La Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática y Computación

Teoría Combinatoria

José Heber Nieto Said

Maracaibo, 1996

TEORIA COMBINATORIA
ISBN 980-232-573-2

autor: José H. Nieto
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Venezuela

Fax: 58 61 515390
dirección electrónica: jhnieto@luz.ve

Índice General

Prefacio

Este libro nació a partir de las notas de varios cursos de matemática discreta y de combinatoria dictados por el autor en la Facultad de Ciencias de la Universidad del Zulia durante los últimos diez años, para estudiantes de matemática y de computación. Una versión parcial del texto [N1] fué utilizada por estudiantes de esos y otros cursos. En 1988 esta obra fué seleccionada entre las ganadoras del Concurso de Textos Universitarios auspiciado por el Vice-Rectorado Académico de LUZ. Sin embargo, dificultades de orden tipográfico retardaron y finalmente impidieron su oportuna publicación. La presente edición se debe a la iniciativa del profesor Gustavo Oquendo, quien preparó la versión en LaTeX en tiempo record.

Esta obra se benefició de los aportes y comentarios de mis alumnos y de varios colegas del Departamento de Matemática de la F.E.C., en particular del profesor Genaro González, con quien sostuve largas conversaciones sobre temas combinatorios. Deseo expresar aquí mi agradecimiento a todos ellos, así como al profesor Gustavo Oquendo y al Instituto de Cálculo Aplicado de la Facultad de Ingeniería de LUZ, en cuyas instalaciones se realizó el trabajo de composición del texto. Debo aclarar sin embargo que cualquier posible error es de mi exclusiva responsabilidad. Asímismo agradezco al Vice-rectorado Académico de LUZ el apoyo brindado a la presente edición.

José Heber Nieto Said
Maracaibo, 14 de febrero de 1996.

Introducción

En los últimos años el interés por la Combinatoria ha aumentado considerablemente. En gran parte esto se debe al desarrollo de la Ciencia de la Computación, en la cual juega un rol central el concepto de algoritmo. Para estimar la eficiencia de un algoritmo es necesario contar el número de veces que se ejecutará cada paso del mismo, y esto es un típico problema combinatorio. Asimismo la Combinatoria tiene aplicaciones en las ciencias físicas (ver por ejemplo la discusión del modelo de Ising en [P1]). Por otra parte las técnicas combinatorias son ampliamente usadas en toda la Matemática, desde la Teoría de Grupos hasta la Teoría de Probabilidades. La demostración de Wielandt del teorema de Sylow (ver [H3]) y la teoría de paseos al azar (ver [F1]) son dos hermosos ejemplos de lo afirmado. Otros ejemplos se encuentran en geometría combinatoria (ver [H1]), teoría de grafos (ver [B2], [H2]), optimización combinatoria (ver [F2]), etc.

Sin embargo, no abundan las obras dedicadas a la exposición sistemática de los principios fundamentales de la Combinatoria. Por ese motivo es frecuente encontrar, en libros dedicados a diversas ramas de la matemática, estadística y computación, secciones más o menos extensas en las cuales se desarrollan los conceptos y técnicas combinatorias requeridos por cada autor. Se trata sin embargo de exposiciones parciales, más o menos circunscriptas a ciertas necesidades específicas. En idioma castellano, en especial, las obras de Combinatoria son muy escasas y de difícil obtención. Estas consideraciones nos motivaron a preparar este trabajo, en el cual tratamos de afirmar la unidad de la Combinatoria desarrollándola a partir de un pequeño número de principios básicos. No pretendemos sin embargo realizar una exposición exhaustiva de los innumerables problemas, resultados y teorías que comprende la Combinatoria, sino más bien exponer sus fundamentos y presentar un buen número de tópicos representativos de las diversas direcciones que ha tomado la investigación en el área. La selección hecha inevitable-

mente refleja de algún modo las preferencias e intereses del autor, aunque hemos hecho un esfuerzo por incluír un conjunto variado y equilibrado de resultados, que puedan ejemplificarse con aplicaciones a diferentes campos de la matemática (algebra, geometría, teoría de grafos, probabilidades, teoría de números, etc.)

La exposición trata de enfatizar en todo momento el enfoque típicamente *combinatorio* de los problemas tratados, aunque también se explican (y utilizan cuando es necesario) otros métodos. Los números de Stirling, por ejemplo, se definen por su propiedad de *contar* el número de permutaciones y particiones de determinada clase, y no de la manera usual como coeficientes de ciertos cambios de base en un espacio vectorial de polinomios.

Al final de cada capítulo se incluyen ejercicios y problemas que ilustran o amplían el material tratado y brindan al lector la oportunidad de poner a prueba su comprensión del texto. En un Apéndice se proporcionan soluciones y sugerencias, pero las mismas no deberían ser consultadas antes de haber hecho un serio esfuerzo para solucionar cada problema. Este tipo de actividad es fundamental para aprovechar cabalmente este o cualquier otro libro de matemática.

Los prerrequisitos para comprender este libro no son muchos, siendo suficiente lo que suele enseñarse en un curso de matemáticas generales de nivel universitario. Las excepciones se encuentran en el Capítulo 8, que presupone cierta familiaridad con la teoría de grupos, y en algunos ejemplos y ejercicios.

El texto puede ser usado de varias maneras. Los tres primeros capítulos son de naturaleza elemental y proporcionan una introducción a la combinatoria adecuada para cursos universitarios de matemática general, algebra, probabilidad y otros que lo requieran. Los capítulos 4, 5 y 6 contienen material algo más sofisticado y son apropiados para cursos de matemática discreta, en especial para carreras de computación, por sus aplicaciones al análisis de algoritmos. Los dos últimos capítulos requieren una mayor madurez matemática, y están dirigidos fundamentalmente a estudiantes y profesores de esta disciplina.

Capítulo 1

Conceptos básicos

> "La matemática es rica en técnica y argumentos. En esta gran variedad de situaciones una de las más esenciales herramientas de trabajo es el conteo. Y sin embargo, aunque parezca extraño, es una de las cosas más difíciles. Al hablar de conteo, a lo que queremos referirnos es al proceso de saber en forma precisa cuántas son las posibilidades en situaciones altamente complejas."
>
> I.N. Herstein [H3] pag. 87–88.

1.1 Qué es la Combinatoria

Si se les pregunta qué es la Combinatoria, la mayoría de los matemáticos responderán algo así como "el arte y ciencia de contar". Sin embargo esta definición es inadecuada, pues típicos problemas combinatorios como el de describir todos los grafos con un cierto número de vértices o el de la existencia de cuadrados latinos ortogonales, quedarían fuera de su alcance. Si bien los métodos de recuento forman parte esencial de la Combinatoria, ésta contempla también otros aspectos. Además de contar el número de árboles con n vértices, por ejemplo, interesa también describirlos, decir cuáles son. En este sentido Claude Berge [B1] propone definir la Combinatoria como el estudio de las *configuraciones* formadas con los elementos de un conjunto finito, entendiendo por tales las aplicaciones del conjunto en otro (posiblemente provisto de cierta estructura) que satisfagan unas restricciones determinadas. Dentro de esta concepción pueden considerarse varios aspectos, entre ellos: el estudio de configuraciones conocidas, el estudio de

la *existencia* de ciertas configuraciones, el *conteo* del número de configuraciones de un tipo dado, la *enumeracion* o descripción de configuraciones, la *optimización* combinatoria, es decir la determinación de las configuraciones que maximizan o minimizan una función dada, etc.

Otros autores, como Aigner [A1], distinguen dentro de la Combinatoria varias áreas principales, tales como los problemas de enumeración, el estudio de estructuras de orden en conjuntos finitos, los teoremas de existencia tipo Ramsey, Sperner, etc. y el estudio de configuraciones. En cualquier caso el campo abierto a la Combinatoria es amplio y fascinante, repleto de bellos resultados e interesantes problemas abiertos.

1.2 Orígenes y evolución de la Combinatoria

En cierto sentido la combinatoria puede considerarse tan vieja como la propia Matemática, ya que la operacion básica de *contar* los elementos de un conjunto está ligada al origen mismo del concepto de número en los tiempos prehistóricos.

Los matemáticos griegos no prestaron mucha atención a los problemas combinatorios, si exceptuamos el estudio de los números poligonales realizado por los pitagóricos. Según Bourbaki [B3] la fórmula $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ya era conocida en el siglo III de nuestra era. En el siglo XII el matemático hindú Bhaskara conocía ya la fórmula general para $\binom{n}{p}$ y Leví Ben Gerson (1288–1344) realizó un estudio más detallado de las permutaciones, arreglos y combinaciones de un conjunto de objetos. Sin embargo sus escritos aparentemente no alcanzaron mucha difusión, y varios de sus resultados fueron redescubiertos varias veces por los matemáticos de los siglos siguientes.

Cardano (1501–1576) mostró que el número de partes de un conjunto de n elementos es 2^n. Nicolo Fontana de Brescia, contemporáneo de Cardano y más conocido como Tartaglia, estudió un rectángulo aritmético equivalente al triángulo que posteriormente recibiría el nombre de Pascal y que apareció en su obra (en parte póstuma) "Tratado general sobre el número y la medida" (1556–1560).

Pascal y Fermat, en el curso de sus estudios sobre los juegos de azar y en particular sobre el problema de "la división de la apuesta" (planteado por el caballero de Meré) volvieron a encontrar la fórmula para $\binom{n}{p}$. Dichos estudio constituyeron, por otra parte, el punto inicial del cálculo de probabilidades moderno. Pascal parece haber sido el primero en relacionar los números $\binom{n}{p}$ con el teorema del binomio (el cual en alguna forma era ya conocido por los

árabes en el siglo XIII y por los chinos en el siglo XIV). Publicó su célebre "Tratado del triángulo aritmético" en 1665 y aunque dicho triángulo ya era conocido por matemáticos anteriores como Tartaglia, Stevin y Stifel, desde entonces es conocido con su nombre.

Leibniz (1646–1716) dedicó bastante atención a la Combinatoria, no sólo desde el punto de vista matemático sino también desde una perspectiva filosófica. En un ensayo de juventud ("De Arte Combinatoria", 1666) escribe:

> ... todo brota interiormente de la teoría de las variaciones, la cual conduce al espíritu que a ella se confía, casi por sí mismo, a través de la totalidad infinita de los problemas, abarcando en sí la armonía del universo, la estructura más íntima de las cosas y toda la serie de las formas.

Hacia 1676 obtuvo la fórmula para los coeficientes multinomiales, redescubierta y publicada por De Moivre veinte años más tarde.

Newton extendió el teorema del binomio al caso de exponentes fraccionarios. De Moivre (1667–1754) usó por primera vez funciones generatrices para resolver la relación de recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, la cual tiene su origen en el problema de la multiplicación de los conejos tratado por Leonardo de Pisa (Fibonacci) en su "Liber abaci" hacia el año 1202.

Bernoulli extendió la teoría de combinaciones en su "Ars Conjectandi" (1713), el primer libro de importancia dedicado al cálculo de probabilidades. Euler (1707–1783) hizo aportes fundamentales. Debemos destacar su solución al problema de los siete puentes de Königsberg usando argumentos combinatorios, que lo convirtieron simultáneamente en el padre de la Topología y de la Teoría de Grafos. También desarrolló el método de las funciones generatrices, aplicándolo al problema de las particiones (entre otros).

Cailey (1821–1895) atacó el problema de determinar el número de isómeros de los hidrocarburos saturados $\mathsf{C_nH_{2n+2}}$, para cualquier valor de n, lo cual equivale a un problema de enumeración de cierto tipo de árboles.

En el presente siglo F. P. Ramsey (1903–1930) descubrió un importante teorema combinatorio de existencia trabajando en el contexto de la lógica matemática. En la década de 1930 Paul Erdös y otros matemáticos húngaros dieron un nuevo impulso a la Combinatoria. De hecho Erdös ha sido, hasta el presente, uno de los investigadores más prolíficos en este campo.

Motivado en problemas de la teoría de grafos con origen en la química, como Cailey, George Polya [P2] desarrolló en 1937 una poderosa técnica (en parte anticipada por J. H. Redfield [R1]) para resolver problemas de

enumeración. Su método, basado en la teoría de grupos, ha tenido gran influencia en el desarrollo contemporáneo de la Teoría combinatoria.

En la actualidad la Combinatoria "pura" evoluciona en la dirección de buscar principios y teorías unificadoras que permitan ordenar y sistematizar el gran número de resultados existentes, aparentemente dispersos e inconexos. Ejemplo de tales teorías son: el estudio combinatorio de los conjuntos parcialmente ordenados (ver [A1]) y en particular la extensión a estos conjuntos de las funciones de Möbius y fórmulas de inversión (ver [R7], [RS1] y [G2]), la teoría de matroides (ver [A1]), los "tableaux" (ver [B1] y [R4]) y la teoría de especies combinatorias (ver [M2]). Al mismo tiempo, tiene lugar un gran desarrollo de las ramas más ricas en aplicaciones inmediatas, tales como la optimización combinatoria.

1.3 Los principios básicos

Denotaremos $\mathbb{N}_n$ al conjunto de los números naturales entre 1 y n, es decir $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\} = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$. Dos conjuntos A y B se dicen *coordinables* si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso escribiremos $A \sim B$. Un conjunto A es *finito* si es vacío o si existe un número natural n tal que $A \sim \mathbb{N}_n$. En este caso, si $f : \mathbb{N}_n \to A$ es biyectiva, poniendo $a_i = f(i)$ para $i = 1, \ldots, n$ podemos denotar el conjunto A como $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Los conjuntos finitos pueden caracterizarse también intrínsecamente por la propiedad de no ser coordinables con ninguno de sus subconjuntos propios (ver por ejemplo [R3]). Denotaremos mediante $|A|$ al *número de elementos* (o *cardinal*) del conjunto finito A. Si A es vacío, entonces $|A| = 0$, y si $A \sim \mathbb{N}_n$ entonces $|A| = n$.

En todo lo que sigue, salvo mención expresa en sentido contrario, consideraremos solamente conjuntos finitos.

Principio de correspondencia. 1.3.1. *Si $A \sim B$ entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Si $A = \emptyset$ y $A \sim B$ entonces $B = \emptyset$ y $|A| = |B| = 0$. Si $|A| = n$ y $f : \mathbb{N}_n \to A$ y $g : A \to B$ son biyectivas, entonces la composición $g \circ f : \mathbb{N}_n \to B$ es biyectiva, lo cual prueba $|B| = n = |A|$ □

El principio de correspondencia es usado muy frecuentemente en Combinatoria. A pesar de su sencillez permite resolver muchos problemas de conteo

de manera sorprendente, como en el ejemplo siguiente:
Ejemplo: En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan n equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente. Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato.

Aparentemente una forma de resolver este problema sería contar el número de juegos en cada ronda y sumar. Pero este cálculo se complica por la posibilidad de tener un número impar de equipos en algunas rondas, y un número par en otras. El caso más simple se da cuando el número de equipos participantes es una potencia de 2, digamos $n = 2^k$. Entonces evidentemente habrá k rondas, y el número total de juegos será $2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 1$, o sea $2^k - 1 = n - 1$. Usando el principio de correspondencia podemos demostrar que, en general, el número de partidos será siempre $n - 1$. En efecto, al finalizar el campeonato tendremos un equipo campeón y $n - 1$ equipos eliminados. Cada uno de ellos fue eliminado en algún partido (y sólo en uno), y en cada partido fue eliminado un equipo. Esto significa que la correspondencia que asigna a cada partido jugado el equipo eliminado en dicho partido, es biyectiva. Por lo tanto se jugaron tantos partidos como equipos resultaron eliminados, esto es $n - 1$.

Principio de la suma. 1.3.2. *Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Demostración: Este principio es obvio, pero si se desea una demostración rigurosa puede procederse de la siguiente manera: sean $f : \mathbb{N}_m \to A$ y $g : \mathbb{N}_n \to B$ ambas biyectivas. Entonces la función $h : \mathbb{N}_{m+n} \to A \cup B$ definida del modo siguiente:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \leq m \\ g(i-m) & \text{si } m < i \leq m+n. \end{cases}$$

es biyectiva, probando así que $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$. □

El principio de la suma se enuncia a veces en los términos siguientes: "Si un suceso A puede ocurrir de m maneras y otro suceso B puede ocurrir de n maneras, y no pueden ocurrir ambos simultáneamente, entonces el suceso 'A o B' puede ocurrir de $m+n$ maneras". Este enunciado puede parecer un poco impreciso, pero es posible convertirlo en una proposición matemáticamente

aceptable mediante el modelo siguiente: sea X un conjunto cuyos elementos representan los posibles resultados de un cierto experimento E. Llamemos *sucesos* a los subconjuntos de X. Si A es un suceso y el resultado x del experimento E pertenece al conjunto A, entonces diremos que "ocurrió el suceso A". Sea B otro suceso. Es claro que el suceso 'A o B' ocurre cuando el resultado del experimento E está en $A \cup B$, y decir que "A y B no pueden ocurrir simultáneamente" significa que $A \cap B = \emptyset$. Asimismo la frase "A puede ocurrir de m maneras" no significa otra cosa que $|A| = m$. Vemos entonces que el enunciado del principio de la suma en términos de sucesos, bajo esta interpretación, afirma que si $|A| = m, |B| = n$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $|A \cup B| = m + n$, lo cual no es más que el enunciado original.

Veamos algunas consecuencias del principio de la suma:

Proposición 1.3.3. *Si $A \subset B$ entonces $|A| \leq |B|$.*

Demostración: Si $A \subset B$ entonces $B = A \cup (B \backslash A)$ y $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, por lo tanto $|B| = |A| + |B \backslash A| \geq |A|$ □

Proposición 1.3.4. *Si $f : A \to B$ es inyectiva entonces $|A| \leq |B|$.*

Demostración. Si f es inyectiva entonces $A \sim f(A)$, por lo tanto $|A| = |f(A)| \leq |B|$. □

Proposición 1.3.5. *Si $f : A \to B$ es sobre entonces $|A| \geq |B|$.*

Demostración. Para cada elemento $b \in B$ escojamos una preimagen suya $g(b)$ en A. De este modo resulta una función $g : B \to A$ inyectiva, ya que $g(b) = g(b')$ implicaría $b = f(g(b)) = f(g(b')) = b'$. Entonces por 1.3.4 tenemos $|B| \leq |A|$. □

Proposición 1.3.6. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos dos a dos entonces:* $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$.

Demostración. Esta generalización del principio de la suma se prueba fácilmente por inducción. □

(Más adelante veremos una generalización aún mayor de este resultado: el principio de inclusiones y exclusiones)

Principio del producto (versión 1) 1.3.7. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Demostración. Este principio puede visualizarse disponiendo todos los elementos del producto cartesiano $A \times B$ en una tabla. Suponiendo que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ entonces los elementos de $A \times B$ son los pares ordenados:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \ldots & (a_m, b_n) \end{array}$$

Se ve claramente que el cuadro tiene m filas y n columnas, y por lo tanto $m \cdot n = |A| \cdot |B|$ elementos.

□

Una demostración más rigurosa podría seguir las siguientes lineas: si A o B son vacíos entonces $A \times B$ es vacío y se cumple $|A \times B| = 0 = |A| \cdot |B|$. En caso contrario sean $f : \mathbb{N}_m \to A$ y $g : \mathbb{N}_n \to B$ biyectivas y definamos $h : \mathbb{N}_{mn} \to A \times B$ de la manera siguiente: dado $i \in \mathbb{N}_{mn}$ sean q y r el cociente y el resto respectivamente de la división entera de $i - 1$ entre m. Entonces,

$$h(i) = (f(r + 1), g(q + 1))$$

la función h así definida es biyectiva: su inversa es

$$h^{-1}(f(k), g(j)) = (j - 1)m + k$$

lo cual prueba que $|A \times B| = m \cdot n$. □

Un enunciado algo más general del principio del producto es el siguiente:

Principio del producto (versión 2) 1.3.8. *Si un primer objeto puede escogerse entre m posibles, y después de realizada esta selección puede escogerse un segundo entre n posibles, entonces pueden escogerse $m \cdot n$ pares diferentes.*

Demostración. En esta versión el conjunto de objetos entre los cuales se puede seleccionar el segundo puede depender del primer objeto elegido. La situación puede representarse en el cuadro:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_{11}) & (a_1, b_{12}) & \ldots & (a_1, b_{1n}) \\ (a_2, b_{21}) & (a_2, b_{22}) & \ldots & (a_2, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_m, b_{m1}) & (a_m, b_{m2}) & \ldots & (a_m, b_{mn}) \end{array}$$

y vemos que también aquí el número total de pares es $m \cdot n$. □

El principio del producto puede generalizarse fácilmente para varios factores:

Principio del producto (versión 3) 1.3.9.
$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$

Demostración: inducción en n, basándonos en (1.3.7). □

La generalización correspondiente de la segunda versión del principio sería la siguiente:

Principio del producto (versión 4) 1.3.10. *Si un primer objeto puede escogerse entre n_1 posibles, y para cada selección puede escogerse un segundo objeto entre n_2 posibles, y luego un tercero entre n_3 posibles, etc., hasta un k-esimo objeto que se puede escoger de n_k maneras, entonces el número de grupos ordenados de k objetos que pueden seleccionarse es $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.*

Demostración: Inducción en k, basándonos en (1.3.8). □

Ejemplo: Si en la serie armónica $1 + 1/2 + \cdots + 1/n + \cdots$ (que como se sabe es divergente) se suprimen todos los términos en cuyo denominador aparezcan uno o más sietes (tales como $1/7, 1/17$, etc.) ¿la serie resultante converge o diverge?.

Para responder a esta pregunta calculemos en primer lugar la cantidad de números de n cifras entre cuyos dígitos no aparece el 7. La primera cifra puede escogerse de ocho maneras, ya que no puede ser ni 7 ni 0. Cada una de las restantes puede escogerse de 9 maneras. La cantidad buscada es entonces $8 \cdot 9^{n-1}$. Todos los términos de la serie en cuestión con denominador de n cifras son menores que $10^{-(n-1)}$ por lo tanto la serie se puede acotar por la serie geométrica:

$$8 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \cdots = 80$$

por lo cual la serie propuesta es *convergente*. Este resultado puede parecer paradójico, pues aparentemente al quitar los términos con 7 estamos quitando relativamente pocos términos de la serie armónica. Pero es una ilusión provocada por el examen de los números de pocas cifras. De hecho, entre los números de n cifras la proporción de números sin sietes es $(8/9)(9/10)^{n-1}$, la cual tiende a cero al aumentar n.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de modo que se ataquen?

El tablero de ajedrez tiene $8 \times 8 = 64$ casillas, y este es el número de maneras en que se puede ubicar la torre blanca. Una vez ubicada la torre blanca, la torre negra debe colocarse en una casilla de la misma columna o fila ocupada por la torre blanca. Como el número de estas casillas es $7 + 7 = 14$ la respuesta al problema es $64 \times 14 = 896$.

Observemos que si se tratase de colocar dos torres del mismo color, indistinguibles, defendiéndose mutuamente, entonces el número anterior debería dividirse entre 2, resultando 448.

Como otra aplicación interesante del principio del producto demostraremos el siguiente resultado:

Proposición (Erdös - Szekeres [ES1]) 1.3.11. *Toda sucesión de $mn + 1$ números diferentes contiene una subsucesión creciente de longitud mayor que n o una subsucesión decreciente de longitud mayor que m.*

Demostración. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ la sucesión y denotemos l_i la longitud de la subsucesión decreciente más larga que comience con a_i. Análogamente sea L_i la longitud de la subsucesión creciente más larga que comience en a_i. Supongamos por absurdo que $l_i \leq m$ y que $L_i \leq n$ para $i = 1, \ldots, mn + 1$. Sea $f : \mathbb{N}_{mn+1} \to \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ la aplicación definida asi: $f(i) = (l_i, L_i)$. Esta función es inyectiva, ya que si $i < j$ entonces o bien $a_i < a_j$ o bien $a_i > a_j$. En el primer caso anteponiendo el elemento a_i a una subsucesión creciente de L_j elementos que comience con a_j obtenemos una subsucesión creciente de primer elemento a_i y $L_j + 1$ elementos, probando que $L_i > L_j$. En el segundo caso se prueba por un razonamiento similar que $l_i > l_j$, y entonces en cualquier caso se tiene que $f(i) \neq f(j)$. Pero esto conduce a una contradicción, ya que por (1.3.4) tendríamos que $|\mathbb{N}_{mn+1}| \leq |\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n|$, o sea $mn + 1 \leq mn$, lo cual es absurdo. □

El conjunto de todas las funciones de un conjunto A en otro B lo denotamos B^A. Si A y B son finitos entonces el cardinal de B^A viene dado por la siguiente proposición:

Proposición 1.3.12. $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Demostración. Supongamos que $|A| = n$ y sea $f : \mathbb{N}_n \to A$ biyectiva. Esta función f nos permite definir una correspondencia $T : B^A \to B^{\mathbb{N}_n}$ poniendo $T(h) = h \circ f$ para toda $h \in B^A$. Esta correspondencia es biyectiva, ya que f

lo es. Pero $B^{\mathbb{N}_n}$ no es otra cosa que el producto cartesiano $B \times B \times \cdots \times B$ (n factores) y entonces por (1.3.9)
$|B^A| = |B^{\mathbb{N}_n}| = |B \times B \times \cdots \times B| = |B|^n = |B|^{|A|}$ □

Proposición 1.3.13. *El conjunto de partes de un conjunto finito A tiene $2^{|A|}$ elementos.*

Demostración. A cada subconjunto X de A hagámosle corresponder su función característica $f_X : A \to \{0, 1\}$ definida así:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

De este modo resulta una correspondencia entre subconjuntos de A y funciones de A en $\{0, 1\}$, y fácilmente se ve que se trata de una biyección. Por lo tanto en virtud de (1.3.12) el número de elementos del conjunto de partes de A es $|2^A| = 2^{|A|}$ □

Usaremos la notación $[x]_n$ para indicar el producto de n factores decrecientes $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$, a veces llamado *factorial inferior* de x de orden n. Observemos que $[n]_n$ es el factorial ordinario $n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Adoptaremos además la convención $[x]_0 = 1$.

Proposición 1.3.14. *El número de funciones inyectivas de un conjunto A en otro B es $[|B|]_{|A|}$.*

Demostración. Sean $n = |A|$ y $m = |B|$. Si $n > m$ entonces por (1.3.4) no hay funciones inyectivas de A en B y el producto $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ nos da el resultado correcto pues uno de los factores será nulo. Supongamos entonces que $n \leq m$ y sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Si queremos definir una función inyectiva de A en B, tenemos m posibilidades para elegir $f(a_1)$, $m-1$ para $f(a_2)$, $\ldots$, $m-n+1$ posibilidades para $f(a_n)$. Entonces, por el principio del producto, el número de funciones inyectivas de $|A|$ en $|B|$ es $m(m-1)\cdots(m-n+1) = [m]_n$. □

1.4 Ejercicios

1. Pruebe que si A y B son conjuntos finitos entonces se cumple $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. Sean A y B dos conjuntos finitos y f una función de A sobre B tal que $|f^{-1}(b)| = k$ (constante) para todo $b \in B$. Pruebe que entonces $|A| = k \cdot |B|$

3. (Principio de Dirichlet)

   Sean $a_1, \ldots a_k$ enteros no negativos. Si n objetos se distribuyen en k cajas $C_1, \ldots, C_k$ y $n \geq a_1 + \ldots + a_k - k + 1$ entonces para algún i $(1 \leq i \leq k)$ la caja C_i contiene al menos a_i objetos.

4. En un acto deben hablar Luis, María, Pedro, Pablo y Luisa. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar la lista de oradores con la condición de que Luis hable antes que Pedro? ¿Y si la condición es que María hable inmediatamente después que Luis? ¿Y si deben alternarse oradores de distinto sexo?

5. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro cartas de un mazo de 52, de modo que haya una de cada palo?

6. De un mazo de 52 naipes se extraen diez al azar. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún as? ¿Y de sacar al menos un as? ¿Y exactamente uno?

7. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un número de tres cifras al azar las tres cifras sean diferentes?

8. Supongamos que cada automóvil se identifica mediante una sucesión de tres letras seguidas de tres dígitos, y que las placas se otorgan en orden alfabético-numérico comenzando con la AAA000. Las letras que se utilizan son las veintiséis siguientes:

   A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

   ¿Cuántas placas diferentes son posibles con este sistema? ¿Cuántos carros se matricularon antes que el CGU735 ?

9. ¿Cuántos pares ordenados de fichas de dominó pueden formarse de modo tal que "liguen", es decir, que tengan al menos un dígito en común? (Suponga que hay suficientes fichas de todos los tipos.)

10. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez tres torres blancas idénticas de modo que no se ataquen?

11. ¿De cuántas maneras pueden colocarse un alfil blanco y uno negro en un tablero de ajedrez de modo que se ataquen mutuamente (es decir, que estén en una misma diagonal)?

12. Pruebe que el número máximo de fichas que se pueden colocar en un tablero cuadrado de $n \times n$ sin que haya dos en una misma diagonal es $2n - 2$, y que el número de estas configuraciones maximales es 2^n.

Capítulo 2

Las configuraciones clásicas

> **combinar** tr. Unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto o agregado.
>
> Diccionario de la Lengua española 20^a. edición, Real Academia Española, 1984.

Dado un conjunto de m objetos existen ciertas formas típicas de agrupar, distribuir o seleccionar sus elementos. En este capítulo consideraremos esas configuraciones estudiadas por la teoría combinatoria clásica, indicando también el punto de vista moderno.

2.1 Arreglos

Se llaman *arreglos* de m objetos tomados de n en n a las sucesiones de n términos diferentes que pueden formarse con los m objetos. Así por ejemplo los arreglos de las letras a, b, c tomadas de dos en dos son: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Varios términos se han usado como sinónimos de arreglos, entre ellos: variaciones, disposiciones, coordinaciones, etc.

Observemos que si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces los arreglos de los elementos de A tomados de n en n no son otra cosa que las funciones inyectivas de $\mathbb{N}_n$ en A. For lo tanto en vista de (1.3.14) tenemos que:

Proposición 2.1.1. *El número de arreglos de m elementos tomados de n en n es $[m]_n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$.*

Regla de formación recursiva de los arreglos 2.1.2. *Para formar los arreglos de m elementos tomados de n en n, suponiendo que ya han sido*

formados los de $n-1$ en $n-1$, se colocan a la derecha de cada uno de estos últimos, sucesivamente, los elementos que no figuran en ellos.

Ejemplo
Sea $A = \{a, b, c, d\}$. En el cuadro siguiente se ilustra la formación de los arreglos según la regla anterior:

de 1 en 1	de 2 en 2	de 3 en 3	de 4 en 4
a	ab	abc	abcd
		abd	abdc
	ac	acb	acbd
		acd	acdb
	ad	adb	adbc
		adc	adcb
b	ba	bac	bacd
		bad	badc
	bc	bca	bcad
		bcd	bcda
	bd	bda	bdac
		bdc	bdca
c	ca	cab	cabd
		cad	cadb
	cb	cba	cbad
		cbd	cbda
	cd	cda	cdab
		cdb	cdba
d	da	dab	dabc
		dac	dacb
	db	dba	dbac
		dbc	dbca
	dc	dca	dcab
		dcb	dcba

Es fácil probar por inducción que la regla enunciada es correcta. Si ya se ha formado una lista con todos los arreglos de m objetos tomados de $n-1$ en $n-1$ entonces dado cualquier arreglo de n en n, quitándole el último elemento queda un arreglo de $n-1$ en $n-1$ que debe estar en la lista. Esto garantiza la aparición del arreglo dado al aplicar la regla. Además no aparecen arreglos repetidos, ya que si en la lista son todos diferentes al

aplicar la regla resultarán arreglos que, si no difieren en los primeros $n-1$ elementos, diferirán en el último.

De la regla de formación se deduce que el número de arreglos de m objetos tomados de n en n, que denotaremos A_n^m, satisface la relación de recurrencia siguiente:

$$A_n^m = (m-n+1)A_{n-1}^m$$

ya que de cada arreglo de $n-1$ en $n-1$ se obtienen $m-(n-1)$ arreglos diferentes de n en n, agregando al final cada uno de los $m-(n-1)$ elementos que no figuran en él. Puesto que obviamente $A_1^m = m$ esta relación de recurrencia nos da:

$$A_2^m = (m-2+1)A_1^m = (m-1)m,$$
$$A_3^m = (m-3+1)A_2^m = (m-2)(m-1)m$$

y en general $A_n^m = (m-n+1)\cdots(m-1)m$, en concordancia con nuestro resultado anterior.

2.2 Arreglos con repetición

Se llaman *arreglos con repetición* de m elementos tomados de n en n a las sucesiones de n términos que pueden formarse con los m elementos, entendiendo que cada uno de ellos puede aparecer repetido. Así por ejemplo los arreglos con repetición de los elementos a, b y c tomados de dos en dos son los siguientes:

$$aa\ ab\ ac\ ba\ bb\ bc\ ca\ cb\ cc$$

Proposición 2.2.1. *El número de arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n es m^n.*

Demostración. Los arreglos con repetición de m elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ no son otra cosa que las funciones de $\mathbb{N}_n$ en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y por lo tanto su número es m^n como vimos en (1.3.12). □

2.3 Permutaciones

Los arreglos de n objetos tomados de n en n son llamados *permutaciones* de los n objetos. Se tiene obviamente que:

Proposición 2.3.1. *El número de permutaciones de n objetos es $n!$*

Demostración: En efecto,
$[n]_n = n(n-1)\cdots(n-n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ □

Regla de formación de las permutaciones 2.3.2.

Puede particularizarse la regla de formación de los arreglos, o seguir este otro procedimiento: *ya formadas las permutaciones de los $n-1$ elementos $a_1, \ldots, a_n$ agreguemos el elemento a_n a cada una de ellas, en todas las posiciones posibles.*

Ejemplo
Formación sucesiva de las permutaciones de $\{a\}, \{a,b\}$ y $\{a,b,c\}$:

		abc
	ab	acb
		cab
a		
		bac
	ba	bca
		cba

2.4 Permutaciones con repetición

Dados los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ y números naturales $k_1, k_2, \ldots, k_r$ consideremos las sucesiones de $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ términos que se pueden formar con los a_i de modo que a_1 aparezca k_1 veces, a_2 aparezca k_2 veces, ... y a_r aparezca k_r veces. A estas sucesiones se les llama *permutaciones con repetición* de los elementos dados (con multiplicidades $k_1, \ldots, k_r$). Para contar su número consideremos un conjunto A de n elementos, particionado en clases disjuntas $C_1, C_2, \ldots, C_r$ tales que $|C_i| = k_i$. Digamos que dos permutaciones f y g de los elementos de A son equivalentes si los elementos $f(i)$ y $g(i)$ pertenecen a la misma clase en A para $i = 1, 2, \ldots, n$. Los elementos de C_i pueden permutarse entre si de $k_i!$ maneras. Como esto ocurre para cada i de 1 hasta r es claro que para cada permutación de los elementos de A hay $k_1!\, k_2! \ldots k_r!$ permutaciones equivalentes. El número de clases de equivalencia será entonces el cociente entre el total de permutaciones de A y este número $k_1! k_2! \ldots k_r!$. Pero es claro que estas clases de equivalencia pueden ponerse en correspondencia biyectiva con las permutaciones con repetición, por lo tanto hemos establecido que:

Proposición 2.4.1. *El número de permutaciones con repetición de r elementos con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_r$ es:*

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$$

siendo $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Ejemplo

Determinemos cuántas palabras diferentes pueden formarse permutando las letras de la palabra MATEMATICA. Tenemos díez letras, que se reparten en tres A, dos M, dos T , una E una I y una C . Por lo tanto la respuesta se obtiene dividiendo 10! entre 3! 2! 2! 1! 1! 1! lo cual resulta ser 151200.

2.5 Combinaciones

Llamaremos *combinaciones* de m elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tomados de n en n a los subconjuntos de n elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Denotaremos el número de tales combinaciones mediante el símbolo $\binom{m}{n}$, notación introducida por Andreas von Ettingshausen en su obra *Die Combinatorische Analysi* (Viena, 1826).

Ejemplo

Las combinaciones de los cuatro elementos a, b, c, d tomadas de dos en dos son : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ y $\{c, d\}$. Por lo tanto $\binom{4}{2} = 6$.

Nota: Generalmente se escriben las combinaciones sin las llaves que se usan para denotar conjuntos. Así en el ejemplo anterior tendríamos *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*. Sin embargo al usar esta notación hay que tener en cuenta que no importa el orden de los elementos dentro de cada grupo, a diferencia de lo que sucede con 1os arreglos.

Para cada combinación de m elementos tomados de a n formemos las $n!$ permutaciones posibles con sus elementos. De este modo se obtendrán arreglos de m elementos tomados de a n. Es claro que todos los arreglos formados serán distintos, pues si provienen de combinaciones distintas difieren en algún elemento, y si provienen de la misma difieren en el orden de los elementos. Además es evidente que se obtendrán todos los arreglos de los m elementos tomados de n en n. Puesto que cada una de las $\binom{m}{n}$ combinaciones origina $n!$ arreglos resulta que $\binom{m}{n} n! = [m]_n$ y por lo tanto:

Proposición 2.5.1. *El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n es:*

$$\binom{m}{n} = \frac{[m]_n}{n!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Si ya se han escrito todas las combinaciones de m elementos tomados de $n-1$ en $n-1$, escribiendo a la derecha de cada una de ellas, sucesivamente, cada uno de los elementos que siguen a los que entran en la combinación, se obtienen todas las combinaciones tomadas de n en n.

La comprobación de la corrección de esta regla se deja como ejercicio. Nos limitaremos a ilustrarla con un ejemplo.

Ejemplo
Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Las combinaciones que pueden formarse son:

de 1 en 1	de 2 en 2	de 3 en 3	de 4 en 4
a	ab	abc	abcd
		abd	
	ac	acd	
	ad		
b	bc	bcd	
	bd		
c	cd		
d			

Las combinaciones pueden ser estudiadas también desde otro punto de vista. Para ello introduzcamos un orden lineal estricto en el conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ definiendo $a_i \prec a_j$ si y sólo si $i < j$. Entonces podemos establecer una correspondencia entre las funciones estrictamente crecientes de $\mathbb{N}_n$ en A y los subconjuntos de A con n elementos. En efecto, si $f : \mathbb{N}_n \to A$ es estrictamente creciente (es decir que $i < j$ implica $f(i) \prec f(j)$) hagámosle corresponder su imagen $\mathrm{Im}(f) = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Esta correspondencia es sobreyectiva, ya que dado un subconjunto B de A con n elementos, ordenémoslos y sean estos $b_1 \prec b_2 \prec \cdots \prec b_n$. La función $f : \mathbb{N}_n \to A$ definida como $f(i) = b_i$ es estrictamente creciente y se tiene obviamente $\mathrm{Im}(f) = B$. La correspondencia es también inyectiva pues si f y g son dos funciones distintas de $\mathbb{N}_n$ en A, ambas estrictamente crecientes, sea j el menor número natural (entre 1 y n) tal que $f(j) \neq g(j)$. Supongamos para

fijar ideas que $g(j) \prec f(j)$. Entonces si $1 \leq i < j$ se tiene $f(i) = g(i) \prec g(j)$, mientras que si $j < i \leq n$ entonces $g(j) \prec f(j) \prec f(i)$. En todo caso $g(j)$ no pertenece a $\mathrm{Im}(f)$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g)$.

La correspondencia biyectiva que se acaba de establecer nos permite afirmar que hay tantas funciones estrictamente crecientes de $\mathbb{N}_n$ en A como combinaciones de los elementos de A tomados de n en n. Más en general podemos substituir $\mathbb{N}_n$ por otro conjunto linealmente ordenado cualquiera. Además los razonamientos hechos son válidos también para funciones estrictamente decrecientes. Por lo tanto podemos afirmar que:

Proposición 2.5.2. *El número de funciones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes de un conjunto linealmente ordenado B de n elementos en otro A de m elementos es $\binom{m}{n}$.*

2.6 Combinaciones con repetición

Las *combinaciones con repetición* de m elementos tomados de n en n son los grupos de n elementos que pueden formarse con los m dados, sin tomar en cuenta el orden y admitiendo elementos repetidos. Así por ejemplo las combinaciones con repetición de los elementos a, b y c tomados de dos en dos son las siguientes:

$$aa, ab, ac, bb, bc, cc$$

Una forma interesante de representar las combinaciones con repetición de m elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ es en forma de monomio $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m}$ donde el exponente de cada elemento $a_j$indica el número de veces que dicho elemento aparece en la combinación. Es claro que de este modo se establece una correspondencia biyectiva entre combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n y monomios de grado n en m variables, con coeficiente unidad. Para contar el número de tales monomios hagamos corresponder a cada uno de ellos una sucesión de ceros y unos, escribiendo para cada variable una hilera de tantos unos como indique el exponente (ninguno si el exponente es cero) y usando ceros como elementos de separación entre las hileras de unos correspondientes a variables distintas. El resultado tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{1 \cdots 1}_{i_1} 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{i_2} 0 \cdots\cdots 0 \underbrace{1 \cdots 1}_{i_m}$$

Si algún exponente es nulo la hilera correspondiente de unos será vacía, apareciendo por consiguiente dos o más ceros consecutivos. En cualquier caso habrá $m-1$ ceros y la longitud de la sucesión será $i_1+i_2+\cdots+i_m+m-1=n+m-1$.

Veamos como ejemplo algunos monomios de sexto grado en cuatro variables a,b,c,d y las sucesiones de ceros y unos asociadas:

a^2bc^2d	1 1 0 1 0 1 1 0 1
b^4d^2	0 1 1 1 1 0 0 1 1
d^6	0 0 0 1 1 1 1 1 1
a^6	1 1 1 1 1 1 0 0 0

Es claro que la correspondencia establecida es biyectiva, y por lo tanto hay tantos monomios de grado n en m variables con coeficiente unidad como sucesiones de $n+m-1$ términos, de los cuales n son unos y $m-1$ son ceros. El número de tales sucesiones es obviamente $\binom{n+m-1}{n}$ pues una vez elegidas las n posiciones donde se van a poner los unos los $m-1$ puestos restantes deben llenarse con ceros. Quedan probadas entonces las dos proposiciones siguientes:

Proposición 2.6.1. *El número de las combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es $\binom{n+m-1}{n}$.*

Proposición 2.6.2. *El número de monomios de grado n en m variables con coeficiente unidad es $\binom{n+m-1}{n}$.*

Una forma más moderna de tratar las combinaciones con repetición consiste en ordenar el conjunto $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ como lo hicimos antes y considerar las funciones crecientes (en sentido amplio) de $\mathbb{N}_n$ en A. Con razonamientos análogos a los hechos para las combinaciones simples y las funciones estrictamente crecientes puede verse que existe una correspondencIa biyectiva natural entre combinaciones con repetición de m elementos tomados de de n en n y funciones crecientes (en sentido amplio) de un conjunto linealmente ordenado de n elementos en otro de m elementos. Estos hechos se resumen en el siguiente enunciado:

Proposición 2.6.3. *El número de funciones crecientes (o decrecientes) en sentido amplio de un conjunto linealmente ordenado de n elementos en otro de m elementos es $\binom{n+m-1}{n}$.*

2.7 Algoritmos combinatorios

El problema de generar permutaciones, combinaciones y otros objetos combinatorios con el computador ha dado origen a una serie de interesantes algoritmos. Como ejemplo incluímos a continuación uno que genera las permutaciones de los números del 1 al n en orden lexicográfico, comenzando por $1, 2, \ldots, n$ y finalizando con $n, n-1, \ldots, 2, 1$. Cada permutación se representa mediante un arreglo $a[1], a[2], \ldots, a[n]$. Usamos la flecha hacia la izquierda para denotar la asignación de un valor a una variable.

Algoritmo generador de permutaciones 2.7.1.

Paso 1 (inicializar) Para $i = 1$ hasta n hacer $a[i] \leftarrow i$

Paso 2 Imprimir $a[1], a[2], \ldots, a[n]$

Paso 3 Hallar el mayor i tal que $a[i] < a[i+1]$. Si no se encuentra tal i el algoritmo finaliza (esto ocurrirá necesariamente luego de imprimir la permutación $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$)

Paso 4 Hallar el menor $a[j]$ con $j > i$ y tal que $a[j] > a[i]$

Paso 5 Intercambiar los valores de $a[i]$ y $a[j]$

Paso 6 Invertir la sucesión $a[i+1], \ldots, a[n]$

Paso 7 Volver al Paso 2.

Para más detalles sobre éste y otros algoritmos combinatorios vea [K1], [N3] y [R2].

2.8 Ejercicios

1. ¿Cuántas banderas con tres franjas horizontales del mismo ancho y distintos colores pueden formarse, si se dispone de tela amarilla, azul, verde, blanca y roja?

2. En el alfabeto Morse, usado en telegrafía, se emplean solamente dos signos: el punto y la raya. ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse compuestas de uno, dos, tres, cuatro o cinco signos? Generalice.

3. ¿De cuántas maneras puede formarse una ronda con diez niños?

4. Con diez cuentas de vidrio de distintos colores, ¿cuántos collares diferentes se pueden formar?

5. ¿Cuántos números mayores que 3000 y menores que 4000 pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5 y 7
   a) si cada cifra puede usarse sólo una vez?
   b) si cada cifra puede emplearse las veces que se desee?

6. ¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse con las letras de la palabra POLINOMIO?

7. Si se forman todos los números que resultan de permutar las cifras de 123579 y se ordenan en forma creciente, ¿qué lugar ocupará el número 537192?

8. De un grupo de seis hombres y cuatro mujeres,
   a)¿Cuántas comisiones de tres personas se pueden formar?
   b)¿Cuántas en las que haya exactamente un hombre?
   c)¿Cuántas en las que haya al menos un hombre?

9. ¿Cuántos triángulos se pueden formar que tengan como vértices los vértices de un decágono regular?

10. Si n puntos distintos situados en una circunferencia se unen de todas las maneras posibles, ¿cuántos puntos de intersección resultan, como máximo?

11. En un plano hay n puntos, k de los cuales están alineados. A excepción de ellos no hay tres en línea recta. ¿Cuántas líneas rectas diferentes resultan si se unen los n puntos dos a dos?

12. ¿En cuántos puntos se cortan n rectas, k de las cuales son paralelas entre sí?

13. ¿Cuántas naranjas se necesitan para formar una pirámide de base triangular con n naranjas en cada lado de la base?

14. ¿De cuántas maneras se pueden comprar diez frutas, si el frutero sólo dispone de naranjas, mangos y nísperos?

15. ¿De cuántas maneras se pueden colocar las figuras blancas (un rey, una dama, dos alfiles, dos torres y dos caballos) en la primera fila del tablero de ajedrez?

16. De un total de N artículos de los cuales B son buenos y los restantes, $D = N - B$ son defectuosos se escoge al azar una muestra de n artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra haya x artículos buenos (y $n - x$ defectuosos)?

17. ¿Qué dimensión tiene el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n en k variables?

18. Para escribir todos los números naturales desde 1 hasta 1000000, ¿cuántos ceros se necesitan?

19. En un acto deben hablar n mujeres y k hombres. ¿De cuántas maneras se puede ordenar la lista de oradores con la condición de que no hablen dos hombres consecutivamente?

20. (Kaplansky) Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ con k elementos y sin enteros consecutivos es $\binom{n-k+1}{k}$.

21. (Kaplansky) Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ con k elementos y que no contienen enteros consecutivos ni a 1 y n simultáneamente es:

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

Capítulo 3

Coeficientes binomiales y multinomiales

> "La cantidad $\binom{n}{k}$ se denomina *coeficiente binomial*; estos números tienen una cantidad extraordinaria de aplicaciones. Son quizá las cantidades más importantes que aparecen en el análisis de algoritmos y, por tanto, se recomienda al lector que se familiarice con ellos."
>
> D.E. Knuth [K1] vol.1

> "The binomial coefficients are virtually ubiquitous in Combinatorial Theory and it would be folly to attempt to count anything without their aid."
>
> D.I.A. Cohen [C1]

3.1 Los coeficientes binomiales

En el capítulo anterior definimos $\binom{m}{n}$ como el número de subconjuntos de cardinal n de un conjunto de m elementos. A continuación veremos que estos números admiten también interpretaciones algebraicas y geométricas y estableceremos unas cuantas de sus propiedades.

Teorema del binomio 3.1.1.

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n \cdot y^{m-n}$$

Demostración: $(x+y)^m$ es el producto de m factores $(x+y)$. Al desarrollar el producto se obtiene una suma de monomios de grado m en las dos variables x, y. El monomio $x^n \cdot y^{m-n}$ aparece tantas veces como formas haya de escoger n de los m paréntesis para seleccionar la x en ellos. Este número es justamente $\binom{m}{n}$. □

Nota: A raíz de este teorema los números $\binom{m}{n}$ se denominan "coeficientes binomiales", nombre que se remonta a M. Stifel (1486–1567). Es corriente demostrar el teorema del binomio por inducción, utilizando la fórmula de Stifel (3.1.4) para justificar el salto inductivo. Sin embargo creemos que debe preferirse esta sencilla demostración combinatoria pues además de su brevedad permite *deducir* la fórmula para el desarrollo del binomio, mientras que la demostración por inducción requiere conocer la fórmula de antemano.

Una interpretación geométrica de los coeficientes binomiales

Consideremos las poligonales $P_0P_1 \dots P_m$ en el plano cartesiano cuyos vértices cumplen la condición siguiente: "Si P_i tiene coordenadas (x, y) entonces P_{i+1} tiene coordenadas $(x+1, y)$ o $(x, y+1)$". En otras palabras, se trata de poligonales cada uno de cuyos segmentos P_iP_{i+1} es paralelo a uno de los ejes coordenados, tiene longitud unidad y está orientado igual que el eje al cual es paralelo. Llamaremos a estas poligonales "caminos ascendentes" o simplemente caminos.

Proposición 3.1.2. *El número de caminos ascendentes de longitud m que parten del origen es 2^m. El número de caminos que parten del origen y finalizan en el punto de coordenadas (n, k) es $\binom{n+k}{n}$.*

Demostración. Para construir un camino de longitud m partiendo del origen debemos elegir primeramente P_1, que solamente puede ser $(0, 1)$ o $(1, 0)$. Tenemos pues dos posibilidades. Una vez elegido P_1 hay dos posibilidades para escoger P_2, y así sucesivamente. Por el principio del producto resulta entonces que pueden construírse 2^m caminos de longitud m. Para contar los caminos $P_0P_1 \dots P_m$ con $P_0 = (0, 0)$ y $P_m = (n, k)$ observemos en primer lugar que debe ser $m = n + k$, pues cada vértice P_i $(1 \le i \le m)$ tiene o bien su abscisa o bien su ordenada una unidad mayor que la del vértice anterior P_{i-1}. Por lo tanto, para ir desde $(0, 0)$ hasta (n, k) un camino debe tener n segmentos paralelos al eje Ox y k segmentos paralelos al eje Oy, siendo su longitud $m = n+k$. Ahora bien, el camino queda determinado si conocemos

cuáles de sus $n+k$ segmentos son paralelos a Ox, pues los restantes serán necesariamente paralelos a Oy. El problema se reduce entonces a escoger n elementos de un total de $n+k$, lo cual puede hacerse de $\binom{n+k}{n}$ maneras. □

A continuación estudiaremos una serie de proposiciones relativas a los coeficientes binomiales. Para cada una de ellas se pueden seguir al menos cuatro estrategias de demostración :

1. *Estrategia combinatoria pura:* consiste en interpretar $\binom{m}{n}$ como el número de subconjuntos de n elementos de un conjunto de m elementos, y usar técnicas de conteo.

2. *Estrategia aritmética:* consiste en calcular aritméticamente a partir de la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

3. *Estrategia algebraica:* consiste en interpretar $\binom{m}{n}$ como el coeficiente de $x^n y^{m-n}$ en el desarrollo de $(x+y)^m$ y realizar cálculos y operaciones algebraicas con polinomios.

4. *Estrategia geométrica:* consiste en interpretar $\binom{m}{n}$ como el número de caminos ascendentes desde $(0,0)$ hasta $(m-n,n)$ y efectuar luego razonamientos "geométrico-combinatorios".

Para algunas de las proposiciones siguientes daremos cuatro demostraciones, correspondientes a las cuatro estrategias mencionadas. En otros casos proporcionaremos sólo una demostración (generalmente la que consideramos más elegante) pero sugerimos al lector que construya demostraciones alternativas siguiendo las estrategias restantes.

Simetría de los coeficientes binomiales 3.1.3.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Demostración combinatoria: Sea A un conjunto de m elementos. Llamemos F_k a la familia de todos los subconjuntos de A con k elementos y definamos $f : F_n \to F_{m-n}$ haciendo corresponder a cada miembro X de F_n su complemento en A, que tendrá $m-n$ elementos y estará por lo tanto en F_{m-n}. En símbolos, $f(X) = A\backslash X$. Es inmediato verificar que f es biyectiva: $f(X) = f(Y) \Rightarrow A\backslash X = A\backslash Y \Rightarrow X = Y$, y si $Y \in F_{m-n}$ entonces $X = A\backslash Y \in F_n$ y $f(X) = A\backslash X = A\backslash(A\backslash Y) = Y$. Entonces por el principio de correspondencia tenemos que $|F_n| = |F_{m-n}|$, es decir: $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ □

Demostración aritmética:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$$

□

Demostración algebraica: Basta comparar el coeficiente de $x^n y^{m-n}$ en el desarrollo de $(x+y)^m$ con el de $y^{m-n}x^n$ en el desarrollo de $(y+x)^m$. Puesto que $(x+y)^m = (y+x)^m$, estos coeficientes deben ser iguales, lo cual demuestra la proposición. □

Demostración geométrica: La simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante (es decir la recta $y = x$) establece una correspondencia biyectiva entre los caminos ascendentes que parten del origen y llegan a $(m-n, n)$ y aquellos otros que partiendo del origen alcanzan el punto simétrico $(n, m-n)$. Pero el número de estos últimos es según (3.1.2):

$$\binom{n+(m-n)}{m-n} = \binom{m}{m-n}$$

□

Fórmula de Stifel 3.1.4.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$$

Demostración combinatoria: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Los subconjuntos de n elementos de A pueden dividirse en dos clases: la de aquellos que no contienen al elemento a_m y la de los que sí lo contienen. La primera clase está constituída simplemente por los subconjuntos de n elementos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$ y su número es $\binom{m-1}{n}$. En cuanto a los subconjuntos que contienen al a_m observemos que quitándoles este elemento resulta un subconjunto de $n-1$ elementos de $\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. Por lo tanto su número es $\binom{m-1}{n-1}$. Aplicando el principio de la suma queda entonces demostrada la proposición. □

Demostración aritmética:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!\,(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)![(m-1)-(n-1)]!}$$
$$= \frac{(m-1)!\,(m-n) + (m-1)!n}{n!\,(m-n)!} = \frac{(m-1)!(m-n+n)!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

□

Demostración algebraica:

$$(x+y)^m = (x+y)^{m-1} \cdot (x+y) = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^n y^{m-n-1} \right) (x+y)$$

Calculando ahora el coeficiente de $x^n y^{m-n}$ en esta última expresión resulta ser justamente $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$ □

Demostración geométrica: $\binom{m}{n}$ es el número de caminos ascendentes que partiendo del origen alcanzan el punto de coordenadas $(m-n, n)$. El penúltimo vértice de cualquiera de estos caminos debe ser necesariamente $(m-n-1, n)$ o $(m-n, n-1)$. Esto nos permite clasificar los caminos en cuestión en dos clases disjuntas. Los caminos con penúltimo vértice en $(m-n-1, n)$ son $\binom{(m-n-1)+n}{n} = \binom{m-1}{n}$, mientras que los que tienen el penúltimo vértice en el punto $(m-n, n-1)$ son a su vez: $\binom{(m-n)+(n-1)}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}$ □

El triángulo aritmético

La fórmula (3.1.4) permite calcular los coeficientes binomiales recursivamente: conocidos los coeficientes con índice superior $m-1$ se pueden calcular los de índice superior m mediante simples sumas. Si disponemos los coeficientes binomiales en una tabla triangular, como se indica a continuación, entonces cada uno de ellos es igual a la suma de los dos que están en la fila inmediata superior, a su izquierda y a su derecha. Esta tabla se conoce con el nombre de "triángulo aritmético" o "triángulo de Pascal" y posee muchas propiedades interesantes. Una monografía de carácter elemental sobre este triángulo es la de Uspensky [U1].

Obsérvese que los lados del triángulo sólo contienen unos, puesto que $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$, para todo $m \geq 0$.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

. . . . . .

En el siguiente triángulo hemos calculado efectivamente todos los coeficientes binomiales con índice superior menor o igual a diez.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & & & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & & \\
 & 1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}$$

Proposición 3.1.5.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Demostración aritmética: Por el teorema del binomio (3.1.1) el miembro izquierdo de (3.1.5) es igual a $(1+1)^n = 2^n$. □

Demostración combinatoria: Sea A un conjunto de n elementos. Puesto que $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de A con k elementos, es claro que el miembro izquierdo de la igualdad a demostrar representa la cantidad total de subconjuntos de A, que ya sabemos que es 2^n por (1.3.4). □

Demostración geométrica: El número de caminos ascendentes de longitud n que parten del origen es 2^n (3.1.2). Estos caminos se pueden clasificar según el punto de llegada, que debe ser de la forma (h, k) con h, k enteros no negativos y $h + k = n$. Estos puntos están alineados, y son $(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \ldots, (n, 0)$. Según (3.1.2) el número de caminos que llegan a $(h, n-h)$ es $\binom{n}{h}$, por lo tanto una aplicación del principio de la suma completa la demostración. □

Proposición 3.1.6. *Para todo $n > 0$ se tiene:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

Demostración aritmética: El miembro izquierdo es el desarrollo de $(1-1)^n$ y por lo tanto debe ser 0. □

Demostración combinatoria: Escribiendo (3.1.6) en la forma siguiente:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$$

vemos que podemos darle la siguiente interpretación combinatoria: para todo conjunto finito no vacío, el número de sus subconjuntos con cardinal par es igual al número de sus subconjuntos con cardinal impar. Para probar esto sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y consideremos la función $f : 2^A \to 2^A$ definida así: si $X \subset A$ entonces $f(X) = X \triangle \{a_1\}$. En otras palabras, a X le hacemos corresponder el subconjunto de A que resulta de agregarle a_1, si no lo tenía, o de quitárselo, si lo tenía. Esta función es biyectiva, ya que obviamente es su propia inversa, y transforma conjuntos de cardinal par en conjuntos de cardinal impar y viceversa. Por lo tanto hay tantos de una clase como de la otra. □

Proposición 3.1.7.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}$$

Demostración: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ un conjunto de cardinal $n+1$ y sea C_i la clase formada por los subconjuntos de $k+1$ elementos de A cuyo elemento con *mayor* subíndice sea el a_i. Tendremos así clases $C_{k+1}, \ldots, C_n$. Es fácil ver que $|C_i| = \binom{i-1}{k}$ y entonces (3.1.7) se sigue del principio de la suma. □

(Otra demostración de 3.1.7 puede obtenerse aplicando la fórmula de Stifel (3.1.4) en forma sucesiva.)

Identidad de Vandermonde 3.1.8.

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

Demostración algebraica: $\binom{n+m}{r}$ es el coeficiente de x^r en el desarrollo de $(x+y)^{n+m}$. Pero como $(x+y)^{n+m} = (x+y)^n(x+y)^m$, si desarrollamos por separado $(x+y)^n$ y $(x+y)^m$ y luego hacemos el producto, el coeficiente de x^r resulta ser justamente el miembro derecho de (3.1.8). □

Demostración combinatoria: Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ dos conjuntos de cardinales n y m respectivamente. Entonces podemos interpretar el miembro izquierdo de (3.1.8) como la cantidad de subconjuntos de r elementos de la unión $A \cup B$. Pero cada uno de esos subconjuntos estará formado por un cierto número j de elementos de A y $r-j$ elementos de B. Por el principio del producto el número de conjuntos que pueden formarse con j elementos de A y $r-j$ elementos de B es $\binom{n}{j}\binom{m}{r-j}$ y sumando estas cantidades para j entre 0 y r resulta (3.1.8). □

3.2 Coeficientes multinomiales

Dados un número natural m y enteros $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(k \geq 2)$ sean $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dos conjuntos de m y k elementos respectivamente. Denotaremos mediante el símbolo

$$\binom{m}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}$$

al número de funciones $f : X \to Y$ tales que $|f^{-1}(y_i)| = n_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Llamaremos a estos números "coeficientes multinomiales". Usando un lenguaje más informal podríamos definir estos números como la cantidad de maneras de distribuir m objetos en k cajas rotuladas $y_1, \ldots, y_k$ de manera tal que la caja y_i contenga exactamente n_i objetos, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Observemos que según nuestra definición si no se cumplen las condiciones $n_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ entonces

$$\binom{m}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = 0$$

Proposición 3.2.1. *Si $n_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$ entonces*

$$\binom{m}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{m!}{n_1!\, n_2!\, \ldots n_k!}$$

Demostración: Sean $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Para definir una función $f : X \to Y$ tal que $|f^{-1}(y_i)| = n_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ seleccionemos primero los n_1 elementos cuya imagen será y_1. Esta selección podemos realizarla de $\binom{m}{n_1}$ maneras. Luego escojamos entre los $m - n_1$ elementos restantes de X aquellos cuya imagen será y_2. El número de formas de hacer esta segunda selección es $\binom{m-n_1}{n_2}$ y prosiguiendo de esta manera y aplicando el principio del producto llegamos entonces a que:

$$\begin{aligned}\binom{m}{n_1 \ldots\ n_k} &= \binom{m}{n_1}\binom{m-n_1}{n_2}\binom{m-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{m-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{m!}{n_1!\,(m-n_1)!}\frac{(m-n_1)!}{n_2!\,(m-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(m-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\,(m-n_1-\cdots-n_k)!} \\ &= \frac{m!}{n_1!\, n_2!\, \ldots n_k!}\end{aligned}$$

□

Es posible dar una interpretación algebraica a estos números mediante la siguiente generalización del Teorema binomial (3.1.1):

Teorema multinomial 3.2.2.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^m = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=m} \binom{m}{n_1 \ldots\ n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

(la sumatoria se extiende a todos los conjuntos ordenados de k números enteros no negativos tales que su suma sea m)

Demostración: Al desarrollar $(x_1 + \cdots + x_k)^m$ se obtienen k^m monomios de grado m en k variables $x_1, \ldots, x_k$. El número de veces que aparece uno de estos monomios, digamos $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ es igual al número de maneras de escoger n_1 factores $(x_1 + \cdots + x_k)$ para seleccionar x_1, n_2 factores para seleccionar x_2, ... , n_k factores para seleccionar x_k. Pero esto puede hacerse justamente de

$$\binom{m}{n_1 \ldots \ n_k}$$

maneras, por la forma en que hemos definido estos números. □

Nota: El teorema que acabamos de demostrar justifica el nombre de "coeficientes multinomiales" que hemos dado a los números que estamos estudiando.

Proposición 3.2.3.

$$\sum_{n_1 + \cdots + n_k = m} \binom{m}{n_1 \ldots \ n_k} = k^m$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del teorema multinomial si ponemos $x_1 = \cdots = x_k = 1$. □

La proposición anterior puede probarse también así: sean $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ conjuntos de m y k elementos respectivamente. $\binom{m}{n_1\, n_2 \ldots n_k}$ es por definición el número de funciones $f : X \to Y$ tales que y_i tiene exactamente n_i preimágenes, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto, si sumamos estos coeficientes para todos los conjuntos ordenados posibles de números no negativos $n_1, \ldots, n_k$ que sumen m, tendremos el número *total* de funciones de X en Y. El resultado, k^m, coincide con el que ya habíamos obtenido en (1.3.12). Ahora bien, si restringimos la sumatoria imponiendo la condición de que todos los n_i sean estrictamente positivos, es claro que estaremos contando solamente aquellas funciones $f : X \to Y$ tales que cada y_i tiene al menos una preimagen, es decir, las funciones sobreyectivas. Queda así demostrada la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4. *El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de m elementos en otro de k elementos es:*

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=m \\ n_i>0}} \binom{m}{n_1 \ldots n_k}$$

Interpretación geométrica de los coeficientes multinomiales

La interpretación geométrica que dimos a los coeficientes binomiales puede generalizarse a los multinomiales. Para ello consideremos las poligonales en $\mathbb{R}^k$ con vértices de coordenadas enteras $P_0P_1 \ldots P_r$ tales que cada vector $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ coincida con alguno de los versores de la base canónica de $\mathbb{R}^k$ (en otras palabras, las coordenadas de P_{i+1} son iguales a las de P_i excepto una de ellas, que es una unidad superior). Llamemos a estas poligonales "caminos ascendentes" en $\mathbb{R}^k$. Entonces el coeficiente $\binom{m}{n_1\, n_2 \ldots n_k}$ cuenta el número de caminos ascendentes que partiendo del origen llegan hasta el punto $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Utilizaremos esta interpretación geométrica para demostrar la siguiente generalización de la fórmula de Stifel:

Proposición 3.2.5.

$$\binom{m}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \binom{m-1}{n_1-1\ n_2\ \ldots\ n_k} + \binom{m-1}{n_1\ n_2-1\ \ldots\ n_k} + \cdots \\ \cdots + \binom{m}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k-1}$$

Demostración: Los caminos ascendentes de longitud m que parten del origen y llegan al punto $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ deben tener como penúltimo vértice uno de los k puntos: $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$, $(n_1, n_2 - 1, n_3, \ldots, n_k), \ldots,$ $(n_1, n_2, \ldots, n_k - 1)$, y es claro que quedan determinados al conocer sus primeros $m-1$ segmentos. El segundo miembro de la igualdad que queremos probar no es más que la suma de la cantidad de caminos ascendentes de longitud $m-1$ que parten del origen y llegan a cada uno de dichos puntos, por lo cual una aplicación del principio de la suma concluye la demostración. □

3.3 Ejercicios

1. Pruebe las identidades siguientes:

(a) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

(b) $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$

(c) $\binom{m-1}{n-1} + 2\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+2}{n+1}$

(d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

2. Calcule las sumas siguientes :

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$

(b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$

(c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots$

(d) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$

(e) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

(f) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots$

(g) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k}$

(h) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

3. ¿Para un valor dado de m, cual es el valor de n que hace máximo el coeficiente binomial $\binom{m}{n}$?

4. Demuestre el teorema del binomio por inducción matemática, usando la fórmula de Stifel.

5. ¿Cuántos caminos ascendentes van desde el punto de coordenadas enteras (a, b) hasta el (c, d), en el plano? Generalice el resultado a $\mathbb{R}^n$.

6. (Principio de reflexión) Pruebe que si (a, b) y (c, d) son dos puntos del plano cartesiano con coordenadas enteras situados a un mismo lado de la diagonal $y = x$ entonces el número de caminos ascendentes que van desde (a, b) hasta (c, d) tocando la diagonal $y = x$ es igual al número total de caminos ascendentes que van desde (b, a) hasta (c, d).

7. (Teorema de la votación) Pruebe que si en una elección entre dos candidatos el ganador obtiene p votos y el perdedor q entonces la probabilidad de que al hacer el escrutinio el ganador vaya siempre adelante de su oponente es $\frac{p-q}{p+q}$. Sugerencia: represente cada escrutinio posible mediante un camino ascendente que parte del origen y llega hasta (p, q) y aplique luego el principio de reflexión (Problema 6).

8. La entrada al teatro cuesta 50 Bs. Al abrir la taquilla la caja está vacía. En una cola esperan turno para comprar su entrada n personas con un billete de 100 Bs cada una, y k personas con un billete de 50 Bs cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que la cola avance fluídamente, sin que la cajera tenga problemas para darle su vuelto a nadie?

9. Sea $X = \{0,1\}^n$. La *distancia de Hamming* entre dos puntos de X, $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$, se define como:

$$\mathrm{d}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

   Es claro que $\mathrm{d}(a,b)$ es igual al número de coordenadas en las cuales a y b difieren, o bien (si a y b son interpretados como números binarios de n dígitos) el número de dígitos binarios ("bits") que a y b tienen diferentes. Un subconjunto W de X tal que la distancia de Hamming entre dos cualesquiera de sus puntos es mayor que $2r$ (para cierto natural r) se dice que es un *código corrector de orden r*. Un tal subconjunto W tiene la propiedad de que ningún elemento de $X \setminus W$ puede estar a distancia menor o igual que r de dos elementos diferentes de W. La utilidad de un código tal consiste en que si una sucesión $w \in W$ de n dígitos binarios es transmitida por un canal con "ruido" y se recibe una sucesión $z \in W$ con r o menos errores, entonces es posible conocer cual fue el código transmitido, a saber el único elemento $w \in W$ tal que $\mathrm{d}(z,w) \leq r$. Sea $M(n,r)$ el máximo número de palabras que puede tener un código corrector $W \subset X$ de orden r. Pruebe que se cumple la desigualdad siguiente:

$$M(n,r) \leq \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{r}}$$

   (El miembro derecho es conocido como "cota de Hamming")

10. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse $3n$ objetos en 3 cajas distintas, de modo que cada caja reciba n objetos?

11. ¿Cuál es el coeficiente de x^4yw^6 en el desarrollo de $(x+y+z+w)^{11}$?

12. (a) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra MISSISSIPPI ?

(b) ¿Y con la condición adicional de que no haya dos letras I consecutivas?

13. Pruebe que $(n!)^n$ divide a $(n^2)!$

Capítulo 4

Principio de Inclusiones y Exclusiones y aplicaciones

4.1 El Principio de Inclusiones y Exclusiones

Si A y B son dos conjuntos disjuntos entonces el principio de la suma nos dice que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Sin embargo, si A y B no son disjuntos la fórmula anterior deja de ser válida porque los elementos de la intersección $A \cap B$ aparecen "contados dos veces" en la suma $|A| + |B|$. Esta situación se corrige fácilmente restando $|A \cap B|$, y se obtiene así la fórmula siguiente, válida en todos los casos: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Una fórmula similar puede obtenerse para tres conjuntos , a saber :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En efecto, en la suma $|A| + |B| + |C|$ los elementos de la unión $A \cup B \cup C$ que pertenecen a exactamente dos de los tres conjuntos están contados dos veces. Esto se corrige restando $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ y $|B \cap C|$. Sin embargo esto deja fuera de la cuenta a los elementos que están en los tres conjuntos, puesto que aparecen contados tres veces y luego restados otras tres veces. Por eso se suma el término $|A \cap B \cap C|$ equilibrando la fórmula. Resulta bastante claro que estos razonamientos pueden generalizarse a uniones de n conjuntos. Dicha generalización constituye el llamado "principio de inclusiones y exclusiones". Pero antes de enunciarlo y demostrarlo rigurosamente necesitamos una notación adecuada: dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y un conjunto de índices $F \subset \mathbb{N}_n$ no vacío denotaremos mediante A_F a la intersección de los A_i tales que $i \in F$, en símbolos:$A_F = \bigcap_{i \in F} A_i$. En particular $A_{\{i\}} = A_i$ y $A_{\{i,j\}} = A_i \cap A_j$. Si los conjuntos A_i están todos contenidos en

un "conjunto universal" X y $F = \emptyset$ entonces siguiendo la convención usual $A_\emptyset = X$.

Lema 4.1.1. *Si I es un conjunto finito entonces*

$$a)\ \sum_{F\subset I}(-1)^{|F|} = 0 \qquad b)\ \sum_{\emptyset\neq F\subset I}(-1)^{|F|} = -1$$

Demostración: Si $|I| = n$ entonces I tiene $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos. La suma de los términos $(-1)^{|F|}$ correspondientes a estos subconjuntos será entonces $(-1)^k\binom{n}{k}$. Pero si sumamos estas expresiones para $k = 0, 1, \ldots, n$ el resultado es 0, como demostramos en (3.1.6) . Así resulta la primera igualdad. Para obtener la segunda simplemente se pasa al segundo miembro el término correspondiente al conjunto vacío, que es $(-1)^0 = 1$. □

Principio de inclusiones y exclusiones 4.1.2.

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = -\sum_{\emptyset\neq F\subset\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}|A_F|$$

Demostración: Sea $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Si $x \in A$ definamos $I(x) = \{i \in \mathbb{N}_n : x \in A_i\}$. Entonces se tiene:

$$-\sum_{\emptyset\neq F\subset\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}|A_F| = -\sum_{\emptyset\neq F\subset\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\sum_{x\in A_F}1 =$$
$$= -\sum_{x\in A}\sum_{\emptyset\neq F\subset I(x)}(-1)^{|F|} = -\sum_{x\in A}(-1) = \sum_{x\in A}1 = |A|$$

La justificación de las igualdades anteriores es la siguiente: en primer lugar substituímos $|A_F|$ por una suma de tantos unos como elementos tenga A_F. En la doble sumatoria resultante invertimos el orden de sumación, de modo que en la primera sumatoria x recorre A y en la segunda sumamos en aquellos conjuntos de índices $F \subset \mathbb{N}_n$ tales que $F \neq \emptyset$ y $x \in A_F$. Pero esta última condición es equivalente a decir que $F \subset I(x)$. Finalmente aplicamos la segunda igualdad del Lema (4.1.1). □

Fórmula de Sylvester 4.1.3. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos de un conjunto X entonces*

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i| = \sum_{F \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|} |A_F|$$

Observaciones: $\overline{A}_i$ es el complemento de A_i respecto a X, es decir $X \backslash A_i$. En el miembro derecho de la igualdad F puede ser vacío. Según la convención $A_\emptyset = X$ el término correspondiente en la sumatoria es $(-1)^{|\emptyset|}|A_\emptyset| = |X|$.

Demostración:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i| = |X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$
$$= |X| + \sum_{\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|} |A_F| = \sum_{F \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|} |A_F|$$

□

4.2 Funciones sobreyectivas

Como aplicación del principio de inclusiones y exclusiones calcularemos el número de funciones sobreyectivas de un conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ en otro $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Denotaremos mediante $\text{Sobre}(A, B)$ el conjunto de las funciones de A sobre B.

Proposición 4.2.1. *Si $|A| = n$ y $|B| = m$ entonces*

$$|\text{Sobre}(A, B)| = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m} \binom{m}{k} k^n$$

Demostración: Sea $G_i = \{f : A \to B \backslash \{b_i\}\}$ el conjunto formado por las funciones de A en B que no toman el valor b_i. Es claro que podemos escribir $\text{Sobre}(A, B) = B^A \backslash (\cup_{i=1}^{m} G_i)$. Observemos también que si F es un conjunto de k índices entre 1 y m entonces $\cap_{i \in F} G_i$ son las funciones de A en B que no toman ningún valor b_i con $i \in F$. Es decir que $\cap_{i \in F} G_i$ son las funciones de A en $B \backslash \{b_i : i \in F\}$, y por lo tanto su número es $(|B| - |F|)^n = (m-k)^n$.

Por último, recordemos que para cada k entre 0 y m hay $\binom{m}{k}$ subconjuntos de $\mathbb{N}_m$ con k elementos. Estamos ya en condiciones de aplicar (4.1.3):

$$|\text{Sobre}(A,B)| = \sum_{F\subset\mathbb{N}_n} (-1)^{|F|} |\bigcap_{i\in F} G_i| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

En esta última sumatoria podemos hacer variar el índice k desde 0 hasta $m-1$, puesto que el sumando correspondiente a $k=m$ es nulo. Para obtener la segunda expresión para $|\text{Sobre}(A,B)|$ basta efectuar el cambio de variable $h = m-k$ en la fórmula que acabamos de demostrar, recordando que $\binom{m}{m-h} = \binom{m}{h}$ □

4.3 Desarreglos

Un *desarreglo* de los números del 1 al n es una permutación σ de $\mathbb{N}_n$ tal que $\sigma(i) \neq i\,,\, \forall i = 1,\ldots,n$. En otras palabras los desarreglos son las permutaciones sin puntos fijos. Aplicando el principio de inclusiones y exclusiones es posible calcular fácilmente el número de desarreglos.

Proposición 4.3.1. *El número de desarreglos de los números del 1 al n es*

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Demostración: Sea S_n el conjunto de todas las permutaciones de los números del 1 al n. Definamos A_i como el conjunto de las permutaciones que dejan fijo el número i, es decir $A_i = \{\sigma \in S_n \,:\, \sigma(i) = i\}$. Es claro que $|A_i| = (n-1)!$, puesto que A_i se puede identificar con las permutaciones de un conjunto de $n-1$ elementos, a saber $\{j \in \mathbb{N}_n \,:\, j \neq i\}$. Si $F \subset \mathbb{N}_n$ entonces $\cap_{i\in F} A_i$ son las permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que dejan fijos todos los elementos de F. El número de tales permutaciones es $(n-|F|)!$. Nuevamente estamos en condiciones de aplicar (4.1.3):

$$|\{\sigma \in S_n \,:\, \sigma(i) \neq i \;\forall\, i = 1,\ldots,n\}| = |\bigcap_{i\in F} A_i| =$$

$$\sum_{F\subset\mathbb{N}_n} (-1)^{|F|}(n-|F|)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

□

Observación: De (4.3.1) se deduce que $\lim_{n\to\infty}(D_n/n!) = e^{-1}$. Esto se puede decir en lenguaje probabilístico así: la probabilidad de que una permutación de los números del 1 al n escogida al azar sea un desarreglo tiende al valor límite e^{-1} cuando n tiende a infinito.

4.4 Aplicaciones a la teoría de números

La función μ de Möbius se define para cada número natural $n > 1$ de la manera siguiente:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ es producto de } r \text{ primos diferentes} \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por un cuadrado perfecto mayor que 1} \end{cases}$$

Además por convención $\mu(1) = 1$. Así por ejemplo tenemos que $\mu(2) = -1$, $\mu(6) = 1$, $\mu(12) = 0$ y $\mu(30) = -1$.

Proposición 4.4.1. *Si $n > 1$ entonces*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

Demostración: Es claro que los únicos divisores de n que hace falta considerar son el 1 y los que son producto de primos diferentes ya que los demás (es decir los que sean divisibles por un cuadrado perfecto) no contribuirán en nada a la suma. Sean $p_1, \ldots, p_k$ los divisores primos de n. Aceptando por convención que un producto vacío (sin factores) es 1 , resulta claro que:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{F\subset\mathbb{N}_k} \mu(\prod_{i\in F} p_i) = \sum_{F\subset\mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}$$

pero esta última suma es 0 en virtud de (4.1.1). □

Como una última aplicación del principio de inclusiones y exclusiones consideremos la siguiente cuestión: si se toman dos números naturales "al azar", ¿cuál es la probabilidad de que sean primos entre sí?. La siguiente proposición da un sentido preciso a esta pregunta y la correspondiente respuesta.

Proposición (Lejeune Dirichlet) 4.4.2. *Sea c_n el número de pares ordenados de números naturales coprimos menores o iguales que n. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

Demostración: La cantidad de múltiplos de un número natural a menores o iguales que otro natural n es la parte entera de $\frac{n}{a}$, que denotaremos mediante $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$. En efecto, los múltiplos en cuestión son $a, 2a, \ldots, ta$ siendo t el mayor entero tal que $ta \leq n$, es decir que $t = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor$. La cantidad de pares ordenados de números naturales menores o iguales que n y ambos múltiplos de a será entonces, por el principio del producto, $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor^2$. Aplicando ahora el principio de inclusiones y exclusiones (4.1.3) resulta:

$$c_n = n^2 - \sum_{\substack{p \\ \text{primo}}} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{p<q \\ \text{primos}}} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor^2 - \cdots = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2$$

Ahora bien, como

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 = \left(\frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)\left(\frac{n}{k} + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) < \frac{2n}{k}$$

resulta:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} - \frac{c_n}{n^2} \right| = \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left(\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \right) \right| < \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to 0$$

puesto que, como es bien sabido, $\sum_{k=1}^{n}(1/k) = \log_e n + \gamma + o(1)$ (siendo γ la constante de Euler-Mascheroni. Ver [R3] pag. 314). Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

Para sumar esta última serie multipliquémosla por $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{kn=m} \frac{\mu(k)}{k^2 n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k|m} \mu(k) \right) \frac{1}{m^2} = 1$$

puesto que todos los términos de la última serie, excepto el primero, son nulos en virtud de la Proposición (4.4.1). Ahora bien, la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ es $\pi^2/6$. Este conocido resultado puede obtenerse fácilmente evaluando en $x = 0$ el desarrollo en serie de Fourier de cosenos de la función $|x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y por varios otros métodos (ver por ejemplo [C2]). Por consiguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{6}{\pi^2}$$

□

4.5 Ejercicios

1. En un grupo de 100 hindúes hay 40 que hablan hindi, 40 que hablan bengalí y 20 que hablan penjabi. Hay 20 que hablan hindi y bengalí y 5 que hablan hindi y penjabi. Hay 31 que hablan al menos dos de las tres lenguas y 33 que no hablan ninguna de ellas. ¿Cuántos hablan las tres lenguas?

2. ¿Cuántos números del 1 al 1000000 no son ni cuadrados perfectos, ni cubos perfectos ni potencias cuartas perfectas?

3. Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son números naturales primos entre sí entonces la cantidad de múltiplos de algún a_i menores o iguales que n viene dada por:

$$\sum_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor - \sum_{i<j} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j} \right\rfloor + \sum_{i<j<k} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j a_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^r \left\lfloor \frac{n}{a_1 \ldots a_r} \right\rfloor$$

4. Demuestre el principio de inclusiones y exclusiones usando el método de inducción matemática.

5. Sea $\phi(n)$ el número de enteros positivos menores o iguales que n y coprimos con n (ϕ se conoce con el nombre de función de Euler). Usando el principio de inclusiones y exclusiones pruebe que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los factores primos distintos de n entonces

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Pruebe también que ϕ es multiplicativa, es decir que si m y n son coprimos entonces $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
Por último pruebe que $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

6. Una mesa redonda está dispuesta para $2n$ comensales. ¿De cuántas maneras pueden sentarse n matrimonios con la condición de que ninguna esposa esté junto a su esposo?

7. (Problema de los matrimonios) Una mesa redonda está dispuesta para $2n$ comensales. ¿De cuántas maneras pueden sentarse n matrimonios con la condición de que se alternen hombres y mujeres y ninguna esposa esté junto a su esposo?

8. Dados n conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ pruebe que:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| = -\sum_{\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|} |\bigcup_{i \in F} A_i|$$

9. (Fórmula de la criba de Jordan)

   Dados n conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ y un entero k, $0 \leq k \leq n$, pruebe que el número de elementos que pertenecen a exactamente k conjuntos es:

$$\sum_{\substack{F \subset \mathbb{N}_n \\ |F| \geq k}} (-1)^{|F|-k} \binom{|F|}{k} |A_F|$$

   (Este resultado es una generalización de la fórmula de Sylvester, la cual se obtiene como caso particular para $k = 0$.)

Capítulo 5

Relaciones de recurrencia y funciones generatrices

5.1 Números de Fibonacci

En el "Liber Abaci", obra escrita a comienzos del siglo XIII y que compendia el conocimiento aritmético y algebraico de la época, Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, plantea el siguiente problema: "En un patio cerrado se coloca una pareja de conejos para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y se supone que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva". Fibonacci resuelve el problema calculando el número de parejas mes a mes, y expone sus resultados en forma de tabla. Además de las condiciones expresas en el planteo del problema, supongamos que ningún conejo muere y que la pareja inicial acaba de nacer. Llamemos F_n al número de parejas de conejos existentes en el mes n. Entonces es claro que $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$. En el tercer mes la pareja inicial alcanza su madurez sexual y por lo tanto engendra una nueva pareja. Así tenemos $F_3 = 2$. Es claro también que $F_4 = 3$. En el quinto mes, la pareja nacida en el tercer mes está también en condiciones de procrear por lo cual nacerán dos nuevas parejas, y tendremos $F_5 = 5$. Así podríamos continuar analizando el número de nacimientos mes a mes. Observemos sin embargo que existe una manera muy sencilla de calcular el número de parejas en un mes determinado si se conoce el número de parejas existente en los dos meses precedentes. En efecto, el número de parejas nacidas en el mes n es igual al número de parejas que había en el mes $n-2$, pues ésas son las que en el mes n tendrán dos meses o más de edad y por

lo tanto estarán en condiciones de procrear. A este número debemos sumar el de parejas existentes en el mes $n-1$, ya que todas ellas (debido a la suposición de que no hay decesos) seguirán viviendo en el mes n. Por lo tanto tenemos que para todo $n \geq 2$ se verifica la relación $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ la cual aparece explícitamente en los trabajos de Kepler, unos cuatrocientos años después de la aparición del Liber Abaci. Aplicando esta relación es fácil computar sucesivamente los términos de la sucesión $\{F_n\}$, conocida como "sucesión de Fibonacci" : $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$, $F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$, $F_6 = F_4 + F_5 = 3 + 5 = 8$, $F_7 = F_5 + F_6 = 5 + 8 = 13$, $F_8 = F_6 + F_7 = 8 + 13 = 21$, etc.

Esta sucesión tiene muchas propiedades interesantes, y se le ha dedicado una abundante literatura. Una interesante monografía, de carácter elemental, es la de N. Vorobyov [V2]. En Botánica los números de Fibonacci aparecen al estudiar la filotaxia, o sea la disposición de las hojas en los árboles, de los folículos en flores como la del girasol, de las escamas de la piña, etc. (ver [C3] y [C4]). La relevancia de los números de Fibonacci para la teoría de los algoritmos se puso de manifiesto por primera vez en 1844, cuando G. Lamé la utilizó para analizar el número de divisiones que se efectúan en el algoritmo de Euclides (vea a este respecto el volumen 2 de la obra de D. E. Knuth [K1].)

El siguiente resultado se refiere a las sucesiones en las cuales, como en la de Fibonacci, cada término está determinado por uno o varios de los términos precedentes.

Proposición 5.1.1. *Sea X un conjunto, k un natural, $f : X^k \to X$ una función y $a_1, \ldots, a_k$ elementos de X. Entonces existe una única sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X tal que $x_i = a_i$ para $i = 1, \ldots, k$ y $x_n = f(x_{n-k}, \ldots, x_{n-1})$ para todo $n > k$.*

Demostración: Definamos $x_i = a_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Una vez hecho esto, definamos x_{k+1} como $f(x_1, \ldots, x_k)$, x_{k+2} como $f(x_2, \ldots, x_{k+1})$, y así sucesivamente. Más precisamente, si $n > k$ y ya han sido definidos los términos x_i para $i < n$, entonces definimos x_n como $f(x_{n-k}, \ldots, x_{n-1})$. El principio de inducción matemática garantiza que la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, y obviamente cumple las condiciones exigidas. También es inmediato probar la unicidad. En efecto, si $\{y_n\}$ es otra sucesión que satisface las condiciones pedidas, entonces $y_i = a_i = x_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Para $n > k$, supongamos por inducción que $y_i = x_i$ para todo $i < n$. Entonces $y_n = f(y_{n-k}, \ldots, y_{n-1}) = f(x_{n-k}, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ □

Una relación del tipo $x_n = f(x_{n-k}, \ldots, x_{n-1})$ es llamada "relación de recurrencia". No es sin embargo el único tipo de relación de recurrencia posible; más adelante veremos algunos ejemplos más complicados. Su importancia en Combinatoria proviene del hecho de que la mayoría de los problemas de conteo dependen de uno o más parámetros enteros, por lo cual la solución general consiste en una sucesión (o una sucesión doble, triple, etc.) con esos parámetros como índices, resultando muchas veces más fácil encontrar una relación de recurrencia satisfecha por los términos de esa sucesión que encontrar una fórmula explícita para calcularlos. Además el conocimiento de la relación de recurrencia permite no solamente calcular cuántos términos se deseen de la sucesión, sino que muchas veces permite también deducir propiedades de la misma. Tomaremos como ejemplo para ilustrar esta afirmación la propia sucesión de Fibonacci:

Proposición 5.1.2. *Los términos F_n de la sucesión de Fibonacci satisfacen las desigualdades $\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, siendo $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.*

Demostración: Observemos en primer lugar que el número α (conocido como la "razón áurea") satisface la igualdad $\alpha^2 = 1 + \alpha$. La demostración procede por inducción. Se verifica de inmediato que las desigualdades se satisfacen para $n = 1$ y $n = 2$. Supongamos que $\alpha^{k-2} \leq F_k \leq \alpha^{k-1}$ para todo $k < n$. Entonces: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \leq \alpha^{n-3} + \alpha^{n-2} = \alpha^{n-3}(1 + \alpha) = \alpha^{n-3} \cdot \alpha^2 = \alpha^{n-1}$. Análogamente: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \geq \alpha^{n-4} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-4}(1 + \alpha) = \alpha^{n-4} \cdot \alpha^2 = \alpha^{n-2}$. □

Los números de Fibonacci están relacionados con numerosas cuestiones combinatorias. Consideremos por ejemplo el problema de subir una escalera de n escalones, suponiendo que sólo pueden darse pasos sencillos (subiendo un escalón) o dobles (subiendo dos escalones). ¿De cuántas maneras puede subirse la escalera? Llamemos E_n a ese número. Entonces obviamente $E_1 = 1$. Una escalera de dos escalones puede subirse con un solo paso doble o con dos pasos sencillos, por lo tanto $E_2 = 2$. Para $n = 3$ hay tres posibilidades: tres pasos sencillos, uno doble seguido de otro sencillo y uno sencillo seguido de otro doble. Por tanto $E_3 = 3$. Es fácil ver que la sucesión $\{E_n\}$ satisface la misma relación de recurrencia que los números de Fibonacci. En efecto, los modos de subir una escalera de n escalones (con $n > 2$) pueden clasificarse en dos categorías disjuntas: aquellos en los cuales se pisa el escalón $n-1$ (y que son obviamente E_{n-1}) y aquellos en los cuales se llega al escalón $n-2$ y luego

se da un paso doble. Estos últimos son evidentemente E_{n-2}. Por el principio de la suma se tiene entonces que $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$. Esta sucesión no es idéntica a la de Fibonacci, ya que $E_2 = 2$ mientras que $F_2 = 1$. Sin embargo entre ambas existe una relación muy estrecha, a saber: $E_n = F_{n+1}$. Esta aserción se demuestra fácilmente por inducción. En efecto, $E_1 = 1 = F_2$ y $E_2 = 2 = F_3$. Aceptando ahora que $E_k = F_{k+1}$ para todo $k < n$, se tiene que $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. Podemos decir entonces que F_n es el número de maneras de subir una escalera de $n - 1$ escalones, con pasos dobles o sencillos.

Utilizaremos esta interpretación combinatoria para demostrar el siguiente resultado, del cual pueden deducirse interesantes propiedades aritméticas de los números de Fibonacci (ver problemas al final del capítulo).

Proposición 5.1.3.

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

Demostración: F_{n+m} es el número de maneras de subir una escalera de $n + m - 1$ escalones con pasos sencillos o dobles. Pero una tal escalera se puede subir o bien pisando el escalón número n o bien sin pisarlo. Hay E_n modos de llegar hasta el escalón n y E_{m-1} modos de subir los $m - 1$ escalones restantes. Entonces, por el principio del producto, los modos de subir pisando el escalón n son $E_nE_{m-1} = F_{n+1}F_m$. Para subir la escalera sin pisar el escalón n hay que llegar hasta el escalón $n - 1$ (lo cual puede hacerse de E_{n-1} modos), dar un paso doble para situarse en el escalón $n+1$ y luego subir los $m - 2$ escalones restantes (lo cual puede hacerse de E_{m-2} modos). Entonces, por el principio del producto, el número de maneras de subir sin pisar el escalón n es $E_{n-1}E_{m-2} = F_nF_{m-1}$. Por el principio de la suma el número total de maneras de subir la escalera es entonces $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$. □

5.2 Funciones generatrices

¿Existirá alguna fórmula que nos dé el n-simo término de la sucesión de Fibonacci? Esta pregunta puede parecer un tanto ociosa, por cuanto una fórmula para F_n no es en definitiva más que una expresión simbólica indicativa de las operaciones que deben ser realizadas, dado n, para calcular

F_n. Pero ya conocemos un método efectivo para calcular F_n , a saber la aplicación sucesiva de la relación de recurrencia partiendo de los términos iniciales $F_1 = F_2 = 1$. Sin embargo, disponer de una fórmula para F_n podría tal vez permitirnos obtener más información sobre esta sucesión. Este problema fué resuelto por A. De Moivre unos quinientos años después de la publicación del Liber Abaci. El método que utilizó se basa en el uso de las llamadas "funciones generatrices" y tuvo gran importancia en el desarrollo de la Combinatoria y del Cálculo de Probabilidades ya que puede ser aplicado con éxito a muy diversos problemas.

Supongamos que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión de números reales o complejos y consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si esta serie converge en algún entorno del origen a una función $g(z)$ diremos que $g(z)$ es la *función generatriz* de la sucesión dada. Análogamente, si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n$ converge en algún entorno del origen a una función $h(z)$ diremos que $h(z)$ es la *función generatriz exponencial* de la sucesión $\{a_n\}$. Por ejemplo, la función generatriz de la sucesión constante $1, 1, 1, \ldots$ es $\frac{1}{1-z}$ y su función generatriz exponencial es e^z.

En el caso de la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$, definiendo $F_0 = 0$ (lo cual es compatible con la relación de recurrencia $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ y hace que ésta sea válida para todo $n > 1$) tenemos que su función generatriz es:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + 13z^7 + \cdots$$

(En virtud de la Proposición (5.1.2) el radio de convergencia de esta serie es positivo, más exactamente es $\frac{1}{\alpha}$).

Proposición 5.2.1. *La función generatriz de la sucesión de Fibonacci es:*

$$g(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Demostración:

$$g(z) = z + z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n z^n = z + z^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(F_{n-1} + F_{n-2})z^n =$$

$$= z + z^2 + z\sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n + z^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n = z + zg(z) + z^2 g(z)$$

Despejando $g(z)$ se obtiene el resultado deseado. □

Ya estamos en condiciones de obtener una fórmula para los números de Fibonacci:

Proposición 5.2.2.

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Demostración: $1 - z - z^2$ se factoriza como $(1-\alpha z)(1-\beta z)$, siendo $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ y $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. Por lo tanto la función generatriz de la sucesión de Fibonacci se descompone en fracciones simples como:

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$

para ciertas constantes A y B. La determinación de estas constantes da $A = \sqrt{5}/5,\ B = -\sqrt{5}/5$. Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n = g(z) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(\beta z)^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n - \beta^n)z^n$$

de donde $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n - \beta^n)$. □

A continuación utilizaremos la función generatriz para establecer una interesante relación entre los números de Fibonacci y los coeficientes binomiales:

Proposición 5.2.3.

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k}{k}$$

Demostración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{z}{1-z(1+z)} = z\sum_{n=0}^{\infty} z^n(1+z)^n =$$

$$z\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n+k} = z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k}{k}\right)z^n$$

□

5.3 Relaciones de recurrencia lineales

En esta sección trabajaremos en el campo de los números complejos. Llamaremos "relación de recurrencia lineal de orden k" a una relación de la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n) \tag{5.1}$$

donde f es una función, $c_1, \ldots, c_k$ son constantes y $c_k \neq 0$. Si no aparece el término funcional $f(n)$ diremos que la relación es *homogénea*.

Una *solución* de la relación (5.1) es cualquier sucesión numérica $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfaga la igualdad:

$$z_n = c_1 z_{n-1} + \cdots + c_k z_{n-k} + f(n)$$

para todo $n \geq k$. En virtud de la Proposición (5.1.1) cualquier conjunto de valores iniciales $z_0, \ldots, z_{k-1}$ determina una única solución $\{z_n\}$. Muchos problemas combinatorios se reducen al estudio de relaciones de recurrencia de este tipo, por lo cual su estudio tiene para nosotros especial importancia. Por otra parte estas relaciones permiten construir modelos apropiados para una gran diversidad de problemas científicos. La teoría de las relaciones de recurrencia lineales presenta gran analogía con la de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. De hecho las ecuaciones diferenciales pueden ser aproximadas por "ecuaciones en diferencias" (ver [L1]) cuya solución, en el caso más simple, puede obtenerse por los métodos que estudiaremos a continuación. Una monografía elemental dedicada a las relaciones de recurrencia lineales es [M1]. Numerosos ejemplos se encuentran en [T2].

Proposición 5.3.1. *Una progresión geométrica $\{r^n\}$ de razón r es solución de la relación lineal homogénea de orden k :*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

si y sólo si r es raíz de la llamada "ecuación característica"

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = 0.$$

Demostración: Si r es raíz de la ecuación característica entonces:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

y multiplicando por r^{n-k} se obtiene, para todo $n > k$:

$$r^n - c_1 r^{n-1} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0$$

Recíprocamente, si $\{r^n\}$ es solución de la relación de recurrencia la igualdad anterior se verifica para todo $n > k$ y en particular para $n = k$ con lo que resulta que r es raíz de la ecuación característica. □

Proposición 5.3.2. *Si la ecuación característica de la relación de recurrencia lineal homogénea de orden k:*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

tiene k raíces distintas $r_1, \ldots, r_k$ entonces la solución general de la relación de recurrencia es:

$$\{A_1 r_1^n + \cdots + A_k r_k^n\}$$

siendo $A_1, \ldots, A_k$ constantes arbitrarias.

Demostración: Es muy fácil comprobar que la sucesión $\{A_1 r^n + \cdots + A_k r^n\}$ es solución de la relación de recurrencia para valores cualesquiera de las constantes $A_1, \ldots, A_k$. En efecto, cada sucesión $\{r_i^n\}$ lo es (por la Proposición precedente) y por lo tanto se tiene que :

$$r_i^n = c_1 r_i^{n-1} + \cdots + c_k r_i^{n-k}, \text{para todo } n \geq k \text{ y todo } i = 1, \ldots, k$$

Multiplicando estas k igualdades por $A_1, A_2, \ldots, A_k$ respectivamente y luego sumando se obtiene el resultado deseado.

Recíprocamente, debemos demostrar que toda solución de la relación de recurrencia es una combinación lineal de las progresiones geométricas $\{r_i^n\}$. Para esto es suficiente mostrar que dada una solución $\{z_n\}$ existen constantes $A_1, \ldots, A_k$ tales que se satisfacen las siguientes igualdades :

$$\begin{array}{rcl} A_1 r_1^0 + \cdots + A_k r_k^0 & = & z_0 \\ A_1 r_1^1 + \cdots + A_k r_k^1 & = & z_1 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 r_1^{k-1} + \cdots + A_k r_k^{k-1} & = & z_{k-1} \end{array}$$

En efecto, si esto se logra entonces $\{A_1 r_1^n + \cdots + A_k r_k^n\}$ y $\{z_n\}$ serán dos soluciones de la relación de recurrencia que coinciden en sus primeros

k términos, por lo tanto deberán coincidir en todos los demás. Ahora bien, las igualdades precedentes pueden ser consideradas como un sistema lineal de ecuaciones en las incógnitas $A_1, \ldots, A_k$, el cual tiene solución (única) si el determinante del sistema es no nulo. Pero éste es el bien conocido determinante de Van der Monde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (r_j - r_i)$$

que no es nulo por ser las raíces $r_1, \ldots, r_k$ todas distintas. □

Como ejemplo determinemos la solución de la relación de recurrencia $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ con condiciones iniciales $x_0 = 4$, $x_1 = 7$. La ecuación característica es $x^2 - 5x + 6 = 0$, que tiene raíces $r_1 = 2$ y $r_3 = 3$. Por lo tanto la solución general es $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$. Para satisfacer las condiciones iniciales deben determinarse A y B de modo tal que:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 2A + 3B &= 7 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $A = 5$, $B = -1$ por lo cual la solución buscada es $x_n = 5 \cdot 2^n - 3^n$.

Cuando la ecuación característica tiene raíces múltiples la forma de la solución general es algo más complicada. Enunciaremos el resultado correspondiente sin demostración. El lector interesado puede tratar de dar una demostración propia o consultar algún tratado sobre ecuaciones en diferencias finitas, por ejemplo [L1].

Proposición 5.3.3. *Si la ecuación característica de la relación de recurrencia lineal homogénea de orden k:*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

tiene raíces $r_1, \ldots, r_t$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$ entonces la solución general de la relación de recurrencia es:

$$\{P_1(n) r_1^n + \cdots + P_t(n) r_t^n\}$$

siendo $P_i(n)$ un polinomio en n de grado menor que m_i.

Determinemos por ejemplo la solución general de la relación:

$$x_n = 12x_{n-1} - 57x_{n-2} + 134x_{n-3} - 156x_{n-4} + 72x_{n-5}$$

Su ecuación característica es:

$$x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72 = 0$$

que tiene la raíz triple $r_1 = 2$ y la raíz doble $r_2 = 3$. Por lo tanto la solución general es $x_n = (An^2 + Bn + C)2^n + (Dn + E)3^n$.

Si se dan condiciones iniciales x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 entonces la solución correspondiente puede obtenerse resolviendo un sistema de cinco ecuaciones lineales en las incógnitas $A,\ B,\ C,\ D$ y E.

Hasta el momento hemos considerado únicamente relaciones de recurrencia lineales homogéneas. Para resolver relaciones no homogéneas no hay reglas fijas infalibles. Sin embargo es muy importante el siguiente resultado, según el cual para conocer la solución general de una relación lineal no homogénea es suficiente conocer una solución particular y la solución general de la relación homogénea asociada.

Proposición 5.3.4. *Si $\{z_n\}$ es una solución de la relación de recurrencia*

$$x_n = c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k} + f(n)$$

entonces cualquier otra solución es de la forma $\{z_n + w_n\}$ siendo $\{w_n\}$ una solución de la relación homogénea :

$$x_n = c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k}$$

Demostración: Dada una solución $\{y_n\}$ tenemos que:

$$y_n = c_1y_{n-1} + \cdots + c_ky_{n-k} + f(n) \text{ , para todo } n \geq k$$

y restando miembro a miembro la igualdad:

$$z_n = c_1z_{n-1} + \cdots + c_kz_{n-k} + f(n) \text{ , para todo } n \geq k$$

se obtiene:

$$y_n - z_n = c_1(y_{n-1} - z_{n-1}) + \cdots + c_k(y_{n-k} - z_{n-k})$$

Definiendo $w_n = y_n - z_n$ es claro que $\{w_n\}$ es solución de la relación homogénea , y que $y_n = z_n + w_n$. Recíprocamente, es inmediato verificar que si a $\{z_n\}$ se le suma cualquier solución $\{w_n\}$ de la relación homogénea se obtiene una solución de la relación original. □

El siguiente problema proporciona un ejemplo muy sencillo, pero combinatoriamente interesante, de relación de recurrencia lineal no homogénea. Supongamos que en el plano se trazan n rectas en posición genérica (es decir, tales que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes en un punto). ¿En cuántas regiones queda dividido el plano?

Sea R_n el número buscado. Es inmediato verificar mediante un dibujo que $R_1 = 2,\ R_2 = 4,\ R_3 = 7$ y $R_4 = 11$. Pero ya no es tan simple comprobar por métodos gráficos que $R_5 = 16,\ R_6 = 22$ y $R_7 = 29$. Sin embargo no es difícil obtener una relación de recurrencia satisfecha por los R_n. Para ello observemos que la recta n-sima debe intersectar a las $n-1$ anteriores en $n-1$ puntos diferentes, quedando ella misma dividida en n intervalos ($n-2$ segmentos y 2 semirrectas). Cada uno de esos n intervalos desconecta una de las regiones en que estaba dividido el plano por las primeras $n-1$ rectas. De este modo, al trazar la recta n-sima el número de regiones aumenta en n , o dicho en símbolos:

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Esta relación de recurrencia puede ser resuelta fácilmente sumando miembro a miembro las igualdades:

$$R_2 = R_1 + 2, R_3 = R_2 + 3, \ldots, R_n = R_{n-1} + n$$

Luego de las cancelaciones, y tomando en cuenta que $R_1 = 2$, se tiene que $R_n = R_1 + (2 + 3 + \cdots + n) = (n^2 + n + 2)/2$.

Otra técnica, que se puede emplear en general cuando el término funcional $f(n)$ de una relación de recurrencia lineal es un polinomio, consiste en buscar soluciones particulares de tipo polinómico por el método de los coeficientes indeterminados. Generalmente es suficiente probar con polinomios de grado igual al de $f(n)$, pero a veces es necesario ensayar con polinomios de grado superior. En nuestro caso, ensayemos con polinomios de segundo grado An^2+Bn+C (por cuanto es evidente que no hay soluciones polinómicas de primer grado). Se tiene:

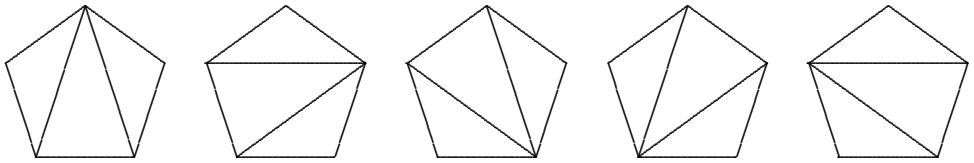
$$An^2 + Bn + C = A(n-1)^2 + B(n-1) + C + n$$

de donde resulta $(1-2A)n+(A-B) = 0$. Para que esta igualdad se cumpla para todo n debe ser $1-2A = 0$ y $A-B = 0$, por lo tanto $A = B = 1/2$. La solución general es entonces $(n^2 + n)/2 + C$. Utilizando la condición inicial $R_1 = 1$ se determina que $C = 1$, llegando al mismo resultado obtenido anteriormente.

5.4 Números de Catalan

Consideremos el problema de determinar el número T_n de triangulaciones de un polígono convexo, es decir el número de maneras de dividir el polígono en triángulos mediante diagonales que no se intersecten. Este problema ya fué estudiado por Euler, quien lo resolvió utilizando el método de las funciones generatrices. Nosotros lo emplearemos para introducir una relación de recurrencia no lineal que se presenta en diversos problemas combinatorios.

Es claro que $T_3 = 1$ y $T_4 = 2$. El pentágono admite cinco triangulaciones, como se muestra en la siguiente figura:



Por lo tanto $T_5 = 5$. Para hallar una relación de recurrencia satisfecha por los números T_n consideremos un polígono convexo de $n+1$ vértices $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ (numerados recorriendo el borde del polígono en sentido horario). Para cada triangulación el lado v_1v_{n+1} debe pertenecer a uno y sólo un triángulo, cuyo vértice restante será v_k para algún $k = 2, \ldots, n$. El número de triangulaciones que contienen al triángulo $v_1v_{n+1}v_n$ es evidentemente igual al número de triangulaciones del polígono de vértices $v_1v_2 \ldots v_n$, es decir T_n. Análogamente el número de triangulaciones que contienen al triángulo $v_1v_{n+1}v_2$ es también T_n. Si $2 < k < n$ entonces todas las triangulaciones que contienen al triángulo $v_1v_{n+1}v_k$ pueden obtenerse combinando una triangulación del polígono de vértices $v_1v_2 \ldots v_k$ con una triangulación del polígono de vértices $v_kv_{k+1} \ldots v_{n+1}$. Por el principio del producto hay entonces T_kT_{n-k+2} triangulaciones que contienen al triángulo $v_1v_{n+1}v_k$. Haciendo variar k desde 2 hasta n y sumando se obtiene entonces que:

$$T_{n+1} = T_n + T_3T_{n-1} + \cdots + T_{n-1}T_3 + T_n$$

Aceptaremos por convención que $T_2 = 1$, con lo cual la relación anterior

puede escribirse en la forma:

$$T_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} T_k T_{n-k+2}$$

Esta relación es más complicada que las que hemos considerado hasta ahora, ya que no es lineal y además T_{n+1} aparece relacionado con todos los términos precedentes y no sólo con un número determinado de ellos. Sin embargo es claro que esta relación determina por completo a los T_n y permite calcular cuántos términos se deseen. Por ejemplo:

$$T_4 = T_2T_3 + T_3T_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$T_5 = T_2T_4 + T_3T_3 + T_4T_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$T_6 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

A continuación hallaremos una fórmula explícita para los T_n. Comencemos por observar que toda triangulación de un polígono convexo de n vértices consta de $n-2$ triángulos. En efecto, la suma de los ángulos internos de todos los triángulos de una triangulación debe ser igual a la suma de los ángulos internos del polígono, que como es bien sabido es $(n-2)\pi$. Y como la suma de los ángulos de cada triángulo es π , el número de éstos debe ser $n-2$. Por otra parte el número de diagonales en cualquier triangulación es $n-3$. En efecto, cada diagonal que se traza hace aumentar el número de regiones en una, por lo cual para llegar a tener $n-2$ triángulos partiendo de una sola región (el polígono original) es necesario trazar $n-3$ diagonales. Contemos ahora el número total de diagonales que aparecen en todas las triangulaciones de un polígono convexo de n lados. Este número es naturalmente $(n-3)T_n$, pero también puede obtenerse teniendo en cuenta que la diagonal v_1v_k (para $2 < k < n$) aparece en T_kT_{n-k+2} triangulaciones. Por lo tanto $T_3T_{n-1}+\cdots+T_{n-1}T_3$ es el número de apariciones de las diagonales v_1v_k $(k = 3, \ldots, n-1)$ en todas las triangulaciones. Si contamos de igual manera las diagonales con un extremo en v_i para $1 = 2, \ldots, n$ y sumamos llegamos a un total de $n(T_3T_{n-1} + \cdots + T_{n-1}T_3)$. Pero en esta expresión cada diagonal v_iv_j está contada dos veces, una vez como diagonal con extremo en v_i y otra como diagonal con extremo en v_j, por lo cual el número total de diagonales en todas las triangulaciones es $\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + \cdots + T_{n-1}T_3)$. Por lo tanto:

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + \cdots + T_{n-1}T_3)$$

Como por otra parte sabemos que:

$$T_{n+1} - 2T_n = T_3T_{n-1} + \cdots + T_{n-1}T_3$$

se llega a que:

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}T_n$$

A partir de esta relación ya es fácil encontrar la expresión que buscábamos para T_n :

Proposición 5.4.1. *El número T_n de triangulaciones que admite un polígono convexo de n lados viene dado por la fórmula :*

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Demostración: Como acabamos de ver $T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}T_n$, por lo cual:

$$T_n = \frac{2(2n-5)}{n-1}T_{n-1} = \frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-1)(n-2)}T_{n-1} =$$

$$\frac{(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{(n-1)(n-2)(n-2)(n-3)}T_{n-2} = \cdots = \frac{(2n-4)!}{(n-1)[(n-2)!]^2}$$

□

Consideremos ahora el problema de poner paréntesis en un producto de n factores ($n \geq 2$) de tal manera que cada subproducto conste de exactamente dos factores, y llamemos P_n al número de maneras de hacerlo. Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{array}{lcl} P_2 = 1 & : & (ab) \\ P_3 = 2 & : & ((ab)c), (a(bc)) \\ P_4 = 5 & : & (((ab)c)d), ((a(bc))d), ((ab)(cd)), (a((bc)d)), (a(b(cd))) \end{array}$$

Para hallar una relación de recurrencia satisfecha por los números P_n supongamos que los n factores son $x_1x_2 \ldots x_n$ y observemos que el par de paréntesis exteriores siempre indica el producto de dos subproductos de la

forma $x_1 \dots x_k$ y $x_{k+1} \dots x_n$. En el primer subproducto se pueden poner paréntesis de P_k maneras, y en el segundo de P_{n-k} maneras. Aceptemos por convención que $P_1 = 1$, para que lo anterior valga incluso cuando uno de los dos subproductos conste de un solo elemento. Entonces, aplicando el principio del producto y luego sumando para $k = 1, \dots, n-1$ se tiene que :

$$P_n = P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \cdots + P_{n-1} P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}$$

Proposición 5.4.2. *El número de maneras de poner paréntesis en un producto $x_1 x_2 \dots x_n$ de n factores ($n \geq 2$) de tal manera que cada subproducto conste de exactamente dos factores es:*

$$P_n = T_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Demostración: Probaremos por inducción que $P_n = T_{n+1}$. Para $n = 1$ se tiene $P_1 = 1 = T_2$. Supongamos que $P_k = T_{k+1}$ para todo $k < n$. Entonces

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} T_{k+1} T_{n-k+1} = \sum_{k=2}^{n} T_k T_{n-k+2} = T_{n+1}$$

□

Los números $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ son llamados "números de Catalan" en honor a Eugene Charles Catalan (1814-1894) quien los encontró al resolver el problema de los paréntesis, aunque como hemos visto ya habían sido observados por Euler en conexión con el problema de las triangulaciones. Estos números están relacionados con numerosos problemas combinatorios (ver los ejercicios al final del capítulo).

La siguiente Proposición resume las propiedades de los números de Catalan y sus relaciones con T_n y P_n.

Proposición 5.4.3. *La sucesión $\{C_n\}$ es la única solución de la relación de recurrencia $x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k x_{n-k}$ con condición inicial $x_0 = 1$. Además $C_n = P_{n+1} = T_{n+2} = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$.*

Demostración: Es obvio que dada la condición inicial x_0 la relación de recurrencia tiene una solución única. La sucesión $\{C_n\}$ es solución ya que:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_{k+1} P_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} P_k P_{n-k+2} = P_{n+2} = C_{n+1}$$

Como además $C_0 = 1$, queda probada la primera afirmación. La igualdad de C_n, P_{n+1} y T_{n+2} es consecuencia de las dos Proposiciones precedentes. La última igualdad se demuestra fácilmente a partir de la definición de C_n o a partir de la propiedad correspondiente para T_n. □

5.5 Ejercicios

1. Pruebe que $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

2. Pruebe que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

3. Pruebe que si $n|m$ entonces $F_n|F_m$.

4. Pruebe que números de Fibonacci consecutivos son coprimos.

5. Pruebe que si d es el máximo común divisor de n y m entonces el máximo común divisor de F_n y F_m es F_d.

6. Pruebe que el número de maneras en que un rectángulo de dimensiones $2 \times n$ se puede dividir en n rectángulos de dimensiones 2×1 es F_{n+1}.

7. Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ que no contienen enteros consecutivos es F_{n+2}.

8. Pruebe que el desarrollo en fracción continua de $(1 + \sqrt{5})/2$

   es $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$ y que su n-simo convergente es $\frac{F_{n+2}}{F_n}$.

9. Pruebe que cada entero positivo n se puede expresar de modo único como una suma de números de Fibonacci $F_{k_1} + \cdots + F_{k_r}$ con $k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0$ $(r \geq 1)$, donde $i \gg j$ significa $i \geq j + 2$.

10. Dos jugadores sacan alternativamente fichas de un montón que inicialmente contiene n. El jugador que comienza puede sacar una o más fichas, pero no el montón completo. A partir de entonces, cada jugador puede sacar una o más fichas pero no más del doble de las que sacó el jugador anterior. Gana el que saque la última ficha. Pruebe que si n no es un número de Fibonacci, hay una estrategia ganadora para el primer jugador. Si no, la hay para el segundo.

11. De las regiones en que queda dividido el plano por n rectas en posición genérica, ¿ cuántas son acotadas?

12. ¿En cuántas regiones queda dividido el plano por n circunferencias secantes dos a dos y tales que no haya tres concurrentes en un punto?

13. ¿En cuántas regiones dividen el espacio n planos en posición genérica (es decir, tales que no haya dos paralelos ni tres que contengan una misma recta)? ¿ Cuántas de esas regiones son acotadas?

14. (a) Halle el término general de la sucesión de Lucas $\{L_n\}$, definida por la relación $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ y las condiciones iniciales $L_0 = 2, L_1 = 1$.
    (b) Pruebe que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
    (c) Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ que no contienen enteros consecutivos ni a 1 y n simultáneamente es L_n.

15. Si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión sean $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n$, que supondremos convergentes en algún entorno del origen. Sea además Ta la sucesión "trasladada" $(Ta)_n = a_{n+1}$. Si $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es otra sucesión definamos $a * b$ y $a \wedge b$ así: $(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, (a \wedge b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. Pruebe que $G_{a+b} = G_a + G_b$, $E_{a+b} = E_a + E_b$, $G_{a*b} = G_a G_b$, $E_{a\wedge b} = E_a E_b$, $G_{Ta}(z) = (G_a(z) - a_0)/z$ y $E_{Ta} = (E_a)'$.

16. Halle la solución de la relación de recurrencia:

$$x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} - 12x_{n-3}$$

    con condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = -27, x_2 = -1$.

17. Halle la solución de la relación de recurrencia:

$$x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3}$$

con condiciones iniciales $x_0 = 4, x_1 = 4, x_2 = 24$.

18. Dada la relación de recurrencia:

$$x_n = 7x_{n-1} - 10x_{n-2} + 12n^2 - 70n + 53$$

    (a) Halle una solución particular de tipo polinómico.

    (b) Halle la solución general.

19. ¿ De cuántas maneras un rectángulo de $3 \times n$ se puede dividir en rectángulos de 2×1 ?

20. Resuelva la relación de recurrencia $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k A_{n-k}$ con condición inicial $A_0 = a$ usando funciones generatrices.

21. Dados $2n$ puntos en una circunferencia, ¿de cuántas maneras pueden unirse de a pares mediante n segmentos que no se intersecten?

22. Un *árbol binario*, según la definición recursiva dada por Knuth (ver [K1]) es "un conjunto finito de nodos que está vacío, o se compone de una raíz y de dos árboles binarios disjuntos, llamados subárboles de la derecha y de la izquierda de la raíz". Haciendo abstracción de la naturaleza de los nodos, ¿ cuántos árboles binarios de n nodos hay? O en otras palabras, ¿cuántas estructuras diferentes puede tener un árbol binario de n nodos?

23. Supongamos que en el Ejercicio 8 del Capítulo 3 hay n personas con billetes de 50 Bs y n personas con billetes de 100 Bs. Pruebe que el número de ordenaciones de las $2n$ personas en la cola, para que ésta pase sin contratiempos por la taquilla, es C_n.

Capítulo 6

Permutaciones y particiones

> "Como todo lo que es o puede ser pensado está formado por *partes* reales o, por lo menos, imaginarias, aquello que se distingue específicamente tiene necesariamente que distinguirse, bien por poseer otras partes o por contener las mismas, ordenadas de otro modo."
>
> Leibniz, *De arte combinatoria*, (1666).

6.1 Permutaciones

Una *permutación* de los números del 1 al n es una aplicación biyectiva del conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. Estas permutaciones forman, con la composición como operación, un grupo que denotaremos S_n. Ya sabemos que $|S_n| = n!$. Las permutaciones $\sigma \in S_n$ suelen representarse mediante la notación siguiente:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

la cual significa que $\sigma(i) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Un *ciclo* es un tipo especial de permutación que describiremos a continuación. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k números naturales distintos entre 1 y n y consideremos la aplicación $\theta : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ definida así:

$$\begin{aligned} \theta(a_i) &= a_{i+1} \text{ si } 1 \leq i < k \\ \theta(a_k) &= a_1 \\ \theta(j) &= j \text{ si } j \in \mathbb{N}_n \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \end{aligned}$$

Es claro que $\theta \in S_n$. Diremos que θ es un *ciclo* y escribiremos $\theta = (a_1, \ldots, a_k)$. La longitud de este ciclo es k (se dice también que θ es un "k-ciclo"). Cuando $k = 1$ entonces el ciclo (a_1) es la identidad. Si $k = 2$ entonces (a_1, a_2) tiene el efecto de intercambiar los elementos a_1 y a_2 entre sí, por lo cual un 2-ciclo es llamado también *transposición*. Observemos que un ciclo de longitud k se puede escribir de k maneras distintas, permutando cíclicamente sus elementos. En otras palabras:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_2, \ldots, a_k, a_1) = \cdots = (a_k, a_1, \ldots, a_{k-1})$$

Dos ciclos $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_h)$ se dicen *disjuntos* si

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_h\} = \emptyset$$

Es fácil ver que si θ y ω son ciclos disjuntos entonces conmutan, es decir $\omega \circ \theta = \theta \circ \omega$. Para ello basta aplicar cada uno de los productos a un elemento cualquiera j de $\mathbb{N}_n$.

Proposición 6.1.1. *Toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede descomponer en producto de ciclos disjuntos. Dichos ciclos están unívocamente determinados por σ .*

Demostración: Comencemos por definir una relación $\sim$ en $\mathbb{N}_n$ así:

$$j \sim k \text{ si y sólo si existe un entero } i \text{ tal que } k = \sigma^i(j)$$

Es inmediato verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia, y por lo tanto $\mathbb{N}_n$ queda particionado en clases de equivalencia. Dado $a \in \mathbb{N}_n$ consideremos la sucesión infinita $a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots$. Es claro que esta sucesión debe tener elementos repetidos. Digamos que $\sigma^i(a) = \sigma^j(a)$, con $i < j$. Entonces $\sigma^{j-i}(a) = a$, y $j - i > 0$. Sea m el menor número natural tal que $\sigma^m(a) = a$. Entonces los elementos $a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a)$ son todos distintos y están en la clase de equivalencia de a. De hecho cualquier número equivalente con a está en la lista anterior, ya que si $a \sim b$ entonces $b = \sigma^t(a)$ para algún entero t, y efectuando la división entera de t entre m tendremos $t = qm + r$ con $0 \leq r < m$, y por lo tanto $b = \sigma^{qm+r}(a) = \sigma^r(a)$. En conclusión, la clase de equivalencia del elemento a es $C(a) = \{a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a)\}$. Observemos también que el ciclo $(a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a))$ actúa igual que σ sobre $C(a)$. Si para cada clase de equivalencia formamos un ciclo de acuerdo al procedimiento anterior obtendremos un conjunto de ciclos disjuntos $\theta_1, \ldots, \theta_s$ tales que $\sigma = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \cdots \circ \theta_s$. En efecto, cada $j \in \mathbb{N}_n$ aparece en uno y sólo uno

de los ciclos θ_i (aquel que corresponde a la clase de equivalencia de j) y para ese ciclo se tiene $\theta_i(j) = \sigma(j)$, mientras que los ciclos θ_k con $k \neq i$ (por ser disjuntos de θ_i) dejan fijos a los elementos j y $\sigma(j)$. Por otra parte es fácil ver que en cualquier descomposición de σ en ciclos disjuntos éstos deben estar constituídos por los elementos de una misma clase de equivalencia, y como cada ciclo actúa sobre sus elementos igual que σ resulta que quedan unívocamente determinados. □

Observación: Al escribir una permutación como producto de ciclos disjuntos se suelen omitir los ciclos de longitud 1, ya que son la identidad y no afectan el producto. Sin embargo nosotros los escribiremos siempre explícitamente porque su número tiene importancia combinatoria.

Ejemplo

Dada la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\sigma(1) = 3, \sigma(3) = 5, \sigma(5) = 8, \sigma(8) = 6$ y $\sigma(6) = 1$. Por lo tanto la clase del 1 es $\{1, 3, 5, 8, 6\}$ y el ciclo correspondiente (1,3,5,8,6). Del mismo modo se encuentran los ciclos (2,7) y el 1-ciclo (4). Por lo tanto $\sigma = (1, 3, 5, 8, 6)(2, 7)(4)$.

Denotaremos mediante $\lambda_i(s)$ al número de ciclos de longitud i que aparecen en la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos.

Proposición 6.1.2. *Si $\sigma \in S_n$ entonces $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i(\sigma) = n$*

Demostración: El producto $i\lambda_i(\sigma)$ nos da la cantidad de elementos en las clases de equivalencia de cardinal i, por lo tanto al sumar desde $i = 1$ hasta n tenemos el total de elementos en $\mathbb{N}_n$. □

Proposición 6.1.3. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son enteros no negativos que satisfacen la relación $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$ entonces el número de permutaciones $\sigma \in S_n$ con λ_i ciclos de longitud i para $i = 1, \ldots, n$ viene dado por:*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}$$

Demostración: Los ciclos que aparecen en la descomposición de una permutación $\sigma \in S_n$ son únicos, pero no lo es la manera de escribirlos. De hecho, cada ciclo de longitud λ_i se puede escribir de λ_i maneras, y además los ciclos pueden permutarse entre ellos. Si adoptamos la convención de escribir primero los ciclos de longitud 1, luego los de longitud 2 y así sucesivamente entonces el número de maneras de escribir la descomposición correspondiente a una permutación σ con $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i$ será:

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!$$

En efecto, el factor k^{λ_k} corresponde al número de maneras de "rotar" los elementos de cada uno de los λ_k k-ciclos, mientras que el factor $\lambda_k!$ corresponde al número de maneras de permutar entre sí esos mismos ciclos. Hagamos ahora una lista con las $n!$ permutaciones de los números del 1 al n escritas como sucesiones de n elementos, y pongamos paréntesis del modo siguiente: λ_1 pares de paréntesis encerrando a cada uno de los λ_1 primeros elementos de cada entrada de la lista, λ_2 pares de paréntesis encerrando de a pares a los $2\lambda_2$ elementos siguientes, y así sucesivamente. La condición $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$ asegura que el último paréntesis cerrará a la derecha del último elemento. En la lista resultante aparecerán todas las permutaciones $\sigma \in S_n$ tales que $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$,pero de acuerdo con nuestra discusión inicial es claro que cada una de ellas aparecerá $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!$ veces. Para obtener el número de estas permutaciones dividimos $n!$ (el total de entradas en la lista) por la cantidad de veces que aparece repetida cada una de ellas, obteniendo el valor deseado. □

Como un caso particular de la Proposición que acabamos de demostrar se obtiene que el número de permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que constan de un único ciclo de longitud n es $(n-1)!$. Estas son las llamadas "permutaciones circulares" de la Combinatoria clásica. Otra situación interesante se presenta cuando n es par y nos preguntamos por el número de permutaciones que se descomponen en producto de $n/2 = m$ transposiciones disjuntas, sin puntos fijos. En este caso $\lambda_2 = n/2$ y $\lambda_i = 0$ para $i \neq 2$. Por lo tanto el número buscado es $n!/(2^m m!) = (n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1 = (n-1)!!$.

6.2 Números de Stirling de primera clase

Llamaremos *número de Stirling de primera clase* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ a la cantidad de permutaciones $\sigma \in S_n$ que se descomponen en producto de exactamente k ciclos disjuntos. Si $n > 0$ es claro que $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Aceptaremos por convención que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0$, $\forall n > 0$ (esta convención se justifica si se considera que S_0 es el conjunto de biyecciones del conjunto vacío en sí mismo y tiene un solo elemento, a saber la función vacía, la cual se descompone en producto de 0 ciclos).Lamentablemente no existe acuerdo sobre la notación para los números de Stirling (se usa $s(n,k)$, $s_{n,k}$, S_n^k, etc.) Muchos autores asignan incluso un signo negativo a la mitad de estos números. Nosotros adoptamos la notación de Knuth ([K1]), pues enfatiza la interesante analogía existente entre estos números y los coeficientes binomiales.

A continuación demostraremos varias propiedades de estos números.

Proposición 6.2.1. *Para todo $n > 0$ se cumple:*

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

Demostración: Si $\sigma \in S_n$ se descompone en n ciclos disjuntos, todos ellos deben ser 1-ciclos y por lo tanto σ es la identidad. Esto prueba la primera igualdad. En cuanto a la segunda observemos que si $\sigma \in S_n$ se descompone en un solo ciclo, esto significa que σ es un n-ciclo. Entonces aplicando la Proposición 6.1.3 con $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0,\ \lambda_n = 1$, se obtiene que el número de n-ciclos es $(n-1)!$. Para demostrar la tercera igualdad observemos que si $\sigma \in S_n$ se descompone en producto de $n-1$ ciclos disjuntos todos ellos deben ser de longitud 1 salvo uno, que será de longitud 2. Esto significa que σ es una transposición. Por lo tanto $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$ representa el número de transposiciones en S_n. Pero una transposición queda determinada por el par de elementos que transpone, por lo tanto hay tantas como pares de elementos en $\mathbb{N}_n$, es decir $\binom{n}{2}$. □

Proposición 6.2.2. *Para todo $n > 0$ y $k > 0$ se cumple:*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Demostración: Entre las $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que se descomponen en producto de k ciclos disjuntos contemos aquellas que dejan fijo el elemento n. Su número debe ser $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$, pues si dejan n fijo deben permutar los elementos $\{1, \ldots, n-1\}$ entre sí y descomponerse en producto de $k-1$ ciclos en S_{n-1} para completar con el 1-ciclo (n) el total de k ciclos. En las permutaciones que no dejan fijo a n este elemento debe aparecer en algún ciclo acompañado al menos de otro elemento. Eliminando a n de ese ciclo resulta una permutación de $\mathbb{N}_{n-1}$ que se descompone en producto de k ciclos disjuntos. Por este procedimiento se pueden obtener en verdad todas estas permutaciones, pero cada una de ellas aparecerá repetida $n-1$ veces porque el elemento n puede reinsertarse en $n-1$ posiciones diferentes. Por lo tanto el número de permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que se descomponen en k ciclos disjuntos y que no dejan fijo a n es $(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$. Una aplicación rutinaria del principio de la suma completa la demostración. □

La relación que acabamos de demostrar, parecida a la fórmula de Stifel para los coeficientes binomiales, permite calcular los números de Stirling de primera clase recursivamente y construir un triángulo similar al de Pascal:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Los lados del triángulo se llenan con ceros y unos en virtud de las igualdades $\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0$, $\forall\, n > 0$ y $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\forall\, n \geq 0$. Las entradas restantes se obtienen sumando el número que se halla en la fila superior un lugar a la izquierda con el que está arriba multiplicado por su número de fila. Por ejemplo en la fila 5 y columna 3 tenemos $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 11 + 6 \times 4 = 35$.

Proposición 6.2.3. *Para todo $n \geq 0$ se cumple:*

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Demostración: Lo probaremos por inducción en n. La igualdad se cumple para $n = 0$ (interpretando el producto vacío a la izquierda como igual a 1) y para $n = 1$, en cuyo caso se reduce a $x = x$. Puesto que $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ es un polinomio de grado n en la variable x lo podemos escribir en la forma $A_{n,0} + A_{n,1}x + \cdots + A_{n,n}x^n$. Sea $n > 0$. Nuestro objetivo es probar que $A_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Supongamos inductivamente que $A_{n-1,k} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$. Como el polinomio $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ se anula en x=0 y tiene el coeficiente de x^n igual a 1 es claro que $A_{n,0} = 0 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ y $A_{n,n} = 1 = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} A_{n,k}x^k = (x(x+1)\cdots(x+n-2))\,(x+n-1) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k}x^k\right)(x+(n-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{n-1,k-1}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k}x^k \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(A_{n-1,k-1} + (n-1)A_{n-1,k}\right)x^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $0 < k < n$ se tiene:

$$A_{n,k} = A_{n-1,k-1} + (n-1)A_{n-1,k} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

siendo las dos últimas igualdades consecuencia de la hipótesis inductiva y de la Proposición (6.2.2). □

Proposición 6.2.4. *Para todo $n \geq 0$ se cumple:*

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k$$

Demostración: Basta substituir x por $-x$ en la Proposición 6.2.3 y multiplicar luego ambos miembros por $(-1)^n$. □

Diremos que la sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ presenta un *mínimo de izquierda a derecha* en la posición i si se cumple que $a_j > a_i$ para todo $j < i$. Los números de Stirling de primera clase están relacionados con este concepto del modo siguiente:

Proposición 6.2.5. *El número de permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que al ser escritas en forma de sucesión presentan exactamente k mínimos de izquierda a derecha es $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.*

Demostración: Diremos que la descomposición en producto de ciclos disjuntos de una permutación $\sigma \in S_n$ está escrita en *forma canónica* si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. Cada ciclo está escrito comenzando por su menor elemento.
2. Los ciclos están ordenados de izquierda a derecha en orden decreciente de sus primeros elementos.

Es claro que toda permutación puede escribirse de acuerdo a estas reglas, y de una única manera. Por ejemplo :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (6,8)(3,5,7)(1,2,4)$$

La ventaja de la forma canónica es que si quitamos los paréntesis que encierran a cada ciclo, la permutación original puede ser reconstruída abriendo paréntesis antes de cada mínimo de izquierda a derecha. En efecto, el primer elemento de un ciclo en una descomposición escrita en forma canónica es menor que el primer elemento de cualquier ciclo que lo preceda y por lo tanto menor que cualquier elemento de ese ciclo. En consecuencia, el primer elemento de cada ciclo es un mínimo de izquierda a derecha, y obviamente no hay otros mínimos. Construyamos ahora una aplicación $f : S_n \to S_n$ del modo siguiente: a cada $\sigma \in S_n$ la descomponemos en producto de ciclos disjuntos, escribimos la descomposición en forma canónica, quitamos los paréntesis e interpretamos el resultado como una permutación escrita en forma de sucesión. Por ejemplo si σ es la permutación del ejemplo precedente entonces

$$f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La posibilidad de reconstruir una permutación a partir de la sucesión de elementos que aparecen en su forma canónica nos muestra que f es una biyección, y además hace corresponder a cada permutación que se descomponga en k ciclos disjuntos otra con k mínimos de izquierda a derecha. Una aplicación del principio de correspondencia finaliza la demostración. □

Otro tratamiento de este tema puede verse en [N2].

6.3 Aplicación al análisis de algoritmos

El algoritmo que analizaremos a continuación es muy sencillo, y consiste en examinar secuencialmente un arreglo numérico $x[1], x[2], \ldots, x[n]$ para hallar el mínimo elemento. Al finalizar, la variable min contendrá el valor del menor elemento del arreglo y la variable j su correspondiente índice. Supondremos, para mayor sencillez, que todos los elementos del arreglo son distintos.

PASO 1. (Inicialización) $j \leftarrow 1$; $min \leftarrow x[1]$; $i \leftarrow 2$;

PASO 2. Si $i > n$ finalizar.

PASO 3. Si $x[i] > min$ ir al PASO 5.

PASO 4. $min \leftarrow x[i]$; $j \leftarrow i$;

PASO 5. $i \leftarrow i + 1$; Ir al PASO 2.

El análisis combinatorio de este algoritmo consiste sencillamente en contar el número de veces que se ejecuta cada paso del mismo. Esto es fácil, excepto para el PASO 4, cuya ejecución depende de los datos de entrada (los elementos almacenados en el arreglo). Como máximo este paso se ejecutará $n-1$ veces, y esto ocurrirá si y sólo si $x[1] > x[2] > \cdots > x[n]$. Pero también puede ocurrir que no se ejecute nunca, si los elementos del arreglo son tales que $x[1] < x[2) < \cdots < x[n]$. En general, llamando A al número de veces que se ejecuta el PASO 4, tendremos:

PASO	veces que se ejecuta
1	1
2	n
3	n-1
4	A
5	n-1

El valor exacto de la cantidad A es inferior en una unidad al número de mínimos de izquierda a derecha que presente la sucesión $x[1], x[2], \ldots, x[n]$. Puesto que a los fines de este análisis no tienen importancia los valores absolutos de los números $x[i]$ sino solamente las relaciones de orden entre ellos, supongamos que $x[1], x[2], \ldots, x[n]$ son una permutación de los números del

1 al n. Entonces la Proposición (6.2.5) nos dice que el número de permutaciones para las cuales $A = k$ es $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]$. Si suponemos que las $n!$ permutaciones son equiprobables como datos de entrada, entonces la probabilidad de que sea $A = k$ es:

$$p_k = \text{Prob}(A = k) = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

Para obtener el valor esperado y la variancia de A calculemos primero la correspondiente función generadora de momentos:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^k = \frac{1}{n!}(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

donde la última igualdad es consecuancia de (6.2.3). Calculemos la derivada logarítmica de G(x) :

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}$$

Como $G(1) = 1$, poniendo $x = 1$ en la expresión anterior resulta que el valor esperado de A es:

$$\mathbf{E}(A) = G'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n - 1$$

siendo H_n la suma de los primeros n términos de la serie armónica.

Derivando una vez más resulta:

$$\frac{G''(x)G(x) - (G'(x))^2}{G^2(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+n-1)^2}$$

y calculando nuevamente en x=1 tenemos

$$G''(1) - (G'(1))^2 = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n^2} = 1 - H_n^{(2)}$$

siendo $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n}(1/k^2)$. Ahora podemos calcular la variancia de A:

$$\text{Var}(A) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = H_n - H_n^{(2)}$$

Con esto finaliza el análisis estadístico del algoritmo. Utilizando estas mismas ideas se puede analizar el algoritmo de ordenación por selección (ver ejercicios al final del capítulo).

6.4 Particiones, números de Stirling de segunda clase y números de Bell

Una *partición* de un conjunto X es una colección $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, disjuntos dos a dos y tales que su unión sea X. Cada partición de X permite definir una relación de equivalencia $\sim$ en X en la cual $x \sim y$ si y sólo si $x, y \in A_i$ para algún $i \in I$. Recíprocamente cada relación de equivalencia en X induce una partición de X, a saber aquella constituída por las clases de equivalencia. Es claro que esta correspondencia entre particiones de X y relaciones de equivalencia en X es biyectiva.

Cada función $f : X \to Y$ induce una relación de equivalencia $\sim$ en su dominio definiendo $a \sim b$ si y sólo si $f(a) = f(b)$. A la partición de X determinada por esta relación de equivalencia se le llama *núcleo* de la función f. Si f es sobreyectiva y el conjunto Y tiene k elementos $y_1, \ldots, y_k$ entonces el núcleo de f se compone también de k clases, a saber $f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_k)$. El número de particiones (o lo que es lo mismo, el número de relaciones de equivalencia) que admite un conjunto de n elementos se denomina *número de Bell* de orden n, y lo denotaremos B_n. Aceptaremos por convención que $B_0 = 1$, aunque esto puede también justificarse observando que el conjunto vacío admite exactamente una partición, a saber la partición vacía (es decir la partición sin miembro alguno). El número de particiones que admite un conjunto de n elementos con exactamente k clases se denomina *número de Stirling de segunda clase* con índices n y k y lo denotaremos mediante el símbolo $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Es claro que si $n > 0$ entonces $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$. También es obvio que si $n < k$ entonces $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$. Aceptaremos por convención, o en virtud del mismo razonamiento que hicimos más arriba para B_0, que $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

A continuación demostraremos varias propiedades de los números de Stirling de segunda clase.

Proposición 6.4.1. *Para todo $n > 0$ se cumple:*

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \ \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \ \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Demostración: Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto con $n > 0$ elementos entonces la única partición de X con una sola clase es obviamente $\{X\}$. A su vez, la única partición de X con n clases es $\{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$ y así quedan probadas las dos primeras igualdades. En cuanto a la tercera hagamos corresponder a cada subconjunto A de X , no vacío y distinto del propio X, la

partición $\{A, X \setminus A\}$. De este modo se obtienen todas las particiones de X en dos clases, pero cada una de ellas aparece dos veces puesto que A y $X \setminus A$ determinan la misma partición. Como X tiene 2^n subconjuntos, descontando $\emptyset$ y X y dividiendo entre dos resulta $(2^n - 2)/2 = 2^{n-1} - 1$. Por último, para probar la cuarta igualdad basta observar que cualquier partición de X en $n-1$ clases debe constar de una clase de dos elementos y $n-2$ clases de un elemento cada una. Pero una partición de este tipo queda determinada una vez que sabemos cual es la clase con dos elementos, para lo cual hay precisamente $\binom{n}{2}$ posibilidades. □

Proposición 6.4.2. *Para todo $n > 0$ y $k > 0$ se cumple:*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

Demostración: Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Las particiones de X en k clases pueden clasificarse en dos categorías: las que contienen la clase $\{x_n\}$ y las que no la contienen. Las primeras son $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$, puesto que si $\{x_n\}$ es una clase debe haber $k-1$ clases adicionales, cuya unión será $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. En las particiones de la segunda categoría el elemento x_n debe pertenecer a alguna de las k clases, que contendrá también algún otro elemento. Quitando x_n resultará una partición de $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ con k clases, de las cuales hay $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. Sin embargo aplicando este procedimiento cada partición de $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ en k clases se obtiene k veces, pues x_n podría estar en cualquiera de las k clases. De este modo resulta que el número de particiones en la segunda categoría es $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. □

La relación que acabamos de demostrar, análoga a la fórmula de Stifel para los coeficientes binomiales y a la Proposición (6.2.2) para los números de Stirling de primera clase, permite calcular los números de Stirling de segunda clase recursivamente y construir una tabla semejante al triángulo de Pascal:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

En este triángulo, luego de llenar los lados con ceros y unos, se obtiene cada número sumando al que está en la fila superior y un lugar a la izquierda, el que está encima multiplicado por su número de columna. En la fila 5 y columna 3 se tiene por ejemplo $\left\{ {5 \atop 3} \right\} = 7 + 6 \times 3 = 25$.

Proposición 6.4.3.

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}$$

Demostración: Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. En cada partición de X en $k+1$ clases eliminemos la clase que contiene a x_{n+1}. Queda entonces una partición de un subconjunto B de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en k clases. Recíprocamente si a una partición de un conjunto $B \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ en k clases le agregamos la clase $X \setminus B$ (que no es vacía pues al menos contiene a x_{n+1}) resulta una partición de X en $k+1$ clases. Las dos correspondencias que hemos definido son claramente inversas una de la otra, por lo tanto aplicando el principio de correspondencia y luego el de la suma resulta que:

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{B \subset \{x_1, \ldots, x_n\}} \left\{ {|B| \atop k} \right\}$$

Para concluir la demostración basta observar que para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ hay exactamente $\binom{n}{j}$ subconjuntos B de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con j elementos. □

Proposición 6.4.4. *El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos es $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.*

Demostración: En primer lugar probaremos que si dos funciones f y g de un conjunto X en otro Y son sobreyectivas y tienen el mismo núcleo, entonces existe una única biyección $\sigma : Y \to Y$ tal que $f = \sigma \circ g$. En efecto, si $y \in Y$ sea $x \in X$ tal que $g(x) = y$ y definamos $\sigma(y) = f(x)$. La definición es buena pues si x' es otro elemento de X tal que $g(x') = y$ entonces $g(x') = g(x)$ y como g y f tienen el mismo núcleo resulta $f(x') = f(x)$. Es claro que con esta definición se cumple que $\sigma \circ g = f$, y como g es sobre σ es la única función que satisface esta relación. Como f es sobre resulta también que σ lo es. En cuanto a la inyectividad si $\sigma(y_1) = \sigma(y_2)$ sean x_1, x_2 tales que $g(x_i) = y_i,\ i = 1, 2$. Entonces $\sigma(g(x_1)) = \sigma(g(x_2))$ y por lo tanto $f(x_1) = f(x_2)$, pero como f y g tienen el mismo núcleo resulta

que $g(x_1) = g(x_2)$, es decir $y_1 = y_2$. La propiedad de tener el mismo núcleo induce obviamente una relación de equivalencia en la familia de las funciones de X sobre Y. Si $|X| = n$ y $|Y| = k$ entonces en virtud de lo que acabamos de probar cada clase de equivalencia debe tener $k!$ elementos (tantos como biyecciones $\sigma : Y \to Y$) y el número de clases de equivalencia será igual al número de particiones de X en k clases, es decir $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Por lo tanto el número total de funciones de X sobre Y es $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$. □

Proposición 6.4.5.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i>0}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$$

Demostración: Es consecuencia inmediata de las Proposiciones (6.4.4) y (3.2.4). □

Proposición 6.4.6.

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Demostración: Es consecuencia inmediata de las Proposiciones (6.4.4) y (4.2.1). □

Proposición 6.4.7.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} \left\{ {n \atop j} \right\} j! = k^n$$

Demostración: Sean X e Y dos conjuntos tales que $|X| = n$ y $|Y| = k$. Toda función de X en Y es *sobre* algún subconjunto de Y. Como el número total de funciones de X en Y es k^n tenemos entonces que:

$$\sum_{B \subset Y} |Sobre(X, B)| = k^n$$

Pero para cada j entre 0 y k hay $\binom{k}{j}$ subconjuntos de Y con j elementos, y el número de funciones de X sobre cada uno de ellos es $j!\left\{ {n \atop j} \right\}$ según (6.4.4). Una aplicación del principio de la suma concluye la demostración. □

Proposición 6.4.8.

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} [x]_j$$

Demostración: El polinomio

$$P(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} [x]_j$$

se anula para cualquier entero positivo k por la Proposición (6.4.7). Por lo tanto, debe ser idénticamente nulo. □

Proposición 6.4.9. *Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son enteros no negativos tales que $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$. Entonces el número de particiones de un conjunto de n elementos con λ_i clases de i elementos para $i = 1, \ldots, n$ es:*

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!}$$

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el conjunto de n elementos es $\mathbb{N}_n$. Escribamos las $n!$ permutaciones de los números del 1 al n en forma de sucesión y a cada una de ellas hagámosle corresponder una partición de $\mathbb{N}_n$ de la siguiente manera: con los primeros λ_1 elementos formamos λ_1 clases de un elemento cada una; con los siguientes λ_2 pares de elementos formamos λ_2 clases de dos elementos cada una, y así sucesivamente. Es claro que de este modo se obtienen todas las particiones de $\mathbb{N}_n$ con λ_i clases de i elementos para cada $i = 1, \ldots, k$, pero cada una de ellas aparece repetida $(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!$ veces. En efecto, para cada $k = 1, \ldots, n$ hay λ_k clases de k elementos, y los elementos de cada una de estas clases pueden permutarse entre sí de $k!$ maneras. Esto da cuenta del factor $(k!)^{\lambda_k}$. Por otra parte las λ_k clases de k elementos pueden permutarse entre sí de $\lambda_k!$ maneras. □

Proposición 6.4.10. *La función generatriz exponencial de los números de Stirling de segunda clase $\left\{ {n \atop k} \right\}$ para $k \geq 0$ fijo es $(e^t - 1)^k/k!$.*

Demostración: Utilizando (6.4.5) se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}t^n &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!k!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}t^n \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\frac{1}{n_1!\cdots n_k!}\right)t^n \\ &= \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)^k = \frac{(e^t-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

□

Proposición 6.4.11.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}$$

Demostración: Clasifique las particiones de un conjunto de n elementos según el número de clases que contengan, y aplique el principio de la suma. □

Proposición 6.4.12.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

Demostración: Todas las particiones de $\mathbb{N}_{n+1}$ pueden obtenerse escogiendo primero el conjunto de elementos $F \subset \mathbb{N}_n$ que acompañarán a $n+1$ en su clase y efectuando luego una partición de $\mathbb{N}_n \setminus F$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}B_{n+1} &= \sum_{F\subset\mathbb{N}_n} B_{n-|F|} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{F\subset\mathbb{N}_n \\ |F|=k}} B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\end{aligned}$$

(la última igualdad es consecuencia de la simetría de los coeficientes binomiales). □

Proposición 6.4.13. *La función generatriz exponencial de los números de Bell es:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{e^t - 1}$$

Demostración: Aplicando las Proposiciones (6.4.10) y (6.4.11) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \right) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ {n \atop k} \right\} t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k = e^{e^t - 1} \end{aligned}$$

□

(Otras demostraciones de este resultado conocido como "fórmula de Bell" pueden verse en [R6], [B1] y [T1]. Vea también el Ejercicio 13).

Triángulo de Bell

Los números de Bell pueden obtenerse a partir del siguiente triángulo, en el cual B_n es el último número de la fila n. La regla de formación de cada fila es la siguiente: se coloca como primer elemento el último número de la fila anterior, luego se suma este primer elemento con el número que está arriba suyo y el resultado se coloca como segundo número de la fila, la suma de éste con el que está arriba suyo es el tercero, y así sucesivamente. La fila número 5 por ejemplo se obtuvo así: su primer elemento es el último de la fila 4, es decir el 15. El segundo elemento es $15 + 5 = 20$, el tercero $20 + 7 = 27$, el cuarto $27 + 10 = 37$ y el quinto y último $B_5 = 37 + 15 = 52$. El proceso comienza colocando $B_1 = 1$ en la primera fila. La justificación de este procedimiento se deja al lector (ver Ejercicio 16).

n=1	1						
n=2	1	2					
n=3	2	3	5				
n=4	5	7	10	15			
n=5	15	20	27	37	52		
n=6	52	67	87	114	151	203	
n=7	203	255	322	409	523	674	877
n=8	877	...					

Para finalizar, recomendamos al lector el interesante artículo de divulgación de Martin Gardner [G1] sobre los números de Bell.

6.5 Ejercicios

1. Pruebe que el número de Stirling de primera clase $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ es igual a la suma de todos los productos de $n-k$ números distintos entre 1 y $n-1$. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35$. Deduzca como corolario la siguiente acotación:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \leq \binom{n-1}{k-1}^2 (n-k)!$$

2. (Algoritmo de ordenación por selección)
El siguiente algoritmo ordena el arreglo $x[1], \ldots, x[n]$ en forma ascendente:

   Paso 1. $k \leftarrow 1$

   Paso 2. Si $k > n-1$ finalizar.

   Paso 3. $j \leftarrow k;\ M \leftarrow x[k];\ i \leftarrow j+1$

   Paso 4. Si $i > n$ ir al Paso 8.

   Paso 5. Si $x[i] > M$ ir al Paso 7.

   Paso 6. $M \leftarrow x[i];\ j \leftarrow i$

   Paso 7. $i \leftarrow i+1;$ Ir al Paso 4.

   Paso 8. $x[j] \leftarrow x[k];\ x[k] \leftarrow M;\ k \leftarrow k+1;$ Ir al Paso 2.

   Calcule el número de veces que se ejecuta cada paso distinto del Paso 6. Pruebe que si $x[1], \ldots, x[n]$ es una permutación de los números del 1 al n tomada al azar entonces el valor esperado del número de veces que se ejecuta el Paso 6 es $(n+1)H_n - n$.

3. Demuestre la Proposición (6.4.9) a partir de la (6.1.3).

4. Pruebe que $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$

5. Pruebe que $\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$

6. Pruebe que el número de particiones de $\mathbb{N}_n$ en k clases que no contengan elementos consecutivos es $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$.

   Como aplicación, muestre que el número de banderas con n franjas horizontales que se pueden pintar con k colores, de modo que aparezcan todos los colores y no haya franjas adyacentes del mismo color, es $k!\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$.

7. Pruebe que para un k fijo, la función generatriz de los números de Stirling de segunda clase $\left\{{n+k \atop k}\right\}$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n+k \atop k} \right\} x^n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$$

8. Pruebe que el número de Stirling de segunda clase $\left\{{n \atop k}\right\}$ es igual a la suma de todos los productos de $n-k$ factores entre 1 y k , donde puede haber factores repetidos. Por ejemplo,

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 = 25$$

9. Los polinomios $[x]_0 = 1,\ [x]_1 = x, \ldots,\ [x]_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ forman una base del espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales y grado menor o igual a n , del mismo modo que los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Exprese las matrices de cambio de una a otra base utilizando los números de Stirling. Multiplicando una de estas matrices por su inversa obtenga relaciones entre los números de Stirling de primera y segunda clase.

10. Si $n > 1$ es producto de k factores primos distintos, pruebe que el número de descomposiciones de n en producto de factores mayores que 1 es B_k.

11. Pruebe que el número de particiones de $\mathbb{N}_n$ tales que cada clase tiene al menos dos elementos es igual al número de particiones de $\mathbb{N}_{n-1}$ tales que al menos una clase tiene exactamente un elemento.

12. Demuestre la Proposición (6.4.12) a partir de las Proposiciones (6.4.3) y (6.4.11).

13. Obtenga la fórmula de Bell multiplicando la función generatriz exponencial de la sucesión $\{B_n\}$ por el desarrollo en serie de e^z y usando la Proposición (6.4.12).

14. Demuestre la "fórmula de Dobinsky":

$$B_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{1^n}{0!} + \frac{2^n}{1!} + \frac{3^n}{2!} + \cdots\right)$$

15. Pruebe que el número de particiones de $\mathbb{N}_n$ tales que ninguna clase contiene elementos consecutivos es B_{n-1}.

16. Justifique la contrucción del triángulo de Bell.

Capítulo 7

Teoremas de existencia

> "Mirando bien las cosas, parece que el matemático debe tener el valor de afirmar sus convicciones íntimas, lo que le llevará a decir que las estructuras matemáticas están dotadas de una existencia independiente de la mente humana que las piensa. Esta existencia es, sin duda alguna, muy diferente de la existencia concreta y material del mundo exterior, pero no por eso deja de estar relacionada de manera sutil y profunda con la existencia objetiva."
>
> René Thom.

En este capítulo hemos agrupado algunos resultados que afirman la existencia de algún tipo de objeto matemático a partir de consideraciones combinatorias, entre ellos el teorema de Ramsey y algunas de sus consecuencias y el Teorema de Philip Hall sobre sistemas de representantes distintos. Incluímos el teorema de Van der Waerden por cuanto creemos que pertenece a este mismo orden de ideas, aunque también podría ser considerado un resultado de teoría de números. Por último aprovechamos la ocasión para ilustrar la significación y las posibilidades de las estructuras de orden en Combinatoria.

7.1 El Teorema de Ramsey

El Teorema de Ramsey es una generalización profunda del llamado "Principio de Dirichlet", por lo cual demostraremos en primer lugar este resultado. (Acotemos sin embargo que desde el punto de vista que hemos adoptado en esta obra el de Dirichlet no es un "verdadero" principio, sino una consecuencia más o menos inmediata de los principios de correspondencia y de la suma)

Principio de Dirichlet 7.1.1. *Sean $a_1, \ldots, a_k$ números enteros no negativos y sea $n = a_1 + \cdots + a_k - k + 1$. Si $|X| \geq n$ y $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ es una descomposición de X como unión de subconjuntos disjuntos, entonces para algún i $(1 \leq i \leq k)$ se tiene $|A_i| \geq a_i$.*

Demostración: Supongamos por absurdo que $|A_i| < a_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Entonces $|A_i| \leq a_i - 1$ y por lo tanto $|X| = |A_1| + \cdots + |A_k| \leq (a_1 - 1) + \cdots + (a_k - 1) = n - 1$, en contradicción con la hipótesis $|X| \geq n$. □

En lo sucesivo, si X es un conjunto y r un entero no negativo, $P_r(X)$ denotará la colección de subconjuntos de r elementos del conjunto X, es decir $P_r(X) = \{A \subset X : |A| = r\}$.

Teorema de Ramsey 7.1.2. *Sean $r, a_1, \ldots, a_k$ enteros tales que $1 \leq r \leq a_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Entonces existe un mínimo número entero $R(a_1, \ldots, a_k; r)$ tal que si X es un conjunto con $|X| \geq R(a_1, \ldots, a_k; r)$ y $P_r(X) = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ es una descomposición de $P_r(X)$ en k subconjuntos disjuntos entonces para algún i $(1 \leq i \leq k)$ existe un subconjunto Y de X con $|Y| = a_i$ y $P_r(Y) \subset A_i$. (Los números $R(a_1, \ldots, a_k; r)$ cuya existencia afirma este Teorema se conocen como **números de Ramsey**)*

Demostración: Si identificamos X con $P_1(X)$ por medio de la biyección natural que lleva x en $\{x\}$ el Principio de Dirichlet (7.1.1) nos muestra que este Teorema es válido para $r = 1$. Más aún nos dice que:

$$R(a_1, \ldots, a_k; 1) \leq a_1 + \cdots + a_k - k + 1$$

De hecho es fácil ver que se cumple la igualdad. Para $k = 1$ y r cualquiera la demostración es también fácil. En este caso se tiene $R(a_1; r) = a_1$. En efecto,si $|X| \geq a_1$ sea Y cualquier subconjunto de X con a_1 elementos. Entonces $P_r(Y) \subset P_r(X) = A_1$, y obviamente a_1 es el menor entero con esta propiedad.

Ahora probaremos el teorema para $k = 2$. En primer lugar observemos que si $R(a_1, a_2; r)$ existe entonces también existe $R(a_2, a_1; r)$ y son iguales. En efecto, si $|X| \geq R(a_1, a_2; r)$ y $P_r(X) = B_1 \cup B_2$ con $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ entonces escribiendo $P_r(X) = B_2 \cup B_1$ y aplicando la propiedad que define a $R(a_1, a_2; r)$ resulta que existe $Y \subset X$ tal que $|Y| = a_1$ y $P_r(Y) \subset B_2$, o bien $|Y| = a_2$ y $P_r(Y) \subset B_1$. Esto significa que $R(a_2, a_1; r)$ existe y es menor o igual que $R(a_1, a_2; r)$. Análogamente se ve que $R(a_1, a_2; r) \leq R(a_2, a_1; r)$.

También tenemos que $R(a_1, r; r) = a_1$. En efecto, si $|X| \geq a_1$ y $P_r(X) = A_1 \cup A_2$, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, hay dos posibilidades:
1) $A_2 = \emptyset$. En este caso $A_1 = P_r(X)$ y tomando cualquier $Y \subset X$ con a_1 elementos tenemos $P_r(Y) \subset P_r(X) = A_1$.
2) $A_2 \neq \emptyset$. En este caso sea $T \in A_2$. Puesto que T es un subconjunto de X de r elementos, tenemos que $P_r(T) = \{T\} \subset A_2$. Esto prueba que $R(a_1, r; r) \leq a_1$. Pero si $|X| < a_1$, escribiendo $P_r(X) = P_r(X) \cup \emptyset$ vemos que no hay subconjuntos de X con a_1 elementos, ni tampoco subconjunto Y alguno de r elementos con $P_r(Y) = \{Y\} \subset \emptyset$. Por lo tanto $R(a_1, r; r) = a_1$. Por la simetría señalada anteriormente también se tiene $R(r, a_2; r) = a_2$.

A continuación demostraremos la existencia de los números $R(a_1, a_2; r)$ por inducción en a_1, a_2 y r, partiendo de la existencia ya demostrada para $r = 1 \leq a_1, a_2$, y para r cualquiera y a_1 o a_2 iguales a r. Supongamos entonces $1 < r < a_i (i = 1, 2)$. Por hipótesis inductiva existen $b_1 = R(a_1 - 1, a_2; r)$, $b_2 = R(a_1, a_2 - 1; r)$ y $R(b_1, b_2; r - 1)$. Sea $m = R(b_1, b_2; r - 1) + 1$ y sea X un conjunto tal que $|X| \geq m$. Sea x un elemento cualquiera de X y sea $T = X \backslash \{x\}$. Si $P_r(X) = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ entonces podemos descomponer $P_r(T)$ como unión disjunta de dos subconjuntos B_1 y B_2 definidos así:

$$B_i = \{Z \in P_{r-1}(T) \, : \, \{x\} \cup Z \in A_i\}, \ (i = 1, 2)$$

Como $|T| = |X| - 1 \geq m - 1 = R(b_1, b_2; r - 1)$ resulta que T tiene un subconjunto U con $|U| = b_1$ y $P_{r-1}(U) \subset B_1$, o un subconjunto V con $|V| = b_2$ y $P_{r-1}(V) \subset B_2$. Analizaremos solamente el primer caso, ya que el otro es análogo. Sea $C_i = P_r(U) \cap A_i, \ (i = 1, 2)$. Entonces $P_r(U) = C_1 \cup C_2$ y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Como $|U| = b_1 = R(a_1 - 1, a_2; r)$ entonces U contiene un subconjunto W con $|W| = a_1 - 1$ y $P_r(W) \subset C_1$ o un subconjunto Y con $|Y| = a_2$ y $P_r(Y) \subset C_2$. En este último caso estamos listos ya que $C_2 \subset A_2$. En el otro caso tomemos $Y = \{x\} \cup W$, con lo cual $|Y| = a_1$. Probaremos ahora que $P_r(Y) \subset A_1$. En efecto, si un subconjunto de Y de r elementos no contiene al elemento x, entonces está en $P_r(W)$ y por lo tanto

en A_1. Los subconjuntos de Y de r elementos que contienen al elemento x son de la forma $\{x\} \cup Z$ con $Z \in P_{r-1}(W)$. Pero $W \subset U$, de donde $Z \in P_{r-1}(W) \subset P_{r-1}(U) \cup B_1$ y por la definición de B_1 tenemos entonces que $\{x\} \cup Z \in A_1$. Hemos probado así que existe un número m con la siguiente propiedad: "Si $|X| \geq m$, $P_r(X) = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ entonces existe $Y \subset X$ tal que $|Y| = a_i$ y $P_r(Y) \subset A_i$, para $i = 1$ o 2". Debe existir entonces un mínimo entero con esa propiedad, y ése es $R(a_1, a_2; r)$.

Finalmente probaremos la existencia de $R(a_1, \ldots, a_k; r)$ para todo $k \geq 1$ y $1 \leq r \leq a_i$, $(i = 1, \ldots, k)$, por indución en k. Como ya lo hemos probado para $k = 1$ y $k = 2$, supongamos entonces $k > 2$ y sea $m = R(a_1, \ldots, a_{k-2}, R(a_{k-1}, a_k; r); r)$. Sea X un conjunto con $|X| \geq m$ y $P_r(X) = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ una descomposición de $P_r(X)$ en k subconjuntos disjuntos. Agrupando A_{k-1} y A_k tenemos una descomposición de $P_r(X)$ en $k-1$ subconjuntos disjuntos:

$$P_r(X) = A_1 \cup \cdots \cup A_{k-2} \cup (A_{k-1} \cup A_k)$$

Entonces por la definición de m existe $Y \subset X$ tal que ocurre una de las dos cosas siguientes:
1) Para algún i $(1 \leq i \leq k-2)$ se tiene $|Y| = a_i$ y $P_r(Y) \subset A_i$
2) $|Y| = R(a_{k-1}, a_k; r)$ y $P_r(Y) \subset A_{k-1} \cup A_k$
En el primer caso, ya está listo. En el segundo podemos escribir $P_r(Y) = (A_{k-1} \cap P_r(Y)) \cup (A_k \cap P_r(Y))$ y entonces por la definición de $R(a_{k-1}, a_k; r)$ existe $Z \subset Y$ tal que $|Z| = a_{k-1}$ y $P_r(Z) \subset A_{k-1}$, o $|Z| = a_k$ y $P_r(Z) \subset A_k$. Esto prueba que $R(a_1, \ldots, a_k; r)$ existe, y más aún

$$R(a_1, \ldots, a_k; r) \leq R(a_1, \ldots, a_{k-2}, R(a_{k-1}, a_k; r); r)$$

□

Proposición 7.1.3. *i)* $R(a; r) = a \quad (1 \leq r \leq a)$

ii) $R(a_1, \ldots, a_k; 1) = a_1 + \cdots + a_k - k + 1 \quad (a_1, \ldots, a_k \geq 1)$

iii) $R(a, r; r) = R(r, a; r) = a \quad (1 \leq r \leq a)$

iv) $R(a, b; r) \leq R(R(a-1, b; r),\ R(a, b-1; r); r-1) + 1$
$(a, b > r > 1)$

v) $R(a, b; 2) \leq R(a-1, b; 2) + R(a, b-1; 2) \quad (a, b > 2)$

vi) $R(a_1, \ldots, a_k; r) \leq R(a_1, \ldots, a_{k-2}, R(a_{k-1}, a_k; r); r)$
para $k \geq 3$ *y* $1 \leq r \leq a_1, \ldots, a_k$

Demostración: Todos estos resultados han sido establecidos en el transcurso de la demostración del Teorema de Ramsey (7.1.2), con excepción de v), que es consecuencia inmediata de iv) y ii). □

Salvo por los casos triviales a que hacen referencia los puntos i), ii) y iii) de la Proposición anterior son pocos los números de Ramsey cuyo valor se conoce exactamente. Los valores conocidos de $R(p, q; 2)$ se resumen en la tabla que aparece al final del libro. Además se sabe que $R(3, 3, 3; 2) = 17$. (Vea también [W2]).

7.2 Aplicaciones a la teoría de grafos

A continuación haremos un resumen de las definiciones y conceptos básicos de la teoría de grafos que necesitaremos. El lector no familiarizado con esta teoría puede consultar [B2] o [H2]. Un *grafo* es un par $G = (V, A)$ donde V es un conjunto no vacío y A es un conjunto de pares (desordenados) de elementos distintos de V, es decir un subconjunto de $P_2(V)$. El grafo es *finito* si V lo es. Los elementos de V se llaman *vértices* y los de A *aristas*. Se llama *extremos* de una arista a los dos vértices que le pertenecen. Dos vértices distintos son *adyacentes* si son extremos de una misma arista. Un conjunto de vértices $W \subset V$ es *independiente* si no contiene ningún par de vértices adyacentes. Un vértice y una arista son *incidentes* si el primero es un extremo de la segunda. La *valencia* o *grado* de un vértice $v \in V$ es el número de aristas incidentes con v. La denotaremos mediante $\rho(v)$. Como cada arista tiene dos extremos, para los grafos finitos se cumple la siguiente identidad debida a Euler:

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|A|$$

de la cual se deduce que el número de vértices con valencia impar debe ser par. El grafo $G = (V, A)$ es *completo* si $A = P_2(V)$, es decir si todo par de vértices distintos de V son adyacentes. Es claro que un grafo de n vértices es completo si y sólo si tiene $n(n-1)/2$ aristas. Un grafo $G' = (V', A')$ es *subgrafo* de $G = (V, A)$ si $V' \subset V$ y $A' \subset A$. Si $G = (V, A)$ es un grafo y $W \subset V$, entonces el subgrafo generado por W es $H = (W, B)$, siendo B el

conjunto de aristas de G con ambos extremos en W. El *complemento* del grafo $G = (V, A)$ es el grafo $\overline{G} = (V, P_2(V) \backslash A)$.

Proposición (Erdös - Szekeres) 7.2.1. *Dados enteros $a, b \geq 2$ existe un mínimo entero $N(a, b)$ tal que todo grafo con $N(a, b)$ o más vértices contiene un subgrafo completo de a vértices o un conjunto de b vértices independientes. Además se cumple la desigualdad*

$$N(a, b) \leq \binom{a + b - 2}{a - 1}$$

Demostración: La primera parte de esta proposición resulta del teorema de Ramsey al tomar $k = r = 2$ y $N(a, b) = R(a, b; 2)$. Para probar la desigualdad observemos que:

$$N(a, 2) = N(2, a) = R(2, a; 2) = a = \binom{(a + 2) - 2}{a - 1}$$

Procediendo ahora por inducción tenemos que si $a, b > 2$ entonces:

$$N(a, b) \leq N(a - 1, b) + N(a, b - 1)$$

$$\leq \binom{(a - 1) + b - 2}{(a - 1) - 1} + \binom{a + (b - 1) - 2}{a - 1} = \binom{a + b - 2}{a - 1}$$

□

Una *coloración* de las aristas de un grafo $G = (V, A)$ con k colores es una función $f : A \to C$ siendo C un conjunto de k elementos (no imponemos ninguna restricción sobre los colores de aristas con un extremo común). Un subgrafo de un grafo coloreado se dice *monocromático* si todas sus aristas son del mismo color. La existencia de los números de Ramsey $R(a_1, \ldots, a_k; 2)$ nos permite enunciar la siguiente proposición:

Proposición 7.2.2. *Dados k números $a_1, \ldots, a_k \geq 2$ existe un mínimo entero $N(a_1, \ldots, a_k)$ tal que si las aristas de un grafo de $N(a_1, \ldots, a_k)$ o más vértices se colorean con k colores, entonces para algún i $(1 \leq i \leq k)$ G contiene un subgrafo monocromático completo de a_i vértices.*

□

Proposición 7.2.3. *Si $G = (V, A)$ es un grafo infinito numerable, entonces G contiene un subgrafo completo infinito o un conjunto infinito de vértices independientes.*

Demostración: Sea $F = \{v \in V : \quad \rho(v) < \infty\}$ el conjunto de los vértices con valencia finita. Distinguiremos dos casos:
a) F es infinito.

En este caso sean $u_1, u_2, \ldots$ los vértices con valencia finita. Construyamos inductivamente una nueva sucesión de vértices así: sea $v_1 = u_1$, y como v_2 tomemos el primer u_i no adyacente a v_1. Como v_3 tomamos el primer u_i no adyacente a v_1 ni a $v_2, \ldots$ y en general si ya hemos elegido $v_1, \ldots, v_k$ entonces como v_{k+1} tomamos el primer u_i no adyacente a ninguno de los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Esto siempre es posible por tener éstos vértices valencia finita, mientras que los u_i son infinitos. Los vértices v_i así construídos constituyen un conjunto infinito independiente.

b) F es finito.

En este caso $V_1 = V \backslash F$ debe ser infinito. Sea u_1 un elemento cualquiera de V_1 y sea U_1 el conjunto formado por los vértices de V_1 adyacentes a u_1. Es claro que $|U_1| = \infty$ ya que $\rho(u_1) = \infty$ y fuera de V_1 hay sólo un número finito de vértices. Definamos ahora V_2 como el conjunto de elementos de U_1 que son adyacentes a infinitos vértices de U_1. Si $|V_2| < \infty$ entonces se puede aplicar al subgrafo de G generado por U_1 el razonamiento que hicimos para el caso a) resultando en la existencia de un conjunto independiente infinito. Por el contrario si $|V_2| = \infty$ escojamos $u_2 \in V_2$ y repitamos el proceso definiendo U_2 como el conjunto de vértices de V_2 adyacentes a u_2, etc. Si este proceso se detiene al resultar algún V_n finito, entonces existe un conjunto infinito independiente. Si por el contrario el proceso no se detiene, entonces la sucesión $u_1, u_2, \ldots$ genera un subgrafo infinito completo. □

La generalización correspondiente de (7.2.2) es la siguiente:

Proposición 7.2.4. *Si las aristas de un grafo completo con una infinidad numerable de vértices se colorean con r colores, entonces existe un subgrafo completo infinito y monocromático.*

Demostración: Por inducción en r. Para $r = 1$ es obvio, y para $r = 2$ es la Proposición (7.2.3). Supongamos ahora que el resultado es cierto para

un $r > 2$. Dado un grafo completo infinito numerable, si las aristas se colorean con $r+1$ colores $1, 2, \ldots, r+1$, identifiquemos los colores r y $r+1$. Entonces por la hipótesis inductiva existe un subgrafo completo infinito con las aristas de un mismo color i para algún $i = 1, \ldots, r-1$, o un subgrafo completo infinito con las aristas coloreadas con los colores r y $r+1$, el cual a su vez por la Proposición (7.2.2) debe tener un subgrafo completo infinito monocromático. □

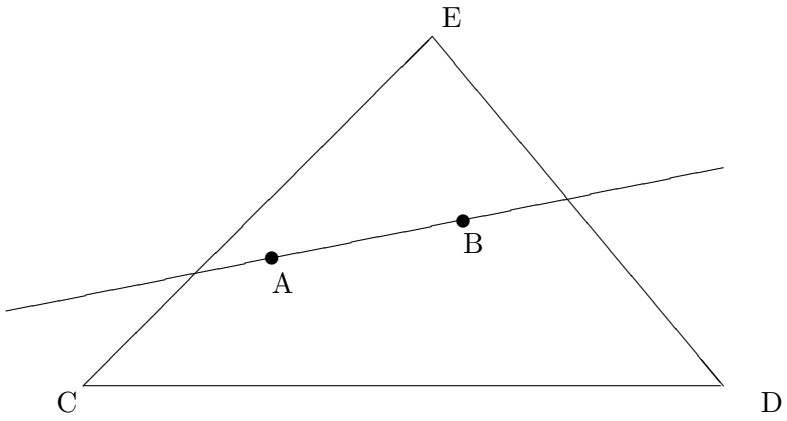
7.3 Una aplicación geométrica

Se dice que un conjunto de puntos del plano está en posición *genérica* si no hay tres de ellos alineados.

Proposición (Erdös - Szekeres) 7.3.1. *Para cada entero $m \geq 3$ existe un mínimo entero N_m con la propiedad siguiente: para cualquier conjunto de n puntos del plano en posición genérica con $n \geq N_m$ hay m de ellos que son los vértices de un polígono convexo.*

Demostración: Es claro que $N_3 = 3$ pues todos los triángulos son convexos. N_4 debe ser mayor que cuatro, ya que cuatro puntos dispuestos de modo que uno de ellos sea interior al triángulo determinado por los otros tres no son los vértices de un cuadrilátero convexo. Probemos que $N_4 = 5$. En efecto, la cápsula convexa de un conjunto de 5 puntos en posición genérica es un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo. En los dos primeros casos, tomando cuatro vértices de la cápsula convexa estamos listos. En el tercer caso dos de los puntos (digamos A y B) son interiores al triángulo determinado por los otros tres (digamos C, D y E). La recta AB deja en un mismo semiplano a dos de los vértices del triángulo (digamos a C y D) y en el semiplano opuesto al vértice restante. Es fácil ver entonces que A, B, C y D son vértices de un cuadrilátero convexo.

Ahora probaremos que si n puntos están en posición genérica y cuatro cualesquiera de ellos son los vértices de un cuadrilátero convexo entonces los n puntos son los vértices de un n-gono convexo. Para verlo sean $P_1, \ldots, P_m$ los vértices de la cápsula convexa, numerados en el orden en que aparecen al recorrer su perímetro en uno de los dos sentidos posibles. Si $m < n$, entonces alguno de los puntos dados es interior a la cápsula convexa y por lo tanto a alguno de los triángulos $P_1P_2P_3, P_1P_3P_4, \ldots, P_1P_{m-1}P_m$. Pero entonces tendríamos cuatro puntos tales que uno de ellos es interior al triángulo de-



terminado por los otros tres, y no serían vértices de un cuadrilátero convexo contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $n = m$, como queríamos probar.

Sean ahora $m \geq 4$ y $n \geq R(m, 5; 4)$. Dado un conjunto X de n puntos del plano en posición genérica descompongamos $P_4(X)$ en la unión disjunta de dos subconjuntos A y B, poniendo en A aquellas cuaternas de puntos de X que sean vértices de un cuadrilátero convexo, y en B las restantes. En virtud de la definición de $R(m, 5; 4)$ existen dos posibilidades:
a) Hay un subconjunto de X de m puntos tal que todos sus subconjuntos de 4 puntos están en A. En este caso los m puntos son vértices de un m-gono convexo, como probamos más arriba.
b) Hay un subconjunto de X de 5 puntos tales que todos sus subconjuntos de 4 puntos están en B. Pero esto es imposible, pues ya probamos que un pentágono contiene al menos un cuadrilátero convexo ($N_4 = 5$).

Entonces $R(m, 5; 4)$ satisface la propiedad deseada. Por tanto hay un mínimo entero $N_m \leq R(m, 5; 4)$ con esta propiedad. □

Los únicos valores conocidos de N_m son $N_3 = 3$, $N_4 = 5$ y $N_5 = 9$. Se ha conjeturado que $N_m = 2^{m-2} + 1$.

La Proposición (7.3.1) puede generalizarse a $\mathbb{R}^n$ (Ver ejercicio 9 al final del capítulo).

7.4 El Teorema de Graham - Rothschild

En lo que sigue, si a y b son números enteros y $a \leq b$, usaremos la notación $[a, b]$ para referirnos al conjunto de los números enteros comprendidos entre a y b, ambos inclusive. En otras palabras, $[a, b] = \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n \leq b\}$.

Si $x, y \in [0, t]^m$ diremos que son *t-equivalentes* si sus componentes coinciden hasta la última aparición de t (si la hay) inclusive. En otras palabras, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ y $y = (y_1, \ldots, y_m)$ son t-equivalentes si y sólo si no existen índices i y j, $1 \leq i \leq j \leq m$, tales que: 1) $x_i \neq y_i$; 2) $x_j = t$ o $y_j = t$.

Teorema de Graham - Rothschild 7.4.1. *Para todo número natural r existe un mínimo entero $N(t, m, r)$ tal que si $n \geq N(t, m, r)$ y $[1, n]$ se colorea con r colores, entonces existen naturales $a, d_1, \ldots, d_m$ que satisfacen $a + t\sum_{i=1}^{m} d_i \leq n$ y tales que para cada clase de t-equivalencia E de $[0, t]^m$ el conjunto:*

$$\{a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \ : \ (x_1, \ldots, x_m) \in E\}$$

es monocromático.

Demostración: Llamaremos $A(t, m)$ al enunciado de esta Proposición. La idea de la demostración es hacer una inducción doble en t y m, probando que:

I) $A(1, 1)$ es verdadero
II) $A(t, k)$ para $k = 1, \ldots, m \Rightarrow A(t, m + 1)$
III) $A(t, m)$ $\forall m \geq 1 \ \Rightarrow \ A(t + 1, 1)$

En primer lugar aclaremos el significado de $A(t, 1)$. Los elementos de $[0, t]^1$ son simplemente los enteros del 0 al t, y las clases de t-equivalencia son solamente dos, a saber $\{0, 1, \ldots, t - 1\}$ y $\{t\}$. Por lo tanto $A(t, 1)$ se reduce a la afirmación siguiente: "Para todo natural r existe un mínimo entero $N(t, 1, r)$ tal que si $n \geq N(t, 1, r)$ y $[1, n]$ se colorea con r colores existen naturales a y d que satisfacen $a + td \leq n$ y los conjuntos $\{a, a + d, \ldots, a + (t - 1)d)\}$ y $\{a + td\}$ son monocromáticos". En otras palabras, dados t y r si n es suficientemente grande y $[1, n]$ se colorea con r colores hay una progresión aritmética de longitud t con todos sus términos del mismo color. Este es un famoso teorema demostrado por primera vez por Van der Waerden [W1].

Procedamos ahora con la demostración:

I) $A(1,1)$ en virtud de la discusión anterior es trivialmente verdadero (Basta tomar $N(1,1,r)=2$).
II) Para un r fijo sean $M=N(t,m,r)$ y $M'=N(t,1,r^M)$, los cuales existen por la hipótesis inductiva. Sea $C:[1,MM']\to[1,r]$ una r-coloración. Definamos una r^M-coloración $C':[1,M']\to[1,r]^M$ del modo siguiente:

$$C'(k)=(C((k-1)M+1),C((k-1)M+2),\ldots,C(kM))$$

Por definición de M' deben existir a' y d' tales que $a'+td'\leq M'$ y $C'(a'+xd')$ es constante para $x=0,1,\ldots,t-1$. Considerando el intervalo $[(a'-1)M+1,a'M]$ y aplicándole $A(t,m)$ vemos que existen $a,d_1,\ldots,d_m$ con $(a'-1)M+1\leq a$ y $a+t\sum_{i=1}^m d_i\leq a'M$ tales que $C(a+\sum_{i=1}^m x_id_i)$ es constante en las clases de t-equivalencia. Definamos $d'_i=d_i$ $(1\leq i\leq m)$ y $d'_{m+1}=d'M$. Entonces:

$$a+t\sum_{i=1}^{m+1}d'_i=a+t\sum_{i=1}^{m}d_i+td'M\leq a'M+td'M=(a'+td')M\leq M'M$$

Sean ahora $(x_1,\ldots,x_{m+1})$ y $(y_1,\ldots,y_{m+1})$ dos elementosde t-equivalentes de $[0,t]^{m+1}$. Sean:

$$X=a+\sum_{i=1}^{m+1}x_id'_i\quad,\quad Y=a+\sum_{i=1}^{m+1}y_id'_i$$

Probaremos que $C(X)=C(Y)$. Si x_{m+1} o y_{m+1} valen t entonces por la definición de t-equivalencia tendremos $x_i=y_i$ para $i=1,\ldots,m+1$ y por lo tanto $X=Y$, de donde $C(X)=C(Y)$. En caso contrario x_{m+1}, $y_{m+1}\in[0,t-1]$ y $(x_1,\ldots,x_m)$ es t-equivalente con $(y_1\ldots,y_m)$. Ahora bien, como $C'(a')=C'(a'+x_{m+1}d')$ resulta que $C((a'-1)M+j)=C((a'+x_{m+1}d'-1)M+j),\ \forall\, j\in[1,M]$. Sean ahora

$$X_0=a+\sum_{i=1}^{m}x_id'_i\quad,\quad Y_0=a+\sum_{i=1}^{m}y_id'_i$$

Por la hipótesis inductiva se tiene que $C(X_0)=C(Y_0)$. Ahora bien, puesto que $X_0\geq a\geq(a'-1)M+1$ y $X_0\leq a+t\sum_{i=1}^m d'_i\leq a'M$ entonces X_0 se puede escribir como $(a'-1)M+h$ para algún $h\in[1,M]$, y $X=X_0+x_{m+1}d'M=(a'-1+x_{m+1}d')M+h$ de donde resulta que $C(X_0)=C(X)$. Análogamente se ve que $C(Y_0)=C(Y)$, y por lo tanto $C(X)=C(Y)$ como queríamos probar.

III) Probaremos que $N(t+1,1,r)$ existe y no supera a $N(t,r,r)$. Si $C : [1, N(t,r,r)] \to [1,r]$ entonces existen $a, d_1, \ldots, d_r$ tales que $a + t\sum_{i=1}^{r} d_i \leq N(t,r,r)$ y $C(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$ es constante en cada clase de t-equivalencia. Entre los $r+1$ vectores $(0,\ldots,0)$, $(t,0,\ldots,0)$, $(t,t,0,\ldots,0),\ldots,(t,\ldots,t)$ de $[0,t]^r$ debe haber dos en los cuales la t aparece digamos u y v veces y son tales que $C(a + t\sum_{i=1}^{u} d_i) = C(a + t\sum_{i=1}^{v} d_i)$. Supongamos $u < v$. Como $(\underbrace{t,\ldots,t}_{u},\underbrace{x,\ldots,x}_{v-u},\underbrace{0,\ldots,0}_{r-v})$ y $(\underbrace{t,\ldots,t}_{u},\underbrace{0,\ldots,0}_{r-u})$ para cualquier $x \in [0, t-1]$ son t-equivalentes se deduce que los $t+1$ números:

$$a + t\sum_{i=1}^{u} d_i + x \sum_{i=u+1}^{v} d_i \quad , \quad x = 0,\ldots,t$$

tienen el mismo color. Es decir que hemos probado $A(t+1,1)$. □

Teorema de van der Waerden 7.4.2. *Para todo par de enteros positivos t y r existe un menor entero $W(t,r)$ tal que si $n \geq W(t,r)$ y $[1,n]$ se colorea con r colores entonces hay una progresión aritmética monocromática de longitud t.*

Demostración: Como ya observamos es un caso particular del teorema anterior, para $m = 1$. Vea también [GR1]. □

7.5 Conjuntos parcialmente ordenados

Un *orden parcial* en un conjunto X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otras palabras $\preceq$ es un orden parcial en X si y solamente si cumple:

1. $x \preceq x$, $\forall\, x \in X$
2. $x \preceq y$, $y \preceq x \Rightarrow\ x = y$, $\forall\, x, y \in X$
3. $x \preceq y$, $y \preceq z \Rightarrow\ x \preceq z$, $\forall\, x, y, z \in X$

En lo que sigue supondremos que X es un conjunto finito, y que $\preceq$ es un orden parcial en X. Si $Y \subset X$ diremos que $z \in Y$ es el *máximo* de Y si $y \preceq z$ para todo $y \in Y$. Análogamente $w \in Y$ es el *mínimo* de Y si $w \preceq y$ para todo $y \in Y$. El máximo y el mínimo pueden no existir, pero si existen son únicos. Dos elementos $x, y \in X$ son *comparables* si $x \preceq y$ o $y \preceq x$. Un

subconjunto C de X es una *cadena* si todos los pares de elementos de C son comparables. Es fácil ver que una cadena finita siempre tiene máximo y mínimo. Una cadena es *maximal* si no está estrictamente contenida en ninguna otra cadena. En otras palabras, la cadena C es maximal si para todo x fuera de C existe algún $y \in C$ no comparable con x. Es claro que toda cadena C en X está contenida en una cadena maximal, que se puede obtener agregando a C uno a uno los elementos de X que sean comparables con todos los de C (este argumento no sería válido si X fuese infinito, pero el resultado sigue siendo cierto y se puede probar usando el Lema de Zorn). Un subconjunto T de X es una *anticadena* o *transversal* si no contiene ningún par de elementos comparables. Una anticadena es *maximal* si no está estrictamente contenida en ninguna otra anticadena. Es fácil ver que una anticadena T es maximal si y sólo si cualquier elemento de X que no pertenezca a T es comparable con algún elemento de T, y que toda anticadena está contenida en una anticadena maximal.

Denotaremos mediante $c(X)$ al mínimo número de cadenas que puede haber en una partición de X en cadenas, y mediante $a(X)$ al máximo número de elementos que puede tener una anticadena en X.

Teorema de Dilworth 7.5.1. *Para todo conjunto finito parcialmente ordenado X se cumple $a(X) = c(X)$.*

Demostración: Observemos en primer lugar que $a(X) \leq c(X)$, ya que si T es una anticadena con $a(X)$ elementos, en cualquier partición de X en cadenas cada elemento de T debe pertenecer a una cadena distinta.

Procederemos por inducción en el número de elementos de X. Si $|X| = 1$ entonces obviamente $a(X) = c(X) = 1$ y el resultado es cierto. Supongamos ahora que $|X| = n > 1$ y que el teorema es cierto para conjuntos con menos de n elementos. Sea C una cadena maximal en X y sea $Y = X \backslash C$. Por la hipótesis inductiva se tiene $a(Y) = c(Y)$. Además es claro que $a(Y) \leq a(X)$. Si esta última desigualdad es estricta entonces Y puede particionarse en $c(Y) = a(Y)$ cadenas, y agregando C tenemos una partición de X en $a(Y)+1 \leq a(X)$ cadenas, probando que $c(X) \leq a(X)$ y por lo tanto $c(X) = a(X)$. Por el contrario, si $a(Y) = a(X) = m$ entonces sea $T = \{y_1, \ldots, y_m\}$ una anticadena en Y con m elementos. Esta anticadena debe ser maximal tanto en Y como en X. Sean:

$$X^- = \{x \in X \,:\, x \preceq y_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, m\}$$
$$X^+ = \{x \in X \,:\, y_i \preceq x \text{ para algún } i = 1, \ldots, m\}$$

Como T es una anticadena maximal en X cualquier elemento de X es comparable con algún y_i, por lo tanto se tiene que $X = X^- \cup X^+$. Sea x_0 el mínimo elemento de la cadena C y x_1 el máximo. Entonces $x_0 \notin X^+$, ya que si $y_i \preceq x_0$ para algún y_i entonces agregando y_i a C se obtendría una cadena, contradiciendo la maximalidad de C. Análogamente $x_1 \notin X^-$. Por lo tanto X^- y X^+ son subconjuntos propios de X y se les puede aplicar la hipótesis de inducción. Como $a(X^-) = a(X^+) = m$ (pues ambos conjuntos contienen la anticadena T) entonces X^- puede particionarse en m cadenas $K_1, \ldots, K_m$ y X^+ en m cadenas $L_1, \ldots, L_m$. Sin pérdida de generalidad podemos elegir la numeración de manera tal que $y_i \in K_i$ y $y_i \in L_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces y_i es el máximo de K_i. En efecto, si $x \in K_1$, $x \neq y_i$ entonces debe ser $x \preceq y_i$ pues de lo contrario, por ser K_i una cadena, sería $y_i \preceq x$; pero $x \preceq y_j$ para algún j, por definición de X^-, y tendríamos $y_i \preceq y_j$ contradiciendo el hecho de ser T una anticadena. Análogamente se prueba que y_i es el mínimo de L_i. De aquí se deduce que $M_i = K_i \cup L_i$ es una cadena para cada $i = 1, \ldots, m$. Es fácil ver que estas cadenas M_i son disjuntas. En efecto si $i \neq j$, puesto que $K_i \cap K_j = L_i \cap L_j = \emptyset$, se tiene que $M_i \cap M_j = (K_i \cap L_j) \cup (L_i \cap K_j)$. Pero si $x \in K_i \cap L_j$ entonces $x \preceq y_i$, $y_j \preceq x$ lo cual conduce al absurdo $y_j \preceq y_i$. Por lo tanto $K_i \cap L_j$ es vacío, y de modo análogo se prueba que $L_i \cap K_j$ también lo es.

Hemos probado entonces que $M_1, \ldots, M_m$ es una partición de X en cadenas, por lo cual $c(X) \leq m = a(X)$. □

El valor común de $a(X)$ y $c(X)$ se denomina *número de Dilworth* del conjunto parcialmente ordenado X.

Un grafo $G = (V, A)$ se dice que es *bipartito* si el conjunto de vértices V es la unión de dos subconjuntos disjuntos independientes V_1 y V_2. En este caso todas las aristas de G tendrán un extremo en V_1 y otro en V_2. Un *pareo* del grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, A)$ es una función inyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $\{v, f(v)\} \in A \ \forall\, v \in V_1$. Otra forma de pensar en un pareo es como un conjunto de aristas tales que cada vértice de V_1 es extremo de una y sólo una de ellas, y ningún vértice de V_2 es extremo de más de una de ellas. Si $W \subset V_1$ denotaremos $W^\star$ al conjunto de vértices adyacentes a algún vértice de W, es decir:

$$W^\star = \{v \in V_2 \,:\, \{w, v\} \in A \text{ para algún } w \in W\}$$

Teorema del matrimonio 7.5.2. *Un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, A)$ admite un pareo si y sólo si $|W^\star| \geq |W|$ para todo $W \subset V_1$.*

Demostración: Si existe un pareo $f : V_1 \to V_2$ y $W \subset V_1$ entonces $f(W) \subset W^\star$ y como f es inyectiva se tiene $|W| = |f(W)| \leq |W^\star|$.

Supongamos ahora que se cumple la condición $|W^\star| \geq |W|$ para todo $W \subset V_1$. Definamos un orden parcial en el conjunto de vértices V de G poniendo $u \preceq v$ si y sólo si $u = v$ o $u \in V_1$, $v \in V_2$ y $\{u, v\} \in A$.

Sea T una anticadena en V y $T_i = T \cap V_i,\ i = 1, 2$. Entonces T es la unión disjunta de T_1 y T_2. Además $T_1^\star \subset V_2 \backslash T_2$, por lo tanto

$$|V_2| - |T_2| = |V_2 \backslash T_2| \geq |T_1^\star| \geq |T_1|$$

y en consecuencia $|T| = |T_1| + |T_2| \leq |V_2|$. Como por otra parte V_2 mismo es una anticadena, tenemos que el máximo número de elementos en una anticadena es $|V_2|$. El teorema de Dilworth nos permite afirmar la existencia de una partición de V en $|V_2|$ cadenas disjuntas. Es claro que cada una de esas cadenas contiene uno y sólo un elemento de V_2. Cada elemento $u \in V_1$ pertenece a una y sólo una de esas cadenas, digamos $\{u, w\}$ con $w \in V_2$ adyacente a u. Poniendo $f(u) = w$ resulta un pareo. □

El teorema del matrimonio admite la siguiente interpretación, que justifica su nombre: sea V_1 un conjunto de muchachas y V_2 un conjunto de muchachos. Construyamos un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, A)$ incluyendo una arista $\{u, w\}$ cada vez que a la muchacha u le agrade el muchacho w. Un pareo no es más que una forma de asignar a cada muchacha un muchacho que sea de su agrado, de modo que ningún muchacho sea asignado a más de una muchacha. El teorema (7.5.2) nos dice que existe un pareo si y sólo si para cualquier conjunto de n muchachas hay al menos n muchachos que son del agrado de por lo menos una de ellas.

7.6 Sistemas de representantes distintos

Sea X un conjunto y $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ una familia de subconjuntos de X. Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de elementos diferentes de X se denomina *sistema de representantes distintos* de $\mathcal{S}$ si $x_i \in S_i$, para $i = 1, \ldots, m$.

Teorema de Philip Hall 7.6.1. *Si la familia $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de X satisface la condición $|\cup_{i \in F} S_i| \geq |F|\ \forall\, F \subset \mathbb{N}_m$ entonces $\mathcal{S}$ admite un sistema de representantes distintos.*

Demostración: Sean $V_1 = \mathcal{S}$ y $V_2 = X$. Consideremos el grafo bipartito con conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y en el cual S_i y x son adyacentes si y sólo

si $x \in S_i$. Si $F \subset \mathbb{N}_m$ y definimos $W = \{S_i : i \in F\}$ entonces $W^\star = \cup_{i \in F} S_i$. Por lo tanto $|W^\star| \geq |F| = |W|$. Se satisfacen entonces las hipótesis del teorema del matrimonio (7.5.2) por lo cual existe un pareo $f : V_1 \to V_2$. El conjunto $\{f(S_1), \ldots, f(S_m)\}$ es claramente un sistema de representantes distintos. □

Sea $L_{n,m} = \{(i,j) : i = 1, 2, \ldots, n \ , \ j = 1, 2, \ldots, m\}$. A las filas y columnas de $L_{n,m}$ las denominaremos indistintamente *hileras*. Si $A \subset L_{n,m}$ llamaremos $h(A)$ al mínimo número de hileras suficientes para cubrir el conjunto A y $t(A)$ al máximo número de elementos de A que puedan tomarse de modo que no haya dos con una coordenada igual. En términos ajedrecísticos $L(n,m)$ es un tablero de $n \times m$ y $t(A)$ es el máximo número de torres que pueden colocarse en las casillas del conjunto A de modo que ningún par de ellas se ataquen.

Teorema de König-Frobenius 7.6.2. *Para todo $A \subset L_{n,m}$ se tiene $h(A) = t(A)$.*

Demostración: Tomemos un cubrimiento de A por medio de r filas y s columnas, con $r + s = h(A)$. Como $h(A)$ y $t(A)$ son obviamente invariantes por permutaciones de filas o de columnas podemos suponer que el cubrimeiento consta de las primeras r filas y las primeras s columnas. Es claro que $t(A) \leq h(A)$ ya que si $B \subset A$ y $|B| > h(A)$ entonces alguna hilera del cubrimiento debe contener dos o más puntos de B. Para probar la desigualdad contraria consideramos los conjuntos $S_i = \{j : s+1 \leq j \leq m \text{ y } (i,j) \in A\}$ para $i = 1, \ldots, r$. Si $F \subset \{1, \ldots, r\}$ entonces $|\cup_{i \in F} S_i| \geq |F|$, ya que de lo contrario podríamos obtener un cubrimiento de A con menos de $h(A)$ hileras reemplazando las $|F|$ filas con índices $i \in F$ por columnas con índices $j \in \cup_{i \in F} S_i$. Por el teorema de Philip Hall (7.6.1) se concluye que $S_1, \ldots, S_r$ tienen un sistema de representantes distintos $j_1, \ldots, j_r$. Análogamente se prueba que los conjuntos $T_j = \{i : r+1 \leq i \leq m \text{ y } (i,j) \in A\}$ para $j = 1, \ldots, s$ tienen un sistema de representantes distintos $i_1, \ldots, i_s$. Es claro ahora que $\{(1,j_1), \ldots, (r,j_r), (i_1,1), \ldots, (i_s,s)\}$ es un subconjunto de A con $r + s = h(A)$ elementos de los cuales no hay dos en una misma hilera. Por tanto, $h(A) \leq t(A)$. □

7.7 Ejercicios

1. Pruebe que $R(3,3;2) = 6$

2. Pruebe que si $R(a-1,b;2)$ y $R(a,b-1;2)$ son ambos pares entonces $R(a,b;2) < R(a-1,b;2) + R(a,b-1;2)$.

3. Pruebe que $R(3,4;2) = 9$ y $R(3,5;2) = 14$.

4. Pruebe que si $k \geq 2$ y $a_i \geq 3$ para $i = 1,\ldots,k$ entonces:

$$R(a_1,\ldots,a_k;2) \leq R(a_1-1,a2,\ldots,a_k;2) + R(a_1,a_2-1,\ldots,a_k;2) + \\ \cdots + R(a1,\ldots,a_k-1;2) - k + 2$$

   Aplicación: probar que $R(3,3,3;2) \leq 17$.

5. Pruebe que $R(a_1+1,\ldots,a_k+1;2) \leq \binom{a_1+\cdots+a_k}{a_1\ a_2\ \ldots\ a_k}$

6. Pruebe que en cualquier coloración de las aristas del grafo completo de n vértices con dos colores hay por lo menos $n(n-1)(n-5)/24$ triángulos monocromáticos si n es impar y $n(n-2)(n-4)/24$ si n es par.

7. (Greenwood y Gleason) Pruebe que $R(\underbrace{3,\ldots,3}_{n};2) \leq \lfloor en! \rfloor + 1$

8. Pruebe que toda sucesión de números reales tiene una subsucesión estrictamente creciente, estrictamente decreciente o constante.

9. Pruebe que si los puntos del plano se pintan con r colores, entonces existe algún triángulo equilátero con los tres vértices del mismo color. (Para $r = 2$ éste es un problema elemental pero interesante. Para r cualquiera se puede demostrar a partir del Teorema de Van der Waerden 7.4.2)

10. Pruebe que si los puntos de coordenadas enteras de $\mathbb{R}^2$ se pintan con r colores, y si F es un conjunto finito de tales puntos, existe otro conjunto F' afínmente equivalente a F y con todos sus puntos de un mismo color.

11. (Sperner) Pruebe que el número de Dilworth del conjunto de partes de un conjunto de n elementos, ordenado parcialmente por inclusión, es $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

12. Pruebe que el número de Dilworth del conjunto de particiones de $\mathbb{N}_n$ ordenado por refinamiento es mayor o igual que el máximo número de Stirling de segunda clase $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Capítulo 8

Enumeración bajo acción de grupos

Polya had a theorem
(Which Redfield proved of old)
What secrets sought by graphmen
Whereby that theorem told!

- Blanche Descartes

En muchas ocasiones al contar configuraciones se presenta la necesidad de considerar a algunas de ellas como "equivalentes". Por ejemplo si se desea pintar un cubo de madera con dos colores, digamos rojo y azul, pintando cada cara de un solo color, puesto que hay dos modos de pintar cada cara y el cubo tiene seis caras llegamos a la conclusión de que existen $2^6 = 64$ coloraciones diferentes. Este resultado supone sin embargo que las seis caras del cubo son completamente distinguibles entre sí, como en efecto ocurriría si estuviesen numeradas o si el cubo estuviese montado en una posición fija, que nos permitiese reconocer cada cara por su orientación. Si en cambio podemos mover el cubo y rotarlo y las caras no se distinguen entre sí excepto por su color, vemos que el número de coloraciones "diferentes" se reduce bastante. En efecto, las seis coloraciones del cubo fijo que tienen una cara roja y las otras cinco azules se vuelven indistinguibles. Asimismo las $\binom{6}{2} = 15$ coloraciones del cubo fijo con dos caras rojas y las demás azules se reducen a solamente dos: una en la cual las dos caras rojas son adyacentes y otra en la cual son opuestas. Prosiguiendo con este análisis se ve fácilmente

que hay solamente diez coloraciones *esencialmente diferentes*. El problema se complica bastante, sin embargo, si aumentamos el número de colores disponibles o si sustituímos el cubo por un poliedro más complicado, como por ejemplo un dodecaedro. En la teoría de grafos se presentan numerosos problemas semejantes, por ejemplo el de determinar el número de grafos no isomorfos con un número dado de vértices y aristas.

En general, supongamos que un grupo de permutaciones actúa sobre un conjunto de configuraciones y que consideramos a dos configuraciones *equivalentes* cuando una permutación del grupo lleva una en la otra. Entonces nos planteamos el problema de contar el número de configuraciones *no equivalentes*. En este capítulo, luego de introducir algunas nociones básicas sobre acción de grupos, demostraremos algunos resultados que nos permitirán hacer tal cosa, especialmente el llamado "Teorema de Polya". Los resultados fundamentales de esta teoría fueron obtenidos en primer lugar por J. H. Redfield (ver [R1]), como lo da a entender el poema de Blanche Descartes citado en el epígrafe, pero pasaron desapercibidos durante muchos años hasta que Polya (ver [P2]), Bruijn y otros matemáticos los redescubrieron y enriquecieron.

8.1 Acción de un grupo sobre un conjunto

Sean G un grupo y A un conjunto. Una *acción* de G sobre A es una aplicación $\phi : G \times A \to A$ tal que:

1. $\phi(e, x) = x\,,\ \forall x \in A$ (siendo e la identidad de G)
2. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)\,,\ \forall\ g, h \in G,\ \forall\, x \in A$

Se acostumbra simplificar la notación escribiendo gx en lugar de $\phi(g, x)$. Entonces las condiciones 1 y 2 pueden reformularse así:

1. $ex = x\,,\ \forall\, x \in A$ (siendo e la identidad de G)
2. $g(hx) = (gh)x,\ \forall\, g, h \in G,\ \forall\, x \in A$

Dada una acción de G sobre A es posible definir una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A del siguiente modo:

$$x\mathcal{R}y \text{ si existe } g \in G \text{ tal que } y = gx$$

La condición 1 nos asegura que $\mathcal{R}$ es reflexiva. También es transitiva pues si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ entonces existen elementos $g,\ h \in G$ tales que $y = gx$, $z = hy$ de

donde $z = h(gx) = (hg)x$ y por lo tanto $x\mathcal{R}z$. Finalmente, $\mathcal{R}$ es simétrica pues si $y = gx$ y $h = g^{-1}$ es el elemento inverso de g en G entonces $hy = h(gx) = (hg)x = ex = x$.

A las clases de equivalencia determinadas por esta relación se les llama *órbitas*. La órbita de un elemento $x \in A$ es el conjunto $\{gx : g \in G\}$ que denotaremos Gx o bien $\overline{x}$. Al conjunto de órbitas (es decir al conjunto cociente de A por la relación $\mathcal{R}$) lo denotaremos $A/\mathcal{R}$ o simplemente $\overline{A}$.

La acción de G sobre A es *transitiva* si cualquier par de elementos de A son equivalentes, es decir si dados $x, y \in A$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$. En este caso hay una sola órbita, el propio conjunto A.

Cada elemento $g \in G$ induce una aplicación $g^\star : A \to A$ definida mediante $g^\star(x) = gx$, $\forall\, x \in A$. Al elemento identidad de G le corresponde obviamente la aplicación identidad de A en A, es decir $e^\star = \mathrm{Id}_A$. Además si $g, h \in G$ entonces se tiene: $(gh)^\star(x) = (gh)x = g(hx) = g^\star(h^\star(x)) = g^\star \circ h^\star(x)$, $\forall\, x \in A$. En otras palabras $(gh)^\star = g^\star \circ h^\star$. Si $h = g^{-1}$ es el elemento inverso de g en G se tiene que $g^\star \circ h^\star = h^\star \circ g^\star = e^\star = \mathrm{Id}_A$, y por lo tanto $h^\star$ es la aplicación inversa de $g^\star$. De aquí resulta en particular que $g^\star$ es una biyección de A en A, es decir un elemento del grupo $S(A)$ de las permutaciones de A. La aplicación $\theta : G \to S(A)$ que a cada $g \in G$ le hace corresponder $g^\star$ es un homomorfismo de grupos, ya que $\theta(gh) = (gh)^\star = g^\star \circ h^\star = \theta(g) \circ \theta(h)$. Si θ es un monomorfismo, es decir si es inyectivo, se dice que la acción es *efectiva*. En este caso el grupo G puede identificarse con un subgrupo de $S(A)$. Es interesante observar que dado un homomorfismo $\varphi : G \to S(A)$ existe una única acción de G sobre A cuyo homomorfismo inducido es precisamente φ, a saber la que viene dada por $\phi(g, x) = \varphi(g)(x)$. De hecho, algunos autores definen el concepto de acción de un grupo G sobre un conjunto A como un homomorfismo de G en $S(A)$.

El *estabilizador* de un elemento $x \in A$ es el conjunto G_x de elementos de G que dejan fijo a x. En otras palabras :

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

Es claro que G_x es un subgrupo de G, ya que si g, $h \in G$ entonces $gx = hx = x$ y tenemos:

$$(gh^{-1})x = (gh^{-1})hx = (gh^{-1}h)x = gx = x$$

Los estabilizadores de elementos de una misma órbita son subgrupos conjugados. En efecto si $y = hx$ entonces $g \in G_y \Leftrightarrow gy = y \Leftrightarrow ghx = hx \Leftrightarrow$

$(h^{-1}gh)x = x \Leftrightarrow h^{-1}gh \in G_x \Leftrightarrow g \in hG_xh^{-1}$, es decir que $G_{hx} = hG_xh^{-1}$. En el caso de que la acción sea transitiva, todos los estabilizadores son subgrupos conjugados.

Si $g \in G$ entonces al subconjunto de A formado por los puntos fijos de $g^\star$ lo denotaremos A_g. En símbolos:

$$A_g = \{x \in A : gx = x\}$$

Observemos que $x \in A_g$ si y sólo si $g \in G_x$.

Ejemplos de acción de grupos sobre conjuntos

1. Sea A el plano y G el grupo de las rotaciones alrededor de un punto O. La acción viene dada simplemente por $gx = g(x)$. Las órbitas son las circunferencias de centro O.

2. Sea A el conjunto de vértices de un polígono regular de n lados y G el grupo de simetrías del polígono (este grupo se suele designar D_n) . Si $n \geq 3$ el homomorfismo $\theta : D_n \to S_n$ es inyectivo, ya que un movimiento del plano que deja fijos tres puntos no alineados es la identidad. Esto prueba que D_n es isomorfo a un subgrupo de S_n.

3. El grupo de rotaciones de un poliedro lo podemos hacer actuar sobre el conjunto de vértices, el de aristas o el de caras del poliedro.

4. Sea G un grupo. Entonces la propia operación binaria del grupo, como aplicación de $G \times G$ en G, constituye una acción de G sobre sí mismo. Otra acción de G sobre G es la llamada conjugación, que viene dada por $\phi(g, h) = ghg^{-1}$.

A continuación probaremos algunas proposiciones básicas sobre acción de grupos.

Proposición 8.1.1. *Si G es un grupo finito que actúa sobre un conjunto A, entonces $|\overline{x}| \cdot |G_x| = |G|,\ \forall x \in A$.*

Demostración: Sea $\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y sean $g_1, g_2, \ldots, g_k$ elementos de G tales que $x_i = g_i x,\ i = 1, 2, \ldots, k$. Sean además $h_1, \ldots, h_r$ los elementos de G_x. Afirmamos que los productos g_ih_j son todos distintos. En efecto, si $g_ih_j = g_sh_t$ aplicando ambos miembros a x se obtiene $g_ix = g_sx$, es decir $x_i = x_s$ de donde $i = s$. Multiplicando ahora ambos miembros de la igualdad

$g_i h_j = g_i h_t$ a la izquierda por g_i^{-1} resulta $h_j = h_t$ y $j = t$. Los elementos de la forma $g_i h_j$ son en total $kr = |\overline{x}| \cdot |G_x|$. La demostración quedará completa si probamos que los $g_i h_j$ son en realidad *todos* los elementos de G. Para ello sea $g \in G$. Para algún i debe ser $gx = x_i = g_i x$, de donde $g_i^{-1} gx = x$. Esto significa que $g_i^{-1} g \in G_x$, es decir $g_i^{-1} g = h_j$ para algún j y $g = g_i h_j$. □

Proposición 8.1.2. *Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto A, y sea Y un grupo aditivo. Supongamos que $p : A \to Y$ es una función tal que $p(gx) = p(x),\ \forall g \in G,\ \forall x \in A$ (en otras palabras, p toma el mismo valor en elementos equivalentes de A). Sea $\overline{p} : \overline{A} \to Y$ la única función tal que $\overline{p}(\overline{x}) = p(x),\ \forall x \in A$. Entonces:*

$$|G| \sum_{\overline{x} \in \overline{A}} \overline{p}(\overline{x}) = \sum_{g \in G} \sum_{x \in A_g} p(x)$$

Demostración:

$$\sum_{g \in G} \sum_{x \in A_g} p(x) = \sum_{x \in A} \sum_{g \in G_x} p(x) = \sum_{x \in A} |G_x| p(x) = \sum_{\overline{x} \in \overline{A}} \sum_{x \in \overline{x}} (|G|/|\overline{x}|) p(x)$$
$$= \sum_{\overline{x} \in \overline{A}} \sum_{x \in \overline{x}} (G/|\overline{x}|) \overline{p}(\overline{x}) = \sum_{\overline{x} \in \overline{A}} |G| \overline{p}(\overline{x}) = |G| \sum_{\overline{x} \in \overline{A}} \overline{p}(\overline{x})$$

□

Lema de Burnside 8.1.3. *Si G es un grupo finito que actúa sobre un conjunto A entonces el número de órbitas de A viene dado por:*

$$|\overline{A}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |A_g|$$

Demostración: Basta tomar en la Proposición anterior $Y = \mathbb{Z}$ (los enteros) y como $p : A \to Y$ la función constante $p(x) = 1\ \forall\, x \in A$. □

8.2 La Acción de Polya

Sean D y C dos conjuntos y G un subgrupo de $S(D)$. Sea $A = C^D$ el conjunto de todas las funciones de D en C. Definamos $\phi : G \times A \to A$ así: $\phi(g, f) = f \cdot g^{-1}$. Es inmediato verificar que ϕ es una acción, y es conocida

con el nombre de "acción de Polya". Si pensamos en los elementos de D como objetos a pintar y en los elementos de C como colores, entonces los elementos de A son "coloraciones" o maneras de pintar los elementos de D. En lo sucesivo utilizaremos este lenguaje.

Proposición 8.2.1. *Sean D y C dos conjuntos finitos y G un subgrupo del grupo de permutaciones de D. Consideremos la acción de Polya de G sobre $A = C^D$. Entonces el número de órbitas viene dado por*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C|^{\lambda(g)}$$

siendo $\lambda(g)$ el número de factores en la descomposición de g en producto de ciclos disjuntos.

Demostración: Por el lema de Burnside (8.1.3) el número de órbitas es $(1/|G|) \sum_{g \in G} |A_g|$. Ahora bien, A_g está constituído por todas las coloraciones $f : D \to C$ tales que $f \cdot g^{-1} = f$. Afirmamos que $f \cdot g^{-1} = f$ si y sólo si f asigna el mismo color a todos los elementos de cada ciclo de g. En efecto, supongamos que $f \cdot g^{-1} = f$ y sea $(d_1, \ldots, d_t)$ un ciclo de g. Entonces $g(d_i) = d_{i+1}$ para $1 \leq i < t$ y $g(d_t) = d_1$. En consecuencia, $f(d_i) = f(g^{-1}(d_{i+1})) = f(d_{i+1})$ para $1 \leq i < t$ y $f(d_t) = f(g^{-1}(d_1)) = f(d_1)$. Recíprocamente si f es una coloración constante en cada ciclo de g, puesto que el elemento $g^{-1}(d)$ está en el mismo ciclo que d para todo $d \in D$, tendremos que $f(g^{-1}(d)) = f(d)$. Esto significa que hay tantos elementos en A_g como formas de asignar un color de C a cada ciclo de g, y este número es precisamente $|C|^{\lambda(g)}$. □

Ejemplo: Coloración del cubo con r colores

El resultado recién demostrado nos permite resolver con toda generalidad el problema planteado al principio del capítulo.

El grupo de rotaciones del cubo está constituído por 24 rotaciones, que clasificaremos en 5 tipos:

1. La identidad.
2. Rotaciones de 120° y 240° alrededor de las diagonales del cubo. Como hay cuatro diagonales, hay 8 rotaciones de este tipo.
3. Rotaciones de 90° y 270° alrededor de los 3 ejes que pasan por los centros de caras opuestas del cubo. Son 6 rotaciones.

4. Rotaciones de 180° alrededor de los mismos ejes que las del tipo anterior. Son 3 rotaciones.

5. Rotaciones de 180° alrededor de los ejes que pasan por los puntos medios de aristas opuestas. Hay 6 rotaciones de este tipo.

Cada una de estas rotaciones induce una permutación de las seis caras del cubo que se descompone en ciclos de la manera siguiente:

- La identidad se descompone en seis 1-ciclos.
- Las rotaciones del tipo 2, en dos 3-ciclos cada una.
- Las del tipo 3, en dos 1–ciclos y un 4–ciclo (total: tres ciclos cada una.)
- Las del tipo 4, en dos 1–ciclos y dos 2–ciclos. (total: cuatro ciclos cada una.)
- Las del tipo 5, en tres 2–ciclos cada una.

Con la información anterior ya podemos afirmar que el número de coloraciones del cubo no equivalentes por rotación viene dado por la fórmula:

$$\frac{1}{24}(r^6 + 8r^2 + 6r^3 + 3r^4 + 6r^3) = \frac{1}{24}r^2(r^4 + 3r^2 + 12r + 8)$$

la cual nos permite construir la tabla siguiente:

número de colores	número de coloraciones no equivalentes
1	1
2	10
3	57
4	240
5	800
6	2226
7	5390
8	11712
9	23355
10	43450
20	2690800
30	30490050
40	171019200
50	651886250

En lo que sigue supondremos, para simplificar la notación, que $C = \{1, 2, \ldots, r\}$ (esto equivale a "numerar" los colores).

Sea $Y = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ el anillo de los polinomios en r variables con coeficientes racionales. Definamos una función $p : C^D \to Y$ del modo siguiente:

$$p(f) = \prod_{d \in D} x_{f(d)}, \qquad \forall f \in C^D.$$

Es claro que $p(f)$ es un monomio de grado $n = |D|$ en las variables $x_1, \ldots, x_r$, y que el exponente de x_k en $p(f)$ corresponde al número de puntos de D pintados con el color k en la coloración f.

Observemos además que $p(gf) = p(f),\ \forall g \in G, \forall f \in C^D$. En efecto,

$$p(gf) = \prod_{d \in D} x_{gf(d)} = \prod_{d \in D} x_{f(g^{-1}(d))}$$

pero como g es una biyección de D en D, cuando d toma todos los valores en D también lo hace $g^{-1}(d)$. Por lo tanto el último producto es igual a $p(f)$ como queríamos probar. Esto significa que estamos en condiciones de aplicar la Proposición (8.1.2) a la acción de Polya de G sobre $A = C^D$, y obtenemos:

$$|G| \sum_{\overline{f} \in \overline{A}} \overline{p}(\overline{f}) = \sum_{g \in G} \sum_{f \in A_g} p(f)$$

Ahora bien, como vimos en la demostración de la Proposición anterior $f \in A_g$ si y sólo si f asigna el mismo color a los elementos de cada ciclo de g. Por lo tanto si $g \in G$ se descompone en λ ciclos $c_1, \ldots, c_\lambda$ de longitudes $a_1, \ldots, a_\lambda$ y si f asigna el color i_j a los elementos del ciclo c_j entonces $p(f)$ será de la forma $x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_\lambda}^{a_\lambda}$. Más aún, p establece una correspondencia biyectiva entre los monomios del tipo antedicho y las coloraciones $f \in A_g$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in A_g} p(f) &= \sum x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_\lambda}^{a_\lambda} \\ &= (x_1^{a_1} + \cdots + x_r^{a_1})(x_1^{a_2} + \cdots + x_r^{a_2}) \cdots (x_1^{a_\lambda} + \cdots + x_r^{a_\lambda}) \\ &= \psi_{a_1} \psi_{a_2} \ldots \psi_{a_\lambda} \end{aligned}$$

siendo ψ_k las funciones simétricas $\psi_k(x_1, \ldots, x_r) = x_1^k + \cdots + x_r^k$. Cada ψ_k aparece en el producto $\psi_{a_1} \psi_{a_2} \ldots \psi_{a_\lambda}$ tantas veces como ciclos de longitud

k aparezcan en la descomposición de g, es decir $\lambda_k(g)$. Hemos probado entonces el siguiente teorema:

Teorema de Polya 8.2.2.

$$\sum_{\overline{f}\in\overline{A}} \overline{p}(\overline{f}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{k=1}^{n}\psi(x_1,\ldots,x_r)^{\lambda_k(g)}$$

□

Observaciones: 1) Definiendo el *polinomio indicador de ciclos* del grupo G (G subgrupo de $S(D)$, con $|D| = n$) del siguiente modo:

$$P_G(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x_1^{\lambda_1(g)}\ldots x_n^{\lambda_n(g)}$$

el Teorema de Polya puede enunciarse así:

$$\sum_{\overline{f}\in\overline{A}} \overline{p}(\overline{f}) = P_G(\psi_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_r))$$

2) Poniendo en el Teorema de Polya $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 1$ se obtiene como caso particular la proposición (8.2.1).

Ejemplo:

El análisis de las rotaciones del cubo realizado en el ejemplo anterior nos permite escribir el polinomio indicador de ciclos de inmediato:

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 8x_3^2 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3)$$

Supongamos que se va a colorear el cubo con dos colores, digamos rojo y azul. Calculando $P_G(\psi_1,\ldots,\psi_6)$ con $\psi_1 = x+y$, $\psi_2 = x^2+y^2$, $\psi_3 = x^3+y^3$, $\psi_4 = x^4+y^4$, resulta el polinomio

$$x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 2x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6$$

(hemos usado x, y en lugar de x_1 , x_2 para aligerar la notación) El término $2x^3y^3$ por ejemplo, nos dice que hay dos coloraciones con tres caras pintadas de rojo y las otras tres de azul.

8.3 Enumeración de grafos no isomorfos

La teoría de Polya puede ser usada para determinar el número de grafos no isomorfos con un número de vértices y aristas dado. Para esto consideremos el grafo completo de n vértices K_n. A cada coloración de las aristas de K_n con dos colores, digamos rojo y azul, le podemos hacer corresponder el grafo cuyos vértices son los mismos de K_n y cuyas aristas son las coloreadas de rojo. Es claro que cualquier grafo de n vértices puede ser obtenido de esta manera a partir de una bicoloración de K_n. Observemos sin embargo que la correspondencia descripta no es inyectiva, ya que coloraciones diferentes pueden dar lugar a grafos isomorfos. Recordemos que dos grafos son isomorfos cuando existe una aplicación biyectiva entre sus vértices que preserva la relación de adyacencia. Entonces dos coloraciones de K_n darán lugar a grafos isomorfos cuando ambas difieran en una permutación de las aristas de K_n inducida por una permutación de sus vértices. En símbolos, si $K_n = (V, A)$ y $f : A \to (r, a)$ es una coloración de A con dos colores r y a, el grafo correspondiente a f es $G_f = (V, A_f)$ siendo $A_f = \{e \in A : f(e) = r\}$. Dos coloraciones f y g dan lugar a grafos isomorfos si existe una permutación σ de V tal que $\{u, v\} \in A_f$ si y sólo si $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in A_g$. Esto equivale a decir que $f(\{u, v\}) = g(\{\sigma(u), \sigma(v)\})$, $\forall\, u, v \in V$ o más simplemente $f = g \circ \overline{\sigma}$ siendo $\overline{\sigma}$ la permutación de A inducida por σ, a saber $\overline{\sigma}(\{u, v\}) = \{\sigma(u), \sigma(v)\}$ $\forall\, u, v \in V,\ u \neq v$.

Sea G el grupo de las permutaciones de A inducidas por permutaciones de V. Entonces la acción de Polya de G sobre las bicoloraciones de K_n induce una relación de equivalencia bajo la cual dos coloraciones son equivalentes si y sólo si les corresponden grafos isomorfos. El número de grafos no isomorfos de n vértices será entonces igual al número de órbitas, y puede obtenerse a partir del lema de Burnside. El teorema de Polya permite, más aún, calcular el número de grafos no isomorfos con n vértices y m aristas. Pero para aplicar el teorema de Polya es necesario conocer como se descompone en ciclos cada elemento del grupo G. Sea σ una permutación del conjunto de vértices V con λ_i ciclos de longitud i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\alpha = \{u, v\}$ una arista de K_n. Consideraremos varios casos:

1) Si u y v pertenecen a un mismo ciclo de σ de longitud impar $2k + 1$ entonces la arista α pertenece a un ciclo de $\overline{\sigma}$ de longitud $2k + 1$, a saber $\{u, v\}, \{\sigma(u), \sigma(v)\}, \ldots, \{\sigma^{2k}(u), \sigma^{2k}(v)\}$. Puesto que las $\binom{2k+1}{2} = (2k+1)k$ aristas cuyos extremos son vértices del ciclo σ se agrupan en ciclos disjuntos de longitud $2k + 1$ concluímos que hay k de estos ciclos. Por lo tanto cada

ciclo de longitud impar $2k+1$ en σ da origen a k ciclos de longitud $2k+1$ en $\overline{\sigma}$.

2) Si u y v pertenecen a un mismo ciclo de σ de longitud par $2k$ entonces la arista α puede estar en un ciclo de $\overline{\sigma}$ de longitud $2k$ o bien en uno de longitud k. Por ejemplo si consideramos el ciclo (1 2 3 4) entonces las aristas $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}$ y $\{1,4\}$ pertenecen al 4-ciclo $(\{1,2\}\ \{2,3\}\ \{3,4\}\ \{1,4\})$, pero las aristas $\{1,3\}$ y $\{2,4\}$ pertenecen al 2-ciclo $(\{1,3\}\ \{2,4\})$. En general es fácil ver que el $2k$-ciclo $(v_1,\ldots,v_{2k})$ dará origen a un k-ciclo $(\{v_1,v_{k+1}\}\ \{v_2,v_{k+2}\}\ \ldots\ \{v_k,v_{2k}\})$ y a $k-1$ $2k$-ciclos.

3) Si u pertenece a un r-ciclo de σ y v a un s-ciclo entonces la arista $\{u,v\}$ estará en un ciclo de $\overline{\sigma}$ de longitud igual al mínimo común múltiplo de r y s. En efecto para que se cumpla que $\{\sigma^t(u),\sigma^t(v)\}=\{u,v\}$ debe ser $\sigma^t(u)=u$ y $\sigma^t(v)=v$ (no puede ser $\sigma^t(u)=v$ y $\sigma^t(v)=u$ ya que u y v están en ciclos disjuntos). Por lo tanto debe cumplirse que $r|t$ y $s|t$, lo cual implica m.c.m.$(r,s)|t$. El número de ciclos disjuntos en los cuales se dividen las rs aristas con un vértice en cada ciclo será entonces $rs/$m.c.m.$(r,s)=$ m.c.d.(r,s) (máximo común divisor de r y s).

Como consecuencia del análisis anterior podemos afirmar que en la descomposición de $\overline{\sigma}$ en producto de ciclos disjuntos tendremos:

1) $\lambda_r(r-1)/2$ r-ciclos, para cada r impar entre 1 y n.
2) λ_r $\frac{r}{2}$-ciclos y $\frac{r}{2}-1$ r-ciclos para cada r par entre 1 y n.
3) $\lambda_r\lambda_s$m.c.d.(r,s) m.c.m(r,s)-ciclos para cada par de números distintos r,s entre 1 y n, y $r\binom{\lambda_r}{2}$ r-ciclos , para cada r entre 1 y n (ya que existen $\lambda_r\lambda_s$ maneras de escoger un r-ciclo y un s-ciclo, si $r\neq s$, y $\binom{\lambda_r}{2}$ maneras de escoger un par de r-ciclos distintos)

Si aplicamos el Teorema de Polya (8.2.2) para dos colores, dando a la variable x_1 el valor 1 y recordando que el número de permutaciones con λ_i ciclos de longitud i para $i=1,\ldots,n$ es

$$K(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\lambda_n!}$$

resulta la siguiente:

Proposición 8.3.1. *El número de grafos no isomorfos con n vértices y m aristas es igual al coeficiente de x^m en el polinomio que se obtiene sumando, para cada solución de la ecuación diofántica $1\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$ un*

término de la forma:

$$\frac{1}{n!}K(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)[w_1^{0\lambda_1}w_3^{1\lambda_3}\ldots][(w_1w_2^0)^{\lambda_2}(w_2w_4^1)^{\lambda_4}(w_3w_6^2)^{\lambda_6}\ldots]$$
$$[w_1^{1\binom{\lambda_1}{2}}w_2^{2\binom{\lambda_2}{2}}w_3^{3\binom{\lambda_3}{2}}\ldots]\prod_{r\neq s}w_{\mathrm{mcm}(r,s)}^{\lambda_r\lambda_s\mathrm{mcd}(r,s)}$$

siendo w_k el polinomio $1+x^k$.

□

Excepto para pequeños valores de n el cálculo manual del número de grafos no isomorfos utilizando la última Proposición es imposible, y se requiere la ayuda del computador. En el Apéndice 2 incluímos una tabla obtenida con un programa basado en la Proposición (8.3.1), que muestra el número de grafos no isomorfos con n vértices y m aristas para $1 \leq n \leq 12$.

8.4 Ejercicios

1. ¿De cuántas maneras se puede pintar un tablero cuadrado de 2×2 con r colores, pintando cada casilla de un color y considerando equivalentes las coloraciones que difieren en una rotación del tablero?

2. ¿De cuántas maneras se pueden marcar con una X ocho de las dieciséis casillas de un tablero cuadrado de 4×4, considerando equivalentes las configuraciones que se obtienen unas de otras por rotaciones o simetrías del cuadrado?

3. Determine el número de coloraciones de las caras de un poliedro regular (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) con r colores, no equivalentes por rotaciones.

4. (Bruijn , [B4])

   Sea G un subgrupo de $S(D)$ y H un subgrupo de $S(C)$. Considere la acción de $G \times H$ sobre $A = C^D$ definida así:

   $$(g,h)f = h \circ f \circ g^{-1} \ \forall\,(g,h) \in G \times H,\ \forall\, f \in A$$

Pruebe que si C y D son finitos y $|D| = n$ entonces el número de órbitas viene dado por la fórmula siguiente:

$$|\overline{A}| = \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i|k} i\lambda_i(h) \right)^{\lambda_k(g)}$$

siendo $\lambda_i(\sigma)$ el número de ciclos de longitud i en la descomposición de la permutación σ en producto de ciclos disjuntos.

Bibliografía

[A1] Aigner, M., *Combinatorial theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[B1] Berge, C., *Principles of combinatorics*, Academic Press, New York-London, 1971 (traducción del original *Principes de combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.)

[B2] Bollobas, B., *Graph theory*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1979.

[B3] Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[B4] Bruijn, N. G. de, *Generalization of Polya's fundamental theorem in enumeration combinatorial analysis*, Indagationes Math. **21**(1959) 59–69.

[C1] Cohen, D., *Basic techniques of combinatorial theory*, John Wiley & Sons , New York, 1978.

[C2] Courant, R., John, F., *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa, México, 1971.

[C3] Coxeter, H.S.M., *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons, 1961 (hay traducción: *Fundamentos de geometría*, Limusa, México, 1971)

[C4] Coxeter,H.S.M., *The golden section, phyllotaxis, and Wythoff's game*, Scripta Mathematica, 19(1953) p. 139.

[ES1] Erdös, P., Szekeres, G., *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2**(1935) 463–470.

[F1] Feller, W., *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa, México, 1973 (traducción del original *An introduction to probability theory and its applications*, John Wiley & Sons, 1957.)

[F2] Foulds, L.R., *Combinatorial optimization for undergraduates*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.

[G1] Gardner, M., *Mathematical games*, Scientific American, 238(5), may 1978.

[G2] González, G., *Función de Möbius y teoría de Polya*, Notas de Matemática y computación Num. 2, F.E.C., Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, 1987.

[GR1] Graham, R. L., Rothschild, B. L., *A short proof of Van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Proc. Amer. Math. Soc. **42**, (1974), 385–386.

[H1] Hadwiger, H., Debrunner, H., Klee, V. *Combinatorial geometry in the plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[H2] Harary, F. *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[H3] Herstein, I. N., *Algebra moderna*, Trillas, México, 1976 (traducción del original *Topics in algebra*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1964.)

[K1] Knuth, D. E. *El arte de programar ordenadores (3 vol.)*, Reverté, Barcelona, 1980 (traducción del original *The art of computer programming, 2nd ed.*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.)

[L1] Levy, H., Lessman, F., *Finite difference equations*, Macmillan, New York, 1961.

[M1] Markushévich, A. I., *Sucesiones recurrentes*, Mir, Moscú, 1981.

[M2] Méndez, M., *Teoría de especies combinatorias*, Octava Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela, 1995.

[N1] Nieto, J. H., *Teoría Combinatoria*, Notas de Matemática y computación Num. 4, F.E.C., Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, 1987.

[N2] Nieto, J. H., *Extremos en sucesiones*, Divulgaciones Matemáticas **2**(1), (1994), 5–9.

[N3] Nijenhuis, S. A., Wilf, H. S., *Combinatorial algorithms*, Academic Press, New York-London, 1978.

[P1] Percus, J. K.,*Combinatorial methods*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[P2] Polya, G., *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen*, Acta Mathematica **68** (1937) 145–254.

[R1] Redfield, J. H., *The theory of group-reduced distributions*, American Journal of Mathematics **49**(1927), 433–455.

[R2] Reingold, E. M., Nievergelt, J., Deo, N., *Combinatorial Algorithms*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1977.

[R3] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C. A., *Análisis matemático* (tomo I), Kapelusz, Buenos Aires, 1960.

[R4] Rodríguez, J., *Polya theory and tableaux*, Notas de Matemática No. 67, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela 1984.

[R5] Rodríguez, J., *Teoría Combinatoria o el arte de contar*, Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela, 1990.

[R6] Rota,G.-C. *The number of partitions of a set* Amer. Math. Monthly **71**(1964), 498–504.

[R7] Rota, G.-C., *On the foundations of combinatorial theory I: theory of Möbius functions*, Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung u. verw. Geb. 2 (1964), 340-368.

[RS1] Rota,G.-C., Smith, D. A., *Enumeration under group action*, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa, serie IV, vol. IV, no.4 (1977), 637–646.

[T1] Tomescu, Ioan, *Introduction to combinatorics*, Collet's, London and Wellingborough, 1975.

[T2] Tucker, A., *Applied combinatorics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[U1] Uspenski, V. A., *Triángulo de Pascal*, Mir, Moscú, 1978.

[V1] Vilenkin, N., *¿De cuántas formas? Combinatoria*, Mir, Moscú, 1972.

[V2] Vorobyov, N. N., *Los números de Fibonacci*, Limusa, México, 1973.

[W1] Van der Waerden, B. L., *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wiskunde **15**, (1927), 212–216.

[W2] Whitehead, E. G., Jr., *The Ramsey number* $N(3,3,3,3;2)$, Discrete Mathematics, **4**(1973), 389–396.

Índice de Materias