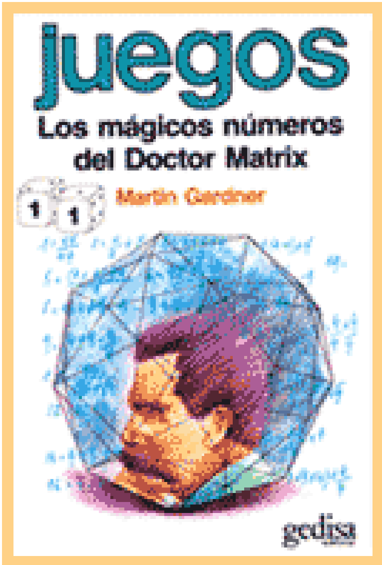
Reseña "Juegos. Los mágicos números del Doctor Matriz. Capítulo:
La belleza matemática de la Gran Pirámide de Keops"
Episteme No. 5 Año 2, Julio-Septiembre 2005
http://www.uvmnet.edu/investigacion/episteme/numero4-05/



Juegos. Los mágicos números del Doctor Matrix
Martin Gardner

Capítulo:
La belleza matemática de la Gran Pirámide de Keops

Resumen

¿Qué tanto conocimiento matemático puede estar "guardado" dentro de un cubo cualquiera? ¿Podemos obtener una obra artística de un cubo cualquiera? Son dos preguntas cuyas respuestas nos proponemos responder en la reseña dedicada tan sólo al capítulo de un libro titulado *Juegos. Los mágicos números del Doctor Matrix*, escrito por el gran divulgador de las matemáticas de origen norteamericano, Martin Gardner. Es de sorprender lo que puede rescatarse de la aparentemente "árida" ciencia matemática cuando un escritor de la talla de Gardner nos motiva a realizar una verdadera obra de arte de un "simple" cubo cualquiera.

Introducción

En éste libro, el autor recorre de manera creativa y motivante muchos aspectos de las matemáticas, cuando narra la vida y obra del Doctor Irving Joshua Matriz, numerólogo de origen japonés radicado en Norteamérica, el cual desconocemos si realmente existió. Hacemos una atenta invitación a leer los libros escritos por Martín Gardner que cambiarán positivamente la actitud hermética o de reserva que generalmente mostramos hacia las matemáticas.

Uno de los grandes misterios de la humanidad es la construcción de la Gran Pirámide de Keops. Muchos investigadores a lo largo de la historia han intentado afanosamente descubrirlo, sin lograrlo hasta la fecha. Ese misterio esconde otro relacionado directamente con la ciencia matemática y a la vez con el arte de la construcción. Nos referimos al llamado número de oro, sección o razón áurea.

Es tan interesante analizar como la misma creación de las pirámides, unió fuertemente dos ramas del conocimiento como son las matemáticas y el arte de la construcción. Iniciamos el artículo con la sección “El parentesco entre arte y ciencia”, describiendo el concepto de arte pero desde el punto de vista de la unión o identificación con la ciencia, así como reflexionando sobre la forma en que pueden estar estrechamente unidos y la manera tan especial en que cada uno depende del otro.

En el siguiente apartado “En busca de la relación entre arte y ciencia”, analizamos desde el enfoque histórico cómo surgió la inquietud de un pueblo por realizar tan magnificas construcciones, describimos brevemente cómo pudo surgir la civilización egipcia, organización y conformación de dinastías cuya duración, aún cuando no las podemos precisar, sabemos que no fue corta, sino por el contrario, perduró muchos siglos.

Después en la sección “Un encuentro entre arte y ciencia. Las pirámides de Egipto”, profundizamos sobre la idea de la grandeza de la pirámide, reproduciendo los comentarios hechos por el historiador Herodoto, quién cuestionaba la motivación de la civilización egipcia a tan ardua tarea, ya sea por el afán de creer en la inmortalidad y rendirle culto, ya sea por el hecho de utilizar conocimientos que ellos aplicaron para poder sobrevivir a un terreno.

Posteriormente y a manera de introducción matemática al estudio de las pirámides, reproducimos la sección “Posiblemente todo se inicie dentro de un cubo”, en la que describimos cómo, a partir de dos cubos cualquiera, es posible crear un modelo a escala de la Gran Pirámide, invitando al lector a su construcción para hacerle vivir la sensación del arte de construir, de hacer arte, para posteriormente iniciar una breve reflexión matemática de ésta pirámide a escala así como de su relación con el cubo.

En la parte dedicada a “La sección áurea y la Gran Pirámide de Keops, analizamos las relaciones matemáticas involucradas dentro y fuera de la Gran Pirámide, que además es el objetivo del presente artículo, y complementa la fuerte relación entre el arte y la ciencia, pues el lector, después de haber construido su modelo a escala, ahora procederá a participar de ésta tarea deductiva de análisis.

Finalmente, abordamos las conclusiones a las que se llegan después de éste ejercicio analítico, planteando finalmente un cuestionamiento que dará pauta para futuros artículos: ¿por qué el sentido de la vista interpreta de forma agradable las obras de arte que guardan en su construcción la llamada razón áurea?

. . . .

El parentesco entre Arte y Ciencia

Una idea interesante de lo que el arte puede significar, es el hecho de percibir todo aquello que se distingue de la naturaleza. El arte y la naturaleza son los aspectos más extensos que concibe la inteligencia humana. Todos los fenómenos del universo los referimos y atribuimos a la naturaleza o al arte.

El concepto -formado por nosotros- de la naturaleza, es indeterminado y variable, por ello y hasta cierto modo, también sucede lo mismo con el concepto de arte. Esta indeterminación o ambigüedad procede, no solamente de que gran número de fenómenos los atribuimos a la naturaleza y otros al arte, sino también de que no limitamos exactamente una cosa por otra; es decir, los fenómenos a que nos referimos cuando decimos arte, nunca están precisa y exactamente deslindados de aquellos otros que tácitamente atribuimos a la naturaleza. [1]

Ha habido en la historia grandes pensadores que trataron en su momento los conceptos de arte y naturaleza. Por ejemplo, John Stuart Mill, quién en un ensayo póstumo establece claras diferencias entre éstos. Dado que la naturaleza es estudiada normalmente por las ciencias, entonces podemos establecer una pregunta sencilla: ¿existe una relación entre el arte y la ciencia?

Después de hablar un poco acerca de las ideas entre naturaleza y arte, observemos ahora las relaciones entre éste último y la ciencia, sólo regulada por el sentido estético. Los pensadores antiguos no tuvieron ideas claras sobre éstos dos conceptos distintos. Cicerón dividía el arte en dos clases: una por cuyo medio las cosas eran contempladas únicamente en el espíritu y otra por la cual las cosas eran producidas. A la primera clase damos hoy el nombre de ciencia y el de arte a la segunda.

Entre el arte, cuyas reglas practicamos, y la ciencia, de la cual tomamos los principios; puede establecerse la diferencia, diciendo que un modo gramatical es propio de las conclusiones científicas y otro modo de las artísticas. La ciencia enumera sus conclusiones con el modo indicativo, mientras que el imperativo es el característico del arte. La ciencia siempre dice, *es*; el arte, *sea*. La ciencia *conoce,* el arte *hace*. La lógica relación entre la ciencia y el arte, puede establecerse diciendo que el arte se propone un fin para alcanzar, define dicho fin y lo entrega a la ciencia.

Esta lo recibe, lo considera como un fenómeno o efecto que debe ser estudiado e, investigando sus causas y condiciones, lo devuelve al arte con un teorema de las causas y combinaciones, mediante las cuales podría ser alcanzado o producido. Examina entonces el arte estas combinaciones de circunstancias y, según están o no en el poder humano, declara si el fin deseado es o no realizable. Por lo tanto, la única premisa que presenta el arte es la premisa original que afirma que la realización de un fin dado es deseable.

La ciencia entonces envía al arte la proposición, obtenida por una serie de deducciones o de inducciones, de que la ejecución de ciertos actos contribuirá a la consecución del fin. De estas premisas deduce el arte que la ejecución de estos actos es deseable y encontrándolas también realizables, convierte el teorema en reglas o preceptos.

Los fundamentos de toda regla de arte se encuentran en los teoremas de la ciencia. Todo arte supone la selección de la parte necesaria de la ciencia para averiguar de qué condiciones dependen los efectos que desea producir. El arte en general se apodera de las verdades de las ciencias ordenadas del modo más conveniente para la práctica, en lugar del orden más propio para la inteligencia.

La ciencia agrupa y ordena sus verdades de manera tal que nos permita, hasta donde sea posible, formar una idea del orden general del universo. El arte, aunque obedece a las mismas leyes generales, las sigue únicamente en aquellas de sus consecuencias que conducen a la formación de reglas de conducta y toma de los campos más distantes de la ciencia las verdades relativas a la producción de las causas diferentes y heterogéneas necesarias para los distintos efectos que desea y necesita producir según las exigencias de la vida práctica.

La ciencia pues, consiste en conocer; el arte, en hacer. Lo que debe hacerse para conocer es arte subordinado o concerniente a la ciencia. Lo que debe saberse para hacer, es ciencia subordinada o concerniente al arte. Entonces, y de acuerdo con lo anterior, arte y ciencia son hermanos inseparables. Toda ciencia supone un arte; todo arte implica una ciencia. La ciencia de la cual no naciera un arte no seria ciencia. Las matemáticas, por ejemplo, son una ciencia; la construcción de bellísimos edificios, un arte científico. Las matemáticas dieron los principios, el arte tomó los que juzgó necesarios y formó un conjunto de reglas para realizar éstas construcciones.

. . . .

Arte y Ciencia en Egipto

Debido a que la relación entre estas dos disciplinas es enorme en tiempo y espacio, ubicamos el punto de partida de nuestro análisis en el legendario y maravilloso imperio del Nilo, la gran cultura egipcia.

Los grandes ríos son la savia de la cultura. El Nilo, el Éufrates, el Tigris, el Hoang–Ho, el Yang-Tse-Kiang y el Indo entre otros. Las primeras sociedades organizadas se formaron en sus orillas. La ciencia, la literatura y el arte nacieron allí. En estas regiones la tierra es muy fértil, pero la única razón de su desenvolvimiento no radica ahí, los hombres han tenido que colaborar en un trabajo común para arrancar los frutos a la tierra.

En cambio, allí donde la naturaleza ofrece de todo a los hombres sin exigirles nada, la humanidad queda estancada en su desenvolvimiento durante miles y miles de años. En las islas de los mares del Sur los hombres todavía se encuentran en la Edad de Piedra, en pleno siglo XXI. El promotor de la cultura es el trabajo que debe realizarse para vencer los obstáculos que opone la naturaleza.

La zona fértil de Egipto no es más que un oasis alargado, nacido de los aluviones depositados por el río. La corriente arranca el limo de las regiones del África central, en donde tiene su nacimiento el Nilo y de las montañas de Etiopía lo lleva hasta Egipto.

Al cabo de varios miles de años de trasiego, los aluviones han extendido su impacto sobre el suelo pedregoso de las orillas y las arenas del desierto. Antes de que el hombre iniciara su irrigación, el valle del Nilo constituía una faja cenagosa y de frondosa selva en donde proliferaba la caza menor.

Los primeros egipcios, aprisionados entre la selva y las arenas estériles del desierto, tuvieron que sanear las marismas y ganar, paso a paso, las tierras de labor. La amplitud de otros trabajos, canales y depósitos de agua, no solamente requería la energía de toda la comunidad, sino también la cooperación en el esfuerzo, es decir, de una sociedad organizada. En los primeros estadios de su evolución cultural, los egipcios ya intuyeron la necesidad de un orden político. Así es como el Nilo proporcionó las bases de la sociedad egipcia.

Esta civilización ha desempeñado un papel tan importante en la historia del mundo que se le imagina sin dificultad, como un país muy extenso. Sin embargo, no es así. Desde la primera catarata hasta el Mediterráneo, el oasis tiene unos 850 Km. de largo, pero, salvo el delta, es extremadamente estrecho. Al este y al oeste, los desiertos le aíslan de todo contacto exterior. En el Alto Egipto estos desiertos rozan con las moradas de los hombres; pero en sus arenales fueron construidos los templos y las tumbas.

En el Bajo Egipto, por el contrario, las tierras fértiles despliegan su abanico hacia el Mediterráneo. La diferencia entre ambas tierras era manifiesta hasta el punto de que los habitantes de cada una no hablaban una lengua en común, dificultando mucho la vida social en aquella época.

El Imperio egipcio nació probablemente de numerosas comunidades urbanas y de distritos campesinos que fueron adhiriéndose. Estos pequeños estados fueron uniéndose y progresivamente formaron dos reinos: El Alto Egipto y el Bajo Egipto. Este estaba constituido por el territorio del Delta; el primero, por las regiones meridionales hasta la primera catarata, cerca de la actual Asuán, inmediatamente al sur de la isla Elefantina.

La frontera entre Egipto y Nubia (Etiopía), como decían los griegos, parecía fijada para siempre en las cercanías de la primera catarata. Los habitantes de la Nubia antigua eran hermanos de raza de los egipcios, los hamitas. El primer rey que unió bajo su cetro al Alto y Bajo Egipto seria Menes, originario del Alto Egipto. No sabemos si este rey fue un personaje histórico o una figura legendaria, si se trata o no del llamado Narmer, ni si la capital, Menfis, conoció un esplendor inmediato.

Actualmente, la opinión más extendida sitúa a Menes hacia el año 3 100 A. J., es decir, hace unos cinco mil años. En la antigüedad, los reyes de Egipto, desde Menes hasta Alejandro Magno, estaban ordenados en treinta dinastías (Alejandro conquistó Egipto en 332 A. J.). Esta clasificación está basada en las listas de reyes dadas por los sacerdotes, que también comprenden los datos de las reinas.

Las 26 dinastías registradas por los sacerdotes comprenden todo el período faraónico propiamente dicho, hasta la conquista de Egipto por los persas en la batalla de Pelusio, en el 525 A. J. La historia de este pueblo puede dividirse en diferentes períodos separados unos de otros ya por una decadencia interior, ya por una dominación extranjera. Para los períodos más antiguos no es posible indicar fechas exactas. [2]

Las 2 primeras dinastías.	3 000 – 2 700 A. J. aprox.
Imperio antiguo. 4 dinastías.	2 700 – 2 185 A. J. aprox.
Primer período intermedio.	2 185 – 2 050 A. J. aprox.
Imperio Medio.	2 050 – 1 800 A. J. aprox.
Segundo período intermedio (hicsos).	1 800 – 1 567 A. J. aprox.
Imperio nuevo (las conquistas).	1 567 – 1 085 A. J. aprox.
Periodo de decadencia.	1 085 - 663 A. J. aprox.
Época saita.	663 - 525 A. J. aprox.

....

Un encuentro entre arte y ciencia. Las pirámides de Egipto

Las pirámides son una de las maravillas del mundo. Las más grandes e impresionantes se levantan a las puertas de El Cairo. La mayor y más famosa fue construida hace casi cinco mil años por el rey Keops. El historiador griego Herodoto, que visitó Egipto hacia mediados del siglo V A. J., cuenta que en su construcción trabajaron 100 000 hombres durante 20 años.

También decía que: “La pirámide fue edificándose de modo que en ésta quedasen una gradas o apoyos que algunos llaman escalas y otros altares. Hecha así desde el principio de la parte inferior, iban levantando y subiendo las piedras, ya labradas, con cierta máquina formada de maderos cortos que, alzándolas desde el suelo, las ponía en el primer orden de gradas, desde el cual con otra máquina que en él tenia prevenida las subían al segundo orden, donde las cargaban sobre otra máquina semejante, prosiguiendo así en subirlas, pues parece que cuantos eran los órdenes de gradas, tantas eran en número las máquinas; o quizá no siendo más que una, fácilmente transportable, la irían mudando de grada en grada, cada vez que la descargasen de la piedra; que bueno es dar de todo diversas explicaciones. Así es que la fachada empezó a pulirse por arriba, bajando después consecutivamente de modo que la parte inferior, que estriba en el mismo suelo, fue la postrera en recibir la última mano. En la pirámide está anotado en letras egipcias cuánto se gastó en rábanos, en cebollas y en ajos para el consumo de peones y oficiales, y recuerdo muy bien que al leérmelo el interprete me dijo que la cuenta ascendía a 1 700 talentos de plata. Y si ello es así, resulta incalculable el gasto que se hizo en herramientas para trabajar y en víveres y vestidos que gastaron en la fábrica de tales obras, sino también aquel, y a mi entender debió ser muy largo, que emplearían así en contar la piedra como en abrir la excavación subterránea”.

El faraón reposaba en su sarcófago en el centro de la imponente mole pétrea o en la arena, bajo los cimientos. Han sido necesarios un gran despliegue de ingenio, sumas enormes y grandes esfuerzos para encontrar y abrir los pasadizos que conducían a las criptas de los reyes.

En las pirámides de fines de la V dinastía y principios de la VI, en las paredes de las cámaras funerarias y de los corredores que conducen a éstas existen unos textos grabados que contienen elementos que ya eran muy antiguos en la época en que fueron compuestos. Pertenecen al mismo período literario que los fragmentos más antiguos del Libro de los Muertos. Sin exagerar, puede asegurarse que ninguna obra humana ha causado tan profunda y duradera impresión como las tres colosales pirámides de Egipto.

En las noches iluminadas por la luna muestran una majestad impresionante. Sus imponentes siluetas se recortan sobre el gris azulado del cielo nocturno; de las arenas del desierto surge la esfinge, el ser enigmático con cabeza humana y cuerpo de león. Hoy se cree que sus rasgos fisonómicos son los del faraón Kefrén. Al pie de las pirámides se siente uno empequeñecido, presa del vértigo. ¡que influencia tan extraordinaria ejerció la creencia en la otra vida sobre la cultura egipcia! ¡que enorme fuerza representa la idea de la inmortalidad para la evolución del hombre!

Figura 1. Sobre el Valle de Gizeh se encuentran las monumentales Pirámides de Egipto

. . . .

Probablemente todo inicie en un cubo

Empecemos el análisis del buscado encuentro entre arte y ciencia (en este caso representados por las matemáticas y la arquitectura egipcia), mencionando el concepto de cubo. En geometría se define al cubo como el poliedro regular de seis caras, que son cuadradas. Además de éstas 6 caras, tiene 8 vértices y 12 aristas. Si a es la longitud de una de sus aristas, su volumen es: $V=a^3$; su área total es: $A=6a$ y cada una de sus diagonales mide: $d=\sqrt{2}$.

Es un sólido limitado por seis caras cuadradas iguales, que son paralelas dos a dos y cada una es perpendicular a sus adyacentes, 8 vértices y 12 aristas que son las rectas de intersección o lados de las caras. Es uno de los 5 sólidos que Platón estudiara a fondo. Al observarle surgen una gran variedad de problemas que hoy pueden considerarse de aplicación didáctica, pero que anteriormente quitaron el sueño a los mejores matemáticos de la época. Un problema clásico es el llamado “duplicación del cubo”, y consiste en la obtención de un cubo de volumen doble que uno dado. La solución del problema es imposible con regla y compás, ya que se utiliza el número π que es un irracional. [3] Un problema muy sencillo consiste en encontrar el valor de la arista de un cubo para que con esa medida el área del cubo sea igual a su volumen. No se requiere mucha deducción para averiguar que el valor buscado es 6 (digamos cm). Al sustituirlo en las fórmulas adecuadas observamos:

$A=6a^2$, es decir, que como el cubo tiene 6 caras, bastará con obtener el área de una de ellas y multiplicar por 6. Sustituyendo: $A=(6)(6^2)=(6)(36)=216cm^2$.

Para el volumen utilizamos la fórmula: $V=a^3$, sustituyendo: $V=6^3=216cm^3$ siendo ambos valores iguales.

Sin embargo proponemos al lector una actividad que resulta interesante. [4] En un día de ocio sugerimos visitar una madererería de esas que a veces nos encontramos sin querer y solicitar nos vendan dos cubos perfectamente bien cortados (el tamaño de la arista dependerá del gusto del lector).

Una vez hecho el trabajo y sin retirarse del lugar, y con ayuda de una regla y una pluma, seleccionaremos un vértice cualquiera del cubo para que a partir de él se tracen tres diagonales sobre tres de sus caras Entonces, solicitaremos a un hábil empleado del lugar realice con mucho cuidado cortes sobre cada diagonal trazada por nosotros, cuidando no rebanar el interior del cubo, para ello le podemos sugerir que lo haga en secuencia, es decir cortando un poco sobre una diagonal, luego un poco sobre la segunda diagonal, y finalmente un poco sobre la tercer diagonal, repitiendo el ciclo hasta que el cubo ceda "aflorándose" sobre uno de sus vértices. (Aunque de preferencia, podemos realizar nosotros mismos la actividad, pues la intención es convertirse en artistas).

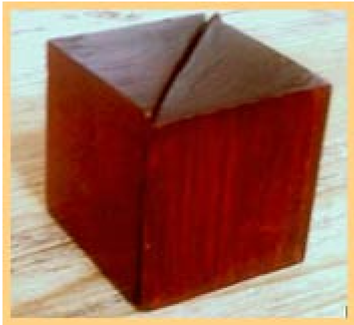


Figura 2. Muestra un cubo de madera de las medidas deseadas por el artista. Apreciamos ya hechos los cortes, mismos que son consecuencia de haber trazado tres diagonales partiendo de un vértice cualquiera escogido previamente.

Como podemos observar en la figura, obtenemos tres pirámides truncadas semejantes al concluir los cortes. A cada pirámide truncada se le ha dado el nombre de yang–ma. Repetiremos esto con el otro cubo. Tendremos finalmente 6 de los llamados yang–ma.

Si observamos con detalle cada sólido obtenido, identificamos dos pares de triángulos rectángulos, un par de ellos son escalenos (todos sus lados desiguales) y el otro par son isósceles (tienen dos lados iguales). El sólido "descansa" sobre una base de forma cuadrada (que es la cara del cubo original). Podemos formar una bonita pieza de rompecabezas tridimensional.

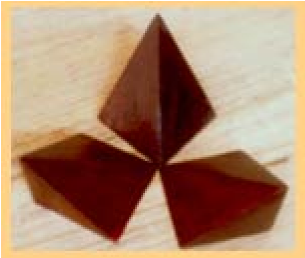


Figura 3. A la izquierda se muestran las 3 pirámides truncadas llamadas yang–ma, obtenidas después de haber hecho cuidadosamente los cortes y permitiendo observar "el interior" del cubo. En el centro, apreciamos un par de triángulos rectángulos escalenos que se encuentran en "el interior" del cubo. A la derecha observamos un par de triángulos rectángulos isósceles que conforman la parte exterior del cubo, pues sus dos catetos son las aristas del cubo y sus hipotenusas, dos diagonales del mismo.

Si pintamos de un color los dos pares de triángulos escalenos de cada pirámide truncada, de otro color los dos pares de triángulos isósceles y el cuadrado, y si armamos nuestro rompecabezas observaremos que los dos pares de triángulos escalenos forman el interior del cubo, mientras que los dos pares de triángulos isósceles y el cuadrado forman la parte exterior del cubo.

Figura 4. Se aprecia un cuadrado que forma parte de la cara del cubo original y una vez ya realizados los cortes ahora también es la base de cada una de las pirámides truncadas obtenidas (yang – ma).

Hasta aquí hemos utilizado los tres yang ma de un cubo, pero ahora utilizaremos 4 de ellos, 3 de un cubo y sólo uno del otro cubo. ¿Para qué?. Formemos ahora cada yang – ma de tal manera que se junten los triángulos isósceles de cada uno de los 4 yang – ma., como si los triángulos rectángulos isósceles quedaran "dentro" del nuevo cuerpo que, seguramente, el lector ya imaginó. El cuerpo formado es ¡una pirámide cuadrangular! muy, pero muy similar a la de Keops obtenida, recuérdese, de dos cubos cualquiera . Se ha construido una réplica que representa de forma muy parecida a la Gran Pirámide. Es un modelo a escala, una construcción que ha requerido de paciencia, destreza y gusto por el arte de la construcción. Con un cuidadoso e ingenioso acabado decorativo, el trabajo se convertirá en una hermosa pieza artística.

Figura 5. A la izquierda se muestra la fotografía de la Gran Pirámide de Keops desde un helicóptero. A la derecha, la réplica de la Gran Pirámide hecha por nosotros a partir de cortar apropiadamente dos cubos cualquiera. Nótese el gran parecido entre ambos cuerpos.

Ahora reflexionemos matemáticamente el modelo (nuestra obra de arte) y así darles la palabra a los dos hermanos narrados al principio, pues hasta este momento ha hablado el arte, (la construcción), faltando la matemática (ciencia pura).

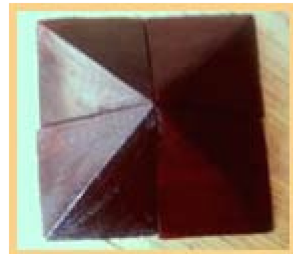


Figura 6. Otras dos vistas de la pirámide hecha a escala. A la izquierda un acercamiento a ella. A la derecha, un toma de "arriba" de dicho modelo. Para armar la pirámide, hay que tomar 4 pirámides truncadas (3 obtenidas de un cubo y una más obtenida de otro), e imaginar que los triángulos rectángulos isósceles son la "espalda" de cada pirámide truncada obtenida. Juntemos entonces "espalda con espalda" los cuatro yang – ma

Sabemos que tenemos 3 pirámides truncadas (yang–ma). Tomemos uno de ellos y separémoslo para nuestro fin. Como ya dijimos éste sólido está formado por un par de triángulos rectángulos isósceles, un par de triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado (Figuras 3 y 4). Ahora le asignaremos el mínimo valor numérico al lado del cuadrado sobre el que descansa el sólido, digamos 1, es decir, que la arista del cubo de donde obtuvimos la pirámide truncada también tiene el valor de 1. Giremos la pirámide truncada de tal forma que un triángulo isósceles quede frente a nosotros. Observamos que los dos lados iguales valen 1 por ser ambos las aristas del cubo. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos fácilmente el valor de la hipotenusa de éste triángulo:

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Ahora giremos 90 grados la pirámide de forma que ésta vez quede frente a nosotros un triángulo rectángulo escaleno. De él conocemos los valores de 2 de sus lados, en realidad de los 2 catetos, pues el más pequeño de ellos vale 1 por ser la arista del cubo y el otro cateto vale $\sqrt{2}$, por ser la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles. Nos falta conocer el valor de la hipotenusa que representa la diagonal mayor del cubo y también la arista que limita dos caras de la escala de la pirámide de Keops. Para conocer su valor, también basta con aplicar el Teorema de Pitágoras, pero con sus valores correspondientes para éste triángulo:

$$c' = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

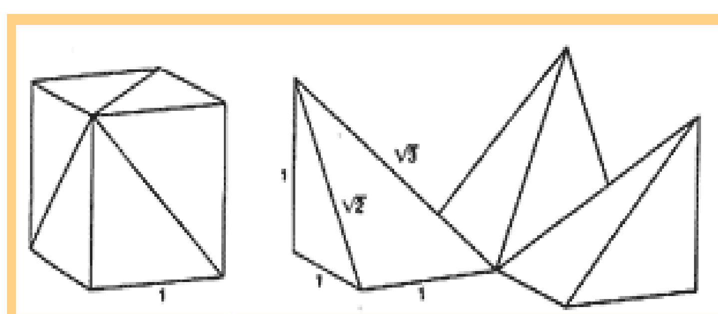


Figura 7. Ilustración de los valores de los catetos de los triángulos rectángulos isósceles y escaleno, cuando la arista del cubo de origen tiene el valor de la unidad. Aplicando el Teorema de Pitágoras, para el triángulo rectángulo isósceles, los valores de sus catetos son 1 y el de la hipotenusa de $\sqrt{2}$. Para el triángulo

rectángulo escaleno los valores de sus catetos son 1 y √2 por lo tanto el valor de su hipotenusa es √3.

Ahora si conocemos los valores mínimos enteros positivos de cada línea que limita las superficies de las figuras que forman el yang–ma. De aquí podríamos suponer algo curioso. Sabemos que por cada yang–ma tenemos dos líneas cuyo valor es √2 y una con valor de √3. Unamos mentalmente dos líneas distintas, una con valor de √2 y otra con valor de √3. Esto equivale a "dibujar" mentalmente una línea a continuación de otra. También equivale a realizar una operación aritmética como la siguiente:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1.41 + 1.73 \cong 3.14$$

Efectivamente, obtenemos un valor aproximado a π (a centésimos, luego). Recordemos qué significa éste valor. Se representa con la letra griega "p", o π significando la razón o cociente entre el diámetro de una circunferencia y el perímetro de ésta. Es decir, que si tomamos el valor del perímetro de toda circunferencia y lo dividimos entre el diámetro correspondiente siempre obtendremos el valor constante de: 3.14159265... lo que significa que si "desdoblamos" una circunferencia hasta convertirse en un segmento de recta, tendrá un valor de 3 veces y un "poquito" más (.14159265...) el valor del diámetro de dicha circunferencia.

En nuestro caso, tenemos un "pi", o sea la "tercera parte de una circunferencia", aproximadamente. Pero como tenemos 3 yang–ma por cada cubo, entonces ¡tenemos 3 veces "pi", es decir una circunferencia dentro de nuestro cubo! pero no la podemos ver, no la percibimos, sin embargo, gracias a las matemáticas, podemos suponer que así es. Claro está que la circunferencia esta "como doblada" dentro de cada cubo que existe en el mundo.

. . . .

Sección Áurea y la Gran Pirámide de Keops

Como ya lo analizamos, la réplica de la pirámide de Keops puede obtenerse a partir de seccionar dos cubos tomando como referencia tres de sus diagonales. También analizamos la hipótesis acerca de que dentro de un cubo está una circunferencia. Ahora analizaremos el objetivo central de éste artículo, la razón dorada en la Gran Pirámide de Keops. Pero ¿qué es la razón o sección dorada? Desde el punto de vista matemático se dice que de un cuadrilátero regular de lados a y b, si éstos lados cumplen la condición:, siendo a el lado mayor, entonces existe una razón dorada. Suponiendo que $b = 1$ obtenemos sustituyendo en la condición un valor de $a = 1.6180$. [5] Aún así es necesario reafirmar esta idea matemática. También se define la razón dorada como "aquel número que aumentado o disminuido de la unidad es igual a su recíproco". Esta expresión traducida al lenguaje algebraico queda:

$$x \pm 1 = \frac{1}{x}$$

Para resolverla, primeramente removemos denominadores:

$$x \pm 1 = \frac{1}{x} \quad \text{(Expresando los enteros en forma de fracción)}$$

$$x \pm 1 = \frac{1}{x} \quad \text{(Incorporando el m.c.m.)} \qquad \frac{x^2 \pm x = 1}{x} \text{(resolviendo la fracción)}$$

Como ya removimos el denominador, la expresión obtenida es:

$$x^2 \pm x = 1$$

Observamos que es una ecuación cuadrática, por ello la expresamos en su forma general simplificada:

$$x^2 \pm x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Para encontrar los valores de la incógnita, aplicaremos la fórmula general de solución de ecuaciones cuadráticas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

Debemos recordar que una vez contando con la fórmula general, lo único por hacer es sustituir los valores de los coeficientes de la variable *x* de la forma general, en la fórmula, sabiendo que la literal *a* de la fórmula está reservada para el coeficiente del término cuadrático, la literal *b* en la fórmula lo está para el coeficiente de la variable lineal, y la literal *c* en la fórmula, lo está para el término independiente.

En nuestro caso, el coeficiente de la variable cuadrática vale *+1*; el coeficiente de la variable lineal, vale ±1; y el coeficiente del término independiente vale *−1*. Se hace la aclaración de que como el término lineal de la ecuación tiene valor de ± 1, en la fórmula podemos escribir el 1 ya sea con signo negativo o positivo, pues el resultado no se alterará, solo habrá diferencia en los signos de las soluciones. (Se deja el ejercicio al lector). Con ello, la sustitución queda:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (4)(1)(-1)}}{(2)(1)}$$

Nótese que escogimos, sin importar, el valor negativo para el término lineal de la ecuación. Resolviendo, tenemos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

De la expresión algebraica (3), encontramos las dos soluciones de la ecuación:

Para x_1: $$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2.236}{2} = \frac{3.236}{2} = 1.6180 \qquad (4)$$

Para x_2: $$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2.236}{2} = -0.6180 \qquad (5)$$

Las expresiones (4) y (5) proporcionan las soluciones de la ecuación propuesta. Observamos que la expresión (4) conserva un valor positivo, mismo que tomamos como una solución apropiada. Aunque en la ecuación (5) el resultado es negativo, tomamos su valor absoluto como solución. Entonces ambos resultados son los valores del número de oro, designado por la letra griega "fi" o Ø

Desde el punto de vista artístico, éste valor cobró mucha importancia entre los arquitectos y artistas griegos en el diseño de sus construcciones y obras de arte, perdiéndose un poco durante el imperio romano y la edad media, volviendo a cobrar fuerza a partir del renacimiento. Por ejemplo, en las construcciones griegas y los cuadros renacentistas, los valores de las expresiones (4) y (5), 1. 6180 y 0.618 estaban plasmados de tal forma que al tratarse de una obra rectangular, el largo debía exceder al ancho en la razón de 1.618, o también 0.618. Es decir, que un lado debía ser mayor que el otro en ese valor, si el ancho media, por decir, 10 metros, el largo debía medir (10)(1.6180) = 16.180 metros, o también (10) (0.618)= 6.18, haciendo por arte de magia que la obra tuviera una belleza especial que aunada a la habilidad del artista, diese como resultado una obra de una belleza inusual, poco común, una belleza "dorada".

Figura 8. Dos grandes obras artísticas humanas. A la izquierda el Partenón (de la época de la Grecia clásica) y a la derecha, el Palacio de El Escorial (de la España renacentista de Felipe II). Ambos monumentos están diseñados con base en la llamada sección dorada, misma que les otorga una belleza irresistible.

Volviendo al análisis de la sección dorada en la pirámide de Keops ésta fue construida sobre la meseta rocosa de Gizeh. Se ha dicho que los arquitectos reales mandaron colocar 325 bloques de piedra formando una hilera y que dispusieron otra en ángulo recto, y dos más para formar la base cuadrada. Llenaron el interior de bloques, dejando algunos huecos para los pasajes, hasta completar un total aproximado de 105,625, para lo que sería el primer nivel. Redujeron el número de bloques para el segundo nivel y sucedió lo mismo con el siguiente, así como el tamaño de las piedras. Al llegar a la punta habían utilizado poco más de dos millones de toneladas, de acuerdo con los expertos.

Eran tantas las piedras que cuando Napoleón Bonaparte contempló el monumento declaró, no sin razón, que podría construirse con éstas un muro de tres metros de alto que podría dar la vuelta a Francia. (Recuérdese que Napoleón se hizo acompañar a sus expediciones hacia Egipto de dos grandes matemáticos franceses, Lagrange y Laplace y que de éste viaje, el primero se interesó en estudiar la propagación del calor).

En la actualidad la Gran Pirámide está truncada, puesto que remata en una plataforma cuadrada de 11.7 metros de lado y no en punta como debió ser en sus orígenes. Esto no sucedió con la pirámide de Kefrén, que sigue aún con su punta prácticamente intacta. La plataforma de Keops se encuentra a 139.4 metros de altura, pero es de suponer que el monumento fue algo más elevado en otros tiempos, porque al pie **se** ven enormes bloques regados sobre la arena. Son los pobladores del lugar los que echaron abajo las piedras con la ayuda de los turistas que querían poner a prueba los músculos o, sencillamente, porque unos y otros eran unos vándalos.

Cuando Plinio el Viejo visitó Egipto, hace unos 20 siglos, halló una plataforma de 4.9 metros de lado. Y mil años más tarde, el árabe Solt El –Andalusí especificaba que sobre la plataforma podrían tenderse, si alguien hallara la forma de hacerlo, ocho camellos de regular tamaño.

En 1842, Gerardo de Nerval, poeta francés de profesión, trepó hasta la cumbre y como resultado de su visita dejó a la posteridad un Viaje a Oriente, tan documentado como divertido. Explicaba en su libro que tuvo la paciencia de contar los niveles de la Gran Pirámide y vio que eran 207. Se han reducido a 203, aunque en la actualidad es poco probable que sigan disminuyendo, pues hay soldados armados que no permiten a los turistas jugar con las piedras. Lo que si es una incógnita en la actualidad, es saber el número exacto de pisos de tan magnifica construcción.

Una hipótesis acerca de éste misterio es la propuesta hecha por algunos investigadores, que insisten en escribir los cuatro primeros números primos y multiplicarlos entre sí: (2) (3) (5) (7) = 210. Valor hipotético que da una idea del número de niveles. Con éste dato se supone que la altura original debió aproximarse a 143.5 metros en lugar de los 139.4 metros que conocemos actualmente.

En cuanto a los lados de la base, no existe la menor duda de que han cambiado sensiblemente al paso de los milenios, a causa de los deterioros sufridos. El lado que corresponde a la cara norte tiene en la actualidad 230.35 metros y la del sur, 230.40 metros. La cara este mide 230.40 metros y la oeste, 230.36 metros. La diferencia entre las caras es prácticamente nula, de apenas $\frac{1}{10000}$de metro. Es de suponerse que este margen de error no existía cuando las cuatro caras tenían aún su revestimiento de caliza.

Aún en nuestros días podemos observar importantes relaciones matemáticas en la Gran Pirámide, sobretodo con la constante π. Algunos investigadores sostienen que éste valor corresponde a la suma de los valores de los cuatro lados de la base y dividiendo ese resultado por el doble de la altura. No importando que las unidades de medida sean metros, yardas o codos piramidales, que sirvieron de unidad a los arquitectos egipcios. (El valor del codo piramidal es de 63.57 cm. Según Piazzi Smith).

De éstos análisis también se sugiere que Pitágoras conoció el valor de π, siendo de $\frac{22}{7}$ llevándolo consigo a Grecia. Otro gran estudioso de las matemáticas egipcias, Flinders Petrie, dedujo que cada lado de la base de la pirámide media 400 codos, la altura, 280 codos, deduciendo que la medida del codo debía ser de 52.37 cm.

Un tercer valor, propuesto por Al- Mamún, califa de El Cairo, a fines del siglo IX de la era cristiana, quién sugirió que el codo podría ser el $\frac{1}{400}$del lado de la base, siendo aproximadamente un poco menos de 58 cm. Regresando al valor de πel Papiro de Rhind menciona que es posible encontrar la superficie de un círculo, elevando al cuadrado los $\frac{8}{9}$ de su diámetro, fórmula que concedía a πel valor de 3.1605. Ese mismo documento contenía la fórmula rápida para calcular la altura de una pirámide partiendo de un lado de la base y la inclinación de sus caras.

Detallando ésta última fórmula, deducimos que los matemáticos egipcios tenían una idea muy aproximada del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. (Funciones trigonométricas de la actualidad). De acuerdo a esos datos la inclinación de la Gran Pirámide es de 51 0 51'.

Con ayuda de la calculadora observamos que el valor de la cotangente de ese ángulo es: 0.785. Recuérdese que la cotangente es el resultado de dividir, en un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 51 0 51' el valor del cateto adyacente por el valor del cateto opuesto. Pues bien, el valor de dicha cotangente, 0.785 multiplicado por el número de caras de la pirámide (4) se obtiene un valor asombrosamente cercano a π: (0.785) (4) = 3.1420.

Ahora, ya le toca hacerse presente al número de oro en la Gran Pirámide. El valor del coseno del ángulo 51 0 51' es 0.6180 mientras que el de su recíproco, es decir de la cosecante (tal y como lo propone el planteamiento del problema que se resuelve a través de una ecuación de segundo grado), es de 1.6180.

A la altura del nivel 15 se abre la entrada principal a la pirámide, largo tiempo disimulada entre los bloques y que posee algunos detalles curiosos. Uno de éstos es que no se encuentra en la apotema de la cara, sino ligeramente desviada. En el dintel puede observarse la inscripción que mandó grabar Lepsius en honor de su soberano y que carece de importancia. Mucho más interesante es cierto tetragrama conocido como el Ojo del Horizonte o Signo del Horizonte. Afirman muchos investigadores que en el tetragrama reside el verdadero misterio de la construcción y encierra la clave de sus enigmas. Otro enigma matemático lo ofrece el pasaje descendente, cuya inclinación es de 26 0 34' con respecto al plano de la base.

Para darse cuenta de una posible hipótesis de el por qué esta inclinación, hagamos lo siguiente con la calculadora: Dividamos 34 por 60 para transformar los minutos a fracción decimal, es decir que en lugar de teclear 26 0 34', tecleo 26.5666666, (pues la calculadora manejará más efectivamente éste dato), enseguida presiono la tecla “tan”, y obtengo 0.500035, es decir hemos obtenido el valor de la tangente de ese ángulo, por último presiono la tecla correspondiente a “ *1/x* ” para encontrar su recíproco, (como lo menciona el planteamiento de la ecuación de segundo grado analizada), y obtengo 1.9999859, es decir, una gran aproximación al número 2, primer numero primo.

Volviendo a nuestro “recorrido” por el interior de la Gran Pirámide, el pasaje penetra hasta alcanzar una longitud de 97.25 metros y viene a desembocar, después de un tramo horizontal, en la misteriosa Cámara del Caos, que tiene su equivalente en la pirámide del Sol, en Teotihuacan.

Dicho pasaje descendente tiene una particularidad que ha permitido a diversos astrónomos aficionados al tema calcular la fecha probable en que fue construida la Gran Pirámide. Se ha descubierto que el pasaje está orientado a una estrella. Colocándose en el extremo inferior del pasaje descendente y mirando hacia el extremo superior, percibimos la estrella de Alfa Dragón. Aunque se ha establecido la hipótesis de que originalmente debió apuntar directamente hacia la Estrella Polar. Por ello es que se presume que éste magnifico monumento debió construirse hacia el año 2,700 A. J.

En la entrada principal se abre otro pasaje, este ascendente, con la misma inclinación que el descendente: 26 0 34' Después de recorrer 37.49 metros en extremo incómodos, se abren tres caminos. Uno es el que debieron tomar los obreros al llegar a su fin los trabajos, para abandonar el lugar. El otro pasaje es horizontal. Tiene una longitud de 39.29 metros y llega a la Cámara de la Reina, donde Flinders Petrie trató de definir la relación que pudo tener con la transferencia del alma del faraón. La tercera vía asciende ligeramente para convertirse en la Gran Galería y conduce a la cámara más importante del monumento, la Cámara del Rey, que encierra un sarcófago de granito completamente vacío.

Esta cámara posee curiosas dimensiones, basadas en el número 5 y también en $\sqrt{5}$, que son clave para la solución de la ecuación de segundo grado. En el techo hay 5 enormes vigas de piedra, cada una de 70 toneladas aproximadamente, dispuestas por los arquitectos reales para aliviar la enorme presión que pesa sobre la cámara y evitar los derrumbes.

Haga el lector el siguiente experimento: con una hoja tamaño carta, enróllela circularmente, pegue con pequeñas tiras de cinta adhesiva los extremos de la hoja formando una columna de papel. Ahora coloque un cuaderno de cien hojas sobre ella, y observará que no se dobla ni se deforma, a pesar de soportar más de cien veces su propio peso, ahora agregue otro cuaderno y notará que empieza a deformarse, aunque tal vez resista hasta otro cuaderno, depende del tipo de papel, pero deducimos que por lo menos soporta 200 veces su propio peso a pesar de estar hueca. Si rellenamos con papel hecho “bola” el hueco de la hoja, entonces el peso que soporta será mayor, (se deja al lector la estimación de ello). Si una columna vacía resiste cuando menos 200 veces su propio peso, imaginemos la cantidad de presión que pueden resistir cinco enormes columnas de 70 toneladas.

La estimación es: (70) (200) (5) = 70,000 toneladas por lo menos. Dos detalles de esta bóveda llaman la atención. Uno es que aparece en ella una inscripción con el nombre de Khufu, por culpa de la cual se ha atribuido a este Khufu-Keops la paternidad de la gigantesca construcción.

El otro detalle es el hecho de que sean cinco las vigas y también cinco los espacios vacíos entre ellas. Según los expertos son demasiadas vigas, pues con dos de ellas se hubiera obtenido el mismo resultado, (lo que confirma los cálculos de estimación).

También el número 5 aparece en las medidas de la Cámara del Rey, que tiene forma de paralelepípedo. Fue estudiada por Flinders Petrie, quien descubrió la longitud del codo piramidal, valor que confirmara poco después al medir los lados y la altura de la Gran Pirámide.

El lado más largo de esta cámara mide 20 codos, equivalentes a 10.48 metros; su anchura es la mitad de su longitud, es decir 10 codos o aproximadamente 5.24 metros. En cuanto a la altura, es de 5 codos multiplicados por la $\sqrt{5}$ o aproximadamente, 5.85 metros. Más aún, la diagonal de cada una de las caras menores opuestas es de 15 codos, así como la diagonal que une la punta superior de una de esas caras menores con la punta inferior de la otra cara menor mide 25 codos.

De este modo, uniendo ambas puntas, obtenemos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el lado más largo del paralelepípedo y la diagonal de la cara más pequeña. Las medidas de este triángulo rectángulo son 15, 20 y 25 codos exactos. Éste triángulo, que poseía entre los egipcios un valor sagrado, fue llamado isíaco en honor de la diosa Isis.

El plano en que se encuentra la Cámara del Rey posee características muy curiosas que el investigador mencionado dio a conocer: está situado a una distancia relativa de la punta de la pirámide igual a 2 multiplicado por su raíz cuadrada. Además la superficie del plano horizontal donde se encuentra esta cámara es la mitad de la superficie de la base de la pirámide. En consecuencia, la diagonal del cuadrado formado por la sección correspondiente a la cámara es igual a cada uno de los lados de la base del monumento. [6]

Otro investigador serio en el tema, Shwaller Lubicz, por su parte, afirma que si dividimos los 356 codos del apotema de la Pirámide por la mitad de la base, o 220 codos, obtenemos un cociente de $\frac{89}{55}$ = 1.6180. Otra idea de obtener Ø es dividir un segmento de recta como se indica en la figura.

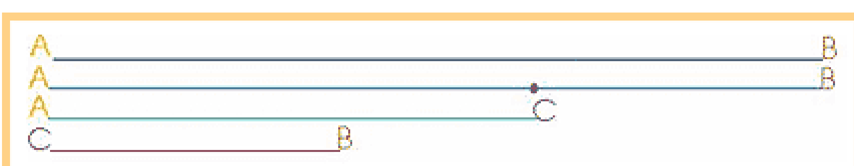


Figura 9. La sección áurea o Ø se obtiene dividiendo el segmento de recta AB en un punto C, de tal forma que el total del segmento de recta (AB) sea mayor que la primera parte (AC), en la misma proporción que la primera parte (AC) sea mayor que el resto (CB).

Esto significa que: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ = 1.6180 = Ø. Es decir, que si tenemos un segmento de recta cualquiera *AB*, y hacemos una división oportuna en el punto *C*, la longitud total del segmento de recta *AB* es proporcional al segmento obtenido *AC*, como este segmento de recta es proporcional al segmento de recta restante *CB*. Esta ecuación aparentemente sencilla, está llena de un profundo significado. Platón llega en su Timeo a considerarla, lo mismo que la proporción resultante de la Sección Áurea, como la más rigurosa de las relaciones matemáticas, y para él, significa la clave de la física del cosmos.

El piso rectangular de la Cámara del Rey (que consta de dos cuadrados iguales juntos, o sea, de un rectángulo de 1 X 2) sirve también para ilustrar y obtener la sección dorada en la Gran Pirámide. Partiendo por la mitad uno de los dos cuadrados y trazando una diagonal hasta su base, el punto en que es tocada por la diagonal será *Ø* o 1.6180 en relación con el lado del cuadrado, que es 1^2. La extraña fórmula matemática, si no única, de $Ø+1=Ø^2$ así como también la de $1+\frac{1}{\phi}$ = *Ø* (otra forma de expresar "aquel número que aumentado o disminuido de la unidad es igual a su recíproco), lleva consigo una serie progresiva, llamada de Fibonacci, en que cada número es la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... y en esta serie observamos que si dividimos un número con su anterior el resultado se aproxima a *Ø*, y mientras más se avance en la serie la razón al número anterior se aproxima cada vez más a $Ø^3$.

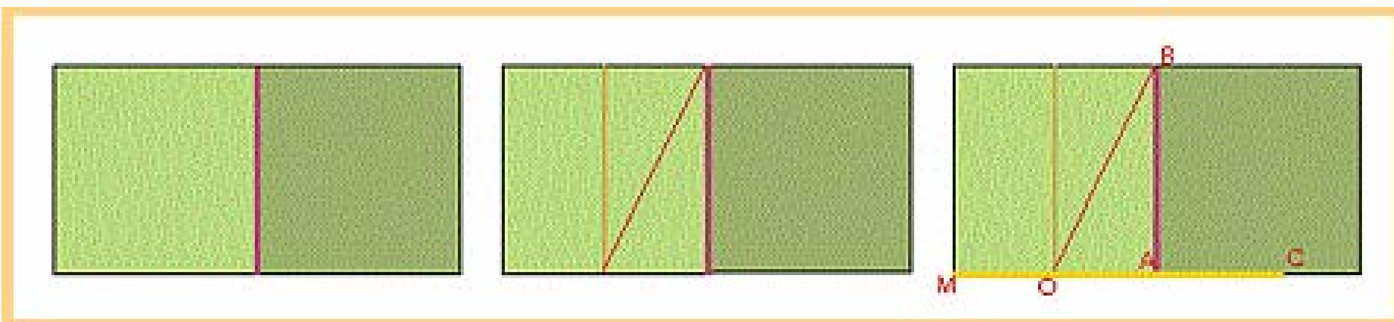


Figura 10. El rectángulo de la izquierda muestra que podemos formar un rectángulo uniendo dos cuadrados. El rectángulo del centro esquematiza la forma en que uno de los cuadrados que lo forman lo dividimos exactamente por la mitad (cuadrado en verde claro). En el rectángulo del extremo derecho se puntualiza que si el lado del cuadrado vale 1, entonces el segmento de recta. OA vale $\frac{1}{2}$*, los segmentos de recta AB y AM, valen 1 por ser lados del cuadrado y la diagonal OB que va del punto medio del lado de un cuadrado a su extremo, así como también el segmento de recta OC (que sólo ha sido trasladado sobre la base del rectángulo), valen* $\frac{\sqrt{5}}{2}$*, por Teorema de Pitágoras, y que el segmento de recta MC (en amarillo) vale* $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1.618$ *ya que el segmento de recta MO vale también ½. Finalmente el segmento de recta AC vale 0.618, pues al segmento de recta MC cuyo valor es 1.618 se le quita el valor del segmento de recta MA que vale 1.*

El teorema de Pitágoras muestra también que: $\phi=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1.6180$ y que además: *Ø*-1=0.6180. Este mismo investigador también encontró pruebas gráficas de que los egipcios del tiempo de los faraones habían obtenido una relación directa entre π y *Ø*:

$$(Ø^2)\left(\frac{6}{5}\right)=(2.6179)(1.2)=3.1515088 \qquad (6)$$

Shwaller de Lubicz encontró también que en la Gran Pirámide, se observa la relación de *Ø* en el triángulo formado por la altura, la mitad de su base y su apotema, o lo que es lo mismo, en la sección básica transversal de la estructura. Estas proporciones crean entre los lados del triángulo una relación tal que, siendo uno la mitad de la base, la apotema es *Ø* y la altura es *√Ø*. En cuanto a ello, este investigador asegura que Herodoto si tuvo razón al decir que el cuadrado de la altura de la Pirámide es *(√Ø)(√Ø)=Ø* y las áreas del lado valen:

(1) (*Ø*) = *Ø*

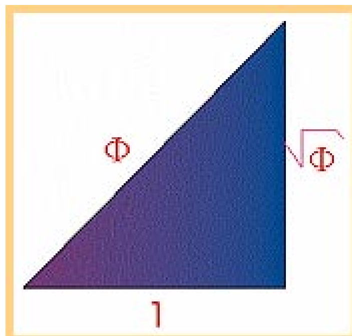


Figura 11. El triángulo rectángulo y el número áureo.

La cuadratura del círculo, uno de los grandes problemas clásicos irresolubles sólo con el uso de la regla y el compás, pues si se emplea necesariamente el número irracional π puede resolverse prácticamente como función del número áureo *Ø*. siendo $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, es decir, que 1.570796 = 1.57023 con aproximación a milésimos, en donde π puede tomar convenientemente el valor de $\frac{4}{\sqrt{\phi}}$ o 3.1446. Como ya se observó, en la ecuación (6) con respecto al valor de π puede utilizarse la serie de Fibonacci para obtener una relación exacta del diámetro de un círculo con su circunferencia, sin tener que recurrir a π.

En dicha serie, los números 21, 34, 55, si se toma 21 como diámetro de un círculo, su circunferencia será igual a $(55)\left(\frac{6}{5}\right) = 66$; si se calcula tradicionalmente utilizando π, tenemos: (21) (π)= 65.97, con aproximación a 3 centésimos. Esta aproximación, como ya dijimos se establece con los $\frac{22}{7} = 3.14285$.

Los números más altos de la serie de Fibonacci van aquilatando cada vez más su valor, hasta una diezmilésima. Si continuamos la serie, por ejemplo hasta ...89, 144, 233, 377, 610 ..., un diámetro de 144 da una circunferencia de: $(377)\left(\frac{6}{5}\right) = 452.4$, o (144) π = 452.389, donde ya el valor de π se aproxima a 3.1415; un diámetro de 233 da una circunferencia de (610) $\left(\frac{6}{5}\right)$ = 732, y (233)(π) = 731.99, pero ya con un valor de π de 3.1416. Y así sucesivamente.

La Pirámide está diseñada de tal manera que, para todos los efectos prácticos realiza la cuadratura del círculo. Se hace la aclaración de que no es el propósito del presente artículo demostrar matemáticamente dicha propuesta, sino sólo mencionarla pues es el resultado de observaciones y conjeturas hechas por investigadores en el tema de las matemáticas egipcias y que de una u otra forma son realmente interesantes. La base de la Pirámide es un cuadrado cuyo perímetro es igual a la circunferencia de un círculo que tenga por radio la altura de la pirámide.

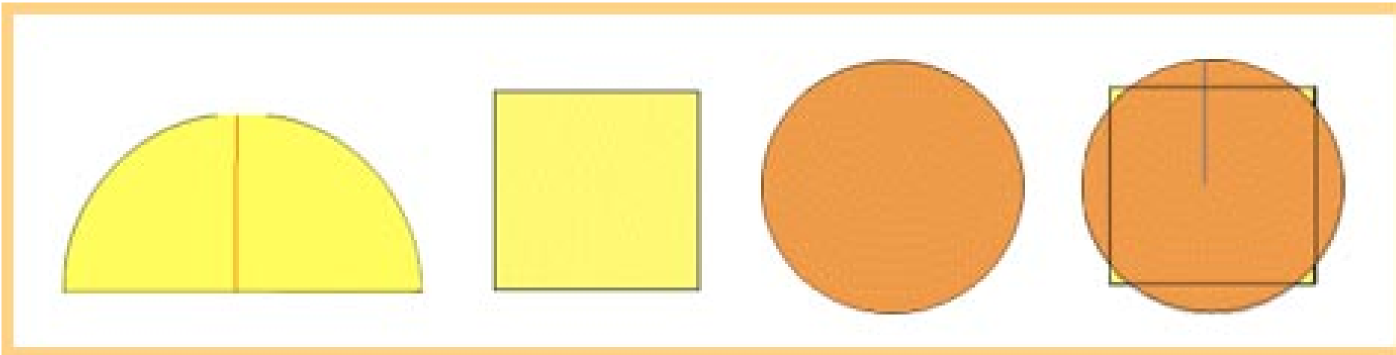


Figura 12. La idea de la cuadratura del círculo a través de la arquitectura de la Gran Pirámide de Egipto, es decir se trata de obtener un círculo cuya área sea congruente con la de un cuadrado. El semicírculo de la extrema izquierda es sólo un punto de referencia para tener una mejor idea de lo que se requiere, además que es clave para obtener una media proporcional a dos segmentos de recta dados. En el centro se observa un cuadrado cuyo perímetro se supone de 1,760 codos, mismos que tiene el círculo puesto que (440) (4) = 1760. En el extremo derecho está sobrepuesto el cuadrado al círculo cuyo radio representa la altura de la Pirámide. Nótese que el cuadrado no está inscrito en el círculo.

Multiplicando por cuatro la base de 440 codos, se obtienen 1,760 codos. El producto de: (280)(2 π) es próximo a 1759.29. Superponiendo el cuadrado al círculo, no solo se obtiene un diagrama interesante sino extraordinariamente útil, formado por el perímetro de la Pirámide y la circunferencia del círculo que representa. Con tres líneas más, se obtiene la sección transversal matemáticamente exacta de la Pirámide de Keops.

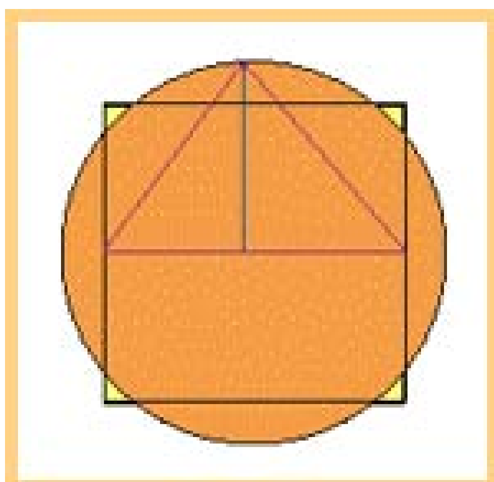


Figura 13. En ésta figura observamos que sólo se han agregado 3 segmentos de recta para formar dos triángulos rectángulos escalenos.

Encerrando el diagrama en otro cuadrado y aplicando la relación de Ø tal como se encuentra en la Pirámide, se obtiene una clave para reducir fácilmente superficies esféricas en planas de la misma área.

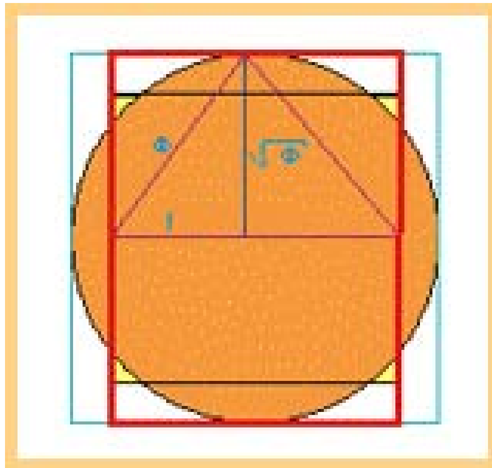


Figura 14. Ahora observamos que toda la figura anterior se ha inscrito en un cuadrado y además se le han dado los valores áureos al triángulo rectángulo. (Recuérdese la figura 8). Entonces, prolongando los lados del cuadrado menor hacia "arriba y abajo", obtenemos un rectángulo (en rojo), cuya área es igual a la del círculo básico (en naranja).

Para obtener un rectángulo de área igual al círculo básico, solo hay que prolongar dos lados del cuadrado menor hasta que toquen los del cuadrado mayor (Figura 11). El área del rectángulo es el producto de multiplicar su longitud por su anchura, es decir:

$$(2\sqrt{\phi})(2) = 4\sqrt{\phi} \qquad (7)$$

De ahí que el área del círculo es πr^2, es decir, $\pi Ø$, en este caso, en que el radio es $\sqrt{Ø}$. Pero como $\pi = \frac{4}{\sqrt{\phi}}$, el área es también *4√Ø*, la misma que la del rectángulo. [7]

Desarrollando las expresiones anteriores tenemos:

$$\pi(\sqrt{\phi})^2 = \pi\phi \qquad (7)$$

pero, $\pi = \frac{4}{\sqrt{\phi}}$ (8) al sustituir ésta en (7), queda:

$\left(\frac{4}{\sqrt{\phi}}\right)(\phi)$, y al racionalizar el denominador en el primer factor, tenemos:

$$\left(\frac{4\sqrt{\phi}}{\phi}\right)(\phi) = 4\sqrt{\phi} \qquad (9)$$

Claro está que queda la pregunta acerca de qué cuadrado de los anteriores es al que igualamos al área del círculo puesto que en éste algoritmo se habla de obtener un área de rectángulo igual a la de un círculo (aunque si ya “rectangulamos” un círculo, es decir, que el área del rectángulo de perímetro en rojo es igual al área del círculo en naranja, entonces sabemos que es posible cuadrar un rectángulo, y por consiguiente el círculo dado (Algoritmo de Hipócrates). [8]

Tal vez, se tenga que recurrir a una perspectiva tridimensional, situación que no se contempla en nuestro artículo. Sin embargo, insistimos, no es el objetivo del presente escrito el discutir ésta propuesta o demostrar si es o no verdadera, puesto que solamente se pretende hacer notar cómo algunos investigadores han tratado de encontrar la respuesta a tan magnifico problema y en nuestro caso utilizando las relaciones matemáticas de la Gran Pirámide de Keops.

Conclusiones

Este artículo pretendió recordar al lector un probable origen del llamado número áureo, vinculado desde luego con el arte de la construcción, pues de no ser así no tendría sentido su aplicación. Se revisaron los trabajos de dos serios investigadores en el tema, apuntando sus opiniones acerca del origen de éste número.

Se sabe que el descubrimiento de esta relación y su incorporación primero a la cultura griega y luego al siglo del gótico y posteriormente al renacimiento, trajo como consecuencia el desarrollo de importantes y bellísimas obras de arte, provocado gracias a la unión entre ciencia y arte.

En el caso de la cultura griega, la construcción del Partenón en la acrópolis ateniense, es un solo botón de la intensa muestra en esta cultura. En el caso del renacimiento lo utilizó Leonardo Da Vinci, otros artistas lo hicieron en trabajos como la “Presentación de la virgen” de Tiziano, “Sueño del niño Jesús” de Luini, “Las bodas de Caná”, de Veronés.

En la España de Felipe II también cae con peso la influencia de éste concepto, cuando el rey del imperio “donde no se pone el sol”, mando construir el magnifico Palacio de El Escorial. Y no termina ahí la relación áurea, pues la naturaleza también “utiliza” dicha relación, por ejemplo, en el crecimiento poblacional de algunas especies, en la conformación morfológica de algunos seres vivientes.

Sin embargo, quedan pendientes muchos cuestionamientos. Uno de ellos, y que es quizá el de mayor curiosidad científica sea el siguiente: ¿por qué son tan agradables al sentido de la vista las obras artísticas que conservan la relación áurea en su diseño? Sabemos que las células encargadas de la transmisión de las señales luminosas exteriores al cerebro tienen cierta disposición a transmitir o transformar esas señales en agradables, cuando estas conservan una relación áurea. ¿Acaso el cuestionamiento va más allá y tengamos que profundizar más todavía, con ayuda de la neurociencia por ejemplo? Por mientras, es un deleite que no podemos evitar al admirar las grandes obras maestras, como la Gran Pirámide de Egipto.

También en el calendario está manifiesta la razón dorada y la serie de Fibonacci. A manera de puente entre ésta colaboración y la siguiente, proponemos el siguiente problema: ¿En qué mes del año se encuentra la serie de Fibonacci con respecto a los otros meses tomando en cuenta una misma fecha? ¿Qué día tienen que nacer las personas o tiene que suceder un acontecimiento para que podamos decir que "ocurrió en el día áureo"?

Las posibles soluciones las expondremos en nuestra próxima intervención.

. . . .

Referencias bibliográficas

[1] Suárez, Inclán Julián. *Diccionario Enciclopédico Hispano – Americano de Literatura, ciencias, artes, etc. Tomo II*. Montaner y Simon. (Barcelona) W. M. Jackson, Inc. (Nueva York) Editores. Perris Printing Company.Nueva York, 1974.
[2] Grimberg, Carl (1987). *Historia Universal. El alba de la civilización.* Tomo I. Editorial Deimon. México.
[3] Espinosa de los Monteros, Julián (2000). *Diccionario de matemáticas.* Editorial Cultural, Madrid.
[4] Gardner, Martín (1989). *Juegos. Los mágicos Números del Doctor Matrix* Editorial Gedisa. México.
[5]Suárez, Inclán Julián. *Diccionario Enciclopédico Hispano – Americano de Literatura, ciencias, artes, etc. Tomo II*. Montaner y Simon. (Barcelona) W. M. Jackson, Inc. (Nueva York) Editores. Perris Printing Company..Nueva York, 1974.
[6] Doreste, Tomás (1989). *Las insólitas profecías de Quetzalcoatl*. Editorial Planeta. México.
[7] Tompkins, Meter (1987). *Secretos de la Gran Pirámide*. Editorial Diana. México.
[8] Dunham, William (1990). *Journey Through Genius. The great Theorems of Matehmatics*. Wiley Science Editions. U.S.A.

. . . .

Bibliografía

Cook, Andrea (1979). *The curves of life* . Dover Edition. New York.
Doreste, Tomás (1989). *Las insólitas profecías de Quetzalcoatl*. Editorial Planeta. México.
Dunham, William (1990). *Journey Through Genius. The great Theorems of Matehmatics*. Wiley Science Editions. U.S.A.
Espinosa de los Monteros, Julián (2000). *Diccionario de matemáticas.* Editorial Cultural, Madrid.
Gardner, Martín (1989). *Juegos. Los mágicos Números del Doctor Matrix* Editorial Gedisa. México.
Ghyka, Matila (1977). *The Geometry of art and life.* Dover Edition. New York.
Gillings, Richard (1972). *Mathematic in the time of the Pharaohs* . Dover Edition. New Yoirk.
Grimberg, Carl (1987). *Historia Universal. El alba de la civilización.* Tomo I. Editorial Deimon. México.
Huntley, H.E. (1970). *The Divine Proportion. A study in mathematical beauty* . Dover edition. Nuew York.
Lawlor, Robert (2003). *Sacred Geometry*. Themes and Hudson Edition. U.S.A.
Livio, Mario (2003). *The golden ratio*. Broadway Books. U.S.A.
Martin, George (1998). *Geometric Constructions.* Springer Verlag Edition. New York.
Suárez, Inclán Julián. *Diccionario Enciclopédico Hispano – Americano de Literatura, ciencias, artes, etc. Tomo II*. Montaner y Simon. (Barcelona) W. M. Jackson, Inc. (Nueva York) Editores. Perris Printing Company..Nueva York, 1974.
Tompkins, Meter (1987). *Secretos de la Gran Pirámide*. Editorial Diana. México.

. . . .

Acerca del autor

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Ingeniero Químico con Especialidad en didáctica de las Matemáticas. Ingeniero en Computación, Maestría en Redes Neuronales, Maestría en Neurociencia Cognitiva, Doctorante Neurociencia Cognitiva. Ha sido docente en el área de Matemáticas en el nivel medio, medio superior, superior y posgrado. Actualmente colabora para la Escuela Normal Superior y la Universidad del Valle de México. Director de Tesis de Licenciatura y de grado. De 1997 a la fecha trabaja en investigación relacionada con la enseñanza de las matemáticas a través de la música, así como sus procesos cognitivos.