

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15.Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151
16.Ecuaciones diferenciales del tipo...	155
16.1. Soluciones en puntos regulares	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares	159
16.3. Singularidades en infinito	167
16.4. Ejemplos	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas	171
17.Funciones hipergeométricas	177
17.1. La ecuación hipergeométrica general	177
17.2. Ecuación indicial	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss	179
17.4. La serie hipergeométrica	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente	183
18.Polinomios de Legendre	183
18.1. Función generatriz	183
18.2. Relaciones de recurrencia	185
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$	186
18.4. Fórmula de Rodrigues	187
18.5. Ecuación diferencial de Legendre	188
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$	188
18.7. Relación de ortogonalidad	189
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$	190
18.9. Serie de Legendre	192
18.10 Funciones asociadas de Legendre	194
18.11 Armónicos esféricos	197
18.12 Segunda solución de la ecuación de Legendre	199
18.13 Problema de Sturm-Liouville asociado	204
19.La ecuación diferencial de Bessel	205
19.1. La ecuación diferencial de Bessel	205
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero	206
19.3. Funciones de Bessel de índice entero	207
19.4. Función generatriz	209
19.5. Fórmulas de adición	209
19.6. Representaciones integrales	211
19.7. Relaciones de recurrencia	212
19.8. Relaciones de ortogonalidad	213

20. Diversos tipos de funciones cilíndricas	217
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel	217
20.2. Funciones de Hankel	219

Capítulo 11

Polinomios ortogonales

versión preliminar 3.3-25 noviembre 2002

11.1. Definiciones

Definición 11.1 Sean $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ y sea $p(x) > 0$ continua en el intervalo $[a, b]$. Definimos el producto interno de f y g con función de peso p de la forma siguiente:

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)p(x) dx . \quad (11.1)$$

Definición 11.2 Sean $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ un conjunto de polinomios reales, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n . El conjunto $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ forma un sistema ortogonal de polinomios con la función de peso $p(x)$ si

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{nm} A_m . \quad (11.2)$$

11.2. Teoremas

Teorema 11.1 Sean $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ polinomios ortogonales en $[a, b]$ con la función de peso $p(x)$. Sea Q_k un polinomio cualquiera de grado k . Entonces $P_n(x)$ es ortogonal a Q_k si $n > k$.

Demostración Escribamos el polinomio $Q_k(x)$ como sigue

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu x^\nu .$$

Podemos escribir los x^ν como combinación de los polinomios $P_n(x)$,

$$x^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) , \quad \text{con } b_\mu \propto \langle x^\nu, P_\mu \rangle ,$$

por lo tanto,

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) ,$$

$$\langle P_n, Q_k \rangle = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu \langle P_n, P_\mu \rangle = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu A_\mu \delta_{n\mu} = 0 , \quad \text{si } n > k .$$

q.e.d.

Teorema 11.2 Los ceros de los polinomios ortogonales son reales y simples.

Demostración Consideremos el polinomio $P_{n+1}(x)$ que tiene $n + 1$ raíces. Por el teorema anterior

$$\langle Q_k, P_{n+1} \rangle = \int_a^b Q_k^*(x) P_{n+1}(x) p(x) dx = 0 \quad \forall k \leq n .$$

Supongamos que $P_{n+1}(x)$ no tiene raíces reales en $[a, b]$. Al considerar $Q_k = 1$ obtenemos

$$\int_a^b 1 \times P_{n+1}(x) p(x) dx \neq 0 .$$

Esto contradice lo anterior, lo que significa que P_{n+1} tiene por lo menos una raíz en $[a, b]$. Sea α esa raíz. Podemos factorizar P_{n+1} como

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha) S_n(x) .$$

Si $n \geq 1$ se debe tomar $Q_k = (x - \alpha)$, y como por un lado debe cumplirse

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = 0 ,$$

y por otro lado, de (11.1),

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = \int_a^b (x - \alpha)^2 S_n(x) p(x) dx \neq 0$$

si $S_n(x)$ no tiene una raíz en $[a, b]$, hay nuevamente contradicción. Por lo tanto, $S_n(x)$ tiene por lo menos una raíz en $[a, b]$. Siguiendo con este procedimiento encontramos que $P_{n+1}(x)$ tiene $n + 1$ raíces reales.

Nos falta demostrar que las raíces son simples. Sea $x = \alpha$ una raíz no simple, es decir,

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) , \quad \text{con } m \geq 2 .$$

Si m es par, sea $Q_k(x) = S_{n+1-m}(x)$.

Si m es impar, sea $Q_k(x) = (x - \alpha) S_{n+1-m}(x)$.

Supongamos que m es impar por simplicidad (si m es par la demostración es análoga), entonces

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, Q_k \rangle &= \int_a^b (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) (x - \alpha) S_{n+1-m}(x) p(x) dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^{m+1} [S_{n+1-m}(x)]^2 p(x) dx \neq 0 , \end{aligned}$$

distinta de cero porque cada factor de la función subintegral es positivo, en los dos primeros casos por ser las potencias pares y en el último por definición de $p(x)$. Por otra parte, $\text{grado}[Q_k(x)] = n + 1 - m + 1 = (n + 1) - (m - 1) < n + 1$, lo cual significa que

$$\langle P_{n+1}, Q_k \rangle = 0 . \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Por lo tanto, las raíces deben ser simples.

q.e.d.

Teorema 11.3 Teorema de unicidad (sin demostración)

Si $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ son dos conjuntos de polinomios ortogonales que satisfacen la misma relación de ortogonalidad en $[a, b]$, entonces son iguales. Es decir, si

$$\int_a^b P_n^*(x)P_m(x)p(x) dx = \int_a^b Q_n^*(x)Q_m(x)p(x) dx \implies P_n(x) = Q_n(x) .$$

11.3. Relación de recurrencia

Sea $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ un conjunto de polinomios ortogonales. Se tiene

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \dots \quad (11.3a)$$

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + \dots \quad (11.3b)$$

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + c_{n+1} x^{n-1} + \dots . \quad (11.3c)$$

Luego se puede escribir

$$xP_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \beta_{nj} P_j(x) = \beta_{n0} P_0 + \beta_{n1} P_1 + \dots + \beta_{n,n+1} P_{n+1} ,$$

donde, si suponemos adicionalmente que los $P_n(x)$ están normalizados,

$$\beta_{nj} = \int_a^b p(x) x P_n(x) P_j^*(x) dx = \beta_{jn}^* . \quad (11.4)$$

Vemos que $\beta_{nj} \neq 0$ sólo si $n = j, j - 1, j + 1$, luego

$$xP_n(x) = \beta_{n,n+1} P_{n+1}(x) + \beta_{n,n} P_n(x) + \beta_{n,n-1} P_{n-1}(x) . \quad (11.5)$$

Reemplazando (11.3) en (11.5) y comparando potencias, obtenemos para los coeficientes

$$\beta_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} , \quad \beta_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} , \quad \beta_{n,n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} .$$

[$\beta_{n,n+1}$ y $\beta_{n,n}$ se obtienen fácilmente de (11.5); $\beta_{n,n-1}$ se obtiene simplemente desplazando en 1 los subíndices para $\beta_{n,n+1}$, lo cual permite obtener $\beta_{n,n-1}$ por la simetría (11.4).] Reemplazando en (11.5) estos resultados, tenemos finalmente

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x) + \left[\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - x \right] P_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x) = 0} \quad (11.6)$$