sobre la frontera de su disco de convergencia.

Teorema 3.26 (Teorema de Fatou) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ que contenga al 0 y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ su serie de Taylor en 0 y supongamos que su radio de convergencia es 1 y que $\lim_n a_n = 0$. Entonces la serie converge a f en todos los puntos de la circunferencia unidad contenidos en Ω. Además la convergencia es uniforme en los compactos.*



Demostración: Sea σ un arco cerrado de la circunferencia unidad $\sigma \subset \Omega$. Prolonguemos los extremos de σ hasta dos puntos z_1, z_2 que disten una misma cantidad ρ de dichos extremos. Prolonguemos los radios $0\zeta_1$, $0\zeta_2$ en la misma distancia ρ hasta dos puntos z_1, z_2. Sea S el sector cerrado considerado en la figura. Es claro que tomando ρ suficientemente pequeño podemos garantizar que el sector S esté contenido en Ω. El arco σ está contenido en el interior de S. Hemos de probar que la serie converge uniformemente a f en σ. Sea

$$\omega_n(z) = \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_n z^n}{z^{n+1}} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \tag{3.3}$$

En el disco unidad ω_n admite el desarrollo

$$\omega_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} z^k (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \tag{3.4}$$

La expresión (3.3) muestra que ω_n es holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$. Despejando la serie de potencias en (3.4) vemos que ésta converge en la circunferencia unidad salvo quizá en 0, pero obviamente también converge en 0, luego el segundo miembro de (3.4) es una función holomorfa en el disco unidad, y si definimos $\omega_n(0) = a_{n+k+1}\zeta_1\zeta_2$, entonces ω_n es una función holomorfa en Ω.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n| < \epsilon$. Consideremos un punto cualquiera z del segmento (abierto) $0\zeta_1$. Entonces para $n > N$ se cumple

$$|\omega_n(z)| \leq \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \, |z - \zeta_1| \, |z - \zeta_2| \leq \epsilon \frac{1}{1 - |z|} (1 - |z|) \, 2 = 2\epsilon.$$

La misma cota es válida sobre el segmento $0\zeta_2$.

Supongamos ahora que z está en el segmento (abierto) $\zeta_1 z_1$. Sea $R = 1 + \rho$. Entonces $|z - \zeta_1| = |z| - 1$, $|z - \zeta_2| \leq |z| + |\zeta_2| < 2R$. Sea M el máximo de $|f(z)|$ en el sector S. De nuevo para $n > N$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|z|^k}{|z|^{n+1}}\,(|z| - 1)\,2R \\
&= 2R\,\frac{M + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,|z|^k}{|z|^{n+1}}\,(|z| - 1) + 2R\,\frac{\sum_{k=N+1}^{n} |a_k|\,|z|^k}{|z|^{n+1}}\,(|z| - 1) \\
&< 2R\left(M + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,R^k\right)\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon \sum_{k=N+1}^{n} |z|^k\,\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} \\
&= 2R\left(M + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,R^k\right)\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon\,\frac{|z|^{n+1} - |z|^{N+1}}{|z| - 1}\,\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} \\
&< 2R\left(M + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,R^k\right)\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon.
\end{aligned}$$

Además

$$\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} < \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1} - 1} = \frac{1}{|z|^n + \cdots + |z| + 1} < \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente

$$|\omega_n(z)| < 2R\left(M + \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,R^k\right)\frac{1}{n+1} + 2R\epsilon.$$

Tomamos $N_1 > N$ de modo que si $n > N_1$ el primer sumando se haga menor que ϵ, con lo que para $n > N_1$ tenemos que $|\omega_n(z)| < (2R + 1)\epsilon$. Obviamente esto vale también cuando z está en el segmento $\zeta_2 z_2$.

A continuación suponemos que z se encuentra en el arco cerrado de extremos z_1 y z_2. Entonces $|z - \zeta_1| \leq |z| + |\zeta_1| < 2R$ y $|z - \zeta_2| < 2R$. Ahora

$$\begin{aligned}
|\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^{n} |a_k| R^k}{R^{n+1}}\,4R^2 = 4\,\frac{M + \sum_{k=0}^{N} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\,\frac{\sum_{k=N+1}^{n} |a_k| R^k}{R^{n-1}} \\
&\leq 4\,\frac{M + \sum_{k=0}^{N} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\epsilon\,\frac{\sum_{k=N+1}^{n} R^k}{R^{n-1}} \\
&= 4\,\frac{M + \sum_{k=0}^{N} |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\epsilon\,\frac{R^{n+1} - R^{N+1}}{(R-1)R^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$< \quad 4\,\frac{M+\sum_{k=0}^{N}|a_k|R^k}{R^{n-1}} + \frac{4R^2\epsilon}{R-1}.$$

Como antes, podemos tomar $N_2 \geq N1_{\geq}N$ de modo que si $n \geq N_2$ el primer sumando del último término se haga menor que ϵ, con lo que para tales valores de n se cumple

$$|\omega_n(z)| \leq \left(1 + \frac{4R^2}{R-1}\right)\epsilon.$$

Por último notamos que $\omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2$, luego $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \epsilon$ para $n \geq N$. Además $\omega_n(\zeta_1) = \omega_n(\zeta_2) = 0$. Con todo esto concluimos que existe una constante K tal que para todo z en la frontera del sector S se cumple $|\omega_n(z)| < K\epsilon$ para todo $n \geq N_2$.

Por el principio del módulo máximo estas desigualdades valen también para los puntos z del interior de S, y en particular para los puntos del arco σ. Así pues, si z está en σ y $n \geq N_2$ tenemos

$$K\epsilon > |\omega_n(z)| = \left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| |z-\zeta_1|\,|z-\zeta_2| \geq \left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \rho^2,$$

luego

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right| < \frac{K}{\rho^2}\,\epsilon,$$

lo que implica que la serie converge a f uniformemente en σ. ∎

Como ejemplo observamos que el desarrollo

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, z^n,$$

que hemos visto en la sección anterior, es válido en realidad siempre que $|z| \leq 1$ excepto en $z = -1$. Para el caso $z = 1$ obtenemos la suma de la serie harmónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2.$$

También tiene interés el caso $z = i$:

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, i^n.$$

La parte imaginaria de la serie corresponde a la suma de las potencias impares de i. Haciendo $n = 2k+1$ queda

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

que es la conocida fórmula de Leibniz. ∎

Por último vamos a caracterizar los subespacios compactos de los espacios de funciones holomorfas $\mathcal{H}(\Omega)$. Probaremos que, al igual que en $\mathbb{R}^n$, los compactos de $\mathcal{H}(\Omega)$ son los subespacios cerrados y acotados, pero entendiendo la acotación en un sentido diferente al usual en los espacios métricos.

Definición 3.27 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$ y F un subconjunto de $\mathcal{H}(\Omega)$. Diremos que F está *(casi uniformemente) acotado* si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe un número $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $f \in F$ y todo $z \in K$.

Si exigiéramos que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ y todo $f \in F$ la acotación sería *uniforme,* pero al decir "acotado" sobreentenderemos que nos referimos a acotación casi uniforme, del mismo modo que al hablar de convergencia en $\mathcal{H}(\Omega)$ nos referimos siempre a la convergencia casi uniforme. En estos términos F está casi uniformemente acotado si está uniformemente acotado en cada subconjunto compacto de Ω.

Es inmediato comprobar que esta noción de acotación cumple las propiedades usuales, como que todo subconjunto de un conjunto acotado está acotado, la unión finita de conjuntos acotados está acotada o incluso que la clausura de un conjunto acotado está acotada. No obstante hay que tener presente que un conjunto acotado no tiene una cota, sino una cota en cada compacto. En particular las aplicaciones que forman un conjunto acotado no tienen por qué ser acotadas.[2]

Otra propiedad sencilla pero útil es que un conjunto $F \subset \mathcal{H}(\Omega)$ está acotado (casi uniformemente) si y sólo si está uniformemente acotado localmente, es decir, si las funciones de F están uniformemente acotadas en un entorno de cada punto de Ω (pues si F está casi uniformemente acotado, F está uniformemente acotado en los entornos compactos de cada punto, y si F está uniformemente acotado localmente, cada compacto $K \subset \Omega$ puede cubrirse por un número finito de abiertos en los que F está uniformemente acotado, luego F está uniformemente acotado en K).

Recordemos que un subconjunto F de un espacio topológico X es *relativamente compacto* si su clausura es compacta. En un espacio métrico esto equivale a que toda sucesión de F tiene una subsucesión convergente en X.[3]

Teorema 3.28 (Teorema de Montel) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Un subconjunto de $\mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacto si y sólo si está acotado. Por consiguiente es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*[4]

Demostración: Sea $F \subset \mathcal{H}(\Omega)$. La segunda afirmación se sigue de la primera, pues F es compacto si y sólo si es cerrado y relativamente compacto.

Si F es relativamente compacto y $K \subset \Omega$ es compacto, los abiertos básicos $V(0, K, n)$, para $n = 1, 2, \ldots$ cubren $\mathcal{H}(\Omega)$, luego la clausura de F está contenida

[2]No vamos a justificarlo aquí pero, tal y como hemos dicho, la acotación casi uniforme no coincide con la acotación respecto a la distancia que hemos definido sobre $\mathcal{H}(\Omega)$.

[3]Si $\{x_n\}$ es una sucesión en la clausura de F, tomamos una sucesión $\{y_n\}$ en F tal que $d(x_n, y_n) < 1/n$. Si $\{y_{n_k}\}$ converge a x, entonces $\{x_{n_k}\}$ también lo hace.

[4]Claramente el teorema vale también si $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$.

en un subcubrimiento finito. El máximo n que aparezca en el subcubrimiento es una cota de las funciones de F en K. Por lo tanto F está acotado.

Supongamos ahora que F está acotado. En primer lugar probaremos que si $\overline{D(a,r)}$ está contenido en Ω entonces toda sucesión $\{f_n\} \subset F$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que las restricciones $\{f_{n_k}|_{D(a,r)}\}$ convergen a una función holomorfa en $D(a,r)$.

Sea M una cota de las funciones de F en el compacto $\overline{D(a,r)}$ y sea

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n (z-a)^m.$$

Las desigualdades de Cauchy nos dan que $|a_m^n| \leq M/r^m$, es decir, cada sucesión de números complejos $\{a_m^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, luego tiene una subsucesión convergente. Vamos a tomar subsucesiones con un poco de cuidado:

En primer lugar tomamos una subsucesión $\{f_{n_k^0}\}$ de $\{f_n\}de$ modo que la sucesión de los coeficientes de orden 0 de las series de Taylor converja. De esta subsucesión tomamos a su vez otra subsucesión $\{f_{n_k^1}\}$ de modo que los coeficientes de orden 1 de las series de Taylor converjan. Así vamos formando una sucesión de subsucesiones $\{f_{n_k^r}\}$. Por último consideramos la sucesión diagonal $\{f_{n_k^k}\}$. Ésta es finalmente igual a todas las anteriores, luego todas las sucesiones de coeficientes de las series de Taylor convergen.

Si llamamos a_m al límite de la sucesión de los coeficientes m-simos, las desigualdades que tenemos para los a_m^n nos dan ahora que $|a_m| \leq M/r^m$, de donde

$$\overline{\lim_m} \sqrt[m]{|a_m|} \leq 1/r,$$

luego la serie $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m$ converge en el disco $D(a,r)$. Veamos que la sucesión $\{f|_{D(a,r)}\}$ converge a f. Basta probar que la sucesión converge uniformemente en cada disco $D(a,\rho)$ para $0 < \rho < r$. En efecto, para todo z en este disco:

$$|f_{n_k^k}(z) - f(z)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{n_k^k} - a_m)(z-a)^m \right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{m_0} |a_m^{n_k^k} - a_m|\rho^m + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} |a_m^{n_k^k}|\rho^m + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} |a_m|\rho^m$$

$$\leq \sum_{m=0}^{m_0} |a_m^{n_k^k} - a_m|\rho^m + 2 \sum_{m=m_0+1}^{\infty} M(\rho/r)^m,$$

donde m_0 es arbitrario. Si fijamos $\epsilon > 0$ vemos que la última serie es menor que $\epsilon/2$ cuando m_0 es suficientemente grande y, fijado así m_0, la primera se hace menor que $\epsilon/2$ tomando k suficientemente grande.

Ahora probamos que si K es un compacto contenido en Ω, entonces toda sucesión en F contiene una subsucesión que converge en un abierto que contiene a K. En efecto, podemos cubrir a K con un número finito de discos $D(a,r)$

cuya clausura está contenida en Ω. Aplicando la parte probada, la sucesión de partida tiene una subsucesión que converge en uno de estos discos, la cual tiene una subsucesión que converge en otro más, y al cabo de un número finito de pasos llegamos a una que converge en todos los discos.

Por último sea $\{K_n\}$ la sucesión de compactos dada por (3.2) cuya unión es todo Ω. Si $\{f_n\}$ es una sucesión en F, tenemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k^1}\}$ que converge en K_1, la cual tiene una subsucesión que converge en K_2, y en general existe una subsucesión $\{f_{n_k^r}\}$ que converge en $K_1, \ldots, K_r$. Tomamos la sucesión diagonal $\{f_{n_k^k}\}$, que es finalmente igual a todas las anteriores, luego converge en todos los compactos K_n, luego en todo Ω. ∎

Capítulo IV

Productos infinitos

Los desarrollos en series de potencias nos permiten concebir a las funciones holomorfas como "polinomios de grado infinito". El principio de prolongación analítica es un buen ejemplo de que, en efecto, las funciones holomorfas tienden a comportarse como polinomios. Pero los polinomios en $\mathbb{C}$ admiten otra representación tan útil como las series de potencias: pueden ser descompuestos en productos de polinomios de grado 1. Esto es una consecuencia del teorema fundamental del álgebra, pero es inmediato que este teorema no es válido para funciones holomorfas cualesquiera: la función exponencial es una función entera que no tiene raíces. Pese a ello son muchas las funciones enteras para las que podemos encontrar factorizaciones que muestren explícitamente el conjunto de sus raíces. Por ejemplo, el desarrollo en serie de la función seno

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}$$

no deja ver que la función tiene más raíces aparte del 0. Sin embargo demostraremos que la función seno también puede expresarse como

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

con lo que es evidente que $\operatorname{sen} z = 0$ si y sólo si $z = 0$ o bien $1 - z^2/n^2\pi^2 = 0$ para algún número natural n, o sea, si y sólo si $z = \pm n\pi$.

En este capítulo expondremos la teoría básica entorno a los productos infinitos junto con algunas aplicaciones. Los productos infinitos no son en principio un concepto nuevo. Simplemente a nivel de notación podemos convenir en representar mediante $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ a una sucesión de números complejos de la forma $\left\{\prod_{n=0}^{k} z_n\right\}_{k=0}^{\infty}$, donde $\{z_n\}$ es una sucesión dada de números complejos. Al igual que hacemos con las series, cuando un producto de este tipo es convergente

conviene representar también su límite por $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$. Esto no da lugar a ninguna confusión.

Sin embargo en estos términos los productos infinitos tienen un comportamiento muy poco satisfactorio. En efecto, una propiedad esencial de las sucesiones es que su carácter convergente o divergente depende exclusivamente de su comportamiento final, es decir, que no se altera si eliminamos los primeros términos. Más aún, en caso de convergencia el límite no varía. Para el caso de las series el carácter final de la convergencia es válido incluso respecto a la sucesión de coeficientes (no ya de sumas parciales), aunque al eliminar los primeros términos de una serie convergente el límite se modifica de la forma natural:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + \cdots + z_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} z_n.$$

Para los productos infinitos la situación es muy distinta. Consideremos por ejemplo el producto $\prod_{n=0}^{\infty} n = 0$. Se trata de un producto convergente, porque como sucesión es constante, pero basta eliminar el primer factor para que se convierta en la sucesión $n!$, que es divergente.

Obviamente este problema lo comparten todos los productos con algún factor nulo. Si nos fijamos ahora en los productos sin factores nulos, veremos que también presentan un problema relacionado con el 0, esta vez más sutil. Pensemos en $\prod_{n=1}^{\infty} 1/n = 0$. Tenemos un producto igual a 0 donde ningún factor es nulo. Esto es un inconveniente porque, por ejemplo, cuando hemos afirmado que el desarrollo en producto infinito de la función seno muestra que sus raíces son exactamente las que sabemos que son, hemos dado por supuesto que los únicos ceros de un producto de funciones son los ceros de sus factores, y ahora vemos que no es así.

Éstas son las razones que nos llevan a dar una definición de convergencia de productos más fuerte que la convergencia en sentido topológico. Nos ocupamos de ella y sus consecuencias en la primera sección.

4.1 Productos numéricos

Definición 4.1 Si $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es un producto infinito con factores no nulos, diremos que es *convergente* si converge en sentido topológico a un número distinto de 0.

Con esta definición es evidente que un producto (con factores no nulos) $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente si y sólo si lo es cualquiera de sus secciones finales $\prod_{n=k}^{\infty} z_n$ y que, en tal caso,

$$\prod_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 \cdots z_{k-1} \prod_{n=k}^{\infty} z_n. \tag{4.1}$$

Si $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es un producto donde a lo sumo un número finito de factores son nulos, diremos que *converge* si converge cualquiera de los productos $\prod_{n=k}^{\infty} z_n$, donde k es un índice tal que $z_n \neq 0$ para $n \geq k$. En tal caso definimos el límite mediante la fórmula (4.1).

De este modo se sigue cumpliendo que un producto converge si y sólo si converge cualquiera de sus secciones finales y en tal caso es válida la fórmula (4.1). Además un producto es nulo si y sólo si lo es uno de sus factores.

La convergencia en este sentido fuerte implica la convergencia en el sentido topológico, pero el recíproco es falso. En lo sucesivo consideraremos que los productos

$$\prod_{n=0}^{\infty} n \quad \text{y} \quad \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

son divergentes, pese a que topológicamente convergen.

Por último, consideraremos que los productos con infinitos factores nulos son siempre divergentes. En realidad sería más natural considerar que convergen a 0, pero lo cierto es que nunca vamos a manejar tales productos y así nos evitamos tener que exceptuarlos en cada teorema.

Otras propiedades elementales de los productos muy sencillas de comprobar son las siguientes:

$$\left(\prod_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\prod_{n=0}^{\infty} w_n\right) = \prod_{n=0}^{\infty} z_n w_n,$$

$$\left(\prod_{n=0}^{\infty} z_n\right)^{-1} = \prod_{n=0}^{\infty} z_n^{-1}.$$

Aunque queda claro la conveniencia conceptual de esta definición, puede parecer que en la práctica resultará artificial y obligará a formular teoremas con hipótesis poco satisfactorias. Sin embargo ocurre justamente lo contrario: esta definición se ajusta perfectamente a los resultados que de hecho se obtienen. Un ejemplo sencillo nos lo da el teorema siguiente, que sería claramente falso para la convergencia en sentido topológico.

Teorema 4.2 *Si un producto* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ *es convergente, entonces* $\lim_n z_n = 1$.

Demostración: Tomando una sección final, podemos suponer que los factores son no nulos. Entonces

$$\lim_n z_n = \lim_n \frac{\prod_{k=0}^{n} z_k}{\prod_{k=0}^{n-1} z_k} = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} z_n}{\prod_{n=0}^{\infty} z_n} = 1,$$

ya que por definición el límite del producto es no nulo. ∎

Teniendo en cuenta este teorema, a menudo resulta útil expresar los productos infinitos en la forma $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z_n)$, con lo que la condición necesaria para la convergencia pasa a ser $\lim_n z_n = 0$.

Las propiedades básicas de los productos infinitos pueden reducirse a las de las series gracias al teorema siguiente. En su enunciado $\log z$ representa al logaritmo de z cuya parte imaginaria es el argumento de z en $]-\pi,\pi]$. La función log es holomorfa en el plano complejo excepto en el eje real negativo, incluido el 0, aunque así el único punto donde no está definida es el 0.

Teorema 4.3 *Un producto infinito con factores no nulos $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente si y sólo si lo es la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\log z_n$. En tal caso la serie es un logaritmo del producto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S_k = \sum_{n=0}^{k}\log z_n$. Entonces $e^{S_k} = \prod_{n=0}^{k} z_n$. De aquí se sigue que si la serie converge, entonces el producto converge (a un número no nulo) y la serie es un logaritmo del producto.

Supongamos ahora que el producto converge. Esto significa que existe

$$\lim_k \prod_{n=0}^{k} z_n = z \neq 0, \quad \text{luego} \quad \lim_k \prod_{n=0}^{k} |z_n| = |z| \neq 0.$$

Aplicando la función log real tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\log|z_n| = \log|z|$.

Sea $\arg : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una determinación del argumento que sea continua en un entorno de z. Basta tomar una de las funciones $\arg_\alpha$ definidas en el capítulo I para un α adecuado y extenderla de cualquier forma a la semirrecta que falta en L_α, esto únicamente por comodidad en el argumento que sigue.

Sea $\phi_k = \arg\prod_{n=0}^{k} z_n$. Entonces la sucesión $\{\phi_k\}$ converge a $\arg z$. Por otra parte, un argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores, es decir, $\sum_{n=0}^{k}\arg' z_n$ es también un argumento de $\prod_{n=0}^{k} z_n$, donde $\arg'$ representa al argumento en el intervalo $]-\pi,\pi]$. Como dos argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π, existe una sucesión de números enteros $\{m_k\}$ tales que

$$\phi_k = \sum_{n=0}^{k}\arg' z_n + 2m_k\pi.$$

Ahora bien, como el producto converge, la sucesión $\{z_n\}$ tiende a 1 y, a partir de un término dado, $\arg' z_n \neq \pi$, o sea, $|\arg' z_n| < \pi$. Por otro lado la sucesión

$$\phi_{k+1} - \phi_|k| = |\arg' z_{k+1} + 2\pi(m_{k+1} - m_k)|$$

tiende a 0, luego a partir de un término es menor que π. Las desigualdades

$$|\arg' z_{k+1} + 2\pi(m_{k+1} - m_k)| < \pi \quad \text{y} \quad |\arg' z_{k+1}| < \pi$$

implican que $|m_{k+1} - m_k| < 1$ y, como son números enteros, $m_{k+1} = m_k$ para todo k suficientemente grande.

Puesto que la sucesión $\{m_k\}$ es finalmente constante, es convergente, luego también lo es la sucesión

$$\sum_{n=0}^{k} \arg' z_n = \phi_k - 2m_k\pi.$$

En resumen tenemos que las series $\sum_{n=0}^{\infty} \log|z_n|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \arg' z_n$ son ambas convergentes, pero estas series son la parte real y la parte imaginaria de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$, que es, pues, convergente. ∎

Por ejemplo, el teorema anterior nos dice que podemos reordenar los factores de un producto $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ sin alterar su límite si y sólo si podemos reordenar los sumandos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$. Pero esto ocurre exactamente cuando la serie es absolutamente convergente. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.4 Un producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$ es absolutamente convergente.

Observar que $\log z_n$ sólo está definido para los factores no nulos. Si un producto tiene factores nulos diremos que es *absolutamente convergente* si lo es cualquiera de los productos que resultan de eliminar los primeros factores de modo que no quede ninguno nulo.

El teorema anterior garantiza que los productos absolutamente convergentes son convergentes y que la convergencia absoluta no se altera al reordenar los factores.

Notemos que no hubiera sido acertado definir la convergencia absoluta de un producto $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ como la convergencia del producto $\prod_{n=0}^{\infty} |z_n|$, pues entonces el producto $\prod_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ sería absolutamente convergente pero no convergente.

Hay una caracterización sencilla de la convergencia absoluta que no involucra logaritmos:

Teorema 4.5 *Un producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z_n)$ es absolutamente convergente si y sólo si lo es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Tanto la convergencia de la serie como la del producto dependen tan sólo del comportamiento final de la sucesión $\{z_n\}$ y en particular ambas implican que ésta tiende a 0. Por ello podemos suponer que $|z_n| < 1/2$ para todo n. Entonces

$$\log(1+z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z_n^k = z_n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z_n^k\right).$$

Ahora bien,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z_n^k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}|z_n| \leq |\log(1+z_n)| \leq \frac{3}{2}|z_n|,$$

lo que implica que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente si y sólo si lo es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+z_n)$, es decir, si y sólo si lo es el producto $\prod_{n=0}^{\infty} (1+z_n)$. ∎

4.2 Productos de funciones

Nos ocupamos ahora de las funciones definidas como el producto de una sucesión de funciones holomorfas. En primer lugar probamos que son holomorfas. De momento nos restringimos al caso de funciones que no se anulan, y después veremos el caso general. Como en el teorema 4.3, en el resultado siguiente log representa al logaritmo de un número complejo cuya parte imaginaria está en $]-\pi, \pi]$.

Teorema 4.6 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto*[1] *Ω de $\mathbb{C}$ que no tomen el valor 0. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)$ converge casi uniformemente en Ω entonces $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge casi uniformemente a una función holomorfa f que cumple*

$$f(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)}.$$

Además

$$f'(z) = f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

[1] El teorema vale también si $\Omega \subset \mathbb{C}^{\infty}$

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in \Omega$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Como la serie de los logaritmos converge uniformemente en este disco cerrado, es fácil ver que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 1, luego existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f_n(z) - 1| < 1$ para todo z en dicho disco. Esto implica que las funciones $\log f_n(z)$ son holomorfas en $D(z_0, r)$, luego también lo es $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)$.

Por el teorema 4.3 resulta que

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) = e^{\log f_n(z)}$$

es también una función holomorfa en z_0, al igual que

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{n_0-1} f_n(z) \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)}.$$

Esto prueba que el producto es una función holomorfa en Ω. Veamos ahora que la convergencia es casi uniforme.

Sea $K \subset \Omega$ un compacto y sea $M > 1$ una cota superior de $|f|$ en K. Sea $0 < \epsilon < 1$. Como la serie de los logaritmos converge uniformemente en K existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z) \right| < \frac{\epsilon}{2M} < \frac{1}{2}$$

para todo $z \in K$. Así

$$\left| f(z) - \prod_{n=0}^{k} f_n(z) \right| = \left| e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)} - e^{\sum_{n=0}^{k} \log f_n(z)} \right|$$

$$= \left| e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)} \right| \left| 1 - e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z)} \right| \leq M \left| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(- \sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z) \right)^r \right|$$

$$\leq M \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\epsilon/2M)^r}{r!} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{r-1}}{2^{r-1} M^{r-1} r!} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} = \epsilon.$$

Finalmente, una sencilla inducción prueba que la derivada de un producto finito $\prod_{n=0}^{k} f_n(z)$ es igual a

$$\prod_{n=0}^{k} f_n(z) \sum_{n=0}^{k} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Tomando límites se sigue la expresión buscada para la derivada del producto infinito. ∎

Conviene observar que en el teorema anterior las función $\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)$ no es necesariamente continua, ni mucho menos holomorfa (a causa de los primeros términos).

Del teorema 4.5 se desprende inmediatamente el siguiente criterio de convergencia absoluta:

Teorema 4.7 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}^\infty$ que no tomen el valor 0. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absoluta y casi uniformemente en Ω entonces el producto $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge absoluta y casi uniformemente en Ω.*

Ahora damos el teorema general sobre convergencia de productos admitiendo que los factores se anulen. Las restricciones sobre los ceros de los factores son las condiciones necesarias que impone el principio de prolongación analítica para que el producto no resulte ser la función constante nula. La demostración es inmediata.

Teorema 4.8 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}^\infty$. Sea E el conjunto de los puntos de Ω donde se anula al menos una de las funciones f_n. Son equivalentes:*

a) Si K es un subconjunto compacto de Ω entonces $E \cap K$ es finito y existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la función f_n no se anula en K.

b) El conjunto E no tiene puntos de acumulación en Ω y en cada punto de Ω se anula un número finito de funciones f_n.

Si además de estas afirmaciones se cumple

c) Para cada compacto $K \subset \Omega$ (y su n_0 asociado) la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)$ converge uniformemente en K,

entonces el producto $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge casi uniformemente en Ω a una función holomorfa. Una condición suficiente para que se cumpla c) es la condición

c′) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ converge casi uniformemente en Ω,

y en tal caso el producto converge absolutamente en Ω.

(La última afirmación se sigue inmediatamente de la prueba del teorema 4.5).

Como aplicación obtendremos la factorización de la función seno que hemos dado como ejemplo en la introducción.

Teorema 4.9 *Para todo número complejo z se cumple*

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN: El primer paso de la prueba es demostrar que si n es impar y x es un número real entonces $\operatorname{sen} nx$ se puede expresar como un polinomio de grado n en $\operatorname{sen} x$. En efecto:

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i\operatorname{sen}(nx) &= e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i\operatorname{sen} x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x\, i^k \operatorname{sen}^k x.\end{aligned}$$

Hagamos $n = 2m+1$ e igualemos las partes imaginarias de ambos miembros:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(nx) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} \cos^{2(m-k)} x(-1)^k \operatorname{sen}^{2k+1} x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (1-\operatorname{sen}^2 x)^{m-k}(-1)^k \operatorname{sen}^{2k+1} x = R(\operatorname{sen} x),\end{aligned}$$

donde $R(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo $2m+1 = n$. Se cumple que $\operatorname{sen}(nx) = 0$ para

$$x = 0, \quad \pm\frac{\pi}{n}, \quad \pm 2\,\frac{\pi}{n}, \quad \ldots \quad , \pm\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n},$$

luego $R(x)$ se anula en

$$0, \quad \pm\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}, \quad \pm\operatorname{sen} 2\,\frac{\pi}{n}, \quad \ldots \quad , \pm\operatorname{sen}\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n},$$

y éstos son n puntos distintos, luego el grado de $R(x)$ es exactamente n y concretamente

$$\begin{aligned}R(x) &= kx\left(x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)\left(x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)\cdots\left(x - \operatorname{sen}\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n}\right)\left(x + \operatorname{sen}\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n}\right) \\ &= kx\left(x^2 - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}\right)\cdots\left(x^2 - \operatorname{sen}^2\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Multiplicamos y dividimos por

$$\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}\right)\cdots\left(\operatorname{sen}^2\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n}\right)$$

y queda

$$R(x) = k'x\left(1 - \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2\frac{n-1}{2}\,\frac{\pi}{n}}\right).$$

Consecuentemente

$$\operatorname{sen}(nx) = k' \operatorname{sen} x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{n-1}{2} \frac{\pi}{n}}\right).$$

Para determinar la constante k' observamos que todos los factores excepto $\operatorname{sen} x$ tienden a 1 cuando x tiende a 0, luego

$$k' = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen} x} = n.$$

Ahora hacemos $y = nx$, con lo que obtenemos la siguiente expresión para el seno de cualquier número real y:

$$\operatorname{sen} y = n \operatorname{sen} \frac{y}{n} \prod_{r=1}^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right). \tag{4.2}$$

Notemos que

$$\lim_n n \operatorname{sen} \frac{y}{n} = y, \qquad \lim_n \frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)} = \frac{y^2}{r^2\pi^2}. \tag{4.3}$$

Sin embargo, no podemos tomar límites en (4.2) porque el número de factores crece con n. Para resolver este problema técnico trabajaremos con las series de logaritmos asociadas a los productos. Llamamos

$$P(y,n) = \prod_{r=1}^{(n-1)2} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right), \quad L(y,n) = \sum_{r=1}^{(n-1)/2} \log\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right),$$

de modo que (4.2) se puede reescribir como

$$\operatorname{sen} y = n \operatorname{sen} \frac{y}{n} P(y,n).$$

Definimos así mismo

$$P(y) = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{r^2\pi^2}\right), \qquad L(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{y^2}{r^2\pi^2}\right).$$

Claramente el producto cumple la condición c′) del teorema anterior, por lo que el producto es una función entera.

Fijemos números $0 < a < b < \pi/2$. Para todo compacto $K \subset]a,b[\times R$ ninguno de los factores se anula en K, luego el valor de n_0 correspondiente al teorema anterior es $n_0 = 1$, lo que implica que la serie de los logaritmos converge casi uniformemente en la banda a un logaritmo del producto. Basta probar que $\lim_n L(y,n) = L(y)$ para todo número real $y \in]a,b[$, pues entonces $\lim_n P(y,n) = \lim_n e^{L(y,n)} = e^{L(y)} = P(y)$ y por lo tanto

$$\operatorname{sen} y = \lim_n n \operatorname{sen} \frac{y}{n} P(y,n) = yP(y).$$

Como tanto $\operatorname{sen} z$ como $zP(z)$ son funciones enteras, por el principio de prolongación analítica se cumple que si coinciden en el intervalo $]a,b[$ de hecho coinciden en $\mathbb{C}$, y así tendremos probado el teorema. Definimos

$$L_m(y,n)=\sum_{r=1}^{m}\log\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right),\quad \overline{L}_m(y,n)=\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}\log\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right),$$

$$L_m(y)=\sum_{r=1}^{m}\log\left(1-\frac{y^2}{r^2\pi^2}\right),\quad \overline{L}_m(y)=\sum_{r=m+1}^{\infty}\log\left(1-\frac{y^2}{r^2\pi^2}\right).$$

Así, $|L(y,n)-L(y)|\le|L_m(y,n)-L_m(y)|+|\overline{L}_m(y,n)|+|\overline{L}_m(y)|$.

De (4.3) sí podemos concluir que para cualquier m se tiene

$$\lim_n L_m(y,n)=L_m(y),$$

pues ahora el número de factores es fijo. También es claro que

$$\lim_m \overline{L}_m(y)=0,$$

pues es la sección final de una serie convergente. Lo único que hay que probar es que tomando m suficientemente grande podemos hacer $|\overline{L}_m(y,n)|$ arbitrariamente pequeño.

Es fácil demostrar que si $0<y<\pi/2$ entonces $y/2<\operatorname{sen} y<y$, luego

$$0<\frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}<\frac{y^2/n^2}{r^2\pi^2/4n^2}=\frac{4y^2}{\pi^2r^2}<\frac{1}{r^2}<1.$$

Ahora notamos que si $0<u<v<1$ entonces $0<-\log(1-u)<-\log(1-v)$, luego

$$|\overline{L}_m(y,n)|=\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}-\log\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(y/n)}{\operatorname{sen}^2(r\pi/n)}\right)<\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}-\log\left(1-\frac{1}{r^2}\right).$$

En general, si $|z|<1$ se cumple

$$-\log(1-z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}=z+z^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k+2}<z+z^2\sum_{k=0}^{\infty}z^k=z+\frac{z^2}{1-z}.$$

Usando esto obtenemos

$$|\overline{L}_m(y,n)|<\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}\frac{1}{r^2}+\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}\left(\frac{1}{r^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}\right)<\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}\frac{1}{r^2}+\frac{4}{3}\sum_{r=m+1}^{(n-1)/2}\frac{1}{r^4}$$

$$\le\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}+\frac{4}{3}\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

Como la última expresión tiende a 0 con m tenemos que dado $\epsilon > 0$ podemos elegir un m suficientemente grande para que $|\overline{L}_m(y,n)| < \epsilon/3$ para cualquier $n > m$. Podemos escogerlo de modo que también $|\overline{L}_m(y)| < \epsilon/3$ y si hacemos n suficientemente grande tendremos también que $|L_m(y,n) - L_m(y)| < \epsilon/3$. Entonces $|L(y,n) - L(y)| < \epsilon$. ∎

Como consecuencia inmediata tenemos un desarrollo análogo para el coseno.

Teorema 4.10 *Para todo número complejo z se cumple*

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Demostración:

$$\cos z = \frac{\operatorname{sen} 2z}{2\operatorname{sen} z} = \frac{2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{n^2\pi^2}\right)}{2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)} = \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2m)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

∎

Terminamos la sección con una aplicación de la factorización del seno:

Teorema 4.11 (Fórmula de Wallis) *Se cumple:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\cdots$$

Demostración: Basta evaluar en $\pi/2$ la factorización del seno:

$$1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}.$$

Si llamamos P_n a la sucesión de los productos parciales, esto prueba que P_{2n} converge a $\pi/2$, pero $P_{2n+1} = P_{2n}(2n+2)/(2n+1)$ tiene el mismo límite, luego P_n también converge. Sin embargo hay que notar que los productos

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1} \quad \text{y} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$$

son divergentes, por lo que la convergencia no es absoluta. ∎

4.3 Factorización de funciones holomorfas

Tal y como comentábamos en la introducción, podemos ver las factorizaciones del seno y el coseno como la generalización natural de la descomposición de un polinomio en factores lineales. Los factores en que se descompone un polinomio se corresponden con sus raíces. Concretamente un polinomio no nulo $P(z)$ tiene una raíz en un punto z_0 si y sólo si factoriza como $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, para un cierto polinomio $Q(z)$. Puede ocurrir que éste también tenga una raíz en z_0, pero repitiendo el proceso podemos llegar a una factorización del tipo $P(z) = (z - z_0)^n R(z)$ donde $R(z_0) \neq 0$. El número n es la multiplicidad de la raíz z_0 en $P(z)$. A su vez podemos factorizar $R(z)$ usando sus raíces y el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que el proceso termina con una factorización completa de $P(z)$.

Si intentamos generalizar esto a funciones holomorfas nos encontramos con que en ocasiones no podemos si siquiera empezar. Es el caso de la función exponencial, que no tiene raíces y consecuentemente no es factorizable en este sentido (por supuesto podemos descomponerla en factores como $e^z = e^{z+z^2}e^{-z^2}$, pero esto no aporta nada).

El teorema siguiente nos indica que —al menos sobre abiertos convexos— las exponenciales son las únicas funciones no factorizables.

Teorema 4.12 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto convexo y f una función holomorfa en Ω que no se anule en ningún punto. Entonces existe $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{L(z)}$ para todo $z \in \Omega$. La derivada de cualquier función L con esta propiedad es $L'(z) = f'(z)/f(z)$.*

Demostración: La función $f'(z)/f(z)$ es holomorfa en Ω, luego por el teorema 2.29 tiene una primitiva, es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ de manera que $F'(z) = f'(z)/f(z)$.

Sea $g(z) = f(z)e^{-F(z)}$. Se comprueba inmediatamente que $g'(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, como Ω es conexo, g ha de ser constante, es decir, tenemos que $f(z) = ke^{F(z)}$. Obviamente $k \neq 0$ luego $k = e^u$ para un cierto $u \in \mathbb{C}$, y así $f(z) = e^{F(z)+u}$. Por consiguiente la función $L(z) = F(z) + u$ cumple lo pedido.

Si $f(z) = e^{L(z)}$, derivando resulta que $f'(z) = e^{L(z)}L'(z) = f(z)L'(z)$. ∎

Para entender cómo afecta esto a nuestra intención de factorizar funciones pensemos por ejemplo en $f(z) = e^{z^2}(z-1)(z-2)^3$. Resulta que esta función ya está completamente factorizada, pues no hay nada que podamos hacer con el factor e^{z^2}. Esto quiere decir que en las descomposiciones en factores de funciones holomorfas tendremos que permitir la presencia posible de un factor exponencial que no aparece en los polinomios (ni en otros casos, como son los de las funciones seno y coseno).

De todos modos desde un punto de vista algebraico la diferencia que esto supone respecto del caso de los polinomios es menor de lo que pueda parecer en un principio. En efecto, las funciones que no se anulan en un abierto Ω son precisamente las unidades (elementos inversibles) del anillo $\mathcal{H}(\Omega)$, y las unidades siempre son despreciables a efectos de factorización. Las unidades del anillo de

polinomios son las constantes, luego la diferencia entre los dos casos es, pues, que las unidades de $\mathcal{H}(\Omega)$ son más complicadas que las unidades de los polinomios.

Por lo demás, podemos generalizar satisfactoriamente el concepto de multiplicidad de una raíz al caso de funciones holomorfas:

Definición 4.13 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω. Para cada punto $z_0 \in \Omega$ definimos el *orden* de z_0 en f como el mínimo natural n tal que el coeficiente n-simo de la serie de Taylor de f alrededor de z_0 es no nulo.[2] Lo representaremos por $o(f, z_0)$. Si todos los coeficientes de la serie de Taylor son nulos convendremos en que $o(f, z_0) = +\infty$.

Obviamente $o(f, z_0) = +\infty$ si y sólo si f es idénticamente nula en un entorno de z_0. Si Ω es conexo esto ocurre si y sólo si f es la función constante 0. Cuando el orden es finito la situación viene descrita por el teorema siguiente:

Teorema 4.14 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea z_0 un punto de Ω tal que $o(f, z_0) = n < +\infty$. Entonces existe una única función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.*

Además $g(z_0) \neq 0$ y, recíprocamente, si tenemos una descomposición de la forma $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ para un cierto n y una cierta función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z_0) \neq 0$, necesariamente $n = o(f, z_0)$. En particular $f(z_0) = 0$ si y sólo si $o(f, z_0) > 0$.

Demostración: Si $o(f, z_0) = n < +\infty$ entonces la serie de Taylor de f en z_0 es de la forma

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k.$$

La función $f(z)/(z - z_0)^n$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$, pero en un entorno de z_0 coincide con la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k$, que también es holomorfa en z_0, luego podemos extenderla a una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ para $z \in \Omega$ y $g(z_0) = a_n \neq 0$.

La unicidad de g se debe a que si $f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^n h(z)$ para dos funciones g, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces g y h coinciden en $\Omega \setminus \{z_0\}$, y por continuidad también coinciden en z_0.

Por otra parte, si $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$, entonces la serie de Taylor de g alrededor de z_0 será de la forma $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, donde $a_0 = g(z_0) \neq 0$. Por lo tanto en un entorno de z_0 se cumple

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n},$$

[2]Para funciones holomorfas en ∞ definimos $o(f, \infty) = o(f(1/z), 0)$. Dejamos que el lector desarrolle las adaptaciones a este caso de los resultados siguientes.

luego ésta es la serie de Taylor de f en z_0 y el menor coeficiente no nulo es el n-simo, con lo que $o(f, z_0) = n$. ∎

Cuando $o(f, z_0) = n > 0$ se dice que z_0 es un cero de orden n de la función f. El teorema anterior justifica que el concepto de orden de un cero de una función holomorfa coincide con el de multiplicidad de una raíz cuando la función es un polinomio, y nos permite comenzar la factorización de las funciones holomorfas siguiendo el proceso que se aplica a los polinomios. Antes de entrar en dicho proceso conviene enunciar algunas propiedades elementales.

Teorema 4.15 *Sean f y g funciones holomorfas en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$*

a) $o(fg, z_0) = o(f, z_0) + o(g, z_0)$.

b) Si $o(g, z_0) \leq o(f, z_0) < \infty$, *entonces* f/g *se puede extender a una función holomorfa en un entorno de* z_0 *y* $o(f/g, z_0) = o(f, z_0) - o(g, z_0)$.

c) Sea $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *un producto en las condiciones del teorema* 4.8. *Entonces*

$$o\left(\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z), z_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} o(f_n(z), z_0).$$

(Observar que la serie es finita por las hipótesis del teorema 4.8*).*

Demostración: a) Si $o(f, z_0) = m$ y $o(g, z_0) = n$ entonces

$$f(z) = (z - z_0)^m\, u(z), \qquad g(z) = (z - z_0)^n\, v(z),$$

para ciertas funciones u y v tales que $u(z_0) \neq 0 \neq v(z_0)$. Consecuentemente

$$(fg)(z) = (z - z_0)^{m+n}\, (uv)(z),$$

luego por el teorema anterior tenemos que $o(fg, z_0) = m + n$.

Si alguno de los órdenes es infinito entonces es claro que fg se anula en un entorno de z_0 y la afirmación sigue siendo válida conviniendo $+\infty + n = +\infty$.

b) Consideramos las mismas factorizaciones de f y g. Entonces para $z \neq z_0$ tenemos que $(f/g)(z) = (z - z_0)^{m-n}(u/v)(z)$, pero la función de la izquierda es holomorfa en un entorno de z_0 y $(u/v)(z_0) \neq 0$.

c) Por las hipótesis del teorema 4.8 existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $f_n(z_0) \neq 0$, es decir, $o(f_n, z_0) = 0$. Entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{n_0} f_n(z) \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{y} \quad o\left(\prod_{n=n_0}^{\infty} fn(z), z_0\right) = 0.$$

Aplicando el apartado a) varias veces concluimos que

$$o\left(\prod_{n=0}^{\infty} fn(z), z_0\right) = \sum_{n=0}^{n_0} o(f_n, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} o(f_n, z_0)$$

∎

Puede ser ilustrativo considerar estos resultados desde un punto de vista algebraico. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$. Recordemos que un elemento f de un anillo conmutativo es un *divisor de* 0 si y sólo si $f \neq 0$ y existe otro elemento $g \neq 0$ tal que $fg = 0$. En el caso de $\mathcal{H}(\Omega)$, si tenemos dos funciones tales que $fg = 0$, entonces para cada componente conexa C de Ω podemos tomar un compacto infinito $K \subset C$ y concluir que una de las dos funciones ha de anularse en infinitos puntos de K, luego el conjunto de ceros de una de las dos tiene un punto de acumulación en K, luego en C, y por el principio de prolongación analítica una de las dos es nula en C. De aquí se sigue que los divisores de 0 de $\mathcal{H}(\Omega)$ son las funciones no nulas que se anulan en alguna componente conexa de Ω. En particular, si Ω es conexo el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio íntegro, es decir, no tiene divisores de 0. Esto es algo notable, pues por ejemplo es falso para el anillo $C(\Omega)$ de las funciones continuas en Ω. Una consecuencia importante es que si Ω es conexo las funciones holomorfas son simplificables, es decir, $fg = fh$ y $f \neq 0$ implica que $g = h$.

En dominios íntegros tiene sentido hablar de divisibilidad, y el teorema anterior caracteriza cuándo una función f es divisible en $\mathcal{H}(\Omega)$ entre otra función g: esto sucede si y sólo si $o(g, z) \leq o(f, z)$ para todo punto $z \in \Omega$. En efecto, si existe una función h tal que $f = gh$ el apartado a) nos da que $o(g, z) \leq o(g, z) + o(h, z) = o(f, z)$. Recíprocamente, si se da esta condición entonces el apartado b) nos da que la función f/g (que es holomorfa en Ω excepto donde se anula g) se puede extender a una función holomorfa h en todo Ω, y claramente $f = gh$ (pues si $g(z) = 0$ entonces $0 < o(g, z) \leq o(f, z)$, y también $f(z) = 0$).

El paso siguiente es completar la factorización de una función. En el caso de los polinomios sabemos que tras aplicar un número finito de veces el teorema (4.14) llegamos a una factorización completa. El caso general no es tan sencillo. Pensemos por ejemplo en la función seno. De los teoremas 4.9 y 4.15 se sigue que los ceros $\pm k\pi$ tienen todos orden 1, lo que nos permite factorizar

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z f_1(x) = z(z-\pi) f_2(x) = z(z-\pi)(z+\pi) f_3(x) \\ &= z(z-\pi)(z+\pi)(z-2\pi) f_4(x) = \cdots \end{aligned}$$

y así sucesivamente, donde cada una de las funciones $f_i(z)$ que vamos obteniendo tiene un cero menos que la anterior. Sin embargo los productos parciales que aparecen no convergen, pues los factores ni siquiera convergen a 1 en ningún punto.

Teniendo en cuenta las características de convergencia de los productos infinitos resulta natural considerar factores de la forma $1 - z/z_0$ en lugar de $z - z_0$. Estos factores siguen siendo lineales con una única raíz z_0 y, si la sucesión de ceros converge a infinito (cosa que ha de ocurrir siempre con los ceros de una función entera), entonces esta sucesión de factores converge a 1 para todo punto z (si eliminamos los factores nulos).

Teniendo en cuenta que

$$\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) = 1 - \frac{z^2}{n^2 z^2},$$

el teorema 4.9 nos da

$$\operatorname{sen} z = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots$$

Observar que la sucesión de productos parciales impares (contando el factor z) es la sucesión del teorema 4.9, que ya sabemos que converge a $\operatorname{sen} z$, y la sucesión de los productos parciales pares converge al mismo límite porque es el producto de la sucesión anterior por la sucesión $1 - z/n\pi$, que tiende a 1.

Hay que notar que del teorema 4.5 se sigue inmediatamente que este producto no converge absolutamente en ningún punto distinto de cero. En particular no podemos agrupar arbitrariamente los factores y escribir, por ejemplo:

$$\operatorname{sen} z = z\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n\pi}\right).$$

Pese a todo, es posible separar completamente todos los ceros de la función seno (y de cualquier otra función entera) si en los factores lineales incluimos exponenciales que garanticen la convergencia absoluta sin añadir ceros. Concretamente probaremos que el seno admite la factorización

$$\operatorname{sen} z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{z/n\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-z/n\pi}. \tag{4.4}$$

De hecho basta ver que el producto es convergente, pues entonces agrupando los factores correspondientes a valores opuestos de n se obtiene el producto del teorema 4.9.

En vista de esto hemos de estudiar qué factores exponenciales hay que introducir concretamente para conseguir una factorización completa (absolutamente convergente) de una función. Nos servirán los de la forma que definimos a continuación.

Definición 4.16 Llamaremos *factores primarios de Weierstrass* a las funciones enteras

$$E_m(z) = (1-z)e^{\sum_{k=1}^{m} z^k/k}, \qquad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Por ejemplo, en estos términos queremos probar que

$$\operatorname{sen} z = z\prod_{n=1}^{\infty} E_1(z/n\pi)\prod_{n=1}^{\infty} E_1(z/n\pi). \tag{4.5}$$

Para ello necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 4.17 *Para todo natural no nulo m y todo z tal que $|z| \le 1$ se cumple*

$$|1 - E_m(z)| \le |z|^{m+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(z) = 1 - E_m(z)$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\left(-1 + (1-z)\sum_{k=0}^{m-1} z^k\right) e^{\sum_{k=1}^{m} z^k/k} \\ &= -(-1+1-z^m)\prod_{k=1}^{m} e^{z^k/k} = z^m \prod_{k=1}^{m} e^{z^k/k}. \end{aligned}$$

Consideremos la serie de Taylor del producto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \prod_{k=1}^{m} e^{z^k/k} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!k^n} z^{nk}.$$

Comparando los coeficientes concluimos que $a_n \geq 0$ para todo n. La serie de Taylor de $f'(z)$ es $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}$, luego la serie de $f(z)$ (teniendo en cuenta que $f(0) = 0$) resulta ser

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} z^{n+m+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |1 - E_m(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} |z|^{n+m+1} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} |z|^{m+1} = f(1)|z|^{m+1} = |z|^{m+1}. \end{aligned}$$

■

Ahora podemos dar un teorema general de convergencia de productos de factores de Weierstrass:

Teorema 4.18 *Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos que cumpla $\lim_n z_n = \infty$. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números naturales tal que $\sum_{n=0}^{\infty} (r/|z_n|)^{p_n+1} < +\infty$ para todo número real $r > 0$. Entonces el producto*

$$\prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n)$$

converge absolutamente a una función entera cuyos ceros son exactamente los números z_n y el orden de cada cero es igual al número de veces que aparece en la sucesión.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que el producto cumple las condiciones del teorema 4.8 salvo quizá la condición c). Vamos a ver que de hecho cumple la

condición c'), con lo que la convergencia será absoluta. Concretamente hemos de ver que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/z_n)|$$

converge casi uniformemente en $\mathbb{C}$.

Sea K un compacto en $\mathbb{C}$. Sea $r > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0,r)}$. De la hipótesis se sigue que $\lim_n (r/|z_n|) = 0$, luego existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $r/|z_n| < 1$.

Si $z \in K$ y $n \geq n_0$ entonces $|z/z_n| \leq r/|z_n| < 1$ y el teorema anterior nos da que

$$|1 - E_{p_n}(z/z_n)| \leq |z/z_n|^{p_n+1} \leq (r/|z_n|)^{p_n+1},$$

luego por el criterio de mayoración de Weierstrass la serie converge uniformemente en K. ∎

Esto prueba la convergencia (absoluta) del producto (4.5), pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (r/n)^2$ converge para cualquier $r > 0$.

Observar que, dada una sucesión que cumpla $\lim_n z_n = \infty$, siempre es posible encontrar una sucesión $\{p_n\}$ de números naturales que cumpla la hipótesis del teorema anterior. En efecto, basta tomar $p_n = n$. Entonces, dado un $r > 0$ siempre existe un n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumple $r/|z_n| < 1/2$, con lo que $(r/|z_n|)^{n+1} < 1/2^{n+1}$, y por lo tanto la serie converge.

Hemos enunciado el teorema para una sucesión arbitraria porque en muchos casos pueden tomarse sucesiones mucho más simples, como hemos visto en el caso del seno, donde nos ha servido $p_n = 1$. De este modo los factores son más sencillos.

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata del teorema 4.18 junto con la observación anterior:

Teorema 4.19 *Sea B un conjunto de números complejos sin puntos de acumulación y sea $m : B \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces existe una función entera f cuyos ceros son exactamente los puntos de B y para cada $z \in B$ se cumple que $o(f, z) = m(z)$.*

(Basta formar una sucesión con los puntos de B donde cada punto z se repita $m(z)$ veces y tomar $p_n = n$).

Finalmente llegamos al teorema general de factorización de funciones enteras:

Teorema 4.20 (Teorema de factorización de Weierstrass) *Sea f una función entera no idénticamente nula. Sea $\{a_n\}$ el conjunto de los ceros no nulos de f repetidos tantas veces como indica su orden, sea $k = o(f, 0)$ y sea $\{p_n\}$ cualquier sucesión de números naturales que cumpla la hipótesis del teorema* 4.18. *Entonces existe una función entera g tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Según el teorema 4.15 el cociente de f entre el producto infinito se extiende a una función entera que no se anula, luego por el teorema 4.12 es de la forma $e^{g(z)}$. ∎

Este teorema puede ser generalizado a abiertos cualesquiera. Como los factores que se obtienen en el caso general no son tan simples como para funciones enteras, no vamos a enunciarlo explícitamente. En su lugar daremos un enunciado que generaliza al teorema 4.19, si bien en la prueba construimos un producto de funciones cada una de las cuales tiene un cero simple, y que permite factorizar cualquier función holomorfa de un modo análogo a lo visto en el teorema 4.20.

En la prueba va a ser de gran ayuda el concepto de derivada en ∞, que no va a jugar aquí un papel secundario, al contrario de lo que ha sucedido en las demostraciones vistas hasta ahora. Conviene extraer una parte de la demostración:

Vamos a probar que si M es una transformación de Möbius tal que $M(a) = b$ y f es una función holomorfa en b, entonces $o(f(z), b) = o\big(f(M(z)), a\big)$.

Si $b \neq \infty$ entonces $f(z) = (z-b)^n g(z)$, donde $g(b) \neq 0$. Consecuentemente

$$f(M(z)) = (M(z) - M(a))^n g(M(z)),$$

donde $g\big(M(a)\big) \neq 0$ y $M(z) - M(a)$ es una transformación de Möbius con un cero en a. Ahora bien, el único cero de una transformación de Möbius (finito o infinito) es simple, luego el teorema 4.15 nos da que $o\big(f(M(z)), a\big) = n = o\big(f(z), b\big)$.

Si $b = \infty$ podemos razonar análogamente, pero ahora $f(z) = g(z)/z^n$ y $1/M(z)$ es una transformación de Möbius con un cero simple en a.

Teorema 4.21 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^\infty$ tal que $\Omega \neq \mathbb{C}^\infty$. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto sin puntos de acumulación en Ω. Para cada $\alpha \in A$ sea $m(\alpha)$ un número natural no nulo. Entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cuyos ceros son los puntos de A y además para cada $\alpha \in A$ se cumple $o(f, \alpha) = m(\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $\infty \in \Omega \setminus A$. Entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es un compacto no vacío e ∞ no es un punto de acumulación de A. Si A es finito basta tomar como f un polinomio adecuado, luego podemos suponer que A es infinito (claramente numerable) y podemos formar una sucesión $\{\alpha_n\}$ en la que cada $\alpha \in A$ aparezca exactamente $m(\alpha)$ veces.

Como $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es compacto, existe un $\beta_n \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tal que $|\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n - \beta|$ para todo $\beta \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Veamos que $\lim_n |\alpha_n - \beta_n| = 0$.

En otro caso existiría un $\epsilon > 0$ tal que $|\alpha_n - \beta_n| \geq \epsilon$ para infinitos α_n. El conjunto de estos valores tiene un punto de acumulación $\beta \in \mathbb{C}^\infty$ y, por la hipótesis sobre A, de hecho ha de ser $\beta \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Sea n tal que $|\alpha_n - \beta_n| \geq \epsilon$, pero $|\alpha_n - \beta| < \epsilon$. Esto contradice la elección de β_n.

Claramente la función

$$E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{\beta_n\}$, en particular en Ω. Además tiene un único cero (simple) en α_n. Veamos que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

define una función holomorfa en Ω, que claramente cumplirá lo pedido. Para ello basta probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right|$$

converge casi uniformemente en Ω.

Sea $K \subset \Omega$ un compacto. Sea $d > 0$ la distancia de K a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Para valores de n suficientemente grandes se cumple $|\alpha_n - \beta_n| \le d/2 \le |z - \beta_n|/2$, para todo $z \in K$, luego

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Por el teorema 4.17 tenemos que

$$\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \le \frac{1}{2^{n+1}},$$

para todo $z \in K$. De aquí se sigue que la serie converge uniformemente en K.

En el caso general, puesto que A es numerable, podemos tomar un $\xi \in \Omega \setminus A$, $\xi \neq \infty$. La transformación de Möbius $M(z) = 1/(z - \xi)$ cumple $M(\xi) = \infty$, luego $M[\Omega]$ y $M[A]$ cumplen las hipótesis del teorema y además tenemos que $\infty \in M[\Omega] \setminus M[A]$. Por la parte ya probada existe una función $f \in \mathcal{H}(M[\Omega])$ tal que sus ceros son los puntos $M(\alpha)$ para cada $\alpha \in A$ con orden $m(\alpha)$. Entonces la función $f\big(M(z)\big)$ cumple lo pedido. ∎

4.4 Números de Bernoulli

Concluiremos el tema con varias aplicaciones de los productos infinitos. Hemos calculado las series de Taylor de las funciones holomorfas más importantes, tales como las funciones exponencial, seno, coseno y logaritmo, pero hay otras que no son tan fáciles de calcular, pues no es fácil obtener una fórmula general para la derivada n-sima.

Pensemos por ejemplo en la función tangente:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z},$$

que es holomorfa en todo el plano complejo salvo en los puntos $(2k+1)\pi/2$, donde se hace infinita. Por lo tanto su serie de Taylor alrededor de 0 converge

en el disco de radio $\pi/2$. Intentemos calcular sus derivadas sucesivas en 0. Llamemos $f(z) = \tan z$.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 1 + \tan^2 z.\\
f''(z) &= 2\tan z(1+\tan^2 z) = 2\tan z + 2\tan^3 z.\\
f'''(z) &= 2(1+\tan^2 z) + 6\tan^2 z(1+\tan^2 z) = 2 + 8\tan^2 z + 6\tan^4 z.\\
f^{iv)}(z) &= 16\tan z(1+\tan^2 z) + 24\tan^3 z(1+\tan^2 z)\\
&= 16\tan z + 30\tan^3 z + 24\tan^5 z.\\
f^{v)}(z) &= 16(1+\tan^2 z) + 90\tan^2 z(1+\tan^2 z) + 120\tan^4 z(1+\tan^2 z)\\
&= 16 + 106\tan^2 z + 210\tan^4 z + 120\tan^6 z.
\end{aligned}$$

Así, las primeras derivadas de f en 0 valen 0, 1, 0, 2, 0, 16, ... pero nada nos deja vislumbrar el término general de esta sucesión y las derivadas se vuelven cada vez más complicadas. Una observación fácil de probar por inducción es que $f^{n)}(z)$ es un polinomio en $\tan z$ con coeficientes naturales, de donde se sigue que $f^{n)}(0)$ es siempre un número natural.

Vamos a encontrar una expresión fácilmente calculable para $f^{n)}(0)$ y por lo tanto para la serie de Taylor de $\tan z$. Nos basaremos en que $\tan z$ es la derivada de $-\log\cos z$.

Partimos de la factorización del coseno dada por el teorema 4.10. Si $|z| < \pi/2$ ninguno de los factores se anula, luego el teorema 4.3 implica la convergencia de la serie

$$\log\cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

La fracción del segundo miembro está en $D(0,1)$, y en este disco la función $\log(1-z)$ admite el desarrollo en serie

$$\log(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Así pues,

$$-\log\cos z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2n-1)^{2k}\pi^{2k}}.$$

La serie doble converge absolutamente (siempre si $|z| < \pi/2$). Concretamente la serie de los módulos converge a $-\log\cos|z|$. Por lo tanto podemos reordenar los sumandos:

$$-\log\cos z = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}}\right)\frac{2^{2k}}{k\pi^{2k}}\, z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{2k}\, 2^{2k}}{k\pi^{2k}}\, z^{2k},$$

donde

$$T_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \cdots$$

Los cálculos anteriores prueban que T_2 converge, y de aquí que $T_k < +\infty$ para todo $k \geq 2$. Si derivamos la serie de potencias (y aplicamos 4.12) nos queda

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{2k}\, 2^{2k+1}}{\pi^{2k}}\, z^{2k-1}, \qquad \text{para } |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{4.6}$$

Esta expresión no es completamente satisfactoria porque contiene la suma infinita T_{2k}. Precisamente usaremos esta fórmula para calcular la suma de estas series, pero antes vamos a obtener una fórmula similar a partir del desarrollo en producto infinito de la función seno.

Consideramos ahora la función cotangente, es decir,

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

Es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $k\pi$, donde se hace infinita. En particular no es holomorfa en 0, luego no podemos hablar de la serie de Taylor en el origen. Tampoco podemos hablar de la función $\log \operatorname{sen} z$ en un entorno de 0, pues $\operatorname{sen} 0 = 0$ no tiene logaritmo. Sin embargo, el desarrollo en producto de la función seno muestra que la función

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

es entera (concretamente en 0 toma el valor 1). Si $|z| < \pi$, ninguno de los factores se anula, por lo que admite el logaritmo

$$\log \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Desarrollando el logaritmo en serie de Taylor queda

$$-\log \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k n^{2k} \pi^{2k}}.$$

Como los coeficientes son positivos, es claro que la serie converge absolutamente, luego podemos reordenarla como serie de potencias:

$$-\log \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{k\pi^{2k}}\, z^{2k},$$

donde

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots$$

Ahora derivamos el logaritmo aplicando 4.12 y la serie de potencias término a término, con lo que

$$\frac{1}{z} - \cot z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}}\, z^{2k-1},$$

o sea,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}}\, z^{2k-1}, \qquad \text{para } |z| < \pi. \tag{4.7}$$

Así se ve más claramente lo que ya habíamos constatado más arriba, que la función cot no es, ciertamente, holomorfa en 0, pero "la culpa" es de un sumando $1/z$, eliminado el cual, nos queda una función holomorfa en el disco de radio π.

Ahora calcularemos los valores de S_{2k} y T_{2k} comparando las fórmulas obtenidas con otras que obtendremos por otro camino. Para ello observamos que

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}, \qquad \text{luego} \qquad i\cot iz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} = 1 + \frac{2}{e^{2z}-1}.$$

Haciendo $u = 2z$ resulta

$$i\cot\frac{iu}{2} = 1 + \frac{2}{e^{u}-1}.$$

Para $|u| < 2\pi$ podemos usar el desarrollo en serie de la cotangente:

$$1 + \frac{2}{e^{u}-1} = \frac{2}{u} - i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}} \left(\frac{iu}{2}\right)^{2k-1} = \frac{2}{u} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k S_{2k}}{\pi^{2k}2^{2k-2}}\, u^{2k-1}.$$

Multiplicamos por $u/2$ y así llegamos a

$$\frac{u}{e^{u}-1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} S_{2k}}{\pi^{2k}2^{2k-1}}\, u^{2k}, \qquad \text{para } |u| < 2\pi.$$

Observar que la fórmula demuestra que la función $u/(e^u - 1)$ es holomorfa en 0.

Definición 4.22 Los *números de Bernoulli* son los números B_k determinados por la ecuación

$$\frac{u}{e^{u}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, u^{k}.$$

Comparando con la fórmula que acabamos de obtener es evidente que

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0 \ \text{ para } k = 1, 2, \ldots$$

así como que los números B_{2k} son no nulos y de signo alternado. Además

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}. \tag{4.8}$$

Pronto veremos que los números de Bernoulli son fáciles de calcular, por lo que esta fórmula nos da la suma de las series S_{2k}.

De aquí se obtiene inmediatamente la suma de las series T_{2k}, pues

$$T_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} = \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\, S_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}(2^{2k}-1)\pi^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}.$$

A su vez, de aquí obtenemos los desarrollos de Taylor de la tangente y la cotangente. Según (4.6) se cumple

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(2k-1)!}\, z^{2k-1},$$

para $|z| < \pi/2$, donde

$$D_k = \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k}$$

es la derivada en 0 de orden $2k-1$ de la función $\tan z$. Según nuestros cálculos previos son números naturales, lo que implica que los números de Bernoulli son números racionales.

A partir de (4.7) obtenemos

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k-1}, \quad \text{para } |z| < \pi.$$

Sólo nos queda calcular los números de Bernoulli. Para ello conviene dar la definición siguiente:

Definición 4.23 Llamaremos *polinomios de Bernoulli* a las funciones $B_k(x)$ determinadas por

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!}\, z^k.$$

Observar que para cualquier número complejo x las funciones ze^{xz} y e^z-1 tienen ambas un cero de orden 1 en el origen, por lo que el cociente es una función entera y la serie de la derecha converge para todo $z \in \mathbb{C}$. El teorema siguiente prueba que las funciones $B_k(x)$ así definidas son realmente polinomios. Notemos que $B_k(0) = B_k$.

Teorema 4.24 *Se cumple que*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, z^n &= \frac{z}{e^z-1}\, e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!}\, \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\, z^n. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes queda

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} n!\,\frac{B_k}{k!}\,\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\, x^{n-k}.$$

■

Una regla para recordar esta fórmula es

$$B_n(x) = (B + x)^n,$$

donde las "potencias" B^k que aparecen al aplicar el teorema del binomio han de entenderse como los números de Bernoulli B_k.

Como consecuencia inmediata tenemos la relación siguiente entre los polinomios de Bernoulli:

Teorema 4.25 *Para todo $n \geq 1$ se cumple*

$$\frac{dB_{n+1}(x)}{dx} = (n+1)B_n(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k x^{n+1-k}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dB_{n+1}(x)}{dx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\, B_k\,(n+1-k)x^{n-k} \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = (n+1)B_n(x). \end{aligned}$$

■

El teorema siguiente nos permitirá obtener una fórmula recurrente para calcular los números de Bernoulli.

Teorema 4.26 *Para $n \geq 1$ se cumple $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. En particular para $n \geq 2$ tenemos que $B_n(0) = B_n(1)$.*

DEMOSTRACIÓN: La identidad siguiente se comprueba sin esfuerzo:

$$z\frac{e^{(x+1)z}}{e^z - 1} - z\frac{e^{xz}}{e^z - 1} = ze^{xz}.$$

Desarrollando en serie ambos miembros queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, z^{n+1}.$$

Igualando los coeficientes obtenemos el resultado. ■

Teniendo en cuenta que $B_n = B_n(0) = B_n(1)$ llegamos a la relación siguiente.

Teorema 4.27 *Para $n \geq 2$ se cumple que*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Podemos expresar esta fórmula como $B_n = (B+1)^n$. Observar que B_n figura en ambos miembros de la igualdad, por lo que se simplifica. De todos modos esta fórmula aplicada a $n+1$ expresa a B_n en función de los números anteriores. Teniendo en cuenta que $B_0 = 1$ podemos calcular fácilmente los restantes. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} B_2 = B_0 + 2B_1 + B_2, & \text{luego } B_1 = -1/2. \\ B_3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 & \text{luego } B_2 = +1/6. \end{array}$$

Los siguientes son $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$. El numerador y el denominador de los números B_{2n} crecen muy rápidamente. Por ejemplo, Euler calculó estos números hasta

$$B_{30} = \frac{8.615.841.276.005}{14.322}.$$

Otros ejemplos son

$$B_{50} = 495.057.205.241.079.648.212.477.525/66,$$

$$\begin{aligned} B_{100} \;=\; & -945.980.378.191.221.252.952.274.330.694.937.218.727.028.415.330. \\ & 669.361.33.385.696.204.311.395.415.197.247.711 \;/\; 33.330. \end{aligned}$$

Los primeros polinomios de Bernoulli son

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - 1/2, \\ B_2(x) &= x^2 - x + 1/6, \\ B_3(x) &= x^3 - (3/2)x^2 + (1/2)x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30, \\ B_5(x) &= x^5 - (4/2)x^4 + (5/3)x^3 - (1/6)x. \end{aligned}$$

Si aplicamos estos cálculos a las fórmulas (4.8) tenemos como casos particulares las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Estas fórmulas son debidas a Euler. Hemos probado que los números S_{2k} son todos trascendentes. Por el contrario ni siquiera se sabe si los números S_{2k+1} son racionales o irracionales. En 1978 el matemático R. Aperi causó sensación al anunciar la trascendencia de S_3.

Los polinomios de Bernoulli también sirven para obtener fórmulas para la suma de potencias k-ésimas de números naturales, y de hecho fue buscando tales

fórmulas como Jacques Bernoulli llegó a definir los números que hoy llevan su nombre.

Basta observar que por los teoremas 4.25 y 4.26 se cumple que

$$k^n = \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)}{n+1} = \int_k^{k+1} B_n(x)\,dx$$

(de hecho esta fórmula caracteriza a los polinomios de Bernoulli)

Sumando ambos miembros llegamos a que

$$\sum_{k=a}^{b} k^n = \frac{B_{n+1}(b+1) - B_{n+1}(a)}{n+1} = \int_a^{b+1} B_n(x)\,dx.$$

En particular

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1}.$$

Por ejemplo, ahora es fácil obtener

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Es de notar la curiosa fórmula

$$(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3) = (1 + 2 + \cdots + m)^2.$$

4.5 La fórmula de Stirling

Usaremos la notación $a_n \sim b_n$ para indicar que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son *asintóticamente equivalentes,* es decir, que existe $\lim_n a_n/b_n = 1$.

Terminaremos el capítulo demostrando el teorema siguiente. Notar que en la prueba usamos la fórmula de Wallis.

Teorema 4.28 (Fórmula de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n.$$

Demostración: Partiremos de la fórmula $\log n! = \sum_{s=1}^{n} \log s$. Primeramente observamos que

$$\log n - \log s = \int_s^n \frac{1}{x}\,dx.$$

Sumando obtenemos

$$\log n! = n\log n - \sum_{s=1}^{n} \int_s^n \frac{1}{x}\,dx = n\log n - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=s}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Ahora observamos que cada sumando $\int_k^{k+1}(1/x)\,dx$ aparece exactamente k veces, luego

$$\log n! = n\log n - \sum_{k=1}^{n-1} k\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{k}{x}\,dx.$$

Para agrupar las integrales notamos que si $k \le x < k+1$, se cumple que k es la parte entera de x (que representaremos por $E(x)$), luego

$$\log n! = n\log n - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{E(x)}{x}\,dx = n\log n - \int_1^n \frac{E(x)}{x}\,dx.$$

Ahora conviene hacer la manipulación siguiente

$$\begin{aligned}\log n! &= n\log n + \int_1^n \frac{\frac{1}{2}-x}{x}\,dx + \int_1^n \frac{x-E(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx\\ &= n\log n + \frac{1}{2}\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{x-E(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Llamando $F(x)$ a la parte fraccionaria de x, o sea, $F(x) = x - E(x)$, obtenemos esta fórmula:

$$\log n! = \frac{1}{2}(2n+1)\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx. \tag{4.9}$$

El motivo de modificar de este modo la integral es que $F(x) - 1/2$ tiene integral nula entre dos números naturales cualesquiera, por lo que si llamamos

$$\phi(x) = \int_a^x \left(F(x) - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}F(x)(F(x)-1)$$

obtenemos una primitiva continua y periódica tal que $\phi(n) = 0$ para todo número natural y además $-1/8 \le f(x) \le 0$. Al integrar por partes queda

$$\int_1^s \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx = \frac{\phi(s)}{s} + \int_1^s \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx.$$

Claramente la función $\phi(x)/x^2$ es integrable en $[1,+\infty[$, luego $(F(x)-1/2)/x$ también lo es. Si hubiéramos definido $\phi(x)$ como una primitiva de $E(x)$, o incluso de $F(x)$, todo esto sería falso. Vamos a calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Para ello sumamos (4.9) con $\log 2^n = n\log 2$:

$$\log\big(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\big) = \frac{1}{2}(2n+1)\log n + n\log 2 - n + 1 + \int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Multiplicamos por 2:

$$\log\big(2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)(2n)\big) = (2n+1)\log n + 2n\log 2 - 2n + 2 + 2\int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

En (4.9) cambiamos n por $2n+1$:

$$\log\big(1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)\big) = \left(2n+1+\frac{1}{2}\right)\log(2n+1) - 2n + \int_1^{2n+1} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Restamos las dos últimas fórmulas:

$$\begin{aligned}\log\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} &= -(2n+1)\log\frac{2n+1}{n} - \frac{1}{2}\log(2n+1) + 2n\log 2 \\ &+ 2 + 2\int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx \int_1^{2n+1} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Expresamos el primer miembro como

$$\frac{1}{2}\log\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)(2n)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdots(2n+1)(2n+1)}.$$

Ahora el último factor $(2n+1)$ del denominador se simplifica con el sumando $(1/2)\log(2n+1)$ de la derecha en la igualdad anterior, y la última integral se descompone en suma de dos, una de las cuales se simplifica. El resultado es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} &= -(2n+1)\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \log 2 + 2 \\ &+ \int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx \int_n^{2n+1} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Wallis, al tomar límites en n obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} = -1 - \log 2 + 2 + \int_1^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Así pues,

$$\int_1^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx = \log\sqrt{2\pi} - 1.$$

Ahora expresamos

$$\int_1^n \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx - \int_n^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Al sustituir en (4.9) queda

$$\log n! = \frac{1}{2}(2n+1)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} - \int_n^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx.$$

Definimos

$$\mu(n) = -\int_n^{+\infty} \frac{F(x) - \frac{1}{2}}{x}\, dx$$

y aplicamos la función exponencial. Resulta $n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^{\mu(n)}$ y, puesto que $\lim_n \mu(n) = 0$, esto implica el teorema. ∎

En realidad con una observación adicional podemos probar un resultado más fino. Teniendo en cuenta que $0 \le -\phi(x) \le 1/8$ resulta que

$$0 < \mu(n) = -\int_n^{+\infty} \frac{F(x) - \frac{1}{2}}{x}\, dx = -\int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx < \frac{1}{8}\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{8n},$$

luego $\mu(n)$ es de la forma $\mu(n) = \theta/8n$ para un cierto $\theta \in]0,1[$.

De este modo, lo que hemos probado es que para cada número natural n se cumple

$$n! = \sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n e^{\theta/8n},$$

para un cierto número $0 < \theta < 1$.

Refinando más todavía el argumento se puede sustituir el 8 por un 12, y a su vez se puede demostrar que esta versión ya no puede ser mejorada. Nos limitaremos a esbozar la prueba con la que se obtiene el 12.

La clave es tomar otra primitiva de $F(x) - 1/2$. En concreto consideramos $\chi(x) = \phi(x) + 1/12$ (el valor $1/12$ proviene de que la integral de $\phi(x)$ en $[0,1]$ es $-1/12$, y así la integral de $\chi(x)$ es nula). Integrando por partes queda

$$-\int_n^m \frac{F(x) - \frac{1}{2}}{x}\, dx = -\left[\frac{\chi(x)}{x}\right]_n^m - \int_n^m \frac{\chi(x)}{x^2}\, dx.$$

Es claro que

$$0 < -\left[\frac{\chi(x)}{x}\right]_n^m = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{12n},$$

y también es fácil ver que el módulo de la última integral satisface esta misma cota. Basta probar que la integral es positiva, pues entonces

$$0 < -\int_n^m \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx = -\int_n^m \frac{F(x) - \frac{1}{2}}{x}\, dx < \frac{1}{12n}$$

y tomando límites en m queda que $\mu(n) \le 1/12n$, de donde se sigue el resultado.

La columna central de la tabla siguiente contiene los valores exactos de $n!$ para n desde 1 hasta 10. Las columnas adyacentes muestran las aproximaciones obtenidas con la fórmula $\sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n e^{\theta/12n}$ dando a θ los valores 0 y 1. A su lado tenemos el error cometido y el porcentaje de error relativo. Observamos que el error cometido con $\theta = 1$ es menor que 1 hasta $n = 8$.

%	Error	$\theta = 0$	n!	$\theta = 1$	Error	%
7,8	0,1	0,9	1	1,002	0,002	0,23
4	0,1	1,9	2	2,0007	0,0007	0,03
2,7	0,2	5,8	6	6,0006	0,0006	0,01
2,1	0,6	23,5	24	24,001	0,001	0,004
1,7	1,98	118,02	120	120,003	0,003	0,002
1,4	9,92	710,08	720	720,009	0,009	0,001
1,2	59,6	4.980,4	5.040	5.040,04	0,04	0,0008
1,0	417,6	39.902,4	40.320	40.320,2	0,2	0,0005
0,9	3.343,1	359.536,9	362.880	362.881,4	1,4	0,0004
0,8	30.104,4	3.598.695,6	3.628.800	3.628.810,1	10,1	0,0003

Como último ejemplo consideremos $n = 50$.

$$\begin{aligned} 50! &= 30.414.093.201.713.378.043.612.608.166.064. \\ &\quad 768.844.377.641.568.960.512.000.000.000.000. \end{aligned}$$

Las aproximaciones con $\theta = 0$ y $\theta = 1$ son respectivamente

$$30.363.445.939.381.558.207.983.726.752.112.$$
$$093.959.052.599.802.286.296.951.906.806.786,9$$

y

$$30.414.093.877.504.904.385.484.213.362.921.$$
$$925.582.053.054.825.088.205.037.572.487.646,6$$

Los errores relativos son $0,17\%$ para la aproximación por defecto y $0,00022\%$ para la aproximación por exceso.

Capítulo V

El teorema de Cauchy

Si nos fijamos en las pruebas de los resultados principales que hemos obtenido hasta ahora (la existencia de desarrollos de Taylor, el principio de prolongación analítica, etc.) todas se basan directa o indirectamente en el teorema y las fórmulas integrales de Cauchy junto con el teorema 2.29 sobre existencia de primitivas. A su vez, este grupo de teoremas fundamentales se basa en la versión para triángulos del teorema de Cauchy, de donde han heredado la hipótesis de convexidad que a su vez transmiten a otros resultados, como el teorema 4.12 sobre existencia de logaritmos de funciones holomorfas.

Ya hemos visto que estos teoremas no son válidos para funciones definidas sobre abiertos arbitrarios. Concretamente, sabemos que la función $1/z$ no tiene primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, que su integral a lo largo de una circunferencia de centro 0 no es nula o que la identidad $f(z) = z$ no tiene un logaritmo continuo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Todos estos hechos se deben en última instancia a que la integral de la función $1/z$ sobre una circunferencia de centro 0 no es nula. En general, cuando integramos una función holomorfa f sobre un arco que rodea a puntos exteriores a su dominio perdemos el control sobre lo que sucede (más adelante lo investigaremos), pero si exigimos que f esté definida sobre todos los puntos rodeados por el arco entonces todos los resultados que citábamos antes siguen siendo válidos. La hipótesis de convexidad sobre el dominio Ω no es más que una forma fácil de garantizar que ningún arco contenido en Ω rodee puntos de $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

En este capítulo generalizaremos el teorema de Cauchy sustituyendo la hipótesis de convexidad por la condición de que la función sea holomorfa en todos los puntos rodeados por el arco de integración. Si la versión para convexos nos ha permitido deducir profundas consecuencias sobre las funciones holomorfas, la versión general que aquí vamos a probar nos llevará a resultados todavía más potentes.

5.1 El teorema de Cauchy para ciclos

Para enunciar el teorema de Cauchy en su forma más potente debemos introducir un concepto nuevo. La idea básica es que si ϕ y ψ son dos arcos cerrados

derivables a trozos vamos a convenir que la expresión

$$\int_{\phi+\psi} f(\zeta)\,d\zeta$$

represente a la suma de las integrales de f respecto de ambos arcos, es decir, que la suma $\phi+\psi$ no indica ninguna suma puntual de funciones o unión de arcos, sino tan sólo que integrar respecto a $\phi+\psi$ es sumar las integrales respecto a cada arco.

Definición 5.1 Un *ciclo* es una combinación lineal formal con coeficientes enteros de arcos cerrados en $\mathbb{C}$ derivables a trozos, es decir,[1] una expresión de la forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i,$$

donde cada ϕ_i es un arco cerrado y $a_i \in \mathbb{Z}$.

Definimos el *rango* y la *longitud* del ciclo ϕ, respectivamente, como

$$\phi^* = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_i^*, \qquad L(\phi) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| L(\phi_i).$$

Si $f : \phi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua definimos

$$\int_{\phi} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\phi_i} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$, el *índice* de ϕ respecto a z es

$$I(\phi, z) = \sum_{i=1}^{n} a_i I(\phi_i, z).$$

Es evidente que todas las propiedades elementales sobre integrales e índices se generalizan inmediatamente a ciclos. Por ejemplo, para probar el teorema 2.22, es decir, la relación

$$I(\phi, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*,$$

descomponemos el índice del ciclo en combinación lineal de los índices de sus arcos componentes, aplicamos 2.22 y después la definición de integral sobre un ciclo.

La función $I(\phi, z)$ depende continuamente de z, por lo que el índice es constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$. El mismo argumento que para arcos prueba que si ϕ es un ciclo entonces $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ tiene una única componente

[1] Más formalmente, el conjunto de los ciclos es por definición el $\mathbb{Z}$-módulo libre que tiene por base al conjunto de todos los arcos cerrados en $\mathbb{C}$ derivables a trozos.

conexa no acotada C. Dicha componente está contenida en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \phi_i^*$ para cada i, luego el índice de ϕ es nulo para los puntos de C.

Como paso previo al teorema de Cauchy demostramos lo siguiente:

Teorema 5.2 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces la función g dada por*

$$f(\zeta, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & si\ \zeta \neq z \\ f'(z) & si\ \zeta = z \end{cases}$$

es continua en $\Omega \times \Omega$, holomorfa en las dos variables y sus derivadas parciales son continuas en $\Omega \times \Omega$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\zeta_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$. Si $\zeta_0 \neq z_0$ es claro que γ es continua y derivable en un entorno de (ζ_0, z_0), y el cálculo explícito de las derivadas parciales muestra que son continuas en $\Omega \times \Omega$. Supongamos, pues, que $\zeta_0 = z_0$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Vamos a probar que

$$g(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)}\, d\xi, \qquad \zeta,\ z \in D(z_0, r).$$

Sean ζ, $z \in D(z_0, r)$. Si $\zeta \neq z$ las fórmulas de Cauchy nos dan

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

de donde

$$g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)}\, d\xi.$$

Si $\zeta = z$ entonces, también por las fórmulas de Cauchy

$$g(\zeta, z) = f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)}\, d\xi.$$

A partir de esta expresión, la holomorfía de g y la continuidad de sus derivadas en (ζ_0, z_0) se sigue fácilmente del teorema 2.24. ∎

Ahora ya podemos probar:

Teorema 5.3 (Teorema y fórmulas de Cauchy) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y supongamos que para todo punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\phi, z) = 0$. Entonces*

a) $\int_\phi f(\zeta)\, d\zeta = 0$.

b) Para todo número natural n y todo $z \in \Omega \setminus \phi^*$ se cumple

$$I(\phi, z) f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\phi \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Comenzamos probando b) para $n = 0$. Sea $g(\zeta, z)$ la función definida en el teorema anterior. Sea $G(z) = \int_\phi g(\zeta, z)\, d\zeta$. Claramente $G \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $z \in \Omega \setminus \phi^*$ entonces

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_\phi \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\phi \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) I(\phi, z) \right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Basta probar que G es constantemente igual a 0 en Ω.

Sea $V = \{z \in \Omega \mid I(\phi, z) = 0\}$. La continuidad del índice implica que V es abierto y cerrado en $\Omega \setminus \phi^*$, luego es abierto en $\mathbb{C}$. Por la hipótesis sobre el índice se cumple que $\mathbb{C} = \Omega \cup V$. Por (5.1) los puntos $z \in \Omega \cap V$ cumplen

$$G(z) = \int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

con lo que podemos definir

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \displaystyle\int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta & \text{si } z \in V \end{cases}$$

y obtenemos así una función entera. Vamos a aplicarle el teorema de Liouville. Demostraremos que existe $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$, lo que implica que F es constantemente nula y G también.

Puesto que V contiene a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$, para calcular el límite podemos suponer que $z \in V$. Más aún, podemos suponer que $|z| > R$, para un R que cumpla $\phi^* \subset D(0, R)$. Entonces, si M es una cota del módulo de f sobre ϕ^* se cumple

$$|F(z)| = \left| \int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \le L(\phi)\, \frac{M}{|z| - R},$$

y esta expresión tiende a 0 cuando $z \to \infty$.

El caso general de b) se demuestra fácilmente por inducción derivando las integrales. La única precaución que hay que tomar es que dado $z \in \Omega \setminus \phi^*$ existe un $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega \setminus \phi^*$, y en este disco $I(\phi, z)$ es constante, luego no afecta a las derivadas.

Por último fijamos $z \in \Omega \setminus \phi^*$ y definimos $g(\zeta) = (\zeta - z) f(\zeta)$. Entonces $g(z) = 0$ y la fórmula integral para $n = 0$ aplicada a g nos da a):

$$0 = I(\phi, z) g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\phi f(\zeta)\, d\zeta.$$

■

Ejemplo Como una primera aplicación de la versión general del teorema de Cauchy vamos a calcular *la integral de Dirichlet:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

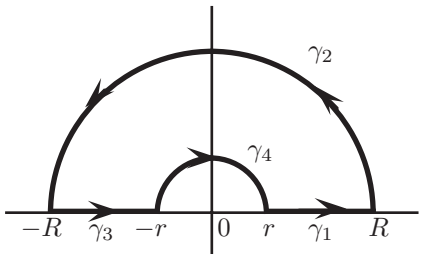
La técnica que vamos a seguir es similar a la que empleamos con las integrales de Fresnel, pero ahora la versión del teorema de Cauchy para conjuntos convexos no sería suficiente.

Como en el caso de las integrales de Fresnel consideramos también la función con el coseno en lugar del seno y juntamos ambas integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt + i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\, dt.$$

La integral que buscamos es la parte imaginaria de esta última integral.

La función $f(z) = e^{iz}/z$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sean $0 < r < R$ y consideremos el arco $\phi = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ definido por la figura siguiente:



Puesto que $\mathbb{C} \setminus \Omega = \{0\}$, para aplicar el teorema de Cauchy basta observar que $I(\phi, 0) = 0$ (porque 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$). Así pues, la integral de f sobre ϕ es nula. Calcularemos cada tramo de la integral por separado. En primer lugar

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\, dt = \int_r^R \frac{\cos t}{t}\, dt + i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt,$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\, dt = -\int_r^R \frac{\cos t}{d}\, dt + i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

Así pues,

$$-\int_{\gamma_2} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta - \int_{\gamma_4} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta + \int_{\gamma_3} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = 2i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt. \tag{5.2}$$

Por otra parte

$$\int_{\gamma_4} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = -\int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = -i \int_0^{\pi} e^{ire^{it}}\, dt.$$

Por la continuidad en 0 de e^{iz}, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$ entonces $|e^{iz} - 1| < \epsilon$, luego para $r < \delta$ se cumple

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta - \left(-i \int_0^\pi dt \right) \right| = \left| -i \int_0^\pi (e^{ire^{it}} - 1)\, dt \right| \leq \int_0^\pi \epsilon\, dt = \pi\epsilon,$$

con lo que existe

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = -i \int_0^\pi dt = -i\pi.$$

Tomando límites en (5.2) resulta

$$2i \int_0^R \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = -\int_{\gamma_2} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta + i\pi. \tag{5.3}$$

(Observar que la función $(\operatorname{sen} t)/t$ es continua, luego integrable en $[0, R]$, así como que γ_2 no depende de r).

Finalmente probaremos que la integral sobre γ_2 tiende a 0 cuando R tiende a $+\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt \right| = \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}}\, dt \right| \leq \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\, dt = \pi\, \frac{1 - e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que si $0 \leq t \leq \pi/2$ entonces $\operatorname{sen} t \geq 2t/\pi$ (Ver la nota al pie en la pág. 41)

Al tomar límites en (5.3) cuando R tiende a $+\infty$ queda que existe

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = i\pi,$$

luego la integral de Dirichlet resulta ser

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

■

5.2 Abiertos simplemente conexos

En la sección anterior hemos sustituido la hipótesis de convexidad sobre el dominio de la función en el teorema de Cauchy por una hipótesis específica sobre el arco de integración. Sin embargo, en muchos contextos teóricos necesitamos garantizar que una función tiene integral nula a lo largo de cualquier arco contenido en su dominio. La convexidad del mismo es una condición suficiente, pero no necesaria. Sucede que los abiertos Ω con la propiedad de que todos los arcos (o incluso ciclos) contenidos en Ω cumplen la hipótesis del teorema de Cauchy admiten una caracterización topológica muy simple:

Definición 5.4 Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ es *simplemente conexo* si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo.

El nombre no es muy afortunado, pues un abierto simplemente conexo no es necesariamente conexo. Para relacionar esta propiedad con el teorema de Cauchy necesitamos el siguiente resultado técnico.

Teorema 5.5 *Sean A y B cerrados disjuntos en $\mathbb{C}^\infty$ de modo que $\infty \notin A$. Entonces existe un ciclo γ tal que*

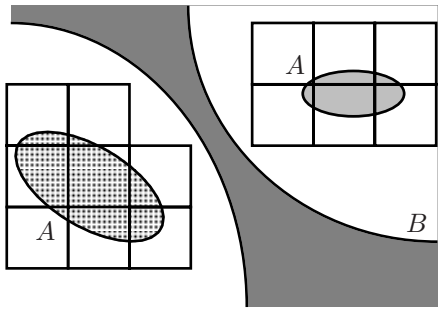
a) $\gamma \cap (A \cup B) = \varnothing$.

b) Para todo $z \in A$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,

c) Para todo $z \in B$, $z \neq \infty$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

Demostración: Sea $d = d(A, B \cap \mathbb{C}) > 0$. Sea $0 < \rho < d\sqrt{2}/2$. Dividamos el plano complejo en cuadrados de lado ρ (de modo que uno de ellos tenga un vértice en 0, por ejemplo).

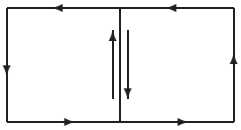
Puesto que A es compacto, es claro que A sólo corta a un número finito de cuadrados. Llamémoslos $C_1, \ldots, C_n$. Por ejemplo, la figura siguiente muestra un caso donde $n = 14$.



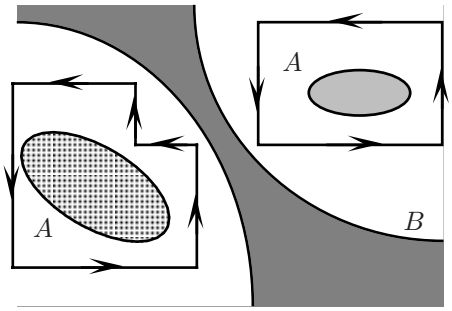
Con más precisión, cada cuadrado C_i es un arco cerrado orientado positivamente (en sentido antihorario), que se puede expresar como unión de cuatro segmentos. Llamaremos $[C_i]$ al conjunto de puntos contenidos en el cuadrado incluyendo a la frontera. Dejamos a cargo del lector las definiciones formales de estos conceptos, pues son similares a las que hemos dado para triángulos. De hecho toda la prueba podría reformularse en términos de triángulos, pero creemos que con cuadrados resulta más fluida.

Tenemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} [C_i]$. El diámetro de cada cuadrado $[C_i]$ es $\sqrt{2}\,\rho < d$ y, como todos los cuadrados cortan a A, es claro que $\bigcup_{i=1}^{n} [C_i] \cap B = \varnothing$ (tal y como muestra la figura anterior).

Consideremos el ciclo $\gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i$. Claramente $\gamma_0^* \cap B = \varnothing$. Además $I(\gamma_0, z) = 0$ para todo $z \in B \cap \mathbb{C}$, pues z está en la componente conexa no acotada de cada $\mathbb{C} \setminus C_i^*$.



Como todos los cuadrados están orientados en sentido positivo, es claro que si dos de ellos son adyacentes (tienen un lado en común) entonces la orientación de dicho lado es distinta en cada cuadrado. Podemos eliminar todos los pares de lados comunes a dos cuadrados hasta obtener un ciclo γ que no contenga lados pertenecientes a cuadrados adyacentes.[2]



Puesto que $\gamma^* \subset \gamma_0^*$ es claro que $\gamma^* \cap B = \varnothing$. Como γ se ha obtenido de γ_0 eliminando pares de arcos opuestos se cumple que las integrales a lo largo de γ valen lo mismo que las integrales a lo largo de γ_0, y en particular $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in B \cap \mathbb{C}$.

También se cumple que $\gamma^* \cap A = \varnothing$, pues si existiera un punto $z_0 \in \gamma^* \cap A$ entonces $z_0 \in C_i$ para algún índice i, y el cuadrado adyacente a C_i por el lado que contiene a z_0 cortaría a A, luego es un C_j, con lo que llegamos a que γ contendría un lado que pertenece a dos de los cuadrados, en contra de la construcción que hemos hecho.

Sólo falta probar que $I(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in A$. Distinguimos dos casos:

1) $z \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i^*$. Entonces $z \in [C_i] \setminus C_i^*$ para algún i y $z \notin [C_j]$ para todo $j \neq i$. Por lo tanto $I(\gamma, z) = I(\gamma_0, z) = I(C_i, z) = 1$.

2) $z \in A \cap \bigcup_{i=1}^{n} C_i^*$. Entonces $z \in C_i^*$ para algún i. Sea z_0 el centro del cuadrado C_i. El segmento $[z_0, z]$ no corta a γ^* y, como es un conexo, z_0 y z están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Aplicando el caso anterior $I(\gamma, z) = I(\gamma, z_0) = 1$. ∎

Ahora ya podemos demostrar:

Teorema 5.6 *Un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo si y sólo si para todo arco cerrado ϕ tal que $\phi^* \subset \Omega$ y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, se cumple $I(\phi, z) = 0$.*

Demostración: Supongamos que Ω es simplemente conexo y sea ϕ un arco cerrado tal que $\phi^* \subset \Omega$. La aplicación $I(\phi, z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ y vale 0 en el

[2]Con rigor γ se obtiene de γ_0 por un proceso recurrente fácil de precisar, pero que no detallamos aquí.

complementario de un disco, luego se puede extender continuamente a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ definiendo $I(\phi, \infty) = 0$. Como $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo y el índice sólo toma valores enteros éste ha de ser nulo en todos los puntos de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$.

Recíprocamente, si Ω no es simplemente conexo entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = A \cup B$, donde A y B son cerrados disjuntos no vacíos. Digamos que $\infty \in B$. Tomemos un ciclo γ según el teorema anterior. Como $\gamma^* \cap (A \cup B) = \varnothing$ se cumple $\gamma^* \subset \Omega$. Sea $z_0 \in A$. Entonces $I(\gamma, z_0) = 1$, luego alguno de los arcos cerrados ϕ que componen a γ ha de cumplir que $I(\phi, z_0) \neq 0$ (y claramente $\phi^* \subset \Omega$), luego Ω no cumple la condición del enunciado. ∎

Para todo cuanto sigue podríamos haber tomado la condición del teorema anterior como definición de abierto simplemente conexo en $\mathbb{C}$, pero, en casos concretos, esta condición que involucra a todos los arcos contenidos en el abierto no es fácil de comprobar. Por otro lado resulta ser más intuitiva que la definición: un abierto es simplemente conexo si y sólo si no contiene arcos que rodeen a puntos de su complementario, es decir, si y sólo si no tiene "agujeros".

Acabamos de ver que un abierto Ω es simplemente conexo si y sólo si cualquier función holomorfa en Ω y cualquier arco contenido en Ω están en las hipótesis del teorema de Cauchy. Ahora vamos a ver que esto equivale a que cualquier función holomorfa en Ω y cualquier arco contenido en Ω satisfagan la tesis de dicho teorema. Más aún, la clase de los abiertos simplemente conexos es la clase de abiertos más amplia donde las funciones holomorfas tienen primitivas y logaritmos, con lo que podemos decir que los abiertos simplemente conexos son los abiertos donde mejor se comportan las funciones holomorfas.

Teorema 5.7 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Ω es simplemente conexo.

b) Para todo arco cerrado ϕ contenido en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple

$$\int_\phi f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

c) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.

d) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anule en ningún punto existe $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{L(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Además, la función L del apartado d) cumple $L'(z) = f'(z)/f(z)$.

Demostración: a) → b) se sigue del teorema de Cauchy juntamente con el teorema anterior.

b) → c) Razonando por separado con cada componente conexa de Ω podemos suponer que Ω es conexo, en cuyo caso es conexo por poligonales.

Fijamos $z_0 \in \Omega$. Si z es cualquier punto de Ω existe una poligonal P_z contenida en Ω y que une z_0 con z. Si Q_z es cualquier otra poligonal en estas condiciones, $P_z \cup (-Q_z)$ es un arco cerrado contenido en Ω, luego

$$0 = \int_{P_z \cup (-Q_z)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{P_z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{Q_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Esto significa que la función dada por

$$F(z) = \int_{P_z} f(\zeta)\, d\zeta$$

no depende de la elección de la poligonal P_z que una z_0 con z.

Si $z_1 \in \Omega$ existe un $r > 0$ tal que $D(z_1, r) \subset \Omega$. Tomamos una poligonal P_{z_1} que una z_0 con z_1 y entonces para todo $z \in D(z_1, r)$ se cumple que $P_{z_1} \cup [z_1, z]$ es una poligonal que une z_0 con z, luego $F(z)$ viene dada por

$$F(z) = \int_{P_{z_1}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_1, z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

El teorema 2.28 nos da inmediatamente que $F' = f$ en $D(z_1, r)$, luego en particular $F'(z_1) = f(z_1)$ y esto para todo $z_1 \in \Omega$.

c) $\to$ d) Como en la implicación anterior podemos suponer que Ω es conexo. La prueba sigue el mismo argumento que ya empleamos en el teorema 4.12.

d) $\to$ a) Sea f un arco cerrado contenido en Ω y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sea $f(z) = z - z_0$. Por el apartado d) existe una función L holomorfa en Ω cuya derivada es $L'(z) = 1/(z - z_0)$. Los teoremas 2.20 y 2.22 nos dan que

$$I(\phi, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = 0,$$

luego 5.6 implica que Ω es simplemente conexo. ∎

Ejercicio: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Probar que Ω es simplemente conexo si y sólo si existe una rama uniforme del logaritmo en Ω.

5.3 Series de Laurent

Es muy frecuente encontrar funciones que son holomorfas en todo el plano complejo excepto en algunos puntos especiales donde no están definidas. El caso más simple es la función $1/z$, que no está definida en 0. En esta sección vamos a estudiar esta clase de puntos excepcionales donde una función no está definida. Un ejemplo mucho más complicado de esta situación lo presenta la función

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}, \tag{5.4}$$

que está definida en todo el plano complejo excepto en los puntos $1/k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y en 0.

Ahora vamos a introducir una herramienta que nos permitirá estudiar una clase particular de puntos singulares. Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ diremos que un punto z_0 es una *singularidad aislada* de la función f si $z_0 \notin \Omega$ y existe un $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$, o sea, si f no está definida en z_0 pero sí en todos los puntos a su alrededor.

Así, por ejemplo, el 0 es una singularidad aislada de la función $1/z$ y los puntos $1/k\pi$ son singularidades aisladas de la función f dada por (5.4). En cambio el 0 no es una singularidad aislada de f, pues cualquier entorno de 0 contiene puntos distintos de 0 donde f no está definida.

Como ilustración de lo que nos proponemos obtener podemos pensar en la función $e^{1/z}$, que presenta una singularidad aislada en 0. Sabemos que para todo número complejo z se cumple

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n,$$

luego para todo $z \neq 0$ tenemos

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1}{z^n}.$$

Esto es un desarrollo en serie de potencias de $e^{1/z}$ alrededor de 0, pero con exponentes negativos en lugar de positivos. Vamos a probar que toda función holomorfa admite un desarrollo de este tipo en un entorno de cualquiera de sus singularidades aisladas (combinando potencias positivas y negativas).

Las propiedades de las series de potencias con exponentes negativos se deducen fácilmente de las propiedades de las series de potencias usuales mediante la misma técnica con la que hemos obtenido el desarrollo de $e^{1/z}$.

Teorema 5.8 *Dada una serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n},$$

existe un $r \geq 0$ de modo que la serie converge absoluta y casi uniformemente en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ a una función holomorfa y diverge en $D(z_0, r)$ (admitiendo la posibilidad $r = +\infty$, en cuyo caso la serie diverge en todo $\mathbb{C}$).

Demostración: Consideremos la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Por el teorema 3.16 existe un $R \geq 0$ tal que g converge absoluta y casi uniformemente a una función holomorfa en el disco $D(0, R)$ y diverge en el complementario del disco cerrado. Sea $r = 1/R$ (entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0 = +\infty$).

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$. La función $h : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $h(z) = 1/(z - z_0)$ es biyectiva y holomorfa (en particular continua). Además biyecta el abierto A con el disco $D(0, R)$. La función $h \circ g$ es, pues, una función holomorfa en A y viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}.$$

Por lo tanto la serie f converge en A. Análogamente se ve que si f convergiera en un punto z tal que $|z - z_0| < r$ entonces g convergería en un punto $z' = h(z)$ tal que $|z'| > R$.

Finalmente, si K es un compacto contenido en A, entonces $h[K]$ es un compacto contenido en $D(0, R)$ y g converge uniformemente en $h[K]$. De aquí se sigue sin dificultad que f converge uniformemente en K. ∎

Definición 5.9 Sean r y R números reales tales que $0 \leq r < R \leq +\infty$. Llamaremos *anillo* de radios r, R y centro $z_0 \in \mathbb{C}$ al abierto

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

Una *serie de Laurent* centrada en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde los coeficientes a_n son números complejos para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En realidad, para tener completamente definida una serie de Laurent deberíamos precisar el orden en que hay que sumar sus términos. Por ejemplo, podríamos convenir que se trata de la serie asociada a la sucesión

$$a_0,\ a_1,\ a_{-1},\ a_2,\ a_{-2},\ \ldots$$

pero en realidad esto es irrelevante, pues sólo nos van a interesar los puntos donde una serie de Laurent converge absolutamente, y cuando la convergencia es absoluta no importa el orden de los sumandos. Así pues, cuando digamos que una serie de Laurent *converge* en un punto querremos decir que converge absolutamente con cualquier ordenación de sus términos.

Consideremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Las llamaremos *parte regular* y *parte singular,* respectivamente, de la serie de Laurent. La segunda la representaremos también por

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n.$$

Por el teorema 3.5 (tomando $I_n = \varnothing$ para $n \geq 2$) para que una serie de Laurent converja (absolutamente) en un punto es necesario y suficiente que lo hagan sus partes regular y singular. Por el teorema 3.16 la parte regular converge absoluta y casi uniformemente en un disco $|z - z_0| < R$ y por el teorema anterior la parte singular converge absoluta y casi uniformemente en un conjunto de la forma $|z - z_0| > r$. Si $R < r$ entonces la serie de Laurent no converge en ningún punto, mientras que si $r < R$ converge absoluta y casi uniformemente en el anillo $A(z_0, r, R)$, al que llamaremos *anillo de convergencia* de la serie. También puede haber convergencia en todos o en parte de los puntos de la frontera del anillo. Así mismo, si $r = R$ la serie podría converger en los puntos de la circunferencia $|z - z_0| = r$, pero estos casos no nos van a interesar. Lo importante es que una serie de Laurent determina su anillo de convergencia como el interior del conjunto de puntos del plano complejo donde converge absolutamente. Un caso especial se da cuando todos los coeficientes de la parte singular son nulos. Entonces la serie de Laurent es una serie de potencias, luego $r = 0$ y la serie converge absolutamente en el disco $D(z_0, R)$. En tal caso consideraremos que el anillo de convergencia es $A(z_0, 0, R)$.

A efectos prácticos, para calcular una serie de Laurent en un punto z de su anillo de convergencia podemos agrupar sus términos de cualquier forma, por ejemplo,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Como la convergencia de las partes regular y singular es casi uniforme en el anillo $A(z_0, r, R)$, la igualdad anterior justifica que una serie de Laurent puede ser derivada e integrada (sobre un arco) término a término.

El teorema siguiente prueba que toda función holomorfa en un anillo puede desarrollarse en serie de Laurent. La técnica es muy similar a la empleada en la prueba de 3.19, pero ahora es esencial el que podamos aplicar el teorema de Cauchy a integrales sobre ciclos.

Teorema 5.10 *Sea $0 \leq r < R \leq +\infty$ y sea f una función holomorfa en el anillo $A(z_0, r, R)$. Entonces para todo $z \in A(z_0, r, R)$ se cumple*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

siendo ρ cualquier número $r < \rho < R$.

Demostración: Notemos en primer lugar que las integrales que definen los coeficientes a_n no dependen de la elección de ρ.

En efecto, si consideramos dos circunferencias cualesquiera C_1 y C_2 con radios entre r y R y tomamos $z \in \mathbb{C} \setminus A(z_0, r, R)$, entonces $I(C_i, z) = 1$ si $|z| \leq r$ e $I(C_i, z) = 0$ si $|z| \geq R$, luego en cualquier caso se cumple $I(C_1 - C_2, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus A(z_0, r, R)$.

El teorema de Cauchy nos da entonces que

$$\int_{C_1 - C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = 0,$$

luego

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Ahora fijemos un $z \in A(z_0, r, R)$ y tomemos $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Sea C_j la circunferencia de centro z_0 y radio r_j $(j = 1, 2)$. Según acabamos de razonar, se cumple que $I(C_2 - C_1, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C} \setminus A(z_0, r, R)$ y, por otra parte

$$I(C_2 - C_1, z) = I(C_2, z) - I(C_1, z) = 1 - 0 = 1,$$

luego aplicando de nuevo el teorema de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2 - C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n d\zeta.$$

Para intercambiar las series con las integrales observamos que convergen uniformemente sobre las circunferencias, pues por ejemplo la primera cumple

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r_2}\right)^n < +\infty,$$

y podemos aplicar el teorema de mayoración de Weierstrass. Igualmente se razona con la segunda. Por lo tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_1} f(\zeta)(z-z_0)^n \, d\zeta \right) (z-z_0)^{-(n+1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1}(z-z_0)^{-(n+1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

■

Al igual que ocurre con los desarrollos en series de potencias, los desarrollos en series de Laurent son únicos, tal y como prueba el teorema siguiente:

Teorema 5.11 *Si una serie* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge en un anillo* $A(z_0, r, R)$ *a una función* f*, entonces para todo entero* n *se cumple*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

siendo ρ *cualquier número* $r < \rho < R$*.*

DEMOSTRACIÓN: Para todo entero m, la función

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-m+1}$$

es holomorfa en el anillo $A(z_0, r, R)$ y la serie converge uniformemente en la circunferencia $|z-z_0| = \rho$ (sus partes regular y singular convergen uniformemente). Por lo tanto podemos integrar término a término:

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{|\zeta-z_0|=\rho} (z-z_0)^{n-m+1} d\zeta.$$

Pero las funciones $(z-z_0)^{n-m-1}$ tienen todas primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ excepto cuando $n = m$, luego por el teorema 2.20 resulta que sus integrales son nulas. Nos queda

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = a_m \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{1}{\zeta - z_0} \, d\zeta = a_m \, 2\pi i.$$

■

Definición 5.12 Llamaremos *entorno reducido* de radio r de un número complejo z_0 al conjunto $D'(z_0, r) = A(z_0, 0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

En estos términos, un punto z_0 es una singularidad aislada de una función f si f está definida (y es holomorfa) en un entorno reducido de z_0 pero no en z_0.

Hemos probado que si z_0 es una singularidad aislada de una función f entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

convergente en todo entorno reducido de z_0 en el que f esté definida. A esta serie la llamaremos *serie de Laurent* de f en z_0. Sus coeficientes están unívocamente determinados por f. En la sección siguiente estudiamos las consecuencias de estos desarrollos.

5.4 Clasificación de singularidades aisladas

En el capítulo anterior usamos el desarrollo en serie de Taylor de las funciones holomorfas para introducir el concepto de orden de un cero. Saber que una función holomorfa f tiene un cero de orden n en un punto z_0 es una información mucho más profunda que saber meramente que $f(z_0) = 0$. Por ejemplo, sabiendo que las funciones $\operatorname{sen} z$ y z tienen ambas ceros de orden 1 en $z_0 = 0$ podemos asegurar sin más comprobaciones que la función $(\operatorname{sen} z)/z$ se extiende a una función entera, mientras que no ocurre lo mismo con la función $(\operatorname{sen} z)/z^2$. Ahora usaremos las series de Laurent para introducir el concepto de orden de una singularidad aislada, que nos dará una valiosa información sobre el comportamiento de una función holomorfa f en torno a una singularidad aislada mucho más profunda que el mero hecho de que saber que f no está definida en tal punto.

Definición 5.13 Sea z_0 una singularidad aislada de una función holomorfa f y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

su desarrollo en serie de Laurent alrededor de z_0. Llamaremos *orden* de z_0 al mínimo entero n tal que $a_n \neq 0$, entendiendo que el orden es $-\infty$ si hay coeficientes no nulos arbitrariamente pequeños y que el orden es $+\infty$ si todos los coeficientes son nulos.[3] Lo representaremos $o(f, z_0)$.

Observemos que si $o(f, z_0) \geq 0$, entonces la serie de Laurent de f en z_0 es en realidad una serie de potencias, la cual determina una función holomorfa en un entorno de z_0 (incluido éste). Por consiguiente, si extendemos f a z_0 mediante $f(z_0) = a_0$ la extensión es holomorfa en z_0 y su serie de Taylor en z_0 coincide con la serie de Laurent de f en el mismo punto. En particular el orden de la extensión en el sentido de 4.13 coincide con el orden de f en el sentido de 5.13. Notemos que la extensión es única, pues para que sea holomorfa es necesario que $f(z_0)$ sea el límite de f en z_0.

[3]Diremos que ∞ es una singularidad aislada de una función f si ésta es holomorfa en un anillo $A(0, r, +\infty)$. En tal caso el orden de ∞ es por definición el orden en 0 de $f(1/z)$.

Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $o(f, z_0) \geq 0$ se dice que z_0 es una *singularidad evitable.*

En la práctica, si una función f tiene una singularidad aislada en un punto z_0 y probamos que es evitable, a partir de ese momento supondremos tácitamente que la función está extendida a z_0 con el valor que la hace holomorfa, y por lo tanto ya no contaremos a z_0 entre sus singularidades (se dice entonces que *se evita* la singularidad extendiendo la función).

Pensemos por ejemplo en la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. En principio tiene una singularidad aislada en 0, pero a partir de la serie de Taylor del seno se ve inmediatamente que es evitable, por lo que siempre consideraremos a f como una función entera. Concretamente $f(0) = 1$.

Recíprocamente, si z_0 es una singularidad aislada de una función f y es "evitable" en el sentido de que f se puede extender a una función holomorfa en z_0, entonces es evitable en el sentido que le hemos dado al término, es decir, $o(f, z_0) \geq 0$, pues la serie de Taylor de la extensión ha de ser la serie de Laurent de f, por la unicidad del desarrollo, luego ésta tiene nulos sus coeficientes de índice negativo.

El teorema siguiente da varios criterios útiles para reconocer a una singularidad evitable:

Teorema 5.14 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea z_0 una singularidad aislada de f. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*[4]

a) z_0 es una singularidad evitable de f.

b) f se puede extender a una función holomorfa en $\Omega \cup \{z_0\}$.

c) Existe $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

d) f está acotada en un entorno reducido de z_0.

e) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Demostración: Ya hemos visto que a) equivale a b). La única implicación no trivial es e) → a). Consideremos la serie de Laurent de f en z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tenemos que existe

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} = 0.$$

[4]Para $z_0 = \infty$ la condición e) debe enunciarse con $f(z)/z$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+1}$ define una función holomorfa en un entorno de z_0, y su límite en z_0 es 0. En consecuencia también existe

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^{n+1} = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n+1} = 0.$$

La última serie converge en un entorno reducido de z_0, luego el teorema 5.8 garantiza que de hecho converge en $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ y en consecuencia la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^{n-1}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, es decir, converge en todo $\mathbb{C}$. Mediante un cambio de variable en el límite anterior llegamos a que

$$\lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, z^{n-1} = 0,$$

luego la función entera definida por la serie está acotada. Por el teorema de Liouville ha de ser constante. Concretamente es nula, pues tiene límite 0. Esto prueba que todos los coeficientes a_n para $n<0$ de la serie de Laurent de f en z_0 son nulos, luego $o(f,z_0)\geq 0$ y la singularidad es evitable. ∎

Definición 5.15 Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $o(f,z_0)=-n<0$, diremos que f tiene un *polo* de orden[5] n en z_0.

El comportamiento de una función holomorfa alrededor de un polo viene dado por el teorema siguiente, que a su vez incluye al teorema 4.14:

Teorema 5.16 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ que contenga a un entorno reducido de un punto z_0 y sea $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $o(f,z_0)=n\in\mathbb{Z}$. Entonces existe una única función $g\in\mathcal{H}(\Omega\cup\{z_0\})$ tal que*

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z), \quad \textit{para todo } z\in\Omega, \qquad g(z_0)\neq 0.$$

Recíprocamente, si una función f admite una descomposición de esta forma entonces $o(f,z_0)=n$.

Demostración: Si $z_0\in\Omega$ tanto la condición $o(f,z_0)=n$ como la factorización implican $n\geq 0$ y el teorema se reduce al 4.14. Supongamos ahora que $z_0\notin\Omega$.

Si $o(f,z_0)=n$, por definición de orden el desarrollo de Laurent de f en z_0 es de la forma

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z-z_0)^k,$$

[5]Es costumbre hablar de ceros y polos *simples, dobles, triples,* etc. para referirse a ceros y polos de orden 1, 2, 3, ...

con $a_n \neq 0$. Definimos $g(z) = (z - z_0)^{-k} f(z)$, que es claramente holomorfa en Ω y en un entorno reducido de z_0 coincide con la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^k,$$

que es holomorfa en z_0. Así pues, definiendo $g(z_0) = a_n \neq 0$ tenemos que g coincide con la serie en un entorno de z_0, luego g es holomorfa en $\Omega \cup \{z_0\}$. Por definición de g tenemos la factorización buscada.

Recíprocamente, si f admite una factorización en las condiciones del enunciado, el desarrollo de Taylor de g en z_0 será de la forma

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

con $a_0 \neq 0$, luego en un entorno reducido de z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^{n+k}.$$

Por la unicidad, éste es el desarrollo de f en serie de Laurent alrededor de z_0, luego $o(f, z_0) = n$. ∎

De aquí se desprenden varias consecuencias de interés. Por lo pronto, si z_0 es un polo de orden n de una función f, entonces $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$, para cierta función g holomorfa en z_0, luego $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Por consiguiente $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y P es el conjunto de sus polos, f puede extenderse a una función continua $f : \Omega \cup P \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ asignando a los polos el valor ∞.

Del mismo modo que evitamos las singularidades evitables extendiendo adecuadamente la función, en cuanto probemos que una singularidad z_0 de una función f es un polo consideraremos f extendida a z_0 mediante $f(z_0) = \infty$.

Pero el teorema anterior nos da más información sobre los polos: Si z_0 es un polo de una función f sabemos que $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$, donde g es holomorfa en z_0, luego $(z - z_0)^n f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0. Lo mismo vale si cambiamos n por cualquier natural mayor, pero no por otro menor.

Con otras palabras, si z_0 es un polo de una función f entonces la singularidad no puede evitarse extendiendo f a z_0, sino que primero es necesario multiplicarla por un factor $(z - z_0)^n$, y el mínimo exponente n necesario es precisamente el orden del polo. Cuando convertimos a f en una función holomorfa en z_0 mediante este procedimiento no se dice que evitamos el polo, sino que lo *cancelamos.*

El teorema siguiente recoge estos hechos. La prueba es inmediata.

Teorema 5.17 *Sea z_0 un polo de una función holomorfa f. Entonces*[6]

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

y el orden de z_0 es el mínimo número natural n tal que se cumple cualquiera de las tres condiciones siguientes:

a) Existe $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}$.

b) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{n+1} f(z) = 0$.

c) La función $(z-z_0)^n f(z)$ está acotada en un entorno reducido de z_0.

El teorema siguiente generaliza a 4.15 y prueba entre otras cosas que para cancelar un polo de orden n no es necesario multiplicar por $(z-z_0)^n$, sino que sirve igualmente cualquier función que tenga un cero de orden n en z_0. La prueba es idéntica a la del teorema 4.15.

Teorema 5.18 *Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto z_0 tales que $o(f,z_0)$ y $o(g,z_0)$ sean finitos (positivos o negativos). Entonces*[7]

$$o(fg,z_0) = o(f,z_0) + o(g,z_0), \qquad o(f/g,z_0) = o(f,z_0) - o(g,z_0).$$

De aquí se sigue también que si z_0 es una singularidad aislada que cumple cualquiera de las condiciones a), b) o c) del teorema 5.17 entonces z_0 es evitable (si sirve $n = 0$ o bien es un polo (si ha de ser necesariamente $n > 0$). Dicho de otro modo, de entre las singularidades aisladas no evitables, los polos son exactamente las singularidades "cancelables".

Definición 5.19 Una singularidad aislada z_0 de una función f es *esencial* si $o(f,z_0) = -\infty$.

Con esto terminan las posibilidades para las singularidades aisladas: cualquier singularidad aislada ha de ser evitable, un polo o una singularidad esencial. El comportamiento de éstas últimas viene determinado por el teorema siguiente:

Teorema 5.20 (Teorema de Casorati-Weierstrass) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y z_0 una singularidad esencial de f. Entonces*[8] *para todo $r > 0$ tal que $D'(z_0,r) \subset \Omega$ se cumple que $\overline{f\big[D'(z_0,r)\big]} = \mathbb{C}$.*

Demostración: Supongamos que $\overline{f\big[D'(z_0,r)\big]} \neq \mathbb{C}$. Entonces existen un $a \in \mathbb{C}$ y un $R > 0$ tales que $D(a,R) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f\big[D'(z_0,r)\big]}$. Para cada $z \in D'(z_0,r)$ se cumple que $f(z) \neq a$, luego la función $g(z) = 1/(f(z)-a)$ es holomorfa en

[6] El teorema vale para $z_0 = \infty$, cambiando siempre $z - z_0$ por $1/z$.
[7] Vale igualmente si $z_0 = \infty$.
[8] Vale para $z_0 = \infty$ con las alteraciones obvias.

$D'(z_0, r)$. Como $|g(z)| \leq 1/R$, el teorema 5.14 nos da que z_0 es una singularidad evitable de g, luego podemos considerar que g es holomorfa en $D(z_0, r)$. Como g no se anula en $D'(z_0, r)$ es claro que $0 \leq o(g, z_0) < +\infty$, luego $1/g$ tiene también orden finito en z_0. Ahora bien, $f(z) = a + 1/g(z)$ y es fácil ver que si a una función de orden finito en un punto se le suma una constante, el resultado sigue siendo de orden finito (solo modificamos un coeficiente de su serie de Laurent). Por consiguiente z_0 no es una singularidad esencial de f. ∎

He aquí un enunciado equivalente:

Teorema 5.21 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y z_0 una singularidad esencial de f. Entonces*[9] *para todo $c \in C$ existe una sucesión $\{z_n\} \subset \Omega$ tal que*

$$\lim_n z_n = z_0 \qquad y \qquad \lim_n f(z_n) = c.$$

En particular no existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$ (en $\mathbb{C}^\infty$).

Demostración: Por el teorema anterior podemos tomar $z_n \in \Omega$ tal que $|z_n - z_0| < 1/n$ y $|f(z_n) - c| < 1/n$. ∎

Los casos considerados en los teoremas anteriores son mutuamente excluyentes y recogen todas las posibilidades, por lo que en realidad hemos demostrado las siguientes caracterizaciones:

Teorema 5.22 (Teorema de clasificación de singularidades) *Sea z_0 una singularidad aislada de una función holomorfa f. Entonces*[10]

a) z_0 es evitable si y sólo si existe $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

b) z_0 es un polo si y sólo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

c) z_0 es una singularidad esencial si y sólo si no existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$ en $\mathbb{C}^\infty$.

Observar que ∞ es una singularidad aislada de toda función entera. El teorema de Liouville afirma que es evitable tan sólo para las funciones constantes.

Teorema 5.23 *Una función entera tiene un polo en ∞ si y sólo si es un polinomio no constante.*

Demostración: Una función entera es de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, luego $f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Por lo tanto, ∞ es un polo de f si y sólo si $a_n = 0$ para todo n suficientemente grande, o sea, si f es un polinomio. ∎

Recíprocamente, las funciones enteras que no son polinomios tienen necesariamente una singularidad esencial en ∞. Como aplicación de este hecho tenemos el teorema siguiente:

[9] Vale para $z_0 = \infty$.
[10] Vale para $z_0 = \infty$.

Teorema 5.24 (Teorema de Picard) *Si f es una función entera no constante entonces $f[\mathbb{C}]$ es denso en $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es un polinomio el teorema fundamental del álgebra implica que $f[\mathbb{C}] = \mathbb{C}$. En otro caso f tiene una singularidad esencial en ∞, y podemos aplicar el teorema de Casorati-Weierstrass. ∎

Definición 5.25 Una función f es *meromorfa* en un abierto Ω de $\mathbb{C}^\infty$ si para todo $z \in \Omega$ se cumple que f es holomorfa en z o bien f tiene un polo en z.

Llamaremos $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de las funciones meromorfas en Ω. Una función es *meromorfa* si es meromorfa en $\mathbb{C}$.

En otras palabras, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es meromorfa en Ω si para todo $z \in \Omega$ se cumple que f es holomorfa en un entorno reducido de z y $o(f, z) > -\infty$.

A partir de la misma definición de orden de una singularidad se comprueba que

$$o(\alpha f, z) = o(f, z), \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad o(f + g, z) \geq \text{mín}\{o(f, z), o(g, z)\}.$$

De aquí se sigue que $\mathcal{M}(\Omega)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente. Por el teorema 5.18 el producto de funciones meromorfas es también una función meromorfa, luego $\mathcal{M}(\Omega)$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 5.26 *Una función $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tiene inversa si y sólo si $o(f, z) \neq +\infty$ para todo $z \in \Omega$. Esto equivale a que f no sea idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω. En particular, si Ω es conexo entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $o(f, z) = +\infty$, entonces la serie de Laurent en z es nula, luego f es idénticamente nula en un entorno de z. Por el principio de prolongación analítica f es nula en la componente conexa de z en Ω. Recíprocamente, si f se anula en una componente conexa, entonces tiene orden infinito en todos los puntos de dicha componente.

Por otra parte, si se da este caso f no puede tener inversa. Basta tomar la función g que vale 1 en la componente conexa donde f se anula y 0 en las restantes. Claramente $fg = 0$, luego si f tuviera inversa debería ser $g = 0$, lo cual no es el caso.

Si f no tiene índice infinito en ningún punto, entonces el teorema 5.18 implica que $1/f \in \mathcal{M}(\Omega)$. ∎

Notemos que si una función meromorfa inversible tiene un polo de orden n en un punto entonces su inversa tiene un cero de orden n y viceversa.

La palabra "meromorfa" significa "de forma racional", porque las funciones meromorfas tienen un comportamiento similar al de las funciones racionales, es decir, al de los cocientes de polinomios (en el mismo sentido en que las funciones holomorfas se asemejan a los polinomios). Ciertamente las funciones racionales son meromorfas. De hecho son meromorfas en $\mathbb{C}^\infty$ y, más aún, tenemos el teorema siguiente:

Teorema 5.27 *Las funciones meromorfas en $\mathbb{C}^\infty$ son exactamente las funciones racionales.*

DEMOSTRACIÓN: Toda función racional es obviamente meromorfa en $\mathbb{C}^\infty$ y si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ entonces el conjunto de sus polos no tiene acumulación en $\mathbb{C}^\infty$, luego por la compacidad ha de ser finito. Podemos construir un polinomio $q(z)$ cuyos ceros sean los polos de f (distintos de ∞) y con el mismo orden. Entonces la función $p(z) = q(z)f(z)$ es entera (todas sus singularidades son evitables) y cumple que existe $\lim_{z\to\infty} q(z)f(z) \in \mathbb{C}^\infty$, pues existe el límite de ambos factores). Esto significa que $p(z)$ tiene un polo o una singularidad evitable en ∞, con lo que según el teorema 5.23 se trata de un polinomio y $f(z) = p(z)/q(z)$ es racional. ∎

Así pues, toda función meromorfa que no sea una función racional tiene una singularidad esencial en el infinito (si el conjunto de sus polos es finito) o bien ∞ es un punto de acumulación de polos (y en tal caso no es una singularidad aislada).

Del mismo modo que las funciones racionales son cocientes de polinomios, las funciones meromorfas son cocientes de funciones holomorfas. Para probarlo basta imitar el argumento del teorema anterior usando la función que proporciona 4.21 en lugar del polinomio q.

Teorema 5.28 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}^\infty$ tal que $\Omega \neq \mathbb{C}^\infty$. Entonces toda función meromorfa en Ω es un cociente de dos funciones holomorfas en Ω.*

Notar que la hipótesis $\Omega \neq \mathbb{C}^\infty$ es necesaria en el teorema anterior, pues las funciones meromorfas en $\mathbb{C}^\infty$ son las funciones racionales, mientras que las únicas funciones holomorfas en $\mathbb{C}^\infty$ son las constantes. A su vez esto prueba que la hipótesis también es necesaria en 4.21.

5.5 Funciones periódicas

Vamos a aplicar los desarrollos en series de Laurent para estudiar las funciones meromorfas periódicas.

Definición 5.29 Una función meromorfa f es *periódica* si existe un número complejo $\omega \neq 0$ tal que $f(z + \omega) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En tal caso se dice que ω es un *periodo* de f.

Es inmediato que si ω es un periodo de una función f, todos los números $k\omega$ con $k \in \mathbb{Z}$ también son periodos. La función e^z es periódica de periodo $2\pi i$, las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen periodo 2π, al igual que las derivadas de ellas algebraicamente, tales como $\tan z$ y $\cot z$.

Es claro que si f es una función meromorfa de periodo ω, entonces la función

$$g(z) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\, z\right)$$

es meromorfa de periodo 2π. Por ello no perdemos generalidad si nos limitamos a estudiar las funciones de periodo 2π. Así, por ejemplo, en lugar de trabajar con e^z trabajaremos con e^{iz}.

Sea, pues, f una función meromorfa de periodo 2π. Definimos la función $f^* : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante

$$f^*(z) = f\left(\frac{1}{i}\operatorname{Log} z\right).$$

Esto ha de entenderse como sigue: dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tomamos un logaritmo cualquiera w y calculamos $f^*(z) = f(w/i)$. El resultado no depende de la elección de w, pues si w_1 y w_2 son dos logaritmos de z, entonces $w_1 = w_2 + 2k\pi i$, para un cierto $k \in \mathbb{Z}$, luego $w_1/i = w_2/i + 2k\pi$ y $f(w_1/i) = f(w_2/i)$.

La función f^* así definida es meromorfa. En efecto, dado $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, existe un disco $D = D(z_0, r)$ sobre el cual hay definida una rama uniforme (holomorfa) del logaritmo L. Esta función es un homeomorfismo entre D y un entorno de $L(z_0)$, luego la función L/i es un homeomorfismo entre z_0 y un entorno V de $\zeta_0 = L(z_0)/i$. Puesto que f sólo tiene singularidades aisladas, reduciendo r podemos exigir que V no contenga polos de f salvo a lo sumo ζ_0.

Entonces para todo $z \in D \setminus \{z_0\}$ tenemos $f^*(z) = f(L(z)/i)$, luego f^* es holomorfa en un entorno reducido de z_0. Si ζ_0 no es un polo de f lo dicho vale también para z_0 y así f^* es holomorfa en z_0. Si por el contrario f tiene un polo en ζ_0 entonces tenemos que z_0 es una singularidad aislada de f^* y claramente

$$\lim_{z\to z_0} f^*(z) = \left(\lim_{\zeta\to\zeta_0} f(\zeta)\right) = \infty,$$

luego z_0 es un polo de f^*. En resumen, f^* es meromorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y es holomorfa si f es entera.

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $e^{iz} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y un logaritmo es iz, luego podemos calcular

$$f^*(e^{iz}) = f(iz/i) = f(z).$$

En total hemos probado:

Teorema 5.30 *Para cada función meromorfa f de periodo 2π existe una función f^* meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f(z) = f^*(e^{iz})$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Si f es entera entonces f^* es holomorfa.*

Una consecuencia no trivial de este resultado es la siguiente:

Teorema 5.31 *Toda función meromorfa periódica es el cociente de dos funciones enteras periódicas.*

Demostración: Dada una función meromorfa periódica f (cuyo periodo podemos suponer que es 2π), podemos representarla como $f^*(e^{iz})$, donde f^* es una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por el teorema 5.28 podemos expresar

$f^* = u/v$, donde u y v son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por consiguiente $f(z) = u(e^{iz})/v(e^{iz})$ y tanto el numerador como el denominador son funciones enteras periódicas. ∎

El teorema 5.30 puede precisarse más: La aplicación $\mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dada por $f^*(z) \mapsto f^*(e^{iz})$ es claramente un homomorfismo de álgebras. Por 5.30 su imagen está formada por las funciones meromorfas de periodo 2π, y es inmediato comprobar que su núcleo es trivial: si $f^*(e^{iz})$ es idénticamente nula entonces f^* también ha de serlo. Esto significa que la correspondencia $f^* \leftrightarrow f$ es biyectiva.

Consideremos ahora una función entera f de periodo 2π. Según hemos visto, será de la forma $f(z) = f^*(e^{iz})$, donde $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. La función f^* admite un desarrollo en serie de Laurent en 0 convergente en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, digamos

$$f^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \tag{5.5}$$

Por consiguiente

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz}, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{5.6}$$

Veamos que la convergencia es uniforme en cualquier banda horizontal (lo cual es más que casi uniforme). Si $z = x+iy$, entonces $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, luego la función e^{iz} transforma una banda $\alpha \le \operatorname{Im} z \le \beta$ en la corona circular $e^{-\beta} \le |z| \le e^{-\alpha}$. La serie de Laurent (5.5) converge uniformemente en dicha corona compacta, de donde se sigue inmediatamente la convergencia uniforme de (5.6) en la banda.

Sustituimos en (5.6) la identidad $e^{inz} = \cos nz + i \operatorname{sen} nz$ y agrupamos el término correspondiente a n con el correspondiente a $-n$ (aquí usamos que la serie converge absolutamente). El resultado es

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n \cos nz + i c_n \operatorname{sen} nz) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big((c_n + c_{-n}) \cos nz + i(c_n - c_{-n}) \operatorname{sen} nz\big). \end{aligned}$$

Si llamamos $a_0 = 2c_0$ y, para $n \ge 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ resulta

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \operatorname{sen} nz).$$

Las series de esta forma se llaman *series de Fourier*. Acabamos de probar que toda función entera de periodo 2π admite un desarrollo en serie de Fourier que converge uniformemente en cada banda horizontal. Seguidamente veremos

cómo dependen los coeficientes a_n y b_n de la función f. Para ello partimos del teorema 5.10, según el cual

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=1} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{(n+1)it}}\,ie^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{e^{-int}+e^{int}}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,\\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt. \end{aligned}$$

Gracias al convenio $a_0 = 2c_0$ la primera fórmula vale también para $n = 0$. Resumimos en un teorema lo que hemos obtenido. Añadiremos únicamente que el desarrollo en serie de Fourier es único, pues dos desarrollos distintos darían lugar a dos desarrollos de f^* en serie de Laurent.

Teorema 5.32 *Toda función entera de periodo 2π admite un único desarrollo en serie de Fourier*

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz + b_n \operatorname{sen} nz),$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt.$$

La serie converge absoluta y uniformemente en cada banda horizontal.

Normalmente se entiende por desarrollo en serie de Fourier de una función periódica al dado por el teorema anterior, pero en variable compleja es frecuente dar el mismo nombre al desarrollo (5.6). Está claro que obtener los coeficientes c_n de este desarrollo equivale a obtener los coeficientes a_n y b_n del otro, por lo que en la práctica podemos trabajar con cualquiera de los dos.

Ejemplo Consideremos la función

$$F_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2(z+n)^2}, \qquad a > 0.$$

Comprobemos que la serie converge absoluta y casi uniformemente en $\mathbb{C}$, con lo que la suma será una función entera. En primer lugar descomponemos

$$F_a(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi a^2(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi a^2(z+n)^2}. \tag{5.7}$$

Basta probar que las dos series convergen absoluta y uniformemente en cada compacto K. Para cada $z = x + iy \in K$ se cumple

$$|e^{-\pi a^2(z\pm n)^2}| = e^{-\pi a^2 \operatorname{Re}(z\pm n)^2} = e^{-\pi a^2((x\pm n)^2 - y^2)}.$$

Por compacidad la función $e^{\pi a^2 y^2}$ está acotada en K. Sea C una cota. Entonces

$$|e^{-\pi a^2(z\pm n)^2}| \leq Ce^{-\pi a^2(x\pm n)^2} = Ce^{-\pi a^2(n\pm x)^2}.$$

La compacidad implica también que existe un natural r tal que $|\operatorname{Re} z| \leq r$ para todo $z \in K$. Entonces, si $n \geq r$ se cumple $-r \leq \pm x$, luego $0 \leq n-r \leq n\pm x$, con lo que $n - r \leq (n-r)^2 \leq (n \pm x)^2$. En consecuencia

$$|e^{-\pi a^2(z\pm n)^2}| \leq Ce^{-\pi a^2(n-r)} = Ce^{\pi a^2 r}e^{-\pi a^2 n}.$$

La serie determinada por $e^{-\pi a^2 n}$ es geométrica de razón $e^{-\pi a^2} < 1$, luego por el criterio de Weierstrass las dos series de (5.7) convergen absoluta y uniformemente en K.

Es evidente que F_a tiene periodo 1. Vamos a calcular su desarrollo en serie de Fourier. En principio pasamos a la función $F_a(z/2\pi)$, que tiene periodo 2π, luego se puede expresar como

$$F_a\left(\frac{z}{2\pi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz},$$

luego

$$F_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inz}.$$

Los coeficientes vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_a\left(\frac{t}{2\pi}\right) e^{-int}\,dt = \int_0^1 F_a(t)e^{-2\pi int}\,dt.$$

Puesto que la serie que define a F_a converge uniformemente en $[0,1]$, podemos intercambiarla con la integral, y así

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{-\pi a^2(t+m)^2}e^{-2\pi int}\,dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_m^{m+1} e^{-\pi a^2 t^2}e^{-2\pi in(t-m)}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 t^2}e^{-2\pi int}\,dt = e^{-\pi n^2/a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(at+in/a)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Finalmente hacemos $x = at$ y queda

$$c_n = \frac{1}{a}\,e^{-\pi n^2/a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+in/a)^2}\,dx.$$

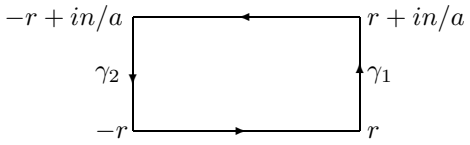
Para evaluar esta integral nos valdremos de la integral de Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

que ya usamos en el capítulo II para calcular las integrales de Fresnel y que calcularemos en el capítulo siguiente. De ella se sigue claramente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1.$$

De aquí obtenemos ya c_0. El cálculo de los c_n restantes a partir de esta integral es una aplicación típica del teorema de Cauchy. Se lo aplicamos a la función $e^{-\pi z^2}$ y al arco descrito en la figura:



Notemos que n puede ser negativo. Esto cambia la figura, pero no los cálculos. Por el teorema de Cauchy:

$$\int_{-r}^{r} e^{-\pi x^2}\,dx - \int_{-r}^{r} e^{-\pi(x+in/a)}\,dx + \int_{\gamma_1} e^{-\pi\zeta^2}\,d\zeta + \int_{\gamma_2} e^{-\pi\zeta^2}\,d\zeta = 0.$$

Claramente

$$\int_{\gamma_1} e^{-\pi\zeta^2}\,d\zeta = \int_0^{n/a} e^{-\pi(r+it)^2}\,i\,dt$$

y $|e^{-\pi(r+it)^2}i| = e^{-\pi(r^2-t^2)} \le e^{-\pi r^2}$, luego

$$\left|\int_{\gamma_1} e^{-\pi\zeta^2}\,d\zeta\right| \le \frac{|n|}{a}\,e^{-\pi r^2}$$

y por consiguiente la integral tiende a 0 cuando r tiende a $+\infty$. Puesto que $e^{-\pi z^2}$ no varía al cambiar z por $-z$ lo mismo vale para γ_2. Así pues, al tomar límites la relación entre las cuatro integrales se reduce a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+in/a)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} = 1.$$

Así pues:

$$c_n = \frac{1}{a}\,e^{-\pi n^2/a^2}$$

y el desarrollo de F_a es

$$F_a(z) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/a^2} e^{2\pi i n z}.$$

Equivalentemente:

$$F_a(z) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2/a^2}\cos 2\pi nz.$$

■

Concluimos la sección con unas definiciones de interés sobre funciones periódicas:

Definición 5.33 Un *polinomio trigonométrico* es una función de la forma

$$P(z) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{inz} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{N}(a_n \cos nz + b_n \operatorname{sen} nz), \tag{5.8}$$

donde $a_0 = 2c_0$ y, para $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Una *función trigonométrica* es un cociente de polinomios trigonométricos.

Hemos probado que toda función entera de periodo 2π es límite casi uniforme de polinomios trigonométricos. Las funciones trigonométricas son una clase general que incluye a las que habitualmente reciben este nombre, tales como la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante. Para verlo claramente observamos que

$$\begin{aligned}\cos(nz) + i\operatorname{sen}(nz) &= (e^{iz})^n = (\cos z + i\operatorname{sen} z)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k} z\, i^k \operatorname{sen}^k z.\end{aligned}$$

Tomando partes reales e imaginarias vemos que $\cos nz$ y $\operatorname{sen} nz$ pueden expresarse como polinomios de grado n en $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$. Recíprocamente, dado un polinomio en $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, sustituyendo ambas funciones por sus definiciones en términos de la exponencial obtenemos una combinación lineal de potencias de e^{iz}, es decir, un polinomio trigonométrico. En definitiva tenemos:

Teorema 5.34 *Los polinomios trigonométricos son las funciones de la forma $P(\operatorname{sen} z, \cos z)$, donde $P(u, v)$ es un polinomio de dos variables. Las funciones trigonométricas son las funciones de la forma $R(\operatorname{sen} z, \cos z)$, donde $R(u, v)$ es una función racional de dos variables.*

5.6 El teorema de Runge

Sabemos que toda función holomorfa es localmente el límite de una sucesión de polinomios (las sumas parciales de su serie de Taylor), luego cabe preguntarse si esto sigue siendo cierto globalmente, es decir, si dada una función holomorfa en un abierto es el límite de una sucesión de polinomios. La respuesta es negativa en general. De hecho sólo es cierto en los abiertos simplemente conexos, pero en el caso general tenemos al menos que toda función holomorfa es el límite de

una sucesión de funciones racionales. Vamos a probar todo esto. Comenzamos con un resultado auxiliar. En esta sección, cuando hablemos de los polos de una función racional, entenderemos que se incluye a ∞ si lo es.

Teorema 5.35 *Sea ϕ un ciclo, f una función continua en ϕ^*, K un compacto en $\mathbb{C}$ que no corte a ϕ^* y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función racional R cuyos polos están todos en ϕ^* tal que*

$$\left|\int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - R(z)\right| < \epsilon \qquad \text{para todo } z \in K.$$

DEMOSTRACIÓN: La función $f(\zeta)/(\zeta - z)$ es continua en el compacto $\phi^* \times K$, luego es uniformemente continua, lo que implica que existe un $\delta > 0$ de manera que si ζ, $\zeta' \in \phi^*$ y $|\zeta - \zeta'| < \delta$, entonces $|f(\zeta)/(\zeta - z) - f(\zeta')/(\zeta' - z)| < \epsilon/L(\phi^*)$ para todo $z \in K$.

El teorema para ciclos se sigue inmediatamente del teorema para arcos, luego podemos suponer que ϕ es un arco. De este modo $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función uniformemente continua, luego existe un $r > 0$ tal que si t, $t' \in [a, b]$, $|t - t'| < r$, entonces $|\phi(t) - \phi(t')| < \delta$.

Tomemos puntos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de modo que $|t_{i+1} - t_i| < r$. Definimos

$$R(z) = \sum_{i=1}^{n} (\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))\,\frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z}.$$

Así, R es una función racional con todos sus polos sobre f^*. Se cumple:

$$\left|\int_\phi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - R(z)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{f(\phi(t))}{\phi(t) - z}\phi'(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z}\,\phi'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\frac{f(\phi(t))}{\phi(t) - z} - \frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z}\right| |\phi'(t)|\,dt \leq \frac{\epsilon}{L(\phi)} \int_a^b |\phi'(t)|\,dt = \epsilon.$$

■

Dejamos a cargo del lector la siguiente observación topológica: Si K es un compacto en $\mathbb{C}$, las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$ son las mismas que las de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, y las componentes no acotadas se diferencian únicamente en el punto ∞.

Teorema 5.36 (Teorema de Runge) *Sea K un compacto en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en un abierto que contenga a K. Sea $E \subset \mathbb{C}^\infty \setminus K$ un conjunto que contenga al menos un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una función racional R cuyos polos están contenidos en E tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el espacio $C(K)$ de todas las funciones continuas en K con valores en $\mathbb{C}$ con la topología de la convergencia uniforme. Ya comentamos en el capítulo III que $C(K)$ es un álgebra con la suma y el producto definidos puntualmente. Sea $R_E(K)$ el subespacio de las restricciones a K de las funciones racionales con polos en E, que claramente es una subálgebra, es decir, la suma y el producto de elementos de $R_E(K)$ está en $R_E(K)$. Por último sea $B_E(K)$ la clausura de $R_E(K)$ en $C(K)$. La suma y el producto son continuas para la topología de la convergencia uniforme, lo que hace que $B_E(K)$ sea también un álgebra (si dos sucesiones en $R_E(K)$ tienden a dos funciones de $B_E(K)$, la suma y el producto de las sucesiones tienden a la suma y el producto de las funciones, luego siguen en $B_E(K)$).

En estos términos, lo que queremos probar es que $f|_K \in B_E(K)$. Primeramente veremos que la función $1/(z-a)$ está en $B_E(K)$ para todo $a \in \mathbb{C} \setminus K$. El argumento consta de varios pasos. Ante todo llamemos

$$V = \{a \in \mathbb{C} \setminus K \mid 1/(z-a) \in B_E(K)\}.$$

Hemos de ver que $V = \mathbb{C} \setminus K$.

1) Si $a \in V$ entonces $D(a,d) \subset V$, donde $d = d(a,K) > 0$. En particular V es abierto.

Sea $b \in D(a,d)$. Entonces, si $z \in K$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-b} &= \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

(notar que $|(b-a)/(z-a)| < d/|z-a| < 1$.)

Por la unicidad de la serie de Laurent, la última serie es el desarrollo de la función $1/(z-b)$ en el anillo $A(a,|b-a|,\infty)$, luego la serie converge casi uniformemente a la función en este anillo, con lo que converge uniformemente en K.

Ahora bien, como $a \in V$ tenemos que $1/(z-a)$ está en $B_E(K)$. Como este espacio es cerrado para productos y contiene obviamente a las constantes, resulta que las funciones $(b-a)^n/(z-a)^{n+1}$ también están en $B_E(K)$, como es cerrado para sumas también contiene a las sumas parciales de la serie, y como es cerrado para la topología, contiene al límite, es decir, a la función $1/(z-b)$.

2) Si $\infty \in E$ y $R = \max\{|z| \mid z \in K\}$, entonces $A(0,R,\infty) \subset V$.

En efecto, si $a \in A(0,R,\infty)$ entonces para todo $z \in K$

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}},$$

pues $|z/a| \le R/|a| < 1$. Esta serie converge en $D(0,|a|)$, luego converge (uniformemente) en K. Las sumas parciales son polinomios (funciones racionales con

un polo en $\infty \in E$), luego están en $R_E(K)$ y en consecuencia el límite está en $B_E(K)$.

3) $\partial V \subset K$.

Si $a \in \partial V$ pero $a \notin K$, tomamos $d = d(a, K)$. Existe un $b \in D(a, d/2) \cap V$, entonces $a \in D(b, d/2) \subset D(a, d) \subset \mathbb{C} \setminus K$, luego $d/2 \leq d(b, K)$ y por 1) concluimos que $D(b, d/2) \subset V$, luego $a \in V$, pero al ser V abierto es imposible que a esté en V y en su frontera.

El paso 3) implica que V no tiene puntos de frontera en $C \setminus K$, luego V es abierto y cerrado en $\mathbb{C} \setminus K$. Si C es una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ entonces $V \cap C$ es abierto y cerrado en C, luego o bien $C \subset V$ o bien $C \cap V = \varnothing$. Así, para concluir que $V = C \setminus K$ basta probar que V corta a todas las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus K$.

En efecto, si $a \in E$, $a \neq \infty$, entonces $1/(z-a) \in R_E(K) \subset B_E(K)$, luego por definición $a \in V$. Si C es una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, entonces también es una componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y E contiene un punto de C, que está en V, según acabamos de ver, luego V corta a C. Si C es la componente conexa no acotada entonces $C \cup \{\infty\}$ es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, y el razonamiento anterior vale salvo que el único punto de $C \cup \{\infty\}$ que esté en E sea ∞. Entonces por 2) sabemos que V contiene un anillo de la forma $A(0, R, \infty)$, que claramente contiene puntos de C.

Una vez probado que $V = \mathbb{C} \setminus K$ la conclusión es sencilla. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ en el que f sea holomorfa y $K \subset \Omega$. El teorema 5.5 aplicado a los cerrados K y $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, nos da que existe un ciclo γ tal que

a) $\gamma^* \cap K = \varnothing$, $\gamma^* \subset \Omega$,

b) Para todo $z \in K$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,

c) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

La propiedad c) nos permite aplicar el teorema de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \text{para todo } z \in K.$$

Por el teorema anterior, dado $\epsilon > 0$, existe una función racional R cuyos polos están sobre γ^* (luego son finitos) tal que

$$\left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - R(z) \right| < \epsilon, \qquad \text{para todo } z \in K.$$

Cambiando $R(z)$ por $R(z)/2\pi i$ tenemos una función racional en las mismas condiciones tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon/2\pi < \epsilon$ para todo $z \in K$, es decir, tal que $\|f(z) - R(z)\| < \epsilon$, donde la norma es la norma supremo en $C(K)$, que induce la topología de la convergencia uniforme en $C(K)$.

Tomemos uno de los polos de $R(z)$ y consideremos su desarrollo en serie de Laurent. La parte regular del desarrollo es una función racional cuyos polos son los polos restantes de $R(z)$, a su vez desarrollamos esta parte regular alrededor de otro de sus polos y seguimos así hasta agotar todos los polos.

Si R fuera una función arbitraria podríamos llegar a una parte regular sin polos, es decir, a un polinomio, pero eso significaría que R tiene un polo en ∞, lo cual es falso. Por lo tanto terminamos con una expresión de la forma

$$R(z) = \sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{(z-b_n)^{k_n}},$$

donde los números b_n (no necesariamente distintos) son los polos de R.

Cada sumando está en $B_E(K)$, luego también $R(z) \in B_E(K)$. Por lo tanto hemos probado que f tiene elementos de $B_E(K)$ arbitrariamente próximos, es decir, f está en la clausura de $B_E(K)$ pero, como es cerrado, $f \in B_E(K)$. ∎

El teorema de Runge puede enunciarse de un modo topológico más natural:

Teorema 5.37 (Teorema de Runge) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $E \subset \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ un conjunto que contenga al menos un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Entonces el conjunto $R_E(\Omega)$ de las funciones racionales con polos en E (restringidas a Ω) es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostración: Hay que probar que para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ existe una función $R(z) \in R_E(\Omega)$ tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$.

Para aplicar el teorema anterior habría que justificar que E corta a todas las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, pero esto es falso en general (por ejemplo si K tiene un "agujero"). No obstante basta probar esta afirmación para los compactos K_n dados por (3.2), pues cualquier compacto está contenido en uno de ellos, y éstos sí van a cumplir la propiedad.

Sea, pues, $K = K_n$ y sea C una componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$. Veamos que C corta a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Tomemos $z \in C$. Entonces $z \notin K$, luego hay tres posibilidades:

a) $z \notin \Omega$,

b) $|z| > n$,

c) $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < 1/n$.

En el primer caso $z \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$. En el segundo $\{\lambda z \mid 1 \le \lambda < +\infty\}$ es un conexo contenido en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y que corta a C, luego está contenido en C. Por lo tanto C es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, luego $\infty \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$.

En el tercer caso existe un $a \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tal que $d(z,a) < 1/n$. Por definición de K se cumple que $D(a, 1/n) \cap K = \varnothing$, luego este disco es un conexo en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que corta a C, luego está contenido en C, luego $a \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$.

En cualquier caso toda componente conexa C de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ corta a una componente conexa D de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, la cual es un conexo en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que corta a C, luego

$D \subset C$. Como D contiene un punto de E, lo mismo le ocurre a C y podemos aplicar el teorema anterior. ∎

Es fácil ver que en general las funciones racionales no pueden ser sustituidas por polinomios:

Teorema 5.38 *Un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo si y sólo si el conjunto $\mathbb{C}[z]$ de todos los polinomios (restringidos a Ω) es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si Ω es simplemente conexo entonces por definición $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo, luego podemos aplicar el teorema de Runge con $E = \{\infty\}$, y las funciones racionales con polos a lo sumo en ∞ son los polinomios.

Si $\mathbb{C}[z]$ es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$ se cumple que Ω es simplemente conexo por la caracterización b) del teorema 5.7. En efecto, toda función f es límite casi uniforme de una sucesión de polinomios. El límite es uniforme sobre el compacto ϕ^*, luego la integral de f sobre ϕ es el límite de las integrales de los polinomios, que son nulas por el teorema de Cauchy. ∎

Capítulo VI

La función factorial

En este capítulo aplicaremos la teoría que hemos desarrollado hasta ahora al estudio de una importante función meromorfa. La función factorial es una función holomorfa que extiende a la sucesión de los factoriales de los números naturales. Fue descubierta y estudiada por Euler a partir de la siguiente representación analítica del factorial de un número natural:

$$n! = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^n dy.$$

En la actualidad esta ecuación es más conocida en la forma equivalente que utilizó Gauss, que se obtiene de la anterior mediante el cambio de variable $x = \log(1/y)$:

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx.$$

También fue Gauss el primero en usar el término "función factorial" para referirse a la función definida por esta integral, es decir:

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \, dx, \qquad \text{para } s > -1, \tag{6.1}$$

Euler probó que en realidad esta función puede extenderse a una función meromorfa con polos en los enteros negativos. Por algún oscuro motivo Legendre definió la función gamma como $\Gamma(s) = \Pi(s-1)$ (quizá porque consideró más natural que el primer polo estuviera en 0 en vez de en -1) y, por un motivo más oscuro todavía, lo cierto es que la función gamma se ha impuesto tradicionalmente sobre la función factorial, de modo que la mayoría de los libros modernos usan la definición de Legendre. Hoy en día la función gamma juega un papel muy importante en muchas ramas de la matemática, como son la teoría de números o la estadística. En este capítulo nos limitaremos a determinar sus propiedades, pero en capítulos posteriores tendremos ocasión de comprender su utilidad.

Aunque ya hemos comentado que no es lo habitual, nosotros conservaremos la definición original de Gauss, que es equivalente a la de Legendre pero

mucho más natural. De todos modos cualquier resultado puede traducirse inmediatamente de unos términos a otros mediante las fórmulas $\Gamma(s) = \Pi(s-1)$, $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$.

6.1 Construcción de la función factorial

Construiremos la función factorial en varios pasos. En primer lugar probaremos que la integral (6.1) converge para todo $s > -1$, con lo que tendremos definida Π en el intervalo $]-1, +\infty[$. Seguidamente veremos que esta función real se extiende a una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -1$ y, por último, veremos que esta función holomorfa se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

Teorema 6.1 *La función $e^{-x}x^s$ es integrable en $]0, +\infty[$ para todo $s > -1$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero que es integrable en el intervalo $]0, 1[$. Si $s \geq 0$ entonces $e^{-x}x^s$ es continua en $[0, 1]$, luego es integrable. Supongamos, pues, que $-1 < s < 0$. Entonces si $0 \leq x \leq 1$ se cumple $0 \leq e^{-x}x^s \leq x^s$, luego

$$\int_0^1 e^{-x}x^s\,dx \leq \int_0^1 x^s\,dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^1 = \frac{1}{s+1}.$$

Para estudiar la integrabilidad en $[1, +\infty[$ observamos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^s}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^{s+2} = 0,$$

(por ejemplo acotando $s+2$ por un número natural n y aplicando n veces la regla de L'Hôpital).

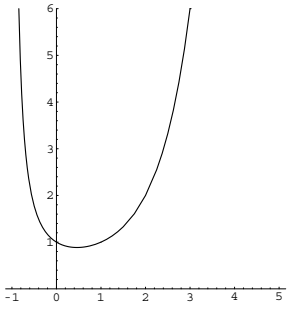
Entonces existe un $M > 0$ tal que si $x > M$ se cumple $e^{-x}x^s \leq 1/x^2$. Por lo tanto

$$\int_M^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx \leq \int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_M^{+\infty} = \frac{1}{M}.$$

Así pues,$e^{-x}x^s$ es integrable en $[M, +\infty[$ y, como es continua, también es integrable en $[1, M]$, luego concluimos que es integrable en $]0, +\infty[$. ∎

Definición 6.2 Llamaremos *función factorial* a la función definida sobre el intervalo $]-1, +\infty[$ mediante

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx.$$



La figura muestra la gráfica de la función factorial. De la definición se sigue inmediatamente que $\Pi(s) > 0$ para todo s. En la figura se ve como $\Pi(n) = n!$ para $n = 0, 1, 2, 3$. Vamos a probarlo en general:

Teorema 6.3 *Para todo $s > -1$ se cumple $\Pi(s+1) = (s+1)\Pi(s)$. En particular para todo número natural n se cumple $\Pi(n) = n!$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta integrar por partes:

$$\begin{aligned}\Pi(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s+1}\,dx \\ &= \left[-x^{s+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (s+1)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx = 0 + (s+1)\Pi(s).\end{aligned}$$

Claramente $\Pi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ y por inducción obtenemos $\Pi(n) = n!$. ∎

Definición 6.4 Llamaremos Σ al semiplano $\operatorname{Re} z > -1$. Sobre Σ definimos la *función factorial* mediante

$$\Pi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^z\,dx.$$

La función $e^{-x}x^z$ es integrable porque lo es su módulo $|e^{-x}x^z| = e^{-x}x^{\operatorname{Re} z}$, luego $\Pi(z)$ está bien definida y obviamente extiende a la función factorial real que ya teníamos definida.

Teorema 6.5 *La función factorial es holomorfa en el semiplano Σ y verifica la ecuación funcional*

$$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z).$$

DEMOSTRACIÓN: Para probar que es holomorfa usamos el teorema 3.14. Tenemos $|e^{-x}x^z| = e^{-x}x^{\operatorname{Re} z}$, pero nos falta acotar el integrando por una función integrable que no dependa de z (las condiciones restantes son inmediatas).

Para ello podemos tomar z en una franja $]-1+\epsilon, M[\times \mathbb{R}$, pues así $|e^{-x}x^z|$ está acotado por $e^{-x}x^{-1+\epsilon} + e^{-x}x^M$, que es integrable (concretamente, la integral es $\Pi(-1+\epsilon) + \Pi(M)$).

Con esto el teorema 3.14 garantiza que Π es holomorfa en cada una de estas franjas abiertas, pero todo punto z del dominio de Π está en una de ellas, luego Π es holomorfa en todo su dominio.

Finalmente notamos que las funciones $\Pi(z+1)$ y $(z+1)\Pi(z)$ son ambas holomorfas y coinciden sobre el eje real positivo (por el teorema 6.3), luego por el principio de prolongación analítica son iguales. ∎

Ahora demostramos que la función factorial se extiende a una función meromorfa. Por razones que se verán después conviene probar algo ligeramente más general.

Teorema 6.6 *Sea una función $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ que verifique la ecuación funcional $f(z+1) = (z+1)f(z)$. Entonces:*

a) La función f se extiende a una función meromorfa con singularidades aisladas en los enteros negativos y que cumple la misma ecuación funcional.

b) Para cada número natural $n > 0$ la singularidad de f en $-n$ es evitable si $f(0) = 0$ y un polo simple en otro caso, con residuo[1]

$$\operatorname{Res}(f, -n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f(0).$$

c) En particular la extensión de f es entera si y sólo si $f(0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar inductivamente que f puede prolongarse a una función meromorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -n$ para todo natural n con singularidades aisladas en los enteros negativos. Esto es trivialmente cierto para $n = 1$. Supongamos que puede prolongarse hasta $\operatorname{Re} z > -n$ (salvo en los enteros negativos) de modo que se cumpla la ecuación funcional.

Entonces $f(z+1)/(z+1)$ es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ salvo en los enteros negativos y coincide con $f(z)$ sobre el semiplano $\operatorname{Re} z > -n$. Así pues, se trata de una extensión de f y, por el principio de prolongación analítica, sigue cumpliendo la ecuación funcional (se razona como en el teorema 6.5).

Así, la función f se extiende al plano complejo menos los enteros negativos. Por la ecuación funcional, para todo z que no sea entero y todo número natural n se cumple

$$f(z+n) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)f(z).$$

Tomando límites queda

$$f(0) = (-1)(-2)\cdots(-n+1) \lim_{z\to -n} (z+n) f(z),$$

o sea,

$$\lim_{z\to -n} (z+n) f(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(0).$$

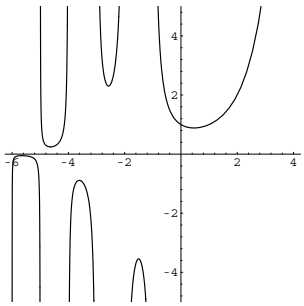
Si $f(0) = 0$ el teorema 5.14 implica que f es holomorfa en $-n$, mientras que si $f(0) \neq 0$ el teorema 5.17 nos da que f tiene un polo simple. Por consiguiente, en un entorno reducido de $-n$ se cumple

$$f(z) = \frac{R}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+n)^k,$$

de donde el límite que hemos calculado es precisamente el residuo R. ∎

El teorema anterior se aplica a la función factorial, con lo que ésta resulta ser una función meromorfa con polos simples en los enteros negativos. La ecuación funcional nos permite reducir el cálculo de Π en un punto con $\operatorname{Re} z \leq -1$ al cálculo en un punto con $\operatorname{Re} z > -1$, donde disponemos de la expresión integral, que puede aproximarse numéricamente. La gráfica de Π sobre toda la recta real tiene este aspecto:

[1] El residuo de una función holomorfa f en una singularidad aislada z_0 es el coeficiente a_{-1} de su serie de Laurent. Lo representaremos por $\operatorname{Res}(f, z_0)$. En el capítulo VIII veremos el interés de este concepto.



6.2 Otras expresiones para la función factorial

En esta sección encontraremos una expresión para Π que sea válida en todo su dominio, de la cual deduciremos muchos hechos interesantes. El punto de partida es la única expresión que tenemos hasta ahora, la expresión integral

$$\Pi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^z \, dx,$$

válida en el semiplano $\operatorname{Re} z > -1$. Ahora aplicamos la fórmula[2]

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Si nos limitamos a números reales $s > -1$ nos queda

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} \lim_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^s \, dx.$$

Seguidamente intercambiaremos el límite y la integral. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^s \chi_{[0,n]},$$

donde $\chi_{[0,n]}$ es la función característica del intervalo $[0, n]$. Claramente se trata de una sucesión de funciones positivas que converge puntualmente a la función $e^{-x}x^s$. Además $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}x^s$. Para probar esto basta observar que

$$1 - \frac{x}{n} < e^{-x/n},$$

ya que la serie de Taylor del miembro derecho es alternada. Podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y concluir que

$$\Pi(s) = \lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^s \, dx = \lim_n \frac{1}{n^n} \int_0^n (n - x)^n x^s \, dx.$$

[2]Para probarla basta tomar logaritmos y aplicar la regla de L'Hôpital.

Integrando por partes n veces queda

$$\begin{aligned}\Pi(s) &= \lim_n \frac{1}{n^n}\,\frac{n}{s+1}\int_0^n (n-x)^{n-1}x^{s+1}dx = \cdots\\ \cdots &= \frac{1}{n^n}\,\frac{n!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}\int_0^n x^{s+n}\,dx\\ &= \lim_n \frac{1}{n^n}\frac{n!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}\,\frac{n^{s+n+1}}{s+n+1},\end{aligned}$$

con lo que hemos llegado a

$$\Pi(s) = \lim_n \frac{n!\,n^{s+1}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n+1)}.$$

Si probamos que la función

$$f(z) = \lim_n \frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$$

es holomorfa en todo el plano complejo excepto en los enteros negativos, por el principio de prolongación analítica $f(z)$ coincidirá con $\Pi(z)$, dado que coinciden en el semieje real. Para ello transformaremos el denominador en un producto infinito.

En primer lugar bajamos el $n!$ del numerador, a la vez que multiplicamos y dividimos por $n+1$, porque en el denominador tenemos $n+1$ factores en vez de n.

$$f(z) = \lim_n \frac{n^{z+1}}{(n+1)\,\frac{z+1}{1}\cdots\frac{z+n+1}{n+1}} = \lim_n \frac{n^{z+1}}{(n+1)\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{k}\right)}.$$

El producto que nos aparece no es convergente. Teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2) < +\infty$, el teorema 4.18 nos asegura que el producto convergerá si añadimos los factores $e^{-z/k}$.

$$f(z) = \lim_n \frac{e^{-z\sum_{k=1}^{n+1}1/k}\,n^{z+1}}{(n+1)\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}}.$$

Con esto tenemos garantizado que el producto converge. Ocupémonos ahora del numerador y del $n+1$ que queda en el denominador. Sustituimos $n^{z+1} = e^{(z+1)\log n}$ y $n+1 = e^{\log(n+1)}$. Al llevarlo todo al numerador queda e elevado al exponente siguiente:

$$-z\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}+z\log n+\log n-\log(n+1) = -z\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\log(n+1)\right)-(z+1)\log\frac{n+1}{n}.$$

Claramente esto converge a $-z\gamma$, donde γ es la constante de Euler definida en 3.7. Concluimos que

$$f(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

Ahora es claro que f es una función meromorfa, luego hemos demostrado el teorema siguiente:

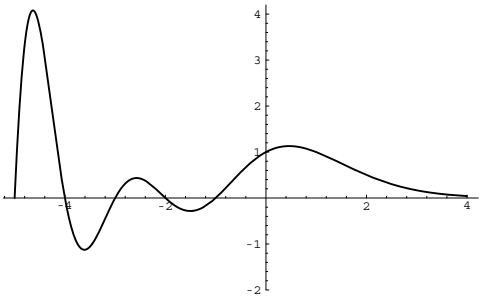
Teorema 6.7 *Para todo número complejo $z \neq -1, -2, -3, \ldots$ se cumple*

$$\Pi(z) = \lim_n \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

En particular vemos que la función factorial no se anula en ningún punto, por lo que su inversa en una función entera cuyos ceros (todos simples) son los números enteros negativos. Además tenemos su factorización en producto infinito:

$$\frac{1}{\Pi(z)} = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

Ésta es su gráfica:



La factorización de $1/\Pi$ es la más sencilla que puede tener una función que se anula en los enteros negativos. Esto nos hace pensar en la factorización del seno (4.4), que también es la más sencilla que puede tener una función que se anula en los múltiplos enteros de π. Para compararlas mejor conviene considerar la función $\operatorname{sen} \pi z$, que se anula en los enteros. Claramente

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

En la factorización de $1/\Pi$ faltan los factores correspondientes a los ceros positivos y al 0, por lo que en cierto sentido podemos pensar que $1/\Pi$ es como "la mitad" de la función seno. Para reconstruir la función seno completa a partir

de $1/\Pi$ basta introducir los ceros que faltan, que son —salvo $z = 0$— los ceros de $1/\Pi(-z)$. Así:

$$\frac{1}{\Pi(z)\Pi(-z)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} = \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}.$$

Con esto hemos probado otra importante ecuación funcional para la función factorial. La enunciamos en dos versiones equivalentes:

Teorema 6.8 *La función factorial satisface las ecuaciones siguientes:*

$$\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z} \qquad \Pi(z-1)\Pi(-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

(La segunda se obtiene haciendo $\Pi(z) = z\Pi(z-1)$ en la primera.)

Estas relaciones nos permiten calcular algunos valores de Π. Concretamente tenemos que $\Pi(1/2)\Pi(-1/2) = \pi/2$, y por otra parte

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right).$$

De las dos igualdades deducimos que $\Pi(1/2)^2 = \pi/4$ y, como la función factorial es positiva en el semieje positivo, queda $\Pi(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. De aquí $\Pi(-1/2) = 2\Pi(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Si ahora acudimos a la expresión integral de la función factorial vemos que hemos calculado las integrales siguientes:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Si en la última integral hacemos el cambio de variable $x = t^2$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

que es la *integral de Poisson,* que ya hemos usado en varias ocasiones.

6.3 El teorema de Wielandt

Hemos extendido la sucesión $n!$ a una función holomorfa, pero es obvio que de hecho existen infinitas funciones holomorfas f tales que $f(n) = n!$ para todo número natural n, pues si g es cualquier función entera que tenga ceros en los números naturales, la función dada por $f(z) = \Pi(z) + g(z)$ tiene esta propiedad. Sin embargo, la función factorial cumple algo más fuerte, a saber, la ecuación funcional $\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$. Cabe preguntarse si esta ecuación (junto con $\Pi(0) = 1$) caracteriza a la función factorial. La respuesta sigue siendo negativa, pues si g es cualquier función entera con periodo 1, entonces

la función $f(z) = \Pi(z)g(z)$ cumple la misma ecuación funcional y, si además $g(0) = 1$, también se cumple $f(0) = 1$.

Vamos a probar que hay una condición sencilla que satisface la función factorial y que añadida a las anteriores la caracteriza por completo. De la representación integral deducimos que $|\Pi(z)| \leq \Pi(\operatorname{Re} z)$ para todo $z \in \Sigma$. Por lo tanto Π está acotada en cualquier banda vertical $-1 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b$.

Teorema 6.9 (Teorema de Wielandt) *Sea una función $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ que cumpla*

a) $f(z+1) = (z+1)f(z)$ para todo $z \in \Sigma$.

b) f está acotada en la banda $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$.

Entonces $f(z) = f(0)\Pi(z)$ para todo $z \in \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $g(z) = f(z) - f(0)\Pi(z)$. Teniendo en cuenta que la función factorial cumple las propiedades a) y b) es obvio que g también las cumple y además $g(0) = 0$. Basta probar que g es idénticamente nula. Por el teorema 6.6 la función g se extiende a una función entera que sigue cumpliendo la ecuación funcional.

Ahora consideramos la función entera $s(z) = g(z-1)g(-z)$. Si probamos que s es idénticamente nula, lo mismo valdrá para g. Para ello demostraremos que s está acotada. Como $s(0) = 0$, el teorema de Liouville nos dará la conclusión. La idea es que, según el teorema 6.8, si g fuera la función factorial entonces s sería la función $\pi/\operatorname{sen} \pi z$, que tiene periodo 2. La función g no es la función factorial, pero es fácil ver que s sigue siendo periódica, concretamente:

$$\begin{aligned} s(z+1) &= g(z)g(-z-1) = zg(z-1)g(-z-1) \\ &= -g(z-1)(-z)g(-z-1) = -g(z-1)g(-z) = -s(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto el módulo de s tiene periodo 1 y basta probar que s está acotada en una banda de anchura 1. Concretamente, si $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, entonces $s(z)$ se calcula evaluando g en dos puntos de la banda $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, luego basta demostrar que g está acotada en esta última banda. Ahora bien, esto es inmediato: por continuidad g está acotada en el compacto $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, y sobre los puntos $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ usamos la ecuación $g(z) = g(z+1)/(z+1)$ y la condición b). ∎

El teorema de Wielandt permite obtener de forma muy rápida las propiedades básicas de la función factorial. Como primer ejemplo daremos una demostración mucho más simple del teorema 6.7. Llamemos

$$f(z) = \lim_n \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

La igualdad de ambas expresiones se prueba como vimos en el teorema 6.7. La segunda expresión justifica que $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$, como exige el teorema anterior. Si llamamos

$$f_n(z) = \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$$

es fácil comprobar que

$$f_n(z+1) = (z+1)\frac{n}{n+z+2} f_n(z),$$

así como que $|f_n(z)| \le f_n(\operatorname{Re} z)$ y, pasando al límite, concluimos que f verifica todas las hipótesis del teorema de Wielandt. En consecuencia $f(z) = f(0)\Pi(z)$. Ahora bien, $f_n(0) = n/(n+1)$, luego $f(0) = 1$. ∎

Veamos otro ejemplo:

Teorema 6.10 (Fórmula de duplicación de Legendre)

$$\sqrt{\pi}\,\Pi(2z) = 2^{2z}\,\Pi(z)\,\Pi\left(z-\frac{1}{2}\right).$$

Demostración: Definimos

$$f(z) = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}}\,\Pi\left(\frac{z}{2}\right)\,\Pi\left(\frac{z-1}{2}\right).$$

Basta demostrar que $f(z) = \Pi(z)$. Claramente $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$, $f(0) = 1$ (usando la fórmula $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$) y $|f(z)| \le f(\operatorname{Re} z)$, luego f está acotada en las bandas verticales. Por el teorema de Wielandt basta probar que f verifica la ecuación funcional. En efecto:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= 2\,\frac{2^z}{\sqrt{\pi}}\,\Pi\left(\frac{z+1}{2}\right)\,\Pi\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2\,\frac{2^z}{\sqrt{\pi}}\,\frac{z+1}{2}\,\Pi\left(\frac{z-1}{2}\right)\,\Pi\left(\frac{z}{2}\right) = (z+1)f(z). \end{aligned}$$

∎

La última aplicación que veremos del teorema de Wielandt consistirá en generalizar la fórmula de Stirling a una ecuación funcional para la función factorial. Recordemos del capítulo IV que

$$n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\mu(n)},$$

donde

$$\mu(n) = -\int_n^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{x}\,dx = -\int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx,$$

donde a su vez $F(x)$ es la parte fraccionaria de x y $\phi(x) = (1/2)F(x)\big(F(x)-1\big)$ es una primitiva de $F(x) - 1/2$, periódica de periodo 1 y tal que $-1/8 \le \phi(x) \le 0$.

Éstos son los únicos hechos vistos en el capítulo IV que vamos a necesitar ahora (además de la integrabilidad en $[1,+\infty[$ de las funciones anteriores).

El único término de la fórmula de Stirling en el que no tiene sentido cambiar n por z es precisamente $\mu(n)$, pero esto se arregla con un cambio de variables:

$$\mu(n) = -\int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx = -\int_n^{+\infty} \frac{\phi(x-n)}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)}{(n+x)^2}\,dx.$$

Así ya tiene sentido considerar a μ como una función de variable compleja:

Teorema 6.11 *La función definida por*

$$\mu(z) = -\int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)}{(z+x)^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{F(x)-\frac{1}{2}}{z+x}\,dx$$

es holomorfa en $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 0\}$ *y cumple:*

a) Para todo número real $0<\delta\le\pi$ *y todo* $z\in\mathbb{C}^-$ *tal que* $|\arg z|\le\pi-\delta$

$$|\mu(z)| \le \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)\,|z|}.$$

b) $\mu(z+1) = \mu(z) - (z+1/2)\log(1+1/z) + 1.$

Demostración: Recordemos que la igualdad entre las dos definiciones de μ se prueba integrando por partes. Notemos así mismo que $\mathbb{C}^-$ es el conjunto que en el capítulo I llamábamos $H_{-\pi}$, donde está definida la rama uniforme del argumento que toma valores en $]-\pi,\pi[$ y que representaremos por arg.

Si llamamos $\theta = \arg z$, tenemos

$$|z+x|^2 = (|z|e^{i\theta}+x)(|z|e^{-i\theta}+x) = |z|^2 + 2|z|x\cos\theta + x^2$$

$$= |z|^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + 2|z|x\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + x^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= (|z|+x)^2 cos^2\frac{\theta}{2} + (|z|-x)^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Consecuentemente

$$|z+x| \ge (|z|+x)\cos\frac{\theta}{2} \ge (|z|+x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\delta}{2} \qquad \text{si } |\theta|\le\pi-\delta.$$

De aquí concluimos que

$$\left|\frac{\phi(x)}{(z+x)^2}\right| \le \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)}\,\frac{1}{(|z|+x)^2}. \tag{6.2}$$

Como esta última función es claramente integrable en $[0,+\infty[$ (para cada z) llegamos a que $\mu(z)$ está bien definida. Para que sea holomorfa basta ver que el integrando está acotado por una función integrable que no dependa de

z, pero de hecho basta ver que esto es cierto en un entorno de cada punto z. Si tomamos el entorno compacto y contenido en $\mathbb{C}^-$ se cumple

$$\left|\frac{\phi(x)}{(z+x)^2}\right| \leq \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)}\,\frac{1}{(m+x)^2},$$

donde $m > 0$ es el mínimo de $|z|$ en el entorno considerado, y esta función es integrable en $[0, +\infty[$, como se requería.

a) Usando (6.2) resulta

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(m+x)^2}\,dx = \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)\,|z|}.$$

b) Calculamos

$$\begin{aligned}
\mu(z+1) &= -\int_0^{+\infty}\frac{F(x)-\frac{1}{2}}{z+x+1}\,dx = -\int_0^{+\infty}\frac{F(x+1)-\frac{1}{2}}{z+x+1}\,dx\\
&= -\int_1^{+\infty}\frac{F(x)-\frac{1}{2}}{z+x}\,dx = \mu(z)+\int_0^1\frac{x-\frac{1}{2}}{z+x}\,dx\\
&= \mu(z)+\int_0^1 dx-\left(z-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\frac{1}{z+x}\,dx\\
&= \mu(z)+1-\left(z-\frac{1}{2}\right)(\log(z+1)-\log z)\\
&= \mu(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{z}\right)+1.
\end{aligned}$$

(Las operaciones con los logaritmos se pueden justificar considerando que z es real y extendiendo la igualdad por el principio de prolongación analítica). ∎

Ahora ya podemos probar:

Teorema 6.12 (Fórmula de Stirling) *Para todo $z \in \mathbb{C}^-$ se cumple*

$$\Pi(z) = \sqrt{2\pi}\,z^{z+1/2}\,e^{-z}\,e^{\mu(z)}.$$

Demostración: Ante todo notemos que no podemos aplicar directamente el teorema de Wielandt porque la función de la derecha no está definida en todo el semiplano Σ. Resolvemos este inconveniente sustituyendo z por $z+1$, es decir, el teorema equivale a probar

$$\Pi(z+1) = \sqrt{2\pi}\,(z+1)^{z+3/2}\,e^{-z-1}\,e^{\mu(z+1)},$$

o también, por la ecuación funcional,

$$\Pi(z) = \sqrt{2\pi}\,(z+1)^{z+1/2}\,e^{-z-1}\,e^{\mu(z+1)}.$$

(como ya comentábamos en el teorema anterior, las manipulaciones sobre exponenciales y logaritmos se pueden justificar probándolas para números reales y extendiéndolas por el principio de prolongación analítica).

Ahora la función $f(z)$ definida como el miembro derecho de la igualdad anterior sí es holomorfa en Σ, y basta comprobar que cumple las hipótesis restantes del teorema de Wielandt. Veamos la ecuación funcional. Usamos el apartado b) del teorema anterior:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= \sqrt{2\pi}\,(z+2)^{z+3/2}\,e^{-z-2}\,e^{\mu(z+2)} \\ &= \sqrt{2\pi}\,(z+2)^{z+3/2}\,e^{-z-2}\,e^{\mu(z+1)}\left(\frac{z+1}{z+2}\right)^{z+3/2} e \\ &= \sqrt{2\pi}\,(z+1)^{z+3/2}\,e^{-z-1}\,e^{\mu(z+1)} = (z+1)f(z). \end{aligned}$$

Probar que f está acotada cuando $0 \le \operatorname{Re} z < 1$ equivale a probar que $f(z-1)$ está acotada en la banda $1 \le \operatorname{Re} z < 2$, o sea, hay que acotar la función

$$\sqrt{2\pi}\,z^{z-1/2}\,e^{-z}\,e^{\mu(z)}.$$

Si $1 \le \operatorname{Re} z < 2$ es claro que $|\arg z| \le \pi/2$, luego el teorema anterior (con $\delta = \pi/2$) nos da la cota $|\mu(z)| \le 1/4$. Por otra parte $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \le e^{-1} < 1$. Basta acotar $z^{z-1/2}$.

Sea $z = x + yi = |z|e^{i\theta}$, donde $1 \le x < 2$, $-\pi < \theta < \pi$. Podemos suponer $|y| > 2$. Entonces $x < |y|$, luego $|z| \le 2|y|$. Usando que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |z^{z-1/2}| &= e^{(z-1/2)\log z} = e^{(x-1/2)\log|z| - y\theta} = |z|^{x-1/2}\,e^{-y\theta} \\ &\le |z|^2\,e^{-y\theta} \le 4|y|^2\,e^{-y\theta}. \end{aligned}$$

Como $x < |y|$ resulta que $\tan|\theta| = |y|/x > 1$, luego $|\theta| > \pi/4$. Además y, θ tienen el mismo signo, luego $e^{-y\theta} = e^{-|y||\theta|} \le e^{-|y|\pi/4}$.

En total resulta que

$$|z^{z-1/2}| \le 4|y|^2\,e^{-|y|\pi/4} \qquad \text{para } |y| > 2.$$

Esta función está acotada, luego se cumplen las hipótesis del teorema de Wielandt. Con esto tenemos probado que

$$\Pi(z) = C\sqrt{2\pi}\,(z+1)^{z+1/2}\,e^{-z-1}\,e^{\mu(z+1)},$$

donde $C = 1/f(0)$. Falta probar que $C = 1$, para lo cual sustituimos el valor de $\Pi(z)$ que nos da esta ecuación en la fórmula de duplicación. Por simplificar la manipulación de las exponenciales podemos trabajar con números reales positivos x. Después de simplificar y agrupar los términos similares queda

$$\begin{aligned} e^{\mu(2x+1)-\mu(x+1)-\mu(x+1/2)+1/2} &= C\frac{(x+1)^{x+1/2}(x+1/2)^x}{(2x+1)^{2x+1/2}}\,2^{2x+1/2} \\ &= C\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x+1/2}. \end{aligned}$$

Tomamos logaritmos y hacemos tender x a $+\infty$. El resultado es $C = 1$. ∎

Capítulo VII

Series de Dirichlet

En este capítulo mostraremos importantes conexiones entre la teoría de funciones de variable compleja y la aritmética de los números naturales. Se basan en una familia de funciones holomorfas cuyo estudio partió de la fórmula siguiente, descubierta por Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \tag{7.1}$$

donde $s > 1$ y p recorre los números primos.

En la actualidad la función definida por cualquiera de los miembros de esta igualdad se conoce con el nombre que le dio Gauss: la función dseta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{para } s > 1,$$

si bien sus propiedades principales ya eran conocidas por Euler. Entre ellas, Euler observó que del hecho de que $\zeta(s)$ tiende a infinito cuando s tiende a 1 se deduce que el conjunto de los números primos es infinito. Ciertamente, ya Euclides había dado una prueba mucho más elemental y completamente rigurosa de este mismo hecho, pero en cierto sentido se puede considerar que la demostración de Euler marcó el inicio de lo que hoy se conoce como teoría analítica de números, pues ponía de manifiesto que existe algún tipo de relación entre los números primos y la función dseta.

Además, el argumento de Euler dista mucho de ser estéril. Años más tarde Dirichlet consiguió demostrar su famoso teorema sobre primos en progresiones aritméticas, frente al cual habían fracasado matemáticos de la talla de Legendre y aún el mismo Gauss, y la prueba era esencialmente una generalización nada trivial de la prueba de Euler. Por el contrario, era bien conocido que generalizando el argumento de Euclides sólo es posible demostrar unos pocos casos particulares del teorema de Dirichlet. Este teorema, del cual hablaremos más tarde, representaba un papel fundamental en la teoría de números, de tal suerte que Gauss tuvo que hacer gala de su notable ingenio en más de una ocasión para dar pruebas rigurosas de resultados que otros matemáticos como Euler o

Legendre habían probado mucho más fácilmente admitiendo sin demostración el teorema de Dirichlet.

Concretamente, Dirichlet generalizó la fórmula de Euler a otras funciones del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde los coeficientes a_n son números complejos. Éstas son las que hoy se conocen como series de Dirichlet.

Más tarde Riemann utilizó la función dseta para demostrar el llamado "teorema de los números primos", del que también nos ocuparemos aquí. El profundo estudio de la función dseta que llevó a cabo Riemann hizo que hoy esta función sea conocida como "función dseta de Riemann" pese a que, como hemos explicado, data de los tiempos de Euler y Gauss.

7.1 Convergencia de las series de Dirichlet

Comenzamos con la definición de serie de Dirichlet, aunque en realidad ya la hemos dado más arriba. Vamos a adoptar la notación tradicional en teoría de números, según la cual la variable compleja será $s = \sigma + i\tau$ en lugar de $z = x + iy$ (o sea, se sobrentenderá que s representa a un número complejo, σ a su parte real y τ a su parte imaginaria).

Definición 7.1 Una *serie de Dirichlet* es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde los coeficientes a_n son números complejos.

Nuestro primer objetivo es estudiar la región de convergencia de una serie de este tipo. Así como las series de potencias convergen en discos, probaremos que las series de Dirichlet convergen en semiplanos. Para ello necesitaremos el siguiente resultado técnico:

Teorema 7.2 (Teorema de Abel) *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números complejos. Sean*

$$A_{mp} = \sum_{n=m}^{p} a_n \quad y \quad S_{mk} = \sum_{n=m}^{k} a_n b_n.$$

Entonces

$$S_{mk} = \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn}(b_n - b_{n+1}) + A_{mk} b_k.$$

DEMOSTRACIÓN: Se trata de una simple comprobación rutinaria:

$$\begin{aligned}
S_{mk} &= a_m b_m + \sum_{n=m+1}^{k} (A_{mn} - A_{m\ n-1}) b_n \\
&= A_{mm} b_m + \sum_{n=m+1}^{k} A_{mn} b_n - \sum_{n=m+1}^{k} A_{m\ n-1} b_n \\
&= A_{mm} b_m + A_{mk} b_k + \sum_{n=m+1}^{k-1} A_{mn} b_n - \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn} b_{n+1} \\
&= A_{mm} b_m + A_{mk} b_k + \sum_{n=m+1}^{k-1} A_{mn} (b_n - b_{n+1}) - A_{mm} b_{m+1} \\
&= \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn} (b_n - b_{n+1}) + A_{mk} b_k.
\end{aligned}$$

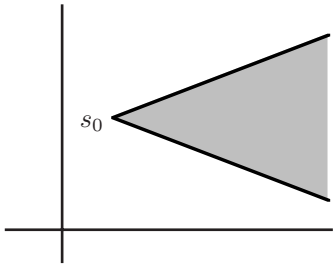
■

El resultado básico sobre convergencia de series de Dirichlet es el siguiente:

Teorema 7.3 *Si una serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *converge en un punto* $s = s_0$ *entonces converge uniformemente en cada conjunto de la forma*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0,\ |\arg(s - s_0)| \leq \alpha\},$$

donde $0 < \alpha < \pi/2$ *y* arg *es al argumento entre* $-\pi$ *y* π.



DEMOSTRACIÓN: Acotar superiormente $|\arg(s - s_0)|$ equivale a acotar inferiormente $\cos\big(\arg(s - s_0)\big)$ o a acotar superiormente la secante, es decir, basta probar que la convergencia es uniforme en los conjuntos de la forma

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_0,\ \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \leq C\}.$$

Notar que para probar la convergencia uniforme no importa despreciar el punto s_0. Tenemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}},$$

luego, dado $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $N \le m \le p$ entonces $|A_{mp}| \le \epsilon$, donde

$$A_{mp} = \sum_{n=m}^{p} \frac{a_n}{n^{s_0}}.$$

Tomemos $N \le m \le k$ y apliquemos el teorema anterior tomando como sucesiones (a_n) y (b_n) a (a_n/n^{s_0}) y $(1/n^{s-s_0})$. Con esto obtenemos

$$\sum_{n=m}^{k} \frac{a_n}{n^s} = S_{mk} = \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn}\left(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right) + A_{mk}\,\frac{1}{k^{s-s_0}}.$$

Notemos que

$$\left|\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right| = |e^{-(s-s_0)\log n} - e^{-(s-s_0)\log(n+1)}|$$

$$= \left|(s-s_0)\int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-t(s-s_0)}dt\right| \le |s-s_0| \int_{\log n}^{\log(n+1)} |e^{-t(s-s_0)}|\,dt$$

$$= |s-s_0| \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-t(\sigma-\sigma_0)}\,dt$$

$$= \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}(e^{-(\sigma-\sigma_0)\log n} - e^{-(\sigma-\sigma_0)\log(n+1)})$$

$$= \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}}\right).$$

En consecuencia

$$|S_{mk}| \le \sum_{n=m}^{k+1} |A_{mn}|\,\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}}\right) + |A_{mk}|\,\frac{1}{k^{\sigma-\sigma_0}}$$

$$\le C\epsilon \sum_{n=m}^{k-1}\left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}}\right) + \epsilon\,\frac{1}{k^{\sigma-\sigma_0}}$$

$$= C\epsilon\left(\frac{1}{m^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{k^{\sigma-\sigma_0}}\right) + \epsilon\,\frac{1}{k^{\sigma-\sigma_0}}.$$

Por último notamos que como $\sigma - \sigma_0 > 0$ se cumple $n^{\sigma-\sigma_0} > n^0 = 1$, luego $|S_{mk}| \le C\epsilon + \epsilon = (C+1)\epsilon$. Esto implica que la convergencia es uniforme. ∎

Ahora observamos que la unión de los conjuntos considerados en el teorema anterior cuando varía α es todo el semiplano $\sigma > \sigma_0$, así como que todo compacto en dicho semiplano está contenido en uno de estos conjuntos. Teniendo esto en cuenta es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 7.4 *Si una serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *converge en un punto* $s = s_0$*, entonces converge casi uniformemente a una función holomorfa en el semiplano* $\sigma > \sigma_0$*, cuya derivada viene dada por la serie de Dirichlet*

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s}.$$

Definición 7.5 Se llama *abscisa de convergencia* de una serie de Dirichlet al ínfimo σ_c del conjunto de los números reales en los que la serie converge, entendiendo que $\sigma_c = -\infty$ si la serie converge en todo $\mathbb{R}$ y $\sigma_c = +\infty$ si la serie no converge en ningún número real.

El teorema anterior implica que una serie de Dirichlet converge a una función holomorfa en el semiplano $\sigma > \sigma_c$ y diverge en todos los puntos con $\sigma < \sigma_c$. A este semiplano se le llama *semiplano de convergencia* de la serie. Al igual que ocurre con la convergencia de las series de potencias sobre la frontera de su disco de convergencia, el comportamiento de una serie de Dirichlet sobre los puntos situados en la recta $\sigma = \sigma_c$ depende de cada caso particular.

Ejercicio: Probar que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-n}}{n^s} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^s}$$

tienen abscisa de convergencia $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.

Consideremos ahora la función dseta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Con el teorema 3.6 se ve fácilmente que, sobre números reales, esta serie converge si y y sólo si $s > 1$, aunque conviene probarlo directamente:

$$\frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^s}\,dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\,dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s}\,dx = \frac{1}{n^s}.$$

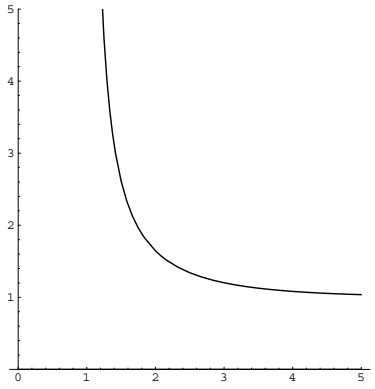
Por lo tanto

$$\int_1^{k+1} \frac{1}{x^s}\,dx < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x^s}\,dx,$$

luego integrando y tomando límites queda, para $s > 1$,

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}. \tag{7.2}$$

Por otra parte es obvio que la serie diverge en 1, luego concluimos que la abscisa de convergencia es $\sigma_c = 1$. La figura muestra la gráfica de la función dseta.



Las desigualdades que hemos demostrado justifican que, tal y como muestra la figura, la función dseta tiende a $+\infty$ en 1. Luego veremos que tiende a 1 en $+\infty$.

En el capítulo IV demostramos la convergencia de $\zeta(2k)$ para $k = 1, 2, \ldots$ (a la que llamábamos S_{2k}) y probamos concretamente (4.8) que

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}.$$

En particular $\zeta(2) = \pi^2/6$. Estos resultados forman parte de la investigación de Euler sobre la función dseta.

Una serie de potencias converge absolutamente en su disco de convergencia. Cabe preguntarse si del mismo modo, una serie de Dirichlet converge absolutamente en su semiplano de convergencia. La respuesta en general es negativa, pero tenemos un teorema similar al teorema 7.3 para convergencia absoluta. La prueba es mucho más fácil en este caso.

Teorema 7.6 *Si una serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *converge absolutamente en un punto* $s = s_0$*, entonces converge absolutamente en el semiplano* $\sigma > \sigma_0$*.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato, ya que si $\sigma > \sigma_0$, entonces

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} = \left|\frac{a_n}{n^{\sigma_0}}\right|.$$

■

Definición 7.7 Se llama *abscisa de convergencia absoluta* de una serie de Dirichlet al ínfimo σ_a del conjunto de los números reales en los que la serie converge absolutamente, entendiendo que $\sigma_a = -\infty$ si la serie converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$ y $\sigma_a = +\infty$ si la serie no converge absolutamente en ningún número real.

El teorema anterior prueba que una serie de Dirichlet converge absolutamente en el semiplano $\sigma > \sigma_a$, llamado *semiplano de convergencia absoluta* y no converge absolutamente en ningún punto tal que $\sigma < \sigma_a$. De nuevo el comportamiento sobre frontera del semiplano depende de cada caso.

Es obvio que toda serie de Dirichlet cumple $\sigma_c \le \sigma_a$. Puesto que la función dseta diverge en $s = 1$ y es una serie de términos positivos para $s > 1$, es claro que en este caso se tiene la igualdad $\sigma_c = \sigma_a$. Sin embargo también puede darse la desigualdad estricta. Basta pensar en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

Al tomar módulos cuando s es real obtenemos la función dseta, por lo que $\sigma_a = 1$. Por otra parte, el criterio de Leibniz para series alternadas prueba que

la serie converge siempre que $s > 0$, y obviamente diverge cuando $s = 0$. Así pues $\sigma_c = 0$.

Pese a esto, la relación entre las dos abscisas de convergencia de una serie es más estrecha de lo que puede parecer en un principio. Se cumple el teorema siguiente:

Teorema 7.8 *La abscisa de convergencia y la abscisa de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet satisfacen la desigualdad $\sigma_a - \sigma_c \leq 1$, entendiendo que una es $\pm\infty$ si y sólo si lo es la otra.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que si una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge en s_0, entonces converge absolutamente en el semiplano $\sigma > \sigma_0 + 1$. Ahora bien, la sucesión a_n/n^{s_0} tiende a 0, luego está acotada. Sea $C > 0$ tal que $|a_n/n^{s_0}| \leq C$ para todo n. Entonces

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \left|\frac{a_n}{n^{s_0}}\right| \left|\frac{1}{n^{s-s_0}}\right| \leq C\,\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}},$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \leq C\zeta(\sigma - \sigma_0).$$

■

El teorema siguiente nos permite calcular las abscisas de convergencia de las series de Dirichlet que nos van a aparecer en la práctica.

Teorema 7.9 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ una serie de Dirichlet.*

a) Si la sucesión (a_n) está acotada, entonces $\sigma_a \leq 1$.

b) Si las sumas parciales $\sum_{n=1}^{k} a_n$ están acotadas, entonces $\sigma_c \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN: a) Si $|a_n| \leq M$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = M\zeta(\sigma).$$

b) Claramente las sumas $A_{mp} = \sum_{n=m}^{p} a_n$ están también acotadas (digamos por K). Basta demostrar que la serie converge en todo número real $s > 0$. Aplicamos el teorema 7.2:

$$\sum_{n=m}^{k} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=m}^{k-1} A_{mn}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + A_{mk}\,\frac{1}{k^s}.$$

Así pues,

$$\left|\sum_{n=m}^{k}\frac{a_n}{n^s}\right| \le K\sum_{n=m}^{k-1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)+K\,\frac{1}{k^s}=\frac{K}{m^s}.$$

Como el último término tiende a 0 con m, concluimos que la serie converge. ∎

Veamos una aplicación sencilla de este criterio.

Teorema 7.10 *La función dseta de Riemann puede prolongarse a una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$ salvo en un polo simple en $s = 1$ con residuo*[1] *1.*

Demostración: Consideremos la serie de Dirichlet

$$f(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \cdots$$

Como las sumas parciales de sus coeficientes están acotadas, el teorema anterior nos da que f converge en el semiplano $\sigma > 0$. Es obvio que tanto $\zeta(s)$ como $f(s)$ convergen absolutamente cuando $\sigma > 1$, luego podemos manipular las series y concluir que

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

Por lo tanto la función

$$f(s)\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)^{-1}$$

es una extensión meromorfa de $\zeta(s)$ al semiplano $\sigma > 0$. Los polos de esta extensión se encuentran a lo sumo donde el denominador se anula, esto es, en los puntos donde $2^{s-1} = 1$. Es claro que estos puntos son los de la forma

$$1 + \frac{2\pi i n}{\log 2},$$

donde n es un entero. Por otra parte podemos considerar la función

$$g(s) = 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \cdots$$

y concluir igualmente que

$$g(s)\left(1 - \frac{1}{3^{s-1}}\right)^{-1}$$

[1] Como ya comentamos al estudiar la función factorial, el residuo de una función holomorfa en un polo es el coeficiente a_{-1} de su serie de Laurent en el mismo.

es una extensión meromorfa de $\zeta(s)$. Por el principio de prolongación analítica ambas extensiones coinciden, luego un polo de la extensión ha de ser simultáneamente de la forma

$$1+\frac{2\pi in}{\log 2}=1+\frac{2\pi im}{\log 3},$$

pero esto implica $2^m=3^n$, luego $m=n=0$ y a lo sumo hay un polo en $s=1$.

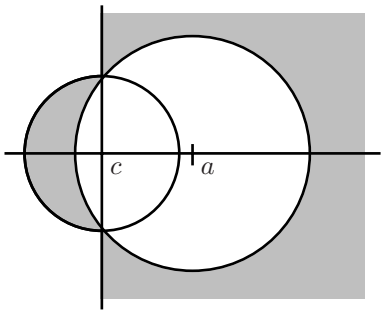
Por otra parte las desigualdades (7.2) implican que la singularidad en 1 no es evitable (luego es un polo), así como que existe

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1.$$

En principio tenemos que existe el límite cuando s tiende a 1 por la derecha, pero dado que la función $(s-1)\zeta(s)$ es holomorfa alrededor de 1 y la singularidad no es esencial, necesariamente ha de ser evitable, luego existe el límite global. Además, como $s-1$ cancela la singularidad, ésta es ciertamente un polo simple con residuo 1. ∎

En el capítulo XI probaremos que de hecho la función dseta se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo en 1. La presencia de esta singularidad no es casual, sino que en realidad es una consecuencia del siguiente teorema general:

Teorema 7.11 *Sea $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ una serie de Dirichlet convergente en un semiplano $\sigma>c$ y con coeficientes $a_n\geq 0$. Si la función f admite una prolongación analítica a un entorno de c, entonces existe un $\epsilon>0$ tal que la serie converge en el semiplano $\sigma>c-\epsilon$.*



Demostración: Sea $a=1+c$ y consideremos la serie de Taylor de f en un entorno de a:

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(a)}{n!}(s-a)^n$$

Su radio de convergencia es el máximo posible, luego ha de ser mayor que 1 y, en particular, la serie converge en un número de la forma $s=c-\epsilon$, con $\epsilon>0$.

Sustituimos las derivadas de f por su valor según el teorema 7.4:

$$f^{n)}(a)=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(\log k)^n}{k^a}.$$

El resultado es:

$$f(c-\epsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(\log k)^n}{n!\,k^a}(-1-\epsilon)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(\log k)^n}{n!\,k^a}(1+\epsilon)^n.$$

Como todos los términos son positivos todas las convergencias son absolutas, y podemos reordenar los sumandos como sigue:

$$\begin{aligned} f(c-\epsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1+\epsilon)\log k)^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^a}\, e^{(1+\epsilon)\log k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^a}\, k^{1+\epsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{c-\epsilon}}, \end{aligned}$$

luego la serie converge en $c-\epsilon$ y, por lo tanto, en todo el semiplano $\sigma > c-\epsilon$. ∎

Esto significa que si una función definida mediante una serie de Dirichlet con coeficientes positivos admite una extensión meromorfa a un semiplano mayor (como le ocurre a la función dseta, entonces la extensión ha de tener un polo en σ_c, pues en caso contrario la serie convergería en puntos anteriores a σ_c, lo cual es absurdo.

Ahora nos ocupamos de las propiedades de las funciones definidas por series de Dirichlet. El teorema siguiente muestra que no toda función holomorfa en un semiplano admite un desarrollo en serie de Dirichlet. Ni siquiera lo admiten las funciones enteras más importantes (exponencial, seno, coseno, etc.).

Teorema 7.12 *Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ es una función definida por una serie de Dirichlet, entonces existe*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} f(s) = a_1 \qquad \textit{uniformemente en } \tau.$$

Demostración: Basta probar que

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0 \qquad \text{uniformemente en } \tau.$$

Tomemos $c > \sigma_a$. Entonces si $\sigma > c$ se cumple

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c}\, \frac{1}{n^{\sigma-c}} \le \frac{1}{2^{\sigma-c}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} = \frac{K}{2^\sigma},$$

luego el límite es 0 uniformemente. ∎

Con esto hemos justificado el comportamiento de $\zeta(s)$ en $+\infty$ que nos mostraba su gráfica.

Si una función holomorfa admite un desarrollo en serie de Dirichlet en un semiplano, entonces dicho desarrollo es único. Esto es una consecuencia del teorema siguiente, que es una variante del principio de prolongación analítica para series de Dirichlet.

Teorema 7.13 *Sean* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *y* $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *dos funciones definidas por series de Dirichlet. Supongamos que existe una sucesión* (s_k) *de manera que* $\lim_k \sigma_k = +\infty$ *y* $f(s_k) = g(s_k)$ *para todo* k*. Entonces* $a_n = b_n$ *para todo* n*.*

DEMOSTRACIÓN: Pasando a la función $f-g$ podemos suponer que $f(s_k) = 0$ para todo k y demostrar que entonces $a_n = 0$ para todo n. Sea r el menor natural tal que $a_r \neq 0$. Por el teorema anterior $a_1 = 0$, luego $r \geq 2$.

$$f(s) = \frac{a_r}{r^s} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Sea $c > \sigma_a$. Evaluamos en s_k tomando k suficientemente grande para que $s_k > c$. Así

$$a_r = -r^{s_k} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_k}}.$$

Tomando módulos queda

$$|a_r| \leq r^{\sigma_k} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} \frac{1}{n^{\sigma_k - c}} \leq \frac{r^{\sigma_k}}{(r+1)^{\sigma_k - c}} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} = \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\sigma_k} K,$$

y como esto es cierto para todo k suficientemente grande, concluimos que $a_r = 0$, en contradicción con lo supuesto. ∎

Como consecuencia resulta que toda serie de Dirichlet es no nula en un cierto semiplano.

7.2 Funciones aritméticas

Según comentábamos en la introducción, las series de Dirichlet están muy relacionadas con los primos y la aritmética de los números enteros. Antes de entrar en los resultados a este respecto conviene introducir una notación más algebraica que resulta más adecuada para enunciar teoremas como la fórmula del producto de Euler.

Definición 7.14 Una *función aritmética* es una aplicación $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Las funciones aritméticas son simplemente sucesiones de números complejos, pero conviene pensar en ellas como funciones en lugar de como sucesiones. Cada función aritmética f determina una serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

y toda serie de Dirichlet es de esta forma.

Una función aritmética f es *multiplicativa* si no es idénticamente nula y además $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo par de naturales m y n primos entre sí.

Observar que en tal caso $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)f(1)$, luego $f(1) = 1$ (también podría ser $f(1) = 0$, pero entonces $f(n) = f(1n) = f(1)f(n) = 0$ y f sería idénticamente nula).

Una función aritmética f es *completamente multiplicativa* si no es idénticamente nula y $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo par de naturales m y n.

Observar que toda función definida sobre las potencias de primos se extiende de forma única a una función aritmética multiplicativa, y toda función definida sobre los números primos se extiende de forma única a una función aritmética completamente multiplicativa.

Teorema 7.15 *Sea f una función aritmética.*

a) Si f es multiplicativa entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(p^n)}{p^{ns}} \qquad \text{para } \sigma > \sigma_a,$$

donde p recorre los números primos.

b) Si f es completamente multiplicativa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}} \qquad \text{para } \sigma > \sigma_a,$$

En particular las series definidas por funciones completamente multiplicativas son no nulas en todo el semiplano $\sigma > \sigma_a$.

Todas las series y productos considerados convergen absolutamente.

Demostración: a) Cada factor del producto es de la forma $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(p^n)}{p^{ns}}$, luego según el teorema 4.5 para que el producto converja absolutamente basta que la serie

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(p^n)}{p^{ns}}$$

converja absolutamente, pero sus sumandos son parte de los de la serie completa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s},$$

que converge absolutamente, luego tenemos la convergencia absoluta del producto.

Aplicando un número finito de veces la fórmula (3.1) concluimos que

$$\prod_{p\le N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(p^n)}{p^{ns}}=\sum_{n\in A}\frac{f(n)}{n^s},$$

donde A es el conjunto de los números naturales divisibles sólo entre primos $p\le N$. Consecuentemente

$$\left|\prod_{p\le N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(p^n)}{p^{ns}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right|=\left|\sum_{n\in B}\frac{f(n)}{n^s}\right|\le\sum_{n\ge N}\frac{|f(n)|}{n^\sigma},$$

donde B es el conjunto de los números naturales divisibles entre algún primo $p>N$, que está contenido en el conjunto de los números $n\ge N$.

La última expresión tiende a 0 con N, pues es la cola de una serie convergente.

El apartado b) es inmediato sin más que hacer $f(p^n)=f(p)^n$ y sumar la serie geométrica que aparece. ∎

En particular hemos probado (7.1), la fórmula clásica de Euler para la función dseta. Según comentábamos en la introducción, de esta fórmula se deduce la existencia de infinitos primos. En realidad podemos concluir algo más fuerte: (Adoptamos el convenio de que el índice p en sumas y productos recorre siempre los números primos.)

Teorema 7.16 *La serie* $\sum_p \frac{1}{p}$ *es divergente.*

Demostración: Aplicando el teorema 4.3 al desarrollo en producto de la función dseta resulta que

$$\log\zeta(s)=\sum_p\log\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

es un logaritmo de $\zeta(s)$. Más aún, la serie es absolutamente convergente por la definición de convergencia absoluta de un producto. Ahora consideramos el desarrollo de Taylor

$$\log\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$$

Combinando ambas igualdades tenemos que

$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,p^{ns}},$$

donde la serie converge absolutamente. En consecuencia

$$\log\zeta(s)=\sum_p\frac{1}{p^s}+\sum_p\sum_{n\ge2}\frac{1}{n\,p^{ns}}.$$

Si nos restringimos a números reales $s \geq 1$ es claro que el miembro izquierdo tiende a ∞ cuando s tiende a 1. Basta probar que la última serie permanece acotada, pues entonces la función $\sum_p \frac{1}{p^s}$ tenderá también a ∞ y, dado que $1/p^s \leq 1/p$, la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ tendrá que ser divergente. Ahora bien:

$$\sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\, p^{ns}} \leq \sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{1}{p^n} = \sum_p \frac{1}{p^2 - p} \leq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - n} = 1.$$

(la última serie es telescópica). ∎

Esta prueba es esencialmente la descubierta por Euler en 1737 y que, según comentábamos, tiene el interés de que es generalizable a otros contextos, como la prueba del teorema de Dirichlet que veremos más adelante. Sin embargo hay que notar que la divergencia de la serie de los inversos de los primos puede probarse por métodos mucho más elementales basándose en la prueba de Euclides de la existencia de infinitos primos. La demostración siguiente se debe a Clarkson y es de 1966:

Supongamos que $\sum_p \frac{1}{p} < +\infty$. Entonces existe un N tal que $\sum_{p>N} \frac{1}{p} < 1/2$. Por lo tanto

$$\sum_{t=0}^{\infty} \Big(\sum_{p>N} \frac{1}{p} \Big)^t \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} < +\infty.$$

Ahora bien, la serie de la izquierda no es más que $\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$, donde A es el conjunto de los números naturales no divisibles entre primos menores que N. Si llamamos P al producto de los primos menores o iguales que N tenemos que $nP + 1 \in A$ para todo n, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nP + 1} < +\infty,$$

pero por otra parte es claro que esta serie diverge, por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Por lo tanto la serie de partida no puede converger. ∎

El teorema siguiente es fundamental para relacionar las funciones aritméticas con las series de Dirichlet que determinan:

Teorema 7.17 *Sean f y g dos funciones aritméticas cuyas series de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

sean absolutamente convergentes para $\sigma > \sigma_0$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}, \qquad \text{para } \sigma > \sigma_0,$$

donde $f * g$ es la función aritmética dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

(Aquí y en lo sucesivo la notación $d \mid n$ significa que d es un divisor de n).

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata de (3.1) y de las propiedades de las series absolutamente convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{m,n} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}.$$

■

Este teorema tiene muchas consecuencias. Para obtenerlas conviene introducir algunos conceptos algebraicos elementales.

Definición 7.18 Si f y g son funciones aritméticas, llamaremos *convolución de Dirichlet* de f y g a la función aritmética $f * g$ dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

El teorema anterior prueba que si las series de Dirichlet de f y g convergen en algún punto, entonces la serie de $f * g$ converge al producto de ambas series en la intersección de sus semiplanos de convergencia absoluta. Por otra parte es evidente que se cumple un resultado análogo para la suma de series y la suma de funciones aritméticas definida puntualmente, es decir, $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$.

Si llamamos A al conjunto de todas las funciones aritméticas es fácil ver que A se convierte en un anillo conmutativo y unitario con la suma y el producto que acabamos de definir, y así, las operaciones de A se corresponden con las operaciones entre las series de Dirichlet cuando éstas convergen.

El elemento neutro para el producto es claramente la función 1 dada por

$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

La serie asociada a la función 1 define la función constante igual a 1, y su abscisa de convergencia es $-\infty$.

Aunque no vamos a necesitar este hecho, es fácil ver que A se convierte en un álgebra sobre $\mathbb{C}$ considerando el producto escalar definido puntualmente: $(zf)(n) = zf(n)$. Veamos algunas propiedades algebraicas de las funciones aritméticas.

Teorema 7.19 *Se cumple:*

a) Una función aritmética f tiene inversa si y sólo si $f(1) \neq 0$.

b) El producto de funciones multiplicativas es una función multiplicativa.

c) La inversa de una función multiplicativa es una función multiplicativa.

DEMOSTRACIÓN: a) Si existe f^{-1} entonces $f(1)f^{-1}(1) = (f * f^{-1})(1) = 1(1) = 1$, luego $f(1) \neq 0$. Recíprocamente, si $f(1) \neq 0$ vamos a definir inductivamente f^{-1}. En primer lugar $f^{-1}(1) = 1/f(1)$, con lo que el razonamiento anterior garantiza que $f(1)f^{-1}(1) = 1(1)$.

Para definir $f^{-1}(n)$ con $n > 1$ observamos que queremos que se cumpla

$$\sum_{d|n} f(d)f^{-1}(n/d) = 0,$$

luego la definición ha de ser

$$f^{-1}(n) = \frac{1}{f(1)} \sum_{1<d|n} f(d)f^{-1}(n/d).$$

Claramente, la función f^{-1} así definida es la inversa de f.

b) Si f y g son multiplicativas entonces $(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1 \neq 0$, luego $f * g$ no es nula. Si m y n son números naturales primos entre sí,

$$(f * g)(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g(mn/d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1d_2)g(mn/d_1d_2)$$

$$= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1)g(m/d_1)f(d_2)g(n/d_2) = (f * g)(m)(f * g)(n).$$

Por lo tanto $f * g$ es multiplicativa.

c) Supongamos que f es multiplicativa pero f^{-1} no lo es. Entonces existen números m y n primos entre sí tales que $f^{-1}(mn) \neq f^{-1}(m)f^{-1}(n)$. Podemos tomarlos de modo que mn sea el mínimo posible. Como la función $f * f^{-1} = 1$ es multiplicativa, tenemos que $(f * f^{-1})(mn) = (f * f^{-1})(m)(f * f^{-1})(n)$, o sea,

$$\sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f(d_1d_2)f^{-1}(mn/d_1d_2) = \sum_{d_1|m} f(d_1)f^{-1}(m/d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2)f^{-1}(n/d_2).$$

Ahora bien, por la minimalidad de mn cada sumando de la izquierda es igual a un sumando de la derecha y viceversa, excepto los correspondientes a $d_1 = d_2 = 1$. Pero si cancelamos los sumandos iguales queda $f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$, contradicción. ∎

Las inversas de las funciones completamente multiplicativas son especialmente fáciles de calcular, ya que pueden expresarse en términos de la función de Möbius:

Definición 7.20 La *función de Möbius* es la función multiplicativa dada por

$$\mu(p^n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Teorema 7.21 *Si f es una función aritmética completamente multiplicativa entonces $f^{-1} = \mu f$ (donde el producto no es la convolución de Dirichlet, sino el producto puntual definido en general como $(fg)(n) = f(n)g(n)$).*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que $\mu f * f = 1$. La función de la izquierda es multiplicativa por ser un producto de funciones multiplicativas, luego basta probar que $(\mu f * f)(p^n) = 0$, para todo primo p y todo $n \geq 1$. Ahora bien, como los divisores de p^n son los p^k para $k \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned}(\mu f * f)(p^n) &= \sum_{k=0}^{n} \mu(p^k) f(p^k) f(p^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \mu(p^k) f(p^n) \\ &= \big(\mu(1) + \mu(p)\big) f(p^n) = 0.\end{aligned}$$

■

En particular, si llamamos c_1 a la función aritmética dada por $c_1(n) = 1$, es claro que c_1 es completamente multiplicativa y el teorema anterior nos da que su inversa es μ. Por lo pronto esto muestra que la inversa de una función completamente multiplicativa no tiene por qué ser completamente multiplicativa. Por otro lado, la serie de Dirichlet asociada a c_1 es la función dseta, luego el teorema 7.17 nos da que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1,$$

o sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Esto es válido donde ambas series convergen absolutamente. El teorema 7.9 nos da que la abscisa de convergencia absoluta de la serie de μ es menor o igual que 1, luego la fórmula anterior es válida en el semiplano $\sigma > 1$.

Observar que en general no tenemos ningún resultado que relacione la abscisa de convergencia absoluta de la serie asociada a una función aritmética f y la de la asociada a f^{-1}, pero en el caso en que f sea completamente multiplicativa el hecho de que $|\mu| \leq 1$ junto con el teorema 7.21 implica que la serie de f^{-1} converge absolutamente al menos donde lo hace f.

Veamos algunos ejemplos más de funciones aritméticas que nos harán falta más adelante.

- Definimos la *función potencia* k-ésima como la dada por $p^k(n) = 1$ si n es una potencia k-ésima y $p^k(n) = 0$ en otro caso. Claramente su serie asociada es
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{ks}} = \zeta(ks),$$
y su abscisa de convergencia absoluta es $1/k$.

- La *función de Liouville* es la función completamente multiplicativa definida por $\lambda(p) = -1$ para todo primo p. Veamos que $\lambda * c_1 = p^2$. Como todas las funciones son multiplicativas basta probar que actúan igual sobre potencias de primos, pero

$$(\lambda * c_1)(p^n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(p^k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = p^2(p^n).$$

  Puesto que según el teorema 7.9 la abscisa de convergencia absoluta de λ es menor o igual que 1, el teorema 7.17 nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

  Por otra parte es claro que $\lambda^{-1} = \mu\lambda = |\mu|$, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu|(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

- Definimos la función N mediante $N(n) = n$. Es inmediato comprobar que su serie de Dirichlet asociada tiene abscisa de convergencia absoluta igual a 2 y que converge a la función $\zeta(s-1)$.

- La función ϕ de Euler es la que a cada número natural n le asigna el número de números menores o iguales que n primos con n.

  Representamos por (m, n) el máximo común divisor de m y n. Llamemos $A_d = \{m \mid 1 \leq m \leq n, (m, n) = d\}$. Puesto que $(m, n) = d$ si y sólo si $(m/d, n/d) = 1$, es claro que $|A_d| = \phi(n/d)$ y, como obviamente $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{d|n} A_d$, resulta que $n = \sum_{d|n} \phi(n/d)$, de donde obtenemos la relación $N = \phi * c_1$ o, lo que es lo mismo, $\phi = N * \mu$. De esta última expresión se sigue que ϕ es multiplicativa, así como que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \qquad \text{para } \sigma > 2.$$

Para terminar la teoría de series de Dirichlet demostraremos que el logaritmo de una serie de Dirichlet se puede expresar como serie de Dirichlet. Para ello conviene introducir la derivada de una función aritmética:

Definición 7.22 Si f es una función aritmética, llamaremos *derivada* de f a la función aritmética dada por $f'(n) = f(n) \log n$.

El teorema 7.4 prueba que la serie de Dirichlet asociada a $-f'$ converge a la derivada de la serie de f en todos los puntos donde ésta converge. Aunque no nos va a hacer falta, es fácil demostrar que $(f + g)' = f' + g'$, así como que $(f * g)' = f' * g + f * g'$.

Teorema 7.23 *Sea f una función aritmética tal que $f(1) \neq 0$. Sea*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

la serie de Dirichlet determinada por f. Entonces la serie

$$\log F(s) = \log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\log n \; n^s}$$

(donde $\log f(1)$ es cualquier logaritmo de $f(1)$) define un logaritmo de la función F en el semiplano donde convergen absolutamente las series asociadas a f y a f^{-1}. En particular, si f es completamente multiplicativa la abscisa de convergencia absoluta de $\log F$ es menor o igual que la de F.

Demostración: Por el teorema 7.13 tenemos que F no se anula en un cierto semiplano. Por lo tanto en dicho semiplano tendremos $F(s) = e^{G(s)}$ para cierta función holomorfa $G(s)$. Derivando queda $F'(s) = e^{G(s)}G'(s)$, luego $G'(s) = F'(s)/F(s)$. Consecuentemente

$$G'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f' * f)(n)}{n^s},$$

y la serie converge absolutamente donde lo hacen la serie asociada a f y la asociada a f^{-1}.

Observar que $f'(1) = 0$, luego el primer sumando de la serie es nulo. Integrando término a término queda que

$$G(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\log n \; n^s}.$$

El teorema 7.12 nos da que

$$C = \lim_{\sigma \to +\infty} G(s),$$

y componiendo con la exponencial queda que

$$e^C = \lim_{\sigma \to +\infty} e^{G(s)} = \lim_{\sigma \to +\infty} F(s) = f(1),$$

luego C es un logaritmo de $f(1)$. Cambiando el valor de C obtenemos distintas funciones, todas con la propiedad de ser logaritmos de $F(s)$. ∎

Se define la *función de Mangoldt* como la función aritmética dada por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m,\ m \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vamos a comprobar la relación siguiente: $\Lambda * c_1 = \log = c_1'$.

En efecto, si $n = 1$ es claro que $(\Lambda * c_1)(1) = 0 = \log 1$. En otro caso $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ y se cumple

$$(\Lambda * c_1)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \Lambda(p_i^j) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \log p_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \log p_i = \log n.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \qquad \text{para } \sigma > 1$$

y, por el teorema anterior,

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n \; n^s}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

Como muestra del modo en que las series de Dirichlet permiten obtener resultados aritméticos vamos a probar el hecho siguiente:

> *La probabilidad de que dos números naturales elegidos al azar sean primos entre sí es de* $6/\pi^2$.

Para ello necesitamos estimar el error de las sumas parciales de ciertas series. Conviene introducir la notación siguiente:

Definición 7.24 Si $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, representaremos mediante $O\big(f(x)\big)$ (leído "una función del orden de $f(x)$") a una función indeterminada con la propiedad de que $|O\big(f(x)\big)| \leq C|f(x)|$ para cierta constante C y todo x suficientemente grande.

Teorema 7.25 *Se cumple*

a) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(1/x),$

b) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(1/x),$

c) $\displaystyle\sum_{n\leq x} n = \frac{x^2}{2} + O(x),$

d) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1),$

e) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2}\, x^2 + O(x \log x).$

DEMOSTRACIÓN: a) Vamos a obtener una expresión para la suma $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$ similar a la que obtuvimos para $\log n! = \sum_{s=1}^{n} \log s$ en la prueba del teorema 4.28. El razonamiento es el mismo:

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} = -2\int_n^k \frac{1}{t^3}\,dt.$$

Sumando queda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{k} + 2\sum_{n=1}^{k}\int_n^k \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{k} + 2\sum_{n=1}^{k}\sum_{r=n}^{k-1}\int_r^{r+1} \frac{1}{t^3}\,dt \\
&= \frac{1}{k} + 2\sum_{r=1}^{k-1} r\int_r^{r+1} \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{k} + 2\sum_{r=1}^{k-1}\int_r^{r+1} \frac{E(t)}{t^3}\,dt \\
&= \frac{1}{k} + 2\int_1^k \frac{E(t)}{t^3}\,dt = \frac{1}{k} - 2\int_1^k \frac{t-E(t)}{t^3}\,dt + 2\int_1^k \frac{1}{t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{k} - 2\int_1^k \frac{F(t)}{t^3}\,dt + 2\left(1-\frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{k} - 2\int_1^k \frac{F(t)}{t^3}\,dt.
\end{aligned}$$

Como en 4.28, calculamos la integral infinita tomando límites:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - 2\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,dt.$$

Como en este caso nos interesa el resto de la serie, escribimos

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{k} - 2\int_k^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,dt \le \frac{1}{k}.$$

Por último:

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\le x} \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{E(x)} \le \frac{1}{x-1} = O(1/x).$$

Para probar b) basta observar que

$$\left|\frac{6}{\pi^2} - \sum_{n\le x} \frac{\mu(n)}{n^2}\right| = \left|\sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n^2}\right| \le \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\le x} \frac{1}{n^2} = O(1/x).$$

Similarmente obtenemos c):

$$\left|\sum_{n\le x} n - \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{E(x)\big(E(x)+1\big)}{2} - \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^2 - E(x)^2}{2} + \frac{E(x)}{2} \le \frac{3}{2}\,x,$$

pues $x^2 - E(x)^2 = \big(x - E(x)\big)\big(x + E(x)\big) \le x + E(x) \le 2x$.

d) Es inmediato. Aunque no nos va a ser necesario, lo cierto es que siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado a) es fácil llegar a que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \log k - \gamma = \int_k^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt \le \int_k^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{k},$$

de donde se sigue que en realidad

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \gamma + \log x + O(1/x).$$

e) La relación $\phi = m * N$ nos da que

$$\sum_{n\le x} \phi(n) = \sum_{n\le x} \sum_{d|n} \mu(d)\, \frac{n}{d} = \sum_{d\le x} \sum_{m\le x/d} \mu(d) m = \sum_{d\le x} \mu(d) \sum_{m\le x/d} m.$$

Si llamamos $f(x) = \sum\limits_{n\le x} n - \frac{x^2}{2}$ el apartado c) prueba que $|f(x)| \le Cx$. Usando también los apartados restantes concluimos que

$$\sum_{n\le x} \phi(n) = \sum_{d\le x} \mu(d) \left(\frac{x^2}{2d^2} + f(x/d)\right) \le \frac{x^2}{2} \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d^2} + C \sum_{d\le x} \frac{x}{d}$$

$$= \frac{x^2}{2} \left(\frac{6}{\pi^2} + O(1/x)\right) + Cx(\log x + O(1)) = \frac{3}{\pi^2}\, x^2 + O(x) + O(x \log x) + O(x)$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\, x^2 + O(x \log x).$$

■

Ahora es inmediata la afirmación anterior sobre la probabilidad de escoger dos números naturales primos entre sí. Ante todo, esta probabilidad ha de entenderse como el límite de la probabilidad de que al escoger dos números entre 1 y N resulten ser primos entre sí. A su vez, esta probabilidad se define por la ley probabilidad de Laplace:

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

El número de casos posibles es obviamente N^2, mientras que el número de casos favorables puede calcularse como sigue:

Llamemos $A_n = \big\{(m,n) \;\big|\; 1 \le m \le n,\ (m,n) = 1\big\}$. Entonces A_n tiene $\phi(n)$ elementos y

$$\bigcup_{n\le N} A_n = \big\{(m,n) \;\big|\; 1 \le m \le n \le N,\ (m,n) = 1\big\}$$

tiene $\sum_{n\leq N}\phi(n)$ elementos. El conjunto que queremos contar es

$$\big\{(m,n)\;\big|\;1\leq m,n\leq N,\ (m,n)=1\big\},$$

y es claro que consta de $2\phi(n)-1$ pares, pues al multiplicar por 2 estamos contando dos veces el par $(1,1)$, que es el único con componentes iguales.

Así pues, queremos calcular el límite de la sucesión

$$\frac{1}{N^2}\Big(2\sum_{n\leq N}\phi(n)-1\Big),$$

o, equivalentemente, el de la función

$$\frac{1}{x^2}\Big(2\sum_{n\leq x}\phi(n)-1\Big)=\frac{6}{\pi^2}+\frac{2}{x^2}\,O(x\log x)-\frac{1}{x^2}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{\log x}{x}\right)-\frac{1}{x^2}.$$

Obviamente el límite vale $6/\pi^2$. ∎

7.3 Permutaciones circulares

Dedicamos esta sección a dar una aplicación interesante de la función de Möbius. Vamos a calcular el número de permutaciones circulares con repetición.

Permutaciones Una *permutación* (lineal ordinaria) de n elementos es cada una de las formas distintas de ordenar linealmente n elementos distintos.

Por ejemplo, hay 6 permutaciones de 3 elementos, a saber,

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

En general, es conocido que el número de permutaciones de n elementos es $\mathrm{P}^n=n!$

Permutaciones con repetición Una *permutación* (lineal) de k elementos *con repeticiones* $(r_1,\ldots,r_k)$ es cada una de las formas distintas de ordenar linealmente k elementos distintos de modo que el primero se repita r_1 veces, el segundo r_2 veces, etc. Si llamamos $n=r_1+\cdots+r_k$, en la práctica es más cómodo hablar de permutaciones de n elementos (en lugar de k) con repeticiones $r_1,\ldots,r_k$.

Por ejemplo, hay 3 permutaciones de 3 elementos con repeticiones $(2,1)$:

$$112,\quad 121,\quad 211.$$

Para calcular su número en general, partimos el conjunto $I_n=\{1,\ldots,n\}$ en conjuntos disjuntos A_i de cardinal r_i y a cada una de las permutaciones

ordinarias de n elementos $a_1, \dots, a_n$ le asociamos la permutación con repetición $b_1, \dots, b_n$ dada por $a_i \in A_{b_i}$.

Por ejemplo, si $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, tenemos la correspondencia:

$$123, 213 \mapsto 112, \quad 132, 231 \mapsto 121, \quad 312, 321 \mapsto 211.$$

En general, las permutaciones ordinarias que dan lugar a la misma permutación con repetición que una dada son las que resultan de permutar arbitrariamente los elementos de cada conjunto A_i. Como hay $r_i!$ permutaciones de cada A_i, vemos que las $n!$ permutaciones ordinarias se dividen en clases de $r_1! \cdots r_k!$ elementos cada una, que determinan la misma permutación con repetición. El número de éstas es, pues,

$$\mathrm{PR}^n_{r_1,\dots,r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}.$$

Permutaciones circulares Una *permutación circular* (ordinaria) de n elementos es cada una de las formas de disponer en círculo n elementos distintos. Podemos representar linealmente las permutaciones circulares, pero entendiendo que dos permutaciones lineales representan la misma permutación circular si se puede pasar de una a otra permutando cíclicamente los elementos.

Por ejemplo, hay dos permutaciones circulares de 3 elementos:

$$123 = 231 = 312, \quad 321 = 213 = 132.$$

Es obvio que cada permutación circular puede representarse mediante n permutaciones ordinarias distintas, luego el número de permutaciones circulares es

$$\mathrm{PC}^n = (n-1)!$$

Permutaciones circulares con repetición Si $n = r_1 + \cdots + r_k$, una *permutación circular* de n elementos *con repeticiones* $(r_1, \dots, r_k)$ es cada una de las formas de disponer en círculo k elementos distintos de modo que el primero se repita r_1 veces, el segundo r_2 veces, etc.

Como en el caso anterior, podemos representar las permutaciones circulares con repetición como permutaciones lineales con repetición, pero entendiendo que dos de ellas representan la misma permutación circular si se puede pasar de una a otra permutando cíclicamente sus elementos.

Por ejemplo, hay 4 permutaciones circulares de 6 elementos con repeticiones $(3, 3)$:

$$111222 = 112221 = 122211 = 222111 = 221112 = 211122,$$

$$112122 = 121221 = 212211 = 122112 = 221121 = 211212,$$

$$112212 = 122121 = 221211 = 212112 = 121122 = 211221,$$

$$121212 = 212121.$$

(No falta ninguna, pues sabemos que hay 20 permutaciones lineales de 6 elementos con repeticiones (3,3).)

El cálculo del número de permutaciones circulares con repetición no es tan simple como en el caso ordinario porque ahora ya no es cierto que cada permutación circular esté representada exactamente por n permutaciones lineales. En el ejemplo anterior (con $n = 6$) vemos que tres de ellas están representadas por 6 permutaciones lineales, mientras que la cuarta sólo admite 2 representaciones lineales.

Multiplicidad de una permutación Diremos que una permutación lineal de n elementos con repeticiones $(r_1, \ldots, r_k)$ tiene *multiplicidad* d si consta de d bloques iguales repetidos.

Por ejemplo, la permutación 121212 es triple (tiene multiplicidad 3), pues puede descomponerse en la forma 12|12|12.

Es inmediato que si una permutación tiene multiplicidad d, también tiene multiplicidad r para todo $r \mid d$. Diremos que una permutación tiene *multiplicidad exacta* d si tiene multiplicidad d y no tiene multiplicidad d' para ningún múltiplo d' de d.

Es evidente que si una permutación tiene multiplicidad d, entonces $d \mid r_i$ para todo i. Equivalentemente, si llamamos h al máximo común divisor de los r_i, tenemos que la multiplicidad de una permutación ha de ser un divisor de h.

También es claro que si permutamos cíclicamente una permutación de multiplicidad exacta d, obtenemos exactamente n/d permutaciones lineales distintas (todas ellas de multiplicidad exacta d). Por consiguiente, si llamamos $e(d)$ al número de permutaciones lineales de multiplicidad exacta d, tenemos que el número de permutaciones circulares con repetición es

$$\mathrm{PCR}^n_{r_1,\ldots,r_k} = \sum_{d|h} \frac{d}{n}\, e(d). \tag{7.3}$$

Calcular explícitamente $e(d)$ no es fácil. En cambio, si llamamos $m(d)$ al número de permutaciones lineales de multiplicidad d (no necesariamente exacta), es inmediato que

$$m(d) = \mathrm{PR}^{n/d}_{r_1/d,\ldots,r_k/d} = \frac{(n/d)!}{(r_1/d)!\cdots(r_k/d)!}.$$

Por otra parte, las permutaciones de multiplicidad d pueden descomponerse como unión disjunta de los conjuntos de las permutaciones de multiplicidad exacta d', para cada $d \mid d' \mid h$. Por consiguiente:

$$m(d) = \sum_{l|(h/d)} e(dl).$$

Si llamamos $\bar{m}(d) = m(h/d)$ y $\bar{e}(d) = e(h/d)$, tenemos que

$$\bar{m}(d) = m(h/d) = \sum_{l|d} e(hl/d) = \sum_{l|d} \bar{e}(d/l) = (c_1 * \bar{e})(d).$$

Así pues, $\bar{m} = c_1 * \bar{e}$, de donde $\bar{e} = \mu * \bar{m}$.

El número de permutaciones circulares con repetición Ahora ya podemos desarrollar la fórmula (7.3) para las permutaciones circulares con repetición:

$$\begin{aligned}
\mathrm{PCR}^n_{r_1,\dots,r_k} &= \sum_{d|h} \frac{d}{n}\, e(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|h} \frac{h}{d}\, \bar{e}(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|h} \frac{h}{d} \sum_{l|d} \mu(d/l)\bar{m}(l) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l|h} \bar{m}(l) \sum_{l|d|h} \frac{h}{d}\, \mu(d/l) = \frac{1}{n} \sum_{l|h} \bar{m}(l) \sum_{t|(h/l)} \frac{h/l}{t}\, \mu(t) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l|h} m(h/l)(N * \mu)(h/l) = \frac{1}{n} \sum_{d|h} m(d)\phi(d).
\end{aligned}$$

En conclusión, hemos llegado a la fórmula siguiente:

$$\mathrm{PCR}^n_{r_1,\dots,r_k} = \sum_{d|h} \frac{\phi(d)}{n} \frac{(n/d)!}{(r_1/d)! \cdots (r_k/d)!},$$

donde h es el máximo común divisor de $r_1, \dots, r_k$. Observemos que si $r_1, \dots, r_k$ son primos entre sí la fórmula se reduce a

$$\mathrm{PCR}^n_{r_1,\dots,r_k} = \frac{1}{n} \mathrm{PR}^n_{r_1,\dots,r_k}.$$

7.4 El teorema de Dirichlet

La siguiente aplicación que vamos a ver en este capítulo es el teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas, del que ya hemos hablado al comienzo. Su enunciado es muy sencillo:

Teorema de Dirichlet *Sean m y n números naturales no nulos primos entre sí. Entonces la sucesión $mk+n$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ contiene infinitos números primos.*

Este teorema es de considerable importancia en la teoría de números, en parte porque técnicamente permite simplificar muchas demostraciones, pero también posee un valor teórico que vamos a tratar de explicar antes de la demostración. Para ello conviene reformular el teorema de un modo más adecuado.

Recordemos que cada número natural m define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros dada por $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $m \mid a - b$. Esta relación no es más que la congruencia respecto al ideal $m\mathbb{Z}$

formado por los múltiplos de m, luego el conjunto de clases de equivalencia tiene estructura de anillo. Es el anillo cociente $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Todo entero a puede expresarse como $a = km + r$, donde $0 \le r < m$. Esto significa que todo entero es congruente módulo m con un número r tal que $0 \le r < m$. También es claro que dos números en estas condiciones no pueden ser congruentes, por lo que concluimos que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tiene exactamente m clases, a saber, $[0]$, $[1]$, $\ldots$, $[m-1]$.

Llamaremos $U_m = \big\{[n] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \;\big(\; m, n) = 1\big\}$. Es fácil ver que U_m es un grupo con el producto de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. En efecto, es obvio que el producto de clases de U_m está en U_m, así como que $[1] \in U_m$. Sólo hay que probar que toda clase $[n]$ tiene una inversa. Ahora bien, como U_m es finito, las potencias $[n]^i$ no pueden ser todas distintas, luego existen i, $j > 0$ tales que $[n]^i = [n]^{i+j}$, o sea, $[n]^i([n]^j - [1]) = [0]$ o, equivalentemente, $m \mid n^i(n^j - 1)$. Como $(n, m) = 1$, ha de ser $m \mid n^j - 1$, o sea, $[n][n^j - 1] = [n^j] = [1]$, con lo que $[n^j - 1]$ es el inverso de $[n]$. Es claro que el número de clases en U_m es exactamente $\phi(m)$.

En estos términos el teorema de Dirichlet afirma que si $(m, n) = 1$ entonces n es congruente módulo m con infinitos primos o, lo que es lo mismo, que cada una de las clases del grupo U_m contiene infinitos números primos.

En realidad lo más importante es que cada clase contiene números primos, pero no se conoce ninguna prueba de este hecho que en realidad no demuestre la existencia de infinitos primos. Veamos un ejemplo: tomemos $m = 24$. El grupo U_{24} consta de las clases siguientes:

$$U_{24} = \big\{[1],\ [5],\ [7],\ [11],\ [13],\ [17],\ [19],\ [23]\big\}.$$

Vemos que el representante mínimo de cada clase ya es primo salvo en el caso de $[1]$, pero esta clase contiene por ejemplo al primo 73.

El teorema de Dirichlet había sido conjeturado empíricamente mucho antes de que Dirichlet lograra demostrarlo. veamos algunos ejemplos el contexto en que matemáticos como Euler, Gauss, Lagrange, etc. se interesaron por él. Tratemos de caracterizar los números naturales n que se pueden expresar como suma de dos cuadrados, es decir, $n = x^2 + y^2$.

Para abordar este problema conviene definir el anillo de los enteros de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x,\ y \in \mathbb{Z}\}.$$

Se define la *norma* de un entero de Gauss como $\mathrm{N}(x + iy) = x^2 + y^2$. Así el problema consiste en determinar para qué números n existe un entero de Gauss z tal que $\mathrm{N}(z) = n$.

El anillo $\mathbb{Z}[i]$ tiene la propiedad de que sus elementos pueden descomponerse en primos de forma análoga a lo que ocurre con los enteros ordinarios. Hay que tener presente que los primos usuales no tienen por qué seguir siendo primos en $\mathbb{Z}[i]$. Por ejemplo, el 5 admite la siguiente descomposición en primos de Gauss:

$$5 = (2 + i)(2 - i).$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{N}(z_1 z_2) = \mathrm{N}(z_1)\,\mathrm{N}(z_2)$ y que si p es un primo en $\mathbb{Z}$ se cumple $\mathrm{N}(p) = p^2$, es claro que p puede factorizar a lo sumo de tres formas distintas en $\mathbb{Z}[i]$:

I) p se descompone en dos primos distintos de norma p (por ejemplo el 5)

II) p sigue siendo primo (y tiene norma p^2) (por ejemplo el 3).

III) p factoriza como el cuadrado de un primo de norma p.

El último caso sólo le ocurre al $2 = -i(1+i)^2$. El factor $-i$ es despreciable en el mismo sentido en que podemos considerar que $-4 = -2^2$ es el cuadrado de un primo en $\mathbb{Z}$.

Puede probarse que todo primo de $\mathbb{Z}[i]$ aparece en la descomposición de un primo ordinario, luego todo primo de Gauss tiene norma p o p^2 para un cierto primo p. Por lo tanto si un primo ordinario p es del tipo II entonces en $\mathbb{Z}[i]$ no hay primos de norma p, y en cualquier otro caso sí los hay.

Por ejemplo, 90 es suma de dos cuadrados, ya que podemos tomar un primo de norma 9 (el 3), un primo de norma 5 (por ejemplo $2+i$) y un primo de norma 2 (por ejemplo $1+i$). El producto de estos tres números es un entero de Gauss de norma 90. Es decir, $90 = \mathrm{N}\big(3(2+i)(1+i)\big) = N(3+9i) = 3^2 + 9^2$. Sin embargo 30 no es suma de dos cuadrados, ya que para encontrar un entero de Gauss de norma 30 necesitaríamos un primo de norma 3, y no los hay porque 3 es de tipo II.

En general, un número k es suma de dos cuadrados si y sólo si los primos que dividen a k con exponente impar no son de tipo II.

Todos estos razonamientos son generalizables a otros casos. Por ejemplo, si queremos estudiar qué números naturales son de la forma $x^2 - 6y^2$ podemos razonar igualmente tomando el anillo $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big] = \{x + y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ con la norma definida por $\mathrm{N}(x+y\sqrt{6}) = x^2 - 6y^2$. Uno de los descubrimientos más notables de Euler en este campo fue que cada uno de estos anillos tiene asociado un número D muy fácil de calcular (en nuestros ejemplos es $D = 4$ para $\mathbb{Z}[i]$ y $D = 24$ para $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$) de tal modo que:

a) Los primos de tipo III son los que dividen a D.

b) Si dos primos p y q no dividen a D y $p \equiv q \pmod{D}$ entonces son del mismo tipo.

En otras palabras, que la distinción entre primos de tipo I y II depende sólo de la clase de U_D a la cual pertenecen, de manera que podemos dividir las clases de U_D en clases de tipo I y clases de tipo II, según que los primos que contengan sean de uno u otro tipo.

Por ejemplo, para $\mathbb{Z}[i]$, el grupo U_4 tiene sólo dos clases $U_4 = \big\{[1],\ [3]\big\}$ y, puesto que 5 es de tipo I y 3 es de tipo II, concluimos que [1] es de tipo I y [3] es de tipo II.

La solución definitiva al problema de la suma de cuadrados es:

Un número natural es suma de dos cuadrados si y sólo si los primos impares que lo dividen con exponente impar son congruentes con 1 *módulo* 4.

La división en clases para $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ es la siguiente: de las 8 clases de U_{24} son de tipo I las clases [1], [5], [19], [23] y son de tipo II las clases [7], [11], [13], [17].

Puede desarrollarse toda una teoría general en torno a esto. Por ejemplo, puede probarse que siempre la mitad de clases de U_D son de tipo I y la otra mitad de tipo II. Más aún, las clases de tipo I forman siempre un subgrupo de U_D (el lector puede verificar estos hechos en los ejemplos anteriores). Ahora debemos observar que la división en tipos de las clases de U_D presupone que éstas contienen primos, que es precisamente lo que afirma el teorema de Dirichlet. Si una clase no contuviera ningún primo no tendría sentido decir que es de tipo I o de tipo II.

Lo cierto es que Euler consiguió definir esta división en clases sin suponer que contuvieran primos (es decir, dio una definición formal de clases de tipo I y de tipo II y probó que si una clase contiene primos, éstos son del tipo correspondiente). Su teoría se basaba en una ley muy importante sobre congruencias conocida como ley de reciprocidad cuadrática, de la que, no obstante, sólo fue capaz de probar unos pocos casos particulares. Nos ocuparemos de ella en el capítulo siguiente. Legendre obtuvo una prueba admitiendo el teorema de Dirichlet, y fue Gauss el primero en demostrarla sin este supuesto, con lo que dio las primeras pruebas completas de los resultados de esta parte de la teoría de números. Sin embargo, pese a que Gauss llegó a encontrar pruebas muy elegantes de sus resultados, es claro que este enfoque basado en esquivar el teorema de Dirichlet ha de ser necesariamente artificial, y así se comprende la importancia que tuvo el trabajo de Dirichlet para la teoría de números y el empeño que tantos matemáticos pusieron en demostrar una conjetura, por otra parte, tan sencilla de enunciar y de constatar empíricamente. Por último digamos que este el teorema, así como las técnicas que vamos a emplear, admiten generalizaciones importantes a otras partes más avanzadas de la teoría de números que nos sería imposible esbozar aquí.

La prueba del teorema de Dirichlet necesita de algunos resultados sobre grupos abelianos finitos. Supondremos conocidos los hechos básicos comunes con otras estructuras algebraicas (homomorfismos, cocientes, etc.)

Los únicos hechos que vamos a emplear y son específicos de grupos finitos son los siguientes:

Sea G un grupo abeliano finito. Para cada $g \in G$ existe un número natural $n > 0$ tal que $g^n = 1$. En efecto, las potencias g^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ no pueden ser todas distintas, luego existen n, $m > 0$ tales que $g^m = g^{m+n}$, luego $g^n = 1$.

Se llama *orden* de g al mínimo número natural $n > 0$ tal que $g^n = 1$. Observar que si m es cualquier otro entero, entonces $m = cn + r$ con $0 \leq r < n$, y $g^m = (g^n)^c g^r = g^r$, luego $g^m = 1$ si y sólo si $g^r = 1$, si y sólo si $r = 0$, si y sólo si $n \mid m$. Más aún, esto prueba que el subgrupo generado por g es

$$\langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{1,\ g,\ \ldots, g^{n-1}\}.$$

Finalmente, si H es un subgrupo de G entonces la clase $[g]$ de un elemento g en el grupo cociente G/H es $[g] = \{gh \mid h \in H\}$ y claramente la aplicación $h \mapsto gh$ biyecta H con $[g]$, luego $\big|[g]\big| = |H|$ (donde $|X|$ representa el número de elementos del conjunto X). En consecuencia, $|G| = |G/H|\ |H|$.

Definición 7.26 Observemos que $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ es un grupo abeliano con el producto usual. Si G es un grupo abeliano finito, un *carácter* de G es un homomorfismo de grupos $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Llamaremos G^* al conjunto de todos los caracteres de G. Es claro que G^* es un grupo con el producto definido puntualmente. Se llama *grupo dual* de G. El elemento neutro es el llamado *carácter principal,* dado por $1(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Observar que si χ es un carácter de G y g es un elemento de orden n, entonces se cumple $\chi(g)^n = \chi(g^n) = \chi(1) = 1$, luego $|\chi(g)| = 1$.

De aquí se sigue que el carácter inverso de χ es precisamente su carácter conjugado, dado por $\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$.

Necesitamos un único hecho adicional sobre caracteres, pero para demostrarlo nos harán falta otros resultados intermedios. Necesitaremos probar que $|G| = |G^*|$. Lo veremos primero para grupos generados por un solo elemento.

Teorema 7.27 *Sea G un grupo abeliano finito. Supongamos que existe $g \in G$ tal que $G = \langle g\rangle$. Entonces $|G| = |G^*|$.*

Demostración: Sea n el orden de g. Sea $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Es claro que el orden de ζ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ también es n y de aquí es fácil deducir que la aplicación $\chi : \langle g\rangle \longrightarrow \langle\zeta\rangle$ es un isomorfismo de grupos, y en particular un carácter de G.

Como $\chi^i(g) = \zeta^i$ y las potencias $1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$ son todas distintas, es claro que los caracteres $1, \chi, \ldots, \chi^{n-1}$ son todos distintos, y así $|G| = n \le |G^*|$. Veamos que G no tiene más caracteres que éstos.

Si ψ es cualquier carácter de G entonces $\psi(g)^n = \psi(g^n) = \psi(1) = 1$, luego ha de ser $\psi(g) = \zeta^i$ para $0 \le i < n$. Así, $\psi(g) = \chi^i(g)$ y es claro entonces que $\psi = \chi^i$. ∎

Teorema 7.28 *Sea G un grupo abeliano finito y H un subgrupo de G. Entonces todo carácter de H se extiende a un carácter de G.*

Demostración: Si $H = G$ es obvio. Sea $g \in G \setminus H$ y consideremos $H_1 = \{g^i h \mid i \in \mathbb{Z},\ h \in H\}$. Claramente H_1 es un subgrupo de G que contiene estrictamente a H. Basta probar que todo carácter de H se extiende a H_1, pues tras repetir el proceso de extensión un número finito de veces llegaremos hasta una extensión a todo G.

Sea, pues, $\chi \in H^*$. Sea n el orden de la clase $[g]$ en el grupo cociente G/H, esto es, el mínimo $n > 0$ tal que $g^n \in H$. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta^n = \chi(g^n)$. Definimos $\psi(g^i h) = \zeta^i \chi(h)$. Si probamos que esta definición no depende de la representación de un elemento de H_1 en la forma $g^i h$ tendremos claramente que ψ es un carácter de H_1 que extiende a χ.

Supongamos que $g^i h_1 = g^j h_2$. Entonces $g^{i-j} = h_2 h_1^{-1} \in H$, luego $n \mid i-j$, es decir, $i - j = nk$. Entonces

$$\zeta^{i-j} = (\zeta^n)^k = \chi(g^n)^k = \chi(g^{nk}) = \chi(g^{i-j}) = \chi(h_2 h_1^{-1}),$$

luego $\zeta^i \chi(h_1) = \zeta^j \chi(h_2)$. ∎

Una consecuencia inmediata es la siguiente:

Teorema 7.29 *Sea G un grupo abeliano finito y $g \in G$. Si $\chi(g) = 1$ para todo carácter de G, entonces $g = 1$.*

Demostración: Supongamos que $g \neq 1$. Entonces el grupo $\langle g \rangle$ tiene más de un elemento, luego por el teorema 7.27 tiene más de un carácter. Si χ es un carácter de $\langle g \rangle$ no principal entonces es claro que $\chi(g) \neq 1$, y por el teorema anterior χ se extiende a un carácter de G con la misma propiedad. ∎

Teorema 7.30 *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $|G| = |G^*|$.*

Demostración: Supongamos que el teorema es falso y tomemos un grupo G que lo incumpla con el mínimo número de elementos posible. Obviamente ha de ser $G \neq 1$. Sea $h \in G$ tal que $h \neq 1$. Consideremos el subgrupo $H = \langle h \rangle$. Claramente $|G/H| < |G|$, luego por la elección de G se cumple que $|(G/H)^*| = |G/H|$ y por el teorema 7.27 también $|H^*| = |H|$.

Consideremos la aplicación $G^* \longrightarrow H^*$ dada por $\chi \longrightarrow \chi|_H$. Claramente es un homomorfismo de grupos y por el teorema 7.28 es suprayectiva. Su núcleo es $N = \{\chi \in G^* \mid \chi|_H = 1\}$.

Claramente $G^*/N \cong H^*$, luego $|G^*| = |G^*/N|\,|N| = |H^*|\,|N| = |H|\,|N|$. Basta probar que $|N| = |(G/H)^*|$, pues entonces $|G^*| = |H|\,|(G/H)^*| = |H|\,|G/H| = |G|$, contradicción.

Es claro que todo $\chi \in N$ induce un carácter de G/H dado por $\chi\big([g]\big) = \chi(g)$ y, recíprocamente, todo $\chi \in (G/H)^*$ es inducido por el carácter de N dado por $\chi(g) = \chi\big([g]\big)$. De hecho ambos grupos son isomorfos. ∎

Con esto estamos ya en condiciones de probar el resultado que necesitamos:

Teorema 7.31 (Relaciones de ortogonalidad) *Sea G un grupo abeliano finito.*

a) Si $\chi \in G^*$ entonces

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & si\ \chi = 1 \\ 0 & si\ \chi \neq 1 \end{cases}$$

b) Si $g \in G$ entonces

$$\sum_{\chi \in G^*} \chi(g) = \begin{cases} |G| & si\ g = 1 \\ 0 & si\ g \neq 1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: a) El caso $\chi = 1$ es obvio. Si $\chi \neq 1$ existe un $h \in G$ tal que $\chi(h) \neq 1$. Notar que cuando g recorre G entonces gh también recorre G, luego

$$\chi(h)\sum_{g\in G}\chi(g) = \sum_{g\in G}\chi(hg) = \sum_{g\in G}\chi(g),$$

con lo que $(\chi(h)-1)\sum_{g\in G}\chi(g) = 0$ y por lo tanto $\sum_{g\in G}\chi(g) = 0$.

b) Es claro que la aplicación $\delta_g : G^* \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dada por $\delta_g(\chi) = \chi(g)$ es un carácter de G^*. Basta aplicarle el apartado a). ∎

Por último particularizamos el concepto de carácter al caso de los grupos U_m, que son los únicos grupos que nos van a interesar.

Definición 7.32 Sea $m > 1$ un número natural. Si χ es un carácter del grupo U_m, llamaremos *carácter módulo m* inducido por χ a la función aritmética dada por

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi\big([n]\big) & \text{si } (n.m) = 1 \\ 0 & \text{si } (n,m) \neq 1 \end{cases}$$

Es claro que los caracteres modulares así definidos son funciones aritméticas completamente multiplicativas. Las series de Dirichlet que definen reciben el nombre de *funciones L*:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

La convergencia se sigue del teorema 7.9, pues $|\chi(n)| \leq 1$. En el caso del carácter principal módulo m tenemos que

$$L(s,1) = \prod_{(p,m)=1}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s). \tag{7.4}$$

Como el producto finito es una función entera, es claro que $L(s,1)$ se prolonga analíticamente al semiplano $s > 0$ con un polo simple en $s = 1$.

Por otra parte, si $\chi \neq 1$ entonces es claro que la sucesión $\chi(n)$ tiene periodo m y, por las relaciones de ortogonalidad, la suma de m términos consecutivos vale 0, luego podemos aplicar el teorema 7.9 b) y concluir que $L(s,\chi)$ converge en el semiplano $\sigma > 0$ a una función holomorfa. Resumimos en un teorema lo que hemos obtenido:

Teorema 7.33 *Sea χ un carácter modular. Entonces la función $L(s,\chi)$ está definida y es holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$, salvo si $\chi = 1$, en cuyo caso tiene un polo simple en $s = 1$.*

Ahora tratemos de demostrar el teorema de Dirichlet imitando el argumento de Euler que empleamos en el teorema 7.16.

Poco antes de que Dirichlet iniciara su trabajo en este problema, Kummer había investigado a fondo la aritmética de los llamados anillos de enteros ciclotómicos, de donde obtuvo resultados importantes en torno al último teorema

de Fermat. No vamos definir estos anillos, pero baste decir que su comportamiento es muy similar a los enteros ordinarios y en varios aspectos están relacionados con los grupos U_m. Dirichlet advirtió que en el contexto de la teoría de Kummer tenía sentido definir una función ζ_m análoga a la función dseta usual y, con cálculos mucho más complicados, las propiedades de ζ valían también para ζ_m.

En la definición de esta función intervienen conceptos algebraicos que hacen difícil su manipulación analítica (se trata de una serie no sobre los números naturales sino sobre el conjunto de los ideales de un anillo). Al operar con ella buscando una expresión lo más sencilla posible Dirichlet llegó a la definición de los caracteres modulares y las funciones L, y demostró la fórmula siguiente:[2]

$$\zeta_m(s) = \prod_\chi L(s,\chi),$$

donde (aquí y en lo sucesivo) χ recorre los caracteres módulo m.

Nosotros tomaremos esta fórmula como definición de la función ζ_m. Se trata, pues, de una función holomorfa en el semiplano $s > 0$ salvo quizá un polo en $s = 1$.

Guiado por el comportamiento de la función ζ ordinaria, Dirichlet demostró que la función ζ_m tiene también un polo simple en 1 con residuo no nulo (que él calculó explícitamente), lo cual le ponía en condiciones de generalizar el argumento de Euler. Nosotros probaremos esto mismo con técnicas de variable compleja. Observar que el hecho de que ζ_m tenga un polo en 1 equivale a que $L(1,\chi) \neq 0$ si $\chi \neq 1$ (o sea, a que ningún factor tenga un cero en 1 que cancele el polo simple de $L(s,1)$).

Para probarlo veremos primeramente que $\log \zeta_m(s) \geq 0$ cuando $s > 1$, con lo que $\zeta_m(s) \geq 1$ cuando $s > 1$, y tendremos al menos que ζ_m no tiene un cero en $s = 1$.

Podemos definir $\log \zeta_m = \sum_\chi \log L(s,\chi)$, donde a su vez cada $\log L(s,\chi)$ es la función dada por el teorema 7.23, o sea,

$$\log L(s,\chi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\chi' * \chi\mu)(n)}{\log n\, n^s}.$$

Una simple comprobación nos da que $\chi' * \chi\mu = \chi(c_1' * \mu) = \chi\Lambda$ y así:

$$\log \zeta_m(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_\chi \chi(n)\Lambda(n)}{\log n\, n^s} \geq 0, \qquad \text{para } s > 1,$$

pues, por las relaciones de ortogonalidad, $\sum_\chi \chi(n) \geq 0$.

[2] En realidad la función ζ_m definida por Dirichlet se diferenciaba de ésta en un factor similar al producto $\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ que nos ha aparecido en (7.4), pero como éste no juega ningún papel, lo excluimos por definición.

Como ya hemos dicho, esto implica que $\zeta_m(s) \geq 1$ para $s > 1$, luego ζ_m no puede tener un cero en $s = 1$.

De la continuidad de la conjugación se sigue que $L(s, \overline{\chi}) = \overline{L(s, \chi)}$, luego si un carácter cumple $L(1, \chi) = 0$, también tenemos $L(1, \overline{\chi}) = 0$. Por lo tanto, si $\chi \neq \overline{\chi}$ ha de cumplirse que $L(1, \chi) \neq 0$, o de lo contrario en el producto que define a ζ_m habría al menos dos factores con ceros y un único polo simple, luego ζ_m tendría un cero en 1, en contradicción con lo que hemos visto.

Así pues, sólo queda probar que $L(1, \chi) \neq 0$ cuando $\chi = \overline{\chi}$, es decir, cuando χ sólo toma valores reales, que serán necesariamente $-1, 0, 1$ (porque los caracteres en sentido propio sólo toman valores de módulo 1).

Sea χ un carácter real y supongamos que $L(1, \chi) = 0$. Entonces consideramos la función

$$G(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu| * \chi)(n)}{n^s}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

La función $|\mu| * \chi$ es multiplicativa y es fácil ver que

$$(|\mu| * \chi)(p^k) = \chi(p)^k + \chi(p)^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(p) = -1, 0 \\ 2 & \text{si } \chi(p) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $|\mu| * \chi \geq 0$ y podemos aplicar el teorema 7.11, que nos da que la serie converge en realidad para $\sigma > 1/2$. Además, puesto que el primer término es igual a 1 y los restantes son positivos, queda que $G(s) \geq 1$ para $s > 1/2$. Por lo tanto

$$1 \leq \lim_{s \to (1/2)^+} G(s) = \lim_{s \to (1/2)^+} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L(s, \chi) = \frac{\zeta(1/2) L(1/2, \chi)}{\infty} = 0.$$

Con esta contradicción concluimos que $L(1, \chi) \neq 0$ siempre que χ no es el carácter principal, luego en efecto ζ_m tiene un polo simple en 1. El resultado sobre las funciones L tiene interés por sí mismo. Lo recogemos en el teorema siguiente para referencia posterior:

Teorema 7.34 *Si χ es un carácter modular no principal, entonces $L(1, \chi) \neq 0$.*

Ahora seguimos el argumento del teorema 7.16. Vamos a probar que si A es una clase del grupo U_m, entonces la serie $\sum_{p \in A} (1/p)$ es divergente, con lo que en particular A deberá contener infinitos primos. Para ello hemos de considerar de nuevo el logaritmo de ζ_m, es decir, $\log \zeta_m(s) = \sum_{\chi} \log L(s, \chi)$. Cada sumando puede desarrollarse en serie a partir de la factorización de las funciones L:

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \log \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

A su vez desarrollamos cada logaritmo en serie de Taylor como hicimos en el teorema 7.16:

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{n\, p^{ns}}, \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

Descomponemos

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R(s,\chi),$$

donde

$$R(s,\chi) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{n\, p^{ns}} \quad \text{cumple} \quad |R(s,\chi)| \le \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} \le 1.$$

Si hacemos variar C en las clases de U_m tenemos

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_C \chi(C) \sum_{p\in C} \frac{1}{p^s},$$

con lo que

$$\log L(s,\chi) = \sum_C \chi(C) \sum_{p\in C} \frac{1}{p^s} + R(s,\chi), \qquad \text{para todo } \chi.$$

Podemos pensar en estas ecuaciones como un sistema lineal con incógnitas las series $\sum_{p\in C} 1/p^s$. Queremos despejar estas series para comprobar que tienden a ∞ cuando s tiende a 1, lo que probará que cada clase C tiene infinitos primos. Fijemos, pues, una clase A de U_m. Multiplicamos las ecuaciones por $\chi(A^{-1})$ y sumamos sobre χ:

$$\sum_\chi \chi(A^{-1}) \log L(s,\chi) = \sum_C \sum_\chi \chi(CA^{-1}) \sum_{p\in C} \frac{1}{p^s} + R_A(s),$$

donde $|R_A(s)| = \left|\sum_\chi \chi(A^{-1}) R(s,\chi)\right| \le \sum_\chi |R(s,\chi)| \le \phi(m)$ para todo $s > 1$.

Por el teorema 7.31, la suma $\sum_\chi \chi(CA^{-1})$ vale $\phi(m)$ si $C = A$ y es cero en otro caso. Así pues

$$\sum_\chi \chi(A^{-1}) \log L(s,\chi) = \phi(m) \sum_{p\in A} \frac{1}{p^s} + R_A(s), \tag{7.5}$$

con lo que tenemos despejada la serie de A.

Ahora tomaremos límites cuando $s \to 1^+$. Debemos detenernos en el comportamiento de $\log L(s,\chi)$. Puesto que $L(1,\chi)$ (para χ no principal) es un número complejo no nulo, sabemos que en un entorno de $L(1,\chi)$ existe una determinación continua del logaritmo. Componiéndola con $L(s,\chi)$ obtenemos una función continua $\log' L(s,\chi)$ definida en un entorno de 1, digamos $]1-\epsilon, 1+\epsilon[$. La función $\log L(s,\chi) - \log' L(s,\chi)$ es continua en el intervalo $]1, 1+\epsilon[$ y sólo puede tomar los valores $2k\pi i$, para k entero, luego por conexión k ha de ser constante en $]1, 1+\epsilon[$ y consecuentemente existe

$$\lim_{s\to 1^+} \log L(s,\chi) = \log' L(1,\chi) + 2k\pi i.$$

Agrupamos todos los sumandos acotados del miembro derecho de (7.5) junto con $R_A(s)$ y queda que

$$\log L(s,1) = \phi(m) \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} + T_A(s),$$

donde $T_A(s)$ es una función acotada en un entorno de 1.

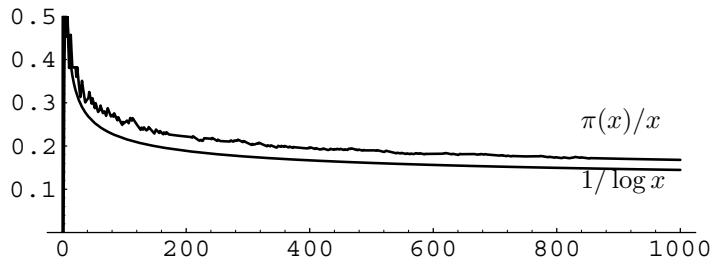
Por otro lado $\lim_{s \to 1^+} L(s,1) = +\infty$, luego también $\lim_{s \to 1^+} \log L(s,1) = +\infty$. Esto implica que la función $\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}$ no está acotada en un entorno de 1, luego la serie $\sum_{p \in A} \frac{1}{p}$ es divergente, como queríamos probar.

7.5 La distribución de los números primos

En una carta escrita en 1849, Gauss afirma que ya en 1793 había observado que la densidad del conjunto de los números primos se aproxima a $1/\log x$ para valores grandes de x, y que cada nueva tabla de primos publicada venía a confirmar su conjetura.

El significado de las palabras de Gauss es claro: llamemos $\pi(x)$ al número de primos menores o iguales que x. La densidad del conjunto de primos menores o iguales que x es $\pi(x)/x$ (por ejemplo, $\pi(100) = 25$, luego la densidad de los primos menores o iguales que 100 es $1/4$, o sea, la cuarta parte de los números en este intervalo son primos.). Gauss afirma que esta densidad $\pi(x)/x$ es aproximadamente $1/\log x$ cuando x es grande. La aproximación no hay que entenderla como que el límite de la diferencia tiende a 0 (esto es falso) sino en el sentido asintótico

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$



La gráfica muestra las dos funciones $\pi(x)/x$ y $1/\log x$. Equivalentemente tenemos que $\pi(x) \sim x/\log x$, es decir, que $x/\log x$ es una aproximación al número de primos menores que x. Sin embargo, no es la mejor aproximación en la que podemos pensar a partir de la conjetura de Gauss. Por ejemplo, si realmente $1/\log x$ es cada vez más parecido a la densidad de los primos, entonces para aproximar el número de primos entre 1.000 y 1.100 será más fiable

multiplicar la densidad aproximada $1/\log(1.100)$ por la longitud del intervalo, o sea, 100, lo cual nos da

$$\frac{100}{\log(1.100)} = 14{,}28,$$

en lugar de restar las aproximaciones

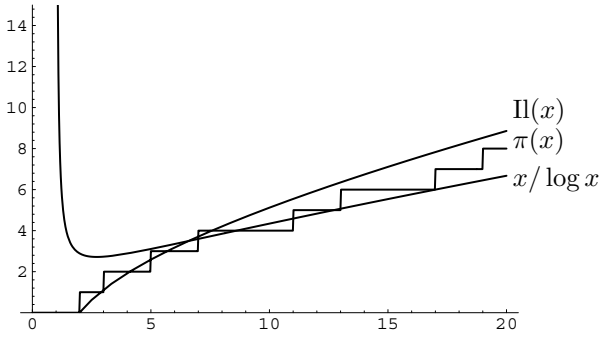
$$\frac{1.100}{\log(1.100)} - \frac{1.000}{\log(1.000)} = 12{,}31,$$

pues en este caso usamos la aproximación $1/\log(1.000)$, que es peor. Efectivamente, hay 16 primos en dicho intervalo.

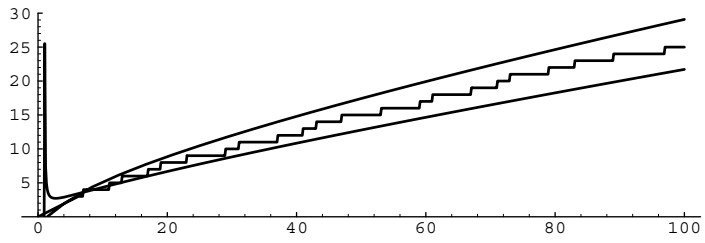
Más en general, para aproximar el número de primos en un cierto intervalo es más fiable dividirlo en subintervalos pequeños y sumar la aproximación $1/\log x$ en un punto de cada intervalo multiplicada por la longitud de éste. Tomando límites llegamos a la llamada *integral logarítmica*

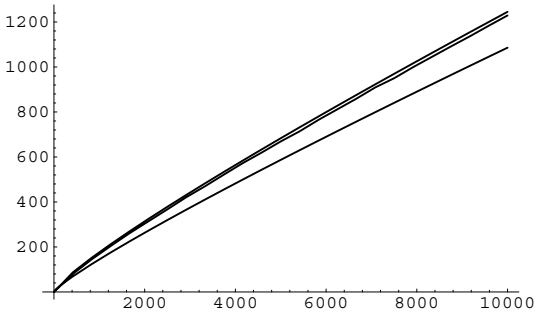
$$\pi(x) \sim \mathrm{Il}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Ésta es la aproximación que consideró Gauss. He aquí unas cuantas gráficas que comparan las tres funciones $x/\log x$, $\pi(x)$ e $\mathrm{Il}(x)$. La primera nos muestra las tres funciones para valores pequeños de x:

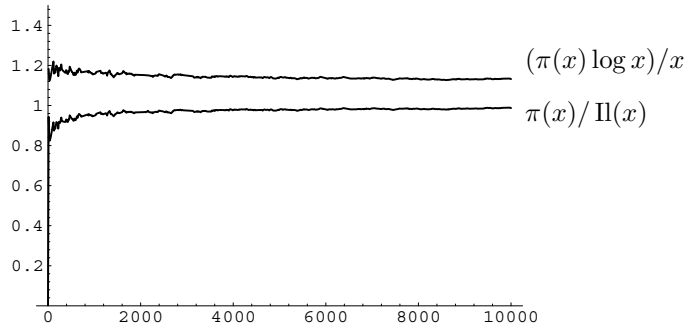


Los tramos verticales en la gráfica de $\pi(x)$ indican discontinuidades. Notemos que se trata de una función escalonada. Las dos gráficas siguientes muestran claramente la validez de la conjetura de Gauss:





En ambas figuras, la gráfica superior es la de $\mathrm{Il}(x)$, la intermedia la de $\pi(x)$ y la inferior la de $x/\log x$. Vemos que la integral logarítmica proporciona una aproximación mucho mejor. Esto se ve más claramente al comparar los cocientes:



Veamos por último algunos valores numéricos. Gauss trabajó con tablas que llegaban hasta $\pi(3.000.000)$. En la tabla de la página siguiente tenemos en el centro $\pi(x)$, a sus lados las aproximaciones $x/\log x$ e $\mathrm{Il}(x)$, el error e para cada una de ellas y el porcentaje de error relativo e_r. (Observar que la afirmación $\pi(x) \sim a(x)$ equivale a que el error relativo $e_r = |\pi(x) - a(x)|/\pi(x)$ tiende a 0.) La tabla confirma una vez más que la integral logarítmica es una aproximación mucho mejor.

El teorema de los números primos En 1800 Legendre estudió también la densidad del conjunto de los números primos, pero sus fórmulas no tenían más base que comprobaciones empíricas. Los primeros resultados teóricos sobre esta cuestión los obtuvo Chebyshev en 1850. Entre otras cosas probó que

$$0{,}89\,\mathrm{Il}(x) < \pi(x) < 1{,}11\,\mathrm{Il}(x),$$

así como que el error relativo de la aproximación $\pi(x) \sim \mathrm{Il}(x)$ es menor que el de la aproximación $\pi(x) \sim x/\log x$ o el de otras similares. En 1859 Riemann publicó una breve memoria en la que esbozaba las líneas generales de la demostración de lo que hoy se conoce como "teorema de los números primos", es decir, de la fórmula $\pi(x) \sim \mathrm{Il}(x)$.

x	$e_r(\%)$	e	$x/\log x$	$\pi(x)$	$\mathrm{Il}(x)$	e	$e_r(\%)$
10^2	12	3	22	25	29	4	16
10^3	14	23	145	168	176	9	5,4
10^4	12	143	1.086	1.229	1.245	16	1,3
10^5	9,4	906	8.686	9.592	9.628	37	0,39
10^6	7,8	6.115	72.383	78.498	78.626	128	0,16
10^7	6,6	44.158	620.421	664.579	664.917	338	0,05
10^8	5,8	332.773	5.428.682	5.761.455	5.762.208	753	0,013
10^9	5,1	2.592.591	48.254.943	50.847.534	50.849.234	1.700	0,0033
10^{10}	4,6	20.758.030	434.294.482	455.052.512	455.055.613	3.101	0,00068

Los argumentos de Riemann fueron completados definitivamente por Hadamard y de la Vallée Poussin en 1896. Sus pruebas incluían estimaciones del error de la aproximación.

Aquí probaremos que $\pi(x) \sim x/\log x \sim \mathrm{Il}(x)$ sin entrar en el análisis de los errores. Los argumentos originales de Riemann se basaban en un estudio muy profundo de la función dseta que incluía, entre muchos otros, los resultados de las secciones anteriores. La prueba que daremos se basa en un teorema general del que obtendremos otras muchas consecuencias sobre la distribución de los números primos. Además no necesitaremos más que las propiedades elementales de la función dseta. En primer lugar demostramos que es suficiente probar que $\pi(x) \sim x/\log x$.

Teorema 7.35 *Se cumple*

$$\frac{x}{\log x} \sim \mathrm{Il}(x).$$

Demostración: Integrando por partes obtenemos

$$\mathrm{Il}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t},$$

luego basta probar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = 0.$$

Ahora bien,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x}{\log^2 \sqrt{x}}$$

luego

$$0 \leq \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{2\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\log\sqrt{x}} \longrightarrow 0.$$

■

Comenzamos la prueba del teorema de los números primos con un resultado técnico cuya prueba usa un argumento muy similar al de la demostración anterior. Recordemos de 7.24 que $O\big(f(x)\big)$ representa a una función tal que $O\big(f(x)\big)/f(x)$ está acotada para x suficientemente grande. Conviene introducir también el convenio siguiente:

Definición 7.36 Si $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, representaremos mediante $o\big(f(x)\big)$ (leído "una función de orden menor que $f(x)$") a una función indeterminada con la propiedad de que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{o\big(f(x)\big)}{f(x)} = 0.$$

Teorema 7.37 *Sea $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y $\alpha \in \mathbb{C}$. Si*

$$\sum_{n\le x} b_n = \alpha x + o(x),$$

entonces

$$\sum_{n\le x} \frac{b_n}{\log n} = \alpha\,\frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

(Los sumatorios recorren los naturales $2 \le n \le x$.)

Demostración: Llamemos $f(x) = \sum_{n\le x} b_n$. Entonces $b_n = f(n) - f(n-1)$, entendiendo que $f(x) = 0$ si $x < 2$. Sea N la parte entera de x. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \frac{b_n}{\log n} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{f(n)-f(n-1)}{\log n} = \frac{f(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{f(n)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{f(n-1)}{\log n} \\
&= \frac{f(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{f(n)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{f(n)}{\log(n+1)} \\
&= \frac{f(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} f(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $f(N) = f(x)$,

$$\left|\frac{\log x}{x}\left(\frac{f(N)}{\log N} - \frac{f(x)}{\log x}\right)\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \frac{\log(x/N)}{\log N} \le \left|\frac{f(x)}{x}\right| \frac{\log(x/(x-1))}{\log(x-1)}.$$

Por hipótesis el primer factor tiende a $|\alpha|$, luego el producto tiende a 0. Esto significa que

$$\frac{f(N)}{\log N} = \frac{f(x)}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) = \alpha\,\frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Como $f(n)/n$ tiende a α existe una constante C tal que $|f(n)| \le Cn$, luego

$$\left|\frac{\log x}{x}\sum_{n=2}^{N-1} f(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right)\right| \le C\,\frac{\log x}{x}\sum_{n=2}^{N-1} n\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right).$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{\log(1+1/n)}{(\log n)\log(n+1)} \leq \frac{1/n}{\log^2 n},$$

con lo que la expresión anterior queda mayorada por

$$C\,\frac{\log x}{x}\sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{\log^2 n} \leq C\,\frac{\log x}{x}\sum_{n\leq x}\frac{1}{\log^2 n}$$

$$= C\,\frac{\log x}{x}\left(\sum_{n<\sqrt{x}}\frac{1}{\log^2 n} + \sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x}\frac{1}{\log^2 n}\right) \leq C\,\frac{\log x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x}{\log^2\sqrt{x}}\right)$$

$$= C\left(\frac{2\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\log\sqrt{x}}\right),$$

y la última expresión tiende a 0. ∎

El paso siguiente es obtener una expresión integral para las series de Dirichlet.

Teorema 7.38 *Sea*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

una serie de Dirichlet con coeficientes $a_n \geq 0$ y convergente en un semiplano $\sigma > \sigma_0 > 0$. Sea

$$\phi(x) = \sum_{\log n\leq x} a_n.$$

Entonces

$$f(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-sx}\phi(x)\,dx, \quad \textit{para } \sigma > \sigma_0.$$

Demostración: La función $e^{-sx}\phi(x)$ tiene módulo $e^{-\sigma x}\phi(x)$, que es una función positiva y acotada en intervalos acotados. Además es medible porque $\phi(x)$ es escalonada y $e^{-\sigma x}$ es continua. Por lo tanto es integrable en intervalos acotados. Sea k un número natural.

$$\begin{aligned}
s\int_0^{\log(k+1)} e^{-sx}\phi(x)\,dx &= s\sum_{r=1}^{k}\int_{\log r}^{\log(r+1)} e^{-sx}\sum_{n=1}^{r} a_n\,dx \\
= s\sum_{r=1}^{k}\sum_{n=1}^{r} a_n\int_r^{r+1} e^{-s\log t}\,\frac{1}{t}\,dt &= s\sum_{n=1}^{k}\sum_{r=n}^{k} a_n\int_r^{r+1} t^{-(s+1)}dt \\
= -\sum_{n=1}^{k} a_n\sum_{r=n}^{k}\big((r+1)^{-s} - r^{-s}\big) &= \sum_{n=1}^{k} a_n\big(n^{-s} - (k+1)^{-s}\big).
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^s} = s\int_0^{\log(k+1)} e^{-sx}\phi(x)\,dx + \frac{h(k)}{(k+1)^s},$$

donde $h(k) = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Sea $\sigma > \sigma_1 > \sigma_0 > 0$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^s} = s\int_0^{\log(k+1)} e^{-sx}\phi(x)\,dx + \frac{h(k)}{(k+1)^{\sigma_1}}\frac{1}{(k+1)^{s-\sigma_1}}. \tag{7.6}$$

Claramente

$$0 \le \frac{h(k)}{(k+1)^{\sigma_1}} \le \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^{\sigma_1}} \le f(\sigma_1), \quad \left|\frac{1}{(k+1)^{s-\sigma_1}}\right| = \frac{1}{(k+1)^{\sigma-\sigma_1}} \xrightarrow{k} 0,$$

luego tomando límites en (7.6) obtenemos la igualdad buscada. ∎

En la prueba del teorema principal necesitaremos un conocido resultado del análisis de Fourier. Para comodidad del lector damos una prueba basada únicamente en la teoría de la medida.

Teorema 7.39 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Sea I un intervalo y f una función integrable en I. Entonces*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)e^{i\alpha t}\,dt = 0.$$

Demostración: Basta probar que para todo $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)\,\mathrm{sen}(\alpha t+\beta)\,dt = 0,$$

pues entonces aplicando esta igualdad para $\beta = \pi/2$ y $\beta = 0$ obtenemos

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)\cos(\alpha t)\,dt = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)\,\mathrm{sen}(\alpha t)\,dt = 0,$$

de donde se sigue el teorema.

Supongamos primeramente que f es la función característica de un intervalo $]a,b[$ contenido en I. Entonces la integral se reduce a

$$\left|\int_a^b \mathrm{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| = \left|\frac{\cos(a\alpha+\beta)-\cos(b\alpha+\beta)}{\alpha}\right| \le \frac{2}{\alpha} \longrightarrow 0.$$

Ahora supongamos que f es la función característica de un subconjunto B de I. La hipótesis implica que B es medible y de medida finita. Sea $\epsilon > 0$. Tomamos un subconjunto compacto $K \subset B$ tal que $\mu(B \setminus K) < \epsilon/4$ y un

abierto G tal que $K \subset G$ y $\mu(G \setminus K) < \epsilon/4$. Podemos suponer también que $G \subset I$, así como que está acotado. Entonces

$$\left|\int_B \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| = \left|\int_G \operatorname{sen}(\alpha t+\beta) - \int_{G\setminus K} \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{B\setminus K} \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq \left|\int_G \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

El abierto G es una unión disjunta de intervalos acotados disjuntos, y como K es compacto podemos suponer que la unión es finita. Digamos $G = \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$. Entonces

$$\left|\int_G \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{a_i}^{b_i} \operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right|,$$

y el caso anterior nos garantiza que tomando α suficientemente grande la suma se hace menor que $\epsilon/2$, luego también en este caso tenemos que el límite es 0.

El caso siguiente es suponer tan sólo $f \geq 0$. Entonces existe una sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples (es decir, combinaciones lineales finitas de funciones características de conjuntos medibles disjuntos) de modo que $s_n \leq f$ y $\lim_n s_n = f$, con lo que

$$\lim_n \int_I s_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt.$$

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $s = s_n$ tal que $\int_I \big(f(t) - s(t)\big)\,dt < \epsilon/2$. A partir del caso anterior se sigue inmediatamente que s cumple el teorema. Sea pues $M > 0$ tal que

$$\left|\int_I s(t)\operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo } \alpha \geq M.$$

Así,

$$\left|\int_I f(t)\operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq \left|\int_I \big(f(t)-s(t)\big)\operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right|$$

$$+ \left|\int_I s(t)\operatorname{sen}(\alpha t+\beta)\,dt\right| \leq \int_I \big(f(t)-s(t)\big)\,dt + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Finalmente, si f es una función cualquiera la podemos expresar como diferencia de dos funciones positivas a las que aplicar el caso anterior. ∎

Ya tenemos todo lo necesario para probar el resultado fundamental de este tema, del que no sólo deduciremos el teorema de los números primos sino muchos otros resultados sobre la distribución de los primos. Dado que es un teorema muy general y que la prueba se basa en unas pocas propiedades que poseen en particular ciertas series de Dirichlet, conviene aislar las hipótesis que realmente se emplean en la demostración.

Teorema 7.40 (Teorema tauberiano de Ikehara) *Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente tal que $\phi(x) = 0$ para $x \leq 0$ y consideremos la función*

$$f(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-sx} \phi(x)\, dx.$$

Supongamos:

a) La expresión anterior define una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 1$.

b) Si llamamos

$$g(s) = f(s) - \frac{1}{s-1} \quad y \quad h_\epsilon(t) = g(1 + \epsilon + it),$$

entonces, para cada $\lambda > 0$, existe

$$\lim_{\epsilon \to 0} h_\epsilon(t) = h(t) \text{ uniformemente en } t \text{ para } |t| \leq 2\lambda,$$

con lo que en particular h es continua en $\mathbb{R}$.

Entonces existe

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-y} \phi(y) = 1.$$

Antes de entrar en la prueba conviene observar que las hipótesis se satisfacen cuando $f(s)$ es una serie de Dirichlet con coeficientes $a_n \geq 0$ convergente en el semiplano $\sigma > 1$ y prolongable analíticamente a un abierto que contenga la recta $\sigma = 1$ salvo por un polo simple en 1 con residuo 1. Entonces el teorema 7.38 nos da la condición a) para $\phi(x) = \sum_{\log n \leq x} a_n$ y la función g es holomorfa en 1, luego también en toda la recta $\sigma = 1$, y la condición b) se cumple trivialmente.

Demostración: Vamos a probar que existen funciones $P_1(\lambda)$ y $P_2(\lambda)$ independientes de f y de ϕ tales que

$$P_1(\lambda) \geq \overline{\lim_{y \to +\infty}}\, e^{-y}\phi(y) \geq \underline{\lim_{y \to +\infty}}\, e^{-y}\phi(y) \geq P_2(\lambda) > 0,$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} P_2(\lambda) = 1.$$

Claramente esto prueba el teorema. En primer lugar observamos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\, dv = \pi.$$

En efecto, por simetría la integral es dos veces la misma integral entre 0 y $+\infty$, e integrando por partes obtenemos la integral de Dirichlet calculada en el capítulo V.

Sea $H(x) = e^{-x}\phi(x)$. La parte más complicada de la prueba es demostrar que

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\, dv = \pi. \tag{7.7}$$

Tomemos $s = 1 + \epsilon + it$. Entonces

$$\frac{h_\epsilon(t) - 1}{s} = \frac{1}{s}\left(f(s) - \frac{1}{s-1} - 1\right) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\phi(x)\,dx - \frac{1}{s-1}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx}\phi(x)\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)x}\,dx = \int_0^{+\infty} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx.$$

Para realizar ciertas manipulaciones necesitaremos trabajar en intervalos acotados. La igualdad anterior equivale a

$$\frac{h_\epsilon(t) - 1}{s} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^{\xi} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx.$$

Más aún, el límite es uniforme en t para $|t| \le 2\lambda$ (para un ϵ fijo). Basta tener en cuenta que

$$\left|\int_\xi^{+\infty} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx\right| \le \int_\xi^{+\infty} |H(x) - 1|\, e^{-\epsilon x}\,dx,$$

y la última integral existe porque $\big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x}$ es integrable (se obtiene con $t = 0$ en las expresiones anteriores). Como la última integral no depende de t el límite es uniforme. Continuamos:

$$e^{ity}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)\frac{h_\epsilon(t) - 1}{s} = \lim_{\xi \to +\infty} e^{ity}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)\int_0^{\xi} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx.$$

Llamemos

$$F_\epsilon(t) = \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)\frac{h_\epsilon(t) - 1}{s}.$$

Se trata de una función continua en t, luego integrable en intervalos acotados.

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt = \int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(\lim_{\xi \to +\infty} e^{ity}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)\int_0^{\xi} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx\right)dt$$

Como el límite es uniforme en t podemos intercambiarlo con la integral:

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt = \lim_{\xi \to +\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{ity}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)\int_0^{\xi} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x - itx}\,dx\,dt.$$

Ahora intercambiamos las integrales (ambas son sobre intervalos acotados):

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^{\xi} \big(H(x) - 1\big)e^{-\epsilon x}\left(\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right)e^{i(y-x)t}\,dt\right)dx.$$

La última integral se puede calcular (en el penúltimo paso integramos por partes):

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)e^{i(y-x)t}\,dt=\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)\cos\big((y-x)t\big)dt$$
$$+i\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)\operatorname{sen}\big((y-x)t\big)dt=2\int_0^{2\lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)\cos\big((y-x)t\big)dt$$
$$=2\lambda\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\big(\lambda(y-x)t\big)\,dt=\int_0^2\frac{\operatorname{sen}\big(\lambda(y-x)t\big)}{y-x}\,dt$$
$$=\frac{2\operatorname{sen}^2\big(\lambda(y-x)\big)}{\lambda(y-x)^2}.$$

Con esto hemos llegado a la expresión

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\big(H(x)-1\big)e^{-\epsilon x}\frac{\operatorname{sen}^2\big(\lambda(y-x)\big)}{\lambda(y-x)^2}dx.$$

El integrando es integrable en $[0+\infty]$, pues $\big(H(x)-1\big)e^{-\epsilon x}$ lo es y el otro factor está acotado. Por lo tanto podemos volver a trabajar con el intervalo no acotado:

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt=2\int_0^{+\infty}\big(H(x)-1\big)e^{-\epsilon x}\frac{\operatorname{sen}^2\big(\lambda(y-x)\big)}{\lambda(y-x)^2}\,dx.$$

Vamos a descomponer la integral en dos sumandos. Para ello hemos de probar que al menos uno es integrable. La integrabilidad de $\left(\frac{\operatorname{sen} v}{v}\right)^2$ implica la de

$$u(x)=\frac{\operatorname{sen}^2\big(\lambda(y-x)\big)}{\lambda(y-x)^2},$$

y su vez ésta implica la de $e^{-\epsilon x}u(x)=u(x)-(1-e^{-\epsilon x})u(x)$, pues el segundo sumando está mayorado por $u(x)$. Por consiguiente:

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt+2\int_0^{+\infty}e^{-\epsilon x}u(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}H(x)e^{-\epsilon x}u(x)\,dx.\qquad(7.8)$$

Ahora vamos a hacer tender ϵ a 0 en cada sumando. Como $h_\epsilon(t)$ tiende uniformemente a $h(t)$ es claro que $F_\epsilon(t)$ tiende uniformemente a

$$F(t)=\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)\frac{h(t)-1}{1+it},$$

luego

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ity}F_\epsilon(t)\,dt=\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ity}F(t)\,dt.$$

Usando que $e^{-\epsilon x}u(x)\le u(x)$ y la integrabilidad de $u(x)$ es fácil ver que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0}\int_0^{+\infty}e^{-\epsilon x}u(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}u(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\big(\lambda(y-x)\big)}{\lambda(y-x)^2}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv.\end{aligned}$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{+\infty} H(x)e^{-\epsilon x}u(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} H(x)u(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv.\end{aligned}$$

El hecho de que los otros dos términos de (7.8) tengan límite prueba que el límite anterior existe. Digamos que es L. Como el integrando es positivo, para todo $\xi > 0$ se cumple

$$\int_0^{\xi} H(x)e^{-\epsilon x}u(x)\,dx \le L,$$

y cuando $\epsilon \to 0$ esta integral tiende a

$$\int_0^{\xi} H(x)u(x)\,dx \le L,$$

luego existe

$$\int_0^{+\infty} H(x)u(x)\,dx \le L.$$

Ahora basta aplicar el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue. Tomando límites en (7.8) obtenemos:

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{ity}F(t)\,dt + 2\int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv = 2\int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv.$$

Finalmente hacemos tender y a $+\infty$. La primera integral tiende a 0 por el lema de Riemann-Lebesgue, la segunda tiende a π y el resultado es la igualdad (7.7). Observemos que si $v > \lambda y$ entonces $H(y - v/\lambda) = 0$, luego (7.7) equivale a

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv = \pi. \tag{7.9}$$

En lo sucesivo usaremos repetidas veces la monotonía de ϕ, que por definición de H se traduce en

$$H(x_2) \ge H(x_1)e^{x_1-x_2}, \quad \text{para } x_1 \le x_2.$$

Teniendo en cuenta que el integrando es positivo es inmediato que

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv \le \pi.$$

Si v varía entre $-\sqrt{\lambda}$ y $\sqrt{\lambda}$ entonces

$$\begin{aligned}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right) &\ge H\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{v/\lambda-1/\sqrt{\lambda}} \ge H\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-\sqrt{\lambda}/\lambda-1/\sqrt{\lambda}}\\ &= H\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-2/\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, H\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-2/\sqrt{\lambda}}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\le\pi.$$

Cambiando y por $y+1/\sqrt{\lambda}$ queda

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, H(y)\le\frac{\pi e^{2/\sqrt{\lambda}}}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv}=P_1(\lambda).$$

Es claro que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P_1(\lambda)=1$.

En particular hemos probado que $H(y)$ está acotado. Si C es una cota, entonces

$$0\le\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\le C\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv,$$

y la última integral tiende a 0 cuando y tiende a $+\infty$, luego por (7.9) existe

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv=\pi. \tag{7.10}$$

Para valores grandes de y se cumple $H(y)<2P_1(\lambda)$, luego si y es suficientemente grande $H(y-v/\lambda)<2P_1(\lambda)$ para todo $v<\sqrt{y}$, pues $y-\sqrt{y}/\lambda$ tiende a infinito.

Sea $b=\frac{4}{\pi}P_1(\lambda)+\sqrt{\lambda}$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{-b}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\le 2P_1(\lambda)\int_{-\infty}^{-b}\frac{1}{v^2}\,dv=\frac{2P_1(\lambda)}{b},$$

y también

$$\int_{b}^{\sqrt{y}}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\le 2P_1(\lambda)\int_{b}^{\sqrt{y}}\frac{1}{v^2}\,dv=\frac{2P_1(\lambda)}{b},$$

luego separando estos dos intervalos de (7.10) queda

$$\frac{4P_1(\lambda)}{b}+\underline{\lim_{y\to+\infty}}\int_{-b}^{b}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\ge\pi.$$

Si $|v|\le b$ entonces $y-v/\lambda\le y+b/\lambda$, y aplicando la monotonía de ϕ obtenemos $H(y+b/\lambda)e^{2b/\lambda}\ge H(y-v/\lambda)$. En consecuencia

$$\frac{4P_1(\lambda)}{b}+\underline{\lim_{y\to+\infty}}\,H\left(y+\frac{b}{\lambda}\right)e^{2b/\lambda}\int_{-b}^{b}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\ge\pi.$$

Teniendo en cuenta que la integral es menor que π, al despejar queda

$$\underline{\lim_{y\to+\infty}}\,H\left(y+\frac{b}{\lambda}\right)\ge e^{-2b/\lambda}\left(1-\frac{4P_1(\lambda)}{\pi b}\right),$$

y tras un cambio de variable llegamos a

$$\varliminf_{y\to+\infty} H(y) \geq e^{-2b/\lambda}\left(1-\frac{4P_1(\lambda)}{\pi b}\right) = P_2(\lambda),$$

donde claramente $\lim_{\lambda\to+\infty} P_2(\lambda) = 1$. ∎

Ahora enunciamos el caso particular de este teorema que realmente vamos a usar:

Teorema 7.41 *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes $a_n \geq 0$ convergente en el semiplano $\sigma > 1$ y que admita prolongación analítica a la recta $\sigma = 1$ excepto por un polo simple en 1 con residuo 1. Entonces*

$$\sum_{n\leq x} a_n = x + o(x).$$

Demostración: Ya hemos comentado que las hipótesis del teorema anterior se satisfacen si consideramos la función $\phi(x) = \sum_{\log n\leq x} a_n$. En estos términos

$$\sum_{n\leq x} a_n = \phi(\log x),$$

y la conclusión del teorema anterior puede reescribirse como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(\log x)}{x} = 1.$$

∎

Para probar el teorema de los números primos nos basta este resultado, pero para otras aplicaciones necesitaremos una versión un poco más general.

Teorema 7.42 *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet en las condiciones del teorema anterior y sea $g(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes $b_n \in \mathbb{C}$ convergente en el semiplano $\sigma > 1$ y prolongable analíticamente a la recta $\sigma = 1$ salvo quizá a $s = 1$, donde tiene un polo simple con residuo α (entendiendo que $\alpha = 0$ si no hay tal polo). Supongamos que existe una constante C tal que $|b_n| \leq Ca_n$. Entonces*

$$\sum_{n\leq x} b_n = \alpha x + o(x).$$

Demostración: Supongamos primero que los coeficientes de g son reales (y por lo tanto α también). Podemos tomar $C > \alpha$. Entonces la función $(Cf+g)/(C+\alpha)$ cumple las mismas hipótesis que f, luego el teorema anterior nos da que

$$\sum_{n\leq x} \frac{Ca_n + b_n}{C+\alpha} = x + o(x),$$

o equivalentemente,

$$C\sum_{n\leq x} a_n + \sum_{n\leq x} b_n = (C+\alpha)x + o(x),$$

y la conclusión es clara. En el caso general consideramos la serie

$$\bar{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n^s}.$$

Claramente $\bar{g}(s) = \overline{g(s)}$ y además

$$g = \frac{g+\bar{g}}{2} + \frac{g-\bar{g}}{2i}.$$

Las funciones $g \pm \bar{g}$ cumplen las hipótesis del teorema y sus coeficientes son reales. Por el caso anterior cumplen la tesis, y de aquí se sigue fácilmente que lo mismo sucede con g. ∎

En su demostración del teorema de los números primos, Riemann tuvo que estudiar la distribución de los ceros de la función dseta. Nosotros necesitaremos únicamente el resultado más elemental a este respecto: que la función dseta no se anula sobre la recta $\sigma = 1$. Vamos a probarlo, más en general, para funciones L.

Teorema 7.43 *Sea χ un carácter modular. Entonces $L(1+it,\chi) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$ si $\chi = 1$). En particular $\zeta(1+it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ no nulo.*

Demostración: El caso particular se obtiene aplicando el teorema al carácter principal módulo 1. El caso $t = 0$ es el teorema 7.34, luego ahora podemos suponer $t \neq 0$. Consideramos la función

$$F(s) = \zeta^3(s)L^4(s+it,\chi)L(s+2it,\chi^2).$$

Las funciones $L(s+it,\chi)$ y $L(s+2it,\chi^2)$ son holomorfas en 1. Si suponemos que $L(1+it,\chi) = 0$ entonces el polo triple de $\zeta^3(s)$ se cancela con el cero cuádruple del segundo factor, con lo que F es holomorfa en 1 y además $F(1) = 0$.

Así pues, basta probar que $F(1) \neq 0$. Lo haremos estudiando su logaritmo. En primer lugar notamos que

$$L(s+it,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

donde $f(n) = \chi(n)/n^{it}$ es una función aritmética completamente multiplicativa, y lo mismo es válido para $L(s+2it,\chi^2)$ cambiando f por f^2. Según el teorema 7.15 tenemos los desarrollos en productos de Euler

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \quad L(s+it,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}}, \quad L(s+2it,\chi^2) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{f^2(p)}{p^s}},$$

válidos en el semiplano $\sigma > 1$.

Ahora aplicamos el teorema 4.3 junto con el desarrollo de Taylor

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

con lo que obtenemos

$$\log\zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}, \quad \log L(s+it,\chi) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p^n)}{np^{ns}},$$

$$\log L(s+2it,\chi^2) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(p^n)}{np^{ns}}.$$

Es claro que las series son absolutamente convergentes (las series de los módulos son todas iguales a $\log\zeta(\sigma)$). Consecuentemente podemos agruparlas y formar la serie

$$\log F(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 4f(p^n) + f^2(p^n)}{np^{ns}},$$

que es, efectivamente, un logaritmo de $F(s)$ en el semiplano $\sigma > 1$. Puesto que $|f(n)| = 1$, si θ_{p^n} es un argumento cualquiera de $f(p^n)$, tenemos que $\operatorname{Re} f(p^n) = \cos\theta_{p^n}$ y $\operatorname{Re} f^2(p^n) = \cos 2\theta_{p^n}$. Se cumple

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0,$$

con lo que concluimos $\operatorname{Re}\log F(s) \geq 0$ y, en consecuencia, $|F(s)| \geq 1$ para todo $s > 1$. Por continuidad no puede ser $F(1) = 0$. ∎

Finalmente estamos en condiciones de probar el teorema de los números primos. Vamos a aplicar el teorema 7.41 a la derivada logarítmica de la función dseta (cambiada de signo). Hemos visto que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

donde Λ es la función de Mangoldt. Teniendo en cuenta su definición esto equivale a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_p \frac{\log p}{p^s} + \sum_{p,m\geq 2} \frac{\log p}{p^{ms}},$$

donde p recorre los números primos y m los naturales no nulos.

Como la convergencia es absoluta, los dos sumandos de la derecha definen funciones holomorfas en el semiplano $\sigma > 1$. Llamemos $g(s)$ a la primera de ellas. Respecto a la segunda, al sumar la serie geométrica tenemos

$$\sum_{p,m\geq 2} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_p \frac{\log p}{p^{2s} - p^s},$$

y al comparar esta serie con $g(2s)$ concluimos que de hecho converge en el semiplano $\sigma > 1/2$. Por otra parte el teorema 8.7 nos da que la función meromorfa $-\zeta'/\zeta$ tiene un polo simple en 1 con residuo igual a 1.

El hecho siguiente es crucial: como la función ζ no se anula en la recta $\sigma = 1$, concluimos que 1 es la única singularidad de $-\zeta'/\zeta$ en dicha recta.

Por último, dado que la segunda serie en que hemos descompuesto esta función es holomorfa en toda la recta, llegamos a que la serie de Dirichlet

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

define una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 1$ prolongable a una función meromorfa en el semiplano $\sigma > 1/2$ que sobre la recta $\sigma = 1$ tiene un único polo simple en 1 con residuo 1.

Vemos así que estamos en las hipótesis del teorema 7.41, cuya conclusión en este caso es

$$\sum_{p\leq x} \log p = x + o(x). \tag{7.11}$$

El teorema de los números primos es ahora consecuencia inmediata del teorema 7.37:[3]

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Aunque ya hemos dicho que no entraremos en la estimación del error en el teorema de los números primos, comentaremos que ésta depende fuertemente de la distribución de los ceros de la función dseta. Riemann conjeturó que todos los ceros en la llamada banda crítica $0 < \sigma < 1$ están, de hecho, sobre la recta $\sigma = 1/2$. Esta conjetura se conoce como *hipótesis de Riemann.* Hilbert la incluyó en su famosa lista de problemas presentada en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas de París en 1900 y todavía está sin resolver.

La hipótesis de Riemann está avalada por cálculos que muestran que los primeros millones de ceros no triviales se encuentran efectivamente sobre la recta $\sigma = 1/2$. Volveremos sobre ello en el capítulo XI. De la Vallée Poussin probó que no hay ceros en una cierta zona en la banda crítica (limitada por una curva asintótica a la recta $\sigma = 1$) y, con ayuda de este hecho, demostró que el error relativo en la aproximación de $\pi(x)$ por $\mathrm{Il}(x)$ es menor que $e^{-\sqrt{c\log x}}$, para cierta constante $c > 0$. La hipótesis de Riemann equivale a que dicho error sea finalmente menor que $x^{-(1/2)+\epsilon}$ para cualquier $\epsilon > 0$.

La sucesión de los primos Una consecuencia sencilla del teorema de los números primos es una fórmula asintótica para el primo n-simo similar a la fórmula de Stirling para $n!$

[3]En general, todos los argumentos empleados siguen siendo válidos para un cuerpo numérico arbitrario K, cambiando p por $N(P)$, donde P recorre los ideales primos de K. Si $\mu(n)$ es el número de ideales P de norma n, llegamos a la relación $\sum_{n\leq x} \mu(n)\log n = x + o(x)$, a partir de la cual se concluye que el número de primos de K de norma $\leq x$ es asintóticamente igual a $x/\log x$. Más aún, si aplicamos directamente el teorema 7.41 a la función dseta de K dividida entre su residuo ρ obtenemos también que el número de ideales de norma $\leq x$ es asintóticamente igual a ρx.

Teorema 7.44 *Sea p_n el primo n-simo. Entonces $p_n \sim n \log n$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomando logaritmos en la fórmula del teorema de los números primos queda

$$\log \pi(x) + \log\log x - \log x \longrightarrow 0,$$

luego también

$$\frac{\log \pi(x)}{\log x} + \frac{\log\log x}{\log x} \longrightarrow 1.$$

El segundo sumando tiende a 0, con lo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \pi(x)}{\log x} = 1.$$

Multiplicando y dividiendo por $\log x$ obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log \pi(x)}{x} = 1,$$

Y si hacemos $x = p_n$ es claro que $\pi(p_n) = n$, luego

$$\lim_n \frac{n \log n}{p_n} = 1,$$

es decir, $p_n \sim n \log n$. ∎

La serie de los inversos de los primos Ahora vamos a investigar el comportamiento asintótico de la serie

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p}.$$

Nos basaremos en el producto $\Lambda * 1 = \log$, que demostramos en el capítulo VII sobre la función de Mangoldt. Representamos por $E(x)$ la parte entera de x. Entonces

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)E(x/n) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \sum_{m\le x/n} 1 = \sum_{mn\le x} \Lambda(n) = \sum_{k\le x} \sum_{n|k} \Lambda(n)$$

$$= \sum_{k\le x} (\Lambda * 1)(k) = \sum_{k\le x} \log k = \log E(x)!$$

Por otro lado, usando la definición de la función de Mangoldt,

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)E(x/n) = \sum_{p^m\le x} E(x/p^m)\log p = \sum_{p\le x} \sum_{m=1}^{\infty} E(x/p^m)\log p,$$

(los infinitos sumandos añadidos son nulos).

Separamos los sumandos correspondientes a $m \geq 2$ y vemos que

$$\sum_{p\leq x}\sum_{m=2}^{\infty} E(x/p^m)\log p \leq x\sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty} 1/p^m = x\sum_{p\leq x}\log p\,\frac{1/p^2}{1-1/p}$$

$$= x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)} \leq x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)} = O(x).$$

La convergencia de la última serie puede probarse por comparación con $\zeta(3/2)$ o, alternativamente, ya hemos usado la convergencia de la penúltima serie en la prueba del teorema de los números primos. Con esto concluimos que

$$\log E(x)! = \sum_{p\leq x} E(x/p)\log p + O(x).$$

Por otro lado, tomando logaritmos en la fórmula de Stirling vemos que

$$\log n! = n\log n - n + O(\log n),$$

de donde se sigue fácilmente

$$\log E(x)! = x\log x - x + O(\log x).$$

Así pues,

$$\sum_{p\leq x} E(x/p)\log p = x\log x + O(x).$$

Ahora veremos que podemos quitar las partes enteras. Obviamente se cumple $E(x/p) = x/p + O(1)$, luego

$$\sum_{p\leq x} E(x/p)\log p = \sum_{p\leq x}\frac{x}{p}\log p + \sum_{p\leq x} O(1)\log p = x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} + O\left(\sum_{p\leq x}\log p\right).$$

La relación (7.11) implica que el último término es $O(x)$, luego

$$x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = x\log x + O(x),$$

o también

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Llamemos $A(x)$ a esta última serie. El paso siguiente será encontrar una expresión integral para la serie de los inversos de los primos en función de $A(x)$. Sea $N = E(x)$.

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \sum_{n=2}^{N}\frac{A(n)-A(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{N-1}\frac{A(n)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N-1}\frac{A(n)}{\log(n+1)} + \frac{A(N)}{\log N}$$

$$= \sum_{n=2}^{N-1} A(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{A(N)}{\log N} = \sum_{n=2}^{N-1} A(n)\int_n^{n+1} \frac{dt}{t\log^2 t} + \frac{A(N)}{\log N}$$

$$= \int_2^N \frac{A(t)}{t\log^2 t}\,dt + \frac{A(x)}{\log x} + \int_N^x \frac{A(t)}{t\log^2 t}\,dt = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t\log^2 t}\,dt.$$

Para terminar, hacemos $A(x) = \log x + R(x)$, donde R es una función acotada, y así

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = 1 + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \log\log x - \log\log 2 + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt.$$

Las últimas integrales existen porque $|R(t)/t\log^2 t| \le C/t\log^2 t$, que es integrable (su primitiva es $-C/\log t$). Más aún,

$$\left|\frac{\int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt}{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\log^2 t}}\right| \le C,$$

y por consiguiente

$$\int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt = O\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\log^2 t}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

En total hemos llegado a que

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = k + \log\log x + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

para una cierta constante k, análoga a la constante de Euler para la serie harmónica.

Primos en progresiones aritméticas Nuestra última aplicación del teorema de Ikehara será un refinamiento del teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas.

Definición 7.45 Sea G un grupo abeliano finito. Sea $\mathbb{C}^G$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones de G en $\mathbb{C}$. Para cada $f \in \mathbb{C}^G$ definimos

$$\int_G f(g)\,dg = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g).$$

Este operador integral define una aplicación lineal $\mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}$. Las relaciones de ortogonalidad afirman en estos términos que

$$\int_G \chi(g)\,dg = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{si } \chi \neq 1 \end{cases}$$

para todo carácter χ de G.

De aquí se sigue que los caracteres de G son linealmente independientes como elementos de $\mathbb{C}^G$. En efecto, dada una combinación lineal nula

$$\sum_\chi \alpha_\chi \chi = 0,$$

si ψ es un carácter fijo también se cumple

$$\sum_\chi \alpha_\chi \chi\psi^{-1} = 0,$$

y al integrar queda $\alpha_\psi = 0$.

Como la dimensión de $\mathbb{C}^G$ es $|G|$, concluimos que los caracteres forman una base, con lo que toda función $f \in \mathbb{C}^G$ se expresa como combinación lineal de los caracteres de G.

Sea A un conjunto de primos no vacío y sea $A_x = \{p \in A \mid p \le x\}$. Diremos que una aplicación $\lambda : A \longrightarrow G$ está *equidistribuida* si para todo carácter χ de G se cumple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{p\in A_x} \chi(\lambda(p))}{|A_x|} = \int_G \chi(g)\,dg. \tag{7.12}$$

Observar que si χ es el carácter principal el miembro derecho de (7.12) vale 1 y se cumple trivialmente la igualdad. Si χ no es principal las relaciones de ortogonalidad implican que el miembro derecho vale 0. Notemos también que los dos miembros de (7.12) son lineales en χ. Como toda aplicación $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ puede expresarse como combinación lineal de los caracteres de G, resulta que si λ está equidistribuida entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{p\in A_x} f(\lambda(p))}{|A_x|} = \int_G f(g)\,dg.$$

En particular, si f es la función que vale 1 sobre un elemento fijo $g \in G$ y es 0 en los restantes, resulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big|\{p \in A \mid p \le x, \lambda(p) = g\}\big|}{\big|\{p \in A \mid p \le x\}\big|} = \frac{1}{|G|}.$$

Esto significa que para valores grandes de x hay aproximadamente el mismo número de primos $p \le x$ en A con la misma imagen por λ. Es fácil ver que esta última igualdad equivale a la equidistribución.

Sea $m \ge 2$ y k un entero primo con m. Llamaremos $\pi_k(x)$ al número de primos $p \le x$ tales que $p \equiv k \pmod m$. El teorema de Dirichlet equivale a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi_k(x) = +\infty$. Ahora probamos más que esto:

Teorema 7.46 *Sea $m \ge 2$ y k un número entero primo con m. Entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\phi(m)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea A el conjunto de los primos que no dividen a m. Sea $\lambda : A \longrightarrow U_m$ la aplicación dada por $\lambda(p) = [p]$. Basta probar que λ está equidistribuida. Esto implica la fórmula que queremos probar salvo por el hecho de que (si x es grande) en el denominador queda $\pi(x) - c$, donde c es el número de primos que dividen a m. Es claro que dicha c puede eliminarse.

Así pues, basta probar que todo carácter no principal módulo m cumple que el límite de (7.12) es igual a 0.

Dado un carácter χ consideramos la fórmula

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$$

que ya hemos usado en la prueba del teorema de Dirichlet. Al derivar queda

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{p,n} \frac{\log p\, \chi(p^m)}{p^{ns}}.$$

Por el teorema 7.43 esta función es holomorfa sobre toda la recta $\sigma = 1$. Si separamos los términos con $n \geq 2$ obtenemos una serie mayorada en módulo por

$$\sum_{p,n\geq 2} \frac{\log p}{p^{ns}},$$

y en la demostración del teorema de los números primos hemos probado que esta serie converge en el semiplano $\sigma > 1/2$. Por consiguiente, la serie restante,

$$\sum_p \frac{\log p\, \chi(p)}{p^s}$$

define una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 1$ que se prolonga analíticamente a la recta $\sigma = 1$.

Aplicamos el teorema 7.42 tomando como g a esta serie y como f a

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}.$$

La conclusión es que

$$\sum_{p\leq x} \log p\, \chi(p) = o(x),$$

y el teorema 7.37 nos permite eliminar los logaritmos:

$$\sum_{p\leq x} \chi(p) = o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

El teorema de los números primos nos da

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{p\leq x} \chi(p)}{\pi(x)} = 0.$$

Esta fórmula sigue siendo cierta si en el denominador ponemos $\pi(x) - c$, donde c es el número de primos que dividen a m, y entonces tenemos (7.12). ∎

Nota: En el caso de una extensión de cuerpos numéricos este argumento permite probar que los ideales primos están equidistribuidos respecto al homomorfismo de Artin. Generalizando de forma obvia las definiciones también se prueba que los ideales están equidistribuidos. Para ello hay que usar las funciones L en lugar de sus derivadas logarítmicas, así como la función dseta quitándole los factores correspondientes a los primos ramificados en la extensión.

Capítulo VIII

El teorema de los residuos

Según el teorema de Cauchy, la integral de una función holomorfa alrededor de un arco cerrado es nula siempre que el arco no rodee a ningún punto en el que la función no esté definida. En este capítulo estudiaremos qué ocurre si permitimos que el arco rodee a una o varias singularidades aisladas de la función. La respuesta es que entonces la integral ya no es necesariamente nula, pero cada singularidad contribuye al resultado únicamente a través de su "residuo", que no es sino el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de la función alrededor del punto. Si el teorema de Cauchy nos ha aportado mucha información sobre las funciones holomorfas, la generalización que probaremos seguidamente nos permitirá probar resultados aún más potentes.

8.1 Residuos

Aunque ya hemos anticipado varias veces la definición de residuo (de hecho, ya hemos calculado los residuos de la función factorial y de la función dseta de Riemann), éste es el punto donde el concepto entra en la teoría:

Definición 8.1 Si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f, se llama *residuo* de f en z_0, y se representa por $\mathrm{Res}(f, z_0)$, al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f en z_0.

En particular, si z_0 es una singularidad evitable de f (o, lo que en la práctica es equivalente, si f es holomorfa en z_0) entonces $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

Teorema 8.2 (Teorema de los residuos) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función tal que si $z \in \Omega$ entonces f es holomorfa en z o bien f tiene una singularidad aislada en z. Sea γ un arco cerrado contenido en Ω y que no pase por ninguna singularidad de f. Supongamos además que $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces*

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in \Omega} \mathrm{Res}(f, z)\, I(\gamma, z).$$

Notar que todos los sumandos de la derecha son nulos salvo un número finito. Se entiende que si $z \in \gamma^*$ entonces $\operatorname{Res}(f,z)\,I(\gamma,z) = 0$ *(aunque el índice no esté definido).*

DEMOSTRACIÓN: Sea B el conjunto de singularidades no evitables de f. Como todas las singularidades de f son aisladas, B es un conjunto discreto, luego numerable. Obviamente $\operatorname{Res}(f,z) = 0$ para cualquier z que no esté en B. Más aún, B no puede tener puntos de acumulación en Ω, pues tales puntos no serían singularidades aisladas de f.

Sea $H = \{z \in B \mid I(\gamma,z) \neq 0\} \subset B$. Si $I(\gamma,z) \neq 0$ entonces z no está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, luego H está contenido en un conjunto acotado. Si fuera infinito tendría un punto de acumulación $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, y por hipótesis $I(\gamma,z_0) = 0$. Ahora bien, como el índice es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, resultaría que $I(\gamma,z) = 0$ en un entorno de z_0, luego habría puntos de H con índice nulo, contradicción. Así pues, H es finito.

Cambiando Ω por $(\Omega \setminus B) \cup H$ podemos suponer que f tiene un número finito de singularidades en Ω (los puntos que hemos eliminado cumplen $I(\gamma,z) = 0$, luego sigue siendo cierto que $I(\gamma,z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$).

Si $z \in H$ entonces z es una singularidad aislada de f, es decir, f es holomorfa en un entorno reducido $D'(z,r)$. Consideremos la serie de Laurent

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(\zeta - z)^n \qquad \text{para } \zeta \in D'(z,r).$$

Llamemos

$$S_z(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n}$$

a la parte singular de la serie. Teniendo en cuenta el teorema 5.8 tenemos que $S_z(\zeta)$ converge (y es holomorfa) en $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Consecuentemente la función $g(\zeta) = f(\zeta) - \sum_{z \in H} S_z(\zeta)$ es holomorfa en $\Omega \setminus H$. Ahora bien, si $z_0 \in H$ entonces

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(\zeta - z_0)^n - \sum_{z \in H \setminus \{z_0\}} S_z(\zeta) \qquad \text{para } \zeta \in D'(z,r),$$

luego z es una singularidad evitable de g y, por lo tanto, podemos considerar que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Estamos en las hipótesis de la versión general del teorema de Cauchy, luego

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta - \sum_{z \in H} \int_\gamma S_z(\zeta)\,d\zeta.$$

Las series de Laurent convergen uniformemente en compactos, y γ^* es un compacto, luego por el teorema 2.19 podemos intercambiar la serie y la integral, es decir,

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{z \in H} \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n}\,d\zeta = \sum_{z \in H} \int_\gamma a_{-n}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z)^n}\,d\zeta.$$

Pero es claro que todos los integrandos tienen primitiva excepto para $n = 1$, luego

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z\in H} a_{-1}(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \sum_{z\in H} \operatorname{Res}(f,z)\, I(\gamma, z).$$

■

Para mostrar aplicaciones concretas del teorema de los residuos necesitamos técnicas para calcular residuos de singularidades. El método más elemental es calcular directamente el coeficiente de la serie de Laurent.

Ejemplo Calculemos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z - \operatorname{sen} z}, 0\right).$$

Teniendo en cuenta la serie de Taylor se $\operatorname{sen} z$ es claro que

$$z - \operatorname{sen} z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots\ ,$$

luego 0 es un cero de orden 3 de $z - \operatorname{sen} z$ y por consiguiente es un polo de orden 3 de la función que nos ocupa. La serie de Laurent será de la forma

$$\frac{1}{z - \operatorname{sen} z} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

El residuo que buscamos es a_2. Operando las dos últimas igualdades nos queda

$$1 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots\Big)$$

Ahora multiplicamos las series e igualamos coeficientes:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0\,\frac{1}{3!} && a_0 = 6,\\ 0 &= a_0 \cdot 0 + a_1\,\frac{1}{3!} && a_1 = 0,\\ 0 &= a_0 \cdot \left(-\frac{1}{5!}\right) + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) && a_2 = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

■

En el caso de polos suele ser útil el teorema siguiente:

Teorema 8.3 *Sea f una función holomorfa con un polo de orden m en un punto z_0. Entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z - z_0)^m f(z)\big).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. La función g tiene una singularidad evitable en z_0. Más concretamente, si la serie de Laurent de f es

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

la serie de Taylor de g es

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

El residuo que buscamos es a_{-1}, que es el coeficiente de $(z - z_0)^{m-1}$ de la serie de Taylor de g. Según el teorema 3.19 y teniendo en cuenta la unicidad del desarrollo

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Puesto que las derivadas son continuas, podemos sustituir $g^{m-1)}(z_0)$ por el límite que aparece en el enunciado, que es la forma más útil en la práctica. ∎

El teorema siguiente es preferible al anterior cuando puede aplicarse:

Teorema 8.4 *Sean $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en un punto z_0 de modo que $o(g, z_0) = 0$, $o(h, z_0) = 1$ (con lo que $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0). Entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $h(z_0) = 0$ pero $h'(z_0) \neq 0$. Por el teorema anterior

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = g(zo) \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

∎

8.2 Aplicaciones al cálculo de integrales

El teorema de los residuos puede usarse para calcular integrales reales del mismo modo que aplicábamos el teorema de Cauchy, sólo que ahora las posibilidades son mayores. Veamos un ejemplo sencillo para empezar:

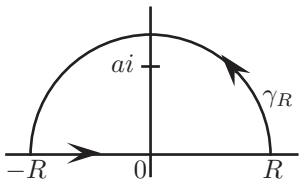
Ejemplo 1 Calculemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \qquad \text{para } a > 0.$$

Teniendo en cuenta que el integrando es positivo, la integrabilidad equivale a la existencia del límite

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

La función $f(z)=1/(z^2+a^2)^3$ tiene polos triples en los puntos $\pm ai$. Consideremos el arco $[-R,R]\cup\gamma_R$ dado por la figura. Podemos aplicar el teorema de los residuos. Mediante el teorema 8.3 es fácil calcular



$$\operatorname{Res}(f,ai)=\frac{3}{16a^5i}.$$

Así pues,

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}+\int_{\gamma_R}f(\zeta)\,d\zeta=2\pi i\,\frac{3}{16a^5i}=\frac{2\pi}{8a^5}.$$

Ahora basta demostrar que existe

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}f(\zeta)\,d\zeta=0.$$

Para ello basta observar que

$$\left|\int_{\gamma_R}f(\zeta)\,d\zeta\right|\le\pi R\max_{|z|=R}\frac{1}{|z^2+a^2|^3}=\pi R\,\frac{1}{R^6}\max_{|z|=R}\frac{1}{|1+a^2/z^2|^3},$$

y es claro que esta última expresión tiende a 0 con R. La conclusión es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{3\pi}{8a^5}.$$

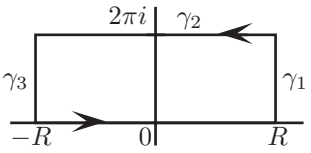
■

El método que hemos empleado sirve para integrar funciones racionales bajo condiciones muy generales. Para funciones de otro tipo se necesitan ideas nuevas. Por ejemplo, en el caso anterior la integral sobre la semicircunferencia tendía a 0 porque la función considerada tendía a 0 en ∞ (con rapidez suficiente). En el próximo ejemplo esto ya no es cierto, pero a cambio contamos con la periodicidad de la función exponencial:

Ejemplo 2 Calculemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,\qquad 0<a<1.$$

Es fácil comprobar que un arco como el del ejemplo anterior no funciona en este caso porque la integral sobre la semicircunferencia no tiende a 0. Consideremos en cambio el arco de la figura.



La idea es que el integrando tiende a 0 cuando x tiende a ∞ (de lo contrario la función no sería integrable), y esto nos permitirá probar que las integrales de la función

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

sobre los segmentos γ_1 y γ_3 tienden a 0 con R.

La integral sobre γ_2 no se va a anular, pero debido a la periodicidad de la función exponencial resulta que $f(x+2\pi i) = e^{2a\pi i} f(x)$ y la integral sobre γ_2 es un múltiplo de la integral buscada, con lo que podremos despejarla igualmente. Veamos los detalles.

Ante todo, la función $1+e^z$ tiene un cero simple en πi (la derivada no se anula), luego $f(z)$ tiene un polo simple en πi. Las singularidades restantes están fuera del arco, luego no nos afectan. Podemos calcular el residuo mediante el teorema 8.4 y queda: $\operatorname{Res}(f, \pi i) = -e^{a\pi i}$. El teorema de los residuos nos da

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_3} f(\zeta)\,d\zeta = -2\pi i\, e^{a\pi i}.$$

Por otra parte

$$\left|\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\,i\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1+e^{R+it}|}\,dt.$$

Claramente $|1+e^{R+it}| \ge |e^{R+it}| - 1 = e^R - 1 > 0$, luego

$$\left|\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}\,dt = \frac{2\pi e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}},$$

y es claro que la última expresión tiende a 0 con R.

Similarmente se demuestra que la integral sobre γ_3 también tiende a 0. Por lo tanto concluimos que existe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{-2\pi i\, e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

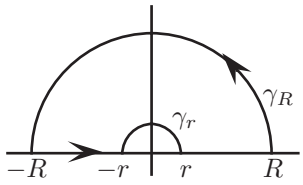
■

El ejemplo que sigue emplea una combinación de las dos ideas precedentes.

Ejemplo 3 Calculemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Consideramos el arco indicado en la figura. Esta vez hemos necesitado una nueva semicircunferencia para evitar la singularidad en 0 debida al logaritmo. Puesto que la función es integrable es razonable conjeturar que la integral sobre γ_r tenderá a 0. Lo



mismo le ocurrirá a γ_R, pero, a diferencia de lo que sucedía en el ejemplo 1, aquí no nos interesa la integral sobre el segmento $[-R,-r]$. La solución será reducir la integral sobre este segmento a la integral sobre $[r,R]$, tal y como hemos hecho en el ejemplo 2.

Obviamente la función a considerar es

$$f(z)=\frac{\log z}{(z^2+1)^2},$$

donde $\log z$ es la rama uniforme del logaritmo con partes imaginarias en el intervalo $]-\pi/2,3\pi/2[$ (de modo que sobre números reales coincide con el logaritmo real y está definida en un abierto que contiene a nuestro arco).

Sobre el eje negativo tenemos $\log(-x)=\log x+\pi i$, con lo que

$$\int_{[-R,-r]} f(\zeta)\,d\zeta=-\int_{-R}^{-r}\frac{\log(-x)}{(x^2+1)^2}\,dx=\int_r^R\frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx+\pi i\int_r^R\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Con esto hemos eliminado la integral sobre el eje negativo. La última integral que nos aparece podría calcularse como en el ejemplo 1, pero veremos que no será necesario.

La función f tiene dos polos dobles en $\pm i$. El único que nos interesa es i, cuyo residuo se calcula fácilmente con el teorema 8.3 y queda

$$\operatorname{Res}(f,i)=\frac{\pi+2i}{8}.$$

El teorema de los residuos nos da

$$2\int_r^R\frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx+\pi i\int_r^R\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int_{\gamma_R}f(\zeta)\,d\zeta+\int_{\gamma_r}f(\zeta)\,d\zeta=2\pi i\,\frac{\pi+2i}{8}.$$

Para acotar las integrales sobre las circunferencias observamos que si $|z|=r$ es suficientemente pequeño se cumple

$$\begin{aligned}|\log z| &= |\log r+i\arg z|=\sqrt{(\log r)^2+(\arg z)^2}\le\sqrt{(\log r)^2+\pi^2}\\ &\le \sqrt{2(\log r)^2}=\sqrt{2}\log(1/r).\end{aligned}$$

Por otra parte la función $1/(z^2+1)^2$ es continua en un entorno de 0, luego está acotada, digamos por M. De aquí que

$$\left|\int_{\gamma_r}f(\zeta)\,d\zeta\right|\le\pi rM\sqrt{2}\log(1/r),$$

y es claro que la última expresión tiende a 0 cuando r tiende a 0.

Para la otra semicircunferencia usamos que si $|z|=R$ es suficientemente grande entonces $|\log z|\le\sqrt{2}\log R$, así como que

$$\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right|\le\frac{1}{(R^2-1)^2}.$$

Como consecuencia obtenemos

$$\left|\int_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq \frac{\pi R\sqrt{2}\log R}{(R^2-1)^2},$$

que también tiende a 0. Con esto hemos probado que existe

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\left(2\int_r^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + \pi i\int_r^R \frac{dx}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\,i.$$

Igualando partes reales y partes imaginarias llegamos a que existen

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

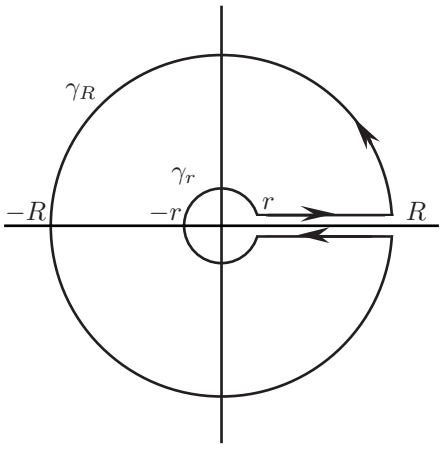
■

En este ejemplo hemos podido reducir la integral en el segmento negativo a la integral en el segmento positivo gracias a que el denominador era par en x (no se alteraba al cambiar x por $-x$). Ahora consideraremos una función muy similar pero en la que esto ya no es cierto, lo que nos obligará a introducir una idea nueva.

Ejemplo 4 Calculemos

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx, \qquad \text{para } a,\ b>0.$$

Si intentamos seguir la técnica del ejemplo anterior nos encontraremos con que no podemos eliminar o reducir la integral sobre el intervalo $[-R,-r]$. La solución es no pasar por el eje negativo, recorriendo una circunferencia completa:



Partimos de r, recorremos el segmento $[r,R]$, luego damos una vuelta completa γ_R, recorremos el segmento $[R,r]$ y por último damos una vuelta en sentido

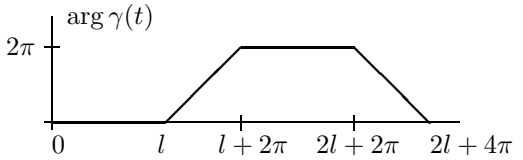
negativo γ_r, con lo que volvemos al punto de partida y completamos el arco cerrado. En la figura hemos separado los intervalos $[r, R]$ y $[R, r]$ para que se vea mejor la trayectoria, pero es sólo un convenio de representación. Hay que entender que los tramos horizontales son el mismo segmento real recorrido dos veces en sentidos opuestos, así como que las circunferencias están completas.

El problema que presenta este arco es que no es posible definir una rama uniforme del logaritmo en un abierto que lo contenga, pues tal abierto rodearía al 0 sin contenerlo y no sería simplemente conexo. En la práctica resolveremos esto con un truco, pero conviene dar una interpretación más profunda que nos permita comprender por qué funciona el truco.

La idea subyacente es que podemos definir la integral de una función multiforme sobre un arco sin necesidad de que exista una rama uniforme de la función definida sobre todo el arco.

Pensemos en particular en la función $\log z$ y en nuestro arco. Por concretar podemos suponer que tenemos $\gamma : [0, 2l+4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $l = R - r$ y de modo que en el intervalo $[0, l]$ el arco γ recorre el segmento $[r, R]$, en el intervalo $[l, l + 2\pi]$ recorre γ_R, en el intervalo $[l+2\pi, 2l+2\pi]$ recorre $[R, r]$ y en $[2l+2\pi, 2l+4\pi]$ recorre γ_r.

Según el teorema 1.18 existe una determinación continua del argumento de γ. Concretamente podemos tomar la función $\arg\gamma : [0, 2l + 4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por la gráfica siguiente:

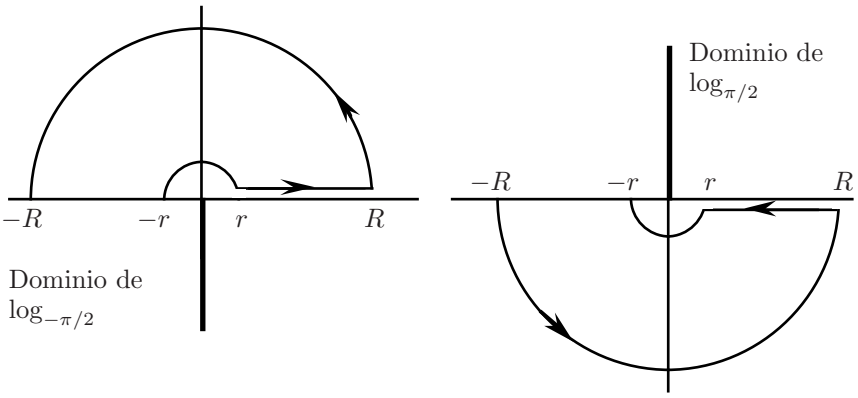


Así la función $\log\gamma : [0, 2l + 4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\log\gamma(t) = \log|\gamma(t)| + i\arg\gamma(t)$ es un logaritmo continuo de γ y tiene sentido

$$\int_\gamma \log\zeta\, d\zeta = \int_0^{2l+4\pi} \log\gamma(t)\gamma'(t)\, dt.$$

Globalmente esta integral no puede considerarse como la integral de una función holomorfa sobre un arco, pero lo importante es que localmente sí es así. Por ejemplo, en el intervalo $[0, l + \pi]$ la función $\log\gamma(t)$ es el logaritmo de $\gamma(t)$ con parte imaginaria en $[0, \pi]$, luego es la composición de $\gamma(t)$ con la rama holomorfa de $\log_{-\pi/2} z$ con argumentos en $]-\pi/2, 3\pi/2[$, mientras que en el intervalo $[l + \pi, 2l + 3\pi]$ podemos ver a $\log\gamma(t)$ como la composición de $\gamma(t)$ con la rama holomorfa $\log_{\pi/2} z$ (ver la figura siguiente).

En general, la integral en cualquier tramo no demasiado grande es una integral curvilínea en el sentido usual. De este modo, cuando integramos el logaritmo en el segmento $[r, R]$ estamos integrando el logaritmo real ordinario (porque $\arg\gamma(t) = 0$ en el intervalo $[0, l]$), luego podemos considerar que integramos la función holomorfa $\log_{-\pi}$, mientras que al llegar al intervalo $[R, r]$ estamos integrando el logaritmo con parte imaginaria 2π, luego estamos integrando una función holomorfa distinta, por ejemplo el logaritmo $\log_\pi$. No importa que no podamos considerar definidas simultáneamente ambas funciones sobre el plano.



El hecho de que localmente la integral sobre g sea una integral curvilínea usual hace que se cumplan las propiedades ordinarias. Por ejemplo, la función

$$F(z) = \int_\gamma z \log \zeta \, d\zeta$$

es entera. Para probarlo basta descomponerla en suma de dos integrales, cada una de las cuales sea la integral curvilínea de una función holomorfa, de modo que podamos aplicar los teoremas del capítulo 2.

En resumen, tenemos definida la integral $\int_\gamma \log \zeta \, d\zeta$ y, más en general, la integral sobre γ de cualquier función que contenga a un logaritmo (observar que el argumento que hemos empleado sirve igualmente para cualquier arco γ que no rodee al 0). Ahora pensamos, naturalmente, en integrar la función

$$f(z) = \frac{\log z}{(z+a)^2 + b^2}.$$

Antes de ver cómo podemos aplicar el teorema de los residuos veamos si hemos resuelto el problema de la cancelación o reducción de la integral sobre $[R, r]$. Tenemos

$$\int_{[R,r]} f(\zeta) \, d\zeta = -\int_r^R \frac{\log x + 2\pi i}{(x+a)^2 + b^2} \, dx,$$

con lo que al integrar sobre todo γ aparecerán las integrales

$$\int_r^R \frac{\log x}{(x+a)^2 + b^2} \, dx - \int_r^R \frac{\log x + 2\pi i}{(x+a)^2 + b^2} \, dx = \int_r^R \frac{2\pi i}{(x+a)^2 + b^2} \, dx$$

y desaparecerá la integral que queremos calcular. Así pues, aún no tenemos el problema debidamente planteado. Esto se resuelve considerando la función

$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{(z+a)^2 + b^2}.$$

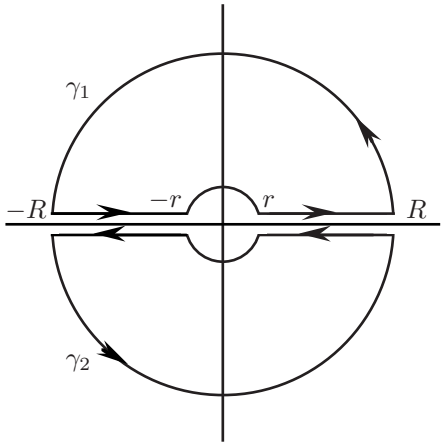
En efecto, ahora la suma de las integrales sobre los segmentos resulta ser

$$\int_r^R \frac{(\log x)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - \int_r^R \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx$$

$$= -4\pi i \int_r^R \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx + 4\pi^2 \int_r^R \frac{dx}{(x+a)^2+b^2},$$

con lo que llegamos a una situación similar a la del ejemplo anterior.

El paso siguiente es comprobar que podemos aplicar el teorema de los residuos. Para ello emplearemos un truco con el que podríamos haber evitado toda la discusión anterior. Se trata de considerar dos arcos cerrados tal y como indica la figura siguiente:



Si integramos $f(z)$ sobre γ_1 considerando $\log_{-\pi/2} z$ y sobre γ_2 considerando $\log_{\pi/2} z$ entonces es claro que

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[-R,-r]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[-r,-R]} f(\zeta)\,d\zeta,$$

pero los logaritmos de las dos últimas integrales tienen ambos parte imaginaria π, luego los integrandos son iguales y, como los sentidos son opuestos, las integrales se cancelan:

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta.$$

A cada uno de estos arcos le podemos aplicar el teorema de los residuos, y al sumar las dos igualdades que resultan llegamos a

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,-a+bi) + \mathrm{Res}(f,-a-bi)\big),$$

que formalmente es como si hubiésemos aplicado el teorema de los residuos directamente a nuestro arco γ. Aplicando el teorema 8.4 se obtiene fácilmente que

$$\mathrm{Res}(f,-a+bi)=\frac{\log(-a+bi)^2}{2bi},\qquad \mathrm{Res}(f,-a+bi)=-\frac{\log(-a-bi)^2}{2bi}.$$

Sólo hemos de recordar que el residuo de $-a+bi$ se ha de calcular considerando que $\log(-a+bi)$ tiene parte imaginaria en $]-\pi/2,3\pi/2[$ y el residuo de $-a-bi$ se ha de calcular considerando que $\log(-a-bi)$ tiene parte imaginaria en $]\pi/2,5\pi/2[$. Concretamente, si llamamos $\theta=\arctan(b/a)$ y $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ tenemos

$$\log(-a+bi)=\log\rho+(\pi-\theta)i,\qquad \log(-a-bi)=\log\rho+(\pi+\theta)i.$$

En estos términos queda

$$2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,-a+bi)+\mathrm{Res}(f,-a-bi)\big)$$

$$=\frac{\pi}{b}\big(\log(-a+bi)+\log(-a-bi)\big)\big(\log(-a+bi)-\log(-a-bi)\big)$$

$$=\frac{\pi}{b}(2\log\rho+2\pi i)(-2\theta i)=4\pi^2\frac{1}{b}\arctan\frac{b}{a}-2\pi\,\frac{\log(a^2+b^2)}{b}\left(\arctan\frac{b}{a}\right)i.$$

La prueba de que las integrales sobre las circunferencias tienden a 0 es análoga a la del ejemplo anterior. Omitimos los detalles. Separando como allí la parte real y la parte imaginaria el resultado es

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx=\frac{\log(a^2+b^2)}{2b}\arctan\frac{b}{a},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\arctan\frac{b}{a}.$$

∎

La idea básica que hay que destacar del ejemplo anterior es que cuando aparece una función multiforme podemos integrar dos veces por el mismo segmento pero con ramas uniformes distintas, con lo que las integrales no se cancelan. Vamos a ver un último ejemplo de esta situación.

Ejemplo 5 Calculemos

$$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx.$$

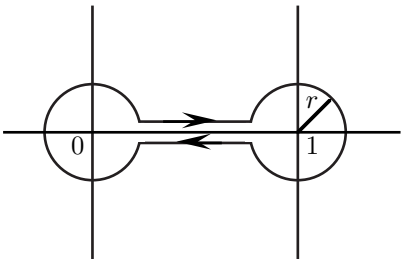
Cada número complejo no nulo tiene exactamente cuatro raíces cuartas. Concretamente, si $z=|z|e^{i\theta}$, una raíz cuarta de z es $w=\sqrt[4]{|z|}\,e^{i\theta/4}$, y las restantes son iw, $-w$, $-iw$, es decir, se obtienen aumentando el argumento en múltiplos de $\pi/2$.

Una expresión alternativa es $\sqrt[4]{z} = e^{(\log z)/4}$, que tiene la ventaja de que si $\log z$ es una rama uniforme holomorfa del logaritmo en un abierto entonces $\sqrt[4]{z}$ es una rama uniforme holomorfa de la raíz cuarta.

Sabemos que podemos obtener ramas uniformes de $\log z$ definidas en $\mathbb{C}$ menos cualquier semirrecta de extremo en 0, por lo que podemos obtener una rama uniforme de $\log(1-z)$ en $\mathbb{C}$ menos cualquier semirrecta de extremo en 1. En el abierto que resulta de eliminar dos semirrectas del plano con extremos en 0 y en 1 tenemos definidas simultáneamente sendas ramas uniformes holomorfas de $\log z$ y $\log(1-z)$. Con ellas podemos construir una rama uniforme holomorfa de $\log(z(1-z)^3)$. Concretamente

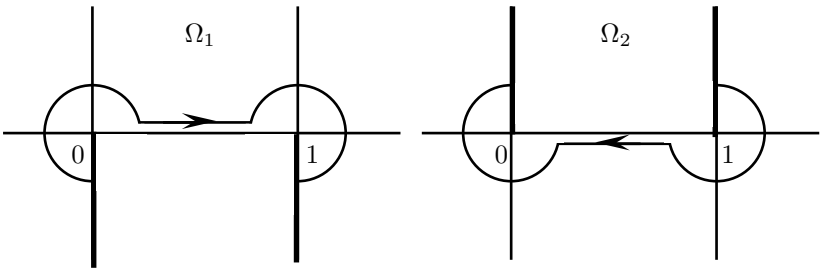
$$\log(z(1-z)^3) = \log z + 3\log(1-z).$$

A su vez ésta nos da una rama uniforme holomorfa de $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$. Vamos a considerar el arco γ dado por la figura siguiente:



La idea es integrar una determinación de $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ sobre este arco de modo que en el segmento $[r, 1-r]$ nos dé la raíz cuarta real, pero que al girar en torno a 1 pase a otra rama distinta y que así la integral sobre $[1-r, r]$ no cancele a la integral sobre el segmento opuesto.

Más precisamente, vamos a considerar los abiertos Ω_1 y Ω_2 indicados en la figura:



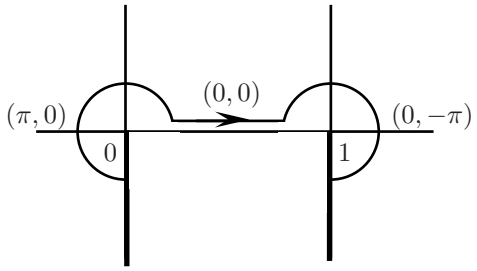
Hemos visto que existen ramas uniformes holomorfas de $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ en cada uno de ellos. El abierto $\Omega_1 \cap \Omega_2$ tiene tres componentes conexas: el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$, la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$ y el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

Vamos a ver que es posible definir ramas h_1 y h_2 sobre Ω_1 y Ω_2 de modo que cuando $0 < x < 1$ entonces $h_1(x) = \sqrt[4]{x(1-x)^3}$ (la raíz real) y además h_1 y h_2 coincidirán sobre los semiplanos $\operatorname{Re} z < 0$ y $\operatorname{Re} z > 1$. De este modo

tendrá sentido $\int_\gamma \sqrt[4]{\zeta(1-\zeta)^3}\,d\zeta$, entendiendo que sobre Ω_1 estamos integrando la rama h_1 y sobre Ω_2 integramos h_2.

Para fijar h_1 hemos de determinar el intervalo de partes imaginarias de los logaritmos $\log z$ y $\log(1-z)$. Para que $h_1(x)$ sea real en $]0,1[$ basta hacer que $\log x$ y $\log(1-x)$ sean ambos reales, o sea, que tengan parte imaginaria nula. La única posibilidad es tomar $\log_{-\pi/2} z$ y $\log_{-3\pi/2}(1-z)$, es decir, los logaritmos con partes imaginarias en los intervalos $]-\pi/2, 3\pi/2[$ y $]-3\pi/2, \pi/2[$ respectivamente.

La figura siguiente indica las partes imaginarias de $\log z$ y $\log(1-z)$ sobre distintos puntos de γ para las ramas que hemos elegido.



Así, por ejemplo, el valor $(0,-\pi)$ en $1+r$ indica que el argumento de $h_1(1+r)$ es $(0-3\pi)/4 = -3\pi/4$.

Para determinar h_2 conviene hacer una observación general: si f y g son ramas uniformes continuas de $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ sobre un abierto conexo Ω (que no contenga a 0, 1) entonces $(f/g)^4 = 1$, con lo que f/g sólo puede tomar los valores ± 1, $\pm i$. Por conexión f/g ha de ser constante, es decir, $g = \pm f$ o $g = \pm if$. En particular si dos ramas uniformes continuas coinciden en un punto de Ω entonces coinciden en todo Ω.

Así pues, si definimos h_2 de modo que $h_2(1+r) = h_1(1+r)$ y $h_2(-r) = h_1(-r)$ tendremos garantizado que las dos ramas coinciden en los semiplanos $\operatorname{Re} z < 0$ y $\operatorname{Re} z > 1$.

Para que $h_2(1+r) = h_1(1+r)$ basta con que $h_2(1+r)$ tenga argumento $-3\pi/4$. Vamos a elegir las ramas de $\log z$ y $\log(1-z)$ en Ω_2 de modo que, al igual que ocurría con las ramas en Ω_1, $\log z$ tenga parte imaginaria nula en $1+r$ y $\log(1-z)$ tenga parte imaginaria $-\pi$. Esto nos obliga a tomar $\log_{-3\pi/2} z$ y $\log_{-5\pi/2}(1-z)$. Con esto tenemos garantizado $h_2(1+r) = h_1(1+r)$ y, por lo tanto, que las dos ramas coinciden en $\operatorname{Re} z > 1$.

Ahora, el argumento de $-r$ en $]-3\pi/2, \pi/2[$ es $-\pi$ y el argumento de $1-(-r)$ en $]-5\pi/2, -\pi/2[$ es -2π, luego el argumento de $h_2(-r)$ es $(-\pi + 3(-2\pi))/4 = -7\pi/4$. El argumento de $h_1(-r)$ es $(\pi + 3\cdot 0)/4 = \pi/4$. Como los dos valores difieren en 2π concluimos que $h_1(-r) = h_2(-r)$, luego las ramas coinciden en todo el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.

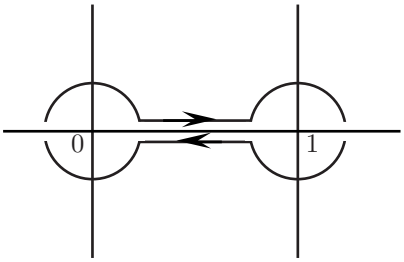
Respecto a la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$, si tomamos un x en $]0,1[$ vemos que $h_1(x)$ es real (tiene argumento 0), mientras que $h_2(x)$ tiene argumento $(0 + 3(-2\pi))/4 = -3\pi/2$, luego $h_2(x)/h_1(x)$ tiene argumento $-3\pi/2$ y en consecuencia $h_2(x)/h_1(x) = i$. Por conexión concluimos que $h_2(z) = i\,h_1(z)$ para todo z en la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Con esto estamos en condiciones de considerar la función multiforme

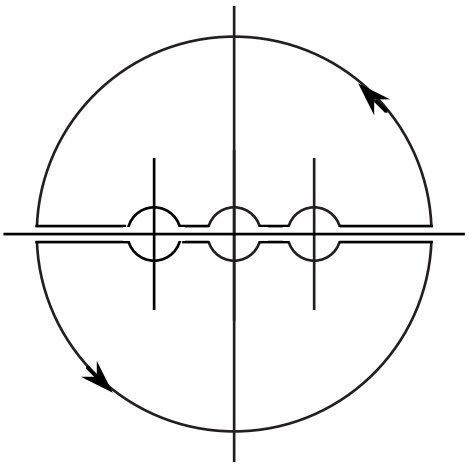
$$f(z) = \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},$$

de la que tenemos dos ramas uniformes holomorfas f_1 y f_2 definidas en Ω_1 y Ω_2 (con un polo triple en -1) de modo que ambas coinciden a la izquierda de 0 y a la derecha de 1, mientras que en la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$ se cumple $f_2(z) = -if_1(z)$.

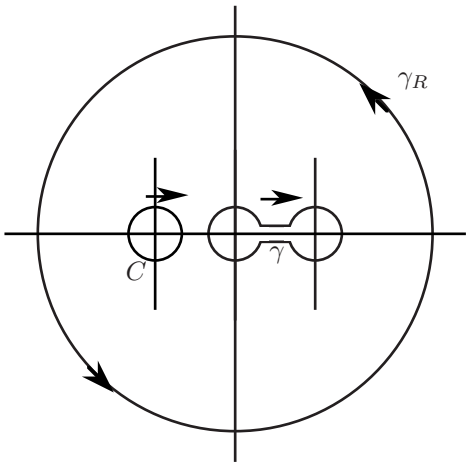
Según lo que acabamos de ver, tiene sentido hablar de la integral de f sobre el arco γ, entendiendo que esta integral puede descomponerse en suma de dos, por ejemplo como indica la figura siguiente, de modo que cada una de ellas es una integral curvilínea usual respecto a una de las ramas uniformes.



Para poder aplicar el teorema de los residuos hemos de cerrar las dos mitades sin salirnos de los dominios de las respectivas ramas. La única forma de hacerlo es como indica la figura siguiente:



Observar que hemos de evitar el polo en -1. Podemos aplicar el teorema de los residuos a ambos arcos, con h_1 sobre el arco superior y h_2 en el inferior. Concretamente el teorema de los residuos nos da que ambas integrales valen 0. Ahora bien, tenemos que ambas ramas coinciden a la izquierda de 0 y a la derecha de 1, luego coinciden en los segmentos reales que hemos añadido y las integrales se cancelan. En definitiva tenemos que la integral sobre el ciclo de la figura siguiente es nula:



Es decir:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta + \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

La integral a lo largo de C se calcula con el teorema de los residuos (notar que $I(-1, C) = -1$):

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = -2\pi i\ \mathrm{Res}(f, -1).$$

Despejando queda

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, -1),$$

que formalmente es como si hubiésemos aplicado el teorema de los residuos al ciclo formado por γ y γ_R. Ahora sólo queda hacer los cálculos.

La integral sobre γ_R tiende a0, pues si $|z|$ es suficientemente grande como para que $|1 - z|/|z| \le 2$ y $|z + 1|/|z| \ge 1/2$, entonces se cumple

$$|f(z)| = \frac{\sqrt[4]{|z|\,|1 - z|^3}}{|z + 1|^3} \le \frac{\sqrt[4]{8}}{8|z|^2},$$

con lo que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta\right| \le \frac{2\pi R\sqrt[4]{8}}{8R^2} = \frac{\pi\sqrt[4]{8}}{4R} \longrightarrow 0.$$

Es inmediato que la función f está acotada alrededor de 0 y de 1, por lo que las integrales sobre las circunferencias que componen γ tienden a 0 cuando r tiende a 0. Teniendo en cuenta que el valor de f cuando recorremos el intervalo $[1, 0]$ es i veces el valor que toma al recorrer el intervalo $[0, 1]$ concluimos que

$$(1 - i)\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1 - x)^3}}{(1 + x)^3}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, -1).$$

Si $g(z) = \sqrt[4]{z(1-z)^3}$, el teorema 8.3 nos da que $\mathrm{Res}(f,-1) = (1/2)g''(-1)$. Conviene expresar $g(z) = z^{1/4}(1-z)^{1/4}$. Si llamamos $u(z)$ y $v(z)$ a los factores, se cumple que $g''(z) = u''(z)v(z) + 2u'(z)v'(z) + u(z)v''(z)$.

Un cálculo rutinario nos da

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{16}(-1)^{-7/4}2^{3/4} - \frac{3}{8}(-1)^{-3/4}2^{-1/4}\,\frac{-3}{16}\,(-1)^{1/4}2^{-5/4}\right).$$

Ahora hay que tener presente que el logaritmo con el que calculamos $(-1)^\alpha$ tiene parte imaginaria π, mientras que el que usamos para calcular 2^α tiene parte imaginaria 0 (luego 2^α es el valor usual).

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,-1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{16}e^{-(7/4)\pi i}\,2^{3/4} - \frac{3}{8}e^{-(3/4)\pi i}\,2^{-1/4} - \frac{3}{16}e^{(1/4)\pi i}\,2^{-5/4}\right)\\ &= \frac{3}{16}\,2^{-1/4}\,e^{(1/4)\pi i}\left(-\frac{1}{2}e^{-2\pi i}\,2 - e^{-\pi i} - \frac{1}{2}\,2^{-1}\right)\\ &= \frac{3}{16}\,2^{-1/4}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(-1+1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3\sqrt[4]{2}}{128}\,(1+i).\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx = -2\pi i\,\frac{3\sqrt[4]{2}}{128}\,\frac{1+i}{1-i} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{64}\,\pi.$$

■

Es posible dar resultados generales de aplicación del teorema de los residuos, de manera que las integrales anteriores se pueden calcular sin más que comprobar que los integrandos cumplen los requisitos del teorema oportuno y aplicando la fórmula adecuada. Por ejemplo, la técnica que hemos empleado en el ejemplo 1 se generaliza sin dificultad a integrales de funciones racionales sin polos reales y cuyo denominador tenga grado al menos dos unidades mayor que el del numerador; sin embargo nosotros hemos preferido ilustrar el teorema con ejemplos concretos que muestren más claramente las ideas involucradas, e invitar al lector interesado a que consulte la extensa bibliografía existente sobre el tema si desea profundizar en las posibilidades de este método.

Para terminar, daremos un método general de aplicación del teorema de los residuos para el cálculo no de integrales, sino de series infinitas.

Teorema 8.5 *Sea f una función holomorfa en todo el plano complejo excepto en un número finito de puntos $a_1,\ldots,a_m$ que no sean enteros. Supongamos además que existe una constante $M>0$ tal que para z suficientemente grande se cumple $|f(z)| \le M/|z|^2$. Entonces:*

$$\begin{aligned}\sum_{n-\infty}^{+\infty} f(n) &= -\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, a_j\right)\\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n) &= -\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}, a_j\right).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Notar que la condición $|f(z)| \le M/z^2$ garantiza que ambas series son absolutamente convergentes. Llamemos

$$g(z) = \frac{\pi\, f(z)}{\tan z}, \qquad h(z) = \frac{\pi f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

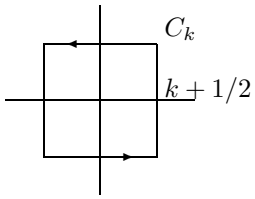
Es claro que ambas funciones son holomorfas en todo el plano complejo salvo quizá en $\{a_1, \ldots, a_m\} \cup \mathbb{Z}$, donde tienen singularidades aisladas.

Si $n \in \mathbb{Z}$ y $f(n) \neq 0$ entonces n es un polo simple de g y de h y el teorema 8.4 nos da inmediatamente que $\operatorname{Res}(g, n) = f(n)$, $\operatorname{Res}(h, n) = (-1)^n f(n)$.

Si por el contrario $f(n) = 0$ entonces la singularidad es evitable y las igualdades anteriores son ciertas trivialmente.

En estos términos el teorema equivale a que la suma de todos los residuos de las funciones g y h es igual a 0. Demostraremos esto usando el teorema de los residuos.

Para cada número natural k consideramos el arco cerrado C_k descrito en la figura. Tomando k suficientemente grande podemos garantizar que C_k contiene a todas las singularidades $a_1, \ldots, a_m$ (es decir, que $I(a_j, C_k) = 1$ para $j = 1, \ldots, m$) y en particular tenemos que el arco no pasa por ninguna de las singularidades de g y h.



Podemos aplicar el teorema de los residuos, según el cual

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(g, a_j) + \sum_{n=-k}^{k} \operatorname{Res}(g, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} g(\zeta)\, d\zeta,$$

y análogamente para la función h, luego sólo hay que probar que las integrales de g y h sobre los arcos C_k tienden a 0 cuando k tiende a infinito.

Esto será muy sencillo en cuanto hayamos demostrado que las funciones $(\tan \pi z)^{-1}$ y $(\operatorname{sen} \pi z)^{-1}$ están acotadas en el abierto que resulta de eliminar en $\mathbb{C}$ los círculos de centro cada $k \in \mathbb{Z}$ y radio $r < 1/2$. Admitiéndolo, si H es una cota y F es cualquiera de las funciones g o h, teniendo en cuenta la hipótesis sobre la acotación de f resulta que para z suficientemente grande se cumple $|F(z)| \le \pi H M/|z|^2$, y esto permite acotar la integral como de costumbre.

Ahora bien, si $z = x + iy$:

$$\left|\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}\right| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| \le \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{\big||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|\big|} = \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|},$$

e igualmente

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \le \frac{2}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}.$$

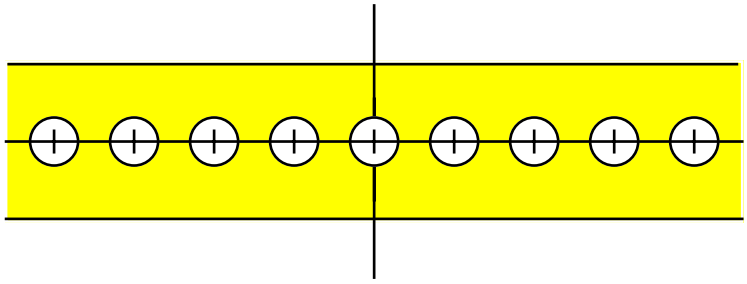
Así pues, en el semiplano $y > 1$ se cumple

$$\left|\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \le \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}, \qquad \left|\frac{1}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \le \frac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

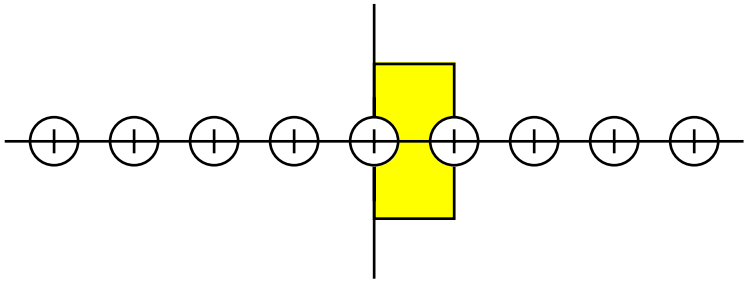
Similarmente, en el semiplano $y < -1$ tenemos

$$\left|\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \leq \frac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}} \leq \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}, \qquad \left|\frac{1}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \leq \frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Sólo queda acotar las funciones en la región indicada en la figura:



Ahora bien, las funciones $(\tan \pi z)^{-1}$ y $(\operatorname{sen} \pi z)^{-1}$ tienen periodo 1, luego basta probar que están acotadas en el compacto indicado en la figura siguiente, donde ciertamente lo están por continuidad.



■

Por ejemplo, si aplicamos el teorema anterior a la función $1/(2z+1)^2$ se concluye sin dificultad que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4},$$

de donde claramente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Una simple manipulación muestra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

con lo que obtenemos así una cálculo alternativo de esta última serie, que ya calculamos en el capítulo IV. ■

8.3 El teorema de Rouché

Nos ocupamos ahora de varios resultados importantes sobre funciones holomorfas que se deducen del teorema de los residuos. Todas ellas se siguen del resultado general que da título a esta sección, que a su vez se sigue de una consecuencia sencilla del teorema de los residuos conocida como principio del argumento. Para probarlo introducimos el concepto de derivada logarítmica de una función holomorfa.

Definición 8.6 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω. Definimos la derivada logarítmica de f como la función f'/f, meromorfa en Ω.

Obviamente, si f tiene definido un logaritmo en Ω entonces f'/f es la derivada de dicho logaritmo, pero la derivada logarítmica está definida aunque no exista tal logaritmo. El teorema siguiente conectará el teorema de los residuos con el principio del argumento.

Teorema 8.7 *Sea z_0 una singularidad aislada de orden $k \neq 0$ de una función f. Entonces z_0 es un polo simple de f'/f y* $\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = k$.

Demostración: Por definición de orden de una singularidad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}, \qquad \text{para } 0 < |z - z_0| < r,$$

donde $a_0 \neq 0$. Derivando queda

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n (z - z_0)^{n+k-1},$$

en el mismo entorno reducido. Así

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \\ f'(z) &= (z - z_0)^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{k-1} h(z), \end{aligned}$$

donde las funciones $g(z)$ y $h(z)$ son holomorfas y no nulas en z_0. En concreto, $g(z_0) = a_0$, $h(z_0) = k a_0$. Por consiguiente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{h(z)}{g(z)}$$

tiene un polo simple en z_0 y el residuo es

$$\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{g(z)} = k.$$

■

Teorema 8.8 (Principio del argumento) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función meromorfa en Ω no idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω. Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y no pase por ningún cero o polo de f. Supongamos también que $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces*

$$I(\phi \circ f, 0) = \sum_{z \in \Omega} o(f, z) I(\phi, z).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi = \sum_i a_i \psi_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y cada ψ_i es un arco cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} I(\phi \circ f, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi \circ f} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\psi_i \circ f} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{f'(\psi_i(t))\psi'(t)}{f(\psi_i(t))}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\psi_i} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta. \end{aligned}$$

Si los arcos ψ_i no fueran derivables sino derivables a trozos tendríamos que descomponer las integrales intermedias en sumandos correspondientes a intervalos en los que los arcos fueran derivables, pero el resultado final sería el mismo. Ahora basta aplicar el teorema de los residuos y el teorema anterior. ∎

En el caso particular en que ϕ es un arco sencillo de los que solemos considerar, como una circunferencia o un rectángulo, etc. recorrido en sentido positivo, el miembro derecho de la fórmula del principio del argumento es simplemente la diferencia entre el número de ceros menos el número de polos de f rodeados por ϕ, contado cada uno tantas veces como indica su multiplicidad. La hipótesis sobre los índices se interpreta como que no podemos permitir que ϕ rodee a un cero o polo de una prolongación analítica de f a un punto exterior a Ω y que no sea tenido en cuenta. El nombre del teorema se debe a que el miembro derecho es la variación del argumento de f a lo largo de ϕ dividida entre 2π.

Cuando el principio del argumento se aplica a funciones sin polos nos da cierta información sobre la existencia de ceros de una función en una región dada del plano complejo (la rodeada por un cierto arco). No obstante, calcular las variaciones del argumento de una función no es sencillo, por lo que el principio del argumento no se presta a aplicaciones directas. Lo que vamos a ver es que en ciertas circunstancias podemos asegurar que la variación del argumento de dos funciones sobre un mismo arco es la misma, con lo que el principio del argumento nos relaciona los ceros de ambas funciones. Esto es el teorema de Rouché. La prueba se basa en un teorema geométrico intuitivamente evidente que podemos parafrasear como sigue:

> *Un hombre pasea con su perro de tal modo que su distancia a cierto árbol es siempre mayor que la longitud de la correa del perro. Entonces el hombre y el perro dan el mismo número de vueltas al árbol.*

Teorema 8.9 *Sean ϕ, $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ arcos cerrados y α un número complejo de modo que $|\phi(t) - \psi(t)| < |\phi(t) - \alpha|$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces $I(\phi,\alpha) = I(\psi,\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Observar que las hipótesis implican que $|\phi(t) - \alpha| > 0$ para todo t, luego $\alpha \notin \phi^*$. Así mismo, si $a \in \psi^*$ tendríamos que $\psi(t) = \alpha$ para cierto valor de t, con lo que sería $|\phi(t) - \psi(t)| = |\phi(t) - \alpha|$.

Esto prueba que los índices $I(\phi,\alpha)$, $I(\psi,\alpha)$ están bien definidos. Haciendo una traslación podemos suponer que $\alpha = 0$. Entonces ψ y ψ no se anulan. Claramente

$$\psi(t) = \phi(t)\left(1 + \frac{\psi(t) - \phi(t)}{\phi(t)}\right) = \phi(t)\rho(t).$$

Sean θ, $\theta' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ determinaciones continuas del argumento de ϕ y ρ respectivamente, es decir,

$$\phi(t) = |\phi(t)|e^{i\theta(t)}, \qquad \rho(t) = |\rho(t)|e^{i\theta'(t)}.$$

La fórmula anterior nos da que

$$\psi(t) = |\phi(t)|\,|\rho(t)|e^{i(\theta(t)+\theta'(t))},$$

luego $\theta + \theta'$ es una determinación continua del argumento para ψ.

La definición de índice nos da ahora que $I(\psi,0) = I(\phi,0) + I(\rho,0)$. Basta probar que el último índice es 0. Ahora bien,

$$|\rho(t) - 1| = \frac{|\psi(t) - \phi(t)|}{|\phi(t)|} < 1$$

por hipótesis, luego $\rho^* \subset D(1,1)$. Esto implica claramente que $I(\rho,0) = 0$ (por ejemplo porque $D(1,1)$ es simplemente conexo). ∎

Uniendo este teorema al principio del argumento obtenemos el hecho siguiente, cuya prueba es inmediata salvo por una pequeña cuestión técnica.

Teorema 8.10 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f, g dos funciones meromorfas en Ω. Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y no pase por ningún polo de f. Supongamos que $I(\phi,z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \phi^*$. Entonces*

$$\sum_{z\in\Omega} o(f,z)I(\phi,z) = \sum_{z\in\Omega} o(g,z)I(\phi,z).$$

DEMOSTRACIÓN: Ante todo hay que notar que la desigualdad estricta de la hipótesis implica inmediatamente que ϕ^* no contiene ceros de f o de g.

Por otra parte, si $\phi = \sum_i a_i\psi_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y cada ψ_i es un arco cerrado, esta misma hipótesis nos da que $|f(\psi_i(t)) - g(\psi_i(t))| < |f(\psi_i(t))|$, para todo t en el dominio de ψ_i, y por el teorema anterior $I(\psi_i \circ f, 0) = I(\psi_i \circ g, 0)$.

Por la definición de índice de un ciclo esto implica $I(\phi \circ f, 0) = I(\psi \circ g, 0)$. Ahora basta probar que podemos aplicar el principio del argumento.

Llamemos A a la unión de las componentes conexas de Ω que cortan a ϕ^*. Como las componentes conexas de los abiertos son abiertas, A es un abierto en $\mathbb{C}$. Además $\phi^* \subset A$ y toda componente conexa de A contiene algún punto de ϕ^*, donde f y g no se anulan, luego f y g no son idénticamente nulas en ninguna componente conexa de A.

Sólo falta probar que $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus A$. En principio sólo lo sabemos para puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Sea, pues, $z \in \Omega \setminus A$. Entonces z está en una componente conexa C de Ω que no corta a ϕ^* y que por lo tanto es disjunta con A. Así, $\overline{C} \subset \mathbb{C}\setminus A \subset \mathbb{C}\setminus\phi^*$ y es conexo. El índice $I(\phi, z)$ es constante en $\overline{C}$, luego basta probar que es nulo en uno cualquiera de sus puntos, no necesariamente en el z elegido. Como C es un abierto distinto de todo el plano complejo, existe un punto $w \in \overline{C} \setminus C$. Basta ver que $w \notin \Omega$, pues entonces por hipótesis $I(\phi, w) = 0$. Ahora bien, si D es cualquier otra componente conexa de Ω (distinta de C), entonces $C \subset \mathbb{C} \setminus D$, luego $\overline{C} \subset \mathbb{C} \setminus D$, luego $w \notin D$. Esto prueba que w no está en ninguna componente conexa de Ω. ∎

El teorema de Rouché es esencialmente el teorema anterior en el caso particular en que las funciones f y g no tienen polos. Sin embargo vamos a probar una versión ligeramente refinada que no involucra ciclos.

Teorema 8.11 (Teorema de Rouché) *Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{C}$ y sean f, g dos funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Supongamos que se cumple la desigualdad $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo punto $z \in \partial\Omega$. Entonces*

$$\sum_{z\in\Omega} o(f, z) = \sum_{z\in\Omega} o(g, z) < +\infty.$$

Demostración: Sea $K = \{z \in \overline{\Omega} \mid |f(z) - g(z)| \geq |f(z)|\}$. Claramente K es un cerrado en $\overline{\Omega}$, luego es compacto. Por hipótesis K no corta a la frontera de Ω, luego $K \subset \Omega$. Ahora aplicamos el teorema 5.5 a los cerrados K y $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Existe un ciclo γ tal que

a) $\gamma^* \cap (K \cup (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)) = \varnothing$ (es decir, $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$),

b) Para todo $z \in K$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,

c) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

Obviamente f, g, Ω y γ están en las hipótesis del teorema anterior, luego

$$\sum_{z\in\Omega} o(f, z)I(\gamma, z) = \sum_{z\in\Omega} o(g, z)I(\gamma, z).$$

Por último notamos que si $z \in \Omega \setminus K$ entonces $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, de donde se sigue que z no es un cero ni de f ni de g, y los sumandos asociados en la igualdad anterior son nulos. Así pues, los únicos sumandos no nulos corresponden a puntos de K, luego la igualdad se reduce a la indicada en el enunciado. ∎

El teorema de Rouché afirma, pues, que si dos funciones f y g cumplen la desigualdad indicada en la frontera de un abierto, entonces ambas tienen el mismo números de ceros en dicho abierto, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su orden de multiplicidad.

Ejemplo Consideremos el polinomio $g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si llamamos $f(z) = -4z^5$, entonces observamos que en la frontera del disco unidad $D(0,1)$, es decir, si $|z| = 1$, se cumple $|f(z) - g(z)| = |-z^8 - z^2 + 1| \leq 3 < 4 = |-4z^5|$, luego el teorema de Rouché nos da que f y g tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$, es decir, ambas tienen 5 ceros. ∎

Un argumento similar puede usarse para demostrar el teorema fundamental del álgebra: dado un polinomio $P(z)$ de grado $n > 0$, si a es el coeficiente de z^n es claro que $(P(z) - az^n)/az^n$ tiende a 0 cuando z tiende a ∞, luego existe un $M > 0$ tal que si $|z| = M$ entonces $|P(z) - az^n| < |az^n|$, con lo que el teorema de Rouché nos da que $P(z)$ tiene en $D(0,M)$ tantos ceros como az^n, o sea, n ceros.

Por supuesto que el teorema fundamental del álgebra se deduce ya del teorema de Liouville, que es más sencillo, pero vemos que el teorema de Rouché nos proporciona medios para localizar las raíces.

Veamos ahora una aplicación más importante.

Teorema 8.12 *Sea f una función holomorfa en un punto z_0, de modo que $o(f, z_0) = k > 0$. Entonces existen ϵ, $\delta > 0$ tales que cada punto de $D'(0,\epsilon)$ tiene exactamente k antiimágenes por f en $D(z_0,\delta)$.*

Demostración: Sea $R > 0$ tal que f sea holomorfa en $D(z_0, R)$. Aplicando el principio de prolongación analítica a f y f' concluimos que existe un $\delta > 0$ tal que $\delta < R$ y f, f' no se anulan en $\overline{D(z_0,\delta)} \setminus \{z_0\}$ (en caso contrario o bien f sería nula en un entorno de z_0, con lo que $o(f, z_0) = +\infty$, o bien f' sería nula en un entorno de z_0, con lo que f sería constante y en consecuencia nula también.)

Sea $\epsilon = \text{mín}\big\{|f(\zeta)| \;\big|\; |\zeta - z_0| = \delta\big\}$. Veamos que ϵ, δ cumplen el teorema. Tomemos un punto $\omega \in D'(0,\epsilon)$. Sea $g(z) = f(z) - \omega$. De este modo, si $|z - z_0| = \delta$ se cumple $|f(z) - g(z)| = |\omega| < \epsilon \leq |f(z)|$. Por el teorema de Rouché f y g tienen el mismo número de ceros en $D(z_0,\delta)$, es decir, k ceros. Por otra parte $g' = f'$ no se anula en $D'(z_0,\delta)$, luego todos los ceros de g son simples (notar que $g(z_0) \neq 0$). Así pues, g tiene k ceros distintos en $D(z_0,\delta)$, lo que equivale a que ω tiene k antiimágenes distintas por f en $D(z_0,\delta)$. ∎

En realidad en el teorema anterior importa poco que la función f valga 0 en z_0. Lo que importa es la cantidad de derivadas que se anulan, pues el valor de z_0 se puede cambiar mediante una traslación sin alterar por ello las derivadas. Desarrollamos esta idea en el teorema siguiente.

Teorema 8.13 *Sea f una función holomorfa en un punto z_0.*

a) Si $f'(z_0) \neq 0$ existe un entorno V de z_0 tal que $f|_V$ es inyectiva.

b) Si $f'(z_0) = 0$ entonces $f|_V$ no es inyectiva cualquiera que sea el entorno de z_0 considerado.

DEMOSTRACIÓN: a) Sea $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Entonces $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, o sea, $o(g, z_0) = 1$. Por el principio de prolongación analítica existe un $R > 0$ tal que g no se anula en $D'(z_0, R)$. Aplicando el teorema anterior encontramos ϵ, $\delta > 0$ tales que cada punto de $D'(0, \epsilon)$ tiene exactamente una antiimagen por g en $D(z_0, \delta)$. Es claro que δ puede tomarse arbitrariamente pequeño, en particular menor que R.

Sea $V = D(z_0, \delta) \cap g^{-1}[D(0, \epsilon)]$, entorno de z_0. Si dos puntos de V tienen la misma imagen por g, entonces un punto de $D(0, \epsilon)$ tiene dos antiimágenes por g en $D(z_0, \delta)$. La única posibilidad sería que dicho punto fuera 0, pero como $D(z_0, \delta) \subset D(z_0, R)$, la única antiimagen de 0 en $D(z_0, \delta)$ es z_0. Así pues, g es inyectiva en V, luego f también.

b) Sea $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Entonces $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, luego $o(g, z_0) \geq 2$. Si V es un entorno de z_0 tomamos ϵ, $\delta > 0$ según el teorema anterior y de modo que $D(z_0, \delta) \subset V$. Así cada punto de $D'(0, \epsilon)$ tiene al menos dos antiimágenes en V, luego cada punto de $D'(f(z_0), \epsilon)$ tiene al menos dos antiimágenes en V, luego $f|_V$ no es inyectiva. ∎

Si una función f es inyectiva en un entorno de un punto z_0 se dice que es localmente inyectiva en z_0. El teorema anterior afirma que una función holomorfa es localmente inyectiva en un punto z_0 si y sólo si su derivada no se anula en z_0. Una función es localmente inyectiva si lo es en cada punto de su dominio. Es obvio que toda función inyectiva es localmente inyectiva, pero el recíproco no es cierto. Basta pensar en la función exponencial e^z, que es localmente inyectiva pero no inyectiva.

He aquí otra consecuencia notable del teorema 8.12:

Teorema 8.14 (Teorema de la aplicación abierta) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω. Entonces*[1] *la imagen $f[\Omega]$ es abierta en $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in \Omega$. Veamos que $f[\Omega]$ es un entorno de $f(z_0)$. Sea $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Así $g(z_0) = 0$ y $o(g, z_0) = k > 0$ es finito, porque en caso contrario f sería constante en un entorno de z_0, en contra de la hipótesis. Sean ϵ, $\delta > 0$ según el teorema 8.12, de modo que cada punto de $D'(0, \epsilon)$ tiene k antiimágenes distintas en $D(z_0, \delta)$. En particular todos los puntos de $D(0, \epsilon)$ tienen antiimágenes por g, luego todos los puntos de $D(f(z_0), \epsilon)$ tienen antiimágenes por f, es decir, $D(f(z_0), \epsilon) \subset f[\Omega]$. ∎

[1] El teorema es válido para funciones meromorfas en abiertos de $\mathbb{C}^\infty$. En efecto, consideramos el homeomorfismo de $\mathbb{C}^\infty$ dado por $h(z) = 1/z$. Si $z_0 \neq \infty$ es un polo de f, entonces $g(z) = h(f(z)) = 1/f(z)$ es holomorfa en z_0 y $g(z_0) = 0$. Por el caso finito tenemos que $g[\Omega] = h[f[\Omega]]$ es un entorno de 0 y, aplicando h de nuevo, concluimos que $f[\Omega]$ es un entorno de $\infty = f(z_0)$. Si $z_0 = \infty$ aplicamos la parte ya probada a $g(z) = f(h(z)) = f(1/z)$, que es meromorfa en $h[\Omega]$, y así $g[h[\Omega]] = f[\Omega]$ es un entorno de $g(0) = f(\infty)$.

En particular toda función holomorfa no constante en un abierto conexo es abierta. Observar que esto nos da una demostración más clara del principio del módulo máximo: si f es holomorfa y no constante en un abierto conexo que contiene un disco $D(z,r)$, entonces $f[D(z,r)]$ es un abierto que contiene a $f(z)$, luego contiene también otros puntos de módulo mayor.

Ahora podemos combinar los dos últimos teoremas para obtener una versión mucho más potente del teorema de la función inversa.

Teorema 8.15 (Teorema de la función inversa) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \Omega' \subset \mathbb{C}$ biyectiva y holomorfa en Ω. Entonces*[2] *Ω' es abierto en $\mathbb{C}$, la función f^{-1} es holomorfa en Ω' y para cada $z \in \Omega$, si $f(z) = z'$, se cumple $(f^{-1})'(z') = 1/f'(z)$.*

En efecto, por el teorema anterior tenemos que f es abierta, luego f^{-1} es continua, y por el teorema 8.13 la derivada de f no se anula en ningún punto de Ω.

El teorema de la aplicación abierta nos permite clasificar las funciones enteras inyectivas.

Teorema 8.16 *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es inyectiva entonces existen a, $b \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = az + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si hay infinitos coeficientes a_n no nulos entonces la función $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0, luego por el teorema de Casorati-Weierstrass $f\left[\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}\right] = g[D'(0,1)]$ es denso en $\mathbb{C}$. Por otro lado, el teorema de la aplicación abierta nos da que $f[D(0,1)]$ es abierto, luego $f[D(0,1)] \cap f\left[\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}\right] \neq \varnothing$, y esto contradice la inyectividad de f.

Así pues sólo un número finito de los coeficientes a_n son no nulos, con lo que f es un polinomio. Si el grado de f fuera mayor que 1 entonces f' sería un polinomio no constante, luego tendría una raíz z_0 en torno a la cual f no sería inyectiva por el teorema 8.13. Así pues, f es un polinomio de grado 1. ∎

Notar que los polinomios de grado 1 no sólo son inyectivos, sino que de hecho son biyectivos.

Para funciones inyectivas en $\mathbb{C}^\infty$ tenemos lo siguiente:

Teorema 8.17 *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ es inyectiva entonces f es una transformación de Möbius.*

[2]De nuevo el teorema es válido para biyecciones meromorfas entre abiertos de $\mathbb{C}^\infty$. La relación entre las derivadas se cumple si convenimos que la derivada de un polo es ∞ y que $f(\infty) = 0$. En efecto, si $z_0 \neq \infty$ es un polo de f, hay que probar que f^{-1} es holomorfa en ∞, pero esto equivale a que $f^{-1}(1/z)$ sea holomorfa en 0, y la inversa de esta función es $1/f(z)$, que es claramente holomorfa en z_0 (tiene un cero), luego por el caso finito su inversa es holomorfa en 0. El caso $z_0 = \infty$ se trata de forma similar.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(\infty) = z \in \mathbb{C}^\infty$. Por el teorema 1.12 existe una transformación de Möbius g tal que $g(z) = \infty$. Basta probar que $h = f \circ g$ es una transformación de Möbius. Claramente h es meromorfa en $\mathbb{C}\infty$, es inyectiva y $h(\infty) = \infty$. Por la inyectividad h no tiene polos finitos, luego su restricción a $\mathbb{C}$ es una función entera e inyectiva. Por el teorema anterior h es un polinomio de grado 1, luego es una transformación de Möbius. ∎

En muchas ocasiones es necesario determinar si una función holomorfa tiene o no ceros en un abierto dado. La siguiente aplicación del teorema de Rouché puede ser de utilidad en tales casos:

Teorema 8.18 (Teorema de Hurwitz) *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que converja a una función f. Si f no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω y tiene al menos N ceros en Ω (contando multiplicidades) entonces existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la función f_n tiene al menos N ceros en Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $z_1, \ldots, z_k$ ceros distintos de f en Ω de modo que la suma de sus órdenes sea mayor o igual que N (no tienen por qué ser todos los ceros de f en Ω, que pueden ser infinitos, sino sólo los necesarios para que los órdenes sumen al menos N).

Como el conjunto de los ceros de f en Ω no tiene acumulación en Ω, existe un $r > 0$ tal que los discos $\overline{D(z_i, r)} \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos y no contienen más ceros de f que sus centros respectivos. Sea K la unión de las fronteras de estos discos. Como es compacto existe un $a \in K$ donde f alcanza su módulo mínimo, que es $|f(a)| > 0$.

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre K, para n suficientemente grande se cumplirá que $|f(z) - f_n(z)| < |f(a)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in K$. El teorema de Rouché implica que el número de ceros de f_n en cada disco $D(z_i, r)$ es el mismo que el de f, luego en total f_n tiene al menos N ceros. ∎

Veamos una aplicación sencilla que necesitaremos más adelante:

Teorema 8.19 *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en Ω que converja a una función f. Entonces f es constante o inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Si f no es inyectiva existen a, $b \in \Omega$ tales que $a \neq b$ pero $f(a) = f(b)$. Definimos la sucesión $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$, que converge a $g(z) = f(z) - f(a)$. Ahora a y b son ceros de g. Tomemos un $r > 0$ tal que los discos $D(a, r)$ y $D(b, r)$ estén contenidos en Ω y sean disjuntos. Si f no es constante la función g tampoco lo es (en ninguno de los discos, pues Ω es conexo), y como tiene un cero en cada uno de los discos, aplicándoles separadamente el teorema de Hurwitz resulta que alguna función g_n tiene un cero en cada uno de los discos, luego g_n no es inyectiva y f_n tampoco. ∎

8.4 Sumas de Gauss cuadráticas

Para acabar mostraremos una aplicación del teorema de los residuos a la teoría de números. La ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve con la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula no sólo es válida para polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$, sino que en realidad se aplica a cualquier cuerpo K que cumpla la mínima restricción de que $1 + 1 \neq 0$ (necesaria para que el 2 del denominador no sea igual a 0). Un ejemplo importante de cuerpos con esta condición son los cuerpos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donde p es un primo impar. Estos anillos son ciertamente cuerpos, pues los grupos U_p que estudiamos en el capítulo anterior constan de todas las clases de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ distintas de $[0]$ (luego todos los elementos no nulos tienen un inverso). Obviamente $[2] \neq [0]$, pues p no divide a 2.

De este modo, la fórmula anterior nos da que para decidir si una ecuación de segundo grado con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tiene o no solución sólo hay que determinar si un cierto elemento de dicho cuerpo ($b^2 - 4ac$) tiene o no una raíz cuadrada en él.

Hay muchos contextos en la teoría de números en los que aparece de forma natural la necesidad de resolver ecuaciones de segundo grado en cuerpos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Por ejemplo, en el capítulo anterior comentamos que el comportamiento de un primo p en el anillo $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$ depende de su clase módulo 24, de manera que si p es congruente con 1, 5, 19 o 23 módulo 24 (tipo I) entonces p se descompone en producto de dos primos distintos de $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$, mientras que si p es congruente con 7, 11, 13 o 17 módulo 24 (tipo II) entonces p sigue siendo primo en dicho anillo. Los únicos casos no contemplados son $p = 2$, 3, que factorizan como el cuadrado de un primo.

Allí no dijimos nada de cómo se sabe de qué tipo es cada primo. No entraremos en detalles, pero el caso es que no es difícil probar que el número de factores primos en que se descompone un primo p en el anillo $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$ coincide con el número de raíces distintas del polinomio $x^2 - 6$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Así pues, como $[6] = [0]$ módulo 2 y módulo 3, resulta que el polinomio $x^2 - 6 = x^2$ tiene una raíz doble módulo 2 y módulo 3, por lo que 2 y 3 son, como ya ha quedado dicho, los cuadrados de sendos primos de $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$. Para cualquier otro primo p, el polinomio $x^2 - 6$ tendrá dos o ninguna raíz módulo p, según si 6 tiene o no raíz cuadrada módulo p.

Por ejemplo, como $6 \equiv 1 = 1^2$ (mód 5), vemos que 5 es de tipo I. Por otro lado, los cuadrados módulo 7 son 1, 2 y 4, pero no 6, luego 7 es de tipo II. Conviene introducir los términos siguientes:

Sea p un número primo y m un entero primo con p. Diremos que m es un *resto cuadrático* módulo p si y sólo si la congruencia $x^2 \equiv m \,(\text{mód } p)$ tiene solución. En caso contrario diremos que m es un *resto no cuadrático* módulo p. Observar que los múltiplos de p no son ni restos cuadráticos ni restos no cuadráticos por definición.

Así, lo que hemos dicho es que un primo $p \neq 2, 3$ es de tipo I si y sólo si 6 es un resto cuadrático módulo p y es de tipo II si 6 es un resto no cuadrático módulo p. Este criterio es válido en general para otros anillos. Por ejemplo, en el caso del anillo $\mathbb{Z}[i]$, el polinomio relevante es $x^2 + 1$, de modo que un primo impar p es de tipo I en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si -1 es un resto cuadrático módulo p.

No hemos probado estos hechos. Las pruebas son algebraicas y constituyen la parte fácil de la teoría. En el capítulo anterior enunciamos sin demostración muchos hechos más que mostraban la existencia de una rica teoría subyacente, con muchas consecuencias sobre los números enteros, en la base de la cual estaba el descubrimiento de Euler según el cual el tipo de un primo p en cada anillo depende únicamente de la clase de p módulo un cierto entero, el 24 en el caso de $\mathbb{Z}\big[\sqrt{6}\,\big]$.

Es obvio que la condición "6 es un resto cuadrático módulo p" sólo depende de la clase de 6 módulo p, pero no es obvio en absoluto que dependa sólo de la clase de p módulo 24, que es lo que estamos afirmando. Euler aisló una ley sencilla sobre restos cuadráticos que lo justificaba, a la vez que implicaba todos los resultados que comentamos en el capítulo anterior, pero no pudo probarla. Legendre encontró una prueba admitiendo el teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas, que no logró demostrar. La primera prueba completa se debe a Gauss. Para enunciar dicha ley conviene usar la notación que introdujo Legendre al estudiarla.

Definición 8.20 Si p es un primo impar y m es un entero, definimos el símbolo de Legendre de m y p como

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es un resto cuadrático módulo } p \\ -1 & \text{si } m \text{ es un resto no cuadrático módulo } p \\ 0 & \text{si } p \text{ divide a } m. \end{cases}$$

Obviamente (m/p) sólo depende de la clase de m módulo p. Con ayuda de este símbolo podemos enunciar de forma sencilla algunos de los hechos básicos sobre restos cuadráticos. Por ejemplo:

Teorema 8.21 *Sea p un primo impar. Entonces $\chi(m) = (m/p)$ es un carácter módulo p.*

Demostración: Sea U_p el grupo definido en el capítulo anterior, que consta de las clases módulo p de los enteros no divisibles entre p. Podemos considerar a χ definido sobre U_p mediante $\chi([m]) = \chi(m)$, pues el símbolo de Legendre sólo depende de la clase de m. Así $\chi : U_p \longrightarrow \{\pm 1\}$ y hemos de probar que es un homomorfismo de grupos.

Sea C_p el subgrupo formado por los cuadrados de U_p. La aplicación $f : U_p \longrightarrow C_p$ dada por $f(x) = x^2$ es un homomorfismo de grupos, obviamente suprayectivo. Su núcleo N está formado por las clases que cumplen $x^2 = 1$, es decir, por las raíces en el cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ del polinomio $x^2 - 1$. Claramente estas raíces son $[1]$ y $[-1]$, que son distintas porque p es impar. Así pues, N tiene dos elementos, y como $U_p/N \cong C_p$, concluimos que hay exactamente $(p-1)/2$ clases de cuadrados módulo p.

Consecuentemente el grupo U_p/C_p tiene dos elementos. Es obvio que todos los grupos con dos elementos son isomorfos, luego existe un isomorfismo $U_p/C_p \cong \{\pm 1\}$. Si componemos la proyección $U_p \longrightarrow U_p/C_p$ con tal isomorfismo obtenemos un homomorfismo de grupos $U_p \longrightarrow \{\pm 1\}$ que toma el valor 1 sobre los cuadrados y -1 sobre los no cuadrados, pero así es precisamente como actúa χ, luego χ es un homomorfismo. ∎

Notemos una última propiedad general de los restos cuadráticos. Si g es un elemento de un grupo de orden n, entonces el orden de g es el número de elementos del subgrupo de genera, que divide al orden del grupo n, luego $g^n = 1$. En particular cualquier clase x de U_p cumple $x^{p-1} = 1$. Pero si x es un cuadrado, digamos $x = y^2$, entonces $x^{(p-1)/2} = y^{p-1} = 1$. Por tanto los cuadrados de U_p son raíces en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ del polinomio $x^{(p-1)/2} - 1$. Como hay un total de $(p-1)/2$ concluimos que son todas las raíces de dicho polinomio.

Ahora enunciamos el que Gauss llamó teorema fundamental sobre restos cuadráticos.

Ley de Reciprocidad cuadrática *Sean p y q primos impares distintos. Entonces*

a) Si $p \equiv 1$ (mód 4) o $q \equiv 1$ (mód 4) entonces $(p/q) = (q/p)$.

b) Si $p \equiv -1$ (mód 4) y $q \equiv -1$ (mód 4) entonces $(p/q) = -(q/p)$.

A esta ley hay que añadir las llamadas leyes suplementarias:

c) $(-1/p) = 1$ si y sólo si $p \equiv 1$ (mód 4).

d) $(2/p) = 1$ si y sólo si $p \equiv \pm 1$ (mód 8).

La ley de reciprocidad cuadrática permite calcular fácilmente cualquier símbolo de Legendre, mientras que sin su ayuda los cálculos necesarios son excesivamente largos. Por ejemplo, para probar directamente que $(29/43) = -1$ habría que calcular los 21 cuadrados módulo 43 y comprobar que 29 no es ninguno de ellos. Con la ley de reciprocidad en cambio basta operar como sigue:

$$\left(\frac{39}{43}\right) = \left(\frac{3}{43}\right)\left(\frac{13}{43}\right) = -\left(\frac{43}{3}\right)\left(\frac{43}{13}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{13}\right) = -\left(\frac{2}{13}\right)^2 = -1.$$

(Hemos usado que $43 \equiv 1$ (mód 3) y $43 \equiv 4$ (mód 1)3).

Por otra parte la ley de reciprocidad justifica también que $(6/p)$ depende sólo de la clase de p módulo 24. En efecto,

$$\left(\frac{6}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = \pm\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right),$$

donde el signo $\pm$ depende sólo de la clase de p módulo 4, $(2/p)$ depende de la clase de p módulo 8 y $(p/3)$ depende de la clase de p módulo 3. La expresión completa depende sólo de la clase de p módulo 24.

Vemos así que la ley de reciprocidad es a la vez una útil herramienta de cálculo y un principio teórico de gran valor para determinar el comportamiento de los restos cuadráticos. Por ello supuso un reto para los matemáticos del siglo XVII. Euler logró probar la primera ley suplementaria y parte de la segunda. La primera prueba que obtuvo Gauss era muy técnica y oscura. Poco después encontró otra conceptualmente más simple pero basada en su profunda teoría de formas cuadráticas. Años más tarde encontró una más elemental basada en una generalización del argumento de Euler sobre la segunda ley suplementaria. Aquí veremos una variante de esta tercera prueba. Antes de entrar en materia conviene observar que la ley de reciprocidad admite un enunciado más conciso:

Si p y q son primos impares distintos entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}.$$

La prueba de la primera ley suplementaria es muy simple: basta observar que $(-1/p) = 1$ si y sólo si $[-1]$ es raíz del polinomio $x^{(p-1)/2} - 1$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, o sea, si $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$, si y sólo si $(-1)^{(p-1)/2} = 1$, pues 1 y -1 no son congruentes módulo p. Por lo tanto $(-1/p) = (-1)^{(p-1)/2}$.

Euler también probó parcialmente que si $p \equiv 1 \pmod 8$ entonces $(2/p) = 1$. Para ello se basó (sin probarlo, la primera prueba es de Gauss también) en que si $p \equiv 1 \pmod 8$ hay una clase ζ en U_p tal que $\zeta^8 = 1$ pero $\zeta^4 \neq 1$. De aquí dedujo que $(\zeta + \zeta^{-1})^2 = [2]$.

La idea de Gauss para generalizar este argumento fue salir de U_p, donde en general no existe tal elemento ζ y trabajar con $\zeta = e^{\pi i/4}$ para el cálculo de $(2/p)$ y con $\zeta = e^{2\pi i/p}$ para probar la ley principal. Observar que en el primer caso se sigue cumpliendo $(\zeta + \zeta^{-1})^2 = i - i + 2 = 2$. Para el caso $\zeta = e^{2\pi i/p}$ Gauss encontró una suma de potencias de ζ que satisface una relación similar:

Definición 8.22 Sean a y b dos enteros no nulos primos entre sí con $b > 0$. Definimos las *sumas de Gauss cuadrática* como

$$G_a(b) = \sum_x e^{2\pi a x^2 i/b},$$

donde x recorre un conjunto de representantes de las clases módulo b. Convenimos en que $G(b) = G_1(b)$.

Notemos ante todo que la función $e^{2\pi i/b}$ tiene periodo b, por lo que no importa los representantes concretos de las clases módulo b sobre los que se haga variar x.

Detengámonos ahora en el caso en que $b = p$ es un primo impar. Si a es un resto cuadrático módulo p, entonces, cuando x recorre las clases módulo p la expresión ax^2 recorre la clase 0 y dos veces los restos cuadráticos módulo p (aquí usamos que los restos cuadráticos forman un subgrupo), luego la suma $G_a(p)$ no depende de a. En particular $G_a(p) = G(p)$. Si por el contrario a es

un resto no cuadrático módulo p, entonces ax^2 recorre la clase 0 y dos veces los restos no cuadráticos módulo p, luego al sumar $G_a(p) + G(p)$ el índice recorre dos veces cada clase módulo p, es decir

$$G_a(p) + G(p) = 2\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi x i/p} = 0,$$

pues la última suma es geométrica de razón $e^{2\pi i/p} \neq 1$. En resumen, para todo entero a primo con p se tiene la relación

$$G_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right) G(p). \tag{8.1}$$

Ésta es una de las dos propiedades de las sumas $G_a(b)$ que usó Gauss para probar la ley de reciprocidad. La otra es la siguiente igualdad, que es la análoga para un primo impar p de la relación $(\zeta + \zeta^{-1})^2 = 2$, con $\zeta = e^{\pi i/4}$:

$$G(p)^2 = (-1)^{(p-1)/2} p. \tag{8.2}$$

En el capítulo XI daremos una prueba elemental de (8.2). Aunque ya hemos comentado que (8.1) y (8.2) bastaron a Gauss para probar la ley de reciprocidad, lo cierto es que Gauss era extremadamente meticuloso y nunca se contentaba con probar exactamente lo que necesitaba, sino que le gustaba atar todos los cabos. En este caso se interesó por el valor exacto de las sumas $G(p)$. Lo que afirma (8.2) es que

$$G(p) = \begin{cases} \pm\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1 \text{ (mód 4)} \\ \pm i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv -1 \text{ (mód 4)}, \end{cases}$$

pero los cálculos concretos mostraban que en todos los casos el signo correcto era el positivo. El problema resultó ser mucho más complejo de lo que podía parecer en un principio. Gauss consiguió determinar salvo signo todas las sumas cuadráticas $G_a(b)$ sin excesiva dificultad, pero el problema del signo se le resistió muchos años. Finalmente logró probar que los signos negativos no pueden darse. El resultado general es el siguiente:

$$G(b) = \frac{1}{2}(1+i)\big(1+(-i)^b\big)\sqrt{b} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{b} & \text{si } b \equiv 0 \text{ (mód 4)} \\ \sqrt{b} & \text{si } b \equiv 1 \text{ (mód 4)} \\ 0 & \text{si } b \equiv 2 \text{ (mód 4)} \\ i\sqrt{b} & \text{si } b \equiv 3 \text{ (mód 4)} \end{cases}$$

No se conoce ninguna prueba elemental de esta fórmula (por lo que al signo se refiere). Dirichlet obtuvo una basada en el análisis de Fourier, Shur encontró una algebraica y aquí daremos otra basada en la variable compleja. Gauss observó también que esta fórmula proporciona una prueba todavía más simple de la ley de reciprocidad, que es la que vamos a ver. En efecto, la prueba a partir de (8.1) y (8.2) involucra tomar congruencias en ciertos anillos de enteros algebraicos, mientras que la prueba a partir de la fórmula anterior es simplicísima. El lector

debe tener presente que el resultado que realmente perseguimos es esta fórmula y que la ley de reciprocidad la obtendremos de paso, pues para probar la ley de reciprocidad hay demostraciones mucho más sencillas.

No vamos a entrar en el problema de determinar las sumas $G_a(b)$ a partir de las sumas $G(b)$. La diferencia es un signo salvo en un caso, y la prueba es una serie de comprobaciones más o menos rutinarias.[3] Probaremos sólo el resultado siguiente, que necesitaremos después:

Teorema 8.23 *Sean b y c números naturales no nulos primos entre sí y a un entero no nulo primo con bc. Entonces*

$$G_a(bc) = G_{ab}(c)G_{ac}(b).$$

DEMOSTRACIÓN: Si y, z varían en conjuntos de representantes de las clases módulo c y b respectivamente, entonces $x = yb + zc$ recorre todas las clases módulo cb, pues si

$$yb + zc \equiv y'b + z'c \text{ (mód } bc)$$

entonces $bc \mid (y - y')b + (z - z')c$, luego $b \mid (z - z')c$, $c \mid (y - y')b$. Como b y c son primos entre sí, $b \mid (z - z')$ y $c \mid (y - y')$, luego $z = z'$, $y = y'$. Así pues, x recorre bc clases distintas módulo bc, o sea, todas las clases. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} G_{ab}(c)G_{ac}(b) &= \sum_{y,\,z} e^{2\pi aby^2 i/c} e^{2\pi acz^2 i/b} = \sum_{y,\,z} e^{2\pi a\left((by)^2+(cz)^2\right)i/bc} \\ &= \sum_{y,\,z} e^{2\pi a(by+cz)^2 i/bc} = G_a(bc), \end{aligned}$$

donde hemos insertado los factores $e^{2\pi a 2byczi/bc} = 1$. ∎

Para calcular las sumas de Gauss nos apoyaremos en las sumas siguientes

$$S(a,m) = \sum_{r=0}^{m-1} e^{\pi a r^2 i/m}$$

Notar que $S(2a,b) = G_a(b)$ y $S(b,2) = 1 + i^b$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Gauss es consecuencia inmediata del teorema siguiente haciendo $a = 2$, $m = b$.

Teorema 8.24 *Si el producto ma es par se cumple*

$$S(a,m) = \sqrt{\frac{m}{a}}\,\frac{1+i}{2}\,\overline{S(m,a)}.$$

[3]El resultado principal es que $G_a(b) = (a/b)G(b)$, para b impar, donde (a,b) es el símbolo de Jacobi. La prueba consiste en varias inducciones. El caso más delicado se da cuando b es potencia de 2. Entonces el factor es una potencia de i.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(z) = \sum_{r=0}^{m-1} e^{\pi a(z+r)^2 i/m}$. Claramente g es entera y $g(0) = S(a,m)$. Teniendo en cuenta que ma es par vemos que

$$\begin{aligned} g(z+1) - g(z) &= e^{\pi a(z+m)^2 i/m} - e^{\pi a z^2 i/m} = e^{\pi a z^2 i/m}\,(e^{2\pi a z i} - 1) \\ &= e^{\pi a z^2 i/m}\,(e^{2\pi z i} - 1) \sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi n z i}. \end{aligned}$$

Definimos $f(z) = g(z)/(e^{2\pi z i} - 1)$. Así f es holomorfa en todo el plano complejo excepto quizá en los números enteros, donde a lo sumo tiene polos simples. Si en la ecuación anterior dividimos entre $e^{2\pi z i} - 1$ obtenemos que

$$f(z+1) = f(z) + \phi(z),$$

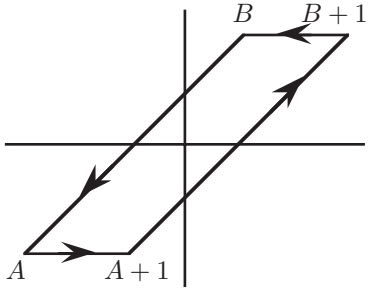
donde $\phi(z) = e^{\pi a z^2 i/m} \sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi n z i}$ es una función entera.

Aplicando el teorema 8.4 vemos que $\operatorname{Res}(f,0) = g(0)/2\pi i$ (trivialmente si $g(0) = 0$ y no hay polo), luego el teorema de los residuos nos da que

$$S(a,m) = g(0) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta,$$

donde γ es cualquier arco cerrado que no rodee a ningún entero no nulo y respecto al cual el 0 tenga índice 1. Tomamos el paralelogramo de vértices A, $A+1$, $B+1$, B, donde

$$A = -\frac{1}{2} - Re^{\pi i/4}, \qquad B = -\frac{1}{2} + Re^{\pi i/4}.$$



Al calcular la integral sobre el segmento $A+1$, $B+1$ hacemos el cambio $w = z+1$ y resulta

$$\int_{A+1}^{B+1} f(w)\,dw = \int_A^B f(z+1)\,dz = \int_A^B f(z)\,dz + \int_A^B \phi(z)\,dz.$$

La primera integral de la derecha se cancela con la integral sobre el segmento B, A, luego obtenemos que

$$S(a,m) = \int_A^B \phi(z)\,dz + \int_A^{A+1} f(z)\,dz - \int_B^{B+1} f(z)\,dz.$$

Veamos que las dos últimas integrales tienden a 0 cuando R tiende a $+\infty$. Como la longitud del arco es constante igual a 1, basta probar que el integrando tiende a 0. Tenemos que $|f(z)| = |g(z)|/|e^{2\pi z i} - 1|$. Acotemos primero el numerador. Por definición de g

$$|g(z)| \le \sum_{r=0}^{m-1} |e^{\pi a(z+r)^2 i/m}|.$$

La parte real de los exponentes es $-\pi a2(x+r)y/m$, donde $z = x + iy$. Si z está en el segmento B, $B+1$ entonces $z = t + Re^{\pi i/4} = t + R\sqrt{2}/2 + iR\sqrt{2}/2$, con $|t| \le 1/2$, luego la parte real de los exponentes es en definitiva

$$-\pi aR\sqrt{2}\,\big(t + R\sqrt{2}/2 + r\big)/m = -\pi a\big(\sqrt{2}\,tR + R^2 + \sqrt{2}\,rR\big)/m.$$

Como $e^{-\pi arR\sqrt{2}/m} \le 1$ podemos despreciar este factor y así

$$|g(z)| \le m\, e^{\pi a\sqrt{2}R/2m} e^{-\pi aR^2/m}.$$

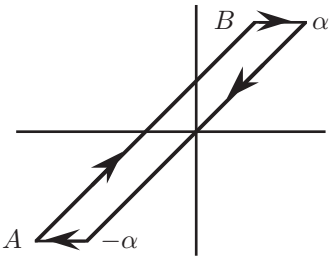
Para el denominador de f tenemos

$$|e^{2\pi zi} - 1| \ge \big||e^{2\pi zi}| - 1\big| = |e^{-2\pi y} - 1| = |e^{-\pi\sqrt{2}\,R} - 1| = 1 - e^{-\pi\sqrt{2}\,R}.$$

En total queda

$$|f(z)| \le m\frac{e^{\pi a\sqrt{2}\,R/2m}\, e^{-\pi aR^2/m}}{1 - e^{-\pi\sqrt{2}\,R}}.$$

Es fácil ver que esta expresión tiende a 0 con R. El mismo razonamiento vale para el segmento A, $A+1$. Con esto tenemos que $S(a,m)$ es la integral de $\phi(z)$ sobre la recta que pasa por $-1/2$ con pendiente de $\pi/4$. Ahora desplazaremos esta recta mediante el paralelogramo de vértices A, B, α, $-\alpha$, donde $\alpha = Re^{\pi i/4}$.



De nuevo las integrales sobre los segmentos horizontales tienden a 0. En efecto, sobre el segmento superior el factor $e^{\pi az^2 i/m}$ es uno de los que hemos acotado ($r = 0$) y los factores $e^{2\pi nzi}$ cumplen $|e^{2\pi nzi}| = e^{-2\pi ny} = e^{-\pi n\sqrt{2}\,R}$.

Así pues, ahora tenemos

$$S(a,m) = \lim_{R\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\phi(z)\,dz.$$

Por la definición de ϕ queda

$$\begin{aligned} S(a,m) &= \lim_{R\to+\infty}\sum_{n=0}^{a-1}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\pi az^2 i/m}\, e^{2\pi nzi}\,dz \\ &= \sum_{n=0}^{a-1} e^{-\pi mn^2 i/a}\lim_{R\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\pi mn^2 i/a} e^{\pi az^2 i/m} e^{2\pi nzi}\,dz. \end{aligned}$$

Llamemos $I(a,m,n,R) = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{(\pi ia/m)(z+mn/a)^2}dz$. Vamos a probar que el límite de esta integral no depende de n, con lo que tendremos

$$S(a,m) = \sum_{n=0}^{a-1} e^{-\pi mn^2 i/a}\lim_{R\to+\infty} I(a,m,n,R) = \overline{S(m,a)}\lim_{R\to+\infty} I(a,m,n,R).$$

Para ello aplicamos el teorema de Cauchy sobre el paralelogramo de vértices $-\alpha$, α, $\alpha - mn/a$, $-\alpha - mn/a$. De nuevo no hay dificultad en probar que las integrales sobre los segmentos horizontales tienden a 0 y en consecuencia queda

$$\lim_{R\to+\infty} I(a,m,n,R) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-\alpha-mn/a}^{\alpha-mn/a} e^{(\pi i a/m)(z+mn/a)^2}\,dz.$$

Hacemos el cambio $w = \sqrt{a/m}\,(z + mn/a)$. Así

$$\lim_{R\to+\infty} I(a,m,n,R) = \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\frac{m}{a}} \int_{-\alpha\sqrt{a/m}}^{\alpha\sqrt{a/m}} e^{\pi i w^2}\,dw,$$

que no depende de n, tal y como queríamos. Más aún, si hacemos el cambio $T = \sqrt{a/m}\,R$ el límite se convierte en

$$\sqrt{\frac{m}{a}} \lim_{R\to+\infty} \int_{-Te^{\pi i/4}}^{Te^{\pi i/4}} e^{\pi i w^2}\,dw = \sqrt{\frac{m}{a}}\,I,$$

donde I es una constante que no depende de a ni de m.

En total hemos llegado a

$$S(a,m) = \sqrt{\frac{m}{a}}\,I\,\overline{S(m,a)}.$$

Para calcular la constante evaluamos la igualdad en $a = 1$ y $m = 2$. Entonces $S(1,2) = 1 + i$, $S(2,1) = 1$, con lo que $I = (1+i)/\sqrt{2}$. Esto nos da la fórmula buscada. ∎

Para acabar probaremos la ley de reciprocidad cuadrática. Necesitaremos sólo la fórmula de Gauss para las sumas cuadráticas con b impar. Notar que ésta puede reescribirse como $G(b) = i^{(b-1)^2/4}\sqrt{b}$.

Ahora tomamos dos primos impares distintos p y q. Usando (8.1) y el teorema 8.23 tenemos

$$\begin{aligned} G_p(q) &= \left(\frac{p}{q}\right) G(q) = \left(\frac{p}{q}\right) i^{(q-1)^2/4}\sqrt{q}, \\ G_q(p) &= \left(\frac{q}{p}\right) G(p) = \left(\frac{q}{p}\right) i^{(p-1)^2/4}\sqrt{p}, \\ G_p(q)G_q(p) &= G(pq) = i^{(pq-1)^2/4}\sqrt{pq}. \end{aligned}$$

Comparando estas igualdades llegamos a que

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = i^{(pq-1)^2/4} i^{-(p-1)^2/4} i^{-(q-1)^2/4}\sqrt{pq}.$$

Teniendo en cuenta que $i^{(k-1)^2/4}$ vale 1 o i según el resto de k módulo 4, el término derecho de la igualdad anterior tiene las cuatro posibilidades siguientes:

$$p \equiv \quad 1 \text{ (mód 4)}, \quad q \equiv \quad 1 \text{ (mód 4)} \qquad 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\begin{array}{lll} p \equiv \ \ 1 \ (\text{mód } 4), & q \equiv -1 \ (\text{mód } 4) & i \cdot 1 \cdot (-i) = 1. \\ p \equiv -1 \ (\text{mód } 4), & q \equiv \ \ 1 \ (\text{mód } 4) & (-i) \cdot 1 \cdot i = 1. \\ p \equiv -1 \ (\text{mód } 4), & q \equiv -1 \ (\text{mód } 4) & 1 \cdot (-i) \cdot (-i) = -1. \end{array}$$

Esto es lo que afirma la ley de reciprocidad cuadrática. El teorema 8.24 permite probar también la segunda ley suplementaria. Para ello calculamos

$$G_2(p) = S(4,p) = \frac{\sqrt{p}}{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\overline{S(p,4)}.$$

Por definición

$$S(p,4) = 1 + e^{i\pi p/4} + e^{i\pi p} + e^{i\pi 9p/4} = 2e^{i\pi p/4} = 2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^p.$$

Así pues,

$$G_2(p) = \sqrt{p}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-p},$$

y por otro lado

$$G_2(p) = \left(\frac{2}{p}\right) G(p) = \left(\frac{2}{p}\right)\,\frac{1}{2}\,(1+i)\big(1+(-i)^m\big)\sqrt{p}.$$

Al igualar resulta

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-p} = \left(\frac{2}{p}\right)\,\frac{1-i^p}{\sqrt{2}}$$

o, equivalentemente, (conjugando)

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{p} = \left(\frac{2}{p}\right)\,\frac{1+i^p}{\sqrt{2}}.$$

Ambos miembros dependen sólo del resto de p módulo 8, y la ley suplementaria es ahora inmediata. ∎

Capítulo IX

Funciones Harmónicas

La teoría de funciones holomorfas está muy relacionada con el cálculo diferencial de funciones reales. Una pequeña muestra de ello la vimos en el capítulo II, donde redujimos a sus análogos reales algunas de las propiedades básicas de la derivación compleja. Algunos de los resultados fundamentales de la teoría, como el teorema de los residuos, pueden deducirse también a partir de teoremas del análisis real, esencialmente el teorema de Stokes y las fórmulas de Green. A este nivel, el nexo entre las funciones holomorfas y las funciones diferenciables reales lo constituyen las funciones harmónicas que vamos a estudiar aquí.

En general, si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^n$, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es *harmónica* si es de clase C^2 y satisface la ecuación diferencial

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

El operador diferencial Δf, definido por la primera igualdad, se conoce como *laplaciano* de la función f. Algunas propiedades de las funciones holomorfas, como el principio del módulo máximo, pueden obtenerse como consecuencia de propiedades similares de las funciones harmónicas, si bien aquí haremos lo contrario, es decir, usaremos la teoría que ya conocemos sobre funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ para estudiar las funciones harmónicas de dos variables. Naturalmente, muchos de los resultados que probaremos son válidos para funciones harmónicas de cualquier número de variables, pero las pruebas quedan fuera de nuestro alcance y, por otra parte, en el estudio posterior de las funciones holomorfas sólo necesitaremos el caso de dos variables.

Es interesante observar que una función de una variable f es harmónica si y sólo si es de clase C^2 y

$$\frac{d^2 f}{dx} = 0,$$

luego las funciones harmónicas de una variable son exactamente las de la forma $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Por ello las funciones harmónicas pueden considerarse una generalización de las rectas y, en efecto, muchas de sus propiedades son hechos que las rectas satisfacen trivialmente.

9.1 Relación con las funciones holomorfas

Para el caso de funciones de dos variables los conceptos de laplaciano y función harmónica se reducen a los siguientes:

Definición 9.1 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Se define su *laplaciano* como la función

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

La función f es *harmónica* en Ω si cumple $\Delta f(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$. Diremos que f es *harmónica* en un punto z si es harmónica en un entorno de z.

Es inmediato que la suma de funciones harmónicas es una función harmónica, así como el producto de una función harmónica por un número real, luego las funciones harmónicas en un abierto forman un espacio vectorial real. La relación más elemental entre las funciones holomorfas y las funciones harmónicas es la siguiente:

Teorema 9.2 *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en Ω, entonces $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son funciones harmónicas en Ω.*

Demostración: En efecto, si f es holomorfa entonces

$$f'(z) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} - i\,\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}$$

también lo es, luego satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de donde se sigue inmediatamente $\Delta \operatorname{Re} f = 0$. Podemos razonar igualmente con $\operatorname{Im} f$ o simplemente observamos que $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re} if$. ∎

Del mismo modo se comprueba que si f es harmónica en Ω, entonces la función definida por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

es holomorfa en Ω, pues es de clase C^1 y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En particular vemos que las funciones harmónicas son siempre de clase C^∞. Sin embargo esto no puede considerarse un recíproco del teorema anterior. El recíproco propiamente dicho no es cierto en general, sino que constituye una caracterización más de los abiertos simplemente conexos:

Teorema 9.3 *Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si y sólo si toda función harmónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.*

Demostración: Supongamos que Ω es simplemente conexo y sea f una función harmónica en Ω. Por el teorema 5.7, existe una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x} - i\,\frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y},$$

con lo que

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} F - f)}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Re} F - f)}{\partial y} = 0$$

en Ω, de donde se sigue que $f(z) = \operatorname{Re} F(z) + c$, para todo $z \in \Omega$ y cierta constante $c \in \mathbb{R}$, es decir, $f = \operatorname{Re}(F + c)$.

Supongamos ahora que toda función harmónica en Ω es la parte real de una función holomorfa. Según el teorema 5.7, para probar que Ω es simplemente conexo basta ver que toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sin ceros en Ω tiene un logaritmo holomorfo.

Ahora bien, la función $\log|f|$ es harmónica en Ω, pues f tiene un logaritmo holomorfo en cualquier disco contenido en Ω y su parte real es precisamente $\log|f|$. Por la hipótesis existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} g = \log|f|$, con lo que $|e^{g(z)}| = |f(z)|$ y, en consecuencia, $e^{g(z)}/f(z)$ es una función holomorfa en Ω de módulo 1. Por el principio del módulo máximo es constante, con lo que $e^{g(z)} = e^c f(z)$, para todo $z \in \Omega$. Esto implica que $g(z) - c$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω. ∎

El último razonamiento se adapta fácilmente para probar que $\log|z|$ no es la parte real de ninguna función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. No obstante es una función harmónica, pues en un entorno de cada punto es la parte real de una rama uniforme del logaritmo. El teorema siguiente prueba que esencialmente es la única función harmónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no es la parte real de una función holomorfa. Lo probamos más en general para funciones sobre un anillo.

Teorema 9.4 *Si f es una función harmónica en un anillo $A(0, r, R)$, entonces*

$$f(z) = c \log|z| + \operatorname{Re} g(z),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y g es una función holomorfa en el anillo.

Demostración: Desarrollamos la derivada parcial de f en serie de Laurent:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{n \neq -1} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z}, \qquad \text{para } r < |z| < R.$$

La serie tiene integral nula sobre todo arco cerrado contenido en el anillo. En efecto, como converge uniformemente en los compactos, la integral se puede calcular término a término, pero todos los sumandos tienen primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, luego por 2.20 las integrales son nulas. El teorema de Morera implica que la serie tiene una primitiva g en el anillo. Así pues,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial z} + \frac{a_{-1}}{z}.$$

En el abierto $A = A(0, r, R) \setminus [0, +\infty[$ la función $1/z$ tiene como primitiva a la función $\log z$ que a cada z le asigna su logaritmo con parte imaginaria en $]0, 2\pi[$. Luego en A se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial z} + \frac{\partial \operatorname{Re}(a_{-1} \log z)}{\partial z}.$$

Por lo tanto existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = \operatorname{Re} g(z) + \operatorname{Re}(a_{-1} \log z) + k = \operatorname{Re} g(z) + c \log|z| + d \arg z + k,$$

donde $\arg z$ es el argumento de z en $]0, 2\pi[$. La función $d \arg z + k$ tiene una extensión continua a todo el anillo, concretamente $f(z) - \operatorname{Re} g(z) - c \log|z|$, pero claramente esto sólo es posible si $d = 0$. Cambiando g por $g + k$ tenemos la expresión del enunciado (que por continuidad vale en todo el anillo). ∎

Otros ejemplos de interés son los siguientes: la función $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ cumple $\Delta f = 2$, por lo que el producto de funciones harmónicas no es necesariamente una función harmónica.

Sea ahora f una función holomorfa en un abierto y

$$F(z) = |f(z)|^2 = \big(\operatorname{Re} f(z)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2.$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\right)^2 + 2\operatorname{Re} f\ \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right)^2 + 2\operatorname{Im} f\ \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x^2},\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}\right)^2 + 2\operatorname{Re} f\ \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}\right)^2 + 2\operatorname{Im} f\ \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Sumamos teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así como que $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son harmónicas y por lo tanto tienen laplaciano nulo:

$$\Delta F = 4\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right)^2 = 4\left|\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + i\,\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right|^2 = 4|f'|^2.$$

Así pues, si f es holomorfa, la función $|f|^2$ no es harmónica salvo que f sea constante (en cada componente conexa de su dominio). Más aún:

Si f es una función holomorfa no constante en un abierto conexo Ω, entonces $|f|$ no es harmónica.

En efecto, si f no es constante hay un disco abierto donde no se anula. En dicho disco f tiene un logaritmo holomorfo $\log f$, luego tiene una raíz cuadrada holomorfa $g(z) = e^{(1/2)\log f}$. Según hemos visto, $|f| = |g|^2$ no es harmónica. ∎

Veamos ahora una aplicación del teorema 9.4.

Teorema 9.5 *Si una función harmónica $f : D'(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada, entonces se extiende a una función harmónica en $D(0, R)$.*

Demostración: Por el teorema 9.4 sabemos que f se expresa en la forma $f(z) = c \log|z| + \operatorname{Re} g(z)$, donde $c \in \mathbb{R}$ y g es una función holomorfa en $D'(0, R)$. Hemos de probar que $c = 0$. Suponemos lo contrario y veremos que f no puede estar acotada. Ciertamente no lo está si g tiene una singularidad evitable en

0. Si la singularidad es un polo entonces (definiendo $g(0) = \infty$) el teorema de la aplicación abierta nos da que, si $0 < r < 1$, $r < R$, entonces $g[D(0,r)]$ es un entorno de ∞. En particular contiene números reales tanto positivos como negativos arbitrariamente grandes en módulo, mientras que $c \log |z|$ tiene signo constante en el disco, luego f no puede estar acotada.

Si g tiene una singularidad esencial en 0 razonamos de forma similar, usando que $g[D'(0,r)]$ es denso en $\mathbb{C}$. Así pues, $c = 0$, y es claro que g ha de tener una singularidad evitable en 0, por lo que $\operatorname{Re} g$ es la extensión buscada. ∎

Para terminar la sección enunciamos una regla de la cadena mixta entre funciones harmónicas y holomorfas. La demostración es un simple cálculo.

Teorema 9.6 *Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una función holomorfa y $g : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función harmónica. Entonces $f \circ g$ es una función harmónica y*

$$\frac{\partial g(f(z))}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\, f'(z).$$

9.2 Propiedades de las funciones harmónicas

Las propiedades básicas de las funciones harmónicas se deducen de propiedades similares de las funciones holomorfas. Por ejemplo, empezamos probando un principio de prolongación harmónica, análogo al principio de prolongación analítica, aunque la hipótesis que se requiere es un poco más fuerte.

Teorema 9.7 (Principio de prolongación harmónica) *Si dos funciones harmónicas definidas sobre un abierto conexo coinciden en un abierto menor, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si una función harmónica f en un conexo Ω es nula en un abierto $A \subset \Omega$, entonces es nula en todo su dominio. Podemos tomar como A la unión de todos los abiertos contenidos en Ω donde f es nula. Hemos de probar que $A = \Omega$. Si no es así tomamos un punto $z_1 \in A$ y otro $z_2 \in \Omega \setminus A$. Sea γ un arco contenido en Ω de extremos z_1 y z_2. El menor punto de γ que no está en A es un punto $z \in \partial A \cap \Omega$.

En un disco $D \subset \Omega$ de centro z se cumple $f = \operatorname{Re} g$, para una cierta función holomorfa. Las derivadas de $\operatorname{Re} g$ respecto a x e y son nulas en $A \cap D$, y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que lo mismo les sucede a las de $\operatorname{Im} g$. Así pues, g es constante en $D \cap A$ —nula, de hecho— luego por el principio de prolongación analítica g es nula en D y f también, pero esto implica que $z \in D \subset A$, lo cual es absurdo. ∎

Ahora traduciremos la fórmula integral de Cauchy a una fórmula para funciones harmónicas:

Teorema 9.8 (Teorema del valor medio de Gauss) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función harmónica, sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos tomar un disco abierto mayor contenido en Ω, en el cual $f = \operatorname{Re} g$, para una cierta función holomorfa g, a la que podemos aplicarle la fórmula de Cauchy:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Tomando partes reales obtenemos la fórmula del enunciado. ∎

El teorema anterior expresa que el valor de una función harmónica en un punto es el promedio de los valores que toma en las circunferencias alrededor del mismo. Como consecuencia obtenemos un análogo al principio del módulo máximo:

Teorema 9.9 (Principios del máximo y del mínimo) *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y f una función harmónica en Ω no constante. Entonces*

a) Si $D(z_0, r) \subset \Omega$ existen z_1, $z_2 \in D(z_0, r)$ tales que $f(z_1) < f(z_0) < f(z_2)$.

b) Para todo $z_0 \in \Omega$ se cumple $\inf_{z\in\Omega} f(z) < f(z_0) < \sup_{z\in\Omega} f(z)$.

c) Si f es continua en la clausura de Ω en $\mathbb{C}^\infty$, entonces para todo $z_0 \in \Omega$ se cumple

$$\min_{z\in\partial\Omega} f(z) < f(z_0) < \max_{z\in\partial\Omega} f(z).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f(z_0)$ es el máximo de f en el disco $D(z_0, r)$. Si $0 < r' < r$, el teorema anterior nos da que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0)\,d\theta = f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r'e^{i\theta})\,d\theta,$$

luego

$$\int_0^{2\pi} \big(f(z_0) - f(z_0 + r'e^{i\theta})\big)d\theta = 0$$

y el integrando es una función continua no negativa, luego es nula. Así hemos obtenido que $f(z_0) = f(z_0 + r'e^{i\theta})$ para todo $r' < r$ y todo θ, con lo que f es constante en $D(z_0, r)$. Por el principio de prolongación harmónica f es constante en Ω.

b) es inmediato a partir de a).

c) se prueba con el mismo argumento que el apartado análogo del principio del módulo máximo (eliminando los módulos). ∎

Como consecuencia obtenemos un principio de unicidad más importante que el principio de prolongación harmónica:

Teorema 9.10 *Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f, $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en la clausura de Ω en $\mathbb{C}^\infty$ y harmónicas en Ω. Si f y g coinciden en $\partial\Omega$, entonces coinciden en Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Por el apartado c) del teorema anterior, la función $f - g$ es nula en Ω. ∎

Se llama *problema de Dirichlet* para un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función continua en $\partial_\infty\Omega$ (la frontera de Ω en $\mathbb{C}^\infty$) al problema de encontrar una extensión continua de f a $\overline{\Omega}$ que sea harmónica en Ω. Tenemos que si un problema de Dirichlet tiene solución entonces ésta es única. El interés de todo esto se debe a que hay una amplia familia de abiertos en los que el problema de Dirichlet tiene solución para cualquier función continua en su frontera. Un abierto conexo con esta propiedad es un *dominio de Dirichlet*. Vamos a probar que los discos abiertos son dominios de Dirichlet, de donde se seguirán muchas consecuencias de interés.

Supongamos que f es una función harmónica en un abierto que contiene al disco unidad cerrado. Entonces el teorema del valor medio de Gauss nos da que $f(0)$ está determinado por los valores que f toma en la circunferencia unidad. Si $a \in D(0,1)$ podemos considerar la transformación de Möbius

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z},$$

que deja fijo al disco unidad y transforma 0 en a, pues si $|z| = 1$ entonces

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{z}\,\frac{z+a}{\bar{z}+\bar{a}}\right| = 1.$$

Por consiguiente

$$f(a) = f\big(g(0)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) d\theta.$$

Mediante algunas manipulaciones, consistentes esencialmente en realizar un cambio de variable, se puede llegar a que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

No detallamos los cálculos porque vamos a probar esta fórmula a partir de un teorema más fuerte. Esta igualdad se conoce como *fórmula de Poisson,* y muestra explícitamente la dependencia de los valores que una función harmónica toma sobre el disco unidad respecto de los valores que toma en la circunferencia unidad. En realidad veremos que no es necesario que f esté definida en un abierto que contenga al disco cerrado, sino que basta con que f sea harmónica en el disco abierto y continua en su clausura. En otras palabras, la fórmula de Poisson nos permitirá resolver el problema de Dirichlet sobre el disco unidad y, mediante una simple manipulación, sobre un disco arbitrario.

Estudiemos el término que aparece junto a f en la fórmula de Poisson. Haciendo $a = re^{it}$ toma la forma

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i(t-\theta)}}{1-r^{i(t-\theta)}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i(t-\theta)}-re^{-i(t-\theta)}-r^2}{|1-re^{i(t-\theta)}|^2}\right)\\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}.\end{aligned}$$

Definición 9.11 Llamaremos *núcleo de Poisson* a la función

$$P_r(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2},$$

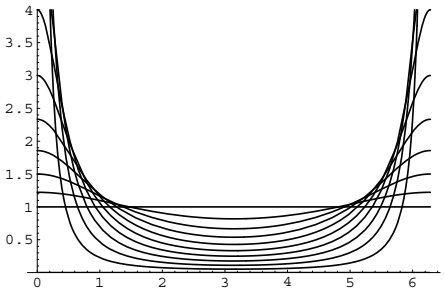
para $0 \le r < 1$.

Si f es una función real continua en la circunferencia unidad, definimos la *integral de Poisson* de f como la función definida en $D(0,1)$ mediante

$$P_f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta) f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

En estos términos, nuestro objetivo es probar que la integral de Poisson de una función f resuelve el problema de Dirichlet asociado a f. Para ello hemos de estudiar el núcleo de Poisson. Ante todo, conviene pensar en $P_r(t)$, no como una función de dos variables, sino como una familia de funciones de una variable t. Claramente $P_r(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, además P_r es continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo 2π.

La figura muestra las funciones $P_r(t)$ para varios valores de r. Si $r = 0$ tenemos la función constante 1 y, a medida que r crece, los núcleos de Poisson se van acercando a 0 por el centro y a infinito por los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$.



Veamos que admiten un desarrollo en serie de Fourier. Para ello usamos la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Sustituyendo $z = re^{it}$ queda

$$\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int},$$

luego

$$P_r(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}),$$

con lo que otra forma para el núcleo de Poisson es

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}, \qquad \text{para } 0 \le r < 1.$$

Como la serie geométrica de partida converge uniformemente en los compactos del disco unidad, es fácil ver que esta serie converge uniformemente en la recta real (para r fijo). Esto nos permite integrarla término a término:

$$\int_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = 2\pi,$$

pues si $n \neq 0$ resulta

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \left[\frac{e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Con esto podemos evaluar la integral de Poisson de la función constante 1:

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1.$$

Esto prueba que P_1 es la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad determinado por la función constante 1. Ahora pasamos al caso general:

Teorema 9.12 *Toda función real continua $f : \partial D(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una única función continua $H_f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ harmónica en $D(0,1)$. En el interior del disco la extensión viene dada por la integral de Poisson P_f.*

Demostración: En primer lugar vemos que la integral de Poisson es harmónica:

$$\begin{aligned} P_f(a) &= P_f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta) f(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) f(e^{i\theta})\,d\theta = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\,d\theta\right). \end{aligned}$$

Hemos de probar que la última integral es holomorfa como función de a, pero esto es inmediato a partir del teorema 2.24 (tomando como arco la circunferencia unidad).

Ahora basta probar que si $z_0 = e^{it_0} \in \partial D(0,1)$ existe

$$\lim_{z\to z_0} P_f(z) = f(z_0).$$

Teniendo en cuenta que $P_1(z) = 1$ para todo $z = re^{it} \in D(0,1)$, se cumple

$$\begin{aligned} |P_f(z) - f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)\big(f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})\big)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)\,|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})|\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r(t-\theta)\,|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})|\,d\theta. \end{aligned}$$

El último cambio de variable es correcto porque el integrando es periódico en θ con periodo 2π. Fijemos una cota M de f y un número real $\epsilon > 0$. Puesto que f es uniformemente continua existe un $\eta > 0$ tal que si $|\theta - t_0| < \eta$ entonces $|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})| < \epsilon/2$. Supongamos además que $|t - t_0| < \eta/2$.

Descomponemos la integral en dos partes, una correspondiente a los puntos θ tales que $|\theta - t_0| < \eta$ y otra con los puntos restantes, es decir, con los que cumplen $|\theta - t_0| \geq \eta$ y, por consiguiente, $|t - \theta| \geq \eta/2$. Así

$$|P_f(z) - f(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + MP_r(\eta/2).$$

Finalmente, de la definición de P_r se sigue inmediatamente que

$$\lim_{r\to 1} P - r(\eta/2) = 0,$$

con lo que tomando un $\delta < \eta$ adecuado se cumple que si $|t - t_0| < \delta$ y $|1 - r| < \delta$ entonces $|P_f(z) - f(z_0)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Claramente esto prueba la existencia del límite en z_0. ∎

De aquí deducimos inmediatamente la fórmula de Poisson:

Teorema 9.13 *Sea f una función continua en $\overline{D(0,1)}$ y harmónica en $D(0,1)$. Entonces, si $0 \leq r < 1$ se cumple*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta) f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

(Pues por la unicidad f ha de ser la extensión construida en el teorema anterior de su restricción a $\partial D(0,1)$.)

Hemos trabajado en el disco unidad tan sólo por comodidad, pero es fácil obtener una fórmula análoga para discos arbitrarios. En el caso general, si f es harmónica en el disco $D(z_0, R)$ y continua en su clausura, entonces la función $g(z) = f(z_0 + Rz)$ está en las hipótesis del teorema anterior, luego para un punto $z_0 + re^{it}$ con $0 \leq r < R$ tenemos

$$f(z_0 + re^{it}) = g\left(\frac{r}{R}\, e^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r/R}(t-\theta) f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Esta fórmula nos da también la solución explícita al problema de Dirichlet en un disco arbitrario. Como aplicación vamos a caracterizar las funciones harmónicas por la propiedad del valor medio.

Teorema 9.14 *Sea f una función continua en un abierto Ω tal que para todo $a \in \Omega$ existe una sucesión $\{r_n\}$ de números reales positivos convergente a 0 de modo que*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r_n e^{i\theta})\, d\theta.$$

Entonces f es harmónica en Ω.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $a \in \Omega$ y fijemos un R tal que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Existe una única función g continua en este disco cerrado, harmónica en su interior y que coincide con f en su frontera. Sea $h = f - g$ y sea m el supremo de h en el disco cerrado. Supongamos que $m > 0$. Como h es nula en la frontera, el conjunto

$$E = \{z \in \overline{D(a,R)} \mid h(z) = m\}$$

es en realidad un subconjunto compacto de $D(a,R)$. Sea $z_0 \in E$ donde $|z-a|$ tome el valor máximo k. Así, para todo r suficientemente pequeño, al menos la mitad de la circunferencia de centro z_0 y radio r está fuera del disco de centro 0 y radio k, luego fuera de E.

Tomando como r uno de los valores para los que por hipótesis se cumple la propiedad del valor medio, concluimos que

$$m = h(z_0) = f(z_0) - g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f-g)(a + r_n e^{i\theta})\,d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\,d\theta = m.$$

Esta contradicción muestra que $m = 0$, o sea, $f \leq g$ en $D(a,R)$. Razonando igualmente con $g - f$ concluimos que $f = g$, luego f es harmónica en a. ∎

Una consecuencia inmediata de esta caracterización es que el límite casi uniforme de una sucesión de funciones harmónicas es una función harmónica, pues la sucesión converge uniformemente en las circunferencias, lo que permite intercambiar el límite con la integral que proporciona el teorema del valor medio para cada término de la sucesión y concluir que el límite está en las hipótesis del teorema anterior. En otras palabras, el espacio de todas las funciones harmónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es cerrado en el espacio $F(\Omega)$ de todas las funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Como éste es completo (teorema 3.10), concluimos que aquél también lo es, o sea:

Teorema 9.15 *El espacio de las funciones harmónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, provisto de la métrica de la convergencia casi uniforme, es completo.*

Una función harmónica f en un disco $D(z_0,R)$ es la parte real de una función holomorfa. Si suponemos que f es continua en el disco cerrado la fórmula de Poisson nos da una expresión explícita de la misma. Si $z = z_0 + re^{it} \in D(z_0,R)$ se cumple

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r/R}(t-\theta) f(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1+(r/R)e^{i(t-\theta)}}{1-(r/R)e^{i(t-\theta)}}\right) f(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi Ri}\int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + (z-z_0)}{\zeta - (z-z_0)}\,\frac{f(z_0+\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right). \end{aligned}$$

El teorema 2.24 prueba que la integral es una función holomorfa en $D(z_0,R)$. Como aplicación probaremos para funciones harmónicas el análogo al teorema

de Montel. La definición de conjunto acotado de funciones harmónicas es la misma que en el caso de funciones holomorfas: Un conjunto F de funciones harmónicas está *(casi uniformemente) acotado* si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe un número $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $f \in F$ y todo $z \in K$. Todas las observaciones sobre acotación de funciones holomorfas valen para funciones harmónicas.

Teorema 9.16 *Un conjunto de funciones harmónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es relativamente compacto si y sólo si está acotado.*

Demostración: La prueba de que todo conjunto relativamente compacto está acotado es análoga a la que dimos en el teorema de Montel. Si F está acotado basta probar que si $\overline{D(a,\rho)}$ está contenido en Ω entonces toda sucesión $\{f_n\} \subset F$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que las restricciones $\{f_{n_k}|_{D(a,\rho)}\}$ convergen a una función harmónica en $D(a,r)$. El argumento concluye como en el teorema de Montel.

Consideramos un radio $R > \rho$ tal que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Sea

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi R i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + (z-a)}{\zeta - (z-a)} \, \frac{f_n(a+\zeta)}{\zeta} \, d\zeta.$$

De este modo, h_n es holomorfa en $D(a,R)$ y $f_n = \operatorname{Re} h_n$. Sea M una cota de las funciones f_n en el compacto $\partial D(a,R)$. Entonces, si $z \in \overline{D(a,\rho)}$ se cumple

$$|h_n(z)| \leq M \, \frac{1+\rho}{R-\rho}.$$

De aquí se sigue que la sucesión está acotada en el espacio de las funciones holomorfas en $D(a,\rho)$. Por el teorema de Montel tiene una subsucesión convergente $\{h_{n_k}\}$, y es fácil ver que sus partes reales $\{f_{n_k}\}$ también convergen casi uniformemente en el disco. ∎

Veamos un último resultado sobre convergencia que nos será útil después. Diremos que una sucesión de funciones harmónicas $\{f_n\}$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ converge casi uniformemente a $+\infty$ si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $M > 0$ existe un natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$ se cumple $|f(z)| \geq M$.

Teorema 9.17 (Teorema de Harnack) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona creciente de funciones harmónicas en un abierto conexo Ω. Entonces $\{f_n\}$ converge casi uniformemente en Ω a una función harmónica o bien a $+\infty$.*

Demostración: Podemos suponer que $f_1 \geq 0$, o en caso contrario razonamos con la sucesión $\{f_n - f_1\}$. Sea $f(z) = \sup_n f_n(z)$. Consideremos los conjuntos

$$A = \{z \in \Omega \mid f(z) = +\infty\}, \qquad B = \{z \in \Omega \mid f(z) < +\infty\}.$$

Vamos a probar que ambos son abiertos, con lo que por conexión uno de ellos coincidirá con Ω. Tomemos $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que el disco $|z - z_0| \leq R$ esté contenido en Ω. Si $|z - z_0| = r < R$ entonces

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r/R}(t - \theta) f_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

donde

$$P_{r/R}(t - \theta) = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\theta} - re^{it}|^2}, \qquad \text{y} \qquad R - r \leq |Re^{i\theta} - re^{it}| \leq R + r,$$

luego

$$\frac{R - r}{R + r} \leq P_{r/R}(t - \theta) \leq \frac{R + r}{R - r}.$$

Por consiguiente

$$\frac{R - r}{R + r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta \leq f_n(z) \leq \frac{R + r}{R - r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

y teniendo en cuenta la propiedad del valor medio queda

$$\frac{R - r}{R + r} f_n(z_0) \leq f_n(z) \leq \frac{R + r}{R - r} f_n(z_0).$$

Así pues, si $f_n(z_0)$ tiende a $+\infty$ o converge, lo mismo le sucede a $f_n(z)$ para todo z en el disco $D(z_0, R)$, es decir, $D(z_0, R)$ está contenido en el mismo conjunto A o B al cual pertenece z_0.

Supongamos que $\Omega = A$, es decir, que $\{f_n\}$ converge a $+\infty$. Con la notación anterior tomamos $0 < r < r' < R$. Entonces

$$M = \frac{R - r'}{R + r'} \leq \frac{R - r}{R + r}\ ,$$

con lo que $M f_n(z_0) \leq f_n(z)$ para todo $z \in D(z_0, r')$. De aquí se sigue que f_n converge uniformemente a $+\infty$ en el último disco, y es fácil ver entonces que converge casi uniformemente en Ω.

Si $\Omega = B$ llegamos de forma similar a que la sucesión $\{f_n\}$ está acotada en un disco $D(z_0, r')$. Por el teorema anterior tiene una subsucesión convergente en dicho disco, pero por la monotonía toda la sucesión converge. De aquí se sigue la convergencia casi uniforme en Ω. ∎

9.3 Funciones subharmónicas

En la sección primera hemos visto que el módulo de una función holomorfa no es una función harmónica salvo casos triviales. Por lo tanto el principio del módulo máximo para funciones holomorfas no puede verse como un caso particular del principio del máximo para funciones harmónicas. Sin embargo,

sucede que ambos son casos particulares de un principio del máximo válido para una familia de funciones reales más amplia que la de las harmónicas. Para que no resulte artificial conviene hacer algunas reflexiones sobre el concepto de función harmónica. Pensemos en una función real continua de variable real f. El análogo en este caso al teorema del valor medio de Gauss sería la afirmación de que

$$f(x) = \frac{f(x-r) + f(x+r)}{2},$$

siempre que f esté definida en el intervalo $[x-r, x+r]$.

Es fácil ver que esta propiedad caracteriza a las rectas. Todas las propiedades de las funciones harmónicas se corresponden con propiedades elementales de las rectas. Por ejemplo, la solución del problema de Dirichlet equivale a que existe una única recta definida sobre un intervalo $[a, b]$ que en los extremos tome valores prefijados arbitrarios. Los principios del máximo y del mínimo afirman que el máximo y el mínimo de una recta se alcanzan en los extremos del intervalo donde está definida, etc.

Las funciones que queremos introducir ahora son el análogo a las funciones cóncavas y convexas. Una función es convexa si en cualquier intervalo en el que está definida es menor que la recta que coincide con ella en los extremos. Similarmente, una función es cóncava si en cualquier intervalo en el que está definida se mantiene por encima de la recta que coincide con ella en los extremos.

Definición 9.18 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Una función continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es *subharmónica* (*superharmónica*) si para todo disco cerrado $D \subset \Omega$ se cumple que $f|_D \leq h$ ($f|_D \geq h$), donde h es la solución del problema de Dirichlet para D que coincide con f en la frontera.

Es inmediato que una función es harmónica si y sólo si es subharmónica y superharmónica al mismo tiempo. Así mismo, una función f es subharmónica si y sólo si $-f$ es superharmónica, y viceversa. Notemos que no exigimos que las funciones subharmónicas y superharmónicas sean derivables.

Del mismo modo que la concavidad y convexidad de las funciones de clase C^2 puede caracterizarse en términos de la segunda derivada, las funciones subharmónicas y superharmónicas de clase C^2 pueden caracterizarse por su laplaciano:

Teorema 9.19 *Si f es una función de clase C^2 en un abierto Ω, entonces f es subharmónica (superharmónica) en Ω si y sólo si $\Delta f \geq 0$ ($\Delta f \leq 0$).*

Demostración: Supongamos que $\Delta f \geq 0$ y tomemos un disco cerrado D de centro z_0 contenido en Ω. Sea h la función harmónica en D que coincide con f en ∂D. Hemos de probar que $f \leq h$ o, equivalentemente, que $f|_D - h \leq 0$. Por continuidad y compacidad $f|_D - h$ ha de tomar un valor máximo en D. Si éste es positivo lo tomará en un punto interior z_1 (pues en la frontera f coincide con h). Tomando $c > 0$ suficientemente pequeño, la función

$$\phi(z) = c\|z - z_0\|^2 + f(z) - h(z)$$

cumple $\phi(z_1) > \phi(z)$ para todo $z \in \partial D$. En efecto, si $z \in \partial D$ se cumple $\phi(z) = cr^2$, luego basta tomar $c > 0$ de modo que $cr^2 < f(z_1) - h(z_1)$.

De nuevo por continuidad y compacidad, ϕ tomará su valor máximo en un punto de D, pero según lo dicho ha de ser en realidad un punto interior z_2. La función que resulta de fijar la parte imaginaria de ϕ tiene un máximo en $\operatorname{Re} z_2$, luego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(z_2) \leq 0.$$

Lo mismo vale para la derivada respecto de y, y al sumar queda

$$0 \geq \Delta\phi(z_2) = 4c + \Delta f(z_2) - \Delta h(z_2) = 4c + \Delta f(z_2),$$

luego $\Delta f(z_2) \leq -4c < 0$, en contra de lo supuesto. Por consiguiente el máximo de $f_D - h$ es menor o igual que 0 y así f es subharmónica.

Recíprocamente, si f es subharmónica en Ω pero $\Delta f < 0$ en algún punto, por continuidad existirá un disco abierto D en el cual $\Delta f < 0$, luego por la parte ya probada $-f$ será subharmónica en D, luego f será subharmónica y superharmónica en D, luego será harmónica y en realidad cumplirá $\Delta f = 0$ en D, con lo que tenemos una contradicción.

Una función f de clase C^2 es superharmónica si y sólo si $-f$ es subharmónica, si y sólo si $-\Delta f \geq 0$, si y sólo si $\Delta f \leq 0$. ∎

Cada propiedad de las funciones subharmónicas se corresponde con una propiedad de las funciones superharmónicas invirtiendo el sentido de las desigualdades. El teorema anterior es un ejemplo. Por simplicidad en lo sucesivo trataremos únicamente con funciones subharmónicas.

Las funciones subharmónicas pueden caracterizarse también por sus medias sobre circunferencias:

Teorema 9.20 *Sea f una función subharmónica en un abierto Ω, sea $z_0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Entonces*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Recíprocamente, si f es continua y cumple esta propiedad en cada punto z_0 para una sucesión de valores de r convergente a 0 entonces f es subharmónica.

Demostración: Sea h la solución del problema de Dirichlet para el disco dado que coincide con f en la frontera. Entonces

$$f(z_0) \leq h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Para probar el recíproco basta seguir el argumento del teorema 9.14. ∎

Usando esta caracterización es fácil probar:

Teorema 9.21 *Si f y g son funciones subharmónicas en un abierto Ω y α, $\beta \geq 0$, entonces $\alpha f + \beta g$ y $\max\{f, g\}$ son subharmónicas.*

Otra aplicación del teorema 9.20 es la siguiente:

Teorema 9.22 *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $|f|$ es subharmónica.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un disco $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ y apliquemos la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} |f|(z_0) &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \end{aligned}$$

luego el teorema anterior garantiza que $|f|$ es subharmónica. ∎

Esto hace que el principio del módulo máximo para funciones holomorfas (al igual que el principio del máximo para funciones harmónicas) sea un caso particular del siguiente principio del máximo para funciones subharmónicas:

Teorema 9.23 (Principio del máximo) *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función subharmónica no constante. Entonces*

a) Para todo $z_0 \in \Omega$ se cumple $f(z_0) < \sup_{z \in \Omega} f(z)$.

b) Si Ω está acotado y f es continua en $\overline{\Omega}$, entonces para todo $z_0 \in \Omega$ se cumple

$$f(z_0) < \max_{z \in \partial\Omega} f(z).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $m = \sup_{z \in \Omega} f(z)$ (quizá $m = +\infty$). Descomponemos Ω como unión de los conjuntos

$$\Omega_1 = \{z \in \Omega \mid f(z) = m\}, \quad \Omega_2 = \{z \in \Omega \mid f(z) < m\}.$$

La continuidad de f implica que Ω_2 es abierto. Si probamos que Ω_1 también lo es, por conexión uno de los dos será vacío, pero como f no es constante tendrá que serlo Ω_1 y a) quedará demostrado. Para probar que Ω_1 es abierto podemos suponer que es no vacío, lo que implica que m es finito.

Tomemos $z_0 \in \Omega_1$. Al ser f subharmónica, para r suficientemente pequeño se cumple

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta - f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)\big)\, d\theta$$

Como $f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0) = f((z_0 + re^{i\theta}) - m \leq 0$, la desigualdad anterior es una igualdad, y $f(z) = m$ para todo z tal que $|z - z_0| = r$, para todo r

suficientemente pequeño, es decir, hay un entorno de z_0 contenido en Ω_1. Esto prueba a). El apartado b) se prueba igual que su análogo en el principio del módulo máximo. ∎

Notar que las funciones superharmónicas cumplen un *principio del mínimo* análogo. El teorema siguiente generaliza simultáneamente a los principios del máximo y del mínimo. Éstos se obtienen como casos particulares haciendo constante una de las dos funciones que intervienen:

Teorema 9.24 *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y f, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es subharmónica y g superharmónica. Supongamos que para todo punto $a \in \partial_\infty\Omega$ (la frontera de Ω en $\mathbb{C}^\infty$) se cumple*

$$\overline{\lim_{z\to a}}\, f(z) \leq \underline{\lim_{z\to a}}\, g(z).$$

Entonces $f = g$ es una función harmónica o bien $f(z) < g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración: Recordemos que el límite superior $\overline{\lim_{z\to a}}\, f(z)$ es el supremo de los límites de las sucesiones convergentes $\{f(z_n)\}$ determinadas por sucesiones $\{z_n\} \subset \Omega$ convergentes a a. Similarmente se define el límite inferior.

La función $h = g - f$ es superharmónica por el teorema 9.21 y cumple $\underline{\lim_{z\to a}}\, h(z) \geq 0$. Podemos tomar una sucesión $\{z_n\}$ en Ω tal que $\{h(z_n)\}$ converja al ínfimo de h. Tomando una subsucesión podemos suponer que $\{z_n\}$ converge a un punto a de la clausura de Ω en $\mathbb{C}^\infty$.

Si h es constante es claro que se cumple el teorema. En caso contrario, el principio del mínimo implica que h no toma un valor mínimo en Ω, luego $a \in \partial_\infty\Omega$. Entonces la definición de límite inferior implica que el ínfimo de h ha de ser mayor o igual que 0, luego h es estrictamente positiva en Ω. ∎

Hemos enunciado este teorema con límites superiores e inferiores porque después lo necesitaremos con este grado de generalidad, pero conviene recordar un caso particular mucho más simple y no menos útil: Si una función subharmónica es menor o igual que una función superharmónica en todos los puntos de la frontera de un abierto conexo, entonces la desigualdad vale también en los puntos del abierto.

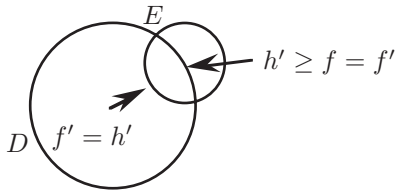
Sin embargo, la versión general del teorema es más potente. Por ejemplo, de él se sigue que en la definición de función subharmónica podemos sustituir los discos por abiertos cualesquiera:

Teorema 9.25 *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es subharmónica, G es un abierto conexo tal que $\overline{G} \subset \Omega$ y $h : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{G}$, harmónica en G y que coincide con f en ∂G, entonces $f(z) \leq h(z)$ para todo $z \in G$.*

Terminamos con una propiedad de las funciones subharmónicas que necesitaremos en la sección siguiente.

Teorema 9.26 *Sea Ω un recinto y D un disco cerrado contenido en Ω. Sea f una función subharmónica en Ω y sea f' la función que coincide con f en $\Omega \setminus D$ y en D es la solución del problema de Dirichlet que en la frontera coincide con f. Entonces f' es subharmónica en Ω.*

Demostración: Basta ver que f' es subharmónica en los puntos de la frontera de D. Tomamos un disco E con centro en un punto de dicha frontera. Sean h y h' las funciones harmónicas en el interior de E que coinciden con f y f' en la frontera. Como $f \leq f'$, el teorema 9.24 nos da que $f \leq h \leq h'$ en E. Por otra parte, $f' \leq h'$ en la frontera de $D \cap E$ (ver la figura).



Consecuentemente (y dado que f' y h' son harmónicas en el interior de $D \cap E$) concluimos que $f' \geq h'$ en $D \cap E$, con lo que de hecho $f' \leq h'$ en E. ∎

9.4 El problema de Dirichlet

Vamos a dar una caracterización de los dominios de Dirichlet, es decir, de los abiertos conexos $\Omega \subset \mathbb{C}$ tales que toda función f continua en $\partial_\infty \Omega$ (la frontera de Ω en $\mathbb{C}^\infty$) se extiende a una función continua en $\overline{\Omega}$ y harmónica en Ω. Ya sabemos que si una función f admite una extensión harmónica, ésta es única. Ahora vamos a describir la única solución posible del problema de Dirichlet para una función dada, y el problema será determinar en qué casos es realmente una solución. Necesitamos algunas definiciones:

Definición 9.27 Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en Ω. Si D es un disco abierto cuya clausura esté contenida en Ω, se llama *modificación de Poisson* de f en D a la función continua que coincide con f en $\Omega \setminus D$ y es harmónica en D.

El teorema 9.26 afirma que las modificaciones de Poisson de funciones subharmónicas son subharmónicas.

Una *familia de Perron* en Ω es una familia $\mathcal{P}$ de funciones subharmónicas en Ω tales que

a) Si $f, g \in \mathcal{P}$, entonces $\max\{f, g\} \in \mathcal{P}$.

b) Si $f \in \mathcal{P}$ y D es un disco cuya clausura está contenida en Ω, entonces la modificación de Poisson de f está en $\mathcal{P}$.

Se llama *envolvente superior* de $\mathcal{P}$ a la función M dada por

$$M(z) = \sup\{u(z) \mid u \in \mathcal{P}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Si Ω es un abierto conexo y $f : \partial_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, una familia de Perron en Ω es el conjunto $\mathcal{P}(f, \Omega)$ de todas las funciones u subharmónicas en Ω tales que $\overline{\lim_{z\to a}}\, u(z) \leq f(a)$ para todo punto $a \in \partial_\infty\Omega$.

Si el problema de Dirichlet para f tiene solución h, toda $u \in \mathcal{P}(f, \Omega)$ cumple $u \leq f$ por el teorema 9.24, luego la envolvente superior, que llamaremos M_f, cumple $M_f \leq h$. Por otra parte es obvio que $h \in \mathcal{P}(f, \Omega)$, luego $h = M_f$.

Así pues, si el problema de Dirichlet tiene solución, ésta es necesariamente M_f. Ahora probamos que M_f es siempre harmónica en Ω. Más en general, tenemos:

Teorema 9.28 *Si $\mathcal{P}$ es una familia de Perron y M es su envolvente, entonces o bien M es constantemente igual a $+\infty$ o bien $M : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función harmónica.*

Demostración: Tomemos un punto $a \in \Omega$ y sea $D(a, r)$ un disco cuya clausura esté contenida en Ω. Claramente, existe una sucesión $\{u_n\}$ de funciones en $\mathcal{P}$ tales que $M(a) = \lim_n u_n(a)$ (tanto si $M(a)$ es finito como infinito). Sustituyendo u_n por el máximo de las funciones anteriores podemos suponer que la sucesión $\{u_n\}$ es monótona creciente. Sea v_n la modificación de Poisson de u_n en el disco $D(a, r)$. Las funciones v_n también están en $\mathcal{P}$, luego $u_n \leq v_n \leq M$. En particular $\lim_n v_n(a) = M(a)$. Además la sucesión $\{v_n\}$ es también creciente por el teorema 9.24.

Por el teorema de Harnack tenemos que $\{v_n\}$ converge casi uniformemente en el disco a una función $v \leq M$ que o bien es harmónica o bien es constantemente igual a $+\infty$. Basta probar que $v = M$ en todo $D(a, r)$, pues entonces tendremos que el conjunto de puntos donde M es finita es abierto, al igual que el conjunto de puntos donde es $+\infty$. Por conexión uno de los dos será vacío y si M es finita tenemos también que es harmónica. Ciertamente, si $v = +\infty$, tenemos $v = M$, luego podemos suponer que v es finita.

Ahora bien, si $z \in D(a, r)$ podemos construir como antes una sucesión creciente $\{w_n\}$ de funciones de $\mathcal{P}$ harmónicas en $D(a, r)$ tales que $\lim_n w_n(z) = M(z)$. Sustituyendo w_n por $\max\{w_n, v_n\}$ podemos exigir que $v_n \leq w_n$. El teorema de Harnack nos da que $\{w_n\}$ converge a una función $w \leq M$ harmónica en $D(a, r)$ (no puede ser infinita porque $w(a) \leq M(a) < +\infty$).

Por otra parte $v \leq w \leq M$, luego la función $w - v$ es harmónica en $D(a, r)$ y tiene un máximo en $w(a) - v(a) = 0$, lo que implica que es constante igual a 0, es decir, $w = v$, y en particular $v(z) = M(z)$. ∎

Si f es una función continua en la frontera de un abierto Ω, todas las funciones de $\mathcal{P}(f, \Omega)$ están acotadas por cualquier cota de f, luego la función M_f es harmónica en Ω. El problema de Dirichlet tendrá solución si y sólo si M_f extiende continuamente a f. En general no tiene por qué ser así.

Ejemplo Tomemos $\Omega = D(0,1) \setminus \{0\}$ y sea f la función que vale 0 sobre la circunferencia unidad y $f(0) = 1$. Fijemos $0 < \epsilon < 1$ y consideremos la función $u_\epsilon(z) = (\log|z|)/(\log\epsilon)$. Claramente u_ϵ es harmónica en el anillo $A(0,\epsilon,1)$ y continua en su clausura, toma el valor 1 en la circunferencia $|z| = \epsilon$ y el valor 0 en la circunferencia $|z| = 1$.

Si $v \in \mathcal{P}(f,\Omega)$, entonces $|v| \leq 1$ por el principio del máximo, ya que $|f| \leq 1$. Por lo tanto si $|a| = \epsilon$ se cumple que $\overline{\lim_{z\to a}} v(z) \leq 1 = u_\epsilon(a)$ y si $|a| = 1$ tenemos la misma desigualdad por definición de $\mathcal{P}(f,\Omega)$. El teorema 9.24 implica que $v(z) \leq u_\epsilon(z) = (\log|z|)/(\log\epsilon)$ para todo $z \in A(0,\epsilon,1)$. Si fijamos z y hacemos tender ϵ a cero queda $v(z) \leq 0$, para toda función v en $\mathcal{P}(f,\Omega)$, con lo que $M_f \leq 0$. Obviamente entonces $M_f = 0$ y por lo tanto no tiende a f en $\partial\Omega$. Así pues, el problema de Dirichlet no tiene solución en este caso. ∎

Vamos a encontrar una condición topológica muy simple que garantice que un abierto es un dominio de Dirichlet, pero primero hemos de caracterizar los dominios de Dirichlet por una propiedad local sobre los puntos de su frontera.Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $a \in \partial_\infty\Omega$. Supongamos de momento que a es finito. En tal caso la función $f(z) = |z-a|/(1+|z-a|)$, extendida a ∞ mediante $f(\infty) = 1$, es continua en $\mathbb{C}^\infty$, en particular en $\partial_\infty\Omega$, toma valores en $[0,1]$ y sólo se anula en a. Usando una transformación de Möbius podemos obtener una función con estas mismas características incluso si $a = \infty$.

Si Ω es un dominio de Dirichlet existe una función u harmónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ (la clausura entendida en $\mathbb{C}^\infty$) y que coincide con f en $\partial_\infty\Omega$. Claramente $u : \overline{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ y sólo se anula en el punto a.

La existencia de una función u con estas propiedades para cada punto a caracteriza a los dominios de Dirichlet, pero hemos dicho que buscamos una propiedad local, es decir, que dependa sólo de un entorno de cada punto a. Por ello, vamos a debilitar la condición todavía más.

Definimos el abierto

$$\Omega_r(a) = \begin{cases} \Omega \cap D(a,r) & \text{si } a \neq \infty \\ \Omega \cap A(0,r,+\infty) & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

Sea también

$$\partial\Omega_r(a) = \begin{cases} \{z \in \Omega \mid |z-a| = r\} & \text{si } a \neq \infty \\ \{z \in \Omega \mid |z| = r\} & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

Notemos que $\partial\Omega_r(a)$ no es toda la frontera de $\Omega_r(a)$ sino una parte de ella. Sea $c_r = \text{ínf}\{u(z) \mid z \in \partial\Omega_r(a)\} > 0$ y $\psi_r(z) = \text{mín}\{u(z)/c_r, 1\}$. Es claro que estas funciones cumplen la definición siguiente:

Definición 9.29 Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $a \in \partial_\infty\Omega$. Una *barrera* para a en Ω es una familia de funciones $\{\psi_r\}$, definidas para todo $r > 0$ suficientemente pequeño si $a \neq \infty$ y para todo r suficientemente grande si $a = +\infty$, tales que

a) $\psi_r : \Omega_r(a) \longrightarrow [0,1]$ es superharmónica,

b) $\lim_{z\to a} \psi_r(z) = 0$,

c) Para todo $w \in \partial\Omega_r(a)$ existe $\lim_{z\to w} \psi_r(z) = 1$.

Las funciones ψ_r que hemos construido son continuas, de hecho, en toda la clausura de $\partial\Omega_r(a)$, pero en la definición recogemos las condiciones imprescindibles para caracterizar los dominios de Dirichlet, pues después probaremos la existencia de barreras en un contexto muy general y entonces agradeceremos que la definición sea lo más débil posible.

Teorema 9.30 *Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio de Dirichlet si y sólo si todo punto de $\partial_\infty\Omega$ tiene una barrera en Ω.*

Demostración: Ya hemos visto que la condición es necesaria. Consideremos ahora una función f continua en $\partial_\infty\Omega$. Hemos de probar que para todo $a \in \partial_\infty\Omega$ existe

$$\lim_{z\to a} M_f(z) = f(a).$$

Vamos a suponer que $a \neq \infty$. El caso de ∞ se trata de forma análoga, sustituyendo las aproximaciones a a de la forma $|z-a| < \delta$ por aproximaciones a ∞ de la forma $|z| > R$.

Fijemos una barrera $\{\psi_r\}$ para a. Tomemos $\epsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que si $w \in \partial_\infty\Omega$ y $|w-a| < 2\delta$ entonces $|f(w) - f(a)| < \epsilon$. Podemos tomar δ suficientemente pequeño como para que esté definida ψ_δ.

Definimos $\psi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ mediante

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{si } z \in \Omega_\delta(a) \\ 1 & \text{si } z \in \Omega \setminus \Omega_\delta(a) \end{cases}$$

Es claro que ψ es continua en Ω. Veamos que es superharmónica. Los únicos puntos en los que esto no es evidente son los de $\partial_r\Omega(a)$. Si z_0 es uno de ellos, tomamos un disco $\overline{D(z_0,t)} \subset \Omega$ y una función harmónica h que coincida con ψ en su frontera. Hemos de probar que $h \leq \psi$. Ahora bien, es claro que $h \leq 1$, luego $h \leq \psi_\delta$ en la frontera de $\Omega_\delta(a) \cap D(z_0,t)$, de donde $h \leq \psi_\delta$ en este conjunto y, en definitiva, $h \leq \psi$.

Sea R una cota de f. Entonces $-2R\psi + f(a) - \epsilon$ es subharmónica en Ω. Vamos a probar que está en $\mathcal{P}(f,\Omega)$. Si $w \in \partial_\infty\Omega$ y $|w-a| \geq \delta$, entonces

$$\lim_{z\to w} (-2R\psi(z) + f(a) - \epsilon) = -2R + f(a) - \epsilon < f(w).$$

Si $|w-a| < \delta$ entonces $\overline{\lim_{z\to w}} (-2R\psi(z) + f(a) - \epsilon) \leq f(a) - \epsilon < f(w)$.

Así pues, $-2R\psi + f(a) - \epsilon \in \mathcal{P}(f,\Omega)$ y por consiguiente $-2R\psi + f(a) - \epsilon \leq M_f$.

Un razonamiento análogo prueba que si $w \in \partial_\infty\Omega$ entonces

$$\underline{\lim_{z\to w}} (2R\psi(z) + f(a) + \epsilon) \geq f(w).$$

Por lo tanto, si $u \in \mathcal{P}(f,\Omega)$ se cumple

$$\overline{\lim_{z\to w}}\, u(z) \le \underline{\lim_{z\to w}}\,(2R\psi(z) + f(a) + \epsilon),$$

y el teorema 9.24 implica entonces que $u \le 2R\psi + f(a) + \epsilon$, luego

$$-2R\psi + f(a) - \epsilon \le M_f \le 2R\psi + f(a) + \epsilon.$$

Por consiguiente,

$$-\epsilon \le \underline{\lim_{z\to a}}\,(M_f(z) - f(a)) \le \overline{\lim_{z\to a}}\,(M_f(z) - f(a)) \le \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que existe $\lim_{z\to a} M_f(z) = f(a)$. ∎

Con esto estamos en condiciones de probar el teorema siguiente, que nos permite reconocer fácilmente una gran cantidad de dominios de Dirichlet:

Teorema 9.31 *Sea Ω un abierto conexo y $a \in \partial_\infty\Omega$ tal que la componente conexa de a en $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ no se reduzca a $\{a\}$. Entonces a tiene una barrera en Ω.*

Demostración: Sea S la componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ que contiene a a. Por hipótesis existe $b \in S$ tal que $b \ne a$. Sea M una transformación de Möbius tal que $M(a) = 0$ y $M(b) = \infty$. Entonces $0 \in \partial_\infty M[\Omega]$ y está en la misma componente conexa que ∞ en $\mathbb{C}^\infty \setminus M[\Omega]$. Si 0 tiene una barrera $\{\psi_r\}$ en $M[\Omega]$, entonces las funciones $\{M \circ \psi_r\}$ son una barrera para a en Ω. Notemos que de la propia definición de función superharmónica se sigue sin dificultad que la composición de una transformación de Möbius M con una función superharmónica en un abierto $M[\Omega] \subset \mathbb{C}$ es superharmónica en $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teniendo esto en cuenta, podemos suponer que $a = 0$ y que $\infty \in S$. Sea Ω_0 la componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus S$ que contiene a Ω. Veamos que Ω_0 es simplemente conexo. Cualquier otra componente conexa A de $\mathbb{C}^\infty \setminus S$ es un abierto cuya frontera está contenida en S, luego su clausura es conexa, corta a S y es disjunta de Ω_0. Así pues, $\overline{A} \cup S$ es conexo y disjunto de Ω_0. Claramente $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega_0$ es la unión de todos los conjuntos $\overline{A} \cup S$, y la unión de conexos con intersección común es conexa.

Como $0 \notin \Omega_0$ existe una rama uniforme del logaritmo L en Ω_0. Para cada $r > 0$ y $z \in \Omega_r(0)$ definimos $L_r(z) = L(z) - \log r$. Como 0 está en la componente no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, ninguna circunferencia de centro 0 puede estar contenida en Ω, luego

$$\partial_r\Omega(0) = \{z \in \Omega \mid |z| = r\}$$

es la unión de a lo sumo una cantidad numerable de arcos abiertos disjuntos γ_k. Entonces, $-L_r[\gamma_k] = \{it \mid \alpha_k < t < \beta_k\}$ y, en consecuencia,

$$-L_r[\partial_r\Omega(0)] = i\bigcup_k\,]\alpha_k, \beta_k[\,,$$

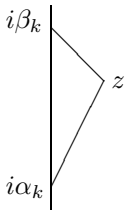
donde los intervalos son disjuntos y la suma de sus longitudes es menor o igual que 2π.

Ahora, si log es el logaritmo con parte imaginaria entre $-\pi$ y π, la función

$$h_k(z) = \operatorname{Im} \log \frac{z - i\alpha_k}{z - i\beta_k}$$

es harmónica en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ (notar que la función de dentro del logaritmo es una transformación de Möbius que deja fijo al semiplano $\operatorname{Re} z > 0$).

Es fácil ver que los argumentos de $z - i\alpha_k$ y $z - i\beta_k$ están entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y el primero es mayor que el segundo (ver la figura). De aquí se sigue que $h_k(z) = \operatorname{Im}(\log(z - i\alpha_k)) - \operatorname{Im}(\log(z - i\beta_k))$ y, en particular, $0 < h_k(z) < \pi$. Esto nos da la expresión integral



$$h_k(z) = \operatorname{Im}\left(i\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\zeta}{z - i\zeta}\right) = \operatorname{Re}\left(\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\zeta}{z - i\zeta}\right)$$

$$= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt = \arctan\frac{y - \alpha_k}{x} - \arctan\frac{y - \beta_k}{x},$$

donde $z = x + iy$. Geométricamente esto se interpreta como que $h_k(z)$ es el ángulo de vértice z en la figura.

Por consiguiente

$$\sum_{k \le n} h_k(z) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt = \pi.$$

Como las funciones h_k son positivas el teorema de Harnack implica que la función

$$h(z) = \sum_k h_k(z)$$

es harmónica en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. La función holomorfa $-L_r$ toma valores en este semiplano, luego podemos definir $\psi_r(z) = h(-L_r(z))/\pi$, que es una función harmónica en $\Omega_r(0)$.

Vamos a probar que las funciones $\{\psi_r\}$ forman una barrera para 0. Puesto que $\operatorname{Re} L_r(z)$ tiende a $-\infty$ cuando z tiende a 0, hemos de probar que h tiende a 0 cuando $\operatorname{Re} z$ tiende a $+\infty$. Ahora bien,

$$h(x+iy) = \sum_k h_k(x+iy) = \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt \le \sum_k \frac{\beta_k - \alpha_k}{x} \le \frac{2\pi}{x}.$$

Sólo queda demostrar que si $w \in \Omega$ y $|w| = r$, entonces

$$\lim_{z \to w} \psi_r(z) = 1.$$

Si, concretamente, w está en el arco γ_k, entonces $-L_r$ transforma cualquier sucesión que tienda a w en una sucesión que tiende a ic, con $\alpha_k < c < \beta_k$, luego basta probar que

$$\lim_{z \to ic} h(z) = \pi, \qquad \text{para } \alpha_k < c < \beta_k.$$

Sea $]\alpha_i, \beta_i[$ un intervalo tal que $\beta_k \leq \alpha_i$. Entonces $\alpha_i - \beta_k$ es mayor o igual que la suma s_i de las longitudes de los intervalos contenidos en $[\beta_k, \alpha_i]$. Definimos $a_i = \beta_k + s_i$ y $b_i = a_i + \beta_i - \alpha_i$. De este modo el intervalo $]a_i, b_i[$ tiene la misma longitud que $]\alpha_i, \beta_i[$ pero $a_i \leq \alpha_i$. Es fácil ver que los intervalos $]a_i, b_i[$ son disjuntos dos a dos y por construcción la unión de todos ellos está contenida en $]\beta_i, \beta_i + 2\pi[$.

Sea g_i la función definida como h_i pero con $]a_i, b_i[$ en lugar de $]\alpha_i, \beta_i[$. La expresión integral muestra que $h_i \leq g_i$ y la suma de todas las funciones h_i con $\beta_k \leq \alpha_i$ es menor o igual que

$$v(x,y) = \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt.$$

Similarmente se razona con los intervalos $]\alpha_i, \beta_i[$ tales que $\beta_i \leq \alpha_k$, de modo que la suma de todas las funciones h_i correspondientes a estos intervalos está mayorada por

$$u(x,y) = \int_{\alpha_k-2\pi}^{\alpha_k} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt.$$

Por lo tanto $0 \leq h(z) - h_k(z) \leq u(z) + v(z)$. Calculando las primitivas (arcos tangentes) se ve inmediatamente que $\lim_{z \to ic} (h(z) - h_k(z)) = 0$.

Por otra parte:

$$\lim_{z \to ic} h_k(z) = \lim_{z \to ic} \left(\arctan \frac{y - \alpha_k}{x} - \arctan \frac{y - \beta_k}{x} \right) = \pi.$$

■

Como consecuencia tenemos:

Teorema 9.32 *Si Ω es un abierto conexo tal que ninguna de las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ consta de un único punto, entonces Ω es un dominio de Dirichlet.*

Puede probarse que la condición no es necesaria, pero abarca todos los casos de interés. Observemos que en particular todo abierto conexo simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio de Dirichlet. En efecto, $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tiene una única componente conexa. Si ésta fuera un punto, habría de ser ∞, luego $\Omega = \mathbb{C}$, pero $\mathbb{C}$ es obviamente un dominio de Dirichlet (las funciones constantes resuelven el problema de Dirichlet para cualquier condición en ∞).

Capítulo X

Funciones enteras

Las funciones enteras figuran entre las funciones holomorfas más sencillas, después de los polinomios, y poseen propiedades que no comparten con las funciones definidas en abiertos contenidos estrictamente en el plano complejo. Además, los resultados sobre funciones enteras pueden aprovecharse en el estudio de funciones meromorfas cancelando los polos adecuadamente. Ya conocemos los hechos básicos sobre las funciones enteras. En el capítulo III probamos que toda función entera f admite un desarrollo en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!}\, z^n, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

y, por otra parte, en el capítulo IV vimos que f admite también una descomposición en producto infinito

$$f(z) = e^{g(z)}\, z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n),$$

donde $g(z)$ es una función entera, $k = o(0, f)$, a_n es la sucesión de los ceros no nulos de f (repetidos tantas veces como su orden), $\{p_n\}$ es cualquier sucesión de números naturales tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

converja para todo número real $r > 0$ y $E_m(z)$ son los factores primarios de Weierstrass dados por

$$E_m(z) = (1-z)e^{\sum_{k=1}^{m} z^k/k}.$$

En este capítulo obtendremos resultados concernientes a la determinación de la sucesión $\{p_n\}$ y de la función $g(z)$ en las factorizaciones de Weierstrass. Por ejemplo, vimos en el capítulo IV que siempre podemos tomar $p_n = n$, pero que en muchos casos sirven sucesiones más simples, como $p_n = 1$ para la función

seno. Respecto a la función $g(z)$ no tenemos ningún resultado general, y en los casos concretos que hemos estudiado (funciones seno, coseno, la inversa de la función factorial) la hemos determinado mediante razonamientos específicos. Aquí obtendremos varios resultados generales de interés sobre estas cuestiones.

10.1 Orden de crecimiento

Sucede que las características de la factorización de Weierstrass de una función entera están relacionadas con su comportamiento asintótico, es decir, con la velocidad con la que crece el módulo cuando z tiende a infinito. Por ello introducimos el concepto siguiente:

Definición 10.1 Sea f una función entera. Para cada $r > 0$ definimos

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

El principio del módulo máximo implica que si f no es constante entonces $M_f(r)$ es una función estrictamente creciente. Por el teorema de Liouville se cumple también que

$$\lim_{r\to+\infty} M_f(r) = +\infty.$$

Vamos a ver que mediante estimaciones de la velocidad de crecimiento de una función f a través de la función $M_f(r)$ podemos obtener mucha información útil sobre f.

Diremos que una función entera f es de *orden finito* si existen un $c > 0$ y un $r_0 > 0$ tales que $M_f(r) < e^{r^c}$ para todo $r > r_0$. En tal caso se llama *orden de crecimiento* de f al ínfimo ρ de los números c que cumplen la condición anterior. Si f no es de orden finito diremos que es de *orden infinito,* y convendremos en que su orden de crecimiento es $\rho = +\infty$.

Es importante notar que el orden de crecimiento ρ de una función de orden finito no tiene por qué ser uno de los números c que cumplen la definición. En principio, que el orden de f sea $\rho < +\infty$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $r_0 > 0$ tal que para todo $r > r_0$ se cumple $M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}$, así como una sucesión $\{r_n\}$ de números positivos convergente a $+\infty$ de modo que $M_f(r_n) \geq e^{r_n^{\rho-\epsilon}}$. Tomando logaritmos estas desigualdades equivalen a

$$\begin{aligned} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} &< \rho + \epsilon, \\ \frac{\log\log M_f(r_n)}{\log r_n} &\geq \rho - \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}.$$

Es fácil ver que esta igualdad vale también si f es de orden infinito.

Ejemplos El lector puede comprobar fácilmente que todo polinomio tiene orden de crecimiento nulo. Para la función exponencial se cumple $M(r) = e^r$, por lo que su orden es 1. Consideremos ahora la función seno. Si $z = x + iy$ es claro que

$$\left|\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \left|\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right|,$$

de donde

$$\frac{e^r - 1}{2} \leq M(r) \leq \frac{e^r + 1}{2},$$

y de aquí se sigue claramente que su orden es 1 también. Un argumento similar se aplica a la función coseno.

Ahora probamos que si $P(z)$ es un polinomio de grado n, entonces la función $f(z) = e^{P(z)}$ tiene orden n.

En efecto, digamos que $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $a_n \neq 0$. Sea $a_k = \sigma_k e^{i\alpha_k}$ y $z = re^{i\theta}$. Entonces

$$|f(z)| = \left|e^{\sum_{k=0}^{n} \sigma_k r^k e^{i(\alpha_k + k\theta)}}\right| = e^{\sum_{k=0}^{n} \sigma_k r^k \cos(\alpha_k + k\theta)}.$$

El exponente puede expresarse en la forma

$$\sigma_n r^n \left(\cos(\alpha_n + n\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\theta)}{\sigma_n\, r^{n-k}}\right). \tag{10.1}$$

La última suma tiende a 0 uniformemente en θ cuando r tiende a $+\infty$, por lo que, dado $\epsilon > 0$, la expresión anterior está finalmente mayorada por $\sigma_n r^n(1+\epsilon)$. Por otra parte, si $\theta = -\alpha_n/n$ tenemos que $\cos(\alpha_n + n\theta) = 1$ y (10.1) es mayor que $\sigma_n r^n(1-\epsilon)$. Esto prueba que

$$e^{\sigma_n r^n(1-\epsilon)} \leq M_f(r) \leq e^{\sigma_n r^n(1+\epsilon)}.$$

Tomando logaritmos dos veces concluimos que el orden de f es igual a n.

Finalmente, es claro que e^{e^z} es un ejemplo de función entera de orden infinito.

■

El teorema siguiente es de gran utilidad para calcular órdenes de crecimiento:

Teorema 10.2 *El la suma y el producto de dos funciones enteras de orden menor o igual que ρ tiene orden menor o igual que ρ.*

Demostración: Sean f y g funciones enteras de orden menor o igual que ρ. Dado $\epsilon > 0$ existe un $r_0 > 0$ tal que si $r > r_0$ entonces $M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon/2}}$, $M_g(r) < e^{r^{\rho+\epsilon/2}}$, luego

$$M_{f+g}(r) \leq M_f(r) + M_g(r) \leq 2e^{r^{\rho+\epsilon/2}}, \qquad M_{fg}(r) \leq M_f(r)M_g(r) \leq e^{2r^{\rho+\epsilon/2}}.$$

Si $k > 0$, se cumple

$$\lim_{r\to+\infty}(r^{\rho+\epsilon} - kr^{\rho+\epsilon/2}) = \lim_{r\to+\infty} r^{\rho+\epsilon/2}(r^{\rho+\epsilon/2} - k)) = +\infty,$$

luego

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{e^{kr^{\rho+\epsilon/2}}}{e^{r^{\rho+\epsilon}}} = 0.$$

Por consiguiente existe un $r_1 > 0$ tal que si $r > r_1$ entonces

$$M_{f+g}(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}, \qquad M_{fg}(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}.$$

Esto prueba que $f + g$ y fg tienen orden menor o igual que ρ. ∎

En otras palabras, las funciones enteras de orden menor o igual que ρ forman una subálgebra de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Notemos también que si f y g tienen órdenes $\rho_1 < \rho_2$, entonces el orden de $f + g$ es exactamente ρ_2, ya que si fuera menor, por el teorema anterior el orden de g sería menor o igual que el de $(f + g) - f$, menor que ρ_2.

Ahora probaremos un par de resultados técnicos que nos permitirán obtener las primeras propiedades de las funciones enteras de orden finito.

Teorema 10.3 *Sea f una función holomorfa en el disco $|z| \le R$ y sea M el máximo de $\operatorname{Re} f(z)$ en la circunferencia $|z| = R$. Supongamos que $f(0) = 0$. Entonces, si $0 < |z| < R$ se cumple*

$$|f(z)| \le \frac{2|z|M}{R - |z|}.$$

Demostración: Consideremos la función

$$F(z) = \frac{f(z)}{z(2M - f(z))},$$

holomorfa en el disco $|z| \le R$. Claramente si $|z| = R$ se cumple

$$|2M - \operatorname{Re} f(z)| \ge M \ge \operatorname{Re} f(z),$$

luego si $f(z) \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \frac{|f(z)|}{|z|\sqrt{\big(2M - \operatorname{Re} f(z)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2}} \\ &\le \frac{|f(z)|}{|z|\sqrt{\big(\operatorname{Re} f(z)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2}} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Si $f(z) = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente.

Por el principio del módulo máximo, $|F(z)| \leq 1/R$ para todo z tal que $|z| \leq R$. Ahora expresamos f en función de F:

$$f(z) = \frac{2MzF(z)}{1 + zF(z)}.$$

Si tomamos módulos y tenemos en cuenta que $|z| < R$ obtenemos la desigualdad del enunciado. ∎

Teorema 10.4 *Sea f una función entera y $\alpha > 0$ un número real. Supongamos que existe un $r_0 > 0$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \leq |z|^\alpha$ para $|z| \geq r_0$. Entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que $E(\alpha)$ (la parte entera de α).*

Demostración: Consideremos la función $g(z) = f(z) - f(0)$. Así tenemos $g(0) = 0$, como exige el teorema anterior. Si $r \geq r_0$, la parte real de g sobre la circunferencia $|z| = r$ está acotada por $M_r = r^\alpha - \operatorname{Re} f(0)$, luego el teorema anterior nos da que si $|z| = r/2$ entonces $|g(z)| \leq 2(r^\alpha - \operatorname{Re} f(0))$.

Si a_m es el coeficiente m-simo de la serie de Taylor de g alrededor de 0, las desigualdades de Cauchy nos dan que

$$|a_m| \leq 2^{m+1} \frac{r^\alpha - \operatorname{Re} f(0)}{r^m}.$$

Pero r puede tomarse arbitrariamente grande, y si $m > \alpha$ esta última expresión tiende a 0. Así pues, $a_m = 0$ para $m > \alpha$ y, en consecuencia, g es un polinomio de grado menor o igual que $E(\alpha)$. Es claro que f también lo es. ∎

Como aplicación tenemos:

Teorema 10.5 *Sea f una función entera de orden finito ρ. Si f no toma nunca un cierto valor A, entonces ρ es un número natural y f es de la forma*

$$f(z) = A + e^{P(z)},$$

donde P es un polinomio de grado ρ.

Demostración: La función $f(z) - A$ no se anula, luego tiene un logaritmo entero $P(z)$, es decir, f es de la forma indicada para una función holomorfa P, que hemos de probar que es un polinomio.

La función $e^{P(z)}$ tiene orden ρ, luego, dado $\epsilon > 0$ existe un $R > 0$ tal que si $|z| = r > R$ entonces $|e^{P(z)}| < e^{r^{\rho+\epsilon}}$, luego $\operatorname{Re} P(z) < |z|^{(\rho+\epsilon)}$ y podemos aplicar el teorema anterior. Por lo tanto P es un polinomio. Antes hemos demostrado que el orden de una función del tipo $e^{P(z)}$ es el grado de $P(z)$, luego éste es igual a ρ. ∎

En particular vemos que, salvo las funciones $A + e^{P(z)}$, todas las funciones enteras de orden finito toman todos los valores complejos. Ahora veremos que, también salvo un caso particular, las funciones de orden finito toman infinitas veces cada valor complejo.

Teorema 10.6 (Teorema de Picard) *Sea f una función entera no polinómica de orden finito ρ. Entonces f toma infinitas veces cada valor complejo salvo quizá un único valor A. Si f toma sólo un número finito de veces el valor A entonces es de la forma $f(z) = A + P(z)e^{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Además en tal caso ρ es un número natural no nulo que coincide con el grado de $Q(z)$.*

Demostración: Supongamos que f toma sólo un número finito de veces el valor A. Entonces la función $f(z)-A$ tiene un número finito de ceros. Podemos construir un polinomio $P(z)$ con los mismos ceros que esta función y con los mismos órdenes. Entonces $(f(z) - A)/P(z)$ es una función entera que no se anula, luego tiene un logaritmo $Q(z)$, es decir, f tiene la forma indicada en el enunciado. Queda por demostrar que $Q(z)$ es un polinomio de grado ρ y que f toma infinitas veces cualquier valor complejo distinto de A.

Claramente $|e^{Q(z)}| \le (|f(z) + A|)/|P(z)| \le |f(z) + A|$ para $|z| = r$ suficientemente grande y, como $f(z) + A$ tiene orden ρ, fijado $\epsilon > 0$, se cumple $|f(z) + A| \le e^{r^{\rho+\epsilon}}$. Esto prueba que el orden de $e^{Q(z)}$ es menor o igual que ρ. Más aún, si $|z|$ es suficientemente grande, $\operatorname{Re} Q(z) \le |z|^{\rho+\epsilon}$. El teorema 10.4 prueba que Q es un polinomio de grado menor o igual que ρ. Por otra parte, el teorema 10.2 nos da que el orden de f es menor o igual que el de $e^{Q(z)}$, luego el grado de $Q(z)$ es exactamente ρ.

Por último veamos que una función del tipo $f(z) = A + P(z)e^{Q(z)}$ toma infinitas veces cualquier valor complejo distinto de A. En caso contrario, si f tampoco tomara infinitas veces un valor B, por la parte ya probada tendríamos que

$$A + P(z)e^{Q(z)} = B + R(z)e^{S(z)}, \tag{10.2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, donde P, Q, R y S son polinomios, Q y S del mismo grado no nulo. Esto equivale a que

$$P(z)e^{Q(z)} - R(z)e^{S(z)} = C \neq 0.$$

Derivando queda

$$\big(P'(z) + P(z)Q'(z)\big)e^{Q(z)} - \big(R'(z) + R(z)S'(z)\big)e^{S(z)} = 0.$$

Si fuera $P'(z) + P(z)Q'(z) = 0$ para todo z, entonces $Q'(z) = -P'(z)/P(z)$ tendría polos en los ceros de P, lo cual es imposible, luego $P'(z) + P(z)Q'(z)$ es un polinomio no nulo y podemos despejar

$$e^{Q(z)-S(z)} = \frac{R'(z) + R(z)S'(z)}{P'(z) + P(z)Q'(z)}.$$

El segundo miembro es una función racional que no tiene ceros ni polos finitos, luego es constante. De aquí que $e^{Q(z)} = Ke^{S(z)}$ para todo z. Así (10.2) se convierte en

$$KP(z) - R(z) = Ce^{-S(z)},$$

y ahora el primer miembro es un polinomio sin ceros, luego es constante, lo que implica que $S(z)$ es constante también , en contradicción con la hipótesis de que f no es un polinomio. ∎

Para el caso de funciones de orden finito, este teorema generaliza a 5.24. En efecto, el teorema de Picard nos dice que la imagen de una función entera de orden finito no sólo es un conjunto denso en $\mathbb{C}$, sino que es todo $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{C}$ menos un punto (en el caso de polinomios es obvio). Más adelante probaremos que esta versión fuerte del teorema de Picard es válida para funciones enteras cualesquiera.

Ya sabemos cómo son las funciones enteras de orden finito con un número finito de ceros. Ahora investigaremos las funciones con infinitos ceros. El primer resultado que probaremos es que en las factorizaciones de Weierstrass es posible tomar factores primarios $E_p(z/a_n)$ con p constante. Conviene introducir una definición.

Definición 10.7 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos no decreciente en módulo y que converja a $+\infty$. Llamaremos *exponente de convergencia* de la sucesión al ínfimo τ de todos los números $\lambda > 0$ tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} < +\infty.$$

Si la serie diverge para todo valor de λ el exponente de convergencia es $\tau = +\infty$.

Llamaremos *orden* de la sucesión κ al mayor número natural λ tal que la serie anterior diverge. Obviamente κ es finito si y sólo si lo es τ. En tal caso $\kappa \leq \tau \leq \kappa + 1$.

El teorema 4.18 asegura que el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n)$$

converge absolutamente a una función entera. Por lo tanto, si $\{a_n\}$ es la sucesión de los ceros no nulos de una función entera f ordenados de modo que la sucesión de los módulos sea no decreciente y repetidos tantas veces como indica su orden, y si además su exponente de convergencia es finito entonces

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n).$$

(Ver el teorema 4.20).

Vamos a probar que la sucesión de los ceros de una función entera de orden finito tiene exponente de convergencia finito. La clave de la demostración nos la da la llamada fórmula de Jensen.

Teorema 10.8 (Fórmula de Jensen) *Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene al disco $|z| \le R$. Supongamos que f no tiene ceros en la circunferencia $|z| = R$ así como que $f(0) \neq 0$. Sean $a_1, \ldots, a_n$ los ceros de f en el disco $|z| < R$ repetidos según sus multiplicidades. Entonces*

$$\log|f(0)| + \sum_{i=1}^{n} \log\frac{R}{|a_i|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función

$$F(z) = f(z)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{R^2 - \overline{a}_i z}{R(z-a_i)}.$$

El producto de los numeradores no tiene ceros en el disco $|z| \le R$, mientras que el producto de los denominadores tiene los mismos ceros que f en orden y posición, luego F es holomorfa y no nula en un abierto que contiene al disco $|z| \le R$. Consecuentemente F tiene un logaritmo holomorfo $\log F$. Su parte real es la función harmónica $\log|F(z)|$, a la que podemos aplicar el teorema del valor medio de Gauss:

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Sobre la circunferencia $|z| = R$ se cumple que $|F(z)| = |f(z)|$, pues todos los factores

$$\frac{R^2 - \overline{a}_i z}{R(z-a_i)}$$

tienen módulo 1 (al multiplicarlos por $\overline{z}/R$ el numerador se convierte en el conjugado del denominador). Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Jensen es inmediata. ∎

Teorema 10.9 *Sea f una función entera de orden finito ρ y sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros no nulos ordenados de modo que sus módulos sean no decrecientes. Entonces el exponente de convergencia de esta sucesión es finito y cumple $\tau \le \rho$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que para cualquier $\lambda > \rho$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\lambda}} \tag{10.3}$$

es convergente.

Si tomamos $\rho < \alpha < \lambda$ la definición de orden nos da que $\log|f(z)| \le |z|^{\alpha}$ siempre que $|z|$ sea suficientemente grande.

Aplicamos la fórmula de Jensen al disco $|z| \le R = 2|a_n| + \epsilon$, donde n se toma de modo que R satisfaga la desigualdad anterior y ϵ de modo que no haya ningún cero a_m tal que $2|a_n| < |a_m| \le 2|a_n| + \epsilon$. El resultado es

$$\sum_{|a_m|<2|a_n|+\epsilon} \log\frac{2|a_n|+\epsilon}{|a_m|} \le (2|a_n|+\epsilon)^{\alpha} - \log|f(0)|.$$

La elección de ϵ nos permite hacerlo tender a 0, con lo que desaparece de la fórmula. Eliminamos también todos los sumandos correspondientes a índices $m > n$. Los restantes cumplen $\log(2|a_n|/|a_m|) \geq \log 2$, luego en total queda $n \log 2 \leq 2^\alpha |a_n|^\alpha - \log|f(0)|$. Por consiguiente

$$n \leq \frac{2^\alpha}{\log 2}\,|a_n|^\alpha - \frac{\log|f(0)|}{\log 2}.$$

Tomamos ahora $\alpha < \beta < \lambda$. La función $x^{\alpha-\beta}$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Como consecuencia, si dividimos el miembro derecho de la desigualdad anterior entre $|a_n|^\beta$ obtenemos una sucesión que tiende a 0 con n, luego para n suficientemente grande se cumple $n < |a_n|^\beta$, luego $|a_n| > n^{1/\beta}$. Finalmente, $|a_n|^\lambda > n^{\lambda/\beta}$, luego (10.3) está mayorada por $\zeta(\lambda/\beta)$. ∎

Aunque aquí no nos va a hacer falta, es interesante notar que el argumento que acabamos de emplear nos da una estimación del número de ceros de una función entera de orden finito en un disco dado. En efecto, si aplicamos la fórmula de Jensen a un disco de radio $2R + \epsilon$, llegamos igualmente a la desigualdad

$$n \leq \frac{2^\alpha}{\log 2}\,R^\alpha - \frac{\log|f(0)|}{\log 2},$$

donde ahora n es el número de ceros de f en el disco $|z| \leq R$ (contados según sus órdenes). Vemos, pues, que n/R^β tiende a 0. Esto prueba el teorema siguiente:

Teorema 10.10 *Sea f una función entera de orden finito ρ y sea $\epsilon > 0$. Entonces el número de ceros de f de módulo menor o igual que R (contando órdenes) es del orden de $R^{\rho+\epsilon}$ (en el sentido de que el cociente permanece acotado).*

Continuamos nuestro estudio de la factorización de funciones enteras.

Teorema 10.11 (Teorema de Hadamard) *Sea f una función entera de orden finito ρ. Sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros no nulos (repetidos según su multiplicidad y ordenados de modo que la sucesión de los módulos es no decreciente). Entonces*

$$f(z) = e^{P(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n).$$

donde, $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que ρ, k es el orden de 0 en f y κ es el orden de la sucesión $\{a_n\}$.

(En principio suponemos que f tiene infinitos ceros, aunque el teorema es trivialmente cierto en caso contrario, con los convenios obvios).

Demostración: Sólo hay que probar que $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que ρ. Llamemos

$$u_n(z) = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i a_n^i},$$

de modo que $E_\kappa(z/a_n) = (1 - z/a_n)e^{u_n(z)}$. Tomemos $R > 1$. Entonces

$$f(z) = z^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P(z)+\sum_{n=0}^{n(R)} u_n(z)} \prod_{n=n(R)+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{u_n(z)},$$

donde $n(R)$ es el mayor número natural n tal que $|a_n| \le R$. Llamaremos $g_R(z)$ a los últimos factores, de modo que

$$f(z) = z^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) g_R(z).$$

Si $|z| = 2R$ se cumple

$$M_f(2R) \ge |f(z)| \ge (2R)^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(\frac{2R - R}{R}\right) |g_R(z)| \ge |g_R(z)|.$$

Así pues, $M_{g_R}(2R) \le M_f(2R)$. Por el principio del módulo máximo, si $|z| < R$ se cumple también $|g_R(z)| \le M_f(2R)$. La función g_R no se anula en el disco $|z| < R$, luego tiene un logaritmo $h_R(z)$. Más precisamente, según 4.3 dicho logaritmo es

$$h_R(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{n(R)} u_n(z) + \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \left(\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + u_n(z)\right). \tag{10.4}$$

De $|g_R(z)| \le M_f(2R)$ se sigue que $\operatorname{Re} h_R(z) \le \log M_f(2R)$, para $|z| < R$. Sea c_n el coeficiente n-simo de la serie de Taylor de $h_R(z)$ alrededor de 0. Sea α_0 la parte real de c_0. Se cumple que $\operatorname{Re}(h_R(z) - c_0) \le \log M_f(2R) - \alpha_0$ y podemos aplicar el teorema 10.3, que nos da, para $|z| = R/2$,

$$|h_R(z) - c_0| \le 2(\log M_f(2R) - \alpha_0).$$

Las desigualdades de Cauchy implican que para $k \ge 1$ se cumple

$$|c_k| \le \frac{2^{k+1}(\log M_f(2R) - \alpha_0)}{R^k}.$$

Llamemos d_k a los coeficientes de la serie de Taylor de $P(z)$ alrededor de 0. Hemos de probar que $d_k = 0$ para $k > \rho$. En la (10.4) podemos desarrollar cada sumando en serie de Taylor alrededor de 0. Como la convergencia es absoluta podemos reordenar los sumandos y concluir que c_k es la suma de los coeficientes k-ésimos de cada una de las series. Si $k > \rho$ los polinomios $u_n(z)$ no contribuyen y queda

$$c_k = d_k - \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \frac{1}{k a_n^k}.$$

Consecuentemente,

$$|d_k| \le \frac{2^{k+1}(\log M_f(2R) - \alpha_0)}{R^k} + \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}.$$

Ahora basta probar que el segundo miembro tiende a 0 cuando R tiende a infinito y k queda fijo. El segundo sumando tiende a 0 porque es la cola de una serie convergente (k es mayor que ρ, que a su vez es mayor que el exponente de convergencia de $\{a_n\}$). Respecto al primero, por definición de orden tenemos que $\log M_f(2R) < (2R)^{\rho+\epsilon}$, para un $\epsilon > 0$ prefijado y todo R suficientemente grande. Tomando $\rho + \epsilon < k$ es claro que el límite es 0. ∎

Ejemplo Como aplicación del teorema de Hadamard vamos a dar una prueba muy sencilla de la factorización de la función seno (teorema 4.9). Como el orden de crecimiento del seno es 1 tenemos la factorización del teorema anterior con $\kappa = 1$ y $P(z) = az+b$ (y $k = 1$). Sólo hay que probar que $a = b = 0$. Ahora bien, es inmediato que la función $f(z) = e^{az+b}$ ha de ser par, es decir $f(z) = f(-z)$, luego $e^{2az} = 1$ para todo z, luego $a = 0$. Evaluando en 0 la función $(\operatorname{sen} z)/z$ y el producto infinito queda que $e^b = 1$, con lo que obtenemos la factorización buscada. ∎

Ahora probamos el recíproco del teorema de Hadamard:

Teorema 10.12 (Teorema de Borel) *Sea f una función entera que admita una factorización*

$$f(z) = e^{P(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n),$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado m y κ es el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ de los ceros de f (que suponemos finito). Sea τ el exponente de convergencia. Entonces f tiene orden finito $\rho = \max\{m, \tau\}$.

Demostración: Si $|z| \le 1/2$ se cumple

$$\begin{aligned} |E_\kappa(z)| &= \left|(1-z)e^{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i}}\right| = \left|e^{\log(1-z)+\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i}}\right| \le \left|e^{-\sum_{i=\kappa+1}^{\infty} \frac{z^i}{i}}\right| \\ &\le e^{|z|^{\kappa+1}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{i+\kappa+1}} \le e^{|z|^{\kappa+1}\sum_{i=0}^{\infty} |z|^i} \le e^{2|z|^{\kappa+1}} \le e^{|z|^\kappa}. \end{aligned}$$

(En los últimos pasos hemos usado que $|z| \le 1/2$).

Si $|z| > 1/2$ hacemos

$$|E_\kappa(z)| \le (1+|z|)e^{|z|^\kappa \sum_{i=0}^{\kappa-1} \frac{1}{|z|^i}} \le (1+|z|)e^{|z|^\kappa \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i} < e^{|2z|^\kappa + \log(1+|z|)}.$$

Tomemos un λ tal que $\kappa \le \tau \le \lambda < \kappa + 1$ y que haga convergente a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}.$$

Es fácil ver que $\log(1+x)/x^\lambda$ tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$, luego las dos desigualdades que hemos probado se reúnen en que $|E_\kappa(z)| < e^{C|z|^\lambda}$,

para una cierta constante C y todo $z \in \mathbb{C}$. Cambiando z por z/a_n queda $|E_\kappa(z/a_n)| < e^{C|z/a_n|^\lambda}$. Es claro entonces que existe una constante K tal que

$$\left|\prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n)\right| < e^{K|z|^\lambda} < e^{|z|^{\lambda+\epsilon}},$$

para cualquier $\epsilon > 0$ prefijado y todo z suficientemente grande. Esto prueba que el orden del producto infinito es menor o igual que λ, pero λ puede tomarse arbitrariamente cerca de τ, por lo que el orden del producto es a lo sumo τ.

Por otra parte el orden de $e^{P(z)}z^k$ es m, luego , según 10.2, el orden de f es $\rho \leq \text{máx}\{m, \tau\}$. La desigualdad opuesta la da el teorema de Hadamard. ∎

Como aplicación tenemos que la inversa de la función factorial tiene orden de crecimiento 1. Basta observar su desarrollo en producto infinito. A su vez esto implica que toma todos los valores complejos. En efecto, de no ser así el teorema 10.5 implicaría que $1/\Pi(z) = A + Be^{Cz}$, para ciertas constantes A, B, C, pero usando que $\Pi(0) = \Pi(1)$ se concluye que $e^C = 1$, con lo que la función $A + Be^{Cz}$ es constante sobre los números enteros, luego no es $1/\Pi$. De aquí se concluye que la función factorial toma todos los valores complejos excepto 0.

Vamos a ver ahora un ejemplo de función entera con orden fraccionario. La factorización de la función coseno es

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Definimos

$$\cos\sqrt{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Se trata de una función entera cuyas sucesión de ceros es $(2n-1)^2(\pi/2)^2$, cuyo exponente de convergencia es $1/2$. El teorema de Borel nos da que el orden de la función es también $1/2$. Como consecuencia obtenemos que la función $\cos\sqrt{z}$ toma infinitas veces todos los valores complejos.

Ejercicio: Probar que la ecuación $\operatorname{sen} z = Az$ tiene infinitas soluciones para cualquier número complejo A.

10.2 El teorema pequeño de Picard

Ya conocemos dos versiones parciales del teorema de Picard. Una es el teorema 5.24, según el cual la imagen de una función entera es densa en $\mathbb{C}$, y la otra es el teorema 10.6, con una hipótesis más restrictiva (orden finito) y una tesis más fuerte (la imagen de $\mathbb{C}$ salvo a lo sumo un punto). En esta sección probaremos que la última conclusión es válida para funciones enteras arbitrarias. La prueba que veremos aquí se basa en una propiedad sorprendente de las funciones holomorfas en un disco. Veamos antes varios resultados auxiliares, el primero de los cuales es una sencilla aplicación del principio del módulo máximo.

Teorema 10.13 (Lema de Schwarz) *Sea f una función holomorfa en el disco unitario $D = D(0,1)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$ y que cumpla además $f(0) = 0$. Entonces se cumple $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$. Además, si $|f'(0)| = 1$ o bien $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ en D, entonces existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cz$ para todo $z \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: La función $g(z) = f(z)/z$ es holomorfa en D. Por el principio del módulo máximo, si $0 < r < 1$ se cumple $|g(z)| \leq 1/r$ para todo z tal que $|z| \leq r$. Fijando z y haciendo tender r a 1 queda que $|g(z)| \leq 1$, o sea, $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si se da una de las igualdades entonces g alcanza su máximo dentro del disco, luego es constante igual a c. Esto nos da que $f(z) = cz$ y, usando de nuevo la igualdad que suponemos, queda $|c| = 1$. ∎

Por el teorema de la aplicación abierta, si una función holomorfa en el disco unitario cumple $f(0) = 0$, su imagen contiene un disco de centro 0. Ahora probamos que el radio de este disco puede calcularse en función de $f'(0)$ y de una cota de f:

Teorema 10.14 *Sea f una función holomorfa en el disco unitario $D = D(0,1)$. Supongamos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$. Entonces $M \geq 1$ y $f[D]$ contiene al disco $D(0, 1/6M)$.*

DEMOSTRACIÓN: Los primeros coeficientes de la serie de Taylor de f en 0 son $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Las desigualdades de Cauchy nos dan que $|a_n| \leq M$, luego en particular para $n = 1$ queda $M \geq 1$. Si $|z| = 1/4M$ se cumple

$$|f(z)| \geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n z^n| \geq \frac{1}{4M} - \sum_{n=2}^{\infty} M \left(\frac{1}{4M}\right)^n = \frac{1}{4M} - (16M-4)^{-1} \geq \frac{1}{6M}.$$

Sea $|w| < 1/6M$. Queremos probar que la función $g(z) = f(z) - w$ tiene un cero. Para ello notamos que si $|z| = 1/4M$ entonces

$$|f(z) - g(z)| = |w| < 1/6M \leq |f(z)|,$$

luego podemos aplicar el teorema de Rouché y concluir que f y g tienen el mismo número de ceros en el disco $D(0, 1/4M)$, pero $f(0) = 0$, luego g también tiene un cero. ∎

Este teorema se generaliza fácilmente a funciones definidas sobre un disco de radio arbitrario:

Teorema 10.15 *Sea g una función holomorfa en $D(0,R)$ que cumpla $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \mu > 0$ y $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in D(0,R)$. Entonces la imagen de g contiene al disco $D(0, R^2\mu^2/6M)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos $f(z) = g(Rz)/\big(Rg'(0)\big)$, definida en $D(0,1)$. Así f es holomorfa en el disco unitario, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq M/\mu R$. El teorema anterior nos da que la imagen de f contiene al disco $D(0, \mu R/6M)$. De aquí se sigue claramente el teorema. ∎

El último resultado que necesitamos es elemental:

Teorema 10.16 *Sea f una función holomorfa en un disco $D(a,r)$ con la propiedad de que $|f'(z)-f'(a)|<|f'(a)|$ para todo $z\neq a$ en dicho disco. Entonces f es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos dos puntos $z_1\neq z_2$ en el disco $D(a,r)$. Entonces

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta)\,d\zeta\right|\geq\left|\int_{z_1}^{z_2} f'(a)\,d\zeta\right|-\left|\int_{z_1}^{z_2}\big(f'(\zeta)-f'(a)\big)\,d\zeta\right|$$

$$\geq |f'(a)|\,|z_1-z_2|-|z_1-z_2|\int_0^1 |f'(tz_1+(1-t)z_2)-f'(a)|\,dt$$

$$=|z_1-z_2|\int_0^1\big(|f'(a)|-|f'(tz_1+(1-t)z_2)-f'(a)|\big)\,dt>0,$$

pues una integral de una función continua positiva es positiva. ∎

Dada una función f holomorfa en un disco, hemos calculado el radio de un disco abierto contenido en su imagen en función de una cota de f en el disco y de su derivada en el centro. Lo sorprendente del teorema que probamos ahora es que podemos prescindir de la cota de f:

Teorema 10.17 (Teorema de Bloch) *Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga al disco cerrado $\overline{D(0,R)}$ y tal que $f'(0)\neq 0$. Entonces existe un disco abierto contenido en $D(0,R)$ en el que f es inyectiva y cuya imagen contiene un disco de radio $R|f'(0)|/72$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $R=1$, $f(0)=0$ y $f'(0)=1$, pues en el caso general consideramos la función $g(z)=\big(f(Rz)-f(0)\big)/Rf'(0)$.

Sea $M(r)=\max\big\{|f'(z)|\;\big|\;|z|=r\big\}$ y sea $h(r)=(1-r)M(r)$. Usando la continuidad uniforme de f es fácil ver que h es continua en $[0,1]$. Claramente $h(0)=1$ y $h(1)=0$. Sea $r_0=\max\{r\mid h(r)=1\}$. Así $h(r_0)=1$, $r_0<1$ y $h(r)<1$ si $r>r_0$.

Tomemos un punto a tal que $|a|=r_0$ y $f'(a)=M(r_0)=1/(1-r_0)$. Sea $\rho_0=(1-r_0)/2$. Si $|z-a|<\rho_0$, entonces $|z|<(1+r_0)/2$ y

$$|f'(z)|\leq M\left(\frac{1+r_0}{2}\right)=h\left(\frac{1+r_0}{2}\right)\frac{2}{1-r_0}<\frac{1}{\rho_0},$$

pues $(1+r_0)/2>r_0$. Consecuentemente

$$|f'(z)-f'(a)|\leq|f'(z)|+|f'(a)|<\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{2\rho_0}=\frac{3}{2\rho_0}. \tag{10.5}$$

Así, la función

$$g(z)=\frac{f'(a+\rho_0 z)-f'(a)}{\frac{3}{2\rho_0}}$$

está en las hipótesis del lema de Schwarz, del que deducimos que

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{3|z-a|}{2\rho_0^2}, \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho_0).$$

(El lema de Schwarz implica que la desigualdad es estricta, ya que si no la desigualdad (10.5) sería una igualdad).

En particular si $z \in D(a,\rho_0/3)$ entonces $|f'(z) - f'(a)| < 1/2\rho_0 = |f'(a)|$. El teorema anterior implica que f es inyectiva en este disco. Veamos que su imagen contiene un disco de radio $1/72$.

Sea $g(z) = f(z+a) - f(a)$, definida en $D(0,\rho_0/3)$ (notar que en este disco $|z+a| < 1$). Entonces $g(0) = 0$, $|g'(0)| = |f'(a)| = 1/2\rho_0$. Si $z \in D(0,\rho_0/3)$ entonces el segmento $[a, z+a]$ está contenido en $D(a,\rho_0/3) \subset D(a,\rho_0)$, donde tenemos probada la desigualdad $|f'(z)| < 1/\rho_0$. Por lo tanto

$$|g(z)| = \left| \int_a^{z+a} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \frac{|z|}{\rho_0} < \frac{1}{3}.$$

El teorema 10.15 nos da que $g\big[D(0,\rho_0/3)\big]$ contiene el disco abierto de centro 0 y radio

$$\frac{\left(\frac{\rho_0}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2\rho_0}\right)^2}{6\ \frac{1}{3}} = \frac{1}{72}.$$

Por lo tanto $f\big[D(a,\rho_0/3)\big]$ contiene el disco $D(f(a),1/72)$. ∎

Tal y como hemos anunciado, de aquí podemos deducir el teorema de Picard. Aislamos algunos cálculos que nos serán útiles más tarde.

Teorema 10.18 *Sea Ω un abierto simplemente conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no tome los valores 0, 1. Entonces existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh(2g(z))}.$$

Además $g[\Omega]$ no contiene discos de radio 1.

Demostración: Los cálculos que siguen son meramente heurísticos: Se ha de cumplir

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh(2g(z))} = e^{i\pi \cosh(2g(z))+1},$$

luego $f(z) = e^{2\pi i F(z)}$, con

$$2F(z) = \cosh(2g(z)) + 1 = \frac{e^{2g(z)} + e^{-2g(z)}}{2} + 1 = \frac{(e^{g(z)} + e^{-g(z)})^2}{2}.$$

Si llamamos $H(z) = e^{g(z)}$, se ha de cumplir $(H(z) + 1/H(z))^2 = 4F$. Despejando se llega a

$$H^2(z) = -1 + 2F(z) \pm 2\sqrt{F(z)}\sqrt{F(z)-1} = (\sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1})^2.$$

Ahora veamos que realmente es posible construir todas estas funciones. Como f no se anula y Ω es simplemente conexo, existe una rama holomorfa del logaritmo de f en Ω, es decir, $f(z) = e^{h(z)}$, para una cierta $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Llamemos $F(z) = h(z)/2\pi i$. Así $f(z) = e^{2i\pi F(z)}$. Como f no toma el valor 1, la función F no puede tomar ningún valor entero.

En particular las funciones $F(z)$ y $F(z) - 1$ no se anulan, luego también tienen ramas holomorfas del logaritmo, con las que a su vez podemos definir ramas holomorfas de la raíz cuadrada, o sea, funciones holomorfas $\sqrt{F(z)}$ y $\sqrt{F(z)-1}$. Definimos $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1}$. Es claro que H no se anula, luego también tiene una rama holomorfa del logaritmo, es decir, $H(z) = e^{g(z)}$. Ahora los cálculos anteriores justifican que $f(z)$ y $g(z)$ satisfacen la relación indicada.

El resto del teorema es la parte más delicada. Sean n y m números enteros, con $n > 0$. Supongamos que existe un punto $a \in \Omega$ tal que $g(a)$ es de la forma

$$\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + im\,\frac{\pi}{2}. \tag{10.6}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\cosh(2g(a)) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} \\ &= e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2} \\ &= (-1)^m\big((\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2\big) \\ &= (-1)^m\big(2(2n-1)\big), \end{aligned}$$

luego $\cosh(2g(a)) = (-1)^m(2n-1)$, pero esto implica $f(a) = 1$. Concluimos que $g(a)$ no toma valores de la forma (10.6). Estos puntos forman los vértices de una red de rectángulos que cubren el plano. La altura de los rectángulos es

$$|(m+1)\pi/2 - m\pi/2| = \pi/2 < \sqrt{3}.$$

La anchura (variable) es

$$\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}).$$

Es fácil ver que esta función de n es decreciente (la derivada de la función $\log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ es decreciente, luego la derivada de la función completa es negativa). Por lo tanto la anchura de cualquiera de los rectángulos es menor que la del primero ($n = 1$), y ésta es $\log(1 + \sqrt{2}) < \log e = 1$. En consecuencia, la diagonal de cualquiera de los rectángulos es menor que 2.

Ahora es claro que cualquier punto del plano complejo dista menos de una unidad de uno de los puntos considerados, y como ninguno de ellos está en la imagen de g, concluimos que ésta no puede contener discos de radio 1. ∎

Teorema 10.19 (Teorema pequeño de Picard) *Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción.*

DEMOSTRACIÓN: Si una función entera u no toma los valores a y b, entonces la función entera

$$f(z) = \frac{u(z) - a}{b - a}$$

no toma los valores 0, 1. Según el teorema anterior existe una función entera g (no constante) cuya imagen no contiene ningún disco de radio 1.

Como no es constante existe un punto z_0 tal que $g'(z_0) \neq 0$. Así, la función entera $h(z) = g(z + z_0)$ cumple $h'(0) \neq 0$ y su imagen tampoco contiene discos de radio 1.

Sin embargo el teorema de Bloch nos da que dicha imagen contiene discos de radio $R|h'(0)|/72$ para cualquier $R > 0$, con lo que tenemos una contradicción. ∎

10.3 El teorema grande de Picard

Los razonamientos de la sección anterior pueden refinarse para obtener un resultado mucho más general. Una función entera no polinómica tiene una singularidad esencial en el infinito y sucede que el teorema de Picard vale para funciones holomorfas arbitrarias, no necesariamente enteras, alrededor de una singularidad esencial. Más aún, probaremos que, alrededor de una singularidad esencial, una función holomorfa toma infinitas veces cada valor complejo, con a lo sumo una excepción.

Teorema 10.20 (Teorema de Schottky) *Para cada par de números reales α, β que cumplan $0 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta \leq 1$, existe una constante $C(\alpha, \beta)$ de modo que si f es una función holomorfa en un abierto que contenga un disco cerrado $\overline{D(a, R)}$, que no tome los valores 0, 1 y tal que $|f(a)| \leq \alpha$, entonces $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ siempre que $|z - a| \leq \beta R$.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando f por $f(a + Rz)$ podemos suponer que $a = 0$ y $R = 1$. También es claro que podemos suponer $\alpha \geq 2$ y que el dominio de f es un disco abierto de centro 0. Entonces f se encuentra en las hipótesis del teorema 10.18. Consideremos las funciones h, F, H y g que aparecen en la demostración. Recordemos que h es cualquier rama uniforme del logaritmo de f, luego podemos suponer $0 \leq \operatorname{Im} h(0) < 2\pi$. Igualmente, g es cualquier rama del logaritmo de H, luego podemos suponer $0 \leq \operatorname{Im} g(0) < 2\pi$. Distinguimos dos casos:

CASO 1: $|f(0)| \geq 1/2$. Entonces

$$|F(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\, h(0)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\log|f(0)| + \operatorname{Im} h(0)\right| \leq \frac{\log\alpha}{2\pi} + 1.$$

Sea $C_0(\alpha) = (1/2\pi)\,|\log\alpha| + 2$. También se cumple

$$\left|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}\right| \leq |F(0)|^{1/2} + |F(0) - 1|^{1/2} \leq 2C_0(\alpha)^{1/2}.$$

Llamemos $C_1(\alpha) = 2C_0(\alpha)^{1/2}$. Así, si $|H(0)| \geq 1$ entonces

$$|g(0)| = \big|\log|H(0)| + i\,\mathrm{Im}\,g(0)\big| \leq \log|H(0)| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi,$$

y lo mismo es válido si $|H(0)| < 1$:

$$\begin{aligned} |g(0)| &\leq -\log|H(0)| + 2\pi = \log\frac{1}{|H(0)|} + 2\pi \\ &= \log\big|\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0)-1}\big| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

Sea, pues, $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$. Para cada $a < 1$, el teorema de Bloch aplicado a una traslación de g implica que $g\big[D(a, 1-|a|)\big]$ contiene un disco abierto de radio $(1-|a|)g'(a)/72$. Por otro lado el teorema 10.18 afirma que $g\big[D(0,1)\big]$ no contiene discos de radio 1, luego deducimos que

$$|g'(a)| \leq \frac{72}{1-|a|},$$

para todo $a \in D(0,1)$. Así pues,

$$|g(a)| \leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + \left|\int_0^a g'(\zeta)\,d\zeta\right| \leq C_2(\alpha) + \frac{72|a|}{1-|a|}.$$

Definimos $C : 3(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + 72\beta/(1-\beta)$. Hemos probado que si $|z| \leq \beta$ entonces $|g(z)| \leq C_3(\beta)$. Por consiguiente, si $|z| \leq \beta$ se cumple también

$$|f(z)| = |e^{i\pi\cosh(2g(z))}| \leq e^{\pi|\cosh(2g(z))|} \leq e^{\pi e^{2|g(z)|}} \leq e^{\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}}.$$

Llamamos $C_4(\alpha, \beta)$ a esta última constante.

Caso 2: Supongamos que $0 < |f(0)| < 1/2$. Entonces la función $1-f$ está en las condiciones del caso 1, pues no toma los valores 0 y 1 y $1/2 \leq |1-f(0)| \leq 2$. Por lo tanto

$$|1 - f(z)| \leq C_4(2, \beta) \qquad \text{siempre que } |z| \leq \beta.$$

Esto implica que $|f(z)| \leq 1 + C_4(2,\beta)$ y el teorema se cumple con

$$C(\alpha, \beta) = \max\{C_4(\alpha, \beta), 1 + C_4(2, \beta)\}.$$

■

De aquí deducimos el resultado clave para probar el teorema grande de Picard:

Teorema 10.21 (Teorema de Montel-Caratheodory) *Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que no tomen los valores 0, 1. Entonces toda sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$ o bien una subsucesión que converge casi uniformemente a ∞ en Ω.*[1]

[1] Análogamente a la definición que dimos para funciones harmónicas, una sucesión de funciones holomorfas en Ω converge casi uniformemente a ∞ si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $M > 0$ existe un natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$ se cumple $|f(z)| \geq M$. En realidad el teorema afirma que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en el espacio de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}^\infty$, pero no hemos definido la topología de la convergencia casi uniforme en este espacio.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$ y descompongamos $\mathcal{F}$ en la unión de dos subconjuntos:

$$A = \big\{f \in \mathcal{F} \;\big|\; |f(z_0)| \leq 1\big\} \qquad \text{y} \qquad B = \big\{f \in \mathcal{F} \;\big|\; |f(z_0)| \geq 1\big\}.$$

Toda sucesión en f tiene una subsucesión en A o en B, luego basta probar que ambos conjuntos cumplen el teorema. Para el caso de A es suficiente probar que A es relativamente compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$ y por el teorema de Montel basta probar que A está casi uniformemente acotado, es decir, que todo punto posee un entorno donde las funciones de A están uniformemente acotadas. Para probarlo consideremos el conjunto G de los puntos $z \in \Omega$ tales que las funciones de A están uniformemente acotadas en un entorno de z. Por definición G es abierto. Dado que Ω es conexo, basta probar que es también cerrado en Ω. Si $w \in \Omega$ es un punto de su clausura, es claro que existe un $a \in G$ tal que $w \in D(a, R) \subset \Omega$ para cierto radio $R > 0$. Puesto que $a \in G$ existe un $\alpha > 0$ tal que $|f(a)| \leq \alpha$ para toda función $f \in A$. El teorema anterior nos da que las funciones de A están uniformemente acotadas en $D(a, R)$, luego $w \in G$. Observar que el teorema anterior, juntamente con la definición de A implica que $G \neq \varnothing$.

Ahora consideremos el conjunto B. Si $f \in B$ entonces $1/f$ es holomorfa en Ω, porque f no se anula. Así mismo $1/f$ no toma los valores 0, 1 y $|(1/f)(z_0)| \leq 1$, luego $1/f \in A$. Por lo tanto, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en B, la sucesión $\{1/f_n\}$ está contenida en A, luego tiene una subsucesión convergente a una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. El teorema 8.18 implica que f es idénticamente nula o bien no tiene ceros en Ω. En el primer caso es fácil ver que la subsucesión converge casi uniformemente a ∞, en el segundo caso la subsucesión converge a la función holomorfa $1/f$. ∎

Teorema 10.22 (Teorema grande de Picard) *Sea f una función holomorfa con una singularidad esencial en un punto z_0. Entonces f toma infinitas veces cada valor complejo en cualquier entorno reducido de z_0, con a lo sumo una excepción.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que no perdemos generalidad si suponemos que $z_0 = 0$. Así mismo, si suponemos que f no toma dos valores complejos en un entorno reducido $\Omega = D'(0, r)$, podemos suponer que estos valores son 0, 1 (ver la prueba del teorema 10.19).

Sea f_n la función definida en Ω mediante $f_n(z) = f(z/n)$. Así cada f_n es holomorfa y no toma los valores 0, 1. Por el teorema anterior existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente en la circunferencia $|z| = r/2$, ya sea a una función g holomorfa en Ω, ya sea a ∞.

En el primer caso sea M el máximo de g en la circunferencia. Tenemos que

$$|f(z/n_k)| \leq |f_{n_k}(z) - g(z)| + |g(z)| \leq 2M,$$

para todo n_k suficientemente grande, luego $|f(z)| \leq 2M$ si $|z| = r/2n_k$. Por el principio del módulo máximo concluimos que f está acotada por $2M$ en los anillos $A(r/2n_{k+1}, r/2n_k)$, para k suficientemente grande, pero esto implica que

$|f(z)| \leq 2M$ en un cierto entorno reducido $D'(0, r/2n_k)$. A su vez de aquí se sigue que f es holomorfa en 0.

En el segundo caso se razona de forma similar que $1/f$ tiende a 0 en 0, con lo que f tiene un polo en 0.

Con esta doble contradicción hemos probado que f toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción en cualquier entorno reducido de 0. Si f toma un valor sólo una cantidad finita de veces en un entorno reducido, tomando un entorno más pequeño obtenemos que f no toma dicho valor, luego eso sólo puede ocurrir en el caso excepcional. ∎

De aquí se sigue la versión fuerte del teorema pequeño de Picard:

Teorema 10.23 *Una función entera no polinómica toma infinitas veces cada valor complejo con a lo sumo una excepción.*

Demostración: Dada f, basta considerar la función $f(1/z)$, que tiene una singularidad esencial en 0. ∎

El teorema de Picard tiene una consecuencia similar para funciones meromorfas:

Teorema 10.24 *Una función meromorfa toma todos los valores complejos con a lo sumo dos excepciones.*

Demostración: Supongamos que f es una función meromorfa (en $\mathbb{C}$) que no toma los valores a, b, c. Entonces la función $1/(f(z) - c)$ es una función meromorfa sin polos, es decir, entera, y no toma los valores $1/(a-c)$ y $1/(b-c)$, lo cual es imposible. ∎

Observar que $1/(1 - e^z)$ es una función meromorfa que no toma los valores 0 y 1. El lector puede refinar el argumento anterior y probar que las funciones meromorfas no racionales toman infinitas veces cada valor complejo con a lo sumo dos excepciones.

Capítulo XI

La función dseta de Hurwitz

En este capítulo estudiaremos sistemáticamente la función dseta de Riemann de modo similar a como en el capítulo VI estudiamos la función factorial. Veremos que la función dseta está muy relacionada con una función entera que nos permitirá aplicar los resultados que obtuvimos en el tema anterior. En realidad no trabajaremos con la función dseta de Riemann, sino con una generalización debida a Hurwitz, gracias a la cual nuestros resultados se aplicarán sin mayor esfuerzo a las funciones L de Dirichlet que introdujimos en el capítulo VII junto a la función dseta.

11.1 Definición y prolongación analítica

Recordemos la notación que ya empleamos en el capítulo VII, según la cual representaremos la variable compleja por $s = \sigma + i\tau$ en lugar de $z = x + iy$. La función dseta de Hurwitz no es exactamente una serie de Dirichlet, pero la diferencia es muy pequeña:

Definición 11.1 Para cada número real $0 < a \leq 1$ definimos la *función dseta de Hurwitz* como

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Si $\delta > 0$, $n \geq 1$ y $\sigma \geq 1+\delta$ se cumple claramente

$$\left|\frac{1}{(n+a)^s}\right| \leq \frac{1}{(n+a)^\sigma} \leq \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

El teorema de mayoración de Weierstrass implica que la serie $\zeta(s,a)$ converge uniformemente en cada semiplano $\sigma \geq 1+\delta$, luego define una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 1$.

La función dseta de Riemann es el caso particular $\zeta(s) = \zeta(s,1)$. Como ya hemos dicho, también podemos obtener las funciones L de Dirichlet. En efecto, si χ es un carácter módulo m entonces

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\chi(r)}{(qm+r)^s} = \frac{1}{m^s}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\sum_{q=0}^{\infty}\Big(q+\frac{r}{m}\Big)^{-s} \\ &= \frac{1}{m^s}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta(s,r/m). \end{aligned}$$

La función dseta y las funciones L tienen varias propiedades comunes no triviales. El tratamiento conjunto de ambas funciones mediante la función de Hurwitz nos evitará repetir los argumentos para uno y otro caso. Por ejemplo, si probamos que la función de Hurwitz admite una prolongación analítica a todo el plano complejo, las igualdades anteriores probarán que lo mismo es válido para la función de Riemann y para las funciones L.

Para conseguir dicha prolongación partiremos de una expresión integral para la función dseta. El argumento es una generalización simple del trabajo de Riemann.

Teorema 11.2 *En el semiplano $\sigma > 1$ se cumple*

$$\Pi(s-1)\zeta(s,a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Demostración: Veamos primero la igualdad cuando s es real. Entonces, haciendo $x = (n+a)t$ en la expresión integral de la función factorial tenemos

$$\Pi(s-1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx = (n+a)^s \int_0^{+\infty} e^{-(n+a)t}t^{s-1}\,dt,$$

luego

$$\frac{\Pi(s-1)}{(n+a)^s} = \int_0^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}\,dt$$

y, sumando en n, queda

$$\Pi(s-1)\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}\,dt.$$

Como los integrandos son positivos, el teorema de convergencia monótona nos permite intercambiar la suma con la integral. Observar que la serie de los integrandos es geométrica y suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1} = \frac{e^{-at}t^{s-1}}{1-e^{-t}}.$$

Al hacer el cambio queda la fórmula buscada. Para probar la igualdad cuando s no es real basta probar que la integral es una función holomorfa de s.

Para ello basta mayorar el integrando por una función integrable independiente de s. Podemos hacerlo separadamente para x en $]0,1[$ y en $]1,+\infty[$. En general tenemos

$$\left|\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right| = \frac{x^{\sigma-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}.$$

Si $0 < x \leq 1$ entonces $x^{\sigma-1} \leq x^{\delta}$, luego

$$\frac{x^{\sigma-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} \leq \frac{x^{\delta}e^{(1-a)x}}{e^x-1} \leq e^{1-a}x^{\delta-1}.$$

(Primero hemos multiplicado numerador y denominador por e^x y luego hemos usado que $e^x - 1 \geq x$.) La última expresión es ciertamente integrable en $]0,1[$.

Si $1 \leq x$ entonces $x^{\sigma-1} \leq x^{c-1}$, luego

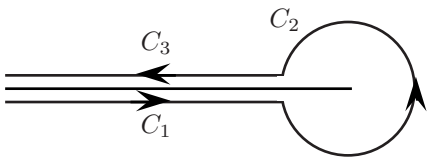
$$\frac{x^{\sigma-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} \leq \frac{x^{c-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}},$$

y el último término es integrable en $]0,+\infty[$ (la integral es $\Pi(c-1)\zeta(c,a)$). ∎

La función factorial tiene una prolongación analítica (meromorfa) a todo el plano complejo. Ahora probaremos que a la integral le ocurre lo mismo, de donde obtendremos la prolongación analítica de la función dseta.

Teorema 11.3 *Sea $0 < c < 2\pi$ y sea C la unión de las curvas C_1, C_2, C_3 dadas por*

$$\begin{array}{lcll} C_1 & \equiv & z = re^{-\pi i}, & r \in [c,+\infty[\,, \\ C_2 & \equiv & z = ce^{i\theta}, & \theta \in [-\pi,\pi], \\ C_3 & \equiv & z = re^{\pi i}, & r \in [c,+\infty[\,. \end{array}$$



Sea $0 < a \leq 1$. Entonces la función

$$I(s,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^s e^{az}}{1-e^z}\,dz$$

es entera y en el semiplano $\sigma > 1$ se cumple

$$\zeta(s,a) = \Pi(-s)I(s-1,a).$$

Hay que entender que $z^s = e^{s\log z}$ se calcula con el logaritmo de parte imaginaria $-\pi$ sobre C_1, con parte imaginaria en $]-\pi,\pi[$ sobre C_2 y con parte imaginaria π sobre C_3.

Demostración: La integral sobre C_2 es claramente entera. Para las otras dos hay que probar que los límites son uniformes cuando $|s| \leq M$. Sobre C_1, es decir, $z = re^{-\pi i}$, tenemos

$$|z^s| = |e^{s\log z}| = |e^{s(\log|z|-i\pi)}| = |e^{s\log r}|\,|e^{-i\pi(\sigma+i\tau)}| = r^s e^{\tau\pi} \leq r^M e^{\pi M}.$$

Sobre C_3 se cumple $|z^s| = r^s|e^{i\pi(\sigma+i\tau)}| = r^s e^{-\tau\pi} \le r^M e^{\pi M}$. En cualquier caso, si $r \ge 1$ (y $z = -r$) queda

$$\left|\frac{z^s e^{az}}{1-e^z}\right| \le \frac{r^M e^{\pi M} e^{-ar}}{1-e^{-r}} = \frac{r^M e^{\pi M} e^{(1-a)r}}{e^r - 1}.$$

Ahora usamos que $e^r - 1 > e^r/2$ si $r > \log 2$, lo que nos permite acotar la expresión anterior por $Ar^M e^{-ar}$, donde A es una constante que depende de M, pero no de r, y la función $r^M e^{-ar}$ es integrable en $[c, +\infty[$ (con el cambio $x = ar$ se acota por el integrando de Π). Esto prueba la convergencia uniforme.

Veamos la igualdad del enunciado. Llamamos $g(z) = e^{az}/(1-e^z)$. Así tenemos que

$$2\pi i\, I(s-1,a) = \int_C z^{s-1} g(z)\, dz.$$

Sobre C_1 y C_3 tenemos que $g(z) = g(-r)$. Sobre C_1 además

$$z^{s-1} = e^{(s-1)\log z} = e^{(s-1)(\log r - i\pi)} = r^{s-1}e^{-(s-1)i\pi} = -r^{s-1}e^{-\pi i s}.$$

Análogamente, sobre C_3 queda $z^{s-1} = -r^{s-1}e^{\pi i s}$. Uniendo todo esto obtenemos

$$\begin{aligned}
2\pi i\, I(s-1,a) &= \int_{-\infty}^{c} -r^{s-1}e^{-\pi i s} g(-r)(-1)\, dr \\
&+ i\int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1}e^{(s-1)i\theta} ce^{i\theta} g(ce^{i\theta})\, d\theta \\
&+ \int_{c}^{+\infty} -r^{s-1}e^{\pi i s} g(-r)(-1)\, dr \\
&= (-e^{-\pi i s} + e^{\pi i s}) \int_c^{+\infty} r^{s-1} g(-r)\, dr + ic^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{si\theta} g(ce^{i\theta})\, d\theta \\
&= 2i(\operatorname{sen}\pi s) \int_c^{+\infty} r^{s-1} g(-r)\, dr + ic^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{si\theta} g(ce^{i\theta})\, d\theta.
\end{aligned}$$

Dividimos entre $2i$ y resulta una expresión de la forma

$$\pi\, I(s-1,a) = (\operatorname{sen}\pi s) I_1(s,c) + I_2(s,c).$$

Ahora observamos que, según el teorema anterior,

$$\lim_{c\to 0} I_1(s,c) = \int_0^{+\infty} r^{s-1} g(-r)\, dr = \Pi(s-1)\zeta(s,a).$$

Veamos que $\lim_{c\to 0} I_2(s,c) = 0$. Para ello notamos que la función $g(z)$ es holomorfa en el disco $|z| < 2\pi$ salvo en $z = 0$, donde tiene un polo simple. En consecuencia la función $zg(z)$ es holomorfa en dicho disco y en particular está acotada. Sea A una constante tal que $|g(z)| \le A/|z|$ para $0 < |z| < 2\pi$. En particular si $|z| = c$ tenemos

$$|I_2(s,c)| \le \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\tau\theta}(A/c)\, d\theta \le A\pi e^{\pi|\tau|} c^{\sigma-1},$$

luego ciertamente tiende a 0 con c.

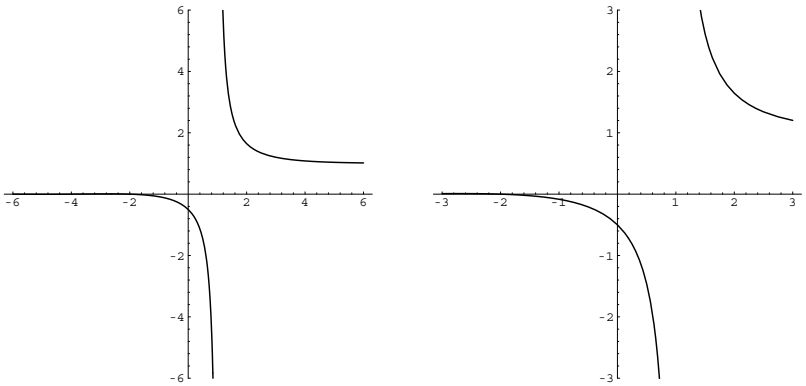
De este modo llegamos a que $\pi\, I(s-1,a) = (\operatorname{sen}\pi s)\Pi(s-1)\zeta(s,a)$. Por último usamos el teorema 6.8 para obtener $\zeta(s,a) = \Pi(-s)I(s-1,a)$. ∎

Definición 11.4 En lo sucesivo llamaremos *función dseta de Hurwitz* a la prolongación analítica de la función definida en 11.1 determinada por la ecuación

$$\zeta(s,a) = \Pi(-s)I(s-1,a), \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{C}.$$

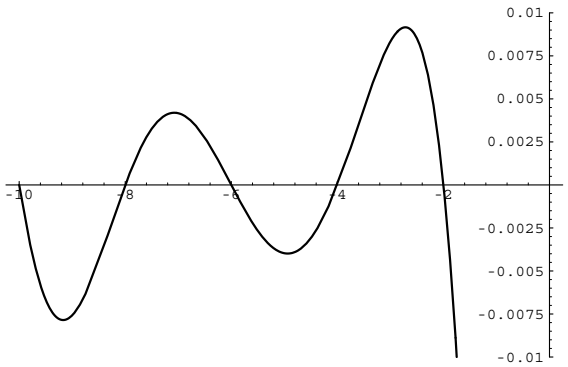
Como la función $I(s,a)$ es entera, concluimos que $\zeta(s,a)$ es una función meromorfa con polos a lo sumo en los puntos donde $\Pi(-s)$ tiene polos, es decir, en los números naturales no nulos. Por otra parte la representación en serie dada en la definición 11.1 muestra que $\zeta(s,a)$ es holomorfa en el semiplano $\sigma > 1$, luego a lo sumo tiene un polo en el punto $s = 1$. Incidentalmente esto prueba que $I(n,a) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

En particular llamaremos función dseta de Riemann a la función $\zeta(s) = \zeta(s,1)$, que extiende a la que definimos en el capítulo VII. El teorema 7.10 nos permite afirmar que en este caso $\zeta(s)$ es holomorfa en todo el plano complejo excepto en $s = 1$, donde tiene un polo simple con residuo 1. Éste es su aspecto sobre el eje real:



Estas gráficas contienen mucha información que todavía no sabemos demostrar. En primer lugar suponen que la función dseta es real sobre el eje real. Más concretamente, la segunda gráfica permite conjeturar que $\zeta(0) = -1/2$. Respecto al comportamiento a partir de -2 las figuras ya no tienen la precisión suficiente para concluir nada. En la página siguiente vemos una ampliación de esa zona, en la que podemos observar que la función dseta se anula en los números pares negativos. Probaremos estos hechos a partir de algunos resultados generales sobre la función de Hurwitz.

El valor de la función dseta sobre cada número entero n puede determinarse con facilidad observando que, en la integral que define la función I, el número z^n no depende de la rama del logaritmo con que se calcule la potencia, pues siempre es el valor algebraico usual. Esto hace que la integral sobre C_1 sea exactamente la misma que sobre C_3 salvo que tienen sentidos opuestos, luego ambas se cancelan y queda



$$I(n,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=c} \frac{z^n e^{az}}{1-e^z}\,dz = \operatorname{Res}\left(\frac{z^n e^{az}}{1-e^z}, 0\right).$$

Si ahora tenemos en cuenta la definición 4.23 de los polinomios de Bernoulli es claro que

$$I(n,a) = \operatorname{Res}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-B_k(a)}{k!}\, z^{k+n-1}, 0\right)$$

De aquí obtenemos de nuevo que $I(n,a) = 0$ si $n \geq 1$, pues es en tal caso la función que aparece es holomorfa en 0, y así mismo es claro que si $n \geq 0$ entonces

$$I(-n,a) = -\frac{B_n(a)}{n!}$$

Teniendo en cuenta que $B_0(x) = 1$ obtenemos en particular que $I(0,a) = -1$.

Esto nos permite calcular el residuo en 1 de la función de Hurwitz. En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\zeta(s,a),1) &= \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s,a) = \lim_{s\to 1} -(-s+1)\Pi(-s)I(s-1,a)\\ &= \lim_{s\to 1} -\Pi(-s+1)I(s-1,a) = -\Pi(0)I(0,a) = 1.\end{aligned}$$

También hemos probado que

$$\zeta(-n,a) = \Pi(n)I(-n-1,a) = -n!\frac{B_{n+1}(a)}{(n+1)!} = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}.$$

Resumimos todos estos hechos en un teorema:

Teorema 11.5 *Para todo número real $0 < a \leq 1$, la función dseta de Hurwitz $\zeta(s,a)$ es holomorfa en todo el plano complejo excepto en $s = 1$, donde tiene un polo simple con residuo 1. Además para todo número natural n se cumple $\zeta(-n,a) = -B_{n+1}(a)/(n+1)$, donde $B_{n+1}(x)$ es el polinomio de Bernoulli.*

En particular, teniendo en cuenta 4.26, obtenemos

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}(1)}{n+1} = -\frac{B_{n+1}}{n+1},$$

lo que prueba por fin que $\zeta(-2n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, ya que $B_{2n+1} = 0$. También deducimos que $\zeta(0) = -B_1(1) = -1/2$, como mostraban las gráficas.

11.2 La ecuación funcional

En esta sección probaremos la fórmula de Hurwitz, de la que deduciremos una ecuación funcional para la función dseta, de la cual a su vez obtendremos toda la información que contienen las gráficas que hemos visto y mucha más. Comenzamos con un resultado técnico auxiliar.

Teorema 11.6 *Sea $\Omega(r)$ el abierto que resulta de eliminar del plano complejo los círculos de centro cada punto $2n\pi i$, para $n \in \mathbb{Z}$ y radio $r < \pi$. Sea a un número real tal que $0 < a \leq 1$. Entonces la función $g(z) = e^{az}/(1-e^z)$ está acotada en $\Omega(r)$.*

Demostración: Designemos por $z = x + iy$ las partes real e imaginaria de z. Sea

$$Q(r) = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |x| \leq 1,\ |y| \leq \pi,\ |z| \geq r\big\}.$$

Claramente $Q(r)$ es un compacto en el que $g(z)$ es continua, luego está acotada. Como $|g(z)| = |g(z + 2\pi i)|$, tenemos que g está acotada en toda la banda agujereada

$$\big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |x| \leq 1,\ |z - 2n\pi i| \geq r \text{ para } n \in \mathbb{Z}\big\}.$$

En consecuencia basta probar que la función g está acotada fuera de esta banda, es decir, si $|x| \geq 1$. En general tenemos

$$|g(z)| = \left|\frac{e^{az}}{1-e^z}\right| = \frac{e^{ax}}{|1-e^z|} \leq \frac{e^{ax}}{|1-e^x|}.$$

Si $x \geq 1$ entonces $|1 - e^x| = e^x - 1$ y $e^{ax} \leq e^x$, luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

Si $x \leq -1$ entonces $|1 - e^x| = 1 - e^x$, luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^{ax}}{1 - e^x} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

Así pues, si $|x| \geq 1$ se cumple $|g(z)| \leq e/(e-1)$. ∎

En la fórmula de Hurwitz aparece la siguiente serie de Dirichlet:

Definición 11.7 Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$F(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^s}.$$

Por el teorema 7.9 la serie $F(x, s)$ converge absolutamente en el semiplano $\sigma > 1$.

Claramente $F(x,s)$ es periódica en x, de periodo 1. Si x es entero entonces $F(x,s) = \zeta(s)$, mientras que si x no es entero entonces la sucesión $e^{2\pi inx}$ es geométrica y sus sumas parciales están acotadas:

$$\left|\frac{e^{2\pi inx}-1}{e^{2\pi ix}-1}\right| \le \frac{2}{|e^{2\pi ix}-1|},$$

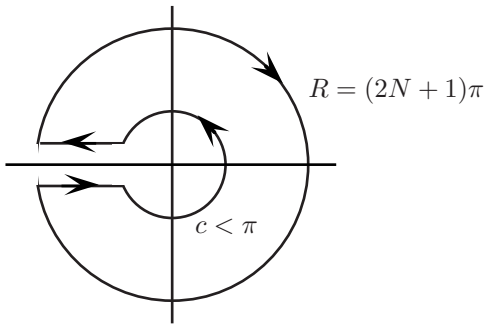
luego el teorema 7.9 nos da también que $F(x,s)$ converge condicionalmente en el semiplano $s > 0$.

Teorema 11.8 (Fórmula de Hurwitz) *Si $0 < a \le 1$ y $\sigma > 1$, entonces*

$$\zeta(1-s,a) = \frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}\big(e^{-\pi is/2}F(a,s) + e^{\pi is/2}F(-a,s)\big).$$

Si $a \ne 1$ la fórmula es válida en el semiplano $\sigma > 0$.

Demostración: Para cada número natural N consideramos el arco $C(N)$ descrito en la figura:



Definimos

$$I_N(s,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)} \frac{z^s e^{az}}{1-e^z}\,dz,$$

entendiendo que el logaritmo que define a z^s toma parte imaginaria π sobre el tramo horizontal superior, pasa de π a $-\pi$ por la circunferencia exterior, vale $-\pi$ en el tramo horizontal inferior y pasa de $-\pi$ a π por la circunferencia interior.

Veamos que cuando $\sigma < -1$ la integral sobre la circunferencia exterior tiende a 0 con N. En efecto, sobre ella tenemos $z = Re^{i\theta}$, con $-\pi \le \theta \le \pi$. Entonces

$$|z^s| = R^\sigma e^{-\tau\theta} \le R^\sigma e^{\pi|\tau|}.$$

La circunferencia exterior, para cualquier N, está contenida en un conjunto $\Omega(r)$ de los considerados en el teorema 11.6, para cualquier r fijo, con lo que podemos acotar el integrando: $|z^s g(z)| \le AR^\sigma e^{\pi|\tau|}$ y la integral está acotada por $2\pi AR^{\sigma+1}e^{\pi|\tau|}$, que tiende a 0 con N si $\sigma < -1$.

Así pues, teniendo en cuenta la definición de $I(s,a)$ concluimos que

$$I(s,a) = \lim_N I_N(s,a), \qquad \text{para } \sigma < -1.$$

Equivalentemente:

$$I(-s,a) = \lim_N I_N(-s,a), \qquad \text{para } \sigma > 1.$$

Ahora calcularemos $I_N(-s,a)$ mediante el teorema de los residuos. La justificación de que el teorema es aplicable es la misma que la del ejemplo 4 de la página 224. Los polos del integrando se encuentran en los puntos $2n\pi i$, para $n = -N, \ldots, N$ excepto $n = 0$. El teorema 8.4 nos permite calcular

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-s}e^{az}}{1-e^z}, 2n\pi i\right) = -\frac{e^{2n\pi ia}}{(2n\pi i)^s},$$

con lo que

$$I_N(-s,a) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{e^{2n\pi ia}}{(2n\pi i)^s} + \frac{e^{-2n\pi ia}}{(-2n\pi i)^s}\right).$$

Ahora hay que prestar atención a las exponenciales:

$$i^{-s} = e^{-\pi is/2}, \qquad (-i)^{-s} = e^{\pi is/2}.$$

Así

$$I_N(-s,a) = \frac{1}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi is/2}\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{2n\pi ia}}{n^s} + e^{\pi is/2}\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{-2n\pi ia}}{n^s}\right),$$

y al tomar límites resulta

$$I(-s,a) = \frac{1}{(2\pi)^s}\big(e^{-\pi is/2}F(a,s) + e^{\pi is/2}F(-a,s)\big).$$

Para concluir el teorema basta aplicar la definición de la función dseta (extendida):

$$\zeta(1-s,a) = \Pi(s-1)I(-s,a).$$

■

De la fórmula de Hurwitz deducimos el resultado fundamental sobre la función dseta de Riemann:

Teorema 11.9 (Ecuación funcional de la función dseta de Riemann) *Para todo número complejo s se cumple*

$$\zeta(s) = 2\Pi(-s)(2\pi)^{s-1}\operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s).$$

Demostración: Al hacer $a = 1$ en la fórmula de Hurwitz queda

$$\zeta(1-s) = \frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}\big(e^{-\pi is/2}\zeta(s) + e^{\pi is/2}\zeta(s)\big) = 2\frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}\cos(\pi s/2)\zeta(s).$$

En principio tenemos esta igualdad en el semiplano $\sigma > 1$, pero por prolongación analítica es válida en todo el plano. Al cambiar $1-s$ por s queda la ecuación funcional. ■

De la ecuación funcional se deducen muchas propiedades de la función dseta. Por ejemplo, si hacemos $s = -(2k-1)$ y aplicamos el teorema 11.5 queda

$$-B_{2k}/2k = 2(2k-1)!(2\pi)^{-2k}(-1)^k\zeta(2k),$$

lo cual nos proporciona una demostración alternativa de la fórmula que ya obtuvimos en el capítulo VII:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}.$$

También podemos obtener mucha información sobre los ceros de la función dseta, aunque en lugar de verlo ahora vamos a obtener una ecuación equivalente mucho más simple. En primer lugar sustituimos $\Pi(-s)$ por la expresión que nos da la fórmula de Legendre 6.10, en la forma equivalente

$$\sqrt{\pi}\,\Pi(s) = 2^s\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\Pi\bigg(\frac{s-1}{2}\bigg). \tag{11.1}$$

El resultado es

$$\sqrt{\pi}\,\zeta(s) = 2\,2^{-s}\Pi\Big(-\frac{s}{2}\Big)\,\Pi\bigg(-\frac{s+1}{2}\bigg)\,(2\pi)^{s-1}\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\,\zeta(1-s).$$

Seguidamente sustituimos $\mathrm{sen}(\pi s/2)$ mediante la fórmula 6.8:

$$\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\Pi\Big(-\frac{s}{2}\Big) = \frac{\pi s/2}{\mathrm{sen}(\pi s/2)}.$$

Obtenemos

$$\sqrt{\pi}\,\zeta(s)\,\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big) = 2\,2^{-s}\Pi\bigg(-\frac{s+1}{2}\bigg)\,(2\pi)^{s-1}\,\frac{\pi s}{2}\,\zeta(1-s),$$

o equivalentemente

$$\zeta(s)\,\frac{2}{s}\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big) = \frac{2}{1-s}\Pi\bigg(\frac{1-s}{2}\bigg)\,\pi^{s-1/2}\zeta(1-s).$$

Reordenando los términos llegamos a

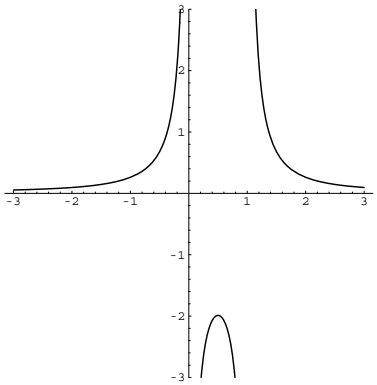
$$\pi^{-s/2}\,\frac{1}{s}\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\;\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\frac{1}{1-s}\Pi\bigg(\frac{1-s}{2}-1\bigg)\;\zeta(1-s).$$

Esta ecuación tiene la particularidad de que su miembro derecho se obtiene del izquierdo cambiando s por $1-s$. En otras palabras, si definimos

$$\Phi(s) = \pi^{-s/2}\,\frac{1}{s}\,\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\;\zeta(s)$$

la ecuación funcional se convierte en $\Phi(s) = \Phi(1-s)$.

Riemann consideró que la ecuación simétrica $\Phi(s) = \Phi(1-s)$ es la forma más natural de la ecuación funcional.[1] Como primera consecuencia observamos que $\Phi(s)$ es claramente holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$ salvo un polo simple en $s = 1$, luego la ecuación funcional nos da que también es holomorfa en el semiplano $\sigma < 1$ salvo un polo simple en $s = 0$. Así pues, Φ es una función meromorfa con dos polos. Éste es su aspecto sobre el eje real:

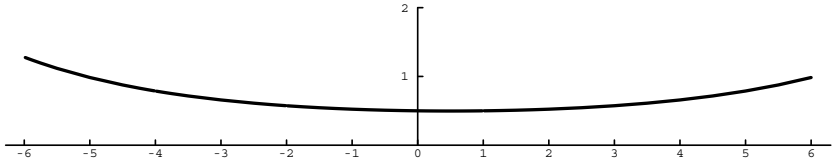


La ecuación funcional se refleja en el hecho de que la gráfica es simétrica respecto de la recta $\sigma = 1/2$.

Riemann todavía mejoró la ecuación funcional eliminando los polos de la función Φ. Para ello observamos que la expresión $s(s-1)$ no se altera al cambiar s por $1-s$, luego al multiplicar los dos términos de la ecuación por este factor obtenemos $\xi(s) = \xi(1-s)$, donde $\xi(s)$ es la función entera dada por

$$\xi(s) = s(s-1)\Phi(s) = \pi^{-s/2}\Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\,(s-1)\zeta(s).$$

La gráfica de la función ξ sobre el eje real es la siguiente:



[1] ¡Y no sabía cuánta razón tenía! Sabemos que la función dseta admite un desarrollo en producto infinito con un factor $(1-1/p)^{-1}$ para cada primo p. El lector familiarizado con la teoría algebraica de números debe pensar en $\pi^{-s/2}(1/s)\Pi(s/2)$ como un factor añadido a dicho producto infinito en correspondencia con el único primo arquimediano de $\mathbb{Z}$. En general, si K es un cuerpo numérico con u primos arquimedianos reales y v complejos, su función dseta se extiende también a todo el plano complejo y verifica una ecuación funcional de la forma $\Phi_K(s) = \Phi_K(1-s)$, donde

$$\Phi_K(s) = \sqrt{|\Delta|}^{\,s}\Big(\pi^{-s/2}(1/s)\Pi(s/2)\Big)^u\Big((2\pi)^{-s}(1/s)\Pi(s/2)\Big)^v\,\zeta_K(s),$$

donde Δ es el discriminante de K. Ver, por ejemplo, [5].

11.3 Los ceros de la función dseta

Ahora es fácil obtener los resultados anunciados sobre los ceros de la función dseta. Es claro que $\xi(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\sigma > 1$, luego la ecuación funcional nos da que tampoco se anula en el semiplano $\sigma < 0$. Sin embargo la función $\Pi(s/2)$ tiene polos simples en los puntos -2, -4, -6, ... luego $\zeta(s)$ ha de tener ceros simples en los enteros pares negativos. Ya habíamos visto que efectivamente $\zeta(s)$ se anula en dichos puntos, pero la ecuación funcional proporciona una prueba alternativa que no depende de los números de Bernoulli y además nos dice que los ceros son simples. Estos ceros se conocen como *ceros triviales* de la función dseta. Como la función factorial no tiene más polos con $\sigma < 0$, la función dseta no puede tener más ceros en este semiplano, es decir, cualquier cero no trivial ha de estar en la banda $0 \le s \le 1$.

Los ceros no triviales de $\zeta(s)$ coinciden en posición y orden con los ceros de $\xi(s)$. En efecto, en primer lugar es claro que $\xi(0) = \xi(1) = \pi^{-1/2}\Pi(1/2) = 1/2$, de donde podemos deducir, como ya sabíamos, que $\zeta(0) = -1/2$, luego 0, 1 no son ceros de ninguna de las dos funciones. Si s es cualquier otro punto en la banda $0 \le \sigma \le 1$, vemos que la función $\pi^{-s/2}\Pi(s/2)(s-1)$ no tiene un cero ni un polo en s, luego el orden de s para ξ y ζ es el mismo.

Respecto a la situación de estos ceros no triviales, lo primero que podemos demostrar es que no hay ninguno sobre el eje real. Para ello basta recordar de la prueba del teorema 7.10 que en el semiplano $\sigma > 0$ se cumple

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Si $0 < s < 1$ la serie es positiva (agrupando los sumandos de dos en dos, son todos positivos), luego $\zeta(s) < 0$. Así pues, no hay ceros no triviales reales.

Más aún, acabamos de probar que $\zeta(s)$ es real cuando s es un número real positivo, lo que implica este mismo hecho para las funciones Φ y ξ. La ecuación funcional nos da entonces que ambas son reales sobre todo el eje real, luego lo mismo vale para ζ.

Es fácil ver que $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$ (basta considerar la serie de Taylor de ξ en 0, cuyos coeficientes son reales) con lo que un número complejo es un cero no trivial de ζ si y sólo si lo es su conjugado. Esto implica que los ceros de la función dseta están distribuidos simétricamente respecto al eje real.

Por otra parte la ecuación funcional muestra que s es un cero no trivial si y sólo si lo es $1 - s$. Combinando esto con la observación precedente vemos que si s es un cero no trivial de la función dseta también lo es su simétrico respecto al eje real $\overline{s}$ y su simétrico respecto a la recta $\sigma = 1/2$, que es $\overline{1-s}$.

Recordemos ahora que en el teorema 7.43 hemos probado que ζ no se anula en la recta $\sigma = 1$, luego por simetría tampoco en $\sigma = 0$. Esto reduce las posibles situaciones de los ceros no triviales a la banda $0 < \sigma < 1$.

Como ya comentamos en el capítulo VII, uno de los problemas abiertos más famosos de la teoría de funciones de variable compleja es decidir si es correcta la Hipótesis de Riemann, según la cual todos los ceros no triviales de la función ζ están sobre la recta $\sigma = 1/2$.

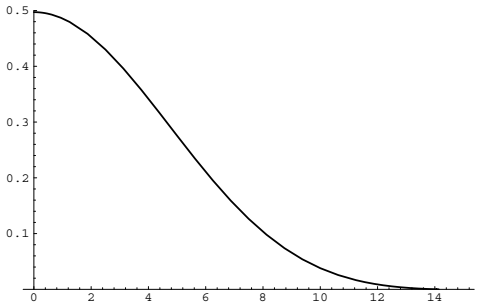
Dedicaremos el resto de la sección a mostrar la existencia de infinitos ceros no triviales. Para empezar, sabemos que la función entera $f(s) = \xi(1/2 + s)$ es real sobre los números reales, luego los coeficientes de su serie de Taylor en 0 son números reales. Más aún, la ecuación funcional implica que $f(s) = f(-s)$, de donde se sigue inmediatamente que f es una función par, luego sus coeficientes de Taylor en 0 de orden impar son nulos y, por lo tanto

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

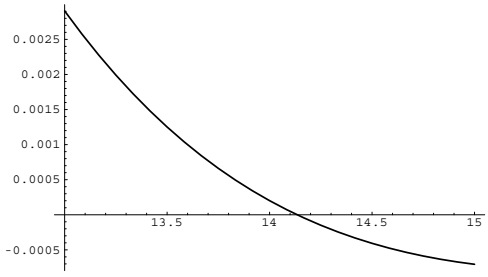
Como consecuencia llegamos a que la función

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(it)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n} t^{2n}$$

es real sobre los números reales. La figura siguiente es la gráfica de la función Ξ en el semieje real positivo (en el semieje negativo es claramente simétrica). En ella podemos apreciar que se anula entre 12 y 14, lo que se traduce en que efectivamente la función dseta tiene ceros no triviales.



He aquí una ampliación de la gráfica en un entorno del cero:



Puede probarse que el primer cero no trivial de la función ζ es aproximadamente

$$0,5 + 14,134725141734693790457251983562470\,i,$$

entendiendo que no hay otros ceros con menor parte imaginaria.

Para probar que existen infinitos ceros no triviales conviene considerar una de las demostraciones originales de Riemann de la ecuación funcional (Riemann dio dos demostraciones distintas). Esta prueba tiene interés porque en ella aparece la función ξ de forma natural, y además es el punto de partida para un estudio más profundo de esta función.

Riemann se basó para esta segunda prueba en la ecuación funcional de la llamada función zeta de Jacobi, que definimos seguidamente:

Definición 11.10 La *función zeta de Jacobi* es la dada por

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 z},$$

definida en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

La función θ converge a una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Para comprobarlo basta ver que converge uniformemente en los semiplanos $\operatorname{Re} z > \delta$. En efecto, si $z = x + iy$,

$$|e^{-\pi n^2 z}| = e^{-\pi n^2 x} \leq e^{-\pi n^2 \delta} \leq e^{-\pi \delta n},$$

y la serie determinada por $e^{-\pi\delta n}$ es geométrica de razón $e^{-\pi\delta} < 1$, luego el criterio de mayoración de Weierstrass nos asegura que la serie converge uniformemente en el semiplano $\operatorname{Re} z > \delta$. ∎

La función zeta verifica la siguiente ecuación funcional:

$$\theta(1/z) = \sqrt{z}\,\theta(z),$$

donde $\sqrt{z} = e^{(1/2)\log z}$ es la única rama holomorfa de la raíz cuadrada en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ que restringida a los números reales es la raíz cuadrada usual (el logaritmo que la define es el que toma partes imaginarias en $]-\pi, \pi[$).

La prueba de la ecuación funcional la tenemos prácticamente hecha. Basta recordar la función

$$F_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 (z+n)^2}, \qquad a > 0,$$

que estudiamos en el ejemplo de la página 136. Allí calculamos su serie de Fourier:

$$F_a(z) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/a^2} e^{2\pi i n z}.$$

Si observamos que $F_a(0) = \theta(a^2)$ y hacemos $z = 0$ en la igualdad anterior obtenemos

$$\theta(a^2) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi (n/a)^2} = \frac{1}{a}\theta(1/a^2).$$

Ahora hacemos $a = \sqrt{x}$ y la ecuación toma la forma $\theta(1/x) = \sqrt{x}\,\theta(x)$. Por el principio de prolongación analítica la igualdad es válida en todo el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. ∎

Siguiendo a Riemann, llamemos $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$, para $x > 0$, de modo que la ecuación funcional se convierte en

$$1 + 2\psi(1/x) = \sqrt{x}\,\big(1 + 2\psi(x)\big). \tag{11.2}$$

Ahora consideramos la expresión integral para la función factorial:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{s/2}\, \frac{dx}{x} \qquad (s > 1).$$

El cambio de variable $x = n^2\pi x'$ la convierte en

$$\frac{1}{n^s}\, \pi^{-s/2}\, \Pi\Big(\frac{s}{2} - 1\Big) = \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi x} x^{s/2}\, \frac{dx}{x}.$$

Al sumar sobre n queda

$$2\Phi(s) = \pi^{-s/2}\, \frac{2}{s} \Pi\Big(\frac{s}{2}\Big)\, \zeta(s) = \int_0^{+\infty} \psi(x) x^{s/2}\, \frac{dx}{x}.$$

(El teorema de convergencia monótona justifica el cambio de la integral con la suma.) Descomponemos la integral en dos partes, hacemos el cambio $x = 1/x'$ en la segunda y aplicamos la ecuación funcional de la función ψ:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \psi(x) x^{s/2}\, \frac{dx}{x} &= \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{s/2}\, \frac{dx}{x} - \int_{+\infty}^{1} \psi(1/x) x^{-s/2}\, \frac{dx}{x} \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{s/2}\, \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \psi(1/x) x^{-s/2}\, \frac{dx}{x} \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{s/2}\, \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \left(x^{1/2}\psi(x) + \frac{x^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right) x^{-s/2}\, \frac{dx}{x} \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (x^{-(s-1)/2} - x^{-s/2}) \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Para calcular la segunda integral notamos que en general se cumple

$$\int_1^{+\infty} x^{-a}\, \frac{dx}{x} = \frac{1}{a},$$

con lo que llegamos a

$$\pi^{-s/2} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \zeta(s) = \int_1^{+\infty} \psi(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}.$$

Finalmente multiplicamos por $s(s-1)/2$ y así resulta

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^{+\infty} \psi(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2})\,\frac{dx}{x}.$$

El miembro derecho permanece inalterado si cambiamos s por $1-s$, luego esto prueba que $\xi(s) = \xi(1-s)$ (en principio para $s > 1$, pero por el principio de prolongación analítica vale para todo $s \in \mathbb{C}$). Es fácil probar que el miembro derecho de la igualdad que hemos obtenido define una función holomorfa en todo el plano complejo, por lo que la igualdad es válida para todo s, aunque no vamos a necesitar este hecho.

Con ayuda de esta fórmula vamos a calcular la serie de Taylor de la función xi. Las manipulaciones siguientes no tienen ninguna dificultad. Suponemos $0 < s < 1$ para garantizar la convergencia de las integraciones por partes:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^{+\infty} \psi(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2})\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2}\psi(1)\left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}\right) + \frac{s(1-s)}{2}\int_1^{+\infty} \psi'(x)\left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^{+\infty} x^{3/2}\psi'(x)\big((1-s)x^{(s-1)/2-1} + sx^{-s/2-1}\big)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) + \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx}\big(x^{3/2}\psi'(x)\big)(-2x^{(s-1)/2} - 2x^{-s/2})\,dx.$$

Derivando la ecuación funcional (11.2) obtenemos

$$\frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) = 0.$$

Con esto llegamos a

$$\xi(s) = 4\int_1^{+\infty} \frac{d}{dx}\big(x^{3/2}\psi'(x)\big)x^{-1/4}\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\log x\right)dx,$$

donde $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 = \cos(ix)$. La serie de Taylor del coseno hiperbólico es

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Podemos intercambiar la suma con la integral, y así resulta

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n},$$

donde

$$a_{2n} = 4\int_1^{+\infty} \frac{d}{dx}\big(x^{3/2}\psi'(x)\big)x^{-1/4}\,\frac{\big((1/2)\log x\big)^{2n}}{(2n)!}\,dx.$$

En principio hemos supuesto $0 < s < 1$, pero, dado que hemos llegado a una serie de potencias, lo que hemos obtenido es la serie de Taylor de la función xi alrededor de 1/2, y por consiguiente la igualdad es válida en todo el plano complejo.

El interés de esta serie reside en que es fácil probar que $a_{2n} > 0$ para todo n. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(x^{3/2}\psi'(x)\big) &= \frac{d}{dx}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} x^{3/2}n^2\pi e^{-n^2\pi x}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\pi^2 x - \frac{3}{2}n^2\pi\right)x^{1/2}e^{-n^2\pi x} > 0.\end{aligned}$$

Así es claro que el integrando es positivo y por lo tanto a_{2n} también. En particular vemos que la función xi no es un polinomio. Más aún, ahora la serie de Taylor justifica el aspecto de la gráfica de xi sobre el eje real que hemos mostrado antes: xi es siempre positiva y tiene un mínimo en 1/2. Por otra parte:

$$|\xi(s+1/2)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}s^{2n}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}|s|^{2n} = \xi(|s|+1/2).$$

Esto significa que el máximo de ξ en la circunferencia $|s-1/2| = R$ se alcanza exactamente en $1/2+R$ (o también en $1/2-R$). De aquí podemos calcular el orden de crecimiento de la función xi.

Teorema 11.11 *Si R es suficientemente grande, para todo número complejo s tal que $|s-1/2| \le R$ se cumple $|\xi(s)| \le R^R$. Por lo tanto el orden de crecimiento de la función $\xi(s+1/2)$ es menor o igual que* 1.

Demostración: Acabamos de ver que el máximo de ξ en la circunferencia de centro 1/2 y radio R es $\xi(1/2+R)$. Tomemos un número natural N tal que $1/2+R \le 2N < 1/2+R+2$. Entonces

$$\xi(1/2+R) \le \xi(2N) = \Pi(N)\pi^{-N}(2N-1)\zeta(2N) \le N!(2N)\zeta(2)$$

$$\le N^N(2N)\zeta(2) = 2\zeta(2)N^{N+1} \le 2\zeta(2)(R/2+2)^{R/2+3} < R^R$$

si R es suficientemente grande. Consecuentemente tenemos que

$$\frac{\log\log M(R)}{\log R} \le 1 + \frac{\log\log R}{\log R},$$

luego al calcular los límites superiores llegamos a que el orden de crecimiento es $\rho \le 1$. ∎

Es fácil ver que el orden de crecimiento de ξ es también menor o igual que 1, pero la ecuación funcional hace conveniente trabajar con $\xi(s+1/2)$.

Ahora podemos aplicar el teorema de Hadamard a la función $\xi(s+1/2)$, con lo que obtenemos la factorización

$$\xi\left(s+\frac{1}{2}\right) = Ke^{Cs}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho-1/2}\right)e^{s/(\rho-1/2)},$$

donde ρ varía en los ceros de la función xi.

Hay que entender que esta igualdad no excluye los casos triviales, como que xi no tenga ceros o sólo tenga un número finito de ellos. A este respecto hay que notar que en el teorema de Hadamard podemos sustituir el orden de convergencia κ de la sucesión de ceros por cualquier otro natural mayor.

La ecuación funcional implica que si ρ es un cero de xi también lo es $1-\rho$ y, si agrupamos los factores correspondientes a cada par,

$$\left(1-\frac{s}{\rho-1/2}\right)e^{s/(\rho-1/2)}\left(1+\frac{s}{\rho-1/2}\right)e^{-s/(\rho-1/2)} = 1-\frac{s^2}{(\rho-1/2)^2}$$

obtenemos

$$\xi\left(s+\frac{1}{2}\right) = Ke^{Cs}\prod_{\operatorname{Im}\rho>0}\left(1-\frac{s^2}{(\rho-1/2)^2}\right).$$

Así es claro que el producto infinito es una función par de s, y el miembro izquierdo también lo es por la ecuación funcional. Por lo tanto se ha de cumplir que $e^{Cs} = e^{-Cs}$, o sea, $e^{2Cs} = 1$ para todo s, lo que sólo es posible si $C = 0$ y, evaluando la ecuación en $s = 0$, obtenemos que $K = \xi(1/2)$. En total tenemos

$$\xi\left(s+\frac{1}{2}\right) = \xi\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{\operatorname{Im}\rho>0}\left(1-\frac{s^2}{(\rho-1/2)^2}\right).$$

Esta ecuación ya implica que la función xi tiene infinitos ceros, pues en caso contrario sería un polinomio, pero todavía podemos simplificarla un poco. Volvemos a la factorización con los ceros separados:

$$\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2}\right)\prod_\rho \left(1-\frac{s-1/2}{\rho-1/2}\right)e^{(s-1/2)/(\rho-1/2)}.$$

Para $s = 0$ queda

$$\xi(0) = \xi\left(\frac{1}{2}\right)\prod_\rho \left(1-\frac{-1/2}{\rho-1/2}\right)e^{(-1/2)/(\rho-1/2)}.$$

Y al dividir miembro a miembro las dos últimas igualdades queda

$$\frac{\xi(s)}{\xi(0)} = \prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/(\rho-1/2)}.$$

Recordando que $\xi(0) = 1/2$ llegamos finalmente a la factorización de ξ:

Teorema 11.12 (Fórmula del producto) *Para todo $s \in \mathbb{C}$ se cumple*

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/(\rho-1/2)} = \frac{1}{2}\prod_{\operatorname{Im}\rho>0}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right),$$

donde ρ recorre los (infinitos) ceros de la función ξ.

Esta fórmula fue probada por Riemann basándose en una estimación de la densidad de ceros de la función xi que no justificó. La primera prueba completa es de Hadamard. En particular la factorización demuestra que la función dseta tiene infinitos ceros no triviales.

El teorema 10.10 nos da una estimación del número de ceros no triviales en un disco dado $|s-1/2| \le R$. Concretamente nos dice que es del orden de $R^{1+\epsilon}$, para cualquier $\epsilon > 0$. El argumento puede mejorarse ligeramente. Si en lugar de acotar

$$\log|f(z)| \le |z|^{1+\epsilon},$$

donde $f(z) = \xi(1/2+z)$, usamos el teorema 11.11 y hacemos

$$\log|f(z)| \le |z|\log|z|,$$

el razonamiento del capítulo anterior nos lleva a que el número de ceros $N(R)$ de ξ en el disco $|s-1/2| \le R$ cumple

$$N(R) \le \frac{2R\log 2R}{\log 2} - \frac{\log|f(0)|}{\log 2},$$

y para R suficientemente grande tenemos la cota $N(R) \le 2R\log R$. (Podemos quitar el 2 si nos limitamos a contar los ceros en el semiplano superior).

Puede probarse que el número de ceros en el semiplano superior con parte imaginaria menor que T es asintóticamente igual a $(T/2\pi)\log(T/2\pi) - T/2\pi$, pero no vamos a entrar en ello.

11.4 Funciones L

Vamos a aplicar los resultados generales que hemos obtenido sobre la función de Hurwitz al caso de las funciones L. En primer lugar, recordemos que si χ es un carácter módulo m entonces

$$L(s,\chi) = \frac{1}{m^s}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta(s,r/m). \tag{11.3}$$

En principio esta fórmula vale en el semiplano $\sigma > 1$, pero dado que el miembro derecho está definido de hecho sobre todo el plano complejo (salvo quizá en $s=1$) deducimos que las funciones L admiten una prolongación analítica a todo el plano complejo con a lo sumo un polo en $s=1$. Sin embargo, el teorema 7.33 nos asegura que la singularidad es evitable si y sólo si el carácter es no principal

(y es un polo simple en caso contrario). De la fórmula (7.4) se sigue de hecho que el residuo de $L(s,1)$ es concretamente

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\phi(m)}{m}.$$

Podemos dar pruebas alternativas de estos hechos a partir del teorema 11.5. En efecto, si χ es un carácter módulo m es claro que el residuo de $L(s,\chi)$ en 1 vale

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{1}{m^s}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta(s,r/m) = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\chi(r),$$

y por las relaciones de ortogonalidad esta expresión es 0 si $\chi \neq 1$ (luego $L(s,\chi)$ es entera) y $\phi(m)/m$ si $\chi = 1$.

Para probar una ecuación funcional para funciones L necesitamos algunos resultados adicionales sobre caracteres modulares.

Definición 11.13 Sea χ un carácter módulo m y sea $m \mid m'$. Entonces χ *induce* un carácter módulo m' dado por

$$\psi(x) = \begin{cases} \chi(x) & \text{si } (x,m') = 1 \\ 0 & \text{si } (x,m') \neq 1 \end{cases}$$

donde (x,m') representa el máximo común divisor de x y m'. Un carácter χ módulo m es *primitivo* si no está inducido por ningún carácter módulo un divisor estricto de m. Obviamente todo carácter no principal módulo un primo p es primitivo (el carácter principal está inducido por el carácter principal módulo 1).

Por razones que ahora sería complicado explicar, no perdemos generalidad si nos limitamos a estudiar caracteres primitivos. Por ejemplo, una función L respecto a un carácter no primitivo se diferencia tan sólo en un número finito de factores de la asociada al carácter que la induce.

La definición de carácter primitivo es negativa. Vamos a dar una equivalencia técnica que tiene la ventaja de ser positiva.

Teorema 11.14 *Un carácter χ módulo m es primitivo si y sólo si para todo divisor propio d de m existe un número x tal que $x \equiv 1$ (mód d), $(x,m) = 1$ y $\chi(x) \neq 1$.*

Demostración: Si χ no es primitivo, es decir, si está inducido por un carácter y módulo $d \mid m$, entonces todo x tal que $x \equiv 1$ (mód d), $(x,m) = 1$ cumple que $\chi(x) = \psi(x) = \psi(1) = 1$.

Recíprocamente, supongamos que existe un divisor propio d de m tal que para todo entero x que cumpla $x \equiv 1$ (mód d), $(x,m) = 1$, se cumple también $\chi(x) = 1$.

Sea a un entero cualquiera tal que $(a,d)=1$. Sea k el producto de todos los primos que dividen a m pero no a d. Entonces $(d,k)=1$ y el teorema chino del resto nos asegura que el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} a' &\equiv a \pmod{d},\\ a' &\equiv 1 \pmod{k} \end{aligned}$$

tiene solución.[2] En particular $(a',m)=1$ (si un primo p cumple $p \mid a'$ y $p \mid m$, no puede ser $p \mid d$, porque entonces $p \mid a$ y $(a,d)=1$, ni tampoco $p \mid k$, porque entonces $p \mid 1$).

En resumen, para todo entero a tal que $(a,d)=1$ existe un entero a' de manera que $(a',m)=1$, $a' \equiv a \pmod{d}$. Definimos $\psi(a)=\chi(a')$. Veamos que si a'' cumple también $(a'',m)=1$, $a'' \equiv a \pmod{d}$, entonces $\chi(a')=\chi(a'')$, con lo que $\psi(a)$ estará bien definido.

En efecto, tenemos que $[a']$ y $[a'']$ son elementos del grupo U_m (ver el capítulo VII), luego existe un $[x]$ tal que $[a'][x]=[a'']$, es decir, $a'' \equiv a'x \pmod{m}$. Por otro lado también $a'' \equiv a'x \pmod{d}$ y, como los tres enteros son primos con d, al tomar clases en U_d y despejar queda $[a']=[a'']=[a'][x]$, luego $[x]=[1]$, es decir, $x \equiv 1 \pmod{d}$.

Al aplicar la hipótesis llegamos a que $\chi(a'')=\chi(a')\chi(x)=\chi(a')$. Completamos la definición de ψ estableciendo que $\psi(a)=0$ si $(a,d)\neq 1$. Es claro que ψ es un carácter modulo d que induce a χ. ∎

Como último requisito necesitamos la definición y las propiedades básicas de una generalización de las sumas de Gauss que usamos en el capítulo 8.

Definición 11.15 Sea χ un carácter módulo m y a un número entero. Se define la *suma de Gauss* de χ respecto de a como

$$G_a(\chi)=\sum_x \chi(x)e^{2\pi a x i/m},$$

donde x recorre un conjunto de representantes de las clases de congruencia módulo m (notar que como $e^{2\pi a i}=1$ la expresión $e^{2\pi a x i/m}$ sólo depende del resto de x módulo m). Escribiremos $G(\chi)$ en lugar de $G_1(\chi)$.

Nota Aunque no nos va a hacer falta, observemos que las sumas cuadráticas $G_a(p)$ del capítulo VIII son un caso particular de las que acabamos de definir, concretamente las asociadas al carácter modular inducido por el símbolo de Legendre $\chi(x)=(x/p)$. En efecto,

$$G_a(\chi)=\sum_x \left(\frac{x}{p}\right) e^{2\pi a x i/p}=\sum_r e^{2\pi a x i/p}-\sum_n e^{2\pi a x i/p},$$

donde r recorre los restos cuadráticos módulo p y n los restos no cuadráticos.

[2] El homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}/dk\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ dado por $[x]\mapsto\big([x],[x]\big)$ es claramente inyectivo y, como ambos anillos tienen dk elementos, también es suprayectivo, luego una antiimagen de $\big([a],[1]\big)$ es una solución del sistema de congruencias.

Es claro que

$$\sum_r e^{2\pi axi/p} + \sum_n e^{2\pi axi/p} = \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi axi/p} - 1 = -1,$$

pues la última serie es geométrica de razón $e^{2\pi ai/p} \neq 1$ y suma 0. Así pues,

$$G_a(\chi) = 2\sum_r e^{2\pi axi/p} + 1 = \sum_x e^{2\pi ax^2 i/p} = G_a(p),$$

donde en la última suma x recorre un sistema de representantes de las clases módulo p, con lo que x^2 recorre el 0 más dos veces cada resto cuadrático módulo p. ∎

Las propiedades que necesitamos de las sumas de Gauss son las siguientes:

Teorema 11.16 *Sea χ un carácter primitivo módulo m y a un entero. Entonces*

a) $G_a(\chi) = \overline{\chi(a)}G(\chi)$.

b) $|G(\chi)| = \sqrt{m}$.

Demostración: Supongamos primero que $(a, m) = 1$. Entonces $[a] \in U_m$, luego existe un entero b tal que $ba \equiv 1 \pmod{m}$. Así, si $ax \equiv ay \pmod{m}$, multiplicando por b obtenemos que $x \equiv y \pmod{m}$, luego si x recorre un conjunto de representantes de las clases módulo m lo mismo le sucede a ax. En consecuencia

$$\chi(a)G_a(\chi) = \sum_x \chi(ax)e^{2\pi axi/m} = \sum_x \chi(x)e^{2\pi xi/m} = G(\chi).$$

Como $|\chi(a)| = 1$, el inverso de $\chi(a)$ es $\overline{\chi(a)}$ y se obtiene a).

Supongamos ahora que $(a, m) = r \neq 1$. Entonces $\overline{\chi(a)} = 0$ y hemos de probar que $G_a(\chi) = 0$. Sea $m = rd$. Como $m/d = r \mid a$, tenemos que $m \mid da$.

Por el teorema 11.14 existe un y tal que $(y, m) = 1$, $y = 1 + td$, $\chi(y) \neq 1$. Cuando x recorre un conjunto de representantes de las clases módulo m lo mismo le sucede a xy, luego

$$\begin{aligned} G_a(\chi) &= \sum_x \chi(yx)e^{2\pi ayxi/m} = \chi(y)\sum_x \chi(x)e^{2\pi ayxi/m} \\ &= \chi(y)\sum_x \chi(x)e^{2\pi a(1+td)xi/m} = \chi(y)\sum_x \chi(x)e^{2\pi axi/m}e^{2\pi tdaxi/m} \\ &= \chi(y)\sum_x \chi(x)e^{2\pi axi/m} = \chi(y)G_a(\chi). \end{aligned}$$

Como $\chi(y) \neq 1$ ha de ser $G_a(\chi) = 0$.

b) Claramente

$$|G(\chi)|^2 = G(\chi)\overline{G(\chi)} = G(\chi)\sum_x \overline{\chi}(x)e^{-2\pi xi/m} = \sum_x G_x(\chi)e^{-2\pi xi/m}$$

$$= \sum_x \sum_y \chi(y)e^{2\pi xyi/m}e^{-2\pi xi/m} = \sum_y \chi(y)\sum_x e^{2\pi x(y-1)i/m} = m\chi(1) = m,$$

pues la última suma en x es geométrica y es nula salvo si $y = 1$. ∎

Nota El teorema anterior contiene como caso particular la relación (8.1) que probamos en el capítulo VIII, y permite deducir fácilmente la relación (8.2). Como dijimos, estas igualdades bastan para probar la ley de reciprocidad cuadrática, con un argumento algo más complicado que el que hemos visto pero mucho más elemental. En efecto:

$$\overline{G(p)} = \sum_x e^{-2\pi x^2 i/b} = G_{-1}(p) = \left(\frac{-1}{p}\right) G(p) = (-1)^{(p-1)/2}G(p).$$

En consecuencia, si $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ entonces $G(p)$ es real, y como tiene módulo $\sqrt{p}$, ha de ser $G(p)^2 = p$, mientras que si $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ entonces $G(p)$ es imaginario puro, luego $G(p)^2 = -p$. ∎

Ahora podemos probar la ecuación funcional de las funciones L.

Teorema 11.17 (Ecuación funcional para funciones L) *Sea χ un carácter primitivo módulo m. Definimos*

$$\epsilon(\chi) = \frac{\chi(-1)G(\chi)}{\sqrt{m}}, \qquad a = \begin{cases} 0 & si\ \chi(-1) = 1 \\ 1 & si\ \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Sea

$$\Phi(s,\chi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2} \frac{1}{s+a}\,\Pi\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi).$$

Entonces, para todo $s \in \mathbb{C}$ se cumple $\Phi(s,\chi) = \epsilon(\chi)\Phi(1-s,\overline{\chi})$.

Demostración: Para aplicar la fórmula de Hurwitz observamos en primer lugar la relación siguiente entre las funciones L y la función $F(a,s)$. Aplicamos la definición de F y el teorema anterior (en el semiplano $\sigma > 1$):

$$\sum_{r=1}^m \overline{\chi}(r)F(r/m,s) = \sum_{r=1}^m \sum_{n=1}^\infty \overline{\chi}(r)\frac{e^{2\pi inr/m}}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\sum_{r=1}^m \overline{\chi}(r)e^{2\pi inr/m}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{G_n(\overline{\chi})}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}\,G(\overline{\chi}) = G(\overline{\chi})L(s,\chi). \tag{11.4}$$

Por otra parte hacemos $a = r/m$ en la fórmula de Hurwitz, multiplicamos por $\chi(r)$ y sumamos:

$$\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta\left(1-s,\frac{r}{m}\right)$$
$$= \frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi is/2}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(\frac{r}{m},s\right)+e^{\pi is/2}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(-\frac{r}{m},s\right)\right).$$

Usando que $F(a,s)$ es periódica en a con periodo 1, vemos que

$$\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(-\frac{r}{m},s\right)=\chi(-1)\sum_{r=1}^{m}\chi(-r)F\left(-\frac{r}{m},s\right)$$

$$=\chi(-1)\sum_{r=1}^{m}\chi(m-r)F\left(\frac{m-r}{m},s\right)=\chi(-1)\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(\frac{r}{m},s\right).$$

Con esto la fórmula precedente se convierte en

$$\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta\left(1-s,\frac{r}{m}\right)$$
$$= \frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi is/2}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(\frac{r}{m},s\right)+\chi(-1)e^{\pi is/2}\sum_{r=1}^{m}\chi(r)F\left(\frac{r}{m},s\right)\right).$$

Aplicamos (11.4):

$$\sum_{r=1}^{m}\chi(r)\zeta\left(1-s,\frac{r}{m}\right)=\frac{\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}(e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2})G(\chi)L(s,\overline{\chi}).$$

Multiplicamos por m^{s-1} y aplicamos (11.3):

$$L(1-s,\chi)=\frac{m^{s-1}\Pi(s-1)}{(2\pi)^s}(e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2})G(\chi)L(s,\overline{\chi}).$$

Esto ya es una forma de la ecuación funcional de las funciones L. En principio estábamos trabajando en el semiplano $\sigma > 1$, pero por prolongación analítica la ecuación vale en todo el plano complejo. Ahora la transformaremos de modo similar a como hemos hecho con la ecuación de la función dseta. En primer lugar aplicamos la fórmula de Legendre (11.1), pero cambiando s por $s-1$. Así queda

$$L(1-s,\chi) = m^{s-1}\pi^{-s-1/2}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{s-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$$
$$(e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2})G(\chi)L(s,\overline{\chi}).$$

Multiplicamos y dividimos por $m^{1/2}$ para que aparezca la constante $\epsilon(\chi)$:

$$\begin{aligned} L(1-s,\chi) &= m^{s-1/2}\pi^{-s-1/2}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{s-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) \\ &\quad (e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2})\chi(-1)\epsilon(\chi)L(s,\overline{\chi}). \end{aligned}$$

Si $\chi(-1)=1$ entonces

$$e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2} = 2\cos(\pi s/2) = 2\,\mathrm{sen}(\pi(1-s)/2).$$

Si por el contrario $\chi(-1)=-1$ entonces

$$e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2} = 2\,\mathrm{sen}(-\psi/2).$$

Al aplicar la ecuación funcional

$$\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\mathrm{sen}\,\pi z},$$

nuestra ecuación se transforma, según el valor de $\chi(-1)$, en

$$\pi\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\chi) = m^{s-1/2}\pi^{-s+1/2}\frac{1-s}{2}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\epsilon(\chi)L(s,\overline{\chi})$$

o bien

$$\begin{aligned} \pi\left(-\frac{s}{2}\right)\Pi\left(\frac{s}{2}\right)L(1-s,\chi) &= -m^{s-1/2}\pi^{-s+1/2}\left(-\frac{s}{2}\right)\Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \\ &\quad \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\epsilon(\chi)L(s,\overline{\chi}). \end{aligned}$$

En el primer caso multiplicamos y dividimos por $s/2$ el segundo miembro, con lo que resulta

$$\left(\frac{m}{\pi}\right)^{(1-s)/2}\frac{1}{1-s}\,\Pi\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\chi) = \epsilon(\chi)\left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2}\frac{1}{s}\,\Pi\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\overline{\chi}).$$

En el segundo caso multiplicamos y dividimos por $1-s/2$ el primer miembro y por $(s+1)/2$ el segundo:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m}{\pi}\right)^{(1-s)/2}\frac{1}{(1-s)+1}\,\Pi\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)L(1-s,\chi) \\ &\quad = \epsilon(\chi)\left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2}\frac{1}{s+1}\,\Pi\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\overline{\chi}). \end{aligned}$$

■

Observar que si 1 es el carácter principal módulo 1 entonces $\Phi(s,1)$ es la función Φ construida a partir de la función dseta de Riemann. En cualquier otro caso es claro que $\Phi(s,\chi)$ es una función entera (es holomorfa en el semiplano $\sigma>0$ y por la ecuación funcional también lo es en el semiplano $\sigma<1$). Además

no se anula en el semiplano $\sigma \geq 1$ y por lo tanto tampoco en el semiplano $\sigma \leq 0$, es decir, sus ceros están en la banda crítica. Si $\chi(-1) = 1$ entonces el factor $\Pi(s/2)/s$ tiene polos simples en los puntos 0, -2, -4, ..., luego $L(s,\chi)$ tiene ceros simples en dichos puntos. Si $\chi(-1) = -1$ entonces los ceros triviales están en -1, -3, -5,...

Concluimos la sección con un comentario para el lector familiarizado con la teoría algebraica de números, en especial con la teoría de cuerpos de clases. A partir de la ecuación funcional de las funciones L se deduce la ecuación funcional para la función dseta de cualquier extensión abeliana K de $\mathbb{Q}$ (ver nota 1). Para ello hay que tener en cuenta que K está contenido en un cuerpo ciclotómico L y que la función $\zeta_K(z)$ se descompone como producto de las funciones $L(s,\chi)$, donde χ recorre todos los caracteres del grupo de Galois de K, identificados con caracteres modulares primitivos a través del isomorfismo $G(L/\mathbb{Q}) \equiv U_f$. Los factores $m^{s/2}$ dan lugar a $\sqrt{|\Delta|}^{\,s}$ por el teorema del conductor-discriminante. Como el automorfismo de L identificado con $[-1]$ es la conjugación compleja, el cuerpo K es real si y sólo si todos los caracteres de $G(K/\mathbb{Q})$ fijan a -1. Si K es complejo, al agrupar los caracteres de K en pares de conjugados obtenemos tantos factores $\Pi(s/2)\Pi\big((s+1)/2\big)/(s(s+1)\big) = C2^{-s}\Pi(s)/s$ (por la fórmula de Legendre) como divisores infinitos tiene K.

Con esto llegamos a una ecuación de la forma $\Phi_K(s) = D\Phi_K(1-s)$, donde D es una constante y Φ_K es la función descrita en la nota 1. Evaluando en la recta $\sigma = 1/2$ se concluye que $D = 1$.

De todos modos, ya queda dicho que la ecuación funcional es válida para cuerpos numéricos arbitrarios, si bien la prueba requiere más ideas que las vistas en este capítulo.

Capítulo XII

Transformaciones conformes

Las aplicaciones conformes son el equivalente en la teoría de funciones de variable compleja a los homeomorfismos en topología. La definición es la obvia:

Definición 12.1 Sean Ω_1, Ω_2 abiertos en $\mathbb{C}^\infty$. Una aplicación $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una *transformación conforme* si es holomorfa y biyectiva (admitiendo que tenga un polo si $\infty \in \Omega_2$).

El teorema de la función inversa (en su versión general 8.15, incluida la nota a pie de página) nos da que la inversa de una transformación conforme es también conforme, con lo que en particular las transformaciones conformes son homeomorfismos. También es claro que la composición de transformaciones conformes es una transformación conforme.

Si entre dos abiertos Ω_1, Ω_2 existe una transformación conforme los espacios $\mathcal{H}(\Omega_1)$ y $\mathcal{H}(\Omega_2)$ son isomorfos como álgebras, isométricos como espacios métricos y en particular homeomorfos, es decir, son indistinguibles a todos los efectos. Esta es una de las causas del interés de las transformaciones conformes.

Ejemplos El teorema 8.16 afirma esencialmente que las únicas transformaciones conformes de $\mathbb{C}$ en sí mismo son los polinomios no nulos de grado 1 y, según el teorema 8.17, las transformaciones conformes de $\mathbb{C}^\infty$ sobre sí mismo son las transformaciones de Möbius. ∎

Puede parecer sorprendente que hayamos podido desarrollar la teoría hasta donde lo hemos hecho sin haber necesitado nunca las transformaciones conformes (pensemos, como contraste, lo que sería hacer topología sin hablar de homeomorfismos). Lo que sucede es que hasta ahora nos ha bastado tratar con transformaciones de Möbius, pero la teoría general que aquí presentamos nos mostrará las funciones holomorfas bajo una nueva perspectiva, más geométrica-topológica, más general y más profunda. Nos ocuparemos de ello en los capítulos siguientes.

Ahora conviene que nos detengamos en algo que hemos ido posponiendo: la interpretación geométrica de la derivada. En el capítulo I ya vimos que el módulo de la derivada de una función holomorfa f es su determinante jacobiano, vista

como función de dos variables reales. La teoría de la medida justifica entonces que $|f'(z)|$ es aproximadamente la proporción entre el área de cada conjunto medible no nulo en un entorno de z y el área de su imagen por f, de modo que la aproximación es tanto mejor cuanto menor sea el entorno donde se consideran los conjuntos, es decir, el módulo de la derivada indica la dilatación de las áreas que produce f alrededor de cada punto.

Sin embargo, no es la interpretación del módulo de la derivada lo que nos va a interesar, sino la de su argumento. Para ello hemos de recordar algunos conceptos geométricos.

Sea ϕ una curva que pase por un punto z_0, es decir, $\phi(t) = z_0$ para un cierto valor de t. Entonces la recta $z_0 + \lambda\phi'(t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) es la tangente a ϕ en z_0. Aunque el módulo de $\phi'(t)$ varía al cambiar ϕ por un arco equivalente (indica la "velocidad" con la que se recorre el arco), no ocurre lo mismo con el argumento, que indica la inclinación de la tangente. A lo sumo, si cambiamos el sentido del arco este argumento varía en π radianes. (El lector puede probar fácilmente estos hechos al margen de su interpretación geométrica).

Definición 12.2 Sean ϕ y ψ dos arcos que pasan por un mismo número complejo $\phi(s) = \psi(t) = z_0$. Definimos el ángulo que forman ϕ y ψ en z_0 como $\arg\big(\psi'(s)\big) - \arg\big(\phi'(s)\big) + k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$ se escoge de modo que el resultado esté en $[0, \pi[$. Es claro que el ángulo queda así unívocamente determinado.

Diremos que ϕ y ψ son *ortogonales* en z_0 si el ángulo que forman es $\pi/2$.

Si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una transformación conforme y ϕ es un arco que pasa por un punto $\phi(t) = z_0 \in \Omega_1$, entonces $\phi \circ f$ es un arco que pasa por $(\phi \circ f)(t) = f(z_0)$. Por la regla de la cadena (suponiendo que $f(z_0)$ es finito)

$$(\phi \circ f)'(t) = f'(z_0)\phi'(t).$$

En consecuencia $\arg(\phi \circ f)'(t) = \arg f'(z_0) + \arg \phi'(t)$.

Esto significa que al aplicarles la transformación conforme f, cada arco que pasa por z_0 sufre un giro de ángulo $\arg f'(zo)$, (esta es la interpretación del argumento de la derivada) luego el ángulo entre dos arcos que pasen por z_0 permanece inalterado.

Puede probarse que la proyección estereográfica entre una esfera y el plano complejo también conserva los ángulos, por lo que es una aplicación conforme en un sentido de la palabra más amplio que el que aquí le hemos dado. Por ello podríamos definir el ángulo de dos curvas que pasan por el infinito como el ángulo que forman las curvas correspondientes en el "polo norte" de la esfera. Sin embargo, podemos prescindir de estos hechos y definir el ángulo entre dos curvas que pasan por ∞ como el ángulo en 0 de las curvas que resultan al componerlas con $1/z$, o con cualquier otra transformación conforme que lleve ∞ a un número finito, pues por la parte ya probada este ángulo será el mismo independientemente de la transformación aplicada. Con este convenio queda completada la prueba del teorema siguiente:

Teorema 12.3 *Las transformaciones conformes conservan los ángulos que forman los pares de curvas.*

En la sección siguiente aplicaremos este hecho a un estudio más detallado de las transformaciones de Möbius.

12.1 Transformaciones de Möbius

Conviene llamar *circunferencias* en $\mathbb{C}^\infty$ tanto a las circunferencias usuales en $\mathbb{C}$ como a las rectas (completadas con el punto ∞). Así las rectas son simplemente las circunferencias de $\mathbb{C}^\infty$ que pasan por ∞ y, en estos términos, vimos en el capítulo I que dadas dos circunferencias en $\mathbb{C}^\infty$ existe una transformación de Möbius que convierte una en la otra. Si $\mathbb{C}$ es una circunferencia en $\mathbb{C}^\infty$ es claro que $\mathbb{C}^\infty \setminus \mathbb{C}$ tiene dos componentes conexas (dos semiplanos o el interior y el exterior de la circunferencia) y es claro que una transformación de Möbius que convierta una circunferencia en otra ha de hacer corresponder las dos componentes conexas determinadas por la primera con las determinadas por la segunda.

Si C es la circunferencia de centro 0 y radio 1 tenemos que la transformación $1/z$ biyecta sus dos componentes conexas. Dada una circunferencia C arbitraria podemos encontrar una transformación de Möbius M que la convierta en la circunferencia de centro 0 y radio 1, aplicar luego $1/z$ y luego la inversa de M, con lo que obtenemos una transformación de Möbius que deja invariante a C pero intercambia las componentes conexas asociadas. De aquí se desprende que siempre es posible encontrar una transformación de Möbius que transforme un determinado disco abierto o semiplano en otro disco abierto o semiplano cualquiera.

Si C es una recta, cada punto $z \in \mathbb{C}^\infty$ tiene asociado un único simétrico z^* respecto a C, de modo que $z = z^*$ si y sólo si $z \in C$ (lo que presupone el convenio de que $\infty^* = \infty$). Concretamente, z^* es el punto situado sobre la recta perpendicular a C que pasa por z y se encuentra a la misma distancia de C que z. Por ejemplo, la simetría respecto al eje real es la conjugación.

El lector puede determinar una expresión analítica para estas transformaciones de simetría, aunque no nos va a hacer falta. Nos bastará tener en cuenta la siguiente observación geométrica que el lector puede justificar fácilmente: si C es una circunferencia que pasa por dos puntos z y z^* y R es una recta perpendicular a la cuerda que los une, entonces C y R son ortogonales si y sólo si R pasa por el punto medio de la cuerda.

De aquí se sigue inmediatamente la caracterización siguiente del simétrico de un punto respecto a una recta:

> *Dos números z y z^* que no estén sobre una recta C son simétricos respecto a C si y sólo si toda circunferencia en C^∞ que pasa por z y z^* corta ortogonalmente a C.*

De este hecho se deduce que si C es una circunferencia cualquiera en $\mathbb{C}^\infty$ y $z \in \mathbb{C}^\infty$ no está sobre C existe un único punto $z^* \in \mathbb{C}^\infty$ fuera de C tal que toda circunferencia en $\mathbb{C}^\infty$ que pasa por z y z^* corta ortogonalmente a C. En efecto, basta considerar una transformación de Möbius M que convierta a C en una

recta R y considerar como z^* la antiimagen del simétrico de $M(z)$ respecto a R. Si dos puntos cumplieran esta propiedad sus imágenes por M serían ambas iguales al simétrico de $M(z)$ respecto a R, luego habrían de coincidir. Recogemos este hecho en la definición siguiente:

Definición 12.4 Sea C una circunferencia en $\mathbb{C}^\infty$ y sea $z \in \mathbb{C}^\infty$ un punto que no esté en C. Llamaremos *simétrico* de z respecto de C al único punto $z^* \in \mathbb{C}^\infty$ fuera de C tal que toda circunferencia en $\mathbb{C}^\infty$ que pasa por z y z^* corta ortogonalmente a C. Convenimos también en que el simétrico de un punto de C es él mismo.

Claramente se cumple:

Teorema 12.5 *Sea una transformación de Möbius que convierta una circunferencia C en una circunferencia C'. Entonces la imagen del punto simétrico respecto a C de un punto z es el punto simétrico respecto a C' de la imagen de z.*

Dada una circunferencia arbitraria C, existe una transformación de Möbius M que la convierte en el eje real, y el teorema anterior nos da que $M(z^*) = \overline{M(z)}$ o, equivalentemente, que $z^* = M^{-1}\big(\overline{M(z)}\big)$.

De aquí se sigue inmediatamente que $z^{**} = z$, que la simetría es continua y que biyecta las dos componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus C$. Vamos a describir con más detalle la simetría respecto a una circunferencia (usual).

Sea C la circunferencia de centro a y radio R y sean z y z^* dos puntos simétricos respecto a C. Para estudiar la relación entre ambos consideramos una transformación de Möbius que transforme C en el eje real (cuya simetría tiene la expresión más sencilla posible). Sirve por ejemplo

$$M(w) = a + R\,\frac{1+iw}{1-iw}.$$

Es claro que $M(-1) = a - iR$, $M(0) = a + R$ y $M(1) = a + iR$, que son puntos de C, con lo que la imagen por M del eje real es una circunferencia con tres puntos en común con C, luego es C.

Sean $z = M(t)$ y $z^* = M(t^*)$. Entonces t y t^* han de ser simétricos respecto al eje real, es decir, $t^* = \overline{t}$. Si $t = \pm i$ entonces $\{z, z^*\} = \{a, \infty\}$, luego el simétrico de a es ∞. Supongamos que $t \neq \pm i$. Entonces tenemos:

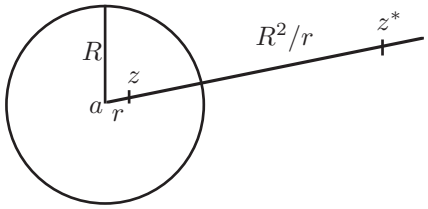
$$z - a = R\,\frac{1+it}{1-it}, \qquad z^* - a = R\,\frac{1+i\overline{t}}{1-i\overline{t}}.$$

Conjugamos la primera ecuación y la multiplicamos por la segunda. El resultado es

$$(\overline{z-a})(z^*-a) = R^2, \quad \text{o también,} \quad z^* = a + \frac{R^2}{\overline{z-a}}.$$

Tomando argumentos vemos que $\arg(z-a) = \arg(z^*-a)$, es decir, que z y z^* se encuentran sobre la misma semirrecta de extremo en a. Al tomar módulos

concluimos además que $|z-a|\,|z^*-a| = R^2$. Estas condiciones determinan completamente la simetría respecto a C. En otras palabras, el simétrico un punto z tal que $|z-a| = r < R$ es el punto situado sobre la semirrecta que une a con z y a una distancia de a igual a $R(R/r) > R$, y viceversa.



Ahora veremos un ejemplo de la utilidad de la conservación de la simetría a la hora de trabajar con transformaciones de Möbius. Vamos a encontrar todas las transformaciones de Möbius que convierten un disco dado en otro.

Si una transformación de Möbius M convierte el disco $|z-a| < R$ en el disco $|z-b| < S$ entonces $M(a+z)-b$ es una transformación de Möbius que convierte el disco $|z| < R$ en el disco $|z| < S$ y, recíprocamente, si N transforma el disco $|z| < R$ en el disco $|z| < S$ entonces $N(z-a)+b$ biyecta los dos discos originales. Por ello podemos limitarnos a buscar las transformaciones de Möbius entre $|z| < R$ y $|z| < S$.

Sea $|\alpha| < R$. Vamos a ver que existe una transformación M entre los discos considerados tal que $M(\alpha) = 0$, y vamos a encontrar de hecho todas las posibles.

En primer lugar, una tal transformación M, si existe, ha de llevar la circunferencia $|z| = R$ en la circunferencia $|z| = S$ (porque es un homeomorfismo de $\mathbb{C}^\infty$). Además ha de transformar el simétrico de a respecto a $|z| = R$, que es $R^2/\overline{\alpha}$, en el simétrico de 0 respecto a $|z| = S$, que es ∞. Es decir, M ha de tener su cero en α y su polo en $R^2/\overline{\alpha}$. Esto obliga a que M sea de la forma

$$M(z) = \lambda\,\frac{z-\alpha}{z-\alpha^*} = \mu\,\frac{z-\alpha}{R^2-\overline{\alpha}z}, \tag{12.1}$$

donde $\mu \neq 0$ es un número complejo arbitrario.

Ahora probamos que esta transformación convierte el disco $|z| < R$ en el disco $|z| < |\mu|/R$. Teniendo en cuenta que $M(\alpha) = 0$ basta probar que transforma la circunferencia $|z| = R$ en $|z| = |\mu|/R$. En efecto, si $|z| = R$ entonces $z\overline{z} = R^2$, luego

$$M(z) = \frac{\mu}{z}\,\frac{z-\alpha}{(R^2/z)-\overline{\alpha}} = \frac{\mu}{z}\,\frac{z-\alpha}{\overline{z-\alpha}},$$

con lo que $|M(z)| = |\mu|/R$.

Así pues, las transformaciones de Möbius que hacen corresponder el disco $|z| < R$ con el disco $|z| < S$ y cumplen $M(\alpha) = 0$ son exactamente las de la forma (12.1) exigiendo $|\mu| = RS$. Vemos, pues, que hay infinitas de ellas. Podemos conseguir una unicidad si observamos que

$$M'(\alpha) = \frac{\mu}{R^2-|\alpha|^2},$$

luego $\arg M'(\alpha) = \arg \mu$. Esto significa que M está unívocamente determinada si no sólo le exigimos que $M(\alpha) = 0$ sino también que el argumento de $M'(\alpha)$ sea un valor arbitrario prefijado. Si tenemos en cuenta que el caso general se diferencia de éste en dos traslaciones, cuyas derivadas valen 1, en realidad tenemos casi probado el teorema siguiente:

Teorema 12.6 *Dados dos discos abiertos, existe una única transformación de Möbius M que convierte uno en otro, hace corresponder un punto α del primero en un punto dado del segundo y el argumento de $M'(\alpha)$ toma un valor prefijado.*

Demostración: El teorema está probado en el caso en que la imagen asignada a α en el segundo disco sea su centro. Para obtener una imagen arbitraria basta componer una transformación que envíe α al centro del segundo disco con otra que envíe dicho centro a un punto arbitrario y cuya derivada tenga argumento 0. Si hubiera dos distintas, componiendo con la inversa de esta última transformación obtendríamos dos transformaciones distintas que harían corresponder α con el centro del segundo disco y cuyas derivadas en α tendrían el mismo argumento. ∎

Más adelante necesitaremos el hecho siguiente, cuya prueba hemos visto en el transcurso del razonamiento anterior: la aplicación

$$M(z) = R^2 \frac{z - \alpha}{R^2 - \overline{\alpha} z} \tag{12.2}$$

es una transformación conforme del disco $|z| < R$ sobre sí mismo y cumple $M(\alpha) = 0$.

Ahora probamos que las transformaciones de Möbius que estamos considerando son las únicas que transforman discos en discos:

Teorema 12.7 *Toda transformación conforme entre dos discos es la restricción de una transformación de Möbius.*

Demostración: Consideremos una transformación conforme T entre dos discos. Fijemos un punto α en el primer disco. Fijemos una transformación de Möbius que convierta dicho disco en $D(0,1)$ de modo que lleve α a 0. Fijemos otra transformación de Möbius que convierta el segundo disco en $D(0,1)$ y envíe $T(\alpha)$ a 0. Al componer T con estas dos obtenemos una transformación conforme de $D(0,1)$ en sí mismo que deja fijo al 0. Si probamos que es una transformación de Möbius también lo será la de partida.

Sea, pues, $T : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ una transformación conforme tal que $T(0) = 0$. Sea r un número real $0 < r < 1$. La antiimagen por T del disco cerrado $|z| \leq r$ es un subconjunto cerrado de $D(0,1)$, donde el módulo toma un valor máximo $R < 1$. Por lo tanto si $R \leq |z| < 1$ entonces $r \leq |T(z)| < 1$.

Sea k el orden de T en 0. Entonces la función $f(z) = T(z)/z^k$ es holomorfa en el disco $D(0,1)$ y no se anula. Si $|z| = R$ se cumple $rR^{-k} \leq |f(z)| \leq R^{-k}$. Aplicando el principio del módulo máximo a las funciones f y $1/f$ obtenemos que estas desigualdades son válidas en todo el disco $|z| \leq R$.

Si fijamos z y hacemos tender r a 1 (con lo que R tiende también a 1) concluimos que $|f(z)| = 1$ para todo z en el disco unidad. Ahora el principio del módulo máximo implica que f es constante, digamos $f(z) = a$, con $|a| = 1$. Entonces $T(z) = az^k$ y, como T es inyectiva, ha de ser $k = 1$, luego $T(z) = az$ es una transformación de Möbius. ∎

Las transformaciones de Möbius también son las únicas transformaciones conformes entre anillos:

Teorema 12.8 *Consideremos dos anillos $A = A(z_1, r_1, R_1)$ y $B = A(z_2, r_2, R_2)$ con $0 < r_i < R_i < +\infty$. Entonces existe una transformación conforme entre ellos si y sólo si $R_1/r_1 = R_2/r_2$, y en tal caso cualquier transformación conforme entre ellos es una transformación de Möbius.*

Demostración: Considerando traslaciones podemos restringirnos al caso en que $z_1 = z_2 = 0$, y aplicando las transformaciones z/r_i podemos suponer también que $r_1 = r_2 = 1$.

Así el teorema se reduce a probar que existe una transformación conforme entre A y B si y sólo si $R_1 = R_2$ y, en tal caso, cualquiera de ellas es una transformación de Möbius. Supongamos, pues, que $f : A \longrightarrow B$ es una transformación conforme. Sea K la circunferencia de centro 0 y radio $r = \sqrt{R_2}$. Entonces $f^{-1}[K]$ es un subconjunto compacto de A, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $A(0, 1, 1+\epsilon) \cap f^{-1}[K] = A(0, R_1 - \epsilon, R_1) \cap K = \varnothing$. Entonces $V = f[A(0, 1, 1+\epsilon)]$ es un subconjunto conexo de B que no corta a la circunferencia K, luego $V \subset A(0, 1, r)$ o bien $V \subset A(0, r, R_2)$.

En el segundo caso podemos sustituir a f por su composición con la transformación R_2/z (que deja invariante a B) y así se cumple $V \subset A(0, 1, r)$ (y si esta nueva f es una transformación de Möbius la original también lo será).

Entonces, $W = f[A(0, R_1 - \epsilon, R_1)] \subset A(0, r, R_2)$, pues si fuera $W \subset A(0, 1, r)$ entonces una sucesión en B que convergiera a R_2 se correspondería con una sucesión en $A(1 + \epsilon, R_1 - \epsilon)$, por lo que debería tener puntos de acumulación en A y esto es imposible.

Así pues, si $\{z_n\}$ es una sucesión contenida en A, $1 < |z_n| < 1 + \epsilon$ y $|z_n| \to 1$ entonces la sucesión $\{f(z_n)\}$ está contenida en V y no tiene puntos de acumulación en B, luego sus puntos de acumulación están en la frontera de B, pero como está contenida en $A(0, 1, r)$, concretamente ha de ser $|f(z_n)| \to 1$. Similarmente, si $|z_n| \to R_1$ entonces $|f(z_n)| \to R_2$.

Sea $\alpha = \log R_2 / \log R_1$ y definamos $u(z) = \log|f(z)| - \alpha \log|z|$. Las consideraciones anteriores prueban que u tiende a 0 en la frontera de A. Ahora bien, u es claramente harmónica, luego es idénticamente nula. Así pues, $\log|f(z)| = \alpha \log|z|$ para todo $z \in A$ o, equivalentemente, $|f(z)| = |z|^\alpha$.

Podemos expresar A como unión de dos abiertos simplemente conexos, en cada uno de los cuales existe una rama uniforme de logaritmo y, por lo tanto, está definida la función holomorfa $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, que cumple $|z^\alpha| = e^{\alpha \operatorname{Re} \log z} = e^{\alpha \log|z|} = |z|^\alpha$. Así pues, la función holomorfa $f(z)/z^\alpha$ tiene módulo constante igual a 1. Por el principio del módulo máximo ha de ser constante, es decir $f(z) = cz^\alpha$. Derivando obtenemos $f'(z) = cz^\alpha(\alpha/z)$ y de aquí $f'(z)/f(z) = \alpha/z$ (esto es válido para cada abierto por separado, luego también en todo A).

Sea ϕ cualquier circunferencia de centro 0 contenida en A. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\phi \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \alpha\,\frac{1}{2\pi i}\int_\phi \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \alpha I(\phi,0) = \alpha$$

y por otra parte en la prueba del principio del argumento vimos que esta integral es $I(\phi\circ f,0)$, luego en particular α es un número entero (positivo por definición). Ahora podemos afirmar que $f(z) = cz^\alpha$ para todo $z \in A$ (como α es un número natural la función z^α está definida en todo A). La inyectividad de f implica que $\alpha = 1$ y por lo tanto f es una transformación de Möbius y $R_1 = R_2$. ∎

12.2 Dominios simplemente conexos

Obviamente, para que un abierto pueda ser transformado conformemente en otro es necesario que ambos sean homeomorfos, pero el último teorema de la sección anterior muestra que la condición no es suficiente. De hecho la existencia de transformaciones conformes entre dos abiertos dados no es un problema trivial. En esta sección nos ocuparemos del problema en el caso de los abiertos conexos simplemente conexos. Por brevedad conviene llamar *dominios* a los abiertos conexos de $\mathbb{C}^\infty$.

No es cierto que dos dominios simplemente conexos sean siempre conformes. Por ejemplo, no existen transformaciones conformes $f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0,1)$. Esto es una consecuencia inmediata del teorema de Liouville. Sin embargo, el teorema siguiente muestra que ésta es esencialmente la única excepción.

Teorema 12.9 (Teorema de Riemann) *Entre dos dominios simplemente conexos cuyas fronteras contengan más de un punto existe siempre una transformación conforme.*

Demostración: Basta probar que todo dominio simplemente conexo Ω cuya frontera contenga más de un punto se puede transformar conformemente en el disco $D(0,1)$.

Primero probaremos que existe una transformación conforme acotada sobre Ω. En primer lugar aplicamos a Ω una transformación de Möbius para obtener un dominio simplemente conexo A que tenga a ∞ en su frontera. Por hipótesis la frontera de A tendrá otro punto a. Fijemos un punto $z_0 \in A$. La función $(z-a)/(z_0-a)$ es holomorfa en A y no se anula. Como A es simplemente conexo existe la función

$$w = \log\frac{z-a}{z_0-a},$$

holomorfa en A. Además es inyectiva, pues su inversa es $z = a + (z_0-a)e^w$.

La imagen de A por esta aplicación es un nuevo dominio B que contiene a 0 (es la imagen de z_0). Tomemos un $r > 0$ tal que el disco $D(0,r)$ esté contenido en dicha imagen. Entonces el disco $D(2\pi i, r)$ está contenido en el complementario de B, pues si un punto $2\pi i + w$, con $|w| < r$, estuviera en B, entonces la aplicación $a + (z_0-a)e^w$ asignaría la misma imagen a los puntos w

y $2\pi i + w$, cuando por otra parte tenemos que esta aplicación es biyectiva sobre B. Por último, la aplicación $1/(z-2\pi i)$ está acotada sobre B y es conforme. Al componer todas las aplicaciones que hemos construido obtenemos una aplicación conforme y acotada sobre Ω.

Si f es una de estas funciones y z_0 es un punto arbitrario de Ω, entonces la función

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)}$$

es también conforme y acotada en Ω y cumple además $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las transformaciones conformes y acotadas F sobre Ω que cumplan $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$. Ya hemos visto que se trata de un conjunto no vacío.

Para cada función $F \in \mathcal{F}$ llamamos $M(F) > 0$ al supremo del módulo de F sobre Ω. Vamos a probar que existe una función $F \in \mathcal{F}$ en la que $M(F)$ toma un valor mínimo. En efecto, si $M = \text{ínf}\{M(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$, existe una sucesión $\{F_n\}$ de funciones de $\mathcal{F}$ tal que la sucesión $M(F_n)$ converge a M. En particular la sucesión $M(F_n)$ está acotada, luego la sucesión $\{F_n\}$ está acotada en el sentido de 3.27. Por el teorema de Montel tiene una subsucesión que converge a una función F holomorfa en Ω. Claramente F cumple también $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$. Esta última condición implica que F no es constante. Por el teorema 8.19 concluimos que F es inyectiva, o sea, conforme, y por consiguiente pertenece a $\mathcal{F}$. Si $z \in \Omega$ se cumple

$$|F(z)| \le |F_n(z)| + |F(z) - F_n(z)| \le M(F_n) + |F(z) - F_n(z)|.$$

Tomando n suficientemente grande y correspondiente a la subsucesión que converge a F, el miembro derecho de la desigualdad se hace menor que $M + \epsilon$ para cualquier ϵ prefijado. Por lo tanto $M(F) \le M$ y, por el carácter mínimo de M, ha de ser $M(F) = M$.

Ahora probaremos que $F[\Omega] = D(0, M)$. Ciertamente $F[\Omega] \subset D(0, M)$. Si no se da la igualdad existe un punto w perteneciente a la frontera de $F[\Omega]$ tal que $|w| < M$. Si componemos F con la transformación de Möbius

$$P(z) = M^2 \, \frac{z - w}{M^2 - \overline{w}z},$$

que es de tipo (12.2), obtenemos una transformación conforme F_1 de manera que $F_1[\Omega] \subset D(0, M)$ y la frontera de $F_1[\Omega]$ contiene al 0. Claramente $F_1[\Omega]$ es simplemente conexo y, como no contiene al 0, existe una rama uniforme del logaritmo sobre $F_1[\Omega]$, a partir de la cual se construye una rama uniforme de la función $f(z) = \sqrt{Mz}$, que es biyectiva. Al componer F_1 con esta función obtenemos una nueva transformación conforme F_2 que cumple $F_2[\Omega] \subset D(0, M)$ y 0 está en su frontera. Componemos ahora con

$$Q(z) = M^2 \, \frac{z - F_2(z_0)}{M^2 - \overline{F_2(z_0)}z},$$

también de tipo (12.2), y así obtenemos una transformación conforme F_3 que cumple $F_3[\Omega] \subset D(0,M)$ y $F_3(z_0) = 0$. Ahora observemos que

$$\begin{aligned} F_3'(z_0) &= Q'\big(\sqrt{-Mw}\big) f'(-w) P'(0) F'(z_0) \\ &= \frac{M^2}{M^2 - M|w|} \frac{\sqrt{M}}{2\sqrt{-w}} \frac{M^2 - |w|^2}{M^2} = \frac{M + |w|}{2\sqrt{-Mw}} > 1, \end{aligned}$$

pues la última desigualdad equivale a $(M + |w|)^2 > 4M|w|$ y ésta a su vez a $(M - |w|)^2 > 0$.

Por último, la función dada por $F_4(z) = F_3(z)/F_3'(z_0)$ es conforme y cumple $F_4(z_0) = 0$, $F_4'(z_0) = 1$, luego $F_4 \in \mathcal{F}$, pero $M(F_4) \leq M/|F_3'(z_0)| < M$, lo cual es imposible.

Acabamos de probar que $F : \Omega \longrightarrow D(0,M)$ es una transformación conforme. La transformación $F(z)/M$ tiene imagen $D(0,1)$. ∎

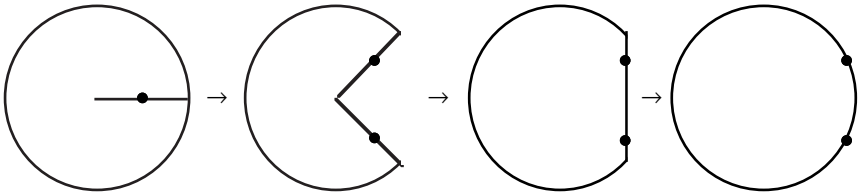
Notar que la aplicación $F : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ que hemos obtenido en el teorema anterior está sujeta a las condiciones $F(z_0) = 0$ y $F'(z_0) > 0$. Vamos a probar que estas condiciones determinan completamente a F.

Teorema 12.10 *Entre dos dominios simplemente conexos cuyas fronteras contengan más de un punto existe una única transformación conforme F tal que para un punto arbitrario z_0 del primero de los abiertos, $F(z_0)$ y $\arg F(z_0)$ toman valores prefijados.*

Demostración: Existen transformaciones conformes de los dos dominios sobre $D(0,1)$ que envíen a 0 un punto arbitrario de cada dominio sobre los que las funciones tengan derivada con argumento 0. Componemos la primera transformación con una transformación de Möbius del disco unidad que fije al 0 y cuya derivada en 0 tenga argumento prefijado, y después componemos la aplicación resultante con la inversa de la otra transformación conforme. El resultado es una transformación conforme en las condiciones del enunciado.

Si tuviéramos dos, la composición de una con la inversa de la otra es una transformación conforme F de un dominio simplemente conexo sobre sí mismo que deja fijo a un punto z_0 y cumple $F(z_0) > 0$. Basta probar que una aplicación en estas condiciones es la identidad. Consideramos una transformación conforme G del abierto considerado sobre $D(0,1)$ que envíe z_0 al 0. Componemos la inversa de G con F y con G de nuevo, con lo que obtenemos una transformación conforme H del disco $D(0,1)$ sobre sí mismo tal que $H(0) = 0$ y $H'(0) > 0$. Por los teoremas 12.6 y 12.7 concluimos que H es la identidad, con lo que F también lo es. ∎

Seguidamente vamos a estudiar en qué casos una transformación conforme entre dominios simplemente conexos se puede extender continuamente a las fronteras. Es fácil comprender que no siempre es así. Por ejemplo, si consideramos un disco abierto al que le hemos eliminado uno de sus radios, la figura siguiente muestra cómo se realiza una transformación conforme en el disco unidad, de modo que los puntos del radio eliminado se "desdoblan".



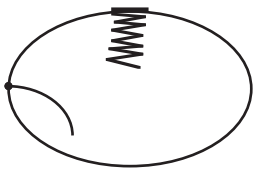
Si consideramos una sucesión en el disco cortado que converja al punto señalado en el radio de modo que sus términos estén alternativamente arriba y abajo del límite, al aplicar la transformación conforme sobre el disco la sucesión se desdobla en dos subsucesiones convergentes a dos puntos distintos. Nuestra intención es dar condiciones para que esto no ocurra, y la sucesión imagen converja a un solo punto de la frontera. De momento probamos que los límites (sean uno o varios) están siempre en la frontera.

Teorema 12.11 *Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una transformación conforme entre dos abiertos de $\mathbb{C}^\infty$. Si los todos puntos de acumulación de una sucesión $\{x_n\} \subset \Omega_1$ están sobre la frontera de Ω_1 entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{f(x_n)\}$ están en la frontera de Ω_2.*

Demostración: Los puntos de acumulación de $\{f(x_n)\}$ están en la clausura de Ω_2. Basta probar que ninguno de ellos está en Ω_2, pero si una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}$ converge a un punto $z \in \Omega_2$ entonces, por la continuidad de la inversa de f sobre Ω_2, tenemos que $\{x_{n_k}\}$ converge a la antiimagen de z, en contradicción con la hipótesis. ∎

El ejemplo anterior muestra que si hubiéramos exigido que la sucesión de partida fuera convergente, no por ello habríamos podido asegurar lo mismo de la sucesión imagen. Para ir más lejos necesitaremos trabajar con algo más que con sucesiones:

Definición 12.12 Sea Ω un dominio. Una *curva semiabierta* en Ω es una aplicación continua $\phi : [a, b[\longrightarrow \Omega$. Llamaremos *conjunto límite* de ϕ al conjunto de los límites de todas las sucesiones convergentes de la forma $\{f(x_n)\}$, donde $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente en $[a, b[$ convergente a b.



Obviamente el conjunto límite de una curva semiabierta es no vacío. Sólo nos van a interesar las curvas semiabiertas cuyos conjuntos límite estén contenidos en la frontera del dominio considerado.

La figura muestra dos curvas semiabiertas en una región con sus conjuntos limite contenidos en la frontera. En un caso el conjunto límite tiene un solo punto, mientras que en el segundo tiene infinitos.

Un ejemplo explícito de curva con infinitos puntos límite es la dada por

$$\phi(t) = -t + i\,\mathrm{sen}(1/t).$$

El conjunto límite lo forman los puntos ir, con $-1 \le r \le 1$.

Si el conjunto límite de una curva semiabierta ϕ contiene un único punto, entonces ϕ puede extenderse a una aplicación continua sobre $[a,b]$ asignando a b dicho valor límite. Este es el caso que más nos va a interesar.

El teorema 12.11 se traduce fácilmente a términos de curvas semiabiertas:

Teorema 12.13 *Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una transformación conforme entre dos abiertos de $\mathbb{C}^\infty$. Sea $\phi : [a,b[\longrightarrow \Omega_1$ una curva semiabierta cuyo conjunto límite esté contenido en la frontera de Ω_1. Entonces $f[\phi] = \phi \circ f$ es una curva semiabierta en Ω_2 cuyo conjunto límite está contenido en la frontera de Ω_2.*

Sin embargo, al contrario que el teorema 12.11, este teorema sí puede mejorarse. Pensemos de nuevo en el caso del círculo cortado. La intersección con el dominio de un entorno suficientemente pequeño de un punto z del corte tiene dos componentes conexas que la transformación conforme separa. Mientras una sucesión puede saltar libremente de una a otra, una curva semiabierta con límite z es un conexo que ha de estar en una componente fija, por lo que cabe esperar que el conjunto límite de su imagen tenga un único punto. No es fácil justificar con rigor este hecho. Nos basaremos en el ingenioso razonamiento que sigue.

Teorema 12.14 *Sea $\phi : [u,v[\longrightarrow D(0,1)$ una curva semiabierta cuyo conjunto límite esté contenido en la frontera del disco unidad y contenga más de un punto. Sea f una función holomorfa y acotada en $D(0,1)$. Si existe $\lim_{t\to v} f(\phi(t)) = c$ entonces $f = c$.*

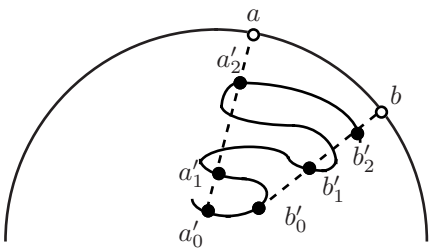
Demostración: Supongamos que la función $f(z) - c$ no es idénticamente nula en el disco $D(0,1)$. Sea k el orden de 0 en $f(z) - c$, de modo que la función

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{z^k}$$

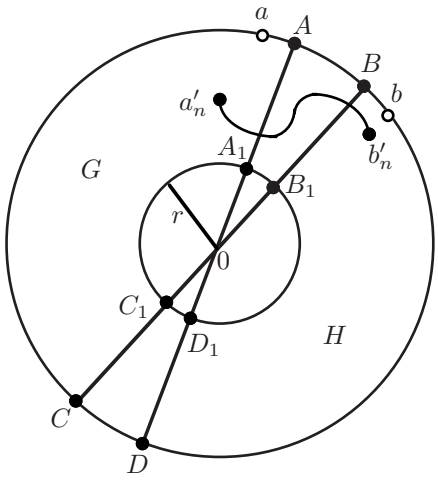
es holomorfa en el disco y $g(0) = \alpha \neq 0$. Es claro que g está acotada (en el disco $|z| \le 1/2$ lo está porque es continua, y en la corona restante lo está porque es el producto de dos funciones acotadas). Por hipótesis tenemos además que existe

$$\lim_{t\to v} g(\phi(t)) = 0.$$

Sean a y b dos puntos distintos del conjunto límite de f. Por hipótesis $|a| = |b| = 1$. Sean $\{a'_n\}$ y $\{b'_n\}$ sucesiones sobre la curva convergentes a a y b respectivamente, es decir, $a'_n = \phi(x_n)$, $b'_n = \phi(y_n)$ para ciertas sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ estrictamente crecientes en el intervalo $[u,v[$. Tomando subsucesiones podemos suponer que $x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots$



Llamemos σ'_n a la restricción de ϕ al intervalo $[x_n, y_n]$, que es un arco continuo con extremos a'_n y b'_n. El hecho de que $g(\phi(t))$ tiende a 0 se traduce en que el máximo del módulo de g sobre cada arco σ'^*_n tiende a 0 con n. Sea $0 < r < 1$. Existe un natural $N(r)$ tal que si $n > N(r)$ entonces σ'^*_n está contenido en el anillo $r < |z| < 1$. En caso contrario ϕ tendría un punto límite en el disco $|z| \leq r$.



Sea σ' uno de los arcos de circunferencia con extremos a y b. Tomemos m suficientemente grande de manera que σ' contenga un arco de extremos A y B (distintos de a y b) de amplitud π/m. Consideremos los puntos descritos en la figura. Sea G el abierto limitado por A, C, C_1, A_1 y sea H el abierto limitado por B, D, D_1, B_1. Es claro que si n es suficientemente grande $a'_n \in G$ y $b'_n \in H$ y el arco σ'_n permanece fuera del disco $|z| \leq r$.

La distancia de $\sigma'_n(t)$ a G es una función continua de t y vale 0 para t suficientemente pequeño. Existe un máximo valor $x_n < t_0 < y_n$ tal que dicha distancia es 0. Entonces, el punto $a_n = \sigma'_n(t_0)$ está en la clausura de G, pero todos los puntos $\sigma'_n(t)$ con $t_0 < t \leq y_n$ están fuera de dicha clausura. Por lo tanto a_n está en la frontera de G. Más concretamente, en el segmento A, A_1 o bien en el segmento C_1, C.

Ahora consideramos la restricción de σ'_n al intervalo $[t_0, y_n]$. La distancia de $\sigma'_n(t)$ a H es una función continua de t que finalmente es nula, luego hay un mínimo valor del parámetro $t_0 < t_1 < y_n$ donde es igual a 0. Así $b_n = \sigma'_n(t_1)$ está en la frontera de H y los puntos $\sigma'_n(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ están fuera de G y de H. Concretamente b_n ha de estar en el segmento B, B_1 o bien en el segmento D_1, D.

Llamemos σ_n a la restricción de σ'_n al intervalo $[t_0, t_1]$. Así σ_n es un arco continuo de extremos a_n y b_n y continuando los razonamientos anteriores se ve fácilmente que está contenido en el cerrado A, A_1, B_1, B o bien en C, D, D_1, C_1.

Todo esto puede hacerse para todo n suficientemente grande. Tiene que haber infinitos números n_k tales que $\sigma^*_{n_k}$ está contenido en uno de los dos cerrados en concreto. Supongamos que se trata de A, A_1, B_1, B (el caso contrario es idéntico a éste). Consideremos el giro $z \to \beta z$ que lleva a uno de los puntos A o B al 1 y deja al otro en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$. Llamemos s_k a la composición con este giro del arco σ_{n_k} y $h(z) = g(z/\beta)$. Obviamente la función h es holomorfa y acotada en el disco $D(0,1)$, $h(0) = \alpha \neq 0$ y, si llamamos

$$\mu_k = \max_{\zeta \in s^*_k} |h(\zeta)|,$$

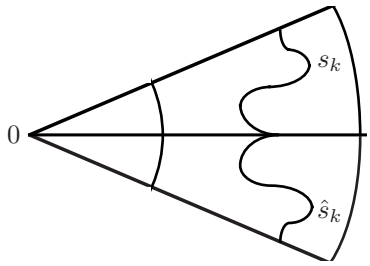
se cumple que $\lim_k \mu_k = 0$.

Sea h^* la función definida por la serie de potencias centrada en 0 que resulta de sustituir cada coeficiente de la serie de Taylor de h por su conjugado. Obviamente el radio de convergencia de esta serie es el mismo que el de la serie de h, luego h^* es holomorfa en $D(0,1)$ y cumple $h^*(z) = \overline{h(\overline{z})}$. Por lo tanto el módulo de h^* también está acotado en $D(0,1)$. Sea M una cota para h y h^*.

Llamemos $\hat{s}_k$ al arco simétrico de s_k respecto al eje real. Claramente

$$\mu_k = \max_{\zeta \in s_k^*} |h(\zeta)| = \max_{\zeta \in \hat{s}_k^*} |h(\zeta)|.$$

Los arcos s_k y $\hat{s}_k$ tienen un extremo en común, luego podemos considerar su unión S_k, que es un arco continuo simétrico respecto al eje real.



Sea $j(z) = h(z)h^*(z)$. La función j es holomorfa en $D(0,1)$ y cumple:

$$|j(z)| \le M^2, \qquad j(0) = |\alpha|^2 \neq 0, \qquad \max_{\zeta \in S_k^*} |j(\zeta)| \le M\mu_k \to 0.$$

El arco S_k está contenido en el ángulo de amplitud $2\pi/m$. Sus extremos están sobre los lados del ángulo y a la misma distancia de 0. Aplicando m giros a este ángulo obtenemos m arcos con extremos comunes, que podemos sumar hasta formar un arco cerrado, llamémoslo S.

Sea $J(z) = j(z)j(e^{2\pi i/m}z)j(e^{4\pi i/m}z)\cdots j(e^{2(m-1)\pi i/m}z)$. Obviamente J es una función holomorfa y acotada en el disco $D(0,1)$. Además $J(0) = |\alpha|^{2m} \neq 0$. Si $\zeta \in S^*$, uno de los puntos $e^{2u\pi i/m}\zeta$ está en S_k^*, luego $|J(\zeta)| \le M^{2(m-1)}M\mu_k$.

Consideremos una determinación continua del argumento de S. En cada uno de los m tramos que componen S la variación del argumento es $2\pi/m$, luego la variación total es 2π y, en consecuencia, $I(S,0) = 1$.

Por consiguiente, si Ω es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus S^*$ a la que pertenece 0, tenemos que Ω no es la componente no acotada, luego Ω es una dominio acotado y su frontera está contenida en S^*. La función J es holomorfa en Ω y continua en su clausura, por lo que el principio del módulo máximo nos permite concluir que $|J(0)| \le M^{2(m-1)}M\mu_k$. Si hacemos tender k a infinito llegamos a la contradicción $J(0) = 0$. ∎

Para aplicar este teorema necesitamos asegurar que los puntos de la frontera del dominio que consideremos satisfagan ciertas condiciones que excluyan casos como el del círculo cortado.

Definición 12.15 Sea Ω un dominio simplemente conexo y acotado en $\mathbb{C}$. Diremos que un punto $z \in \partial\Omega$ es *simple* si para toda sucesión $\{a_n\} \subset \Omega$ convergente a z existe un arco $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi\big[[0,1[\big] \subset \Omega$, $\phi(1) = z$ y para una cierta sucesión $\{t_n\} \subset [0,1[$ estrictamente creciente se cumple $\phi(t_n) = a_n$.

Es decir, z es simple si toda sucesión que converge a z desde Ω puede unirse para formar un arco continuo con extremo z sin salir de Ω. Un ejemplo de punto frontera no simple es cualquiera de los puntos del corte en el disco cortado. Una sucesión que converja a él alternativamente desde arriba y desde abajo puede prolongarse a una curva semiabierta, pero tendrá en su límite a todo el tramo de corte desde z hasta el centro y, por lo tanto, no podrá prolongarse continuamente hasta tener extremo z.

Teorema 12.16 *Sea $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ una transformación conforme de un dominio acotado simplemente conexo Ω en el disco unidad.*

a) Si z es un punto frontera simple de Ω entonces f se extiende a una función continua sobre $\Omega \cup \{z\}$ y se cumple $|f(z)| = 1$.

b) La aplicación f se extiende continuamente a la unión de Ω con todos sus puntos frontera simples.

c) Si todos los puntos frontera de Ω son simples entonces $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ es continua y suprayectiva.

Demostración: a) Tomemos cualquier sucesión $\{a_n\} \subset \Omega$ convergente a z y con ella formemos un arco γ según la definición de punto simple. La composición de γ (restringido a $[0,1[$) con f es una curva semiabierta ϕ en el disco unidad y por el teorema 12.13 su conjunto límite está contenido en la circunferencia unidad. Obviamente existe $\lim\limits_{t\to 1} f^{-1}\big(\phi(t)\big) = \lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = z$. Si el conjunto límite de ϕ tuviera más de un punto el teorema 12.14 implicaría que f^{-1} es constante, lo cual es absurdo, luego dicho conjunto límite consta de un único punto w tal que $|w| = 1$. En particular tenemos que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a w. Veamos que w es independiente de la sucesión de partida. Si partimos de dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que converjan a z, podemos formar una tercera $\{c_n\}$ que las contenga como subsucesiones y también converja a z. A partir de ellas obtenemos tres valores w_1, w_2 y w_3, pero como $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ son subsucesiones de $\{f(c_n)\}$, concluimos que los tres límites coinciden. Si definimos $f(z) = w$ resulta que toda sucesión que converge a z desde Ω cumple que su imagen por f converge a $f(z)$, luego f es continua en z.

b) Sea C la unión de Ω y el conjunto de sus puntos frontera simples. Por el apartado a) podemos extender f a C de modo que es continua en cada conjunto $W \cup \{z\}$. Si z es un punto frontera simple y $\{a_n\}$ es una sucesión en C convergente a z, por la continuidad de f en cada conjunto $\Omega \cup \{a_n\}$ existen puntos $b_n \in \Omega$ tales que $|a_n - b_n| < 1/n$ y $|f(a_n) - f(b_n)| < 1/n$. Entonces es claro que $\{b_n\}$ converge a z, luego por a) resulta que $\{f(b_n)\}$ converge a $f(z)$, y es obvio que $\{f(a_n)\}$ tiene el mismo límite.

c) Por el apartado b) tenemos que f se extiende continuamente a $\overline{\Omega}$. Como este conjunto es compacto, su imagen ha de ser un compacto contenido en $\overline{D(0,1)}$ y que contiene a $D(0,1)$. Así pues, $f[\overline{\Omega}] = \overline{D(0,1)}$. ∎

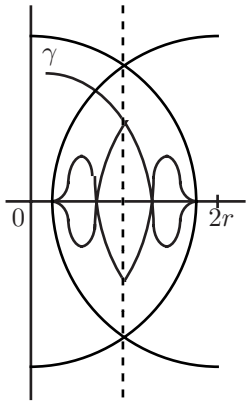
En realidad la extensión a la frontera no sólo es suprayectiva, sino también inyectiva. Lo probaremos a partir del teorema siguiente.

Teorema 12.17 (Teorema de Lindelöf) *Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ un arco (continuo) todos cuyos puntos estén en $D(0,1)$ excepto el extremo $\gamma(1) = 1$. Sea g una función holomorfa y acotada en $D(0,1)$. Si existe $\lim_{t\to 1} g(\gamma(t)) = L$, entonces existe $\lim_{t\to 1} g(t) = L$ (donde, en el segundo límite, t varía también en el intervalo $[0,1[$).*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos $|g| < 1$ y $L = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $t_0 < 1$ tal que si $t_0 \le t < 1$ entonces $|g(\gamma(t))| < \epsilon$ y $\operatorname{Re} g(t) > 1/2$. Sea $\operatorname{Re} g(t_0) < r < 1$. Definimos una función h en $\Omega = D(0,1) \cap D(2r,1)$ mediante

$$h(z) = g(z)\,\overline{g(\overline{z})}\,g(2r-z)\,\overline{g(2r-\overline{z})}.$$

Notar que la función $\overline{g(\overline{z})}$ es holomorfa en $D(0,1)$, pues se obtiene de g conjugando los coeficientes de su serie de Taylor en 0. Similarmente se concluye que $\overline{2r-\overline{z}}$ es holomorfa en $D(2r,1)$. Por consiguiente h es holomorfa y $|h| < 1$. Notamos que $h(r) = |g(r)|^4$. Si probamos que $|h| < \epsilon$ el teorema estará probado.



Sea $E_1 = \gamma[t_1, 1]$, donde t_1 es el mayor t para el que $\operatorname{Re}\gamma(t) = r$, sea E_2 el conjugado de E_1 y sea E la unión de $E_1 \cup E_2$ con su simétrico respecto a la recta $x = r$. Teniendo en cuenta que $|h|$ es simétrica respecto a la recta $x = r$ y el eje real, es claro que $|h(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \Omega \cap E$.

Tomamos $c > 0$ y definimos

$$h_c(z) = h(z)(1-z)^c(2r-1-z)^c,$$

para $z \in \Omega$. Sea K la unión de E y las componentes conexas acotadas del complementario de E. Entonces K es compacto y, si definimos $h_c(1) = h_c(2r-1) = 0$, entonces h_c es continua en K, holomorfa en su interior y $|h_c| < \epsilon$ en la frontera. El principio del módulo máximo implica que $|h_c| < \epsilon$ en K y, en particular, $|h_c(r)| < \epsilon$. Haciendo tender c a 0 queda $|h(r)| < \epsilon$. ∎

Teorema 12.18 (Osgood-Taylor-Carathéodory) *Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una transformación conforme entre dominios simplemente conexos acotados cuyas fronteras sean puntos simples. Entonces f se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow \overline{\Omega}_2$.*

DEMOSTRACIÓN: La acotación obliga a que las fronteras de los dominios tengan más de un punto. Podemos suponer que $\Omega_2 = D(0,1)$, pues en el caso general construimos dos transformaciones conformes u y v de los dominios en $D(0,1)$ y las componemos con f para obtener una transformación de $D(0,1)$ en sí mismo. Si extendemos a las fronteras las tres transformaciones indicadas, su composición será una extensión de f.

Por el teorema 12.16 sabemos que f admite una extensión continua de $\overline{\Omega}_1$ en el disco unidad cerrado. Basta ver que si z_1 y z_2 son puntos frontera distintos, entonces sus imágenes por la extensión son distintas. En caso contrario, multiplicando f por una constante adecuada de módulo 1 podemos suponer que $f(z_1) = f(z_2) = 1$. Existen arcos (continuos) γ_1 y γ_2 con un extremo igual a z_1, z_2 respectivamente y el resto contenido en Ω. Sus imágenes por f están en las hipótesis del teorema anterior aplicado a $g = f^{-1}$, luego concluimos que $\lim_{t\to 1} g(t) = z_1 = z_2$. ∎

En combinación con el teorema de Riemann obtenemos el enunciado siguiente:

Teorema 12.19 *Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios acotados simplemente conexos cuyas fronteras sean puntos simples. Sean $\{a,b,c\}$ tres puntos distintos de $\partial\Omega_1$ y $\{p,q,r\}$ tres puntos distintos de $\partial\Omega_2$. Entonces existe una única transformación conforme $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ cuya extensión continua a las fronteras cumple $f(a) = p$ y $\{f(b), f(c)\} = \{q,r\}$ (no podemos prefijar el orden).*

DEMOSTRACIÓN: Por el mismo argumento del teorema anterior, las transformaciones conformes entre Ω_1 y Ω_2 se corresponden con las transformaciones conformes del disco unidad en sí mismo. Es fácil ver que el teorema se reduce a probar que dados $\{a,b,c\}$ y $\{p,q,r\}$ en la circunferencia unidad existe una única transformación de Möbius que deja invariante al disco unidad cerrado y cumple lo que se le pide a f en el enunciado.

Ahora bien, existe una única transformación de Möbius M que transforma (a,b,c) en $(1,i,-i)$ (en este orden). Puede ocurrir que M transforme el disco unidad abierto en sí mismo o bien en su simétrico respecto a la circunferencia unidad. En el segundo caso la transformación $M(1/z)$ deja fijo al disco unidad y transforma (a,b,c) en $(1,-i,i)$. Así pues, existe una única transformación M que deja fijo al disco unidad y además cumple $M(a) = 1$, $\{M(b), M(c)\} = \{i,-i\}$. Razonando igualmente con (p,q,r) obtenemos una transformación N que cumple $N(p) = 1$, $\{N(q), N(r)\} = \{i,-i\}$. Entonces MN^{-1} cumple lo pedido. Si hubiera otra $L \neq MN^{-1}$, entonces $LN \neq M$ y cumpliría las mismas condiciones que M. ∎

El teorema anterior es válido igualmente para dominios no acotados siempre y cuando sus complementarios en $\mathbb{C}^\infty$ tengan interior no vacío, pues entonces una transformación de Möbius los transforma en dominios acotadas, y al ser homeomorfismos de $\mathbb{C}^\infty$ conservan todas las hipótesis.

La condición de que los puntos de la frontera sean simples es natural en vista de las técnicas empleadas, pero no es muy cómoda de comprobar en la práctica y no es evidente que sea necesaria.

Una condición sencilla para que un punto $z \in \partial\Omega$ sea simple es que para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $D(z,\epsilon) \cap \Omega$ sea conexo, pues entonces las sucesiones se pueden enlazar con arcos continuos contenidos en discos cada vez menores, lo que garantiza que la curva semiabierta que se forma tiene a z como único punto límite. No detallamos el argumento porque en la sección siguiente veremos una condición mejor.

12.3 El teorema de Jordan

Para acabar de perfilar los resultados que acabamos de ver necesitamos un interesante resultado topológico. Su enunciado es muy simple, aunque su demostración no lo es en absoluto. Una *curva de Jordan* es un arco cerrado $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ con la propiedad de que su restricción a $[a,b[$ es inyectiva. Aquí, como en el resto de la sección, consideramos arcos continuos, no necesariamente diferenciables. Una curva de Jordan es, pues, un arco continuo cerrado que no pasa dos veces por un mismo punto, quitado el hecho de que termina donde empieza. En la figura siguiente vemos un ejemplo de curva de Jordan y un ejemplo de arco cerrado que no es de Jordan.

Vemos que el arco de la izquierda divide al plano complejo en dos componentes conexas, mientras que el arco de la derecha determina cinco. Nuestro objetivo será demostrar la afirmación siguiente:

Teorema 12.20 (Teorema de Jordan) *Si ϕ es una curva de Jordan entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$ tiene exactamente dos componentes conexas y ϕ^* es la frontera de ambas.*

Pese a la sencillez de su enunciado, este teorema no es fácil de probar formalmente. El propio Jordan reconoció que su prueba original (de 1887) era incompleta. En 1903 Osgood construyó una curva de Jordan con área positiva, hecho contrario a toda intuición que hizo dudar de si el teorema sería cierto en toda su generalidad. Hoy se conocen diversas pruebas, muchas de ellas muy técnicas. Entre las más antiguas están la de Borel y Rosenthal (1924). La que veremos aquí es una variante de la prueba de Čech (1969).

Conviene observar que no vamos a necesitar ningún resultado sobre derivación de funciones complejas. Tan sólo usaremos los hechos elementales que probamos en el capítulo I.

Homotopías En primer lugar añadiremos algunos resultados sobre índices a los que ya vimos en el capítulo I. Allí vimos que la función $I(\phi, z)$ es continua

en z y ahora probaremos que, en cierto sentido, también es continua en ϕ, en el sentido de que, dado un punto z, si dos arcos son suficientemente parecidos sus índices respecto a z son iguales. En efecto:

Teorema 12.21 *Sea $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco cerrado y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$. Entonces existe un $\delta > 0$ de manera que si $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un arco cerrado y cumple $|\psi(t) - \phi(t)| < \delta$ en $[a,b]$ entonces $I(\phi, z) = I(\psi, z)$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $\delta = \inf_{t\in[a,b]} |\phi(t) - z| > 0$. Si $|\psi(t) - \phi(t)| < \delta$ en $[a,b]$ entonces $\psi(t)$ no puede tomar el valor z, luego $I(\psi, z)$ está definido. Consideremos el arco cerrado

$$\chi(t) = \frac{\psi(t) - z}{\phi(t) - z}.$$

Claramente

$$|\chi(t) - 1| < \frac{\delta}{|\phi(t) - z|} \leq 1,$$

luego $\chi[a,b] \subset D(1,1)$ y por consiguiente $I(\chi, 0) = 0$. Por otra parte es fácil ver que $I(\chi, 0) = I(\psi, z) - I(\phi, z)$ (a partir de la caracterización del índice en términos de logaritmos), luego $I(\phi, z) = I(\psi, z)$. ∎

Este teorema puede mejorarse de modo que sea aplicable a arcos cerrados más alejados entre sí. Para ello introducimos el concepto de homotopía.

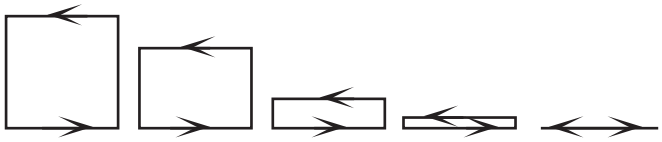
Definición 12.22 Sean $\phi_0, \phi_1 : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{C}^\infty$ dos arcos cerrados. Diremos que son *homotópicos* en A si existe una función continua $h : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow A$ que cumpla:

a) $h(x,a) = h(x,b)$ para todo $x \in [0,1]$,

b) $h(0,t) = \phi_0(t)$, $h(1,t) = \phi_1(t)$, para todo $t \in [a,b]$.

Diremos que h es una *homotopía* entre ϕ_0 y ϕ_1.

En la práctica escribiremos $\phi_x(t) = h(x,t)$, de modo que cada ϕ_x es un arco cerrado. La continuidad de h significa que para valores cercanos de x los arcos ϕ_x son parecidos. Por ejemplo, la figura siguiente muestra cómo un cuadrado es homotópico a un segmento (recorrido dos veces en sentidos opuestos). El lector puede escribir explícitamente la homotopía.



El conjunto en el que se realiza la homotopía es importante. Por ejemplo, si A es $\mathbb{C}$ menos un punto interior del cuadrado, entonces el cuadrado no es homotópico en A a un segmento, pues en la deformación el punto eliminado habría de cruzar alguno de los arcos intermedios, produciendo una discontinuidad (todavía no estamos en condiciones de probar esto formalmente, pero la idea geométrica es clara).

Es fácil justificar que la homotopía es una relación de equivalencia entre los arcos con un mismo dominio $[a,b]$. Por ejemplo, para probar la transitividad, si tenemos dos homotopías ϕ_x y ψ_x de modo que $\phi_1 = \psi_0$, basta definir

$$\chi_x = \begin{cases} \phi_{2x} & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ \psi_{2(x-1/2)} & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

y comprobar que χ_x es una homotopía entre ϕ_0 y ψ_1.

Veamos ahora la generalización anunciada del teorema 12.21.

Teorema 12.23 *Si ϕ_0, $\phi_1 : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{C}$ son dos arcos cerrados homotópicos en A, entonces $I(\phi_0, z) = I(\phi_1, z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus A$.*

Demostración: Fijemos un $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Sea h una homotopía entre ambos arcos. La imagen por h del compacto $[0,1] \times [a,b]$ es un compacto contenido en A, luego no contiene a z. Sea $\delta > 0$ la distancia de z a este compacto. Entonces $\delta \le |\phi_x(t) - z|$ para todo $(x,t) \in [0,1] \times [a,b]$, luego δ cumple la conclusión del teorema 12.21 simultáneamente para todos los arcos ϕ_x (ver la definición de δ en la prueba).

Como h es uniformemente continua existe un $\epsilon > 0$ tal que si $|x - x'| < \epsilon$ en $[0,1]$, entonces $|h(x,t) - h(x',t)| < \delta$ para todo $t \in [a,b]$, luego $|\phi_x(t) - \phi_{x'}(t)| < \delta$ y por el teorema 12.21 tenemos $I(\phi_x, z) = I(\phi_{x'}, z)$.

Ahora basta tomar una sucesión finita $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de modo que $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ y, al aplicar las igualdades de índices que hemos obtenido, concluimos que $I(\phi_0, z) = I(\phi_1, z)$. ∎

Definición 12.24 Un arco cerrado $\phi : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{C}^\infty$ es *homotópico a un punto* en A si es homotópico en A a un arco constante.

Es obvio que un arco constantemente igual a z_0 tiene índice 0 respecto a cualquier punto $z \neq z_0$, luego el teorema anterior nos permite concluir que si ϕ es homotópico a un punto en $A \subset \mathbb{C}$, entonces $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus A$.

Aunque no nos va a hacer falta luego, ahora podemos caracterizar los abiertos simplemente conexos en términos puramente topológicos:

Teorema 12.25 *Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ es simplemente conexo si y sólo si todo arco cerrado contenido en Ω es homotópico a un punto en Ω.*

Demostración: Llamemos abiertos *homotópicamente conexos* a los que cumplen esta propiedad. Es claro que ambos conceptos se conservan al aplicar una transformación de Möbius, por lo que podemos considerar un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Si Ω es homotópicamente conexo, entonces todo arco cerrado contenido en Ω tiene índice nulo respecto a los puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, luego es simplemente conexo.

Recíprocamente, si Ω es simplemente conexo el teorema de Riemann implica que $\Omega = \mathbb{C}$ o bien Ω es homeomorfo a $D(0,1)$. Es claro que la propiedad de ser homotópicamente conexo es topológica, luego basta ver que $\mathbb{C}$ y $D(0,1)$ lo son. Veamos en general que todo abierto convexo A es homotópicamente conexo.

Fijemos un punto $z_0 \in A$. Si $\phi : [a,b] \longrightarrow A$ es un arco cerrado entonces $h(x,t) = (1-t)f(t)+tz_0$ es una aplicación continua en $[0,1]\times[a,b]$ cuya imagen está contenida en A. Claramente es una homotopía entre ϕ y z_0. ∎

Como ya hemos dicho, no vamos a usar el teorema anterior en la prueba del teorema de Jordan. Tan sólo nos hará falta el hecho obvio de que todo arco cerrado en $\mathbb{C}$ es homotópico a un punto.

Logaritmos continuos I Ahora probaremos algunos hechos sobre existencia de logaritmos continuos de funciones definidas sobre ciertos compactos. La definición de logaritmo continuo es la obvia:

Definición 12.26 Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Un *logaritmo continuo* de f es una función continua $g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in A$.

Una *raíz n-sima continua* de f es una función continua $h : A \longrightarrow \mathbb{C}$ de manera que $f(z) = h(z)^n$ para todo $z \in A$.

Claramente, una condición necesaria para que una función tenga un logaritmo continuo es que no se anule. Pronto veremos que esta condición no siempre es suficiente. También es inmediato que si f tiene un logaritmo continuo entonces tiene una raíz n-sima continua para todo natural n.

El teorema siguiente es el resultado básico sobre existencia de logaritmos continuos.

Teorema 12.27 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua. Entonces f tiene un logaritmo continuo si y sólo si $I(\phi \circ f, 0) = 0$ para todo arco cerrado ϕ contenido en Ω.*

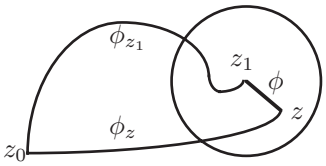
Demostración: Si f tiene un logaritmo continuo $\log f$, entonces $\log f\big(\phi(t)\big)$ es una determinación continua del logaritmo de $\phi\circ f$, para cualquier arco cerrado ϕ en Ω y, si calculamos con él el índice de 0, obtenemos 0.

Supongamos ahora la condición sobre los arcos y veamos que f tiene un logaritmo. Podemos definir el logaritmo de f independientemente en cada componente conexa de Ω, y cada una de ellas cumple también la hipótesis sobre los arcos, luego podemos suponer que Ω es conexo.

Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$ y para cada $z \in \Omega$ tomemos un arco $\phi_z : [0,1] \longrightarrow \Omega$ que una z_0 con z. Ahora tomamos un logaritmo continuo L_z de $\phi_z \circ f$. Podemos fijar un logaritmo w_0 de $f(z_0)$ y exigir que $L_z(0) = w_0$.

Definimos $\log f(z) = L_z(1)$. Así, para todo $z \in \Omega$ se cumple

$$e^{\log f(z)} = e^{L_z(1)} = f(\phi_z(1)) = f(z).$$



Basta probar que la función $\log f(z)$ es continua. Fijemos un punto $z_1 \in \Omega$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_1,r)} \subset \Omega$ y $f\left[\overline{D(z_1,r)}\right] \subset D\big(f(z_1), |f(z_1)|\big)$. Sea L un logaritmo continuo en este último disco. Podemos exigir que $L(f(z_1)) = \log f(z_1)$.

Sea $z \in D(z_1,r)$. Sea ϕ el segmento $[z_1,z]$ y consideremos el arco cerrado $\psi = -\phi_z \cup \phi_{z_1} \cup \phi$.

Una determinación continua de logaritmo de $\psi \circ f$ es $-L_z \cup L_{z_1} \cup (\phi \circ f \circ L)$. En efecto, sólo hay que notar que

$$(-L_z)(1) = L_z(0) = L_{z_1}(0) = w_0 \quad \text{y} \quad L_{z_1}(1) = L(f(\phi(0))).$$

Por lo tanto $I(\psi \circ f, 0) = (L(f(\phi(1)) - L_z(1))/2\pi i$, y por hipótesis el índice es 0, es decir, $\log f(z) = L(f(z))$ para todo $z \in D(z_1,r)$. Esto prueba que $\log f(z)$ es continua en z_1, y z_1 es arbitrario. ∎

En realidad sólo nos va a hacer falta el siguiente caso particular:

Teorema 12.28 *Toda función continua $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un logaritmo continuo.*

Demostración: Si ϕ es un arco cerrado en $\mathbb{C}$ entonces ϕ es homotópico a un punto en $\mathbb{C}$. Sea h una homotopía. Entonces $h \circ f$ es una homotopía entre $\phi \circ f$ y un punto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego según el teorema 12.23 tenemos que $I(\phi \circ f, 0) = 0$. Ahora aplicamos el teorema anterior. ∎

Extensión de funciones continuas Demostraremos ahora un par de resultados topológicos sobre extensión de funciones continuas. El primero es válido en espacios normales cualesquiera y para funciones no necesariamente acotadas, pero para comodidad del lector damos aquí una prueba elemental del caso que vamos a usar.

Teorema 12.29 (Teorema de Tietze) *Si M es un espacio métrico, $C \subset M$ es cerrado y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada entonces f se extiende a una función continua en M.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos $f : C \longrightarrow [0,1]$. Veamos que

$$F(x) = \begin{cases} \inf\limits_{c \in C} \left(f(c) + \frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1 \right) & \text{si } c \in M \setminus C \\ f(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

es una extensión continua de f.

para cada $c \in C$ y cada $x \in M \setminus C$ llamemos

$$p_c(x) = f(c) + \frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1.$$

Notemos que para cada $x \in M \setminus C$ y cada $\epsilon > 0$ siempre podemos encontrar un punto $c \in C$ que haga

$$\frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1 < \epsilon,$$

por lo que $F : M \longrightarrow [0,1]$. Para probar que F es continua en $M \setminus C$ basta ver que lo es en cada bola abierta B cuya clausura no corte a C. Fijada B, sea $\eta_0 = d(C,B) > 0$ y sea $\eta_1 = \sup_{x \in B} d(x,C) < +\infty$.

Tomemos x, $y \in B$ y $c \in C$ con $d(x,c) \leq 3\eta_0$. Entonces

$$\begin{aligned} |p_c(x) - p_c(y)| &= \left| \frac{d(x,c)}{d(x,C)} - \frac{d(y,c)}{d(y,C)} \right| \\ &\leq \frac{d(x,C)\,|d(y,C) - d(x,C)| + d(x,C)\,|d(x,c) - d(y,c)|}{d(x,C)d(y,C)} \\ &\leq \frac{3\eta_0 + \eta_1}{\eta_0^2}\, d(x,y) = K d(x,y). \end{aligned}$$

Dado $x \in B$, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe un $c \in C$ tal que $|F(x) - p_c(x)| < \epsilon/2$. Ha de ser $d(x,c) \leq 3\eta_0$, pues en caso contrario $p_c(x) \geq (3\eta_0)/\eta_0 - 1 \geq 2$.

Fijemos $\delta = \epsilon/2K$. Así si $d(x,y) < \delta$ se cumple $|p_c(x) - p_c(y)| < \epsilon/2$, luego $|F(x) - p_c(y)| < \epsilon$ y por consiguiente $F(y) \leq p_c(y) \leq F(x) + \epsilon$.

Tomemos ahora $c' \in C$ tal que $|F(y) - p_{c'}(y)| < \epsilon/2$. Como antes concluimos que $d(y,c) \leq 3\eta_0$, luego $|p_{c'}(x) - p_{c'}(y)| < \epsilon/2$ y así $F(x) \leq F(y) + \epsilon$.

En resumen, si $d(x,y) < \delta$ entonces $|F(x) - F(y)| < \epsilon$. Esto prueba que F es continua en x.

Veamos ahora que F es continua en todo punto $c_0 \in C$. Dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que si $c \in C$ cumple $d(c,c_0) < 4\delta$ entonces $|f(c) - f(c_0)| < \epsilon/2$. Basta probar que si $x \in M \setminus C$ cumple $d(x,c_0) < \delta$ entonces $|F(x) - f(c_0)| < \epsilon$.

Tomemos $c \in C$ tal que

$$d(x,c) \leq d(x,c_0) < \delta \quad \text{y} \quad |d(x,c) - d(x,C)| < (\epsilon/2) d(x,C).$$

Así

$$\frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $d(c,c_0) < 2\delta$ tenemos $F(x) \leq p_c(x) \leq f(c_0) + \epsilon$. Por otro lado, para todo $c \in C$, si $d(x,c) \geq 2\delta$ entonces

$$p_c(x) \geq \frac{2\delta}{\delta} - 1 = 1 \geq f(c_0) - \epsilon,$$

y si $d(x,c) < 2\delta$ entonces $d(c,c_0) < 4\delta$, luego $p_c(x) \geq f(c) \geq f(c_0) - \epsilon$.

Por consiguiente $F(x) \geq f(c_0) - \epsilon$ y en total $|F(x) - f(c_0)| \leq \epsilon$. ∎

A partir de aquí probaremos un resultado sobre extensión de funciones de variable compleja. Necesitamos el concepto de homotopía de funciones:

Definición 12.30 Dos funciones continuas f_0, $f_1 : A \longrightarrow B \subset \mathbb{C}$ son *homotópicas* en B si existe una función continua $h : [0,1] \times A \longrightarrow B$ tal que $h_0(z) = f_0(z)$ y $h_1(z) = f_1(z)$ para todo $z \in A$.

Como en el caso de arcos, es fácil ver que la homotopía en B de aplicaciones continuas de A en B es una relación de equivalencia.

Teorema 12.31 (Borsuk) *Sean $A \subset B$ subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ de modo que A sea compacto. Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funciones continuas acotadas*[1] *tales que f es homotópica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $g|_A$. Entonces f admite una extensión continua $F : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Demostración: Sea $C = ([0,1] \times A) \cup (\{1\} \times B)$. Sea h una homotopía entre f y $g|_A$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y extendámosla a C mediante $h(1,z) = g(z)$. Es claro que h sigue siendo continua y acotada.

Aplicamos el teorema de Tietze a las funciones $\operatorname{Re} h$ e $\operatorname{Im} h$ y obtenemos así una función continua $H : [0,1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que extiende a h. Entonces $H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$ es un abierto que contiene a C.

Sea $A_k = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z,A) \le 1/k\}$. Claramente estos conjuntos forman una sucesión decreciente de compactos y

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} ([0,1] \times A_k) = A \times [0,1] \subset C \subset H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}].$$

Por la compacidad existe un k tal que $[0,1] \times A_k \subset H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$. En caso contrario tomaríamos una sucesión de puntos $x_k \in [0,1] \times A_k \setminus H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$. Como está contenida en A_1 tendría una subsucesión convergente a un punto $x \in [0,1] \times A_1$, pero la subsucesión está finalmente en cada cerrado $A_k \times [0,1]$, luego en realidad $x \in [0,1] \times A$. Por otro lado la subsucesión está en el cerrado $\mathbb{C} \setminus H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$, luego $x \in \big([0,1] \times A\big) \setminus H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$, contradicción.

Para cada $z \in B$ es claro que

$$(\text{mín}\{1, kd(z,A)\}, z) \in \big([0,1] \times A_k\big) \cup \big(\{1\} \times B\big) \subset H^{-1}[\mathbb{C} \setminus \{0\}],$$

luego $F(z) = H(\text{mín}\{1, kd(z,A)\}, z)$ es la extensión buscada de f. ∎

Logaritmos continuos II El teorema 12.27 caracteriza las funciones continuas en un abierto que tienen un logaritmo continuo. Ahora caracterizamos las funciones continuas en un compacto con esta misma propiedad.

Teorema 12.32 (Borsuk) *Sea $C \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : C \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una aplicación continua. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) f es homotópica a una constante en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[1] Admitiendo el teorema de Tietze para funciones no acotadas podemos suprimir la hipótesis de que g esté acotada.

b) f admite una extensión continua $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) f tiene un logaritmo continuo.

DEMOSTRACIÓN: a) → b) se sigue del teorema anterior, tomando como g una función constante en $\mathbb{C}$.

b) → c) F tiene un logaritmo continuo por el teorema 12.28, luego f también.

c) → a) Si $\log f$ es un logaritmo continuo de f en C, entonces $h_t(z) = e^{t \log f(z)}$ es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre f y la función constante 1. ∎

Como consecuencia inmediata tenemos:

Teorema 12.33 *Sea C un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y f_0, $f_1 : C \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dos funciones continuas homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces f_0 tiene un logaritmo continuo si y sólo si lo tiene f_1.*

DEMOSTRACIÓN: f_0 es homotópica a una constante en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si y sólo si lo es f_1. ∎

Veamos otro criterio que usaremos después:

Teorema 12.34 *Sea C un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $f : C \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua. Si 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus f[C]$ entonces f tiene un logaritmo continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos r tal que $f[C] \subset D(0, r)$. Entonces r está en la componente conexa no acotada de $f[C]$, al igual que 0, luego existe un arco $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ con extremos 0 y r contenido en $\mathbb{C} \setminus f[C]$. Entonces $h_t(z) = f(z) - \phi(t)$ es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de f con la función $g = f - r$, y se cumple que $g[C] \subset D(-r, r)$.

Por lo tanto, $h_t^*(z) = (1-t)(g(z)+r) - r$ es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre g y la función constante $-r$, luego f es homotópica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a una constante, y por el teorema 12.32 tiene un logaritmo continuo. ∎

Funciones sobre la circunferencia Ahora vamos a estudiar con más detalle el caso concreto en que C es la circunferencia unidad $|z| = 1$. Para construir aplicaciones continuas sobre la circunferencia usaremos este sencillo resultado, cuya prueba dejamos al lector.

Teorema 12.35 *Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función continua que satisfaga $f(0) = f(1)$ y sea C la circunferencia unidad $|z| = 1$. Entonces la función $g : C \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(e^{2\pi i x}) = f(x)$ para $x \in [0, 1]$ es continua sobre C.*

En particular, si ϕ es una curva de Jordan entonces ϕ^* es homeomorfo a la circunferencia unidad (no es restricción suponer que el dominio de ϕ es el intervalo $[0, 1]$).

Teorema 12.36 *Sea C la circunferencia unidad. Entonces toda función continua $f : C \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se expresa de forma única como $f(z) = z^n e^{g(z)}$, para cierta función continua $g : C \longrightarrow \mathbb{C}$ y un $n \in \mathbb{Z}$ (entendiendo que g está determinada salvo un múltiplo entero de $2\pi i$).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi(t) = f(e^{2\pi it})$, para $t \in [0,1]$. Sea $2\pi i\,\psi(t)$ una determinación continua del logaritmo de ϕ, de modo que $\phi(t) = e^{2\pi i\psi(t)}$. Sea $n = I(\phi, 0) = \psi(1) - \psi(0)$. Entonces

$$e^{-2\pi int} f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(\psi(t)-nt)} \quad \text{para todo } t \in [0,1]. \tag{12.3}$$

La función $2\pi i\,(\psi(t) - nt)$ toma el mismo valor en 0 y en 1, luego por el teorema anterior la función $g(e^{2\pi it}) = 2\pi i(\psi(t) - nt)$ es continua sobre C. Así (12.3) se convierte en

$$e^{-2\pi int} f(e^{2\pi it}) = e^{g(e^{2\pi it})} \quad \text{para todo } t \in [0,1],$$

es decir, $f(z) = z^n e^{g(z)}$, para todo $z \in C$.

Si tenemos dos expresiones $f(z) = z^n e^{g(z)} = z^m e^{h(z)}$, basta probar que $n = m$, pues entonces $e^{g(z)} = e^{h(z)}$, luego $g(z) - h(z)$ toma sólo valores múltiplos de $2\pi i$ y por conexión $g(z) - h(z) = 2k\pi i$, para un $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Ahora bien, $z^{n-m} = e^{h(z)-g(z)}$, luego basta probar que el único entero n tal que la función z^n que tiene un logaritmo continuo es $n = 0$.

Supongamos que $z^n = e^{g(z)}$ con $n \neq 0$. Sea $h(z) = g(z)/n$. Entonces $z^n = (e^{h(z)})^n$, luego $(z/e^{h(z)})^n = 1$, luego $z/e^{h(z)} = e^{2k\pi i/n}$, para un cierto $k = 0, \ldots, n-1$. Así pues, todo $z \in C$ es de la forma $z = e^{h(z)} e^{2k\pi i/n}$, para un único k. Sea $C_k = \{z \in C \mid z = e^{h(z)} e^{2k\pi i/n}\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Acabamos de probar que los conjuntos C_k son disjuntos y su unión es todo C. Pero es inmediato comprobar que son cerrados, lo que contradice la conexión de C. ∎

Lo que este teorema significa es que las únicas funciones continuas en la circunferencia unidad que no tienen un logaritmo continuo son las potencias no nulas de z, en el sentido de que cualquier otra función así se diferencia de una potencia de z en una función que sí tiene un logaritmo. Para expresar adecuadamente este hecho hemos de usar el lenguaje de la teoría de grupos:

Definición 12.37 Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Llamaremos $G(K)$ al grupo de las funciones continuas de K en $\mathbb{C}$ que no se anulan (es un grupo con el producto definido puntualmente).

Llamaremos $E(K)$ al conjunto de las funciones continuas en K que admiten un logaritmo continuo (o sea, a las funciones exponenciales). Obviamente $E(K)$ es un subgrupo de $G(K)$.

En estos términos, el teorema anterior afirma que, para el caso de la circunferencia unidad C, todo elemento del grupo cociente $G(C)/E(C)$ se expresa de forma única como $[z]^n$ para un cierto entero n, es decir, que el grupo cociente es un grupo cíclico infinito generado por $[z]$.

Nuestra prueba del teorema de Jordan se basará en generalizar este resultado a compactos cualesquiera. Por lo pronto lo traducimos a cuadrados:

Teorema 12.38 *Sea K (la frontera de) un cuadrado de centro p. Entonces toda función $f \in G(K)$ se expresa en la forma $f(z) = (z-p)^n e^{g(z)}$, para una cierta función continua g sobre K y un cierto entero n.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la aplicación $z \mapsto z-p$ es un homeomorfismo de K en un cuadrado de centro 0, y la aplicación $z \mapsto z/|z|$ es un homeomorfismo de este cuadrado sobre la circunferencia unidad C, es decir, que la aplicación $\phi : K \longrightarrow C$ dada por $\phi(z) = (z-p)/|z-p|$ es un homeomorfismo.

La aplicación $\phi^{-1} \circ f$ es continua en C y no se anula, luego el teorema 12.36 nos da que es de la forma $f(\phi^{-1}(z)) = z^n e^{h(z)}$. Por lo tanto, para todo $z \in K$ se cumple

$$f(z) = \phi(z)^n e^{h(\Phi(z))} = (z-p)^n |z-p|^{-n} e^{h(\phi(z))} = (z-p)^n e^{h(\phi(z))-n\log|z-p|}.$$

■

Podríamos probar la unicidad, pero no nos va a hacer falta.

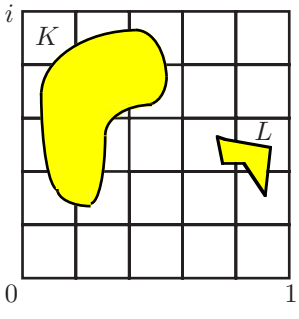
Funciones sobre compactos arbitrarios El teorema siguiente es el primer paso para determinar la estructura de los grupos $G(K)/E(K)$ en el caso general.

Teorema 12.39 *Sea K un subconjunto compacto de C y $f : K \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ una función continua. Entonces existe un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{C}\setminus K$ y enteros $n_1, \ldots, n_N$ tales que la función*

$$F(z) = f(z)\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)^{n_i}$$

tiene un logaritmo continuo en K.

DEMOSTRACIÓN: Transformando K con una función $z \mapsto az+b$ podemos suponer que $K \subset]0,1[\times]0,1[$. El teorema de Tietze nos da una función continua $f_0 : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ que extiende a f.

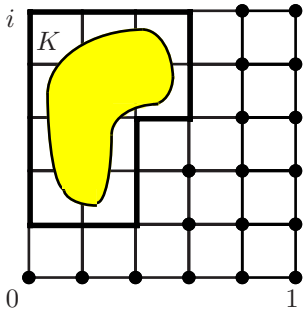


Sea $L = f_0^{-1}[0]$, que es un compacto disjunto de K. Sea $r = d(K,L) > 0$. Sea m un número natural mayor que $\sqrt{2}/r$ y dividamos el cuadrado unidad en $m \times m$ cuadrados de lado $1/m$. Llamémoslos C_{ij} y sea p_{ij} el centro de C_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, m$.

La elección de r y de m hace que un mismo cuadrado no pueda cortar simultáneamente a K y a L luego, si llamamos K_1 a la unión de todos los cuadrados que cortan a K, obtenemos un compacto disjunto con L. Sea f_1 la restricción de f_0 a K_1. Así f_1 es una función continua que no se anula y extiende a f. Extendemos f_1 a los vértices de todos los cuadrados sobre los que no está ya definida asignándoles el valor 1.

De este modo, para cada lado de cada uno de los cuadrados, o bien f_1 está definida sobre todo él o bien sólo está definida sobre sus extremos. En el último

caso es claro que podemos extender f_1 a todo el lado de modo que f_1 siga siendo continua y no nula (se trata de construir un arco con dos extremos dados no nulos y que no pase por 0).



Llamemos K_2 a la unión de K_1 con las fronteras de todos los cuadrados. Según acabamos de observar, podemos extender f_1 a una función continua f_2 sobre K_2 que no se anule. Tenemos que para cada i, j, la función f_2 está definida sobre todo C_{ij} o sólo sobre su frontera. Sea J el conjunto de los pares (i,j) para los que se da este último caso.

Para cada $(i,j) \in J$ el teorema 12.38 nos da que existe un entero n_{ij} tal que la función $(z-p_{ij})^{n_{ij}} f_2(z)$ (restringida a la frontera de C_{ij}) tiene un logaritmo continuo, luego por el teorema 12.32 admite una extensión continua a $\mathbb{C}$ (y en particular a C_{ij}) que no se anula. Llamémosla F_{ij}.

Ahora podemos definir F sobre $[0,1]\times[0,1]$ mediante

$$F(z) = \begin{cases} f_2(z) \prod_{(i,j)\in J} (z-p_{ij})^{n_{ij}} & \text{si } z \in K_2 \\ F_{uv}(z) \prod_{\substack{(i,j)\in J \\ (i,j)\neq(u,v)}} (z-p_{ij})^{n_{ij}} & \text{si } z \in C_{uv},\ (u,v)\in J \end{cases}$$

La función F es continua en $[0,1]\times[0,1]$, no se anula y extiende a la función

$$f(z) \prod_{(i,j)\in J} (z-p_{ij})^{n_{ij}}.$$

Pero $h(z,t) = F((1-t)z)$ es una homotopía en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ entre F y una constante, luego por el teorema 12.32 tiene un logaritmo continuo. ∎

En términos de grupos, el teorema anterior equivale a que toda clase del grupo cociente $G(K)/E(K)$ se expresa como producto de un número finito de clases $[z-p]$, para ciertos puntos $p \in \mathbb{C}\setminus K$. El paso siguiente es demostrar que los puntos p se pueden tomar en un conjunto mucho más pequeño.

Teorema 12.40 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Para cada componente conexa acotada C de $\mathbb{C}\setminus K$ escojamos un punto $p_C \in C$. Entonces, cada elemento del grupo cociente $G(K)/E(K)$ se expresa como un producto finito de clases $[z-p_C]$ (entendiendo que si no hay componentes conexas no acotadas entonces $G(K)/E(K) = 1$).*

Demostración: Basta probar que toda clase $[z-p]$ con $p \in \mathbb{C}\setminus K$ es igual a $[1]$ o a una de las clases $[z-p_C]$. Si p está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus K$ entonces el teorema 12.34 implica que $z-p$ tiene un logaritmo continuo, luego $[z-p]=[1]$.

Si p está en la componente acotada C entonces basta probar que la función $f(z) = (z-p)/(z-p_C)$ tiene un logaritmo continuo. Tomamos un arco ϕ

contenido en C y que una p con p_C. Entonces $H_t(z) = (z - \phi(t))/(z - p_C)$ es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre f y la función constante 1, luego f tiene un logaritmo continuo. ∎

Nos falta probar que el producto dado por el teorema anterior es único. Lo obtendremos como consecuencia del teorema siguiente.

Teorema 12.41 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, sea C una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, sea $p \in C$ y n un entero no nulo. Entonces la función definida en K mediante $f(z) = (z-p)^n$ no tiene una extensión continua a $K \cup C$ que no se anule.*

DEMOSTRACIÓN: Haciendo una traslación podemos suponer que $p = 0$. Supongamos que f tiene una extensión continua $F : K \cup C \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $F(z) = z^n$ para todo $z \in K$. Sea r tal que C esté contenido en $D(0, r)$. Definamos $g : \overline{D(0,r)} \longrightarrow C$ mediante

$$g(z) = \begin{cases} z^n & \text{si } z \in \overline{D(0,r)} \setminus C \\ F(z) & \text{si } z \in \overline{C}. \end{cases}$$

La definición es consistente y g es continua. Para verlo basta tener en cuenta que

$$\overline{C} \cap \left(\overline{D(0,r)} \setminus C\right) = \overline{C} \setminus C \subset K,$$

pues C es abierto y cerrado en $\mathbb{C} \setminus K$.

Como $0 \in C$, tenemos que la función g no se anula. Es obvio que g es homotópica a una constante en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (tomando $h_t(z) = g((1-t)z)$). Por lo tanto g tiene un logaritmo continuo y también lo tiene z^n en la circunferencia $|z| = r$. Es fácil pasar del teorema 12.36 a un resultado análogo para circunferencias de radio arbitrario, con lo que tenemos una contradicción. ∎

Con esto llegamos al teorema general:

Teorema 12.42 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Para cada componente conexa acotada C de $\mathbb{C} \setminus K$ escojamos un punto $p_C \in C$. Entonces cada elemento del grupo cociente $G(K)/E(K)$ se expresa de forma única como*

$$\prod_{i=1}^{N} [z - p_{C_i}]^{n_i},$$

para ciertas componentes (distintas) C_i y ciertos enteros no nulos n_i.

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que todo elemento del cociente se expresa de esta forma. Si un mismo elemento admitiera dos expresiones distintas, despejando en la igualdad encontraríamos una expresión de la forma

$$\prod_{i=1}^{N} [z - p_{C_i}]^{n_i} = [1],$$

donde $N \neq 0$ y ninguno de los exponentes es nulo. Esto significa que

$$\prod_{i=1}^{N}(z-p_{C_i})^{n_i} = e^{f(z)},$$

para una cierta función f continua en K. Despejando uno de los factores obtenemos

$$(z-p_{C_1})^{n_1} = \frac{e^{f(z)}}{\prod_{i=2}^{N}(z-p_{C_i})^{n_i}}.$$

Ahora bien, la función $e^{f(z)}$ se extiende a una función en $\mathbb{C}$ que no se anula (por el teorema 12.32) y las funciones $z-p_{C_i}$ se extienden de forma natural a funciones continuas que no se anulan en $K \cup C_1$, luego tenemos una función continua que no se anula en $K \cup C_1$ y que extiende a $(z-p_{C_1})^{n_1}$. Esto contradice al teorema anterior. ∎

Equivalentemente, el teorema anterior afirma que cada $[f] \in G(K)/E(K)$ se expresa como

$$\prod_{C}[z-p_C]^{n_C},$$

donde C recorre las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C}\setminus K$ y los enteros n_C son todos nulos salvo quizá un número finito y están unívocamente determinados por $[f]$.

En términos algebraicos esto significa que el grupo $G(K)/E(K)$ es un grupo abeliano libre de rango igual al número de componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$. Si el lector no está familiarizado con este lenguaje podemos decir equivalentemente que el grupo $G(K)/E(K)$ es isomorfo a la suma directa de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como componentes conexas acotadas tiene $\mathbb{C} \setminus K$, y el isomorfismo es el dado por $[f] \mapsto \{n_C\}_C$.

Esto es crucial, pues el rango de un grupo abeliano libre es un invariante algebraico o, en otros términos, si $n \neq m$ los grupos $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Z}^m$ no son isomorfos.[2] Igualmente, $\mathbb{Z}^n$ no es isomorfo a una suma directa infinita de copias de $\mathbb{Z}$.

Así pues, ahora podemos afirmar que si K y K' son dos subconjuntos compactos de C entonces los grupos $G(K)/E(K)$ y $G(K')/E(K')$ son isomorfos si y sólo si $\mathbb{C} \setminus K$ y $\mathbb{C} \setminus K'$ tienen el mismo número de componentes conexas. Esto o, —si se prefiere— el teorema siguiente, es un resultado más fuerte que el teorema de Jordan.

Teorema 12.43 *Si K y K' son compactos homeomorfos en $\mathbb{C}^\infty$ entonces los abiertos $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y $\mathbb{C}^\infty \setminus K'$ tienen el mismo número de componentes conexas.*

[2]Una prueba rápida de este hecho es la siguiente: Tenemos que $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Q}^n$. Si f es un isomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Z}^m$ la restricción de f a la base canónica de $\mathbb{Q}^n$ determina una aplicación lineal de $\mathbb{Q}^n$ a $\mathbb{Q}^m$. Es fácil ver que esta aplicación extiende a f. Igualmente extendemos la inversa de f y vemos que la composición de las extensiones deja invariante a la base canónica del espacio correspondiente, luego las extensiones son isomorfismos. Igualando las dimensiones concluimos que $n = m$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a suponer que $K \neq \mathbb{C}^\infty \neq K'$, que es el único caso que vamos a necesitar. El caso restante será inmediato tras 12.48. Aplicando transformaciones de Möbius podemos suponer que están contenidos en $\mathbb{C}$. Notemos que $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y $\mathbb{C} \setminus K$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Si $h : K \longrightarrow K'$ es un homeomorfismo, la aplicación $\phi : G(K') \longrightarrow G(K)$ dada por $\phi(f) = h \circ f$ es claramente un isomorfismo de grupos. Además f tiene un logaritmo continuo si y sólo si lo tiene $\phi(f)$, luego $\phi[E(K')] = E(K)$ y, en consecuencia, ϕ induce un isomorfismo entre $G(K')/E(K')$ y $G(K)/E(K)$. El teorema se sigue ahora de las observaciones precedentes. ∎

Demostración del teorema de Jordan Si ϕ es una curva de Jordan entonces ϕ^* es homeomorfo a la circunferencia unidad (por el teorema 12.35), luego el número de componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$ es igual al número de componentes conexas del complementario de la circunferencia, o sea, dos.

Sea C una de componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$. Como C es abierto y cerrado en $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$ se cumple $\partial C \subset \phi^*$. Por otra parte $\overline{C} \subset C \cup \partial C \subset C \cup \phi^*$, luego $\mathbb{C}^\infty \setminus \overline{C} \neq \varnothing$ (pues el complementario de $C \cup \phi^*$ contiene a la otra componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$).

Obviamente $\mathbb{C}^\infty \setminus \partial C = C \cup (\mathbb{C}^\infty \setminus \overline{C})$, lo que prueba que $\mathbb{C}^\infty \setminus \partial C$ es disconexo. Si fuera $\partial C \neq \phi^*$ entonces ∂C sería homeomorfo a un subconjunto compacto propio K de la circunferencia unidad, pero es obvio que $\mathbb{C}^\infty - K$ es conexo, luego por el teorema anterior tendríamos que $\mathbb{C}^\infty - \partial C$ también lo sería. Esto prueba que $\partial C = \phi^*$. ∎

Consecuencias Ahora podemos probar fácilmente varios hechos sobre curvas de Jordan, muchos de ellos intuitivamente evidentes. Por lo pronto podemos definir el interior y el exterior de una curva de Jordan en $\mathbb{C}$:

Definición 12.44 Si ϕ es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, llamaremos *interior* de ϕ a la componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$, y lo representaremos por $I(\phi)$. A la componente conexa no acotada la llamaremos *exterior* de ϕ, y la representaremos por $E(\phi)$.

Tenemos probado que $I(\phi)$ y $E(\phi)$ son abiertos conexos disjuntos de modo que

$$\mathbb{C} \setminus \phi^* = I(\phi) \cup E(\phi), \quad \overline{I(\phi)} = I(\phi) \cup \phi^*, \quad \overline{E(\phi)} = E(\phi) \cup \phi^*.$$

Teorema 12.45 *Si ϕ es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$ entonces $I(\phi, z) = \pm 1$ para todo punto $z \in I(\phi)$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que el dominio de ϕ es el intervalo $[0, 1]$. Sea C la circunferencia unidad y $f : C \longrightarrow \phi^*$ el homeomorfismo dado por el teorema 12.35, $f(e^{2\pi i t}) = \phi(t)$.

Sea $g : \phi^* \longrightarrow C$ el homeomorfismo inverso. Sea $p \in I(\phi)$. Entonces el teorema 12.42 nos da que $g(z) = (z - p)^n e^{h(z)}$, para cierto entero n y cierta función continua h.

Por lo tanto $z = (f(z) - p)^n e^{h(f(z))}$ para todo z en la circunferencia unidad o, equivalentemente, $e^{2\pi it} = (\phi(t) - p)^n e^{h(f(t))}$ para todo $t \in [0, 1]$. Si L es una determinación continua del logaritmo de $\phi(t) - p$ tenemos que $nL(t) + h(\phi(t))$ es una determinación continua del logaritmo de $e^{2\pi it}$. De aquí se sigue que

$$1 = I(e^{2\pi it}, 0) = nI(\phi, p),$$

con lo que ha de ser $I(\phi, p) = \pm 1$. ∎

Claramente, si ϕ es una curva de Jordan, $-\phi$ también lo es, y con el mismo rango, luego $I(\phi) = I(-\phi)$. Además $I(\phi, z) = -I(-\phi, z)$. Esto significa que cambiando ϕ por $-\phi$ podemos exigir que el índice de los puntos interiores de ϕ sea igual a 1. En tal caso diremos que la curva esta *orientada positivamente,* y en caso contrario que lo está *negativamente.* Con los convenios usuales de representación gráfica, la orientación positiva significa que ϕ deja los puntos interiores a la izquierda según el sentido de avance.

Para las aplicaciones siguientes necesitamos un resultado técnico. Diremos que un compacto $K \subset \mathbb{C}$ *separa* dos puntos a, $b \in \mathbb{C} \setminus K$ si a y b están en componentes conexas distintas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema 12.46 *Se cumple*

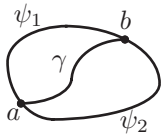
a) Un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$ separa dos puntos a y b si y sólo si la función $f(z) = (z - a)/(z - b)$ no tiene un logaritmo continuo en K.

b) Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ que no separan dos puntos a, b y $K_1 \cap K_2$ es conexo, entonces $K_1 \cup K_2$ tampoco separa a y b.

Demostración: a) Si a y b están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ entonces f tiene un logaritmo continuo. El argumento ya lo hemos empleado en la prueba del teorema 12.40. Si f tiene un logaritmo continuo entonces f se extiende a una función F sobre continua en $\mathbb{C}$ y sin ceros. Si a y b no estuvieran en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ entonces uno de los dos, digamos a, está en una componente acotada C que no contiene a b. La función $z - a = f(z)(z - b)$ se extiende a una función sin ceros en $K \cup C$, en contradicción con el teorema 12.41.

b) Por el apartado anterior la función f tiene un logaritmo continuo en K_1 y otro en K_2. Por conexión ambos logaritmos se diferencian en una constante en $K_1 \cap K_2$, luego modificando uno de ellos podemos exigir que coincidan en $K_1 \cup K_2$, con lo que podemos formar un logaritmo continuo de f en $K_1 \cup K_2$. De nuevo por el apartado anterior tenemos que $K_1 \cup K_2$ no separa a y b. ∎

Teorema 12.47 *Sea ϕ una curva de Jordan en $\mathbb{C}$. Sean a y b dos puntos distintos en ϕ y sea γ un arco inyectivo que una a y b de modo que, salvo por sus extremos, esté contenido en el interior de ϕ. Entonces existen dos arcos ψ_1 y ψ_2 de extremos a y b cuya unión es ϕ. Los arcos $\phi_1 = \psi_1 \cup \gamma$ y $\phi_2 = \psi_2 \cup \gamma$ son curvas de Jordan, sus interiores son disjuntos y $I(\phi) - \gamma^* = I(\phi_1) \cup I(\phi_2)$.*



DEMOSTRACIÓN: Las primeras afirmaciones son fáciles de probar. El conjunto $F = \psi_1^* \setminus \{a, b\}$ está contenido en ϕ^*, que a su vez está en la clausura de $E(\phi)$. Por lo tanto $F \cup E(\phi)$ es conexo, no acotado y disjunto de ϕ_2^*. Consecuentemente $I(\phi_2) \subset \mathbb{C} \setminus (F \cup E(\phi)) = \overline{I(\phi)} \setminus F$.

Como $I(\phi_2)$ es disjunto de $\phi_2^* = (\phi^* - F) \cup \gamma^*$, en realidad $I(\phi_2) \subset I(\phi) \setminus \gamma^*$. Igualmente llegamos a que $I(\phi_1) \subset I(\phi) \setminus \gamma^*$, luego $I(\phi_1) \cup I(\phi_2) \subset I(\phi) \setminus \gamma^*$.

Para probar la otra inclusión tomemos un punto $z \in I(\phi) \setminus \gamma^*$ y un punto $w \in E(\phi)$. Si z no estuviera ni en $I(\phi_1)$ ni en $I(\phi_2)$, entonces —puesto que tampoco está en las fronteras— habría de ser $z \in E(\phi_1) \cap E(\phi_2)$, pero la inclusión ya probada implica que también $w \in E(\phi_1) \cap E(\phi_2)$, luego ni ϕ_1^* ni ϕ_2^* separan a z y w. Como su intersección es el conexo γ^*, el teorema anterior nos da que $\phi_1^* \cup \phi_2^*$ tampoco separa a z y w, y mucho menos lo hará el subconjunto ϕ^*, pero lo cierto es que sí lo hace.

Veamos finalmente que $I(\phi_1)$ y $I(\phi_2)$ son disjuntos. Si tuvieran un punto en común, como $I(\phi_2) \subset \mathbb{C} \setminus \phi_1^*$, la unión sería un subconjunto conexo de este conjunto, del cual $I(\phi_1)$ es una componente conexa, luego $I(\phi_2) \subset I(\phi_1)$. Similarmente tendríamos la otra inclusión y así $I(\phi_1) = I(\phi_2)$, pero esto es absurdo, pues sus fronteras no son iguales. ∎

Recordemos que en la prueba del teorema 12.43 no hemos contemplado el caso en que uno de los compactos fuera $\mathbb{C}^\infty$. Puesto que una curva de Jordan no es homeomorfa a $\mathbb{C}^\infty$, como es fácil probar,[3] los razonamientos posteriores no han necesitado este caso. No obstante vamos a ver que también es cierto. Para ello basta probar que $\mathbb{C}^\infty$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{C}$. Nos apoyaremos en un hecho técnico más:

Teorema 12.48 *Sea C la circunferencia unidad, y $f : C \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua tal que $f(-z) = -f(z)$ para todo z. Entonces f no tiene una raíz cuadrada continua, luego tampoco tiene un logaritmo continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Si g fuera una raíz cuadrada continua de f entonces $h(z) = g(-z)/g(z)$ sería continua y cumpliría $h(z)^2 = -1$ para todo $z \in C$, luego por conexión sería constante igual a $\pm i$. Pero entonces

$$-1 = (\pm i)^2 = h(z)h(-z) = 1.$$

∎

Teorema 12.49 (Borsuk) *Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Entonces existe un punto p tal que $f(p) = f(-p)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea h la función en $\overline{D(0,1)}$ dada por

$$h(x, y) = f\big(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\big) - f\big(-x, -y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\big).$$

[3] Por ejemplo porque dos puntos desconectan a una circunferencia pero no a $\mathbb{C}^\infty$.

Si no existe ningún punto p tal que $f(p) = f(-p)$ entonces h no se anula. Como el complementario del disco unidad es conexo h tiene un logaritmo continuo (según el teorema 12.42 el grupo $G(K)/E(K)$ es trivial). En particular también lo tiene la restricción de h a la circunferencia unidad C, pero por otro lado $h|_C(-z) = -h|_C(z)$, y el teorema anterior implica que dicho logaritmo no existe. ∎

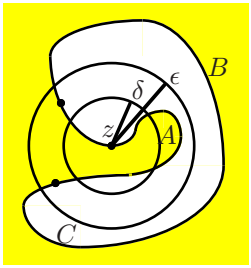
Teniendo en cuenta que $\mathbb{C}^\infty$ es homeomorfo a la esfera E, hemos probado que no existen funciones inyectivas y continuas de $\mathbb{C}^\infty$ en $\mathbb{C}$, como queríamos probar.

Relación con las transformaciones conformes Recordemos el teorema 12.18, según el cual una condición suficiente para que una transformación conforme entre dos dominios simplemente conexos se pueda extender a las clausuras es que todos sus puntos sean simples. Cuando un dominio simplemente conexo Ω tiene todos sus puntos frontera simples tenemos que una transformación conforme $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ se extiende a un homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ en $\overline{D(0,1)}$, luego en particular $\partial\Omega$ es homeomorfa a la circunferencia unidad, es decir, es el rango de una curva de Jordan ϕ y Ω es entonces una de las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi^*$.

Así pues, si llamamos *dominios de Jordan* a las componentes conexas en que una curva de Jordan divide a $\mathbb{C}^\infty$, hemos probado que una condición necesaria para que un dominio simplemente conexo tenga todos sus puntos frontera simples es que sea un dominio de Jordan. Vamos a probar que la condición también es suficiente. Nos basaremos en el teorema siguiente:

Teorema 12.50 *Sea ϕ una curva de Jordan en $\mathbb{C}$ y $\Omega = I(\phi)$, sea $z \in \phi^*$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que todo par de puntos en $\Omega \cup D(z,\delta)$ pueden unirse por una poligonal contenida en $\Omega \cap D(z,\epsilon)$.*

Demostración: Por simplicidad podemos suponer que $\phi(0) = z$ y que 0 no es uno de los extremos del dominio de ϕ. Sea t_0 suficientemente pequeño como para que $A = f[-t_0, t_0] \subset D(z,\epsilon)$.



Sea B el arco cerrado complementario de A en ϕ^* (o sea, el complementario de A más sus extremos). Entonces z no pertenece a B, luego existe un $\delta > 0$ (podemos tomar $\delta < \epsilon$) de modo que $D(z,\delta)$ sea disjunto con B. Veamos que este δ cumple lo pedido. Llamemos C a la frontera de $D(z,\epsilon)$.

Si p, $q \in \Omega \cap D(z,\delta)$ tenemos que p y q no están separados por $C \cup B$, pues este conjunto está en el complementario de $D(z,\delta)$. Tampoco están separados por ϕ^*, pues ambos están en Ω. Vamos a ver que la intersección es conexa, y así el teorema 12.46 nos dará que p y q tampoco están separados por $C \cup B \cup \phi^* = C \cap \phi^*$.

Por construcción tenemos que A es disjunto de C y $\phi^* = A \cup B$, luego $C \cap \phi^* \subset B$. En consecuencia, $(C \cup B) \cap \phi^* = (C \cap \phi^*) \cup (B \cap \phi^*) = B$, conexo.

Así pues, p y q están en la misma componente conexa U de

$$\mathbb{C} \setminus (C \cup \phi^*) = (\mathbb{C} \setminus C) \cap (\mathbb{C} \setminus \phi^*).$$

Por lo tanto U está contenido en la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C$ que contiene a p y q, o sea, $U \subset D(z, \epsilon)$ y también en la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ que contiene a p y q, o sea, $U \subset \Omega$. Así pues, $U \subset \Omega \cap D(z, \epsilon)$ y por lo tanto p y q pueden conectarse con una poligonal contenida en $\Omega \cap D(z, \epsilon)$. ∎

Teorema 12.51 *Sea Ω un dominio acotado simplemente conexo. Entonces todos los puntos de su frontera son simples si y sólo si Ω es un dominio de Jordan.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto una implicación. Sea z un punto frontera de un dominio de Jordan Ω. Por el teorema anterior, para cada $n > 0$ existe un $\delta_n > 0$ tal que todo par de puntos en $D(z, \delta_n) \cap \Omega$ se pueden unir por una poligonal contenida en $D(z, 1/n) \cap \Omega$.

Podemos suponer que la sucesión $\{\delta_n\}$ es decreciente y, desde luego, converge a 0. Sea $\{a_k\}$ una sucesión contenida en Ω y convergente a z. Para cada n sea k_n el mínimo natural tal que $a_k \in D(z, \delta_n) \cap \Omega$ para todo $k \geq k_n$. La sucesión $\{k_n\}$ es creciente.

Como Ω es conexo podemos formar un arco contenido en Ω que una los puntos a_k hasta el a_{k_1}. A partir de aquí, si $k \geq k_1$ consideramos el máximo n tal que $k_n \leq k$ y unimos a_k con a_{k+1} mediante un arco contenido en $D(z, 1/n) \cap \Omega$. Al unir todos estos arcos obtenemos una curva semiabierta que pasa por todos los puntos de la sucesión y finalmente está contenida en cada disco $D(z, 1/n)$, con lo que su conjunto límite ha de estar formado únicamente por z. Esto prueba que z es un punto simple. ∎

Combinando este teorema con los teoremas 12.9 y 12.18, concluimos que si Ω es un dominio de Jordan, entonces existe un homeomorfismo entre Ω y el disco cerrado $\overline{D}(0, 1)$ que transforma la frontera en la frontera. Con esto podemos probar una versión fuerte del teorema de Jordan:

Teorema 12.52 (Teorema de Jordan) *Si C es la cinrcunferencia unidad, todo homeomorfismo en la imagen $\phi : C \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ se extiende a un homeomorfismo $\overline{\phi} : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Lo mismo es válido si cambiamos $\mathbb{C}^\infty$ por $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\phi[C]$ es la imagen de una curva de Jordan en $\mathbb{C}^\infty$. Sea Ω_1 uno de los dos dominios de Jordan que determina. Por las observaciones anteriores existe un homeomorfismo $\psi : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{\Omega}_1$ que hace corresponder C con $\phi[C]$ (aunque su restricción a C no es necesariamente ϕ). Sea $h = \phi \circ \psi^{-1} : C \longrightarrow C$. Observemos que h se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$. Basta definir

$$f(z) = \begin{cases} |z|\, h(z/|z|) & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Así, $\phi_1 = f \circ \psi : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{\Omega}_1$ es un homeomorfismo que extiende a ϕ.

Similarmente, si Ω_2 es el otro dominio de Jordan determinado por ϕ, construimos un homeomorfismo $\phi_2 : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{\Omega}_2$ que extienda a ϕ. Por último, es fácil construir un homeomorfismo $g : \mathbb{C}^\infty \setminus D(0,1) \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ que deje fijos los puntos de C. Es claro que ϕ_1 y $g \circ \phi_2$ se extienden a un homeomorfismo $\overline{\phi} : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ que extiende a ϕ.

Si $\phi : C \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces podemos retocar $\overline{\phi} : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ para que se cumpla $\overline{\phi}(\infty) = \infty$, con lo que se restringe a un homeomorfismo de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. ∎

Equivalentemente, dada una curva de Jordan en $\mathbb{C}^\infty$ (resp. en $\mathbb{C}$), existe un homeomorfismo de $\mathbb{C}^\infty$ (resp. $\mathbb{C}$) en sí mismo que la transforma en una circunferencia.

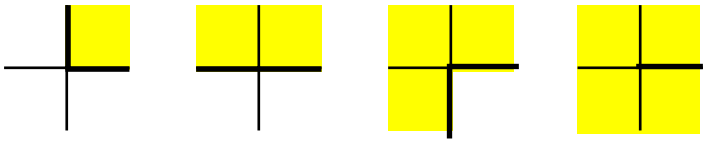
Capítulo XIII

Funciones multiformes

Al estudiar las funciones de variable compleja aparecen de forma natural las funciones multiformes. El ejemplo más importante es sin duda la función logaritmo, que a cada número complejo z le asigna el conjunto Log z de todos sus logaritmos. Otras muy relacionadas con ésta son las funciones raíz cuadrada, raíz cúbica, etc. y muchas más que no hemos considerado desde el capítulo I, como las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente. Hasta aquí hemos eludido el estudio de las funciones multiformes trabajando siempre con ramas uniformes adecuadamente elegidas según las necesidades de cada momento. Ahora ha llegado el momento de investigar las funciones multiformes en general y tratar de comprender su comportamiento. Para empezar desarrollamos la teoría que permite relacionar las distintas ramas uniformes de una misma función multiforme.

13.1 Prolongación analítica

Consideremos la rama uniforme (holomorfa) del logaritmo definida sobre el primer cuadrante, como indica la figura de la izquierda, y que toma partes imaginarias en el intervalo $]0, \pi/2[$. Podemos prolongarla analíticamente hasta el semiplano superior (tomando partes imaginarias en $]0, \pi[$) y también hasta los tres cuadrantes e incluso hasta $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, tomando partes imaginarias en el intervalo $]0, 2\pi[$.



Sin embargo ahora ya no podemos continuar. Para prolongar analíticamente la función sobre un número real positivo la continuidad "por arriba" exigiría asociarle el logaritmo de parte imaginaria 0 y la continuidad "por abajo" exigiría parte imaginaria 2π. SIn embargo, sería erróneo concluir que los números reales

positivos presentan algún tipo de obstáculo a la prolongación del logaritmo. Esto se ve más claro si en lugar de prolongar en sentido estricto las funciones, hacemos avanzar sus dominios en el sentido siguiente: Una vez tenemos la rama del logaritmo en el semiplano superior (partes imaginarias en $]0,\pi[$) pasamos a la rama en el semiplano izquierdo (con partes imaginarias en $]\pi/2, 3\pi/2[$. Esto no es exactamente una prolongación de la función, pues hemos perdido parte del dominio que ya teníamos, pero ciertamente la nueva función "continúa" de forma natural a la anterior.

Igualmente podemos pasar a una rama del logaritmo en el semiplano inferior que prolonga a la última y de ésta a su vez a una rama en el semiplano derecho, ahora con partes imaginarias en $]3\pi/2, 5\pi/2[$. Es decir, si vamos "olvidando la retaguardia", no encontramos ningún obstáculo al avance (con tal de que no intentemos pasar sobre el 0, naturalmente). Lo único que sucede es que, al volver a pasar por el primer cuadrante, lo hacemos con una función que no es la que teníamos al principio.

Este fenómeno está en la base de la comprensión de las funciones multiformes, y nos lleva a considerar prolongaciones analíticas en un sentido local, es decir, no en el de obtener funciones con un dominio mayor, sino en el de funciones que "continúan" a una función dada en una dirección, aunque la contradigan en otra. La forma más cómoda de hacerlo es introducir el concepto de función holomorfa (o meromorfa) sobre un arco que marque el "camino" de la prolongación.

Recordemos que una función f es holomorfa (o meromorfa) en ∞ si la función $f(1/z)$ es holomorfa (o meromorfa) en 0. En particular esto exige que f esté definida (con valores en $\mathbb{C}^\infty$) en un disco de la forma $D(\infty, r) = \mathbb{C}^\infty \setminus \overline{D(0,r)}$.

Definición 13.1 Consideremos un arco $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Diremos que una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *holomorfa* (o *meromorfa*) sobre γ si para todo $t \in [a,b]$ existen números reales r_t, $\epsilon_t > 0$ y una función holomorfa (meromorfa) $g_t : D(\gamma(t), r_t) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ de modo que para todo $t' \in [a,b]$ tal que $|t - t'| < \epsilon_t$ se cumple $\gamma(t') \in D(\gamma(t), r)$ y $f(t') = g_t(\gamma(t'))$.

En otras palabras, si f es localmente la composición de γ con una función holomorfa (o meromorfa). En particular esto implica que f es continua.

Con más detalle, si f es una función meromorfa sobre un arco γ, tenemos una familia de funciones meromorfas g_t cuyos dominios van avanzando con γ y determinan a f. Es fácil ver que cada g_t debe coincidir en su dominio común con las funciones $g_{t'}$, para parámetros t' cercanos a t, por lo que cada una puede considerarse una "continuación" de las anteriores, pero si γ pasa dos veces por el mismo punto, las funciones g_t correspondientes a distintos valores del parámetro

pueden ser completamente distintas, de modo que las funciones meromorfas en este sentido "olvidan" los valores que han tomado tiempo atrás, por lo que una contradicción con valores "antiguos" no impide el avance y no delata falsos puntos singulares.

Por ejemplo, es fácil ver que toda determinación continua del logaritmo sobre un arco es una función holomorfa en el sentido que acabamos de definir. Sabemos que todo arco que no pase por 0 admite una determinación continua del logaritmo que parta de cualquier valor predeterminado. Esto se traducirá en que 0 es la única singularidad de la función logaritmo, en el sentido de que es el único obstáculo real para prolongar un logaritmo.

Para precisar estas ideas necesitamos la siguiente versión del principio de prolongación analítica para funciones definidas sobre arcos:

Teorema 13.2 *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco y sean f, g dos funciones meromorfas sobre γ que coincidan en un intervalo $[a, a+\delta[$. Entonces f y g coinciden en $[a,b]$.*

Demostración: Sea s el supremo del conjunto de los números $x \in [a,b]$ tales que f y g coinciden en el intervalo $[a,x[$. Por hipótesis $s > a$. Vamos a probar que $s = b$. Por continuidad f y g coinciden en $[a,s]$.

Por la definición anterior existen números r y ϵ y funciones holomorfas h y h^* sobre el disco $D(\gamma(s), r)$ tales que si $t \in [a,b]$ y $|s-t| < \epsilon$ entonces $\gamma(t) \in D(\gamma(s), r)$ y $f(t) = h(\gamma(t))$, $g(t) = h^*(\gamma(t))$.

En particular esto implica que h y h^* coinciden en el conjunto $\gamma\big[\,]s-\epsilon, s]\big]$, luego por el principio de prolongación analítica han de coincidir[1] en todo el disco $D(\gamma(s), r)$. De aquí se sigue que si $t \in [a,b]$ y $|s-t| < \epsilon$ entonces $f(t) = g(t)$.

Por la definición de s esto sólo puede ocurrir si $s = b$ (o de lo contrario f y g coincidirían en un intervalo mayor que $[a,s]$). Así pues f y g coinciden en todo el intervalo $[a,b]$. ∎

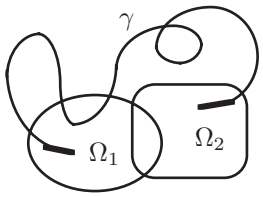
Ejercicio: Probar que en las condiciones del teorema anterior basta con que f y g coincidan en un conjunto con acumulación en $[a,b]$.

Definición 13.3 Sea f una función meromorfa en un dominio Ω y consideremos un arco $\gamma[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $\gamma(a) \in \Omega$. Una *prolongación analítica* de f a lo largo de γ es una función g meromorfa sobre γ tal que $g(t) = f(\gamma(t))$ para todo t en un intervalo $[a, a+\delta[$.

El teorema anterior implica que si f admite una prolongación analítica a lo largo de γ entonces tal prolongación es única. Si $\gamma^* \subset \Omega$ entonces f admite claramente prolongación analítica a lo largo de γ: ésta viene dada por $g(t) = f(\gamma(t))$. Esta noción de prolongación lo largo de arcos nos lleva a una generalización de la prolongación analítica de funciones.

[1]Notar que no importa que h y h^* puedan tener polos, pues en cualquier caso el conjunto de polos es discreto, por lo que ambas coinciden en un conjunto con acumulación donde son holomorfas, sus restricciones al conjunto donde toman valores finitos son iguales y por continuidad lo son en todo el disco.

Sean f y g funciones meromorfas en los dominios Ω_1 y Ω_2 respectivamente y sea $\gamma[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco con extremos $\gamma(a) \in \Omega_1$ y $\gamma(b) \in \Omega_2$. Diremos que g es una *prolongación analítica* de f lo largo de γ si existe una función h meromorfa sobre γ tal que $h(t) = f(\gamma(t))$ en un intervalo $[a, a+\delta[$ y $h(t) = g(\gamma(t))$ en un intervalo $]b-\delta, b]$.



Es claro que entonces g está determinada por f y por γ, pues la función h es una prolongación analítica de f a lo largo de γ (luego es única) y dos funciones meromorfas en Ω_2 que prolonguen a f por γ han de coincidir en un entorno de z_2 sobre γ, luego han de ser la misma función.

La prolongación analítica así definida es transitiva, pues si un arco γ prolonga una función f definida en un dominio Ω_1 hasta una función g definida en un dominio Ω_2 y un arco ϕ prolonga a g hasta una función h definida en un dominio Ω_3, entonces existe un arco ψ contenido en Ω_2 que une el extremo final de γ con el extremo inicial de ϕ, y es obvio que g se prolonga a sí misma a lo largo de ψ. Entonces $\gamma \cup \psi \cup \phi$ prolonga f hasta h.

Puede ocurrir que una prolongación analítica de una función f tenga una parte de (o incluso todo) su dominio en común con f y que, sin embargo, no coincida con f. Por ejemplo, la función $h(t) = it$ para $t \in [0, 2\pi]$ es holomorfa sobre la circunferencia $\gamma(t) = e^{it}$ y prolonga analíticamente la rama uniforme del logaritmo en $D(1,1)$ que cumple $\log 1 = 0$ hasta la rama uniforme en el mismo disco que cumple $\log 0 = 2\pi i$. Cambiando los dominios a $[0, 4\pi]$ obtenemos otra rama distinta, y es fácil ver que de este modo (e invirtiendo el sentido del arco) podemos obtener cualquier rama del logaritmo en el disco por prolongación de la primera.

De este modo, una función meromorfa en un dominio puede prolongarse analíticamente hasta varias funciones meromorfas distintas en otro dominio. Conviene saber que a lo sumo podemos obtener una cantidad numerable. Para ello conviene probar antes la caracterización siguiente de la prolongación analítica por arcos:

Teorema 13.4 *Sean f y g dos funciones meromorfas definidas sobre discos. Entonces g es prolongación analítica de f a lo largo de un arco γ si y sólo si existe una sucesión de funciones $f_i : D_i \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, para $i = 1, \ldots, n$, meromorfas en discos y de modo que $f_1 = f$, $f_n = g$ y cada f_i coincide con f_{i+1} en su dominio común (que es no vacío). Además en tal caso f puede prolongarse hasta g a lo largo de una poligonal cuyos vértices son números complejos con parte real e imaginaria racionales.*

Demostración: Supongamos que f se prolonga hasta g a lo largo de un arco $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ y sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ la prolongación a lo largo de γ.

Por definición de función meromorfa sobre un arco, para cada $t \in [a,b]$ existe un intervalo $[u_t, v_t]$ cuyo interior en $[a,b]$ contiene a t y de modo que para todo

$s \in [u_t, v_t]$ se cumple $h(s) = g_t(\gamma(s))$, donde g_t es una función meromorfa en un disco $D(\gamma(t), r_t)$.

Por compacidad, $[a, b]$ puede cubrirse por los interiores de un número finito de intervalos $[u_t, v_t]$. Fijemos un cubrimiento finito y tomemos uno de sus miembros que contenga a a. Será de la forma $[a, v_{t_1}]$. El punto v_{t_1} ha de pertenecer al interior de otro de los intervalos, que será de la forma $[u_{t_2}, v_{t_2}]$, con $a < v_{t_1} < v_{t_2}$. Continuando de este modo, puesto que sólo hay un número finito de intervalos, llegamos a una sucesión de intervalos

$$[a, v_{t_1}],\ [u_{t_2}, v_{t_2}], \ldots, [u_{t_n}, b],$$

de modo que cada uno corta al siguiente en un intervalo.

Esto hace que $f(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g_{t_1}(\gamma(t))$ para puntos próximos a a (con lo que f coincide con g_{t_1} en su dominio común), $g_{t_i}(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g_{t_{i+1}}(\gamma(t))$ para puntos próximos a v_{t_i} (con lo que g_{t_i} coincide con $g_{t_{i+1}}$ en su dominio común), y $g_{t_n}(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ para puntos cercanos a b (luego g_{t_n} coincide con g en su dominio común). Aquí usamos que la intersección de dos discos es conexa. Esto prueba una implicación.

Supongamos ahora que tenemos las funciones $f_i : D_i \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Tomemos puntos $z_i \in D_i \cap D_{i+1}$ con coordenadas racionales y sea $P : [1, n-1] \longrightarrow \mathbb{C}$ la poligonal que los une, de modo que $P(i) = z_i$. Notemos que $[z_i, z_{i+1}]^* \subset D_{i+1}$.

Para $i < t < i + 1$, definimos $h(t) = f_{i+1}(P(t))$. Es claro que la función h así definida es meromorfa y prolonga $f = f_1$ hasta $g = f_n$. ∎

De este modo, si una función meromorfa puede prolongarse hasta otra, puede prolongarse a lo largo de una poligonal con vértices racionales. Puesto que la cantidad de tales poligonales es numerable, el número de prolongaciones hasta un dominio fijo es a lo sumo numerable. Es decir. Se cumple el teorema siguiente:

Teorema 13.5 (Poincaré-Volterra) *El conjunto de funciones meromorfas en un dominio dado que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de una función dada es a lo sumo numerable.*

13.2 Funciones multiformes meromorfas

Ahora estamos en condiciones de definir la holomorfía de funciones multiformes. Si $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función multiforme, llamaremos *rama uniforme* de F a cualquier función uniforme meromorfa f definida en un subconjunto V de Ω con la propiedad de que $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in V$. Una función analítica h sobre un arco $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una *determinación* de F si cumple $h(t) \in F(\gamma(t))$ para todo $t \in [a, b]$.

Definición 13.6 Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}^\infty$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme. Diremos que F es *meromorfa* en Ω si cumple

a) Para cada $z \in \Omega$ existe una rama uniforme f de F definida en un entorno de z y tal que $f(z) = w$.

b) Cualquier rama uniforme de F definida en un dominio contenido en Ω se prolonga analíticamente a cualquier otra a lo largo de una determinación meromorfa de F contenida en Ω.

Si F no toma nunca el valor ∞ se dice que es *holomorfa.*

La segunda condición excluye casos como el de la función F que a cada número complejo $z \neq 0$ le asigna todas sus raíces cuadradas y cúbicas. Es más natural considerar que en F hay dos funciones holomorfas distintas y no una. Así, mientras $\sqrt{z}$ es una función holomorfa multiforme en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pronto lo justificaremos), no lo es en el disco $D(1,1)$, pues en él las dos ramas uniformes constituyen dos funciones holomorfas independientes (diremos que en este abierto las dos ramas se separan). Conviene observar que la determinación de F que conecta dos ramas uniformes según la propiedad b) puede tomarse siempre holomorfa, pues si pasa por un polo siempre podemos "sortearlo" modificando el arco.

Diremos que una función multiforme meromorfa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *completa* si cuando una función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ meromorfa en un dominio $A \subset \Omega$ puede obtenerse como prolongación analítica de una rama uniforme de F, entonces f es una rama uniforme de F.

Ejercicio: Probar que una función multiforme meromorfa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es completa si y sólo si toda prolongación meromorfa de una rama uniforme de F a lo largo de un arco contenido en Ω es una determinación meromorfa de F.

Toda función multiforme meromorfa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ se "extiende" a una función completa del modo siguiente: Para cada $z \in \Omega$ llamamos $\overline{F}(z)$ al conjunto de todos los valores que toman en z las funciones meromorfas definidas en un entorno de z y que se obtienen por prolongación analítica a partir de las ramas uniformes de F a lo largo de arcos contenidos en Ω. Es fácil ver que $\overline{F}$ es una función multiforme meromorfa en Ω y completa, con la propiedad de que todas las ramas uniformes de F lo son también de $\overline{F}$. Además $\overline{F}$ es la única función en estas condiciones. La llamaremos *compleción* de F. La posibilidad de completar las funciones hace que no perdamos generalidad si trabajamos únicamente con funciones completas.

Las definiciones que acabamos de dar hacen que no sea evidente que funciones multiformes tales como el logaritmo sean holomorfas. Falta comprobar que satisfacen la condición b) de la definición. Lo probaremos en un contexto mucho más general.

Teorema 13.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa localmente inyectiva.*[2] *Entonces f^{-1} es una función meromorfa multiforme en el dominio $G = f[\Omega]$.*

[2]Por el teorema 8.13, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y f no tiene polos, la hipótesis equivale a exigir que la derivada no se anule. Es fácil ver que una función meromorfa es inyectiva alrededor de un polo (finito) si y sólo si éste es simple.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $z \in f[\Omega]$ y $w \in f^{-1}(z)$, es decir, $f(w) = z$. Por hipótesis existe un entorno V de w donde f es inyectiva. El teorema (8.15) implica que $g = (f|_V)^{-1}$ es una rama uniforme de f^{-1} tal que $g(z) = w$. Más aún, vamos a ver que dos ramas uniformes g_1 y g_2 que asignen a z el mismo valor w coinciden en un entorno de z. En efecto, podemos suponer que están definidas en un mismo entorno de z conexo D. Entonces $V = g_1[D] \cap g_2[D]$ es un entorno de w y $f[V]$ es un entorno de z donde g_1 y g_2 coinciden, pues si $z^* \in f[V]$, entonces $z^* = f(v)$, para un $v \in V$, que a su vez es $v = g_1(u_1) = g_2(u_2)$, con $u_1, u_2 \in D$. Por lo tanto $z^* = f(v) = u_1 = u_2$ y $g_1(z^*) = g_2(z^*) = v$.

Ahora hemos de probar toda rama uniforme de f^{-1} puede prolongarse hasta cualquier otra. Sean, pues, $g_i : A_i \longrightarrow \Omega$ dos ramas uniformes de f^{-1} definidas sobre dos dominios A_i, para $i = 1, 2$. Tomemos puntos $z_i \in A_i$ y sean $w_i = g_i(z_i) \in \Omega$. Existe un arco $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ tal que $\gamma(a) = w_1$, $\gamma(b) = w_2$.

Definimos $\phi = f[\gamma] = \gamma \circ f$. Vamos a probar que g_1 se prolonga hasta g_2 a lo largo de ϕ. La función sobre ϕ que las conecta es $h(t) = \gamma(t)$. Veamos que h es meromorfa sobre ϕ. Para ello tomamos $t \in [a, b]$, con lo que $h(t) = \gamma(t) \in \Omega$, luego existe un disco D_t de centro $\gamma(t)$ donde f es inyectiva. Sea U_t un disco de centro $\phi(t) = f(\gamma(t))$ tal que $U_t \subset f[D_t]$. Sobre U_t está definida la función meromorfa $g_t = (f|_{D_t})^{-1}|_{U_t}$. Si probamos que extiende a h en un entorno de t tendremos que h es meromorfa sobre ϕ. (Más aún, será una determinación meromorfa de f^{-1}, como exige la definición de función multiforme meromorfa.)

Ahora bien, tenemos que $\phi(t) = f(\gamma(t)) \in U_t$, luego $\gamma(t) \in f^{-1}[U_t]$, luego si t' está en un cierto entorno de t se cumple $\gamma(t') \in f^{-1}[U_t] \subset D_t$ y $\phi(t') = f(\gamma(t')) \in U_t$. Así, por definición de g_t resulta $h(t') = \gamma(t') = g_t(\phi(t'))$, como queríamos probar.

Ahora falta ver que h coincide con las dos ramas dadas en un entorno de cada extremo. Si nos fijamos —por ejemplo— en el extremo inicial, basta ver que g_a coincide con g_1 en un entorno de z_1, pero $g_1(z_1) = w_1 = \gamma(a) = g_a(\phi(a)) = g_a(z_1)$, y hemos visto que si dos ramas uniformes coinciden en z_1 coinciden en un entorno. ∎

Ahora ya tenemos probado que la función logaritmo y las funciones $\sqrt[n]{z}$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, el arco seno y el arco coseno son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, y el arco tangente es una función meromorfa en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{\pm i\}$.

En general no es cierto que la inversa de una función holomorfa localmente inyectiva sea completa. Por ejemplo, la restricción de la función exponencial a la banda $0 < \operatorname{Im} z < 4\pi$ es localmente inyectiva y su inversa es la función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que a cada número complejo le asigna sus logaritmos en la banda indicada. Es fácil ver que dicha función no es completa. De hecho, su compleción es la función logaritmo. Para probarlo basta ver que ésta es completa. Vamos a probar más que eso.

Definición 13.8 Una función meromorfa (holomorfa) $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *arbitrariamente prolongable* (por funciones holomorfas) en Ω si cualquiera de sus ramas uniformes se prolonga analíticamente a lo largo de cualquier arco contenido en Ω que parta de su dominio (y la prolongación es holomorfa).

Teorema 13.9 *Las funciones logaritmo, $\sqrt[n]{z}$, arco seno, arco coseno y arco tangente son completas y arbitrariamente prolongables.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos el caso del logaritmo. Consideremos un arco arbitrario $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y una rama uniforme del logaritmo en un entorno de $\gamma(a)$. Sea t_0 el supremo de los puntos $t \in [a, b]$ tales que dicha rama admita una prolongación analítica holomorfa a lo largo de la restricción de γ a $[a, t]$ que sea una determinación holomorfa del logaritmo. Basta probar que $t_0 = b$ y que la rama se prolonga hasta b mediante una determinación holomorfa del logaritmo.

Por la unicidad de las prolongaciones analíticas, tenemos definida una única determinación holomorfa del logaritmo $h : [a, t_0[\longrightarrow \mathbb{C}$ que prolonga a la rama dada. Ahora observamos que en un entorno de $\gamma(t_0)$ existe una rama uniforme del logaritmo L. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(t_0 - \epsilon)$ esté en su dominio. Por definición de prolongación a lo largo de un arco existe un entorno de este punto (contenido en el dominio de L) donde hay definida una función holomorfa g cuya restricción a γ es h. Modificando L en una constante podemos suponer que extiende a g. Es claro que L permite ahora extender la determinación del logaritmo h hasta un intervalo $[a, t_0 + \epsilon]$, lo cual es absurdo, a no ser que $t_0 = b$ y, en tal caso, tenemos una determinación holomorfa del logaritmo en $[a, b]$.

Para las funciones restantes se puede razonar análogamente o bien reducirlas al caso anterior mediante sus definiciones en términos de logaritmos. ∎

13.3 Singularidades aisladas

Al igual que ocurre con las funciones uniformes, tiene interés estudiar el comportamiento de las funciones multiformes alrededor de las singularidades aisladas. Ahora nos encontramos con nuevos tipos de singularidades que no tienen un análogo en el caso uniforme. Por ejemplo, de acuerdo con la definición que daremos a continuación, el 0 es una singularidad aislada de la función logaritmo, pero no lo es de ninguna de sus ramas uniformes (en el sentido que conocemos) puesto que no existen ramas uniformes del logaritmo definidas en un entorno reducido de 0. Por otra parte hemos de tener en cuenta nuevos fenómenos. Tomemos por caso la función

$$F(z) = e^{1/(\sqrt{z}+1)},$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cada número complejo no nulo tiene dos imágenes, excepto el 1, que sólo tiene la imagen $e^{1/2}$. A partir de una rama uniforme de la raíz cuadrada en $D(1, 1)$ que cumpla $\sqrt{1} = 1$ obtenemos una rama uniforme de F respecto a la cual 1 es un punto regular, pero a partir de la rama que cumple $\sqrt{1} = -1$ obtenemos una rama uniforme de F en $D'(1, 1)$ respecto a la cual 1 es una singularidad esencial.

Así pues, un mismo punto puede ser regular o singular para distintas ramas uniformes de una misma función.

Empezaremos por dar una definición de singularidad aislada que generalice al concepto que ya conocemos y recoja los nuevos casos que pueden presentarse en funciones multiformes.

Definición 13.10 Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa y completa en un dominio Ω. Un punto $z_0 \in \Omega$ es *regular* si existe un disco $D = D(z_0, r)$ tal que todas las ramas uniformes de F con dominio contenido en D son holomorfas y arbitrariamente prolongables en D con prolongaciones holomorfas.

Un punto z_0 es una *singularidad aislada* de F si tiene un entorno reducido $D'(z_0, r) \subset \Omega$ formado por puntos regulares.

Obviamente, si F es holomorfa y arbitrariamente prolongable en Ω (lo cual ocurre, por ejemplo, cuando F es uniforme y holomorfa) entonces todos los puntos de Ω son regulares para F y un punto z_0 es una singularidad aislada si y sólo si tiene un entorno reducido $D'(z_0, r) \subset \Omega$.

En particular vemos que las singularidades aisladas de las funciones uniformes holomorfas en el sentido que acabamos de definir coinciden con las que ya teníamos definidas. Sin embargo esta definición incluye a 0 e ∞ como singularidades aisladas de las funciones logaritmo y $\sqrt[n]{z}$, así como a ± 1 e ∞ para el arco seno y arco coseno y $\pm i$ para el arco tangente.

A la hora de estudiar una singularidad aislada z_0 de una función multiforme F meromorfa y completa hemos de tener presente la siguiente posibilidad: Sea $D'(z_0, r)$ un entorno reducido de z_0 que satisfaga la definición de singularidad aislada y sea G la restricción de F a dicho entorno. Entonces G no cumple necesariamente la definición de función multiforme meromorfa, pues dadas dos ramas uniformes de G, aunque son ramas de F y por lo tanto una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco adecuado, no es necesario que puedan prolongarse a lo largo de un arco contenido en $D'(z_0, r)$. Es el caso de $z_0 = 1$ para la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$, que poníamos antes como ejemplo. En $D'(1, 1)$ tiene dos ramas uniformes que no pueden prolongarse mutuamente en dicho abierto pues, al estar definidas en todo él, cada rama se prolonga a sí misma a lo largo de cualquier arco.

Volviendo a la función G en el caso general, podemos establecer una relación de equivalencia entre sus ramas uniformes holomorfas (observar que la definición de singularidad aislada implica que sus ramas no tienen polos), de modo que dos ramas están relacionadas si una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco contenido en $D'(z_0, r)$. Si C es una clase de equivalencia, la función G_C que a cada $z \in D'(z_0, r)$ le asigna los valores que en z toman las ramas de G que pertenecen a C es una función multiforme holomorfa completa y arbitrariamente prolongable en $D'(z_0, r)$ (notar que como las ramas de G son arbitrariamente prolongables en $D'(z_0, r)$ el dominio de G_C es todo el entorno reducido).

Definición 13.11 Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa en un dominio Ω y sea $A \subset \Omega$ un dominio menor. Una *rama* de F en A es una función multiforme meromorfa $G : A \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que toda rama uniforme de G lo es también de F.

Notemos que una rama de F —en este sentido— que además sea uniforme, es precisamente lo que venimos llamando una rama uniforme de F. Acabamos de probar que cada función multiforme meromorfa completa se descompone en una o varias ramas holomorfas completas arbitrariamente prolongables en un entorno reducido de cada singularidad aislada. Cada una de estas ramas puede presentar un comportamiento distinto alrededor de la singularidad.

Ejemplos Vamos a estudiar la singularidad $z_0 = 0$ de la función logaritmo.

Tomemos cualquier entorno reducido $D'(0,r)$ y vamos a ver que el logaritmo tiene en él una única rama. En efecto, si tomamos una rama uniforme del logaritmo $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ en un dominio $A \subset D'(0,r)$, sabemos que el logaritmo tiene infinitas ramas más en el conjunto A, exactamente las de la forma $f+2k\pi i$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arco cerrado contenido en $D'(0,r)$ que parta de un punto de A y sea h la prolongación analítica de f a lo largo de γ. Entonces h es una determinación continua del logaritmo de γ, luego

$$h(\gamma(b)) = h(\gamma(a)) + 2\pi i\, I(\gamma, 0).$$

Por consiguiente, la rama uniforme del logaritmo en A a la que llegamos por prolongación analítica de f a lo largo de γ es $f+2\pi i\, I(\gamma,0)$. Puesto que podemos tomar arcos con índice arbitrario alrededor de 0 (por ejemplo circunferencias recorridas varias veces) vemos que cualquier rama del logaritmo en $D'(0,r)$ se prolonga hasta cualquier otra.

El mismo argumento se aplica a la singularidad $z_0 = \infty$, es decir, el logaritmo tiene una única rama en cualquier entorno reducido $D'(\infty, r)$, pues para pasar de una rama a otra basta tomar arcos de índice adecuado respecto al 0.

La situación es similar para el caso de $\sqrt[n]{z}$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es una rama uniforme en un dominio $A \subset D'(0,r)$, entonces f es de la forma $f(z) = e^{(1/n)L(z)}$, donde L es una rama uniforme del logaritmo, y las demás ramas uniformes en A son de la forma

$$f_k(z) = e^{(1/n)(L(z)+2k\pi i)},$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, de modo que $f_k = f_{k'}$ si y sólo si $k \equiv k'$ (mód n). Teniendo en cuenta el caso anterior, es claro que si prolongamos $f = f_0$ a lo largo de un arco cerrado γ llegaremos a la rama f_k, donde $k = I(\gamma, 0)$, luego también en este caso la función tiene una única rama uniforme en $D'(0,r)$. Lo mismo vale para $z_0 = \infty$. ∎

Estos ejemplos son representativos de la situación general. Para verlo demostraremos primero algunos resultados.

Teorema 13.12 (Principio de monodromía) *Sea Ω un dominio simplemente conexo y f una función meromorfa (holomorfa) uniforme en un dominio contenido en Ω. Si f se prolonga analíticamente (mediante funciones holomorfas) a lo largo de todo arco contenido en Ω, entonces f se extiende a una función uniforme meromorfa (holomorfa) en Ω.*

DEMOSTRACIÓN: Distingamos tres casos, según si Ω es todo $\mathbb{C}^\infty$, es $\mathbb{C}^\infty$ menos un punto o bien es de cualquier otro tipo. Tomando una transformación de Möbius en los dos primeros casos o aplicando el teorema de Riemann en el tercero, podemos encontrar una transformación conforme u de Ω en uno de los abiertos $\mathbb{C}^\infty$, $\mathbb{C}$ o $D(0,1)$ a la que podemos pedir además que $u^{-1}(0)$ esté en el dominio de f. Es claro que u traslada las hipótesis del teorema, luego podemos restringirnos a los casos en que $\Omega = \mathbb{C}^\infty$, $\Omega = \mathbb{C}$ y $\Omega = D(0,1)$ y admitir además que 0 está en el dominio de f.

Sea r el supremo de los números $\rho > 0$ tales que f admite una prolongación meromorfa (holomorfa) a $D(0,\rho)$. Es claro entonces que f admite una prolongación meromorfa (holomorfa) a $D(0,r)$. Vamos a probar que $r = \infty$ en los dos primeros casos y $r = 1$ en el tercero. De lo contrario, r sería finito y $\overline{D(0,r)} \subset \Omega$. Por la compacidad de la circunferencia de radio r, debe haber un punto z en ella tal que f no admita prolongación analítica meromorfa (holomorfa) a ninguno de sus entornos. Pero entonces $\gamma = [0,z]$ es un arco contenido en Ω a lo largo del cual f no admite prolongación analítica, en contra de la hipótesis.

Con esto tenemos probado el teorema excepto en el caso en que $\Omega = \mathbb{C}^\infty$. Para él tenemos una extensión de f hasta $\mathbb{C}$ (que seguiremos llamando f) y nos falta probar que se extiende a $\mathbb{C}^\infty$, pero basta aplicar el segundo caso a la restricción de f a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomando $\Omega = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$. ∎

El nombre de "principio de monodromía" se debe a que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ es un arco que une un punto del dominio de f con otro punto z y h es una prolongación analítica de f a lo largo de γ, entonces por la unicidad ha de ser $h = \gamma \circ g$, donde g es la extensión de f. En particular $h(b) = g(z)$, lo que significa que el valor que se obtiene en z al prolongar f a través de un arco es independiente del camino escogido.

Teorema 13.13 *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme, meromorfa, completa y arbitrariamente prolongable. Supongamos que F tiene exactamente n ramas uniformes en un disco $D \subset \Omega$. Entonces F tiene exactamente n ramas uniformes en cada disco $D \subset \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en general que si $D \subset D^* \subset \Omega$ son dos discos no necesariamente del mismo centro, entonces F tiene el mismo número de ramas uniformes en ambos. En efecto, por el principio de prolongación analítica las ramas uniformes de F en D^* se restringen a ramas distintas en D y por el principio de monodromía toda rama uniforme de F en D se extiende a una rama uniforme de F en D^* (la extensión es una rama de F porque F es completa).

Sea Ω_0 el conjunto de los puntos $z \in \Omega$ tales que F tiene exactamente n ramas uniformes en un disco $D(z,r) \subset \Omega$. Según lo que acabamos de ver, basta probar que $\Omega = \Omega_0$. Por hipótesis $\Omega_0 \neq \varnothing$, con lo que basta probar que Ω_0 es abierto y cerrado en Ω.

La observación con que hemos empezado la prueba implica claramente que Ω_0 es abierto. Sea $z_0 \in \overline{\Omega_0} \cap \Omega$ y sea $D(z_0,r) \subset \Omega$ un disco donde F tenga una rama uniforme. Sea $w \in \Omega_0 \cap D(z_0,r)$. Por definición de Ω_0 existe un disco D de centro w donde F tiene exactamente n ramas uniformes. Según hemos visto,

podemos exigir que esté contenido en $D(z_0, r)$, y a su vez esto implica que F tiene exactamente n ramas uniformes en $D(z_0, r)$. Por consiguiente $z_0 \in \Omega_0$ y Ω_0 es cerrado en Ω. ∎

En las condiciones del teorema anterior diremos que F tiene *multiplicidad* n en Ω o que es *n-forme.* Ahora podemos definir:

Definición 13.14 Sea $F : D'(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa completa y arbitrariamente prolongable. Diremos que z_0 es un *punto de ramificación* de orden n si F tiene multiplicidad $n+1$ en $D'(z_0, r)$. Si F tiene multiplicidad infinita diremos que z_0 es un *punto de ramificación* de orden infinito o un punto *logarítmico.*

Observemos que el hecho de que F sea holomorfa presupone que todas sus ramas uniformes están conectadas entre sí. Por ejemplo, 0 e ∞ son puntos de ramificación logarítmicos para la función logaritmo y puntos de ramificación de orden $n-1$ para la función $\sqrt[n]{z}$, las funciones uniformes tienen puntos de ramificación de orden 0 en sus singularidades aisladas y la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$ tiene puntos de ramificación simple en 0 e ∞ y se descompone en dos ramas uniformes (no ramificadas a su vez) alrededor de 1.

Ejemplo Consideremos la función arco coseno

$$\operatorname{Arccos} w = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\big(w + \sqrt{w^2-1}\,\big).$$

Sabemos que tiene tres singularidades aisladas en los puntos ± 1 e ∞. Vamos a estudiarlas. Ante todo, sabemos que todo punto regular tiene un entorno D (podemos suponer que es un disco) en el que las ramas uniformes del arco coseno tienen la forma

$$f(w) = \frac{1}{i} \log\big(w + \sqrt{w^2-1}\,\big),$$

donde la raíz cuadrada representa una rama uniforme de la misma en la imagen de D por la función w^2-1 y el logaritmo es una rama uniforme del mismo en la imagen de D por $w + \sqrt{w^2-1}$.

Fijemos ahora un entorno reducido $D'(1, r)$, con $0 < r < 1$, de modo que si $|w-1| < r$ entonces $|w^2-1| < 1/4$, con lo que $\big|\sqrt{w^2-1}\,\big| < 1/2$, sea cual sea la raíz elegida. Por consiguiente $w + \sqrt{w^2-1} \in D(1,1)$. Esto significa que para calcular una rama f del arco coseno en un entorno D de un punto de $D'(1, r)$ podemos usar una rama del logaritmo definida en $D(1, 1)$.

Así, si γ es un arco cerrado contenido en $D'(1, r)$ y que parta de un punto de D, entonces $\gamma^2 - 1$ es un arco cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a lo largo del cual podemos prolongar la rama uniforme de la raíz cuadrada que define a f. El resultado será la misma rama o su opuesta según si $I(\gamma^2 - 1, 0)$ es par o impar. Es fácil ver que

$$I(\gamma^2 - 1, 0) = I(\gamma + 1, 0) + I(\gamma - 1, 0) = I(\gamma, 1).$$

Una prolongación analítica de la raíz cuadrada a lo largo de γ^2-1 es una prolongación analítica de $\sqrt{w^2-1}$ a lo largo de γ, que acaba en la rama uniforme $\pm\sqrt{w^2-1}$, donde el signo depende únicamente de $I(\gamma,1)$. De ésta obtenemos una prolongación de $w+\sqrt{w^2-1}$ que toma imágenes en $D(1,1)$, luego podemos componerla con la rama del logaritmo que hemos fijado en $D(1,1)$ y obtener una prolongación analítica de f que acaba en

$$g(z)=\frac{1}{i}\log\big(w\pm\sqrt{w^2-1}\,\big),$$

donde el signo es positivo si $I(\gamma,1)$ es par y negativo en caso contrario.

Así pues, desde una de las infinitas ramas del arco coseno en D sólo podemos pasar a otra concreta mediante arcos contenidos en $D'(1,r)$, la que se obtiene al cambiar de raíz cuadrada pero no de logaritmo. Esto significa que el arco coseno tiene infinitas ramas en $D'(1,r)$, todas ellas biformes (el 1 es un punto de ramificación simple para cada una de ellas). Lo mismo vale para el -1.

La situación en ∞ es distinta. Tomemos $r>2$ y consideremos un disco $D\subset D'(\infty,r)$. Sea γ un arco cerrado que parta de un punto de D. Es fácil ver que $I(\gamma^2-1,0)=I(\gamma,1)+I(\gamma,-1)=2I(\gamma,0)$, donde usamos que 0 y ±1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Esto implica que al prolongar a lo largo de γ^2-1 una rama uniforme de la raíz cuadrada llegamos a la misma rama de partida (porque el índice respecto a 0 es par). Equivalentemente, al prolongar a lo largo de γ una rama uniforme de $\sqrt{w^2-1}$ llegamos a la misma rama. En particular la prolongación es un arco cerrado en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y se comprueba sin dificultad que $I(\sqrt{\gamma^2-1},0)=(1/2)I(\gamma^2-1,0)=I(\gamma,0)$.

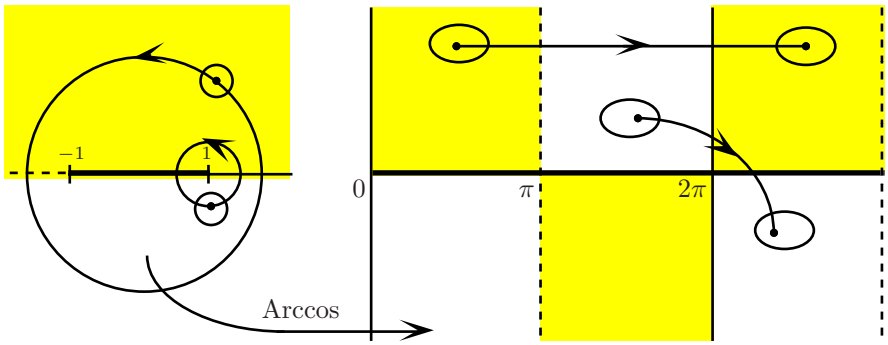
Tomando r suficientemente grande podemos garantizar que se cumple la desigualdad $|\gamma(t)|<\big|\gamma(t)+\sqrt{\gamma(t)^2-1}\,\big|$, de donde el teorema 8.9 nos permite concluir que $I(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1},0)=I(\sqrt{\gamma^2-1},0)=I(\gamma,0)$. Esto implica que si L es una determinación continua del logaritmo de $\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}$, el valor final de L es el inicial más $2\pi i\,I(\gamma,0)$, luego la prolongación analítica de una rama uniforme f del arco coseno en D acaba en la rama $f+2\pi\,I(\gamma,0)$.

Por consiguiente, los arcos contenidos en $D'(\infty,r)$ conectan las ramas del arco coseno que se diferencian en la elección del logaritmo, pero no en la raíz cuadrada, lo que se traduce en que el arco coseno tiene dos ramas multiformes en $D'(\infty,r)$, cada una de las cuales tiene un punto de ramificación logarítmico en ∞.

Estos hechos tienen una interpretación geométrica muy simple. Si D es un disco contenido en $\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$ y suponemos por simplicidad que no corta al eje real, entonces las ramas uniformes del arco coseno sobre D toman valores en cada una de las semibandas sombreadas igualmente en la figura de la página siguiente (ver pág. 15).

Las ramas que se obtienen cambiando de rama del logaritmo se diferencian en un múltiplo de 2π, luego se corresponden con el cambio de una banda por otra paralela. Por el contrario, cambiar de rama de la raíz cuadrada significa cambiar de semiplano. Con más detalle, si partimos de una rama del arco coseno

que toma imágenes en la semibanda $\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ y la prolongamos a lo largo de un arco γ que rodea al 1 (en sentido positivo), la prolongación analítica es un arco que parte de dicha semibanda, pasa a la adyacente por la derecha en el momento en que γ cruza el intervalo $]1, +\infty[$ y pasa al semiplano inferior cuando γ cruza el intervalo $]-1, 1[$. Si diéramos otra vuelta pasaríamos a la semibanda contigua por la izquierda y luego a la semibanda superior, es decir, volveríamos a la rama de partida.



Al girar alrededor del -1 desde el mismo punto se pasa a semibanda banda inferior izquierda en lugar de a la derecha.

Por el contrario, si partimos de una rama y giramos alrededor de infinito (equivalentemente, alrededor de 1 y -1 a la vez) pasamos dos semibandas hacia la derecha al cruzar los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$. ∎

Volviendo a la situación general, vamos a ver que toda función alrededor de un punto de ramificación puede expresarse en términos de logaritmos y, si el punto tiene orden de ramificación finito, en términos de radicales.

Teorema 13.15 *Sea $F : D'(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable. Entonces existe una función uniforme h definida en el semiplano $\operatorname{Re} z < \log r$ tal que*

$$F(z) = h(\operatorname{Log}(z - z_0)).$$

Si $z_0 = \infty$ es $F(z) = h(\operatorname{Log}(1/z))$.

Demostración: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una rama uniforme de f en un disco D. Tomemos una rama uniforme del logaritmo $\log(z - z_0)$ en D. (Si $z_0 = \infty$ tomamos $\log(1/z)$. Dejamos al lector las restantes modificaciones obvias para este caso.) El logaritmo transforma D en un dominio C contenido en el semiplano $\operatorname{Re} z < \log r$. Sobre C podemos definir la función holomorfa $h(z) = f(z_0 + e^z)$. Esta función es arbitrariamente prolongable en el semiplano, pues dado un arco $\gamma(t)$ que parta de C, el arco $z_0 + e^{\gamma(t)}$ está contenido en $D'(z_0, r)$ y parte de D, y una prolongación analítica de f a lo largo de él es también una prolongación analítica de h a lo largo de γ.

Por el principio de monodromía h se extiende a una función holomorfa en todo el semiplano, a la que seguiremos llamando h. La rama uniforme de

$h(\mathrm{Log}\,(z-z_0))$ que se obtiene sobre D al tomar como rama uniforme del logaritmo la función con que hemos definido h es precisamente f, y es claro que dos funciones multiformes completas con una rama uniforme en común son de hecho la misma función. ∎

Observemos que las distintas ramas uniformes de la función F del teorema anterior en un disco D se obtienen tomando distintas ramas uniformes de la función $\mathrm{Log}\,(z-z_0)$ en D. Supongamos que dos ramas uniformes distintas entre sí de la función $\mathrm{Log}\,(z-z_0)$ dieran lugar a la misma rama uniforme de F sobre un disco D. Pongamos que una de ellas transforma D en el recinto C. Entonces la otra lo transforma en el recinto $C+2k\pi i$, para un cierto entero no nulo k, con lo que $h(z)=h(z+2k\pi i)$ para todo $k\in C$, de donde se sigue que h tiene periodo $2k\pi i$. Si n es el mínimo natural no nulo k tal que h tiene periodo $2k\pi i$, entonces z_0 es un punto de ramificación de orden $n-1$. Por consiguiente, si la singularidad z_0 es logarítmica, la función h no puede tener periodo $2k\pi i$ para ningún natural no nulo k, y entonces las ramas uniformes de F en cada disco D se corresponden biunívocamente con las ramas uniformes de la función $\mathrm{Log}\,(z-z_0)$. Más aún, ahora es claro que cuando prolongamos una rama uniforme de F a lo largo de un arco cerrado, la rama de llegada depende únicamente del índice del arco alrededor de z_0.

Veamos ahora que si la singularidad tiene orden de ramificación finito podemos expresarla en términos de radicales:

Teorema 13.16 *Sea $F : D'(z_0,r)\longrightarrow\mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable de modo que z_0 sea un punto de ramificación de orden $n-1$. Entonces existe una función uniforme holomorfa $g : D'(0,\sqrt[n]{r})\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que*

$$F(z)=g\big(\sqrt[n]{z-z_0}\big).$$

Si $z_0=\infty$ es $F(z)=g(1/\sqrt[n]{z})$.

Demostración: Sea $F(z)=h(\mathrm{Log}\,(z-z_0))$, según el teorema anterior. Las observaciones que acabamos de hacer muestran que h tiene periodo $2n\pi i$. Podemos definir entonces $g(z)=h(n\mathrm{Log}\,z)$, donde no importa la rama del logaritmo que escojamos para calcularla, pues el resultado será el mismo. Claramente g es una función uniforme holomorfa en $D'(0,\sqrt[n]{r})$ y

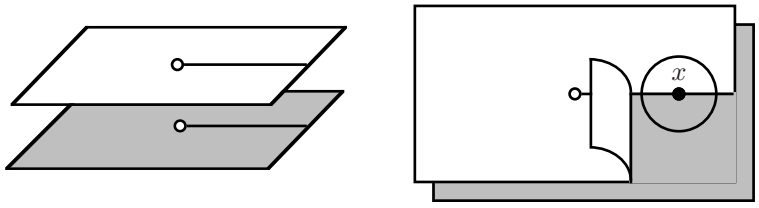
$$g\big(\sqrt[n]{z-z_0}\big)=g(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,(z-z_0)})=h(\mathrm{Log}\,(z-z_0))=F(z).$$

Los cambios para $z_0=\infty$ son claros. ∎

Nota Es obvio que en las condiciones del teorema anterior las ramas uniformes de F se corresponden biunívocamente con las de $\sqrt[n]{z-z_0}$ (y por lo tanto la prolongación analítica de una rama uniforme a lo largo de un arco cerrado depende únicamente de su índice alrededor de z_0), pero en general no es cierto que toda función de la forma $g\big(\sqrt[n]{z-z_0}\big)$ tenga un punto de ramificación de orden $n-1$ en z_0. Basta pensar en la función $\cos\sqrt{z}$, que es entera. ∎

13.4 Superficies de Riemann

Vamos a ver que una función multiforme meromorfa puede convertirse en una función uniforme añadiendo puntos a su dominio o, más exactamente, multiplicando los puntos de su dominio. Veamos un ejemplo de lo que pretendemos conseguir. Tomemos una de las funciones multiformes más sencillas: la raíz cuadrada. El problema que presenta es que a cada punto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenemos que asignarle dos imágenes, y no podemos elegir una sin perder la continuidad en algún sitio. Para resolver el problema tomamos dos copias de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, llamémoslas C_1 y C_2. Asignemos a cada punto $z = re^{i\theta}$ (con $0 \leq \theta < 2\pi$) de la primera copia su raíz cuadrada $\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ y a cada punto del segundo su otra raíz cuadrada $\sqrt{r}\, e^{i(\theta/2+\pi)}$. Entonces ambas funciones son discontinuas en el eje real. Por ejemplo, si z tiende a 1 desde el semiplano inferior de C_1 entonces $\sqrt{z}$ tiende a -1, que es precisamente la imagen del 1 de C_2. Arreglamos esto "cortando" ambas copias por el semieje real positivo y "pegando" el semiplano superior de C_1 con el semiplano inferior de C_2 y viceversa.



Topológicamente esto significa considerar como entornos básicos de cada número $x > 0$ en C_1 a los "discos" formados por un semicírculo del semiplano superior de C_1 (que contenga a los números reales) y el semicírculo del semiplano inferior de C_2 con el mismo radio pero sin los números reales, y similarmente para los puntos de C_2. Así, cuando z tiende a 1 desde el semiplano inferior de C_1 ya no tiende al punto 1 de C_1, sino al de C_2, y el límite -1 de $\sqrt{z}$ coincide con la imagen del límite 1.

Concretaremos estas ideas en la sección siguiente. De momento nos ocupamos de definir y estudiar el concepto de función holomorfa sobre espacios topológicos distintos de los abiertos en $\mathbb{C}^\infty$. Esto será posible sobre aquellos espacios en los que cada punto tenga un entorno homeomorfo a un disco abierto de $\mathbb{C}$. También será necesaria una condición adicional de compatibilidad entre los entornos de puntos distintos.

Definición 13.17 Una *estructura analítica* sobre un conjunto S es una familia A de pares (X, f), llamados *cartas,* donde X es un subconjunto no vacío de S y f es una aplicación biyectiva entre X y un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

a) Para todo $x \in S$ existe una carta $(X, f) \in A$ tal que $x \in X$.

b) Si $(X_1, f_1), (X_2, f_2) \in A$ y $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ entonces $f_1[X_1 \cap X_2]$ y $f_2[X_1 \cap X_2]$ son abiertos en $\mathbb{C}$ y la aplicación $f_1^{-1} \circ f_2 : f_1[X_1 \cap X_2] \longrightarrow f_2[X_1 \cap X_2]$ es holomorfa.

Notar que la aplicación descrita en b) es biyectiva, luego es una transformación conforme y en particular un homeomorfismo.

Si A es una estructura analítica en un conjunto S, entonces hay una única topología en S respecto a la cual los dominios de las cartas son abiertos y las cartas son homeomorfismos. En efecto, una base para dicha topología la forman los conjuntos de la forma $f^{-1}[U]$, donde $(X, f) \in A$ y U es un abierto en $\mathbb{C}$. Hay que comprobar que si un punto x pertenece a dos abiertos básicos $f_1^{-1}[U_1]$ y $f_2^{-1}[U_2]$ entonces pertenece a un tercero contenido en ambos. Ahora bien, $W = f_1[X_1 \cap f_2^{-1}[U_2]] = (f_1^{-1} \circ f_2)^{-1}[U_2]$ es un entorno de $f_1(x)$, al igual que U_1, y $f^{-1}[U_1 \cap W]$ es un abierto básico que cumple lo pedido.

Si tenemos una topología en S para la cual los dominios de las cartas son abiertos y las cartas son homeomorfismos entonces una base para dicha topología son los abiertos contenidos en los dominios de las cartas, luego ha de ser la base que acabamos de considerar.

Una *superficie de Riemann* es un par (S, A), donde S es un conjunto, A es una estructura analítica sobre S y S es un espacio de Hausdorff conexo con la topología que A le induce.

Como los dominios de las cartas son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{C}$ es claro que son localmente arcoconexos, luego las superficies de Riemann son espacios conexos localmente arcoconexos, y esto implica que de hecho son arcoconexos, al igual que todos sus abiertos conexos.

Ejemplos En lo sucesivo consideraremos a $\mathbb{C}^\infty$ como superficie de Riemann con la estructura analítica dada por dos cartas: la identidad en $\mathbb{C}$ y la aplicación $1/z$ en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$. Es inmediato comprobar que, efectivamente, estas cartas determinan una estructura analítica en $\mathbb{C}^\infty$, que induce la topología usual.

Todo dominio V de una superficie de Riemann S adquiere estructura de superficie de Riemann tomando como cartas las de la forma $(X \cap V, f|_{X\cap V})$, donde (X, f) es una carta de S tal que $X \cap V \neq \varnothing$. La topología que esta estructura induce en V es la inducida por la topología de S.

En particular todo dominio de $\mathbb{C}^\infty$ es una superficie de Riemann con la estructura que le induce $\mathbb{C}^\infty$. De nuevo su topología es la usual. ∎

Definición 13.18 Sea $f : S \longrightarrow T$ una aplicación entre dos superficies de Riemann. Diremos que f es *holomorfa* en un punto $z \in S$ si existen cartas (X, p) en S tal que $z \in X$ e (Y, q) en T con $f(z) \in Y$ de manera que la aplicación $p^{-1} \circ f \circ q$ (definida sobre el abierto $p[f^{-1}[Y] \cap X]$) es holomorfa en $p(z)$ en el sentido usual. Diremos que f es *holomorfa* en un abierto de S si lo es en cada uno de sus puntos.

La condición b) en la definición de estructura analítica implica que la elección de las cartas es irrelevante, en el sentido de que si la definición anterior se cumple para un par de cartas en particular entonces se cumple para todas las cartas, con tal de que $z \in X$ y $f(z) \in Y$. Otro hecho obvio es que las funciones holomorfas en este sentido son continuas.

Si Ω es un dominio en $\mathbb{C}^\infty$, entonces las aplicaciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas según la definición anterior coinciden con las holomorfas en sentido usual. En efecto, la holomorfía en los puntos finitos según la definición anterior equivale a que f compuesta con la identidad (a la vez por la izquierda y por la derecha) sea holomorfa en el sentido usual, y la holomorfía en ∞ equivale a que $f(1/z)$ sea holomorfa en 0.

Las funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ holomorfas en el sentido de la definición anterior son las funciones meromorfas en Ω en el sentido usual más la función constante igual a ∞.

Así pues, la definición de función holomorfa entre superficies de Riemann generaliza todos los casos que hasta ahora manejábamos. Es fácil ver que la composición de aplicaciones holomorfas entre variedades de Riemann es una aplicación holomorfa.

Extendemos el concepto de *transformación conforme* para referirnos a cualquier aplicación holomorfa y biyectiva entre superficies de Riemann. Es inmediato comprobar que las transformaciones conformes son homeomorfismos, y que sus inversas son también conformes (basta componer con cartas y aplicar este mismo hecho en el caso usual).

Las cartas de una superficie son transformaciones conformes. En lo sucesivo llamaremos *cartas* de una superficie de Riemann S a todas las transformaciones conformes de un abierto de S en $\mathbb{C}$. Es claro que la propiedad b) de la definición de variedad y la definición de función holomorfa siguen cumpliéndose para esta noción general de carta. La definición de superficie de Riemann simplemente garantiza que exista al menos una carta en un entorno de cada punto. En este sentido general, la restricción de una carta a un dominio menor sigue siendo una carta.

Todas las propiedades básicas de las funciones holomorfas son válidas en este contexto general.

Principio de prolongación analítica *Si dos funciones f, $g : S \longrightarrow T$ holomorfas en S coinciden en un conjunto con un punto de acumulación z entonces son iguales.*

En efecto, al componer f y g con dos cartas a cuyos dominios pertenezcan z y $f(z) = g(z)$ obtenemos dos funciones holomorfas (en el sentido usual) con el mismo dominio y que coinciden en un conjunto con acumulación, luego coinciden en todo su dominio y f y g coinciden en un entorno de z. El conjunto de puntos z en S tales que f y g coinciden en un entorno de z es un abierto no vacío y el mismo argumento anterior permite probar que también es cerrado, luego por conexión es toda la superficie S. ∎

Teorema de la aplicación abierta *Si $f : S \longrightarrow T$ es una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann, entonces es abierta.*

En efecto, sea A un abierto en S y $z \in A$. Basta ver que $f[A]$ es un entorno de $f(z)$. Sea $q : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ de T una carta tal que $f(z) \in Y$ y sea $p : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una carta de S tal que $z \in X$. Restringiéndola podemos suponer que $X \subset A \cap f^{-1}[Y]$.

Entonces $p^{-1} \circ f \circ q : p[X] \longrightarrow q[Y]$ es una función holomorfa no constante, luego su imagen, que es $q[f[X]]$, es abierta en $q[Y]$, y así $f[X]$ es abierto en Y, que a su vez es abierto en T. Como $f(z) \in f[X] \subset f[A]$, tenemos que $f[A]$ es entorno de $f(z)$. ∎

Teorema de Liouville *Si $f : S \longrightarrow T$ es una aplicación holomorfa entre una superficie de Riemann compacta S y una superficie no compacta T es constante.* (El caso clásico se recupera haciendo $S = \mathbb{C}^\infty$ y $T = \mathbb{C}$.)

Pues si f no es constante entonces $f[S]$ es abierto y cerrado en T, luego $f[S] = T$ y en consecuencia T es compacta. ∎

No es posible definir la derivada de una función holomorfa entre superficies de Riemann (la definición natural dependería de las cartas). Sin embargo podemos definir el orden una función holomorfa en un punto, no en exactamente en el sentido usual, sino generalizando al teorema 8.12.

Teorema 13.19 *Sea $f : S \longrightarrow T$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y sea $a \in S$. Entonces existen cartas $p : U \longrightarrow \mathbb{C}$ con $a \in U$ y $q : V \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f(a) \in V$ de modo que $f[U] \subset V$, $p(a) = q(f(a)) = 0$ y para todo $z \in p[U]$ se cumple $(p^{-1} \circ f \circ q)(z) = z^k$, para cierto natural k.*

Demostración: Componiendo dos cartas con traslaciones oportunas, podemos exigir que $p(a) = q(f(a)) = 0$. Restringiendo p podemos hacer que $f[U] \subset V$. Llamemos $F = p^{-1} \circ f \circ q$. Se trata de una función holomorfa no constante en $p[U]$ tal que $F(0) = 0$, luego existe un k tal que $F(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en 0 tal que $g(0) \neq 0$. Restringiendo p de nuevo podemos exigir que g no se anule en $p[U]$.

Tomando una rama uniforme de la raíz k-ésima en un entorno de $g(0)$ (y restringiendo aún más p si es necesario) construimos una función holomorfa $h : p[U] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z)^k = g(z)$. Así pues, $F(z) = (z\,h(z))^k$.

La función $zh(z)$ tiene derivada no nula en 0, por lo que es inyectiva en un entorno de 0. Restringiendo p una vez más podemos suponer que es inyectiva en $p[U]$. Componiendo p con esta función obtenemos una nueva carta sobre U, digamos p_0, de modo que si $x \in U$ y $w = p(x)h(p(x)) \in p_0[U]$,

$$(p_0^{-1} \circ f \circ q)(w) = q(f(x)) = F(p(x)) = (p(x)h(p(x)))^k = w^k.$$

Así pues, las cartas p_0 y q cumplen lo pedido. ∎

El número k dado por este teorema puede caracterizarse con independencia de las cartas consideradas:

> *Para todo entorno U de a suficientemente pequeño existe un entorno V de $f(a)$ de modo que todo punto en V distinto de $f(a)$ tiene exactamente k antiimágenes en U.*

Esto se sigue claramente de que la función z^k tiene esta propiedad en 0. Por lo tanto, k está completamente determinado por f y a. Lo llamaremos $o(f, a)$.

En el caso de una función holomorfa usual, no se trata exactamente del orden que teníamos definido, sino del orden de $f - f(a)$.

Es fácil ver que el conjunto de puntos $z \in S$ tales que $o(f, z) > 1$ es cerrado discreto en S.

Ejemplo Veamos un ejemplo de superficie de Riemann distinta de $\mathbb{C}^\infty$ y sus abiertos junto con una aplicación sencilla.

Sea C la circunferencia unidad $|z| = 1$ y sea $T = C \times C$. Sean z_1 y z_2 dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Entonces todo número complejo se expresa de forma única como $z = t_1 z_1 + t_2 z_2$, para t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Definimos $g(z) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$.

Claramente la aplicación $g : \mathbb{C} \longrightarrow T$ es continua y suprayectiva y todo punto $z \in \mathbb{C}$ tiene un entorno donde g es biyectiva (y de hecho un homeomorfismo en la imagen).

Las inversas locales de g determinan una estructura analítica sobre T. En efecto, si componemos la inversa de una carta con otra carta obtenemos una aplicación de la forma $t_1 z_1 + t_2 z_2 \mapsto (t_1 + k_1) z_1 + (t_2 + k_2) z_2$, para ciertos enteros k_1, k_2. Equivalentemente, $z \mapsto z + k_1 z_1 + k_2 z_2$, que es holomorfa.

También es fácil ver que la topología que la estructura analítica induce en T es el producto de la topología usual en C por sí misma. Por consiguiente T es una superficie compacta.

Supongamos ahora que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con periodos z_1 y z_2. Entonces la función $F : T \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) = f(t_1 z_1 + t_2 z_2)$ está bien definida y es holomorfa, pues al componerla con las cartas se obtiene la propia f. El teorema de Liouville implica que F, y por lo tanto f, ha de ser constante.

Así pues, no existen funciones enteras no constantes con dos periodos linealmente independientes. ∎

Terminamos con un resultado general que nos permite dotar de estructura de superficie de Riemann a un espacio topológico de forma sencilla.

Teorema 13.20 *Sea S un espacio topológico y $p : S \longrightarrow T$ una aplicación continua, abierta, suprayectiva y localmente inyectiva en una superficie de Riemann T. Entonces S admite una única estructura analítica que le induce su propia topología y para la cual p es holomorfa.*

Demostración: La unicidad hay que entenderla como que la identidad es una transformación conforme entre cualquier par de estructuras analíticas que cumplan el teorema.

Tomemos como cartas de S las aplicaciones $p|_A \circ u$, donde $u : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una carta de T y $A \subset u^{-1}[U]$ es un abierto en S en el que p es inyectiva.

Dado $x \in S$, podemos tomar una carta $u : U \longrightarrow \mathbb{C}$ en T tal que $p(x) \in U$ y por hipótesis existe un abierto A en S tal que $x \in A \subset u^{-1}[U]$ y donde p es inyectiva. Por consiguiente existe una carta definida alrededor de x.

Si $p|_A \circ u$ y $p|_B \circ v$ son dos cartas de S, entonces, donde está definida, se cumple

$$(p|_A \circ u)^{-1} \circ p|_B \circ v = u^{-1} \circ v,$$

luego es holomorfa. Esto prueba que las cartas determinan una estructura analítica en S.

Una carta $p|_A \circ u$ es un homeomorfismo de A en un abierto de $\mathbb{C}$ tanto para la topología dada en S como para la que le induce la estructura analítica. Además A es abierto para ambas. Esto implica que todo punto tiene una misma base de entornos para ambas topologías, luego de hecho son la misma.

Es claro que p es holomorfa, pues en un entorno de cada punto x podemos tomar una carta u alrededor de $p(x)$ y una carta $p|_A \circ u$ alrededor de x, con lo que la composición $(p|_A \circ u)^{-1} \circ p \circ u$ da la identidad, que es holomorfa.

Es claro que cualquier estructura analítica que cumpla el teorema admite como cartas las aplicaciones $p|_A \circ u$ que hemos considerado, lo que hace que la identidad sea holomorfa. ∎

13.5 Superficies de gérmenes

Tal y como anunciábamos, vamos a asociar una superficie de Riemann a cada función meromorfa multiforme, de modo que ésta pueda representarse como una función uniforme. La idea básica es multiplicar cada punto de $\mathbb{C}^\infty$ de modo que haya una copia por cada valor que tome en él cada función multiforme. Para ello sustituiremos los puntos por los gérmenes de funciones meromorfas, que definimos a continuación.

Definición 13.21 Sea $z \in \mathbb{C}^\infty$. Llamaremos $\mathcal{F}_z$ al conjunto de todas las funciones meromorfas definidas en un disco de centro z. Consideramos en $\mathcal{F}_z$ la relación de equivalencia según la cual dos funciones están relacionadas si coinciden en su dominio común. A las clases de equivalencia las llamaremos *gérmenes* de funciones meromorfas con soporte en z.

En la práctica identificaremos un germen g con cualquiera de sus elementos. Si g es un germen con soporte en z podemos tratarlo como una función meromorfa en un disco de centro z. La única diferencia es que si cambiamos de función aumentando o reduciendo el disco seguimos teniendo el mismo germen. Diremos que un disco D es un dominio de g si g tiene un elemento con dominio D. Llamaremos $\pi(g) = z$. Notar que z está determinado por el germen (es la intersección de los dominios de las funciones que lo componen). La idea es que los distintos gérmenes de soporte z representen distintas copias del mismo punto z. Por eso vamos a definir superficies de Riemann que tengan por puntos a los gérmenes.

Llamaremos $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los gérmenes de funciones meromorfas. Sobre $\mathcal{M}$ tenemos definida la función $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ que a cada germen le asigna su soporte y la función $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ dada por $\Phi(g) = g(\pi(g))$.

Sea g un germen y D un dominio de g. Para cada $z \in D$ definimos g_z como el germen de soporte z determinado por la restricción de g a cualquier disco de centro z contenido en D. Sea $D_g = \{g_z \mid z \in D\} \subset \mathcal{M}$. Es claro que $\pi|_{D_g} : D_g \longrightarrow D$ es biyectiva, pues $\pi(g_z) = z$. Observemos que $\Phi|_{D_g} = \pi|_{D_g} \circ g$.

Los conjuntos D_g son la base de una topología en $\mathcal{M}$. En efecto, se cumple que $g \in D_g$ y si $t \in D_g \cap E_h$, entonces $z = \pi(t) \in D \cap E$ y $t = g_z = h_z$. Tomamos un dominio A de t tal que $A \subset D \cap E$ y entonces es claro que $t \in A_t \subset D_g \cap E_h$.

Notemos además que $\mathcal{M}$ es un espacio de Hausdorff con esta topología. En efecto, si $g \neq h$ son dos puntos de $\mathcal{M}$ y $\pi(g) \neq \pi(h)$, entonces g y h tienen dominios disjuntos, digamos D y E, y los abiertos D_g y E_h son entornos disjuntos de g y h. Si por el contrario $\pi(g) = \pi(h)$ y D es un dominio común, entonces $D_g \cap D_h = \varnothing$, pues si existiera un germen $t \in D_g \cap D_h$, entonces g y h coincidirían en un dominio de t, luego coincidirían en D y sería $g = h$.

Podemos aplicar el teorema 13.20 a la aplicación $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. En efecto, es continua, porque si D es un disco abierto en $\mathbb{C}^\infty$ su antiimagen es la unión de todos los abiertos E_g, donde g es un germen con dominio $E \subset D$; es abierta, pues $\pi[D_g] = D$; es obviamente suprayectiva, pues todo punto soporta un germen, y es localmente inyectiva, pues lo es en cada abierto D_g.

Así pues, podemos considerar la única estructura analítica sobre $\mathcal{M}$ que induce la topología que acabamos de definir y que hace holomorfa a la función π. Claramente, si $\pi(g) \neq \infty$ y D es un dominio de g, una carta alrededor de g es la restricción de π a D_g. Si $\pi(g) = \infty$ hemos de componer dicha restricción con $1/z$.

Según la definición que hemos dado, $\mathcal{M}$ no es una superficie de Riemann con esta estructura analítica, porque no es un espacio conexo. Sin embargo, las componentes conexas de $\mathcal{M}$ sí son superficies de Riemann. Las llamaremos *superficies de gérmenes.*

Es claro que si S es una superficie de gérmenes, entonces las restricciones $\pi : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ y $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ son funciones holomorfas. La conexión en las superficies de gérmenes tiene una interpretación muy importante:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco. Sean g y h gérmenes tales que $\pi(g) = \gamma(a)$ y $\pi(h) = \gamma(b)$. Diremos que g *se prolonga analíticamente* hasta h a lo largo de γ si un elemento de g se prolonga analíticamente a lo largo de γ hasta un elemento de h. Obviamente no importa la elección de los elementos.

Teorema 13.22 *Sean g y h dos gérmenes de funciones meromorfas. Si Γ es un arco en $\mathcal{M}$ que conecta g con h entonces $\gamma = \Gamma \circ \pi$ es un arco en $\mathbb{C}^\infty$ que conecta $\pi(g)$ con $\pi(h)$ y $f = \Gamma \circ \Phi$ es una función meromorfa sobre γ que prolonga g hasta h. Recíprocamente, si g se prolonga hasta h a lo largo de un arco γ mediante una función f entonces $\gamma = \Gamma \circ \pi$ y $f = \Gamma \circ \Phi$ para un cierto arco Γ en $\mathcal{M}$ que conecta g con h.*

Demostración: Sea $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$. Fijemos $t \in [a, b]$ y sea D un dominio de $u = \Gamma(t)$. Entonces, para valores de s cercanos a t tenemos que $\Gamma(s) \in D_u$, luego $f(s) = u(\gamma(s))$. Así pues, f es meromorfa sobre γ. Similarmente se prueba que f prolonga g hasta h.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco que conecte $\pi(g)$ con $\pi(h)$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función que prolongue g hasta h a lo largo de γ. Por definición de función meromorfa sobre un arco, para cada $t \in [a, b]$ existe una función g_t meromorfa en un disco de centro $\gamma(t)$ de modo que para puntos s cercanos a t se cumple

$f(s) = g_t(\gamma(s))$. Llamemos $\Gamma(t)$ al germen en $\gamma(t)$ determinado por g_t. Así tenemos una función $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$. Veamos que Γ es continua.

Para ello observamos que, si $t \in [a, b]$, entonces $\Gamma \circ \pi = \gamma$ es continua, y como π es un homeomorfismo en un entorno de $\Gamma(t)$, componiendo con su inversa obtenemos que Γ es continua en t.

Por otra parte, $\Gamma(a)$ coincide con g sobre los puntos de γ^* cercanos a $\gamma(a)$, luego $\Gamma(a) = g$ e igualmente concluimos que $\Gamma(b) = h$. También es claro que $\Gamma \circ \Phi = f$. ∎

De este modo, las superficies de gérmenes son simplemente las clases de equivalencia de gérmenes prolongables entre sí.

A cada dominio V en una superficie de gérmenes S podemos asociarle una función multiforme meromorfa $F : \pi[V] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, dada por $F(z) = \Phi[\pi^{-1}[z]]$.

En efecto, si $w \in F(z)$, entonces existe un $g \in V$ tal que $\pi(g) = z$ y $\Phi(g) = w$. Sea D un dominio de g. Entonces $f = (\pi|_D)^{-1} \circ \Phi$ es una rama uniforme meromorfa de F tal que $f(z) = w$.

Falta probar que cualquier rama uniforme de F se prolonga analíticamente hasta cualquier otra. Fijemos un germen $h \in V$. Basta probar que h se prolonga analíticamente hasta cualquier rama uniforme de F. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una de estas ramas.

Por definición de F, para cada $z \in A$, existe un germen $g_z \in S$ tal que $\pi(g_z) = z$ y $f(z) = g_z(z)$. Sea D_z un dominio de g_z. Puesto que V es arcoconexo, existe un arco que conecta h con g_z, es decir, g_z es prolongación analítica de h y, según el teorema 13.4, lo es a lo largo de una poligonal P_z con vértices de coordenadas racionales.

Puesto que la cantidad de puntos $z \in A$ no es numerable, ha de haber una cantidad no numerable de puntos para los que la poligonal P_z es una misma poligonal P. Así, si z_1 y z_2 son dos de estos puntos, g_{z_1} y g_{z_2} coinciden en $D_{z_1} \cap D_{z_2}$, pues lo hacen sobre el extremo de P. Esto permite extender las funciones g_z a la unión de los discos D_z. El resultado es una función meromorfa que es prolongación analítica de h a lo largo de P y coincide con f en una cantidad no numerable de puntos. Como un conjunto no numerable no puede ser discreto, coincide con f, luego f es prolongación analítica de h.

Más aún, ahora es claro que los gérmenes determinados f están en V (pues son prolongación analítica de h, luego están conectados con h por un arco). Si llamamos $A_f \subset V$ al conjunto de estos gérmenes, es claro que A_f es abierto en V y $\pi|_{A_f} : A_f \longrightarrow A$ es biyectiva y $f = (\pi|_{A_f})^{-1} \circ \Phi$.

Con esto hemos probado que las ramas uniformes de F son todas de la forma $(\pi|_A)^{-1} \circ \Phi$, para los abiertos A de V donde π es inyectiva.

Recíprocamente, si F es una función multiforme meromorfa en un dominio Ω, es fácil ver que el conjunto A de todos los gérmenes de las ramas uniformes de F constituye un dominio de una superficie de gérmenes para la cual la función que acabamos de construir es la F dada. Diremos que A es la *superficie de gérmenes* de F. El teorema siguiente la caracteriza.

Teorema 13.23 *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$. Entonces existe una única superficie de Riemann A tal que existen aplicaciones holomorfas $\pi : A \longrightarrow \Omega$ y $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ de modo que*

a) π es localmente inyectiva.

b) Si π es conforme en un dominio X entonces $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$ es una rama uniforme de F en $\pi[X]$. Toda rama uniforme de F es de esta forma.

c) Dos puntos $x, y \in A$ son iguales si y sólo si $\pi(x) = \pi(y)$ y tienen entornos X e Y donde π es conforme y las funciones $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$ y $(\pi|_Y)^{-1} \circ \Phi$ coinciden en $\pi[X] \cap \pi[Y]$.

La unicidad ha de entenderse como que si (A', π', Φ') cumple estas mismas condiciones entonces existe una transformación conforme $u : A \longrightarrow A'$ tal que $\pi = u \circ \pi'$, $\Phi = u \circ \pi'$.

Demostración: Es claro que la superficie de gérmenes de F, llamémosla S, cumple las propiedades indicadas. Para probar la unicidad observamos que la aplicación que a cada $x \in A$ le asigna el germen determinado por $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$, donde X es un entorno de x en el que π es conforme, es una transformación conforme $u : A \longrightarrow S$ que relaciona las aplicaciones respectivas π y Φ como indica el enunciado. ∎

En general, a cualquier superficie de Riemann en las condiciones del teorema anterior la llamaremos *superficie de Riemann* de la función F. Tenemos que la superficie de gérmenes es una realización concreta de la superficie de Riemann de una función y que cualquier otra es conformemente equivalente a ésta. No obstante en muchos casos existen otras realizaciones distintas de interés. Por ejemplo, ahora es inmediato que la superficie de Riemann de la raíz cuadrada puede identificarse con la construida al principio de la sección anterior, "pegando" dos copias de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En efecto, si el espacio es, por concretar,

$$S = \big((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}\big) \cup \big((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{1\}\big),$$

sobre S tenemos definida la proyección π que a cada punto le asocia su primera componente. De acuerdo con la identificación que hemos hecho, S es un espacio de Hausdorff conexo y π es continua, abierta y localmente inyectiva, con lo que S se convierte en superficie de Riemann al exigir que π sea holomorfa. La aplicación Φ es la que a cada punto le asocia la raíz cuadrada de su primera componente según el criterio que habíamos establecido. Es fácil ver que Φ es holomorfa y se verifican todas las propiedades del teorema anterior. ∎

Esta representación de la superficie de Riemann de la raíz cuadrada es la que permite comprender mejor el comportamiento de dicha función. En efecto, según lo dicho, para trabajar con la raíz cuadrada debemos concebir $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ como "dos hojas superpuestas", de modo que cuando, por ejemplo, prolongamos una rama uniforme a lo largo de una circunferencia γ de centro 0, no volvemos al punto de partida, sino que en realidad estamos moviéndonos por un arco abierto

Γ que nos lleva de un punto al punto de la otra hoja superpuesto a él, donde la raíz cuadrada toma otros valores.

No obstante, desde un punto de vista teórico podemos decir que la superficie de Riemann de la raíz cuadrada es simplemente $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En efecto, más en general tenemos lo siguiente (consecuencia inmediata del teorema anterior):

Teorema 13.24 *Sea $f : S \longrightarrow \Omega$ una función meromorfa uniforme suprayectiva y localmente inyectiva entre dos dominios de $\mathbb{C}^\infty$. Entonces la superficie de Riemann de $F = f^{-1}$ puede identificarse con S, tomando $\pi = f$ y Φ igual a la identidad en S.*

Así, la superficie de Riemann de la raíz cuadrada puede identificarse con $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tomando $\pi(z) = z^2$, de modo que, por ejemplo, 1 y -1 se corresponden ambos con $z = 1$. Una semicircunferencia Γ de centro 0 que una 1 y -1 se transforma mediante π en la circunferencia γ de centro 0 con ambos extremos iguales a 1, de modo que al prolongar una rama uniforme de la raíz cuadrada a lo largo de γ, lo que hacemos en S es pasar de la identidad alrededor de 1 hasta la identidad alrededor de -1 a lo largo del arco Γ.

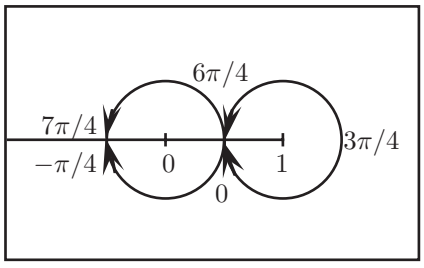
Similarmente, la superficie de Riemann del logaritmo puede identificarse con $\mathbb{C}$, la del arco coseno es $\mathbb{C}$ menos los múltiplos enteros de π, etc.

Ejemplo En el capítulo VIII trabajamos con la función $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$. Veamos cómo los razonamientos allí empleados resultan más claros y naturales si tenemos presente la variedad de Riemann de esta función. Partamos de una rama uniforme cualquiera, por ejemplo

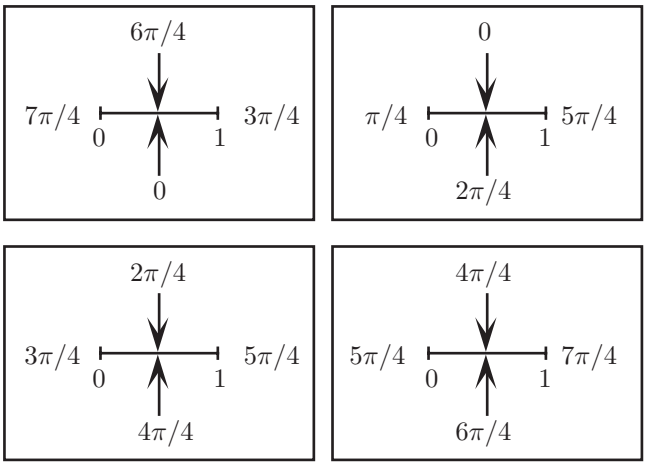
$$\sqrt[4]{z(1-z)^3} = e^{(\log_{-\pi} x + 3\log_0(1-z))/4}.$$

Notar que $\log_0 z$ no está definido en $[0, +\infty[$, luego $\log_0(1-z)$ no está definido en $]-\infty, 1]$ y, como $\log_{-\pi} z$ no está definido en $]-\infty, 0]$, la rama anterior está definida y es holomorfa en el plano complejo menos el intervalo $]-\infty, 1]$.

La figura muestra la parte imaginaria de la función $\log_{-\pi} z + 3\log_0(1-z)$, incluyendo los límites en el intervalo donde no está definida. Esta parte imaginaria es el argumento de la rama uniforme que hemos tomado, y como $7\pi/4$ y $-\pi/4$ se diferencian en 2π, resulta que dicha rama se extiende continuamente al intervalo $]-\infty, 0[$. Podemos construir otra rama de forma análoga sobre el plano menos el intervalo $[0, +\infty[$ y ajustarla para que en $]-\infty, 0[$ tome argumento $-\pi/4$. Esto prueba que la rama original es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

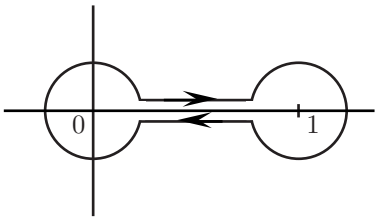


Si multiplicamos esta rama por las constantes ± 1, $\pm i$ obtenemos cuatro ramas distintas en este abierto que toman los argumentos siguientes:



Las cuatro ramas son discontinuas en el intervalo $]0,1[$, pero se conserva la continuidad si suponemos que un arco que cruce este segmento desde el semiplano inferior de la primera rama aparece en el semiplano superior de la segunda, etc. Con más precisión, podemos tomar cuatro copias de $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ sobre las que definimos las cuatro ramas uniformes anteriores, entendiendo que a los puntos del segmento $]0,1[$ les asignamos el valor del límite desde el semiplano superior. A continuación las "pegamos" a través del segmento $]0,1[$, en el sentido de que, por ejemplo, los entornos básicos de un punto en el segmento de la tercera copia es medio disco en el semiplano superior de dicha copia y el otro medio en el semiplano inferior de la segunda. Así obtenemos una superficie de Riemann S que resulta ser la superficie de Riemann de la función multiforme $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$. La comprobación se reduce a ver que la función que hemos definido es holomorfa en los puntos de las cuatro copias de $]0,1[$ y que en un entorno de cada punto $z \neq 0$, 1 hay exactamente cuatro ramas uniformes de esta función. Los razonamientos son sencillos y se pueden extraer de las consideraciones del capítulo $VIII$.

Allí consideramos la integral de esta función (en realidad del producto de ésta por una función uniforme) a lo largo del arco cerrado de la figura siguiente:



Para ello tuvimos que hacer algunas consideraciones que justificaran el cambio de rama uniforme al pasar de un segmento horizontal al otro. Desde el punto de vista de las superficies de Riemann podemos considerar en lugar de este arco su elevación a S, concretamente, el arco cuyo tramo horizontal superior está en el intervalo $]0,1[$ de la segunda copia (donde la función toma valores reales), al recorrer la circunferencia en torno al 1 permanece en dicha copia, pero al volver

al segmento $]0,1[$ pasamos a la tercera copia, y volvemos a la segunda al entrar en la circunferencia en torno a 0.

Es posible definir integrales de funciones sobre arcos en superficies de Riemann, pero no vamos a entrar en ello, ya que necesitaríamos un nivel de geometría diferencial más allá del propósito de este libro. Normalmente, en las aplicaciones a funciones holomorfas sobre el plano complejo es posible esquivar el uso de superficies de Riemann, tal y como hicimos en el capítulo VIII, y así lo más cómodo es pensar en términos de superficies y concretar los razonamientos sin ellas. ∎

13.6 Planos tangentes y diferenciales

Ya hemos comentado que no es posible generalizar la noción de derivada de una función holomorfa al caso de funciones definidas sobre superficies de Riemann. La forma natural de definir la derivada en un punto x de una función holomorfa $f : X \longrightarrow Y$ sería tomar una carta ϕ alrededor de x y otra ψ alrededor de $f(x)$ y definir $f'(x) = (\phi^{-1} \circ f \circ \psi)'(\phi(x))$, pero es fácil poner ejemplos que muestran que este número depende de las cartas escogidas.

Para comprender lo que sucede conviene recordar que las funciones holomorfas son las funciones diferenciables en el sentido del análisis real cuya diferencial es $\mathbb{C}$-lineal, y la derivada en un punto no es sino la matriz 1×1 de su diferencial, vista como aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Ahora bien, la matriz de una aplicación lineal depende de la base en la que la consideremos, que en este caso es la base canónica formada por el 1. A las funciones holomorfas entre superficies de Riemann podemos asociarles igualmente una aplicación $\mathbb{C}$-lineal en cada punto, pero no de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, sino entre dos planos complejos en los que no tenemos base canónica, sino que cada carta alrededor del punto determina una base distinta. Ésta es la interpretación de que la derivada que pretendíamos definir dependa de las cartas. Vamos a ver todo esto con detalle.

En primer lugar hemos de observar que una superficie de Riemann no tiene una estructura vectorial que permita definir aplicaciones lineales. La diferencial de una función en un punto será una aplicación lineal sobre un espacio que todavía no hemos definido. Si pudiéramos considerar a las superficies sumergidas en $\mathbb{R}^3$, dicho espacio sería su plano tangente en el sentido geométrico intuitivo, pero en general no tenemos dada ninguna relación entre las superficies y $\mathbb{R}^3$. Pese a ello, el plano tangente puede definirse de forma abstracta, como es habitual en geometría diferencial.

Definición 13.25 Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$. Llamaremos F_p al conjunto de todas las funciones holomorfas definidas en un entorno conexo de p. Establecemos la relación de equivalencia según la cual dos funciones de F_p están relacionadas si coinciden en un entorno de p. Llamaremos G_p al conjunto de las clases de equivalencia, a las que llamaremos *gérmenes* de funciones holomorfas en p.

El espacio G_p puede dotarse de estructura de espacio vectorial complejo de forma natural: La suma de dos gérmenes $[f]$, $[g] \in G_p$ es el germen de la

función definida sobre la intersección de los dominios de f y de g mediante $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. El producto de $\alpha \in \mathbb{C}$ por $[f] \in G_p$ se define como el germen de la función con el mismo dominio que f dada por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Es fácil ver que estas operaciones no dependen de los representantes con que se calculan y que dotan realmente a G_p de estructura de espacio vectorial (lo cual no sucedería si hubiéramos trabajado con F_p).

Una *derivación* en p es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $v : G_p \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g]), \qquad \text{para todo } [f], [g] \in G_p.$$

En la práctica escribiremos $v(f)$ en lugar de $v([f])$, pero es importante que $v(f)$ depende únicamente del germen de f.

Llamaremos *plano tangente* de una superficie de Riemann X en un punto $p \in X$ al conjunto de todas las derivaciones de X en p. Lo representaremos por $T_p(X)$. Es inmediato comprobar que $T_p(X)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(v+w)([f]) = v([f]) + w([f]), \qquad (\alpha v)([f]) = \alpha v([f]), \quad \text{para todo } [f] \in F_p.$$

Vamos a probar que $T_p(X)$ es realmente un plano complejo, es decir, tiene dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$. Sea $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una carta de X tal que $p \in U$. Para cada $f \in F_p$ definimos

$$\frac{df}{dz}\Big|_p = (z^{-1} \circ f)'(z(p)).$$

Es claro que esta derivada depende únicamente del germen de f, luego induce una derivación

$$\frac{d}{dz}\Big|_p \in T_p(X).$$

Observemos que si X es un abierto en $\mathbb{C}$ y $z : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es la identidad, entonces la derivada que acabamos de definir es la usual. En una variedad arbitraria, en cambio, no tenemos una "carta identidad", por lo que tenemos una derivada distinta para cada carta, sin que podamos seleccionar una canónica.

Enseguida probaremos que la derivada respecto a z es una base de $T_p(X)$. Notemos antes que si $v \in T_p(X)$ y c_α es la función constante $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $v(c_\alpha) = 0$. En efecto,

$$v(c_1) = v(c_1 c_1) = v(c_1) \cdot 1 + 1 \cdot v(c_1),$$

luego $v(c_1) = 0$ y $v(c_\alpha) = v(\alpha c_1) = \alpha v(c_1) = 0$.

Ahora probamos que si $v \in T_p(X)$ y $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una carta alrededor de p, entonces

$$v = v(z)\,\frac{d}{dz}\Big|_p.$$

Puesto que el miembro derecho depende sólo del germen de z, podemos restringir la carta y exigir que $z[U]$ sea convexo.

Fijemos $x \in U$ y sea $z = z(x)$, $z_0 = z(p)$. Sea $g = z^{-1} \circ f : z[U] \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorfa.

La función $h(w) = g(w(z-z_0)+z_0)$ es holomorfa en un abierto convexo que contiene a 0 y a 1. Notemos que $h(0) = g(z_0) = f(p)$, $h(1) = g(z) = f(x)$.

Por la regla de Barrow,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(z) = g(z_0) + \int_0^1 h'(\zeta)\,d\zeta \\ &= g(z_0) + \int_0^1 g'(\zeta(z-z_0)+z_0)(z-z_0)\,d\zeta \\ &= f(p) + k(z)(z-z_0) = f(p) + k(z(x))(z(x)-z(p)), \end{aligned}$$

donde $k : z[U] \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función holomorfa dada por

$$k(z) = \int_0^1 g'(\zeta(z-z_0)+z_0)\,d\zeta.$$

Tenemos, pues, que $f = c_{f(p)} + (z \circ k)(z - c_{z(p)})$. Aplicando v resulta

$$\begin{aligned} v(f) &= v(z \circ k)(z(p) - z(p)) + k(z(p))v(z) \\ &= v(z)\int_0^1 g'(z_0)\,d\zeta = v(z)g'(z(p)) = v(z)\frac{df}{dz}\Big|_p. \end{aligned}$$

■

Con esto hemos probado:

Teorema 13.26 *Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$. Para cada carta $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ alrededor de p, se cumple*

$$T_p(X) = \left\langle \frac{d}{dz}\Big|_p \right\rangle.$$

Si $w : V \longrightarrow \mathbb{C}$ es otra carta, entonces,

$$\frac{d}{dw}\Big|_p = \frac{dz}{dw}\Big|_p \frac{d}{dz}\Big|_p.$$

La generalización de la derivada de una función holomorfa para el caso de aplicaciones entre superficies de Riemann es la siguiente:

Definición 13.27 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann. Para cada $p \in X$ definimos la *diferencial* de f en p como la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $df(p) : T_p(X) \longrightarrow T_{f(p)}(Y)$ dada por

$$df(p)(v)(g) = v(f \circ g), \qquad \text{donde } v \in T_p(X) \text{ y } g \in F_{f(p)}.$$

Es inmediato comprobar que $df(p)(v)$ depende sólo del germen de g, así como que es una derivación. La linealidad de $df(p)$ también es obvia.

Observemos que si fijamos una carta z alrededor de p y una carta w alrededor de $f(p)$, entonces

$$\begin{aligned} df(p)\left(\frac{d}{dz}\Big|_p\right) &= \left(df(p)\left(\frac{d}{dz}\Big|_p\right)(w)\right)\frac{d}{dw}\Big|_{f(p)} = \frac{d\,f\circ w}{dz}\Big|_p\,\frac{d}{dw}\Big|_p \\ &= (z^{-1}\circ f\circ w)'(z(p))\;\frac{d}{dw}\Big|_p. \end{aligned}$$

Así pues, nuestro proyecto de definir $f'(p)$ se ha convertido en la matriz de $df(p)$ en las bases de $T_p(X)$ y $T_{f(p)}(Y)$ asociadas a las cartas.

En lo sucesivo nos restringiremos al caso particular de una función holomorfa $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$, de modo que no tenemos bases canónicas de los planos tangentes en S pero sí en $\mathbb{C}$. Tomando como carta de $\mathbb{C}$ la identidad w podemos identificar cada derivación

$$v = \alpha\frac{d}{dw}\Big|_p \in T_p(\mathbb{C})$$

con el número complejo $\alpha = v(w)$. Entonces

$$df(p)(v) = df(p)(v)(w) = v(f).$$

Así, $df(p) : T_p(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un elemento del espacio vectorial dual $T_p(X)^*$.

Es fácil ver que $df(p)$ sólo depende del germen de f en p. De hecho podemos definir $df(p)$ para cualquier función definida en un entorno de p. Si consideramos en particular una carta $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ alrededor de p, entonces

$$dz(p)\left(\frac{d}{dz}\Big|_p\right) = \frac{dz}{dz}\Big|_p = 1,$$

lo que significa que $dz(p)$ es la base dual en $T_p(X)^*$ asociada a la base $d\,/dz|_p$ de $T_p(X)$. Por consiguiente, si $\phi \in T_p(X)^*$ se cumple

$$\phi = \phi\left(\frac{d}{dz}\Big|_p\right)dz(p).$$

Definición 13.28 Una *forma diferencial* (de primer orden) en una superficie de Riemann X es una aplicación ω que a cada punto $p \in X$ le asigna una aplicación lineal $\omega(p) : T_p(X) \longrightarrow \mathbb{C}$.

En estos términos, cada función holomorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene asociada una forma diferencial df.

En general, si ω es una forma diferencial en X, $p \in X$ y $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una carta alrededor de p, para cada $x \in U$ se cumple

$$\omega(x) = g(x)dz(x),$$

donde $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada por

$$g(x) = \omega(x)\left(\frac{d}{dz}\Big|_x\right).$$

Diremos que ω es *holomorfa* en x si lo es la función g. Observemos que no importa la carta z que tomemos, pues si w es otra carta entonces su función asociada es

$$\tilde{g}(x) = \omega(x)\left(\frac{d}{dw}\Big|_x\right) = \omega(x)\left(\frac{dz}{dw}\Big|_x \frac{d}{dz}\Big|_x\right) = \frac{dz}{dw}\Big|_x g(x), \tag{13.1}$$

que también es holomorfa.

La diferencial de una función holomorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una forma diferencial holomorfa pues, si $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es cualquier carta de X,

$$df(x) = df(x)\left(\frac{d}{dz}\Big|_x\right) dz(x) = \frac{df}{dz}\Big|_x dz(x),$$

o, más brevemente,

$$df|_U = \frac{df}{dz}\, dz,$$

y la función $df/dz = z \circ (z^{-1} \circ f)'$ es holomorfa en U.

Más en general, diremos que una forma ω es *meromorfa* en X si está definida en todos los puntos de X salvo en un conjunto cerrado y discreto, de modo que para cada carta $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ la función g tal que $\omega|_U = g\, dz$ es meromorfa y tiene polos exactamente en los puntos de U donde ω no está definida. La relación (13.1) permite definir el orden de un polo de ω como el orden del polo correspondiente de la función g, sin que éste dependa de la carta.

Así, si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa en una variedad de Riemann X, la forma df es meromorfa, pues está definida salvo en los polos de f y, para cada carta, la función df/dz es meromorfa en su dominio y tiene un polo de orden $n + 1$ donde f tiene un polo de orden $n > 0$.

Capítulo XIV

Funciones algebraicas

Consideremos la función multiforme $\sqrt{z}$, que está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con puntos de ramificación simples en 0 e ∞. Sabemos que su superficie de Riemann puede identificarse con $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomando como proyección $\pi(z) = z^2$, y entonces la función $\sqrt{z}$ se corresponde con la función $\Phi(z) = z$ sobre S. Según las definiciones que hemos dado, los puntos 0 e ∞ no se corresponden con puntos de S, pero en este ejemplo en concreto vemos que resulta natural añadir dos puntos a S, el 0 e ∞, y extender $\pi : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, de modo que ahora los puntos de ramificación están representados sobre la superficie de Riemann. Más aún, observamos que, mientras 0 e ∞ son singularidades no evitables de $\sqrt{z}$, en el sentido de que la función no tiene ramas uniformes sobre ellos, sus puntos asociados en S son singularidades evitables de la función Φ, ya que ésta puede extenderse a la identidad en $\mathbb{C}^\infty$. Tenemos así un ejemplo de cómo una singularidad puede evitarse trabajando sobre la superficie de Riemann de la función.

En general, vamos a probar que los puntos de ramificación de orden finito de una función multiforme F pueden interpretarse como singularidades aisladas de la correspondiente función Φ sobre la superficie de Riemann de F (completada adecuadamente). Con esto transformamos una singularidad con ramificación en una singularidad sin ramificación. Cuando además la singularidad uniforme resulta ser evitable, el punto de ramificación se llama algebraico. Es el caso de 0 e ∞ para la función $\sqrt{z}$. Así pues, las singularidades algebraicas de una función son las singularidades que pueden evitarse en términos de superficies de Riemann.

Las funciones algebraicas son las funciones multiformes meromorfas cuyas singularidades son todas algebraicas y que además verifican una condición adicional: tener orden de ramificación finito. La restricción no es arbitraria, sino que probaremos que estas condiciones caracterizan a una familia muy importante de funciones meromorfas: las que son raíces de polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathcal{M}(\Omega)$ de las funciones (uniformes) meromorfas sobre un dominio Ω. Ésta es la razón por la que tales funciones reciben el nombre de algebraicas.

La función $\sqrt{z}$ es claramente algebraica y, en efecto, es raíz del polinomio

de segundo grado $w^2 - z \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$. Después daremos una definición precisa de qué hemos de entender por ser raíz de un polinomio en este sentido, pero en este ejemplo la interpretación es obvia. Seguidamente detallamos éstos y otros hechos.

14.1 Singularidades algebraicas

En esta sección probaremos que los puntos de ramificación de orden finito pueden ser incorporados a las superficies de gérmenes como singularidades aisladas. Ante todo conviene adoptar algunos convenios de notación que nos permitan manejar más cómodamente las singularidades aisladas. Cuando digamos que $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa multiforme completa en un dominio Ω sobrentenderemos que existe un conjunto E discreto y cerrado en Ω tal que F es holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E$. En los puntos de E la función F puede o no estar definida. De todos modos, entenderemos que la completitud de F vale sobre todo Ω, en el sentido de que cualquier prolongación analítica de una rama uniforme meromorfa de F con dominio contenido en Ω y a lo largo de un arco contenido en Ω es también una rama uniforme de F.

Es claro que si llamamos E_0 al conjunto de los puntos de Ω que no son regulares para F, entonces $E_0 \subset E$ es también un subconjunto discreto y cerrado en Ω, y F es holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E_0$, es decir, que podemos reducir E al conjunto de los puntos no regulares para F. Nos referiremos a ellos como los *puntos singulares.* Ciertamente, los puntos de E son singularidades aisladas de F.

Según el teorema 13.13, la función F tiene el mismo número de ramas uniformes holomorfas en un entorno de cada uno de sus puntos regulares. Si este número es finito igual a n diremos que F es n-forme o que tiene multiplicidad n (aunque F pueda tener menos de n ramas en un entorno de un punto singular). Por ejemplo, la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$ es biforme en $\mathbb{C}^\infty$.

La relación de las singularidades aisladas con las superficies de gérmenes se basa en el teorema siguiente:

Teorema 14.1 *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa completa en un dominio Ω. Sea $u : D'(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una rama holomorfa que tenga en a un punto de ramificación de orden finito (tal vez nulo) $n-1$. Sea $g : D'(0, \sqrt[n]{r}) \longrightarrow \mathbb{C}$ la función (uniforme) holomorfa tal que $u(z) = g(\sqrt[n]{z-a}\,)$. Sea $V'_{u,r}$ el conjunto de todos los gérmenes de ramas uniformes de u con dominio en $D'(a,r)$ (que es un abierto en la superficie de gérmenes de F). Entonces existe una biyección conforme $h_{u,r} : V'_{u,r} \longrightarrow D'(0, \sqrt[n]{r})$ tal que $\Phi = h_{u,r} \circ g$ y $\pi = h_{u,r} \circ e^n + a$, donde $e^n(z) = z^n$.*

Demostración: Un germen $v \in V_{u,r}$ será de la forma $f \circ g$, donde f es una rama uniforme de $\sqrt[n]{z-a}$, unívocamente determinada por u. Definimos $h_{u,r}(v) = f(\pi(v))$.

La aplicación $h_{u,r}$ así definida es suprayectiva, pues si $w \in D'(0, \sqrt[n]{r})$ existe una rama uniforme f de $\sqrt[n]{z-a}$ tal que $f(a+w^n) = w$, luego $h_{u,r}(f \circ g) = w$.

También es inyectiva, pues v es necesariamente el germen con soporte en $z_0 = h_{u,r}(v)^n + a$ determinado por la única rama uniforme de $\sqrt[n]{z-a}$ que asigna a z_0 el valor $h_{u,r}(v)$.

Además es holomorfa, pues si componemos $h_{u,r}$ con una inversa local de π obtenemos una rama uniforme holomorfa de $\sqrt[n]{z-a}$.

Las relaciones entre g y Φ y entre π y e^n son inmediatas. ∎

En el teorema anterior hemos supuesto tácitamente que el punto a era finito, pero el resultado es válido en ∞ con las modificaciones obvias: tenemos $u(z) = g(1/\sqrt[n]{z}\,)$ y obtenemos un isomorfismo $h_{u,r} : V'_{u,r} \longrightarrow D'(0, 1/\sqrt[n]{r}\,)$ que verifica $\Phi = h_{u,r} \circ g$ y $\pi = u \circ e^n$, con $e^n(z) = 1/z^n$.

En cualquier caso lo que sucede es que la superficie de gérmenes de F tiene "un agujero" en correspondencia con cada singularidad con índice de ramificación finito. Podemos llenar este agujero si admitimos gérmenes de funciones en entornos reducidos, tal vez multiformes. Veámoslo:

Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa cuyos puntos singulares sean todos puntos de ramificación de orden finito (tal vez nulo). Para cada $z \in \Omega$ sea $\mathcal{F}_z$ el conjunto de todas las ramas holomorfas de F (no necesariamente uniformes) definidas en un entorno reducido de z que no contenga puntos singulares de F. Consideramos la relación de equivalencia según la cual dos ramas están relacionadas si tienen una rama uniforme holomorfa en común. A las clases de equivalencia las llamaremos *gérmenes generalizados* con soporte en z.

Llamemos $\tilde{S}$ al conjunto de todos los gérmenes generalizados de F con soporte en Ω. Diremos que un germen generalizado con soporte z es *regular* si sus representantes se extienden a funciones meromorfas (uniformes) en discos de centro z (basta con que un representante cumpla esto para que todos lo cumplan). Es claro que los gérmenes regulares pueden identificarse con los gérmenes usuales que ya teníamos definidos, con lo que el conjunto de los gérmenes regulares puede identificarse con la superficie de gérmenes S de F en el sentido usual. De este modo $S \subset \tilde{S}$. La aplicación $\tilde{\pi} : \tilde{S} \longrightarrow \Omega$ que a cada germen le asigna su soporte es suprayectiva y extiende a π.

Vamos a extender a $\tilde{S}$ la topología de S. Dado un germen $u \in \tilde{S}$ y $D'(a, r)$ uno de sus dominios, consideramos el conjunto $V_{u,r}$ formado por todos los gérmenes de ramas holomorfas de u que tienen un dominio contenido en $D'(a, r)$ (se entiende que los dominios son siempre entornos reducidos, es decir, discos sin su centro). Claramente u es el único germen de $V_{u,r}$ con soporte en a y, puesto que $D'(a, r)$ no contiene puntos singulares de F, el conjunto $V_{u,r} \setminus \{u\}$ es precisamente el conjunto $V'_{u,r}$ considerado en el teorema 14.1.

Es fácil ver que los conjuntos $V_{u,r}$ son la base de una topología de Hausdorff en $\tilde{S}$ (la prueba es idéntica al caso de las superficies de gérmenes), así como que ésta induce en S la topología que ya teníamos definida.

Teniendo en cuenta que, si $u \in \tilde{S} \setminus S$, se cumple $V_{u,r} \cap (\tilde{S} \setminus S) = \{u\}$, es claro que S es denso en $\tilde{S}$ y que $\tilde{S} \setminus S$ es discreto y cerrado en $\tilde{S}$.

El teorema 14.1 nos da homeomorfismos $h_{u,r} : V_{u,r} \setminus \{u\} \longrightarrow D'(0, \sqrt[n]{r})$, donde $n-1$ es la multiplicidad de u. (Para $\pi(u) = \infty$ el radio del disco es $1/\sqrt[n]{r}$). Es claro que $h_{u,r}$ se extiende a un homeomorfismo $h_{u,r} : V_{u,r} \longrightarrow D(0, \sqrt[n]{r})$

haciendo $h_{u,r}(u) = 0$ (notemos que h biyecta los entornos básicos de u de la forma $V_{u,s}$ con $0 < s < r$ con los entornos básicos de 0 de la forma $D(0,s)$).

Esto nos permite extender a $\tilde{S}$ la estructura analítica de S tomando como cartas de $\tilde{S}$ las aplicaciones $h_{u,r}$. La composición de una carta con la inversa de otra es un homeomorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{C}$ y es holomorfa salvo a lo sumo en un punto aislado, pues el teorema 14.1 implica que la restricción de $h_{u,r}$ a $V_{u,r} \setminus \{u\}$ es holomorfa para la estructura de S, de donde se sigue que dicha composición es holomorfa en todo su dominio.

Es claro que la estructura analítica de $\tilde{S}$ induce en $\tilde{S}$ la topología que acabamos de definir e induce en S la estructura analítica que ya teníamos definida. También es claro que $\tilde{S}$ es conexo, luego es una superficie de Riemann.

El teorema 14.1 nos da que en un entorno de cada punto de $\tilde{S}$ la proyección $\tilde{\pi}$ se expresa como $\tilde{\pi} = h_{u,r} \circ e^n + \tilde{\pi}(u)$ (en principio esto vale para los puntos distintos de u, pero para éste es trivial). Si $\tilde{\pi}(u) = \infty$ la fórmula es distinta, pero en cualquier caso concluimos que $\tilde{\pi}$ es holomorfa en $\tilde{S}$. En general no es localmente inyectiva.

Respecto a la función Φ, la tenemos definida sobre los puntos de S y en general no puede extenderse a los puntos restantes. Más concretamente, sea $u \in \tilde{S} \setminus S$ y sea $D'(a,r)$ un dominio de u. Supongamos que $a \neq \infty$ y sea $n-1$ la multiplicidad de u. Según el teorema 13.16, existe una función holomorfa (uniforme) $g : D'(0, \sqrt[n]{r}\,) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$u(z) = g(\sqrt[n]{z-a}\,)$$

Sabemos que el entorno $V_{u,r}$ de u puede identificarse con el disco $D(0, \sqrt[n]{r}\,)$, y según el teorema 14.1 la función Φ, restringida a $V_{u,r} \setminus \{u\}$, se corresponde con g. La función Φ admitirá una extensión holomorfa a u si y sólo si g admite una extensión meromorfa a 0. Esto nos lleva a la definición de singularidad algebraica:

Definición 14.2 Sea $u : D'(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función holomorfa completa arbitrariamente prolongable. Diremos que a es una singularidad *algebraica* de u si

$$u(z) = g(\sqrt[m]{z-a}\,) \quad \text{o bien} \quad u(z) = g\left(\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right) \quad \text{si } a = \infty,$$

donde g es una función meromorfa en un entorno de 0. En caso contrario la singularidad se llama *trascendente.*

Notemos que, por definición, las singularidades algebraicas son puntos de ramificación de orden finito. Si a es una singularidad algebraica de una función u en las condiciones del teorema anterior, podemos definir $u(a) = g(0)$. Si u es una función uniforme, entonces $u(z) = g(z-a)$ (o bien $u(z) = g(1/z)$, si $a = \infty$), por lo que a será una singularidad algebraica si y sólo si es una singularidad evitable o un polo de u. En tal caso, el valor $u(a)$ que acabamos de definir coincide con la única extensión que hace a u meromorfa en $D(a,r)$, es decir, que evita la singularidad.

Más en general, si $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa completa cuyas singularidades son todas algebraicas y a es una de dichas singularidades, podemos definir $F(a)$ como el conjunto de valores que toman en a las ramas holomorfas de F definidas (en principio) en los entornos reducidos de a.

Según hemos visto antes, podemos extender la función $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ a una función meromorfa $\tilde{\Phi} : \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, de modo que también en el caso general hemos evitado las singularidades de Φ. Observar que $F = \tilde{\pi}^{-1} \circ \tilde{\Phi}$.

Definición 14.3 Una función meromorfa completa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *algebraica* de grado n si es n-forme y todas sus singularidades son algebraicas.

Notemos que, por ejemplo, la función arco coseno definida sobre $\Omega = \mathbb{C}$ tiene todas sus singularidades algebraicas, pero no es algebraica porque no tiene orden de ramificación finito.

Una caracterización de la superficie de gérmenes $\tilde{S}$ similar a la que el teorema 13.23 proporciona para S sería un tanto engorrosa, mientras que si nos restringimos al caso de funciones algebraicas, la caracterización resulta muy elegante y útil. Nos ocupamos de ello en la sección siguiente.

14.2 La configuración analítica de una función algebraica

Vamos a caracterizar el par $(\tilde{S}, \tilde{\pi})$ asociado a una función algebraica. Para ello necesitamos algunos conceptos:

Definición 14.4 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre superficies de Riemann es *propia* si es continua y para todo compacto $K \subset Y$ se cumple que $f^{-1}[K]$ es compacto.

Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función algebraica, sea E el conjunto de sus puntos singulares y sea S^* el conjunto de los gérmenes regulares de F cuyo soporte es un punto regular (claramente S^* es un dominio en la superficie de Riemann S de F). Una *configuración analítica* de F es un par (X, π), donde X es una superficie de Riemann y $\pi : X \longrightarrow \Omega$ es una aplicación holomorfa propia de modo que existe una biyección conforme $\phi : X \setminus \pi^{-1}[E] \longrightarrow S^*$ que cumple $\phi \circ \pi = \pi$ (donde la primera π es la proyección definida en S^*).

El objetivo de esta sección es probar que $(\tilde{S}, \tilde{\pi})$ es, salvo biyecciones conformes, la única configuración analítica de F. La idea básica es que si F es una función algebraica de grado n y tomamos un disco cerrado con centro en una de sus singularidades (y que no contenga a ninguna otra), su antiimagen por π en S será una unión de n cerrados disjuntos, cada uno de ellos homeomorfo a un disco cerrado o bien a un disco cerrado menos su centro (pero siempre habrá alguno de este segundo tipo), y los discos sin su centro no son compactos, luego π no es propia. En cambio, su antiimagen por $\tilde{\pi}$ en $\tilde{S}$ es una unión de n cerrados homeomorfos a discos cerrados, pues en $\tilde{S}$ "hemos tapado los agujeros de S", lo

que hace que $\tilde{\pi}$ sí sea una aplicación propia. En resumen, los puntos que hemos añadido a S para formar $\tilde{S}$ se caracterizan como los estrictamente necesarios para hacer propia a la proyección π o, equivalentemente, para compactificar las antiimágenes de los compactos de Ω.

Teorema 14.5 *Si F es una función algebraica, entonces su superficie de gérmenes generalizados $\tilde{S}$ junto con la proyección $\tilde{\pi}$ es una configuración analítica de F.*

Demostración: Sólo hay que probar que la aplicación $\tilde{\pi}$ es propia, pues como ϕ sirve la identidad en S^*. Tomemos $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y consideremos un cubrimiento abierto de $\tilde{\pi}^{-1}[K]$. Cada $a \in K$ tiene un número finito de antiimágenes (igual a n si el punto es regular o menor si es singular, pero nunca nulo). Cada una de ellas, digamos u, es un germen generalizado al que podemos asignarle un dominio $D'(a,r)$ tal que $V_{u,r}$ esté contenido en un abierto del cubrimiento dado. Restringiendo r si es necesario podemos suponer que vale el mismo para todas las antiimágenes de a. Llamemos r_a a este radio común. Notemos que, por definición de dominio de un germen, todos los puntos de $D(a,r_a)$ son regulares para F salvo a lo sumo su centro.

Los discos $D(a,r_a)$ constituyen un cubrimiento abierto de K, luego podemos extraer un subcubrimiento finito $K \subset D(a_1,r_{a_1}) \cup \cdots \cup D(a_m,r_{a_m})$. Entonces

$$\tilde{\pi}^{-1}[K] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{u \in \tilde{\pi}^{-1}[a_i]} V_{u,r_{a_i}}, \tag{14.1}$$

pues si $v \in \tilde{\pi}^{-1}[K]$ entonces $\tilde{\pi}(v) \in D(a_i,r_{a_i})$ para algún i, luego v tiene un dominio contenido en este disco y es arbitrariamente prolongable en $D'(a_i,r_{a_i})$, luego se prolonga a una rama meromorfa (tal vez multiforme) u de F definida en $D'(a_i,r_{a_i})$, la cual a su vez determina un germen con $\tilde{\pi}(u) = a_i$. Entonces $v \in V_{u,r_{a_i}}$ y por consiguiente está en el miembro derecho de (14.1).

Puesto que cada abierto $V_{u,r_{a_i}}$ está contenido en un abierto del cubrimiento dado, concluimos que éste admite un subcubrimiento finito. ∎

Para probar la unicidad de la configuración analítica hemos de estudiar más a fondo las aplicaciones propias. En primer lugar veamos algunos hechos básicos:

Teorema 14.6 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann. Entonces:*

a) f es abierta, cerrada y suprayectiva.

b) Para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}[y]$ es finito.

c) Para cada $y \in Y$ y cada abierto V que contenga a $f^{-1}[y]$ existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}[U] \subset V$.

d) Si f es localmente inyectiva, para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto U de y tal que

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{i=1}^{n} V_i,$$

donde los conjuntos V_i son abiertos disjuntos en X y todas las aplicaciones $f|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ son homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: a) f es abierta por se holomorfa no constante. Supongamos ahora que C es un cerrado en X y sea y un punto adherente a $f[C]$. Existe una sucesión $\{y_n\}_n$ de puntos de $f[C]$ que converge a y (aquí usamos que y tiene una base numerable de entornos, porque tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}$). Sea $x_n \in C$ tal que $f(x_n) = y_n$. El conjunto $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ es un compacto en Y, y $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en $f^{-1}[K]$, que es un compacto en X. Por lo tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto $x \in C$. La continuidad de f implica que $\{y_{n_k}\}_k$ converge a $f(x) = y$. Por lo tanto $y \in f[C]$. Esto prueba que f es cerrada.

Como f es abierta y cerrada, tenemos que $f[X]$ es abierto y cerrado en Y, luego por conexión $f[X] = Y$.

b) El conjunto $f^{-1}[y]$ es compacto. Si fuera infinito tendría un punto de acumulación, y el principio de prolongación analítica implicaría que f es constante.

c) El conjunto $X \setminus V$ es cerrado en X, luego $B = f[X \setminus V]$ es cerrado en Y y no contiene a y, luego $U = Y \setminus B$ es un entorno abierto de y que cumple lo pedido.

d) Sea $f^{-1}[y] = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Por hipótesis cada x_i tiene un entorno abierto W_i tal que $f|_{W_i}$ es inyectiva. Podemos suponer que los W_i son disjuntos dos a dos. Entonces $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$ es un abierto que contiene a $f^{-1}[y]$, luego por el apartado anterior existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}[U] \subset W$. Podemos suponer que $U \subset f[W_i]$ para todo i. Sea $V_i = W_i \cap f^{-1}[U]$. Es claro que los conjuntos V_i cumplen lo pedido. ∎

En general una aplicación propia no tiene por qué ser localmente inyectiva (las aplicaciones $\tilde{\pi}$ no lo son en los gérmenes multiformes), sin embargo los puntos donde no lo es son pocos. Recordemos del teorema 13.19 (ver las observaciones posteriores) que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann, el conjunto

$$A = \{x \in X \mid o(f, x) > 1\},$$

es decir, el conjunto donde f no es localmente inyectiva, es discreto y cerrado en X. Si f es propia entonces $B = f[A]$ es discreto y cerrado en Y (es discreto porque sus únicos subconjuntos compactos son finitos, luego no contiene subsucesiones convergentes). Los elementos de B se llaman *puntos críticos* de f. Los puntos de $Y' = Y \setminus B$ se llaman *puntos regulares.* Definimos también $X' = X \setminus f^{-1}[B]$. Es claro que $f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$ es holomorfa, no constante, propia y localmente inyectiva, luego verifica la última propiedad del teorema anterior. Recogemos esto y un poco más en el teorema siguiente:

Teorema 14.7 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann. Entonces existe un número natural n tal que*

cada punto regular $b \in Y'$ tiene exactamente n antiimágenes por f. Además, si $f^{-1}[b] = \{a_1, \ldots, a_n\}$, existe un entorno abierto U de b en Y' y entornos abiertos disjuntos V_i en X' de cada a_i de modo que $f^{-1}[U] = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ y las restricciones $f|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ son conformes.

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $p(y)$ al número de antiimágenes de y, el último apartado del teorema anterior prueba que p es localmente constante en Y', y por conexión (es fácil ver que Y' es conexo) necesariamente p es constante en Y'. El resto del teorema es consecuencia inmediata del citado teorema. ∎

Definición 14.8 Llamaremos *orden* de una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann al número de antiimágenes de cualquiera de los puntos regulares de Y. Lo representaremos por $o(f)$.

Teorema 14.9 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann. Para cada punto $y \in Y$ se cumple*

$$o(f) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} o(f, x).$$

DEMOSTRACIÓN: Por las propias definiciones el resultado es cierto si y es regular. Tomemos ahora un punto crítico $b \in B$ y supongamos que tiene s antiimágenes distintas $a_1, \ldots, a_s$. Sea $n_j = o(f, a_j)$.

Según la observación posterior al teorema 13.19, existen entornos abiertos V_j de cada a_j disjuntos dos a dos y entornos U_j de b tales que cada $y \in U_j \setminus \{b\}$ tiene exactamente n_j antiimágenes en V_j. Por el teorema 14.6 existe un entorno abierto U de b tal que $U \subset U_1 \cap \cdots \cap U_s$ y $f^{-1}[U] \subset V_1 \cup \cdots \cup V_s = V$. Entonces todo $y \in U$ regular tiene exactamente $n = n_1 + \cdots + n_s$ antiimágenes, luego $n = o(f)$. ∎

Ahora ya podemos probar la unicidad de la configuración analítica:

Teorema 14.10 *Si (X_1, π_1) y (X_2, π_2) son dos configuraciones analíticas de una función algebraica F, entonces existe una biyección conforme $\psi : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi_j : X_j \setminus \pi_j^{-1}[E] \longrightarrow S^*$ según la definición de configuración analítica. El conjunto E es discreto y cerrado en Ω y, al ser π_j una aplicación propia, el conjunto $\pi_j^{-1}[E]$ es discreto y cerrado en X_j (pues si $K \subset \pi_j^{-1}[E]$ es compacto, entonces $f[K]$ es finito y $K \subset f^{-1}[f[K]]$ también lo es).

Sea $\psi = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E] \longrightarrow X_2 \setminus \pi_2^{-1}[E]$. Claramente ψ es una biyección conforme. Veamos que se puede extender a una aplicación holomorfa $\psi : X_1 \longrightarrow X_2$. Para ello fijemos un punto $b \in \pi_1^{-1}[E]$ y veamos que ψ se extiende a una función holomorfa en un entorno de b.

Sea $a = \pi_1(b)$. Puesto que π_2 es propia, el conjunto $\pi_2^{-1}[a]$ es finito. Digamos que $\pi_2^{-1}[a] = \{c_1, \ldots, c_s\}$. Sea W_j el dominio de una carta en X_2 alrededor de

cada c_j. Podemos exigir que los abiertos W_j sean disjuntos dos a dos. Puesto que $\pi_2^{-1}[a] \subset W_1 \cup \cdots \cup W_s$, el teorema 14.6 nos da un entorno abierto U de a tal que $U \cap E = \{a\}$ y $\pi_2^{-1}[U] \subset W_1 \cup \cdots \cup W_s$.

Sea V el dominio (conexo) de una carta alrededor de b tal que $V \subset \pi_1^{-1}[U]$ y $V \cap \pi_1^{-1}[E] = \{b\}$. Claramente $V \setminus \{b\} \subset \pi_1^{-1}[U]$ es un abierto conexo de $X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$, luego $\psi[V \setminus \{b\}]$ es un abierto conexo en $\pi_2^{-1}[U]$. Por lo tanto existe un índice k tal que $\psi[V \setminus \{b\}] \subset W_k$.

Sea g la carta definida sobre V y h la carta definida sobre W_k. Podemos suponer que sus rangos son ambos iguales a $D(0,r)$ y que $g(b) = h(c_k) = 0$. Entonces $u = g^{-1} \circ \psi \circ h : D'(0,r) \longrightarrow D(0,r)$ es holomorfa y tiene una singularidad evitable en 0. Definiendo $\psi(b) = h^{-1}(u(0))$ tenemos que $\psi|_V = g \circ u \circ h^{-1}$, luego hemos extendido ψ a una función holomorfa en b.

En general, ahora tenemos $\psi : X_1 \longrightarrow X_2$. La igualdad $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$ es válida sobre los puntos de $X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$. Como este conjunto es denso y ambos miembros son continuos, de hecho es válida en todo X_1. Falta ver que ψ es biyectiva. En principio vemos que es propia: si K es un compacto en X_2, entonces $\psi^{-1}[K]$ es un cerrado en X_1 contenido en el compacto $\pi_1^{-1}[\pi_2[K]]$, luego es compacto. En particular tenemos que ψ es suprayectiva.

Como los conjuntos $\pi_i^{-1}[E]$ son numerables, existe un punto $y_0 \in X_2 \setminus \pi_2^{-1}[E]$ que es regular para ψ y $\psi^{-1}[y_0] \subset X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$, pero esto implica que y_0 tiene una única antiimagen, luego $o(\psi) = 1$, y por el teorema 14.9 concluimos que ψ es inyectiva. ∎

Ahora es relativamente fácil reconocer configuraciones analíticas. Por ejemplo, la de la función $\sqrt{z}$ es $\mathbb{C}^\infty$ con la proyección $\pi(z) = z^2$, pues sabemos que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es la superficie de Riemann de $\sqrt{z}$ y es fácil ver que la aplicación π es propia.

14.3 Raíces de polinomios

Tal y como explicábamos al principio del capítulo, las funciones algebraicas son precisamente las que satisfacen una ecuación funcional polinómica. Con más precisión:

Definición 14.11 Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}^\infty$, sea $\mathcal{M}(\Omega)$ el cuerpo de las funciones (uniformes) meromorfas en Ω y sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa multiforme. Diremos que F es *raíz* del polinomio $P(z,w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$,

$$P(z,w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_n(z)$$

si toda rama uniforme meromorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ de F en un abierto que no contenga polos de las funciones $A_j(z)$ cumple

$$P(z, f(z)) = 0, \quad \text{para todo } z \in D.$$

Observemos que el conjunto de los polos de los coeficientes de un polinomio de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$ es discreto y cerrado en Ω. También es claro que si $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ es

una función no nula, entonces F es raíz de un polinomio P si y sólo si lo es de gF, luego en particular toda función que es raíz de un polinomio lo es de un polinomio mónico.

Conviene observar que basta con que una rama uniforme de F satisfaga un polinomio para que todas lo hagan:

Teorema 14.12 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}^\infty$. Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ y $g : E \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ dos funciones uniformes meromorfas cuyos dominios están contenidos en Ω y tales que una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco contenido en Ω. Si $P(z, w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ cumple que $P(z, f(z)) = 0$ para todo $z \in D$, entonces $P(z, g(z)) = 0$ para todo $z \in E$.*

Demostración: Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ un arco y $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa sobre γ que prolongue f hasta g. Entonces la función $u(t) = P(\gamma(t), h(t))$ es claramente meromorfa sobre γ (pues si $h_t : D_t \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ extiende a h alrededor de $\gamma(t)$, entonces $P(z, h_t(z))$ extiende a u alrededor de $\gamma(t)$). Por hipótesis u es nula en un entorno de a, luego es nula en todo su dominio, con lo que $P(z, g(z))$ es nula en el extremo final de γ, y por tanto en todo E. ∎

Ahora veamos algunos resultados generales sobre los polinomios de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$. Consideremos dos polinomios T_1, $T_2 \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ de grados $n \geq m > 0$ respectivamente. En todo anillo de polinomios sobre un cuerpo podemos dividir euclídeamente, luego podemos formar una sucesión de descomposiciones

$$\begin{aligned} T_1(z,w) &= Q_1(z,w)T_2(z,w) + T_3(z,w) \\ T_2(z,w) &= Q_2(z,w)T_3(z,w) + T_4(z,w) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ T_{p-1}(z,w) &= Q_{p-2}(z,w)T_{p-1}(z,w) + T_p(z), \end{aligned}$$

donde el grado de cada resto T_i es estrictamente menor que el del anterior, hasta llegar a un resto $T_p \in \mathcal{M}(\Omega)$. Tomamos p como el menor natural para el que se cumple esto, es decir, suponemos que T_{p-1} tiene grado no nulo.

Llamamos E al conjunto de los polos de los coeficientes de los polinomios T_j y Q_j. Si $\infty \in \Omega$ lo incluimos también en E. Es claro que E es discreto y cerrado en Ω. Veamos algunos hechos sencillos:

a) *Si $a \in \Omega \setminus E$, entonces a es un cero de T_p si y sólo si los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ tienen una raíz común.*

   En efecto, si $T_p(a) = 0$, las relaciones recurrentes entre los T_i prueban que cualquier raíz de $T_{p-1}(a, w)$ lo es de todos los $T_i(a, w)$, en particular de los dos primeros. Recíprocamente, una raíz común de $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ lo es de $T_3(a, w)$ y por recurrencia lo es de $T_p(a)$, o sea, $T_p(a) = 0$.

b) *$T_p \neq 0$ si y sólo si existe un conjunto $L \subset \Omega$ discreto y cerrado en Ω que contiene a E y tal que para todo $a \in \Omega \setminus L$ los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ no tienen raíces comunes.*

En efecto, si $T_p \neq 0$ tomamos L igual a E más los ceros de T_p, que es un conjunto discreto y cerrado en Ω. Si $a \in \Omega \setminus L$, entonces los polinomios $T_1(a,w)$ y $T_2(a,w)$ no tienen raíces comunes por el apartado anterior. Recíprocamente, si existe tal conjunto L, por el apartado anterior todo $a \in \Omega \setminus L$ cumple $T_p(a) \neq 0$, luego $T_p \neq 0$.

c) *$T_p \neq 0$ si y sólo si los polinomios $T_1(z,w)$ y $T_2(z,w)$ son primos entre sí.*
En efecto, si $T_p = 0$ las relaciones recurrentes entre los T_j prueban que T_{p-1} divide a todos los demás, luego T_1 y T_2 no son primos entre sí. Supongamos ahora que $T_1 = TP$ y $T_2 = TQ$, donde T tiene grado positivo. Sea D un disco abierto contenido en Ω disjunto con E y de forma que todos los coeficientes de los polinomios T, P y Q sean funciones holomorfas, y el coeficiente director de T no se anule en D. Si $a \in D$, cualquier raíz de $T(a,w)$ es una raíz común de $T_1(a,w)$ y $T_2(a,w)$, luego el apartado a) implica que $T_p(a) = 0$. Así pues, T_p es nula en D, luego en todo Ω.

Combinando los dos últimos apartados tenemos:

Teorema 14.13 *Sean T_1, $T_2 \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ dos polinomios de grado no nulo primos entre sí. Entonces existe un conjunto L discreto y cerrado en Ω tal que si $a \in \Omega \setminus L$, $a \neq \infty$, los polinomios $T_1(a,w)$ y $T_2(a,w)$ no tienen raíces comunes.*

Este teorema se aplica en particular a un polinomio irreducible

$$T(z,w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_n(z)$$

y a su derivada formal

$$T_w(z,w) = nA_0(z)w^{n-1} + (n-1)A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z).$$

Observemos que T y T_w son primos entre sí, pues un divisor común no unitario debería tener grado n por ser T irreducible y grado menor que n por dividir a T_w. Por otra parte, una raíz de $T(a,w)$ que no lo sea de $T_w(a,w)$ es una raíz simple. Esto prueba:

Teorema 14.14 *Si $T \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ es un polinomio irreducible, entonces el conjunto de los $a \in \Omega$, $a \neq \infty$ tales que $T(a,w)$ tiene raíces múltiples es discreto y cerrado en Ω.*

(Notar que el razonamiento anterior no es aplicable si T tiene grado 1, pero este caso es trivial.)

Veamos ahora un primer resultado sobre existencia de funciones meromorfas que satisfacen un polinomio dado.

Teorema 14.15 *Sea*

$$T(z,w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z)$$

un polinomio cuyos coeficientes son funciones holomorfas en un disco $D(a,r)$ del plano complejo. Supongamos que $T(a,w)$ tiene n raíces simples $w_1, \ldots, w_n$. Entonces existen n funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_n$ en un disco $D(a,t)$, con $0 < t < r$ tales que:

a) $f_j(a) = w_j$, *para* $j = 1, \ldots, n$.

b) Para cada $z \in D(a,t)$ *los números* $f_j(z)$ *son distintos dos a dos.*

c) $T(z, f_j(z)) = 0$ *para todo* $z \in D(a,t)$.

d) Si f *es una función meromorfa en un entorno de* a *y para cada* z *en dicho entorno se cumple* $T(z, f(z)) = 0$, *entonces* f *coincide con una* f_j *en un entorno de* a.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$ tal que los discos $\overline{D(w_j, \epsilon)}$ sean disjuntos dos a dos. Así, el polinomio $T(a, w)$ tiene un único cero en cada disco, concretamente en su centro. Usando la continuidad de $T(z, w)$ en las dos variables y la compacidad de las circunferencias, es fácil encontrar un radio t de modo que si $z \in D(a,t)$ y $|w - w_j| = \epsilon$, entonces $T(z, w) \neq 0$. En $D(a,t)$ podemos definir las funciones

$$u_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} \frac{T_w(z,w)}{T(z,w)}\, dw.$$

El teorema de los residuos y el teorema 8.7 implican que $u_j(z)$ es el número de ceros en $D(w_j, \epsilon)$ del polinomio $w \mapsto T(z, w)$ (contados con sus multiplicidades). En particular $u_j(z)$ es un número natural, pero por otra parte cada función u_j es continua, luego es constante en $D(a,t)$. Concretamente, $u_j(z) = u_j(a) = 1$ para todo i. En otras palabras, cada polinomio $T(z, w)$ tiene un único cero en $D(w_j, \epsilon)$, al que llamaremos $f_j(z)$. Ciertamente, fijado z, los números $f_j(z)$ son distintos dos a dos y se cumple $T(z, f_j(z)) = 0$.

Veamos que las funciones f_j son holomorfas. La función $w \mapsto 1/T(z, w)$, definida en $\overline{D(w_j, \epsilon)}$, tiene un polo simple en $f_j(z)$, luego la función

$$w \mapsto \frac{w - f_j(z)}{T(z,w)}\, T_w(z,w)$$

es holomorfa en $\overline{D(w_j, \epsilon)}$. Por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} (w - f_j(z)) \frac{T_w(z,w)}{T(z,w)}\, dw = 0,$$

luego

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} w\, \frac{T_w(z,w)}{T(z,w)}\, dw,$$

lo que muestra la holomorfía de las funciones f_j.

Sólo falta probar que cualquier función meromorfa f en un entorno de a que cumpla $T(z, f(z)) = 0$ coincide con una de las f_j. Reduciendo t si es necesario podemos suponer que f está definida en $D(a,t)$. Sea L el conjunto de puntos de este disco que no son polos de f. Si $z \in L$, entonces $f(z)$ es una de las raíces del polinomio $T(z, w)$, pero éstas raíces son las $f_j(z)$, luego $f(z) = f_j(z)$ para algún índice j que depende de z. Ahora bien, ha de haber una cantidad no numerable de puntos $z \in L$ para los que el j correspondiente sea el mismo, con lo que f y

f_j coinciden en un conjunto no numerable, luego coinciden en todo su dominio. ∎

A las funciones f_j las llamaremos *raíces locales* de T en a. Con esto estamos en condiciones de probar que todo polinomio irreducible tiene una raíz, así como que ésta es una función algebraica.

Teorema 14.16 *Sea*

$$T(z,w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z)$$

un polinomio mónico irreducible en $\mathcal{M}(\Omega)[w]$. Sea E el conjunto de los puntos $a \in \Omega$ donde alguno de los coeficientes A_j tiene un polo o donde el polinomio $T(a,w)$ tenga raíces múltiples (claramente E es discreto y cerrado en Ω). Entonces existe una función algebraica $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ cuyos puntos singulares están contenidos en E y que es raíz del polinomio T.

Demostración: Tomemos un punto $a \in \Omega \setminus E$ y sea f una de las raíces locales de T en a proporcionadas por el teorema anterior. Sea F la función multiforme completa generada por f en Ω, es decir, la función cuyas ramas uniformes son las prolongaciones analíticas de f a lo largo de arcos contenidos en Ω. Por el teorema 14.12 tenemos que F es raíz de T. Falta probar que F es arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E$. En efecto, si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega \setminus E$ es un arco y g es una rama uniforme de F en un entorno de $\gamma(a)$, sea t_0 el supremo de los puntos $t \in [a,b]$ tales que g se prolonga a lo largo de $\gamma|_{[a,t]}$. Tomemos un disco D de centro $\gamma(t_0)$ donde estén definidas las raíces locales de T según el teorema anterior. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(t_0 - \epsilon) \in D$. La prolongación de g hasta $\gamma(t_0 - \epsilon)$ es una raíz local de T en $\gamma(t_0 - \epsilon)$, pero es claro que las raíces locales en este punto son las mismas que en $\gamma(t_0)$, luego la prolongación de g hasta $\gamma(t_0 - \epsilon)$ permite prolongar g hasta $\gamma(t_0)$ y aún más allá, salvo que $t_0 = b$, luego éste ha de ser el caso y tenemos que g se prolonga a lo largo de γ.

Veamos que la función F es algebraica. En primer lugar observamos que, en un entorno de un punto regular, las ramas uniformes holomorfas de F son raíces locales de T, luego su número es $p \le n$, y por el teorema 13.13 concluimos que F tiene multiplicidad p.

Consideremos ahora un punto singular b de F. En particular $b \in E$. Tomamos un disco tal que $D(b,r) \cap E = \{b\}$ y sea F^* una rama holomorfa de F en $D'(b,r)$. Entonces F^* tiene en b un punto de ramificación de orden $m - 1 < p$ (tal vez $m = 1$). Por el teorema 13.16 existe una función uniforme holomorfa g definida en un entorno reducido de 0 tal que

$$F^*(z) = g\big(\sqrt[m]{z-b}\big) \quad \text{o bien} \quad F^*(z) = g\left(\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right) \quad \text{si } b = \infty.$$

Hemos de probar que g no tiene una singularidad esencial en 0. En general, si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, conviene introducir la notación

$$\mu(f,a) = \begin{cases} 0 & \text{si } o(f,a) \ge 0 \\ -o(f,a) & \text{si } o(f,a) < 0 \end{cases}$$

Supongamos $b \neq \infty$ (los cambios para $b = \infty$ son los obvios). Llamando $A_0 = 1$, sean

$$k = \max_{0\leq j\leq n} \mu(A_j, b), \quad a_j = \lim_{z\to b}(z-b)^k A_j(z).$$

Entonces algún a_j es no nulo. Sea el polinomio $T_1(z,w) = (z-b)^k T(z,w)$. Claramente

$$T_1(b,w) = \lim_{z\to b} T_1(z,w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}w + a_n,$$

luego el polinomio $T_1(b,w)$ no es nulo.

Si 0 es una singularidad esencial de g, para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{\xi_s\}$ de números complejos no nulos que converge a 0 y tal que $\{g(\xi_s)\}$ converge a w. Así la sucesión $\{b + \xi_s^m\}$ converge a b y, para s suficientemente grande, está en $D'(b,r)$, luego $g(\xi_s) \in F^*(b+\xi_s^m) \subset F(b+\xi_s^m)$.

Como F es raíz de T, se cumple $T(b+\xi_s^m, g(\xi_s)) = 0$ y, en consecuencia, $T_1(b+\xi_s^m, g(\xi_s)) = 0$. Por continuidad

$$T_1(b,w) = \lim_s T_1(b+\xi_s^m, g(\xi_s)) = 0,$$

esto para todo $w \in \mathbb{C}$, lo que implica que $T_1(b,w)$ es nulo, en contradicción con lo anterior. ∎

La prueba del teorema anterior muestra en realidad que cualquier función que sea raíz de un polinomio es algebraica (de grado menor o igual que el del polinomio). Ahora probaremos que toda función algebraica es raíz de un polinomio. Necesitamos recordar los resultados básicos sobre los polinomios simétricos elementales. El *polinomio simétrico elemental* de n variables y grado j se define como

$$S_j(x_1,\ldots,x_n) = (-1)^j \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} x_{i_1}\cdots x_{i_j}.$$

Es obvio que S_j es simétrico, en el sentido de que si permutamos sus variables permanece inalterado. Lo único que vamos a necesitar es que si $a_1,\ldots a_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n) = w^n + S_1(a_1,\ldots a_n)w^{n-1} + \cdots + S_n(a_1,\ldots,a_n).$$

Si $f_1,\ldots f_n \in \mathcal{M}(\Omega)$, definimos

$$S_j(f_1(z),\ldots,f_n(z)) = (-1)^j \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} f_{i_1}(z)\cdots f_{i_j}(z).$$

Claramente $S_j(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ es una función meromorfa en Ω que no depende del orden de las funciones f_j. En los puntos $z \in \Omega$ que no son polos de ninguna f_j coincide con la composición de las f_j con el polinomio S_j.

Teorema 14.17 *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función algebraica de grado n. Entonces existe un único polinomio mónico irreducible $T(z, w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ que tiene a F por raíz. Además T tiene grado n.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad es consecuencia del teorema 14.13, pues dos polinomios mónicos irreducibles distintos T_1 y T_2 son primos entre sí. Si ambos tuvieran a F como raíz, en particular tendríamos una rama uniforme holomorfa f de F en un disco D tal que si $a \in D$ entonces $T_1(a, f(a)) = 0 = T_2(a, f(a))$, es decir, el conjunto de puntos a tales que $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ tienen raíces comunes no sería discreto.

Sea E el conjunto de los puntos singulares de F. Para cada $b \in \Omega \setminus E$, sean $f_{1,b}, \ldots, f_{n,b}$ las ramas uniformes holomorfas de F. Si llamamos D_b al mayor disco de centro b contenido en $\Omega \setminus E$, el principio de monodromía nos permite extender las funciones $f_{i,b}$ a todo el disco D_b. Para $j = 1, \ldots, n$ definimos $S_{j,b} = S_j(f_{1,b}, \ldots, f_{n,b})$.

Veamos que si b, $c \in \Omega \setminus E$ y $D_b \cap D_c \neq \varnothing$, entonces $S_{j,b}$ y $S_{j,c}$ coinciden en su dominio común. En efecto, si $z \in D_b \cap D_c$, las restricciones de las funciones $f_{i,b}$ a $D_z \cap D_b \cap D_c$ son las n ramas uniformes de F en este abierto, al igual que las restricciones de las funciones $f_{i,c}$, tal vez en otro orden, pero en cualquier caso, sobre los puntos de este abierto que no son polos de ninguna de ellas, las funciones $S_{j,b}$ y $S_{j,c}$ coinciden con $S_{j,z}$, luego coinciden entre sí.

Consecuentemente, las funciones $S_{j,b}$ se extienden a una función holomorfa S_j definida en $\Omega \setminus E$. Si probamos que los puntos de E son singularidades evitables o polos de cada S_j entonces estas funciones se extenderán a funciones meromorfas en Ω, y la función F será raíz del polinomio

$$T(z, w) = w^n + S_1(z)w^{n-1} + \cdots + S_n(z).$$

Sea, pues $a \in E$ y supongamos que $a \neq \infty$ (el caso $a = \infty$ es análogo). Consideremos un entorno reducido $D'(a, r)$ disjunto con E. Fijemos $b \in D'(a, r)$ y llamemos F_j a la rama holomorfa de F en $D'(a, r)$ que contiene a $f_{j,b}$. Sea $p_j \leq n$ la multiplicidad de F_j. Según la definición de punto crítico algebraico existe una función g_j meromorfa en 0 tal que $F_j(z) = g_j(\sqrt[p_j]{z - a})$.

Sea D un disco de centro 0 en el que estén definidas todas las funciones g_j y sea $k > \max\limits_{1 \leq j \leq n} \mu(g_j, 0)$ (ver pág. 405). Así $w^k g_j(w)$ tiende a 0 en 0, luego existe una constante M y un radio $0 < r < 1$ tales que

$$|g_j(w)| \leq \frac{M}{|w|^k}, \quad \text{si } 0 < |w| < r, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ahora llamamos $s = \min_{1 \leq j \leq n} r^{p_j}$, de modo que si $z \in D'(a, s)$ entonces

$$\begin{aligned} |S_j(z)| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |f_{i_1,z}(z)| \cdots |f_{i_j,z}(z)| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |g_{i_1}(\sqrt[p_{i_1}]{z - a})| \cdots |g_{i_j}(\sqrt[p_{i_j}]{z - a})| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} \frac{M^j}{|z-a|^{k/p_{i_1}+\cdots+k/p_{i_j}}}.$$

Teniendo en cuenta que $|z-a|<1$, una cota inferior de los denominadores de esta expresión es $|z-a|^m$, donde $m=jk$, con lo que en definitiva llegamos a una expresión de la forma

$$|S_j(z)| \leq \frac{K}{|z-a|^m}.$$

Esto implica que $(z-a)S_j(z)$ está acotada alrededor de a, luego S_j tiene una singularidad evitable o un polo en a, como queríamos probar.

Falta ver que el polinomio T es irreducible, pero esto es sencillo: si se pudiera descomponer en factores, es claro que F sería raíz de uno de ellos, digamos de un factor T^* de grado $p<n$, pero entonces las ramas uniformes de F (salvo en un conjunto discreto y cerrado) serían las raíces locales de T^*, que son p en un entorno de cada punto, luego F tendría a lo sumo multiplicidad p, cuando en realidad tiene multiplicidad n. ∎

Con esto ya tenemos la caracterización que buscábamos de las funciones algebraicas:

Teorema 14.18 *Una función multiforme meromorfa completa $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^\infty$ es algebraica si y sólo si es raíz de un polinomio de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$.*

En realidad los teoremas anteriores contienen cierta información relevante sobre la relación entre una función algebraica y el único polinomio mónico irreducible del cual es raíz. Sólo falta dar unos pocos detalles:

Teorema 14.19 *Sea $T\in\mathcal{M}(\Omega)[w]$s un polinomio mónico irreducible de grado n y sea E el conjunto de puntos $a\in\Omega$ donde alguno de los coeficientes de E tiene un polo o donde $T(a,w)$ tiene raíces múltiples. Entonces existe una única función algebraica F en Ω que es raíz de T. Además F tiene multiplicidad n y sus puntos singulares están contenidos en E.*

Demostración: El teorema 14.16 nos da que existe una función F algebraica en Ω que es raíz de T y cuyos puntos singulares están contenidas en E. Por el teorema anterior F es raíz de un único polinomio mónico irreducible T^* cuyo grado es la multiplicidad de F, luego $T^*=T$ y F tiene multiplicidad n.

Esto implica que las n raíces locales de T en un entorno de cada punto de $\Omega\setminus E$ son ramas uniformes holomorfas de F. Puesto que toda raíz de T ha de tener como rama uniforme a alguna de estas raíces locales y todas forman parte de la misma función F, es claro que T sólo tiene una raíz. ∎

Ejemplo Vamos a estudiar la función algebraica determinada por el polinomio $T(z,w)=w^3-3w-z\in\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$.

Ante todo, notemos que T es irreducible, pues si no lo fuera tendría un factor de la forma $w - g$, para una cierta función $h \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$, que claramente cumpliría

$$h(z)^3 - 3h(z) - z = 0.$$

Entonces

$$-1 = o(z, \infty) = o(h^3 - 3h, \infty) = 3o(h, \infty),$$

lo cual es absurdo.

Así pues, T determina una función algebraica triforme $T : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$.

Si un punto w es raíz múltiple de $T(z, w)$, entonces es raíz de su derivada $3w^2 - 3 = 0$, luego $w = \pm 1$. Sustituyendo $w = \pm 1$ en $T(z, w) = 0$ resulta $z = \pm 2$. Por lo tanto, los casos en que T es reducible son únicamente

$$\begin{aligned} T(2, w) &= w^3 - 3w - 2 = (w + 1)^2(w - 2) \\ T(-2, w) &= w^3 - 3w + 2 = (w - 1)^2(w + 2). \end{aligned}$$

El único polo de los coeficientes de T es ∞ (en el coeficiente z), luego la función F es regular salvo a lo sumo en los puntos 2, -2 e ∞. Vamos a estudiar estas singularidades.

El mismo argumento con el que hemos probado que T es irreducible justifica de hecho que F no tiene ramas uniformes en un entorno de ∞, luego ha de tener una única rama triforme (si tuviera una rama biforme, debería tener también una uniforme). Así pues, ∞ es un punto de ramificación doble.

Tomemos ahora un disco de centro 2 que no contenga a -2 y supongamos que F tiene una rama uniforme holomorfa f en D. La ecuación

$$f(z)^3 - 3f(z) - z = 0 \tag{14.2}$$

prueba que $f(2) = 2$ o bien $f(2) = -1$. Derivándola queda $3f'(z)(f(z)^2 - 1) = 1$, luego $f(2) = 2$ y $f'(2) \neq 0$. Por lo tanto f es inyectiva en un entorno V de 2.

La propia ecuación (14.2) muestra que la inversa de f en $f[V]$ viene dada por $f^{-1}(w) = w^3 - 3w$.

De aquí ya podemos deducir que la función f existe realmente. En efecto, la función $h(w) = w^3 - 3w$ es inyectiva alrededor de 2, luego su inversa f satisface (14.2). De hecho hemos probado que es la única rama uniforme de F en un entorno de 2. Por consiguiente, F ha de tener otra rama biforme, para la cual 2 es un punto de ramificación simple.

El punto -2 se trata análogamente. Concluimos que F tiene también dos ramas holomorfas a su alrededor, una uniforme y otra biforme.

Para terminar de comprender cómo se articulan las distintas ramas uniformes de F conviene observar lo siguiente:

> *Si una rama uniforme holomorfa de F en $D(-2, 4) \cap D(2, 4)$ se prolonga a todo el disco $D(-2, 4)$, entonces no se prolonga a todo el disco $D(2, 4)$ y viceversa.*

En efecto, si una misma rama se prolongara a $D(-2, 4) \cup D(2, 4)$, se prolongaría de hecho a todo $\mathbb{C}$, pero ya hemos visto que F no tiene ramas uniformes en un entorno de ∞. ∎

14.4 Superficies de Riemann compactas

Las configuraciones analíticas (X,π) de las funciones algebraicas en $\mathbb{C}^\infty$ son superficies de Riemann compactas, pues $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es propia y $\mathbb{C}^\infty$ es compacto. En esta sección probaremos que si X es cualquier superficie de Riemann compacta y $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es cualquier función meromorfa no constante, entonces (X,π) es la configuración analítica de una cierta función algebraica F en $\mathbb{C}^\infty$. Más aún, toda función meromorfa $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ determina una función algebraica mediante $F(z) = \Phi[\pi^{-1}[z]]$, aunque en general (X,π) no tiene por qué ser su configuración analítica.

Observar que si $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa en una superficie de Riemann compacta, entonces es propia trivialmente.

Teorema 14.20 *Sea X una superficie de Riemann compacta y $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa no constante de orden n. Entonces para cada función meromorfa $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ existe un polinomio mónico $T \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$ de grado n tal que $T(\pi(x), \Phi(x)) = 0$ para todo $x \in X$ donde no se hagan infinitos los coeficientes de T.*

Si T es irreducible, el par (X,π) es la configuración analítica de la función algebraica sobre $\mathbb{C}^\infty$ determinada por T.

Demostración: Sea A el conjunto formado por los polos de π y Φ más los puntos de X donde $o(\pi,x) > 1$. Claramente A es cerrado y discreto, luego es finito. Llamemos $E = \pi[A]$ y $B = \pi^{-1}[E]$. Claramente E y B son conjuntos finitos y $\pi[X \setminus B] = \mathbb{C}^\infty \setminus E$. Observemos también que $\infty \in E$.

Para cada $a \in \mathbb{C}^\infty \setminus E$ llamemos $x_{1,a}, \ldots, x_{n,a}$ a los n puntos de $X \setminus B$ tales que $\pi(x_{1,a}) = \cdots = \pi(x_{n,a}) = a$. Existen un disco D_a de centro a y entornos abiertos $V_{i,a}$ de cada $x_{i,a}$ de modo que $\pi|_{V_{i,a}} : V_{i,a} \longrightarrow D_a$ es biyectiva. Llamaremos $\phi_{i,a} : D_a \longrightarrow V_{i,a}$ a la función inversa. Definimos en D_a las funciones

$$A_{j,a}(z) = S_j\big(\Phi(\phi_{1,a}(z)), \ldots, \Phi(\phi_{n,a}(z))\big),$$

donde S_j es el polinomio simétrico elemental de grado j.

Es inmediato comprobar que si $D_a \cap D_b \neq \varnothing$, entonces $A_{j,a}$ y $A_{j,b}$ coinciden en dicha intersección, luego todas estas funciones se extienden a una única función holomorfa $A_j : \mathbb{C}^\infty \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}$. Las propiedades de los polinomios simétricos elementales hacen que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (w - \Phi(x_{i,a})) &= \prod_{i=1}^n \big(w - \Phi(\phi_{i,a}(a))\big) \\ &= w^n + A_{1,a}(a)w^{n-1} + \cdots + A_{n,a}(a) \\ &= w^n + A_1(a)w^{n-1} + \cdots + A_n(a). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Llamemos $T(z,w)$ al polinomio del último término. Hemos de probar que las funciones A_j tienen singularidades evitables o polos en los puntos de E, con

lo que son meromorfas y $T \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$. Más aún, si $x \in X \setminus B$ y $a = \pi(x)$ entonces existe un i tal que $x = x_{i,a}$, y es claro que

$$T(\pi(x), \Phi(x)) = \prod_{i=1}^{n} \big(\Phi(x) - \Phi(x_{i,a})\big) = 0.$$

(Si $x \in B$ pero todas las funciones A_j son finitas en $\pi(b)$, la igualdad anterior vale igual para x por continuidad.)

Sea, pues, $c \in E$ y tomemos un disco abierto D en $\mathbb{C}^\infty$ de centro c tal que $D \cap E = \{c\}$. Sea $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ cualquier función holomorfa no constante tal que $h(c) = 0$. Sea $f = \pi \circ h$, que es una función holomorfa en $\pi^{-1}[D]$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in \pi^{-1}[c]$.

Si m es un número natural mayor que el orden de cualquier polo que Φ pueda tener en $\pi^{-1}[c]$, entonces $g = f^m\Phi$ es holomorfa en $\pi^{-1}[D]$.

Sea $K \subset D$ un entorno compacto de c. Entonces $\pi^{-1}[K]$ es un entorno compacto de cada punto de $\pi^{-1}[c]$, y existe un número real $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in \pi^{-1}[K]$.

Si $a \in K \setminus \{c\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_j(a) &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \Phi(\phi_{i_1,a}(a)) \cdots \Phi(\phi_{i_j,a}(a)) \\ &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \Phi(x_{i_1,a}) \cdots \Phi(x_{i_j,a}). \end{aligned}$$

Puesto que cada $x_{i,a}$ está en $\pi^{-1}[K]$, tenemos la acotación

$$\begin{aligned} |h(a)^{mj} A_j(a)| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |h(a)^m \Phi(x_{i_1,a})| \cdots |h(a)^m \Phi(x_{i_j,a})| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |f(x_{i_1,a})^m \Phi(x_{i_1,a})| \cdots |f(x_{i_j,a})^m \Phi(x_{i_j,a})| \\ &\leq CM^j. \end{aligned}$$

Así pues, la función $h^{mj}A_j$ tiene una singularidad evitable en c, y la función A_j tiene una singularidad evitable o un polo en dicho punto. Por consiguiente $A_j \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$.

Supongamos ahora que T es irreducible y sea F la función algebraica que determina. Sea A^* el conjunto de puntos de X donde π no es localmente inyectiva. Sea $E^* = \pi[A^*]$ y sea $B^* = \pi^{-1}[E^*]$. Todos estos conjuntos son finitos. Vamos a ver que E^* es el conjunto de puntos singulares de F.

En efecto, sea $z \in \mathbb{C}^\infty \setminus E^*$. Entonces z tiene n antiimágenes distintas, digamos $x_1, \ldots, x_n \in X$. Existen un entorno V de z y entornos disjuntos V_i de cada x_i tales que las restricciones $\pi|_{V_i} : V_i \longrightarrow V$ son homeomorfismos. Las aplicaciones $(\pi|_{V_i})^{-1} \circ \Phi$ son ramas uniformes de F, pues todo $a \in V \setminus E$ cumple

$$T\big(a, \Phi((\pi|_{V_i})^{-1}(a))\big) = T\big(\pi((\pi|_{V_i})^{-1}(a)), \Phi((\pi|_{V_i})^{-1}(a))\big) = 0.$$

Además son distintas. Para probarlo fijamos $a \in V \setminus E$. Podemos suponer que $D_a \subset V \setminus E$, y entonces las funciones $(\pi|_{V_i})^{-1}$ se restringen a las funciones $\phi_{i,a}$ (quizá en otro orden). Basta ver que las funciones $\phi_{i,a} \circ \Phi$ son distintas, pero si dos de ellas coincidieran, entonces (14.3), que es la definición de T, implicaría que $T(z, w)$ tiene raíces múltiples en todos los puntos $z \in D_a$, en contra de su irreducibilidad.

Así pues, F tiene n ramas uniformes en un entorno de cada punto de $\mathbb{C}^\infty \setminus E^*$, lo que prueba que tales puntos son regulares.

Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $a = \pi(x)$ es un punto singular de F pues, fijado un entorno V de a, podemos tomar un entorno W de x tal que $W \cap B^* = \{a\}$ y $\pi[W] \subset V$. Como π no es inyectiva en W, existen dos puntos u, $v \in W$ con $\pi(u) = \pi(v) \in V$. Sea γ un arco que una u con v contenido en W y que no pase por x. Es fácil ver que $\gamma \circ \pi$ es un arco cerrado en V que prolonga una rama uniforme de F hasta otra distinta. Por consiguiente F tiene una rama con un punto de ramificación en a, que es, por tanto, un punto singular.

Sea $S^* = X \setminus B^*$. Si probamos que S^* con la restricción de π puede identificarse con la superficie de gérmenes de F con soporte regular, la unicidad de la configuración analítica implicará que (X, π) es la configuración analítica de F. Ahora bien, dicha superficie es simplemente la superficie de Riemann de la restricción de F a $\mathbb{C}^\infty \setminus E^*$, y el teorema 13.23 nos permite identificarla con S^*. ∎

Ahora falta probar que si X es una superficie de Riemann compacta y π es cualquier función meromorfa no constante en X, entonces existe al menos una función meromorfa Φ sobre X para la cual el polinomio T del teorema anterior es irreducible, con lo que (X, π) será ciertamente la configuración analítica de una función algebraica. Esto es una consecuencia muy sencilla de un hecho nada trivial:

> *Si X es una superficie de Riemann y $x_1, \dots, x_n$ son puntos distintos de X, existe una función meromorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que los valores $f(x_i)$ son distintos dos a dos.*

Dedicaremos la sección siguiente a probar este hecho. Ahora consideremos un par (X, π), donde X es una superficie compacta y π una función meromorfa no constante. Consideremos el orden $n = o(\pi)$ y tomemos un punto $a \in \mathbb{C}^\infty$ con n antiimágenes distintas $x_1, \dots, x_n$. Sea Φ una función meromorfa sobre X tal que los valores $\Phi(x_i)$ sean distintos dos a dos. Es fácil ver entonces que la función F del teorema anterior tiene n ramas uniformes distintas alrededor del punto a. Si T fuera reducible entonces F sería raíz de un polinomio de grado menor que n, pero eso es imposible. ∎

Notemos que la aplicación Φ no es única en ningún caso. Por ejemplo, si $X = \mathbb{C}^\infty$ y $\pi(z) = z^2$, entonces (X, π) es la configuración analítica de la función $\sqrt{z}$, pero también de $\sqrt{z} + 1$, etc.

14.5 Funciones harmónicas en superficies de Riemann

El teorema de existencia de funciones meromorfas que hemos usado en la sección anterior no es fácil de probar, y la mayoría de las demostraciones conocidas utilizan conceptos más avanzados que los que hemos estudiado en este libro. Aquí daremos una prueba basada en las ideas originales de Riemann, para la cual necesitamos generalizar a superficies de Riemann los resultados elementales sobre funciones harmónicas en abiertos de $\mathbb{C}$. Empezamos extendiendo las definiciones.

Definición 14.21 Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una superficie de Riemann es *harmónica* (subharmónica, superharmónica) si para cada $x \in X$ existe una carta $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ alrededor de x tal que $\phi^{-1} \circ f$ es harmónica (subharmónica, superharmónica) en $\phi[U]$.

Usando los teoremas 9.6 y 9.25, es fácil ver que la composición de una transformación conforme (entre abiertos de $\mathbb{C}$) con una función subharmónica (en el sentido usual) es de nuevo subharmónica. De aquí se desprende esto mismo para funciones superharmónicas (y para funciones harmónicas es consecuencia directa de 9.6). Como consecuencia, teniendo en cuenta además que el carácter harmónico, subharmónico o superharmónico de una aplicación es una propiedad local, concluimos que si f es harmónica (subharmónica, superharmónica) en el sentido de la definición anterior, de hecho toda carta ϕ de f cumple que $\phi^{-1} \circ f$ es harmónica (subharmónica, superharmónica).

Obviamente las funciones harmónicas (subharmónicas, superharmónicas) son continuas. Una función f es subharmónica (superharmónica) si y sólo si $-f$ es superharmónica (subharmónica), y f es harmónica si y sólo si es subharmónica y superharmónica a la vez. También es inmediato que si f y g son funciones subharmónicas en una superficie X entonces $\max\{f, g\}$ y $\alpha f + \beta g$, donde α, $\beta \geq 0$, son también subharmónicas. Todo esto se prueba sin más que componer con cartas y aplicar las propiedades correspondientes para funciones en abiertos de $\mathbb{C}$. Veamos ahora otros hechos básicos de carácter global:

Teorema 14.22 (Principio del máximo) *Sea $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función subharmónica. Si existe un punto $a \in X$ tal que $u(x) \leq u(a)$ para todo $x \in X$, entonces u es constante.*

Demostración: Consideramos el conjunto $A = \{x \in X \mid u(x) = u(a)\}$. Como u es continua A es cerrado en X. Basta probar que es abierto, pero si $x \in A$ tomamos una carta $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $x \in U$, con lo que $\phi^{-1} \circ u$ es una función subharmónica en $\phi[U]$ que alcanza un máximo en $\phi(a)$. El principio del máximo implica entonces que $\phi^{-1} \circ u$ es constante en $\phi[U]$, luego u es constante en U y por consiguiente $U \subset A$. Concluimos que $A = X$, lo que equivale a que u es constante. ∎

En particular vemos que en una superficie de Riemann compacta las únicas funciones subharmónicas (superharmónicas, harmónicas) son las constantes.

Teorema 14.23 *Sea X una superficie de Riemann, sea Y un dominio en X (distinto de X) tal que $\overline{Y}$ sea compacto. Sean u, $v : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que u es subharmónica en Y, v es harmónica en Y y $u \leq v$ en ∂Y. Entonces $u \leq v$ en Y.*

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis $Y \neq X$ equivale a que $\partial Y \neq \varnothing$, que se requiere para que la relación entre u y v no sea vacía. Cambiando u por $u - v$ podemos suponer que v es la función nula. Por compacidad existe $a \in \overline{Y}$ donde u alcanza su máximo. Si $a \in Y$ entonces u es constante y la conclusión es obvia. Si $a \in \partial Y$, entonces todo $x \in A$ cumple $u(x) \leq u(a) \leq 0$. ∎

Teorema 14.24 (Principio de prolongación harmónica) *Si dos funciones harmónicas en una superficie de Riemann coinciden en un abierto, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si una función harmónica $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se anula en un abierto entonces es nula. Sea Ω la unión de todos los abiertos donde f se anula. Si $\Omega \neq X$ entonces existe un punto $x \in \partial\Omega$. Una carta alrededor de X transforma f en una función harmónica en un abierto de $\mathbb{C}$ que es nula en un abierto pero no es constante. Esto contradice al principio de prolongación harmónica. ∎

El teorema siguiente es local, por lo que se sigue inmediatamente de su análogo 9.26.

Teorema 14.25 *Sea $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función subharmónica, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una carta de C y $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado contenido en $\phi[U]$. Sea $h : \overline{D(a,r)} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua que coincide con $\phi^{-1} \circ u$ en $\partial D(a,r)$ y es harmónica en $D(a,r)$. Entonces la función $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in X \setminus \phi^{-1}[\overline{D(a,r)}] \\ h(\phi(x)) & \text{si } x \in \phi^{-1}[\overline{D(a,r)}] \end{cases}$$

es subharmónica. La llamaremos modificación de Poisson *de u en $\phi^{-1}[\overline{D(a,r)}]$.*

Definición 14.26 Una familia $\mathcal{P}$ de funciones subharmónicas en una superficie de Riemann X es una *familia de Perron* si cumple:

a) Si u, $v \in \mathcal{P}$, entonces máx$\{u, v\} \in \mathcal{P}$.

b) Las modificaciones de Poisson de las funciones de $\mathcal{P}$ están en $\mathcal{P}$.

Se llama *envolvente superior* de $\mathcal{P}$ a la función $M : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$M(x) = \sup\{u(x) \mid u \in \mathcal{P}\}.$$

El teorema siguiente se prueba sin dificultad a partir de los resultados que ya tenemos.

Teorema 14.27 *Sea $w : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función superharmónica en una superficie de Riemann X. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{P} = \{u : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es subharmónica y } u \leq w\}$$

es una familia de Perron en X.

Teorema 14.28 *Sea $\mathcal{P}$ una familia de Perron en una superficie de Riemann X y M su envolvente superior. Entonces M es constante igual a $+\infty$ o bien $M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es harmónica en X.*

Demostración: Sea $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una carta de X. Es fácil comprobar que el conjunto $P_\phi = \{\phi^{-1} \circ u \mid u \in \mathcal{P}\}$ es una familia de Perron en $\phi[U]$, así como que su envolvente superior M_ϕ verifica $M = \phi \circ M_\phi$. El teorema 9.28 nos da que M es constante en U igual a $+\infty$ o bien M es harmónica en U.

Esto prueba que el conjunto de puntos donde M toma el valor $+\infty$ y el conjunto de puntos donde M es harmónica (en un entorno) son dos abiertos disjuntos cuya unión es X. Por conexión uno de ellos ha de ser igual a X. ∎

Pasamos ahora a probar el resultado central, del cual deduciremos la existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann.

Teorema 14.29 *Sea X una superficie de Riemann y $\psi^{-1} : U \longrightarrow D(0,2)$ una carta de X. Entonces existe una función harmónica $u : X \setminus \{\psi(0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que si $z \in D'(0,2)$ entonces*

$$u(\psi(z)) = c \log |z| + \operatorname{Re} f(z),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $f : D'(0,2) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con un polo simple en 0.

Demostración: Por simplificar la notación, llamaremos $a = \psi(0)$ y, si $0 < r < 2$, llamaremos $D(a,r) = \psi[D(0,r)]$. Entonces $\overline{D(a,r)} = \psi[\overline{D(0,r)}]$ y $\partial D(a,r) = \psi[\partial D(0,r)]$. Definimos $\Omega_r = X \setminus \overline{D(a,r)}$, con lo que $\overline{\Omega}_r = X \setminus D(a,r)$ y $\partial\Omega_r = \partial D(a,r)$. Notar que Ω_r es un dominio en X. Distinguimos dos casos:

Caso 1: *Para algún número real $0 < r < 2$ existe $\omega : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada, harmónica en $X \setminus \overline{D(a,r)}$ y tal que*

$$\begin{aligned} &\omega(x) = 0 \qquad \text{si } x \in \partial D(a,r),\\ &\omega(x) > 0 \qquad \text{si } x \in \Omega_r. \end{aligned}$$

Para cada $c \in \mathbb{R}$ definimos $u_c : X \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$u_c(x) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r}\right) & \text{si } x = \psi(x) \text{ con } 0 < |z| \leq r,\\ c\omega(x) & \text{si } x \in \Omega_r. \end{cases}$$

Vamos a probar que u_c y $-u_{-c}$ son subharmónicas cuando c es positivo y suficientemente grande.

En primer lugar observamos que la función $\operatorname{Re}\left(\frac{r}{z}-\frac{z}{r}\right)$ es harmónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y se anula en la circunferencia $|z|=r$. Esto prueba que u_c es continua en $X\setminus\{a\}$ y harmónica en $D(a,r)$. Obviamente es harmónica en Ω_r. (Todo esto vale para cualquier $c\in\mathbb{R}$, en particular para u_c y para u_{-c}.)

Falta probar que u_c y $-u_{-c}$ son subharmónicas en los puntos de $\partial D(a,r)$. Equivalentemente, hemos de ver que $\tilde{u}_c=\psi\circ u_c$ y $-\tilde{u}_{-c}$ son subharmónicas en los puntos de $\partial D(0,r)$. Concretamente,

$$\tilde{u}_c(z)=\begin{cases}\operatorname{Re}\left(\frac{r}{z}-\frac{z}{r}\right) & \text{si } 0<|z|\le r,\\ c\tilde{\omega}(z) & \text{si } r<|z|<2,\end{cases}$$

donde $\tilde{\omega}=\psi\circ\omega$. Aplicaremos el teorema 9.20.

Como $\tilde{\omega}$ no se anula en la circunferencia $|z|=(2+r)/2$, si $c>0$ es suficientemente grande se cumple

$$\operatorname{Re}\left(\frac{r}{z}-\frac{z}{r}\right)\le c\tilde{\omega}(z)=\tilde{u}_c(z),$$

para todo z tal que $|z|=(2+r)/2$ (y trivialmente si $|z|=r$). Ahora bien, en el anillo $A(0,r,(2+r)/2)$ los dos términos de esta desigualdad son funciones harmónicas continuas en la clausura, luego por el principio del máximo podemos concluir que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{r}{z}-\frac{z}{r}\right)\le\tilde{u}_c(z),\qquad\text{para } 0<|z|\le\frac{2+r}{2}.$$

(En principio para $|z|\ge r$, pero trivialmente en el caso contrario.)

Así, si $|z|=r$ entonces, si $\rho>0$ es suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}\tilde{u}_c(z) &= \operatorname{Re}\left(\frac{r}{z}-\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{r}{z+\rho e^{i\theta}}-\frac{z+\rho e^{i\theta}}{r}\right)d\theta\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}_c(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\tilde{u}_c$ es subharmónica, y similarmente se razona con $-\tilde{u}_{-c}$.

Fijemos, pues un $c>0$ tal que u_c y $-u_{-c}$ sean subharmónicas en $X\setminus\{a\}$. Sea $d\in\mathbb{R}$ tal que

$$d\ge 2\sup\{c\omega(x)\mid x\in\overline{\Omega}_r\}$$

(recordemos que ω está acotada).

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de las funciones subharmónicas v en $X\setminus\{a\}$ tales que

$$v(x)\le u_{-c}(x)+d,\qquad\text{para todo } x\in X\setminus\{a\}.$$

Puesto que $u_{-c}+d$ es una función superharmónica, $\mathcal{P}$ es una familia de Perron. Se cumple que $u_c\in\mathcal{P}$, pues

$$u_c(x)=\begin{cases}u_{-c}(x)\le u_{-c}(x)+d & \text{si } x=\psi(z),\ 0<|z|\le r,\\ 2x\omega(x)-u_{-c}(x)\le d+u_{-c}(x) & \text{si } x\in\Omega_r.\end{cases}$$

Sea M la envolvente superior de $\mathcal{P}$. Entonces $u_c \leq M \leq u_{-c} + d$. Por consiguiente

$$0 \leq M(\psi(z)) - \operatorname{Re}\left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r}\right) \leq d, \qquad \text{para } 0 < |z| < r.$$

La función del miembro central es harmónica en $D'(0,r)$ y está acotada. Según el teorema 9.5 se extiende a una función harmónica en $D(0,2)$, la cual será la parte real de una función holomorfa $g : D(0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$. Así pues,

$$M(\psi(z)) = \operatorname{Re}\left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} + g(z)\right) = \operatorname{Re} f(z),$$

donde $f(z)$ tiene un polo simple en 0. La función M es, pues, la buscada.

Caso 2 *Si $0 < r < 2$, no existe ninguna función $\omega : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada, harmónica en Ω_r y tal que*

$$\begin{aligned} &\omega(x) = 0 \qquad \textit{si } x \in \partial D(a,r), \\ &\omega(x) > 0 \qquad \textit{si } x \in \Omega_r. \end{aligned}$$

Observemos que las funciones cuya existencia se postulaba en el caso 1 son funciones continuas y acotadas en $\overline{\Omega}_r$, harmónicas en Ω_r pero que no tienen máximo. Recíprocamente, bajo las hipótesis del caso 2 vamos a probar que toda función en estas condiciones alcanza su máximo y su mínimo:

> **A)** *Si $0 < r < 2$ y $u : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, acotada y harmónica en Ω_r, entonces u alcanza su máximo y su mínimo en $\partial D(a,r)$.*

En efecto, sean

$$A = \text{ínf}\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}, \qquad B = \sup\{u(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}.$$

Sea h_1 la solución del problema de Dirichlet en el anillo $A(0, r, (r+2)/2)$ que sobre $|z| = r$ vale $u(\psi(z))$ y sobre $|z| = (r+2)/2$ vale A.

Sea $v_1 : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$v_1(x) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } x \in \Omega_{(r+2)/2}. \end{cases}$$

Claramente es continua y es fácil ver que es subharmónica en Ω_r. Los únicos puntos donde no es evidente son los de $\partial D(a, (r+2)/2)$. Para ellos hemos de probar que la función

$$\tilde{v}_1(z) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } (r+2)/2 < |z| < 2 \end{cases}$$

es subharmónica en $\partial D(0, (r+2)/2)$, pero esto es inmediato a partir del teorema 9.20, teniendo en cuenta que $A \leq h_1$ en todo su dominio.

Definimos análogamente v_2 cambiando A por B y se prueba que v_2 es superharmónica en Ω_r.

Sea $\mu = \max\{u(\psi(x)) \mid |z| = r\}$. Sea $\mathcal{P}_1$ el conjunto de las funciones w subharmónicas en Ω_r tales que $w(x) \leq \min\{u(x), \mu\}$, para todo $x \in \Omega_r$. Sea $\mathcal{P}_2$ el conjunto de las funciones w subharmónicas en Ω_r tales que $w(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega_r$. Tanto $\mathcal{P}_1$ como $\mathcal{P}_2$ son familias de Perron. Sean M_1 y M_2 sus envolventes superiores.

Se cumple que $v_1|_{\Omega_r} \in \mathcal{P}_1$. En efecto, $h_1 \leq \psi \circ u$ sobre los puntos de $\partial A(0, r, (r+2)/2)$, luego lo mismo vale sobre todo el anillo. Por lo tanto $v_1 \leq u$ en $A(a, r, (r+2)/2$. La desigualdad vale obviamente en $\Omega_{(r+2)/2}$. El mismo razonamiento prueba que $v_1 \leq \mu$.

Del mismo modo se concluye que $u|_{\Omega_r} \in \mathcal{P}_2$. Así pues,

$$A \leq v_1(x) \leq M_1(x) \leq u(x) \leq M_2(x) \leq v_2(x) \leq B, \qquad \text{para todo } x \in \Omega_r.$$

Por lo tanto, $M_2 - M_1$ es una función harmónica y acotada en Ω_r y

$$0 \leq M_2(\psi(z)) - M_1(\psi(z)) \leq v_2(\psi(z)) - v_1(\psi(z)), \qquad \text{si } 0 < |z| < 2.$$

De aquí se sigue que, si $|a| = r$,

$$\lim_{z \to a} M_2(\psi(z)) - M_1(\psi(z)) = 0,$$

es decir, $M_2 - M_1$ se extiende a una función continua en $\overline{\Omega}_r$ que se anula en $\partial D(a, r)$. Por la hipótesis del caso 2 la función $M_2 - M_1$ ha de anularse en algún punto de Ω_r, pero por el principio del mínimo esto obliga a que $M_2 - M_1 = 0$. Por lo tanto $u(x) = M_1(x) \leq \mu$, que es lo que queríamos probar.

Ahora probaremos que el problema de Dirichlet tiene solución en cada Ω_r:

B) *Sea $0 < r < 2$ y sea $f : \partial D(a, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f se extiende a una única función $u : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada y harmónica en Ω_r.*

En efecto, la unicidad se sigue del resultado anterior. La existencia la obtendremos de una construcción similar a la que acabamos de hacer, que no requiere las hipótesis del caso 2. Sean

$$A = \inf\{f(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}, \qquad B = \sup\{f(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}.$$

Sea h_1 la solución del problema de Dirichlet en el anillo $A(0, r, (r+2)/2)$ que sobre $|z| = r$ vale $f(\psi(z))$ y sobre $|z| = (r+2)/2$ vale A.

Sea $v_1 : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$v_1(x) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } x \in \Omega_{(r+2)/2}. \end{cases}$$

Definimos v_2 cambiando A por B. Se comprueba que v_1 es subharmónica y v_2 es superharmónica en Ω_r. El conjunto $\mathcal{P}$ de las funciones subharmónicas

w en Ω_r que cumplen $w(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega_r$ es una familia de Perron que contiene a $v_1|_{\Omega_r}$, luego su envolvente superior M es una función harmónica en Ω_r que verifica

$$A \leq v_2(x) \leq M(x) \leq v_2(x) \leq B, \qquad \text{para todo } x \in \Omega_r.$$

Es claro entonces que la función $u : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} M(x) & \text{su } x \in \Omega_r \\ f(x) & \text{si } x \in \partial D(a,r) \end{cases}$$

es acotada, continua y harmónica en Ω_r.

Veamos un último resultado previo antes de probar el teorema:

C) *Sea $0 < r < 2$ y $\{u_n\}n$ una sucesión de funciones $u_n : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, acotadas y harmónicas en Ω_r que convergen uniformemente en $\partial D(a,r)$. Entonces la sucesión converge uniformemente en $\overline{\Omega}_r$ a una función u continua, acotada y harmónica en Ω_r.*

En efecto, por A) tenemos que, para todo par de naturales m y n se cumple

$$\begin{aligned} \sup\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\} &\leq \sup\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in D(a,r)\}, \\ \text{ínf}\,\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\} &\geq \text{ínf}\,\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in D(a,r)\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\sup\big\{|u_m(x) - u_n(x)| \;\big|\; x \in \overline{\Omega}_r\big\} \leq \sup\big\{|u_m(x) - u_n(x)| \;\big|\; x \in D(a,r)\big\},$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado.

Finalmente, nos encaminamos a construir la función que pide el teorema. Para cada número real $0 < r < 1$, la propiedad B) nos proporciona una función $U_r : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada y harmónica en Ω_r que verifica

$$U_r(\psi(z)) = \text{Re}(1/z), \qquad \text{si } |z| = r.$$

El valor mínimo de U_r en $D(a,1)$ ha de ser estrictamente menor que el máximo, pues de lo contrario A) implicaría que U_r sería constante en Ω_1 y, por prolongación harmónica, en Ω_r, lo cual es imposible. Definimos $V_r : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$V_r(x) = \alpha(r)U_r + \beta(r),$$

donde $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son números reales elegidos de manera que el mínimo y el máximo de V_r en $D(a,1)$ sean 0 y 1 respectivamente. La propiedad A) implica que $0 \leq V_r \leq 1$ en $\overline{\Omega}_1$.

Sea v_r la restricción de V_r al anillo $A(a,1,2)$. Estas funciones forman un conjunto acotado en el espacio de funciones harmónicas en dicho anillo, luego el teorema 9.16 implica que es relativamente compacto (es claro que la versión del teorema para funciones en $A(0,1,2) \subset \mathbb{C}$ implica su validez en $A(a,1,2) \subset X$).

Por consiguiente, la sucesión $\{v_{1/n}\}_n$ tiene una subsucesión convergente, es decir, existe una sucesión $\{r_n\}_n$ decreciente y convergente a 0 tal que la sucesión $\{v_{r_n}\}_n$ converge uniformemente en los compactos de $A(a,1,2)$ a una función harmónica.

En particular la sucesión $\{V_{r_n}\}_n$ converge uniformemente en cada circunferencia $D(a,s)$, para $1<s<2$, luego la propiedad C) implica que converge casi uniformemente en Ω_1 a una función harmónica $V_0:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{R}$. Obviamente $0\le V_0\le 1$. Hemos de probar que V_0 puede extenderse hasta $X\setminus\{a\}$.

Por el teorema 9.4 se cumple

$$V_r(\psi(z)) = c(r)\log|z| + \operatorname{Re} f_r(z),$$

para $r<|z|<2$ (o bien $1<|z|<2$ si $r=0$), donde $c(r)\in\mathbb{R}$ y la función $f_r(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(r)z^k$ es holomorfa en $A(0,r,2)$ (o bien $A(0,1,2)$ si $r=0$). Podemos suponer que $a_0(r)\in\mathbb{R}$.

Vamos a analizar el comportamiento de los coeficientes. Fijemos un número real $r<s<2$ (o bien $1<s<2$ si $r=0$). Entonces, según 5.10, (tomando partes reales cuando $k=0$):

$$\begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}(f_r(se^{i\theta}))\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(V_r(\psi(se^{i\theta}))-c(r)\log|s|\big)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_r(\psi(se^{i\theta}))\,d\theta - c(r)\log|s|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k(r)s^k+\overline{a_{-k}(r)}s^{-k} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_r(se^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f_r(se^{i\theta})}e^{-ik\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}(f_r(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}d\theta - \frac{c(r)\log|s|}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} a_0(r)+c(r)\log|s| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_r(\psi(se^{i\theta}))\,d\theta,\\ a_k(r)s^k+\overline{a_{-k}(r)}s^{-k} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}d\theta,\quad k\ge 1. \end{aligned}\tag{14.4}$$

Si fijamos dos valores de s entre 1 y 2, cada una de las ecuaciones anteriores se convierte en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($a_0(r)$ y $c(r)$ en el primer caso, $a_k(r)$ y $\overline{a_{-k}(r)}$ en el segundo.) Despejándolas nos quedan

las incógnitas en función de las integrales. Lo aplicamos a r_n y hacemos tender n a infinito. Los integrandos $V_{r_n}(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}$ convergen puntualmente a $V_0(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}$, y están acotados por 1, luego podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y concluir que

$$a_k(0) = \lim_n a_k(r_n), \qquad c(0) = \lim_n c(r_n).$$

Ahora probaremos que los coeficientes $a_k(0)$ son nulos para $k < -1$ estimando los $a_k(r_n)$. En primer lugar, la ecuación (14.4), que en principio está probada para $0 < r < s < 2$, también es válida si $s = r$. Puesto que los integrandos están acotados por 1, basta aplicar el teorema de la convergencia dominada. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_k(r)r^k + \overline{a_{-k}(r)}r^{-k} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_r(\psi(re^{i\theta}))e^{-ik\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(\alpha(r)U_r(\psi_r(re^{i\theta})) + \beta(r)\big)e^{-ik\theta}d\theta \\ &= \frac{\alpha(r)}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)e^{-ik\theta}d\theta + \frac{\beta(r)}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}d\theta \\ &= \frac{\alpha(r)}{r\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Ahora un simple cálculo muestra que si $k \geq 2$ la integral es nula (por ejemplo, integrando por partes dos veces). En definitiva,

$$\overline{a_{-k}(r)} = -a_k(r)\, r^{2k}, \qquad \text{para } k \geq 2. \tag{14.5}$$

Por otro lado, si partimos de (14.4) con $s = 1 > r$ obtenemos

$$|a_k(r) + \overline{a_{-k}(r)}| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} V_r(\psi(e^{i\theta}))e^{-ik\theta}\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 2.$$

Sustituyendo (14.5) queda

$$\begin{aligned} |a_k(r)| &\leq \frac{2}{1-r^{2k}} \leq \frac{2}{1-r}, \\ |a_{-k}(r)| &= |a_k(r)|\, r^{2k} \leq \frac{2r^{2k}}{1-r}. \end{aligned}$$

Ahora es claro que si $k \geq 2$

$$a_{-k}(0) = \lim_n a_{-k}(r_n) = 0.$$

Por consiguiente podemos definir $u : X \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$u(x) = \begin{cases} c(0)\log|z| + \operatorname{Re}\left(\frac{a_{-1}(0)}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(0)z^k\right) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } 0 < |z| \leq 1, \\ V_0(x) & \text{si } x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Obviamente es una función harmónica en $X \setminus \{a\}$, pues la primera definición coincide con la segunda en $A(a, 1, 2)$. El teorema estará probado si justificamos que $a_{-1}(0) \neq 0$. Necesitamos algunos hechos previos.

Veamos que, fijado $r_1 < s < 1$, la sucesión $\{V_{r_n}\}$ converge uniformemente a u en $D(a, s)$. En efecto, si $|z| = s$, $r < s$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$|V_r(\psi(z)) - u(\psi(z))| \leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \sum_{k=-\infty}^{-2} |a_k(r)|\, s^k$$

$$+ \sum_{k=-1}^{m} |a_k(r) - a_k(0)|\, s^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k(r) - a_k(0)|\, s^k$$

$$\leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2r^{2k}}{1-r}\, s^{-k} + \sum_{k=-1}^{m} |a_k(r) - a_k(0)|\, s^k + \frac{4}{1-r} \sum_{k=m+1}^{\infty} s^k$$

$$\leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \frac{2r^2}{(1-r)^2} + \sum_{k=-1}^{m} |a_k(r) - a_k(0)|\, s^k + \frac{4}{1-r}\, \frac{s^{m+1}}{1-s}.$$

Notar que antes de sumar la primera serie hemos acotado $(r^2/s) < r$.

Fijado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4}{1-r}\, \frac{s^{m+1}}{1-s} < \frac{\epsilon}{4}, \qquad \text{para todo } r < s.$$

Fijando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$|c(r_n) - c(0)| \log \frac{1}{s} < \frac{\epsilon}{4}, \quad \sum_{k=-1}^{m} |a_k(r) - a_k(0)|\, s^k < \frac{\epsilon}{4}, \quad \frac{2r_n^2}{(1-r_n)^2} < \frac{\epsilon}{4},$$

garantizamos que si $n \geq n_0$ entonces $|V_{r_n}(x) - u(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D(a, s)$.

Ahora la propiedad C) implica que V_{r_n} converge uniformemente a u en $\overline{\Omega}_s$, y en particular en $\overline{\Omega}_1$. Puesto que las funciones V_{r_n} toman los valores 0 y 1 en $D(a, 1)$, es claro que el límite u no es constante en $D(a, 1)$.

Por último, veamos que $a_{-1}(0) \neq 0$. En caso contrario la función u tendría límite en a (finito o infinito). Supongamos que el límite es $L \neq \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $u[D(a, \delta)] \subset]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Por la propiedad A) tenemos que $u[\overline{\Omega}_1] \subset u[\Omega_\delta] \subset]L - \epsilon, L + \epsilon[$, pero esto implica que u es constante en $\overline{\Omega}_1$, en contradicción con lo que hemos probado. Si $L = \infty$ el razonamiento es similar. ∎

El resultado cuya prueba tenemos pendiente afirma la existencia de funciones meromorfas, y lo que acabamos de probar es un resultado de existencia de funciones harmónicas. Sabemos que una función harmónica en un abierto de $\mathbb{C}$ determina una función holomorfa, la que hemos llamado su derivada. Sobre superficies de Riemann, las funciones harmónicas no determinan funciones holomorfas, sino formas diferenciales holomorfas. En efecto:

Teorema 14.30 *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función harmónica en una superficie de Riemann X. Para cada punto $p \in X$, la aplicación lineal $df(p) : T_p(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$df(p) = \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}\Big|_{z(p)} dz(p),$$

donde z es una carta alrededor de p, es independiente de la elección de z y la forma df es holomorfa en X.

Demostración: Supongamos que w es otra carta alrededor de p. Entonces, aplicando el teorema 9.6:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(w^{-1} \circ f)}{\partial w}\Big|_{w(p)} dw(p) &= \frac{\partial((w^{-1} \circ z) \circ (z^{-1} \circ f))}{\partial w}\Big|_{w(p)} dw(p) \\
&= \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}\Big|_{z(p)} (w^{-1} \circ z)'(w(p))\, dw(p) \\
&= \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}\Big|_{z(p)} \frac{dz}{dw}\Big|_p dw(p) \\
&= \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}\Big|_{z(p)} dz(p).
\end{aligned}$$

La forma df es holomorfa porque lo son las funciones

$$z \circ \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}.$$

∎

Dada una superficie de Riemann X y un punto $a \in X$, siempre podemos construir una carta ψ^{-1} en las condiciones del teorema 14.29 tal que $\psi(0) = a$. Si la llamamos z, la conclusión del teorema es que existe una función harmónica $u : X \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que en un entorno de a es de la forma

$$u(x) = c \log |z(x)| + \operatorname{Re} f(z(x)),$$

donde f es una función meromorfa con un polo simple en 0. Por lo tanto

$$\frac{\partial z^{-1} \circ u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\big(c \log |z| + \operatorname{Re} f(z)\big) = \frac{c}{z} + f'(z)$$

tiene un polo doble en 0 y la forma du es meromorfa en X con un polo doble en a. Con esto hemos probado:

Teorema 14.31 *Si X es una superficie de Riemann y $a \in X$, existe una forma diferencial meromorfa en X con un único polo en a.*

Ahora es fácil probar:

Teorema 14.32 *Si x_1, x_2 son dos puntos distintos en una superficie de Riemann X, existe una función meromorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ω_i una forma diferencial meromorfa con un único polo en x_i. Es fácil ver que las formas diferenciales verifican el principio de prolongación analítica: si una forma se anula en un conjunto con acumulación entonces es idénticamente nula. En particular el conjunto $A \subset X$ donde se anula ω_2 es cerrado y discreto, al igual que $\tilde{A} = A \cup \{x_1, x_2\}$. Si $x \in X \setminus \tilde{A}$, la aplicación lineal $\omega_2(x)$ es una base de $T_p(X)^*$, luego existe un número complejo $f(x)$ tal que

$$\omega_1(x) = f(x)\,\omega_2(x).$$

Así tenemos definida una aplicación $f : X \setminus \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Vamos a ver que se extiende a una función meromorfa en X. Fijemos $p \in X$ y sea $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una carta alrededor de p tal que $U \cap \tilde{A} \subset \{p\}$. Existen funciones meromorfas g_i tales que $\omega_i|_U = g_i\,dz$, luego si $p \notin \tilde{A}$ se cumple

$$\omega_1|_U = \frac{g_1}{g_2}\,\omega_2|_U.$$

Esto prueba que $f|_U = g_1/g_2$ es holomorfa en p. Si $p \in \tilde{A}$, entonces la igualdad anterior vale en $U \setminus \{p\}$, y la función g_1/g_2 es una extensión meromorfa de f a p. Notemos por último que $f(x_1) = \infty$, $f(x_2) = 0$. ∎

Para separar n puntos en vez de dos basta hacer una construcción elemental:

Teorema 14.33 *Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n puntos de una superficie de Riemann X. Entonces existe una función meromorfa $f.X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $f(x_i) \neq f(x_j)$ cuando $i \neq j$.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema anterior a los puntos x_i y x_j, con lo que obtenemos una función meromorfa $g_{ij} : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $g_{ij}(x_i) \neq g_{ij}(x_j)$. Tomemos un punto $w \in \mathbb{C}^\infty$ distinto de todos los puntos $g_{ij}(x_k)$. Consideramos la transformación de Möbius M que cumple

$$M(g_{ij}(x_i)) = 1 \quad M(g_{ij}(x_j)) = 0, \quad \text{y} \quad M(w) = \infty.$$

La función $f_{ij} = g_{ij} \circ M$ cumple

$$f_{ij}(x_i) = 1, \quad f_{ij}(x_j) = 0, \quad \text{y} \quad f_{ij}(x_k) \in \mathbb{C} \quad \text{para } k = 1, \ldots, n.$$

Ahora definimos $f_i : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} f_{ij}(x),$$

que claramente es meromorfa y cumple

$$f_i(x_i) = 1, \qquad f_i(x_j) = 0 \quad \text{si } j \neq i.$$

Por último, si $c_1, \ldots, c_n$ son números complejos, la función

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$$

cumple $f(x_i) = c_i$, luego si los c_i son distintos dos a dos, la función f cumple lo pedido. ∎

Terminamos con una aplicación interesante del teorema anterior:

Teorema 14.34 *Toda superficie de Riemann tiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S una superficie de Riemann. Por el teorema anterior existe una función meromorfa no constante $f : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Fijemos una base numerable en $\mathbb{C}^\infty$. Probaremos que las componentes conexas de las antiimágenes por f de los abiertos básicos de $\mathbb{C}^\infty$ forman una base de S, y después veremos que es numerable.

Sea $a \in S$ y sea U un abierto en S que contenga a a. Por el teorema 13.19 existen cartas $p : U_0 \longrightarrow D(0,r)$ alrededor de a y $q : f[U_0] \longrightarrow D(0,r^k)$ alrededor de $f(a)$ de modo que $p(a) = q(f(a)) = 0$ y $(p^{-1} \circ f \circ q)(z) = z^k$. Podemos suponer que $a \in U_0 \subset U$.

Sean $V = p^{-1}[D(0,r/2)]$, $W = q^{-1}[D(0,(r/2)^k)]$. Así $f^{-1}[W] \cap U_0 = V$, $\overline{V} \subset U_0$, luego $\partial V \cap f^{-1}[W] = \varnothing$, es decir, V es abierto y cerrado en $f^{-1}[W]$.

Si G es un abierto básico de $\mathbb{C}^\infty$ tal que $f(a) \in G \subset W$, entonces $f^{-1}[G] \cap V$ es abierto y cerrado en $f^{-1}[G]$, luego la componente conexa de $f^{-1}[G]$ que contiene a a está contenida en $V \subset U$. Esto prueba que tales componentes conexas son una base de S.

Para probar que esta base es numerable basta ver que cada abierto de S tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas. A su vez para ello basta ver que S tiene un subconjunto denso numerable. El conjunto de puntos donde f es localmente inyectiva es un abierto denso en S, y basta con que éste tenga un subconjunto denso numerable. Equivalentemente, podemos suponer que f es localmente inyectiva.

Fijemos un punto $p \in S$ tal que $\operatorname{Re} f(p), \operatorname{Im} f(p) \in \mathbb{Q}$. Veamos que si U es un abierto en S, existe un arco $\gamma : [a,b] \longrightarrow S$ tal que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) \in U$ y $\gamma \circ f$ es una poligonal con vértices de coordenadas racionales.

En efecto, existe un arco $\theta : [a,b] \longrightarrow S$ que une p con un punto de U. Podemos suponer que $\theta \circ f$ no pasa por ∞. Para cada $t \in [a,b]$ existe un abierto U_t en S tal que $\theta(t) \in U_t$, la función f es inyectiva en U_t y $f[U_t] = D(f(\theta(t)), r_t)$.

Por compacidad encontramos números reales $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de modo que cada U_{t_i} corte al abierto anterior y al siguiente.

Escogemos un punto $p_1 \in U_{t_0} \cap U_{t_1}$ tal que $f(p_1)$ tenga coordenadas racionales. La inversa de $f|_{U_{t_0}}$ transforma el segmento $[f(a), f(p_1)]$ en un arco γ_1 que une p con p_1 y tal que $\gamma_1 \circ f = [f(a), f(p_1)]$.

Similarmente, tomamos $p_2 \in U_{t_1} \cap U_{t_2}$ tal que $f(p_2)$ tenga coordenadas racionales y prolongamos γ_1 hasta un arco γ_2. De este modo llegamos hasta el arco γ que buscábamos. Reparametrizando γ podemos exigir que si $\gamma \circ f$ tiene $n+1$ vértices $q_0, \ldots, q_n$, entonces su dominio es $[0,n]$ y $(\gamma \circ f)(k+t) = (1-t)q_k + q_{k+1}$, para $k = 0, \ldots, n$ y $t \in [0,1]$.

La inyectividad local de f implica que si $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow S$ son arcos tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1 \circ f = \gamma_2 \circ f$ entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

Esto implica que sólo hay una cantidad numerable de arcos $\gamma : [0, n] \longrightarrow S$ tales que $\gamma(0) = p$ y $\gamma \circ f$ es una poligonal cuyos vértices tienen coordenadas racionales y parametrizada como hemos indicado. Los extremos de tales arcos son un subconjunto denso numerable en S. ∎

Tenemos, pues, que las superficies de Riemann son espacios topológicos localmente compactos y con una base numerable. Es conocido que esto implica que son espacios metrizables.[1]

[1]Todo espacio localmente compacto es completamente regular, y todo espacio completamente regular se sumerge en un producto de tantas copias del intervalo $[0, 1]$ como abiertos tiene una cualquiera de sus bases. El producto de una cantidad numerable de intervalos es un espacio metrizable.

Bibliografía

[1] Apostol, T.M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Ed. Reverté, Barcelona, 1984.

[2] Burckel, R.B. *An introduction to classical complex analysis.* Academic Press, New York, 1979.

[3] Conway, J.B. *Functions of one complex variable.* Springer, New York, 1978.

[4] Edwards, H.M. *Riemann's zeta function.* Academic Press, New York, 1975.

[5] Lang, S. *Algebraic Number Theory.* Addison Wesley, Massachussetts, 1970.

[6] López Fdez. Asenjo, F., Galindo Soto, F. y Tristán Vega, L.A. *Funciones analíticas multiformes.* Universidad de Valladolid, 1996.

[7] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas.* Editorial Mir, Moscú, 1978.

[8] Nevanlina, R. y Paatero, V. *Introduction to complex analysis.* Addison Wesley, Massachussetts, 1968.

[9] Pierpont, *Functions of a complex variable.* Dover, New York, 1914.

[10] Remmert, R. *Wielandt's theorem about the* Γ*-function.* Amer. Math. Monthly, 103. 3 (1996) 214-220.

[11] Rudin, W. *Análisis real y complejo.* Mc. Graw Hill, Madrid, 1988.

Índice de Materias

abcisa de convergencia, 163
    absoluta, 164
acotado (conjunto), 75, 266
algebraica (función), 397
anillo, 122
arbitrariamente prolongable (función), 367
arco
    derivable, 18
    derivable a trozos, 19
arco seno, coseno, tangente, 12
arcos equivalentes, 20
argumento, 2
armónica (función), 256

barrera, 274
Bernoulli
    números de, 102
    polinomios de, 103

carta, 376, 378
carácter, 188
    inducido, 318
    modular, 190
    primitivo, 318
    principal, 188
Cauchy
    desigualdades de, 68
    fórmulas integrales, 113
        para circunferencias, 47
    producto de, 51
Cauchy-Riemann (ecuaciones de), 28
cero trivial (de la función dseta), 310
ciclo, 112
completa (función), 366
configuración analítica, 397
conforme
    transformación, 325, 378
conjugación, 2
convergencia
    casi uniforme, 57
    puntual, 56
    uniforme, 57
convexo, 42
convolución de Dirichlet, 173
coseno, 7
curva, 39
    semiabierta, 335

de una función multiforme, 372
derivable (función), 26
    en infinito, 31
derivación, 388
derivada, 26
    de una función aritmética, 176
determinación
    de una función multiforme, 365
    del argumento, 22
    del logaritmo, 23
Dirichlet
    dominio de, 261
    problema de, 261
disco, 2
diámetro, 42
dominio, 332
    de Dirichlet, 261
    de Jordan, 358

ecuación funcional (de la función dseta), 307
entera (función), 66
entorno reducido, 125
envolvente superior, 273, 414
esfera de Riemann, 2

estructura analítica, 376
Euler (constante de), 56
exponencial, 3
exponente de convergencia, 285

factores de Weierstrass, 95
familia de Perron, 272, 414
forma diferencial, 390
  holomorfa, 391
fórmula
  de duplicación, 154
  de Hurwitz, 306
  de Poisson, 261, 264
  de Wallis, 90
función
  dseta de Hurwitz, 299
  algebraica, 397
  arbitrariamente prolongable, 367
  aritmética, 169
    completamente multiplicativa, 170
    multiplicativa, 170
  de Euler, 176
  de Liouville, 176
  de Mangoldt, 177
  de Möbius, 174
  dseta de Hurwitz, 303
  dseta de Riemann, 163
  exponencial
    de base arbitraria, 7
  factorial, 146, 147
  harmónica, 256, 413
  holomorfa, 29, 377
    en infinito, 31
    multiforme, 366
    sobre un arco, 362
  L, 190
  meromorfa
    multiforme, 365
    sobre un arco, 362
  potencia k-ésima, 175
  potencial, 8
  subharmónica/ superharmónica, 268, 413
  trigonométrica, 139
  zeta de Jacobi, 312

germen
  de función meromorfa, 381
  generalizado, 395
  regular, 395
grupo dual, 188

harmónica (función), 256, 413
hipótesis de Riemann, 210
holomorfa (función), 29, 377
  en infinito, 31
  sobre un arco, 362
holomorfa (función) multiforme, 366
homotopía
  de arcos, 343
  de funciones, 348

índice, 22
  de un ciclo, 112
integral
  curvilínea, 34
  de Dirichlet, 115
  de Fresnel, 25
  de Poisson, 152
  logarítmica, 195
  paramétrica, 37

Jensen (fórmula de), 286
Jordan (curva de), 342

laplaciano, 256
ley de reciprocidad cuadrática, 246
logaritmo, 5
longitud
  de un arco, 18
  de un ciclo, 112
límite superior, 63

meromorfa (función), 132
  multiforme, 365
  sobre un arco, 362
Möbius (transformación de), 8
modificación de Poisson, 272, 414
módulo, 2

orden
  de crecimiento, 280
  de un cero, 92

de una aplicación propia, 400
de una singularidad, 126

parte real/imaginaria, 1
periódica (función), 133
plano tangente, 388
Poisson
fórmula de, 261, 264
integral de, 262
núcleo de, 262
poligonal, 18
polinomio triginométrico, 139
polo, 128
Principio
de monodromía, 370
de prolongación analítica, 69, 70, 378
de prolongación harmónica, 259, 414
del argumento, 237
del máximo, 270, 413
del máximo/del mínimo, 260
del mínimo, 271
del módulo máximo, 70
prolongación analítica, 364
por un arco, 363
propia (aplicación), 397
punto
crítico, 399
de ramificación, 372
regular, 369

radio de convergencia, 63
rama, 369
uniforme, 6
rango
de un arco, 17
de un ciclo, 112
raíces, 8
Regla de la cadena, 28
regular (punto), 369
relaciones de ortogonalidad, 189
residuo, 217
resto cuadrático, 244
Riemann-Lebesgue (lema), 200

segmento, 18
seno, 7
serie, 50
de Dirichlet, 160
de Fourier, 135
de Laurent, 122
de potencias, 62
de Taylor, 65
simple (punto), 339
simplemente conexo (abierto), 117
simétrico (punto), 328
singularidad
aislada, 121, 369
algebraica, 396
esencial, 130
evitable, 127
Stirling (fórmula de), 106, 156
subharmónica (función), 268, 413
suma de Gauss, 319
cuadrática, 247
superficie
de gérmenes, 382
de una función, 383
de Riemann, 377
de una función, 384
superharmónica (función), 268, 413

tangente, 7
Teorema
de Abel, 160
de Bloch, 292
de Borel, 289
de Casorati-Weierstrass, 130
de Cauchy, 47
para ciclos, 113
para triángulos, 43
de clasificación de singularidades, 131
de Dirichlet, 184
de Fatou, 72
de Hadamard, 287
de Harnack, 266
de Hurwitz, 243
de Jordan, 342, 359
de la aplicación abierta, 241, 378
de la función compuesta, 28
de la función inversa, 29, 242

de Lindelöf, 340
de Liouville, 68, 379
de los números primos, 196
de los residuos, 217
de Montel, 75
de Montel-Caratheodory, 296
de Osgood-Taylor-Carathéodory, 340
de Picard, 132, 284, 294, 297
de Poicaré-Volterra, 365
de Riemann, 332
de Rouché, 239
de Runge, 140, 143
de Schottky, 295
de Tietze, 346
de Weierstrass, 97
del valor medio, 259
fundamental del álgebra, 69
Tauberiano de Ikehara, 202
triángulo, 41

Wallis (fórmula de), 90