Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 11

Polinomios ortogonales

versión preliminar 3.3-25 noviembre 2002

11.1. Definiciones

Definición 11.1 *Sean $f,\ g \in \mathcal{C}\,[a,b]$ y sea $p(x) > 0$ continua en el intervalo $[a,b]$. Definimos el producto interno de f y g con función de peso p de la forma siguiente:*

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)p(x)\, dx \ . \tag{11.1}$$

Definición 11.2 *Sean $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ un conjunto de polinomios reales, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. El conjunto $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ forma un sistema ortogonal de polinomios con la función de peso $p(x)$ si*

$$\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{nm} A_m \ . \tag{11.2}$$

11.2. Teoremas

Teorema 11.1 Sean $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ polinomios ortogonales en $[a,b]$ con la función de peso $p(x)$. Sea Q_k un polinomio cualquiera de grado k. Entonces $P_n(x)$ es ortogonal a Q_k si $n > k$.

Demostración Escribamos el polinomio $Q_k(x)$ como sigue

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu x^\nu \ .$$

Podemos escribir los x^ν como combinación de los polinomios $P_n(x)$,

$$x^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) \ , \qquad \text{con } b_\mu \propto \langle x^\nu, P_\mu\rangle \ ,$$

por lo tanto,

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) \ ,$$

$$\langle P_n, Q_k \rangle = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu \langle P_n, P_\mu \rangle = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu A_\mu \delta_{n\mu} = 0 \ , \qquad \text{si } n > k.$$

q.e.d.

Teorema 11.2 Los ceros de los polinomios ortogonales son reales y simples.

Demostración Consideremos el polinomio $P_{n+1}(x)$ que tiene $n+1$ raíces. Por el teorema anterior

$$\langle Q_k, P_{n+1} \rangle = \int_a^b Q_k^*(x) P_{n+1}(x) p(x) \, dx = 0 \qquad \forall \, k \leq n \ .$$

Supongamos que $P_{n+1}(x)$ no tiene raíces reales en $[a, b]$. Al considerar $Q_k = 1$ obtenemos

$$\int_a^b 1 \times P_{n+1}(x) p(x) \, dx \neq 0 \ .$$

Esto contradice lo anterior, lo que significa que P_{n+1} tiene por lo menos una raíz en $[a, b]$. Sea α esa raíz. Podemos factorizar P_{n+1} como

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha) S_n(x).$$

Si $n \geq 1$ se debe tomar $Q_k = (x - \alpha)$, y como por un lado debe cumplirse

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = 0 \ ,$$

y por otro lado, de (11.1),

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = \int_a^b (x - \alpha)^2 S_n(x) p(x) \, dx \neq 0$$

si $S_n(x)$ no tiene una raíz en $[a, b]$, hay nuevamente contradicción. Por lo tanto, $S_n(x)$ tiene por lo menos una raíz en $[a, b]$. Siguiendo con este procedimiento encontramos que $P_{n+1}(x)$ tiene $n+1$ raíces reales.

Nos falta demostrar que las raíces son simples. Sea $x = \alpha$ una raíz no simple, es decir,

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) \ , \qquad \text{con } m \geq 2 \ .$$

Si m es par, sea $Q_k(x) = S_{n+1-m}(x)$.

Si m es impar, sea $Q_k(x) = (x - \alpha) S_{n+1-m}(x)$.

Supongamos que m es impar por simplicidad (si m es par la demostración es análoga), entonces

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, Q_k \rangle &= \int_a^b (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) (x - \alpha) S_{n+1-m}(x) \, p(x) \, dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^{m+1} \left[S_{n+1-m}(x) \right]^2 \, p(x) \, dx \neq 0 \ , \end{aligned}$$

distinta de cero porque cada factor de la función subintegral es positivo, en los dos primeros casos por ser las potencias pares y en el último por definición de $p(x)$. Por otra parte, grado$[Q_k(x)] = n+1-m+1 = (n+1)-(m-1) < n+1$, lo cual significa que

$$\langle P_{n+1}, Q_k \rangle = 0 \ . \qquad\qquad \Rightarrow\Leftarrow$$

Por lo tanto, las raíces deben ser simples.

q.e.d.

Teorema 11.3 Teorema de unicidad (sin demostración)

Si $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ son dos conjuntos de polinomios ortogonales que satisfacen la misma relación de ortogonalidad en $[a,b]$, entonces son iguales. Es decir, si

$$\int_a^b P_n^*(x)P_m(x)p(x)\,dx = \int_a^b Q_n^*(x)Q_m(x)p(x)\,dx \Longrightarrow P_n(x) = Q_n(x) \ .$$

11.3. Relación de recurrencia

Sea $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ un conjunto de polinomios ortogonales. Se tiene

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \cdots \tag{11.3a}$$

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + \cdots \tag{11.3b}$$

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^{n} + c_{n+1} x^{n-1} + \cdots \ . \tag{11.3c}$$

Luego se puede escribir

$$xP_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \beta_{nj} P_j(x) = \beta_{n0}P_0 + \beta_{n1}P_1 + \cdots + \beta_{n\,n+1}P_{n+1} \ ,$$

donde, si suponemos adicionalmente que los $P_n(x)$ están normalizados,

$$\beta_{nj} = \int_a^b p(x)xP_n(x)P_j^*(x)\,dx = \beta_{jn}^* \ . \tag{11.4}$$

Vemos que $\beta_{nj} \neq 0$ sólo si $n = j, j-1, j+1$, luego

$$xP_n(x) = \beta_{n\,n+1}P_{n+1}(x) + \beta_{n\,n}P_n(x) + \beta_{n\,n-1}P_{n-1}(x) \ . \tag{11.5}$$

Reemplazando (11.3) en (11.5) y comparando potencias, obtenemos para los coeficientes

$$\beta_{n\,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \ , \qquad \beta_{n\,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \ , \qquad \beta_{n-1\,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \ .$$

[$\beta_{n\,n+1}$ y $\beta_{n\,n}$ se obtienen fácilmente de (11.5); $\beta_{n-1\,n}$ se obtiene simplemente desplazando en 1 los subíndices para $\beta_{n\,n+1}$, lo cual permite obtener $\beta_{n\,n-1}$ por la simetría (11.4).] Reemplazando en (11.5) estos resultados, tenemos finalmente

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}}P_{n+1}(x) + \left[\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - x\right]P_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}P_{n-1}(x) = 0} \tag{11.6}$$