Modelos Matemáticos Aplicados a la Administración y la Economía.

Libro publicado por:

Universidad Autónoma del Carmen.

UNACAR 2007.

Ciudad del Carmen. Campeche.

MËXICO

AUTORES:

Dr. Manuel E. Cortés Cortés

MSc Ridelio Miranda Pérez.

MSc Teresita Sánchez Navarro.

MSc. Domingo Curbeira Hernández-

Capítulo 1: Teoría de la Decisión.

1.1- Introducción

Decidir es un proceso por el cual una o más personas seleccionan una alternativa de entre un conjunto de ellos, para de acuerdo a determinados criterios alcanzar una serie de objetivos y metas preestablecidas, todo dentro del entorno de los posibles estudios que pueda guardar la naturaleza. suponiéndose que la mayoría de dichas alternativas no son absolutamente buenas o malas.

La persona que toma la decisión en la solución de un problema se le llama " decisor " y el proceso de su decisión puede realizarse haciendo uso de los principios de la metodología de la investigación científica que sigue las formas siguientes:

1. Observar el sistema donde incide la decisión.
2. Identificar y formular el problema sobre el cual se quiere decidir.
3. Establecer el modelo matemático que resolverá el problema planteado.
4. Seleccionar el método de solución.
5. Probar el modelo y su solución.
6. Introducción en la práctica de los resultados obtenidos.
7. Comprobar y ajustar los resultados.

Durante el proceso de toma de decisión y solución del problema, el decisor se enfrenta con una serie de alternativas llamada estrategias y con una serie de imponderables llamados estados de la naturaleza.

Estrategias: son programas generales de acción para el logro de los objetivos propuestos, que guían el pensamiento en la toma de decisiones. Las estrategias responden al cómo y se relacionan con nuevos productos o servicios, recursos disponibles diversos, mercadotecnia, finanzas, estructuras organizativas, personales y de relaciones públicas.

Definición de estrategia: es una vía, dentro de un conjunto determinado de ellas, que selecciona el decisor para alcanzar un objetivo, es decir, es la acción tomada dentro de un conjunto posible de acciones o alternativas disponibles al decisor. Toda estrategia reportaría un beneficio.

Estados de la naturaleza: son resultados de los factores del medio exterior al sistema que se van del control del decisor y que conspiran en mayor o menor medida en el alcance de los objetivos que se persiguen en el sistema. En el entorno están dados los posibles estados que guarda la naturaleza en relación a los objetivos del decisor sobre las cuales este no ejerce ningún control.

Definición de estados de la naturaleza: son los diferentes resultados o salidas que se presentan como consecuencia de la reacción del medio ante las diferentes alternativas posibles del sistema.

Además como aspecto esencial en la decisión están los objetivos, que es lo que se propone alcanzar el decisor, es la meta que aspiramos concretamente obtener.

Se puede decir que en toda toma de decisión aparecen los siguientes elementos:

- Una o mas decisiones que tienen una serie de objetivos y metas bien definidas.
- Un conjunto de posibles estrategias a seleccionar.
- Un conjunto de posibles resultados generados por las estrategias dadas.
- Un conjunto de estados de la naturaleza como consecuencia de la reacción del medio ante diferentes alternativas posibles.
- Una matriz que relaciona estrategias, estados de la naturaleza y resultados.
- Un proceso de decisión (selección de políticas) que toma una o varias acciones, dado un cierto entorno y metas explícitas de las decisiones.
- Un criterio que enmarca el proceso de decisión.

Ejemplo: 1

Un decisor (petróleos mexicanos) (Pemex) , cuyo objetivo es hacer de México un país autosuficiente en energéticos y con capacidad de generar importantes divisas a través de la exportación de excedentes.

Estos propósitos traducidos a metas para el año 1982, significan por ejemplo, una exportación de dos millones y medio de barriles diarios de crudo de los cuales un millón serán exportados.

Suponga que estudios geológicos del paleocanal de Chicontepec en el Estado de Veracruz, muestran que los posibles estados de la naturaleza (entorno relativos a los objetivos de Pemex son cuatro:

a) Región con posible producción de un millón de barriles diarios de crudo ligero.
b) Región con posible producción de 200 mil barriles diarios de crudo ligero.
c) Región con gas únicamente.
d) Región seca.

Ante tales posibilidades, Pemex puede instrumentar en la región una sola o una combinación de las tres siguientes estratégias.

a) No hacer nada.
b) Explorar y explotar.
c) Realizar estudios geológicos más completos.

La matriz obtenida, llamada matriz de decisión o matriz de pagos, que relaciona las estrategias, los estados de la naturaleza y los resultados obtenidos en millones de pesos será:

	ESTADOS DE LA NATURALEZA			
ESTRATEGIAS	EXISTEN YACIMIENTOS DEL ORDEN DE UN MILLÓN DE BARRILES DIARIOS E1	EXISTEN YACIMIENTOS DEL ORDEN DE 200 MIL BARRILES DIARIOS E2	SOLO EXISTE GAS E3	REGIÓN SECA E4

NO HACER NADA A1	PERDIDA 500	PERDIDA 100	PERDIDA 50	0
EXPLORAR Y EXPORTAR. A2	GANANCIAS 500	GANANCIA 100	GANANCIA 100	PERDIDA 900
REALIZAR ESTUDIOS MAS COMPLETOS A3	PERDIDA 30	PERDIDA 30	PERDIDA 30	PERDIDA 30

El proceso de decisión consistirá en seleccionar una o varias estrategias o alternativas, bajo el criterio de minimizar las pérdidas financieras.

La teoría de la decisión utiliza diferentes procedimientos que permiten formular la preferencia. Como base de este método esta la teoría de la utilidad elaborada por John von Newman y Oskar Morgenstern (1944)

La base axiomática sobre la que descansa la toma de la decisión plantea los siguientes axiomas.

1. Sean dos estratégias a1 y a2 de forma tal que a1 sea mas conveniente que a2,
2. (a1 > a2) entonces los resultados obtenidos deberán ser: v (a1) > v (a2) .
3. Sean tres estrategias a1, a2, y a3 en donde se cumple que a1 > a2 y a2 > a3, entonces los resultados de a1 deben ser mejores que los de a3; v (a1) > v (a3).
4. Si existe una estrategia a= (1 - a) a1 + a a2 entonces, los resultados de a se obtendrán como: v (a) = (1 -a) v(a1) + a v (a2).
5. Si a1 y a2 son dos estrategias tales que es posible obtener ambos resultados, a la vez, entonces se cumplirá: v (a1 + a2) = v(a1) + v (a2).

La matriz de pagos o matriz general de decisión.

En todo problema de decisión debe existir la llamada matriz de pagos o de decisión, en donde las filas están formadas por los diferentes cursos de acción, estrategias o alternativas (ai) en las columnas estarán los estados de la naturaleza (ej) y en la intersección de ambos se encontrará el resultado obtenido R i j .

MATRIZ DE PAGOS.

ALTERNATIVAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA.			
ESTRATEGIAS.	E1	E2	......	EN
A1	R11	R12	......	R1n
A2	R21	R22	......	R2n
:	:	:	:	:
.	.	.	.	.
Am	Rm1	Rm2	......	Rmn

Ante este problema se encontrará el decisor que tendrá las dificultades siguientes:

a) El decisor, debe identificar sus estrategias o el conjunto de cursos de acción a su alcance.
b) El decisor, debe enumerar los estados de la naturaleza de tal manera que sean mutuamente excluyentes y totalmente exhaustivos; además debe cuantificar los resultados correspondientes a cada combinación posible de estrategias con estados de la naturaleza, es decir encontrar su matriz de pagos.
c) El decisor, debe escoger un criterio adecuado para elegir el curso de acción que más le convenga.

Todo problema de decisión presenta la siguiente secuencia en la adopción de decisiones.

datos---------> decisión----------------> resultado.
pasado presente futuro.

Para el proceso de toma de decisión el decisor, puede utilizar su intuición, es decir que se orienta para el presente, pero abarca desordenadamente recuerdos del pasado y estimaciones de lo que pueda suceder en el futuro, una forma mucho mas científica será aplicando el enfoque analítico que supone un estudio sistemático y una evaluación cuantitativa del pasado y el futuro. Con ambos métodos se elaboran procedimientos lógicos: comparación, análisis, síntesis, abstracción y ambos tienen un punto en la tarea de toma de decisiones.

Los problemas que se presentan con claridad y homogeneidad, no solo de los objetivos, alternativas y gastos, sino también de las propias soluciones, son estructurados y las soluciones se buscan sobre la base de reglas y procedimientos previamente elaborados.

A este tipo de problemas les vamos a buscar solución en nuestro curso.

Los problemas estructurados de toma de decisiones pueden ser clasificados en cuatro grandes categorías:

1.- Decisiones en condiciones de incertidumbre.
2.- Decisiones en condiciones de competencia o conflicto.
3.- Decisiones en condiciones de riesgo.
4.- Decisiones en condiciones de certeza.

Solamente en el caso 2 se tendrán dos grupos de decisores, en el resto solo habrá uno.

Cada una de estas categorías son resueltas por diferentes medios y existen varias teorías para afrontarlas, tales como la teoría de las probabilidades, la teoría de juegos, la investigación de operaciones y la programación lineal, entre las más importantes.

1.2.-Decisiones en Condiciones de Incertidumbre.

La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre completa significa que se desconocen las probabilidades de ocurrencia de los diversos estados naturales pertinentes al problema de decisiones considerado. El carácter de la incertidumbre se asocia con el hecho de que nos demos cuenta de que somos incapaces de estimar o calcular la probabilidad que se produzca cada uno de los estados naturales.

El decisor se enfrenta con situaciones que nunca ocurrieron y que quizás no se repitan de esa misma forma en el futuro previsible. En tales situaciones cada curso de acción factible conducirá a una respuesta específica contenida dentro de cierto conjunto de respuestas posibles, pero no podemos saber cuál es la respuesta que obtendremos, ni tampoco podemos aplicar una ponderación probabilística a esos resultados posibles.

Los criterios de decisión que se emplean cuando predominan éstas condiciones de incertidumbre, reflejan los valores personales y las actitudes fundamentales hacia el riesgo que tienen los responsables de la toma de decisiones. El decisor puede adoptar una actitud intermedia entre pesimismo y optimismo, o bien se puede decidir a utilizar algún otro criterio más conveniente. Es por esto que desgraciadamente no está aceptado universalmente ninguno de éstos criterios y lo que se tiende es a escoger el mejor según la aspiración del decisor.

Se tiene la tabla (I) que muestra las diferentes alternativas o estrategias y se conocen los estados de la naturaleza, además se ha podido determinar para cada combinación anterior el resultado previsto. En este caso la incertidumbre está dada por el hecho de que las probabilidades de los estados de la naturaleza no existen en general o no pueden ser valorados incluso ni aproximadamente.

Veamos algunos criterios establecidos al efecto por científicos que han estudiado estos casos.

1.2.1.-Criterio de Wald.

Una de las primeras sugerencias fueron hechas por Abrahan Wald, conocida con el nombre de criterio MAXIMIN.
Wald resultó ser un pesimista extremo, al valorar que la naturaleza se convierte en un contrincante poderoso, agresivo y razonable, por lo que al decisor no le queda más opción que seleccionar lo mejor de lo peor, es decir el máximo de las consecuencias mínimas, de aquí su nombre MAXIMIN.

La fórmula de la regla de decisiones será:

$$\max_{i} \min_{j} \quad [R_{ij} \qquad i = 1, m \quad ; \quad j = 1, n]$$

Para cada estrategia i se toma el mínimo de los resultados de los estados de la naturaleza y al final se elige el MAXIMIN.

Este criterio es obviamente muy pesimista, en la mayoría de las situaciones, el criterio MAXIMIN.

EJEMPLO: 2

Una cadena decide construir un nuevo hotel en la zona hotelera.
Se necesita conocer la cantidad racional de habitaciones. Se hace el estudio de los gastos en la construcción de los diferentes números de habitación, así como el ingreso esperando en dependencias de la cantidad de habitaciones que se alquilen.

La cantidad de habitaciones en el hotel pueden ser de 20, 30, 40 o 50 y la cantidad de habitaciones alquiladas que depende de una serie de factores casuales y de razones desconocidas por la cadena, puede ser de 10, 20, 30, 40 o 50 la tabla de las ganancias es la siguiente:

Alquiler posible.

construir.	10	20	30	40	50
20	62	245	245	245	245
30	14	198	380	380	380
40	-33	160	332	515	515
50	-81	101	284	468	650

Aplicando Wald.

Estrategia i.	min. de estado j.	
1	62	max.estratégia= 62
2	14	
3	-33	estrategia 1.construir
4	-81	20 habitaciones.

Según el criterio pesimista de Wald, para ese nivel de alquiler es mejor construir el mínimo número de habitaciones (Estrategia 1=20 habitaciones).

1.2.2.-Criterio de Hurwicz.

Leonid Hurwicz propone ante la incertidumbre completa, la utilización de un optimismo relativo. El se pregunta ¿por qué siempre ha de suponer que la naturaleza es malévola ? . Si un individuo se siente optimista él es capaz de expresar inteligentemente esa situación mediante un cierto grado de optimismo. La filosofía de este criterio es la de no ir a las situaciones extremas sino, recorrer resultados intermedios.

Sea a el valor del coeficiente de optimismo prefijado por el decisor de antemano, entonces, la fórmula utilizada será:

V = Max i [a Max. j (Rij) + (1- a) Min j (Rij)]

De este caso se busca para cada estrategia aquellos estados de la naturaleza que den máximo y mínimo resultado y posteriormente la estrategia elegida será la que dé máximo valor al aplicar la fórmula.

Para el caso del ejemplo anterior se tendrá para a = 0,9

	estrategia	max	(a) x max	min	(1-a) x min	V
	1	245	0,9(245)	62	0,1 (62)	226,7
	2	380	0,9(380)	14	0,1 (14)	343,4
Max	3	515	0,9(515)	-33	0,1 (-33)	460,2
	4	650	0,9(650)	-81	0,1 (-81)	576,9

Según el criterio de HURWICZ, es mejor construir 50 habitaciones. (Estrategia 4 = 50 habitaciones)

1.2.3.- Criterio de Laplace.

Pierre-Simon Laplace, Astrónomo y Matemático Francés, fundador de la corriente moderna de la teoría de las probabilidades resolvió este problema de la forma siguiente:

Puesto que no conocemos las probabilidades de ocurrencia de los estados naturales, diremos por supuesto que las probabilidades son las mismas para esos estados. Calculamos después el valor monetario esperado de cada estrategia y escogemos la que tenga el valor monetario esperado más elevado. En otras palabras, según Laplace, se debe tomar la media de cada estrategia y de ellas elegir la mejor.
Para el ejemplo anterior se tiene:

$$p(E1)=p(E2)=......=p(Em)=1/m$$

Estrategia i.

1	(62 + 245 + 245 + 245 + 245) / 5 = 208.4
2	(14 + 198 + 380 + 380 + 380) / 5 = 270.4
3	(-33 + 160 + 332 + 515 + 515) / 5= 297.8
4	(-81 + 101 + 284 + 468 + 650) / 5= 284.4

Según Laplace la mejor estrategia es la de construir 40 habitaciones (Estrategia 3 = 40 habitaciones)

1.2.4.- Criterio de Savage.

El estadístico Leonard J. Savage ha sugerido otro criterio para decidir en condiciones de incertidumbre completa, este criterio es totalmente diferente a los anteriores. Savage es un pesimista extremo, según él, el decisor, una vez conocido el resultado, puede arrepentirse de haber escogido esa estrategia. Savage sostiene que el decisor tiene que procurar que esta posible aplicación se reduzca al mínimo.

Savage sugiere que podemos conocer el grado de nuestro arrepentimiento por medio de la diferencia entre el resultado realmente obtenido y el resultado que se hubiera obtenido en el caso de haber conocido de antemano el estado natural que iba a ocurrir al elegir una estrategia óptima, aconseja orientarse no por las ganancias sino por el riesgo, como óptima, se elige aquella estrategia cuyo grado de riesgo es mínimo en condiciones pésimas.

$O = \min_i \{ \max_j [O_{ij}] \}$

donde O_{ij} se obtiene de la llamada matriz de pérdida de oportunidad, es decir, los valores O_{ij} , se obtiene según la regla.

a) Se escribe un cero en las celdas de la matriz de pagos en donde se presenta el mejor resultado de una columna específica.

b) En sustitución de los valores de las otras celdas de la columna, se escribe la diferencia entre el resultado óptimo y los demás resultados correspondientes a cada estratégia considerada.

En consecuencia Savage aconseja escoger la estrategia que corresponda al mínimo de los arrepentimientos máximos.

Según el ejemplo se tiene.

Matriz de pérdida de oportunidad.

	E1	E2	E3	E4	E5
A1	0	0	135	270	405
A2	48	47	0	135	270
A3	95	85	48	0	135
A4	143	144	96	47	0

Estrategia	max.	
1	405	
2	270	min. estrategia = 135
3	135	estrategia 3
4	144	según Savage se deben construir 40 habitaciones.

Según Wald se deben constuir 20 habitaciones, según Hurwicz con un coeficiente de optimismo del 90% se deben construir 50 habitaciones, para Laplace se deben construir 40 habitaciones y por último, Savage plantea que se deben constuir 40 habitaciones.

Nos queda la interrogante, cuál de las posibles decisiones es la de mayor preferencia. Se puede proceder así, si la solución, es igual por varios criterios, entonces la escogemos. La decisión del criterio lo hace el decisor al más alto nivel. En caso de faltar la suficiente información para la elección de la estrategia es posible un acercamiento alternativo, el cual está unido al cálculo de las probabilidades del éxito y fracaso sobre la base de la experiencia pasada o el criterio de expertos.

Ejemplo: 3

La Compañía Zip de renta de automóviles los ofrece en renta a razón de 10 dólares diarios, el cliente paga su propia gasolina y aceite. Los autos sólo se rentan por un día. La compañía no tiene automóviles propios, sino que los arrienda sobre una base diaria, de una gran empresa arrendadora. Esta última es la que absorbe el costo de mantenimiento de los automóviles.

La compañía debe especificar cuantos automóviles quiere arrendar en un día determinado, por lo menos con una semana de anticipación.

La Compañía Zip paga a la firma arrendadora 7 dólares diarios por concepto de arrendamiento.

La compañía Zip se enfrenta al problema de decidir cuántos automóviles debe arrendar para un día determinado de la semana siguiente con 7 días de anticipación. La demanda de éstos automóviles es variable y fluctúa de un día a otro.

Si la compañía Zip arrienda más autos que los requeridos por su clientela en un día dado, perderá el importe del arrendamiento, o sea 7 dólares por cada automóvil que no pueda rentar. Si la demanda de automóvil es mayor que el número disponible, deja de obtener una utilidad de 3 dólares por automóvil.

En este problema el factor desconocido (aleatorio) es el número de solicitudes de renta en un día determinado. Los estados de la naturaleza, son los eventos. " 10 solicitudes de renta", " 11 solicitudes de renta",.....etc. Las estrategias son " arrendar 10 automóviles", " arrendar 11 automóviles"......etc. El problema es decidir cuál es la mejor estrategia.

El problema puede considerarse en incertidumbre parcial si se consiguen muestra de tiempos pasados y se calculan tablas de frecuencias y probabilidades. Esto se verá posteriormente.

Consideremos el problema con incertidumbre total, se pide entonces.

a) Calcule la matriz de pagos del problema, en donde:
b)

- Las estrategias son el número de automóviles arrendados por la empresa:
  (10,11,12,13,14,15 y16) i

- Los estados de la naturaleza son el número de automóviles solicitados en renta: (10,11,12,13,14,15, y 16) j

El resultado se obtiene de la fórmula

$$\text{Beneficio}\begin{cases} \rightarrow 10Ej-7Ai \text{ si } j >= i \\ \rightarrow 10Ei-7Ai \text{ si } j > i \end{cases}$$

b) Aplicando los métodos estudiados en clase de decisión con incertidumbre y su experiencia personal decida cuál será el número de autos que deberá arrendar la empresa.

Para concluir con la incertidumbre completa diremos que éste es un tema interesante que crea mas problemas de los que resuelve. En tales condiciones, el estudio y la comparación de varios criterios de decisión le ayudarán a distinguir sus rasgos indeseables y los defectos que contienen esos criterios. Una forma de resolver este problema, cuando esto sea posible, es convirtiéndolo en un problema de incertidumbre incompleta, utilizando el cálculo de las probabilidades y el concepto del valor esperado.
Si en el ejemplo anterior de la compañía Zip se pudiese obtener la probabilidad del número de automóviles solicitados en renta, para cada número de automóviles rentados se podría entonces encontrar el valor esperado, pongamos el caso de “ arrendar 15 automóviles” y que se tenga la tabla siguiente:

Numero de automóviles	Probabilidad.	Beneficios.	beneficio

solicitado en renta.			esperado.
10	0.05	-$5	-$0.25
11	0.05	5	0.25
12	0.10	15	1.50
13	0.15	25	3.75
14	0.20	35	7.00
15	0.25	45	11.25
16	0.20	45	9
			32.50

De esta forma se calculó la tabla de todos los valores esperados:

Número de autos arrendados.	valor esperado (beneficio)
10	30.00
11	32.50
12	34.50
13	35.50
14	35.00
15	32.00
16	27.50

La decisión seleccionada será arrendar 13 automóviles que no coincide con ninguno de los criterios estudiados ni con la media, ni con la moda de la distribución de frecuencias.

1.3.- Decisiones en Condiciones de Riesgo.

Hemos visto anteriormente que cierto grado de incertidumbre es una característica estructural del problema de decisiones. Esto significa que, en el momento de decidir, el decisor no puede estar completamente seguro acerca de cuál será cada una de las ramificaciones de cualquier curso de acción que él se decida a adoptar. Es decir a toda decisión, aunque sea absolutamente correcta, va unido pues, un elemento de riesgo, que es posible valorar y tambien reducir dentro de unos límites aceptables, pero nunca eliminarlo del todo. En ocasiones el riesgo es generalmente menor, porque se trata de problemas ya afrontados otras veces y frente a los cuales, el decisor tiende a adoptar mecánicamente la misma conducta experimentada con éxito en ocasiones anteriores. Cuanto más complejo es el problema y mayores alternativas presente así como el número y la importancia de las variables en el juego, tanto mayor es el coeficiente de riesgo en la adopción de la decisión. La habilidad de quién toma la decisión está precisamente en saber valorar, donde es posible reducir al mínimo el coeficiente de riesgo en las propias decisiones.

La teoría estadística de las decisiones utiliza modelos matemáticos como implementos básicos para resolver las dificultades inherentes al riesgo. Veamos entonces algunos criterios basados exclusivamente en la probabilidad o en la utilidad.

13.1.- Criterio de Optimización del Valor Esperado.

En el caso de decisión con riesgo se conoce para cada estado de la naturaleza o suceso futuro posible su valor de probabilidad quedando la matríz de pagos como sigue:

	E1	E2	...	En
	p1	p2	...	pn
A1	R11	R12	...	R1n
A2	R21	R22	...	R2n
:	:	:		:
Am	Rm1	Rm2	...	Rmn

Donde p_i - probabilidad de que el suceso futuro E_i se verifique.

El criterio para escoger la alternativa más oportuna sera:

$$\underset{i}{\text{Max o Min}} \quad E\,[A_i] = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\, p_j \quad i = 1, m$$

EJEMPLO: 1

Una política de mantenimiento preventivo, requiere tomar decisiones acerca de cuándo a una máquina deberá dársele servicio en forma regular a fin de minimizar el costo de una rotura repentina.

Cada vez que una de las n máquinas se descompone hay que darle un mantenimiento preventivo que cuesta \$ 100 y al final de T períodos se les da un mantenimiento preventivo a todas las n máquinas con un costo de \$ 10 por máquina.

Si se tiene 50 máquinas en el taller y las probabilidades de que se descompongan en períodos T está dada en la tabla.

Período (T)	1	2	3	4	5
Probabilidad de descomposición p_t	0.05	0.07	0.10	0.13	0.18

En este caso aplicaremos la fórmula para el cálculo del valor esperado del costo de mantenimiento en el período

$$E\,C\,(T) = \{C1 \sum_{i=1}^{T-1} E\,(n_t) + C2\,N\}/T$$

Donde C1 = costo de reparar una máquina descompuesta = 100
C2 = Costo de mantenimiento preventivo por máquina = 10

T = períodos.
N = número de máquinas.
$E(n_t)$ = número esperado de máquinas descompuestas en el período t.
$E\,(n_t) = n\,p_t.$
T-1

Luego $EC(T) = \{C1 \sum_{i=1} pt + C2\ n\} / T$

Período T	Probabilidad Pt	Probabilidad acumulada hasta T - 1	EC (T) $
1	0.05	0	500
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366,7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

Luego el mantenimiento preventivo se aplica a todas las máquinas cada 3 períodos. Para obtener el menor costo esperado por período.

EJEMPLO : 2 (ahora en donde no aparece el período de tiempo).

Un director se encuentra con que tiene que escoger entre dos variantes, ambas convenientes para su Empresa y cuyos resultados están relacionados en ambos casos, a tres posibles sucesos futuros. La primera variante que llamaremos A1 requiere la inversión de un millón de pesos, y puede llevar si se verifica el primero de los sucesos previstos, E1 a una ganancia de $ 2 millones; Si se verifica el segundo o tercer suceso (E2, E3) provocaría por el contrario la pérdida del capital invertido. La variante A2, implica la inversión de $ 400 mil que pueden perderse en el suceso E3, pero que puede traducirse en una ganancia de $ 700 mil en el caso de los sucesos E1 o E2 considerando el grado de probabilidad de los 3 sucesos, iguales a 0,5, 0,2 y 0,3 respectivamente qué alternativa usted propondría.

	Sucesos Futuros.		
	E1	E2	E3
Alternativas.	p1=0,5	p2 = 0,2	p3 = 0,3
A1- Emprender Negocio A	2000 000	-1000 000	-1000 000
A2 - Emprender Negocio B	700 000	700 000	- 400 000
A3 - No emprender ninguno.	0	0	0

Matríz de pagos.

Aplicando la fórmula de la Esperanza matemática para cada alternativa se tiene:

E (A1) = 0,5 (2000 000) + 0,2 (-1000 000) + 0,3 (-1000 000) = $500 000.

E (A2) = 0,5 (700 000) + 0,2 (700 000) + 0,3 (- 400 000 = $ 37 000.

E (A3) = 0

Según el criterio de la Esperanza matemática este director deberá emprender el negocio A1.

1.3.2.- Arbol de Decisión.

El árbol de decisiones es una técnica sencilla que señala el grado de riesgo involucrado en una decisión importante y que por lo tanto, permite que el decisor haga comparaciones entre los cursos de acción.

Entre los matemáticos que originaron y desarrollaron esta técnica mencionaremos al desaparecido John Von Neuman, y a los Profesores Robert Schlaejer y Moward Raiffa de la Universidad Harvard de los Estados Unidos.

El árbol de decisión es un método gráfico, que permite analizar todos los resultados posibles en un proceso multietápico y matemáticamente podemos coincibirlo como una red no orientada, finita y conexa, que no tiene ciclo y que está formada por 2 vértices como mínimo. Se comienza en un punto que podemos denominar *TRONCO*, y a partir de aqui se bifurcan las *RAMAS*.

El árbol de decisión consta de Nodos, Ramas, Probabilidades Estimadas y Utilidades o Pagos.

El árbol de decisión puede ser determinístico o estocástico:

Arbol de Decisión Determinístico: Representa un problema en el cuál cada posible alternativa y su correspondiente resultado se conoce con certeza.

Arbol de Decisión Estocástico: Se caracteriza por que en cada alternativa y su resultado existe un cierto riesgo dado la probabilidad.

En los árboles de decisión existen 2 tipos de nodos.

Nodo de Decisión, denotado por un cuadrado y requiere una decisión para seleccionar una de las ramas que parten de él.

Nodo de Probabilidad, denotado por un círculo, de él parten los diferentes estados de la naturaleza, como valores enteros o con sus probabilidades según sea el árbol determinístico o estocástico respectivamente.

Explicaremos el árbol de Decisión mediante un ejemplo.

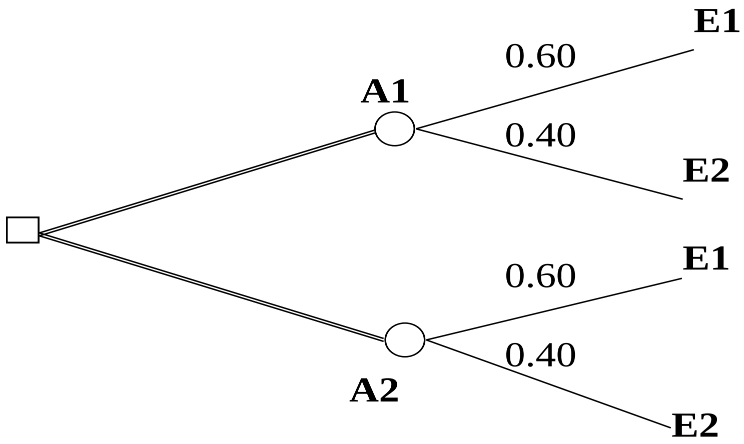
EJEMPLO: 3

El presidente y principal accionista de una empresa manufacturera mediana de componentes electrónicos, se enfrenta con esta situación:
Las ventas para cierto producto se estan elevando y él quiere decidir si debe aumentar la producción actual mediante una nueva línea de producción o hacer que sus empleados trabajen sobre una base de tiempo extra con las facilidades de producción actuales.

Se decide consultar a los ejecutivos sobre ese problema y se obtiene la información siguiente:

a) El vicepresidente, encargado de la producción, está a favor de instalar su nuevo equipo de producción.
b) Su Director de mercadotécnia también está a favor de instalar una nueva unidad de producción, pués dice que habló con sus principales clientes y puede pronosticar el aumento de un 20% en las ventas de ese producto dentro de unos cuantos meses.
c) Su tesorero se muestra inseguro en lo que respecta a la situación en general e indica que existe la probabilidad de que la compañía sufra una baja en sus ventas de un 5%.
d) Otros ejecutivos plantean que la situación se resuelve con tiempo extra de trabajo sin la necesidad de ir a instalar un nuevo equipo.
e) Luego de intensos análisis y discusiones los administradores llegan a la conclusión de que existen 2 eventos y calcularon sus probabilidades.
E1: Las ventas aumentaran en un 20% con p (E1) = 0,60
E2: Las ventas disminuiran en un 5%, con p (E2) = 0,40

f) El aparato económico hace un cálculo y se presenta el siguiente diagrama arborescente.



t0: momento de decidir
t1:fecha de terminación

queda ahora al presidente la responsabilidad de tomar la decisión.

a) Supongamos que el presidente se va a auxiliar del valor monetario esperado y para ello procede a escoger la estratégia más deseable.

- A1 = Instalar nuevo equipo.
  5 200 000 (0.60) + 3 600 000 (0,40) = N$ 4 560, 000
- A2: Utilizar tiempo extra
  4 800 000 (0,60) + 4 000,000 (0,40) = N$ 4,480,000

La decisión será de comprar e instalar un nuevo equipo de producción para su fábrica.

b) Suponiéndo que el presidente busque una función de utilidad, dado su aversión por el riesgo y que esa función sea:

(5,200 000) = 1.0
(4 800 000) = 0,96
(4 000 000) = 0,90
(3 600 000) = 0,88
(2 000 000) = 0,60
(1 000 000) = 0,40

Para A1 1(0,6) + 0,88 (0,4) = 0,952

Para A2 0,96 (0,6) + 0,9 (0,4) = 0,936.

La decisión volverá a ser la de instalar un nuevo equipo

EJEMPLO: 4

Una compañía tiene ahora las opciones de construir una planta de tamaño completo o una pequeña que puede ampliarse luego. La decisión depende principalmente de las demandas futuras del producto que producirá la planta.

La construcción de una planta de tamaño completo puede justificarse en términos económicos si el nivel de demanda es alto. En caso contrario, quiza sea recomendable contruir una planta pequeña ahora y después decidir en dos años si esta se deba ampliar. La empresa esta interesada a estudiar el problema en un período de 10 años y un estudio de mercado señala que las probabilidades de tener demandas altas y bajas en 10 años son de 0,75 y 0,25 respectivamente.

La valoración económica a los siguientes valores:

a) Construir una planta grande costará N$ 5 millones y una planta pequeña costará solo N$ 1 millón. La expansión de la planta pequeña de aqui a 2 años costará N$ 4,2 millones.

b) La planta completa y la demanda alta (baja) producirán
N$ 1 000 000 (N$ 300 000) anualmente.

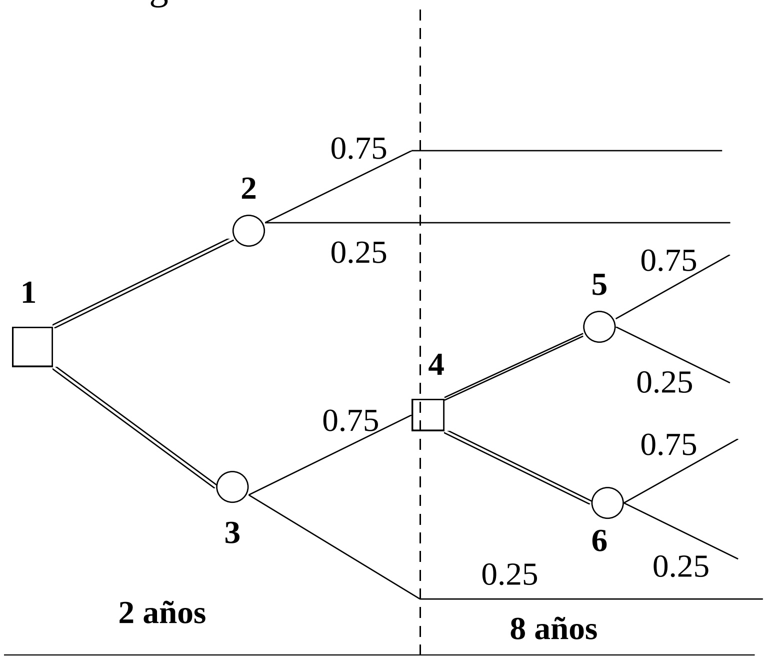
c) La pequeña planta y una baja demanda generan N$ 200 000 anuales.

d) La planta pequeña y una demanda alta producirán N$ 250 000 para cada uno de los 10 años.

e) La planta pequeña ampliada con demanda alta (baja) generará N$ 900 000 (N$ 200 000) anualmente.

f) La planta pequeña sin expansión y con alta demanda en los ocho anos producirá N$250 000 y con una baja demanda producirá N$ 200 000 cada uno de los ocho años restantes.

La gráfica de éstos datos será:



Evaluemos las alternativas y calculemos el valor esperado con el objetivo de decidir cuál será la mejor.
Iniciaremos evaluando la etapa 2 y luego la etapa 1.

Etapa 2.- Últimos 8 años.

Nodo 4.

E (ganancia neta / expansión) = (900 000 x 0,75 + 200 000 x 0,25)x8-4200 000 = N$ 1 600 000.

E (ganancia neta / expansión) = (250 000 x 0,75 + 200 000 x 0,25) x 8 = N$ 1 900 000.

Luego la decisión se toma en el modo 4 es no expandirse y obtener una ganancia neta de N$ 1 900 000. Este sería el resultado de la etapa 2.

Etapa 1. Primeros 2 años.

E (ganancia neta / planta grande) = (1 000 000 x 0,75 + 300 000 x 0,25) x 10 - 5 000 000 = N$ 3 250 000.

E (Ganancia neta / planta pequeña) = 1900 000 + 250 000 x 0,75 + 200 000 x 0,25 - 1 000 000 = N$ 1 137 500.

Decisión óptima = construir una planta grande. Tomar esta decisión ahorra evidentemente la consideración de las alternativas en el modo 4.

EJERCICIO.

Una compañía turística A tiene actualmente el 20% de la demanda del mercado en cierta ciudad pequeña. Su competidora mayor, es la compañía B, tiene el 80%

restante. Un grupo de investigadores promocionales hace un estudio para desarrollar su nuevo método competitivo el cuál se pronostica que tiene un 80% de probabilidades de ser desarrollado.

Si A desarrolla y lanza el nuevo método al mercado hay una probabilidad de 0,6 de que B también desarrolle un método similar. Si eso ocurre, hay 0,2 de probabilidades de que A gane un 80% del mercado, una probabilidad de 0,3 de que la A tenga un 60% del mercado y una probabilidad de 0,5 de que tenga un 40% del mercado. Si B no puede desarrollar también un nuevo método, entonces la A tiene una probabilidad de 0,7 de obtener un 80% del mercado y una probabilidad de 0,3 de obtener un 50% del mercado. En caso de que la A no pueda desarrollar el nuevo método, conservará su punto actual de 20% del mercado.
Encuentre el árbol de decisiones de este problema.

EJERCICIO: 5

La Empresa "computadoras Artex" está interesada en desarrollar una cinta magnética para un nuevo tipo de computadoras.
Esta Empresa no tiene personal de investigación disponible para desarrollar el producto nuevo, por lo que va a subcontratar la fase de investigación a un Instituto de Investigación Científica. Artex, ha destinado 250 000 dólares para la investigación y el desarrollo de la nueva cinta magnética y ha pedido presupuestos a varias firmas e Institutos de Investigación. El contrato se otorgará no en base al precio (esto es, N$ 250 000) sino de acuerdo con el plan técnico presentado en la propuesta y con los antecedentes técnicos de la firma que la presenta. El "Instituto de Investigación Boro" está realizando la presentación de su propuesta (y presupuesto) a " Computadoras Artex". El gerente de Boro calcula que costaría cerca de 50 000 dólares preparar una propuesta.

Además, ha estimado que las posibilidades de que se les otorgue el contrato son de 1 a 1 (o sea, que es tan probable obtenerlo, como no obtenerlo). Entre los investigadores del Instituto Boro, se han planteado varias alternativas en lo referente a cómo desarrollar el producto, en caso de que se les otorgara el contrato. Se estudiaron 3 alternativas:

1ra.) Incluye el uso de ciertos componentes electrónicos. Los Ingenieros estimaron que desarrollar su prototipo de cinta (este es, una versión preliminar para pruebas técnicas) sólo costaría 50 000 con este método, pero que habría solamente un 50% de probabilidad de que el prototipo fuera satisfactorio.
2do.) Incluye el uso de ciertos aparatos magnéticos. El costo de desarrollo de un prototipo bajo este enfoque, costaría 80 000 dólares con un 70% de probabilidad de éxito.
3ro.) Alternativa puramente mecánico con un costo de 120 000 dólares, para el cuál el equipo técnico manifiesta estar completamente seguro de que podrían desarrollar exitosamente el prototipo.

En virtud del plazo especificado en el contrato " Investigaciones Boro" tendría suficiente tiempo para probar con sólo 2 alternativas. Por lo tanto, si las alternativas de usar dispositivos magnéticos o electrónicos fallaran, el segundo intento tendría que ser necesariamente la acción mecánica, a fin de garantizar la obtención de un prototipo exitoso.

El Gerente “Boro” no se siente seguro y debe tomar la decisión de gastar $ 50 000 en elaborar una propuesta para “ Computadoras Artex”, o no presentar la propuesta.

Confeccione el árbol de decisión del problema, calculando sus valores esperados.

CAPITULO 2: Programación Lineal.

2.1.- INTRODUCCIÓN:

En esencia la programación lineal típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (es decir, óptima). Puede surgir este problema de asignación siempre que deba seleccionarse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizar esas actividades.

La programación lineal usa un modelo matemático para describir el problema de interés. El adjetivo "lineal" significa que requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean funciones lineales. La palabra "programación" no se refiere aquí a la programación de computadoras; más bien, es esencialmente un sinónimo de planificación.

Por tanto, la programación lineal comprende la planificación de actividades para obtener un resultado "óptimo" , es decir, un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma (según el modelo matemático) entre todas las alternativas factibles.

Breve introducción Histórica

Ya en los siglos XVII y XVIII Newton, Leibniz, Lagrange y Bernoulli trabajaban en problemas óptimos condicionados que desarrollaron el cálculo infinitesimal y el cálculo de las variaciones. Algunos estudiosos plantean que en principio era posible aplicar los métodos generales de optimización, en la teoría de los multiplicadores de Lagrange, por ejemplo en los problemas de programación matemática.

Posteriormente el matemático fránces Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonodas Vitalyevich Kantarovitch publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal .

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y Kantarovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de *problema de Koopmans-Kantarovitch.*

En 1945 G. Stigler, plantea un problema particular, el de régimen alimentario optimal. En 1947, el problema general de programación lineal se formuló en términos matemáticos precisos por G.B. Dantzig. El término Linear Programming aparece por primera vez en una publicación del propio Dantzig. En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, G.B. Dantzig formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Departament of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).*

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princenton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology , con Charnes y Cooper.

Respecto al método del simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en el año 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el *United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER*, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma IBM.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro Janos von Neuman (1903-1957), quie en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la *Universidad de Princenton de Estados Unidos*, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: *el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú*. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador *Strena* en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año.

La programación lineal hace historia: El puente aéreo de Berlín.

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente , Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posiblidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo)

2.2- Formulación del Problema de Programación Lineal.

La programación lineal concierne a la solución de un tipo de problema especial, en el cual todas las relaciones entre las variables son lineales o en la función a ser optimizada.

El problema general de la programación lineal (P.L.) puede ser descrito como sigue:

Dado un conjunto de m inecuaciones lineales o ecuaciones con n variables, se desea encontrar valores no-negativos de esas variables los cuales satisfagan el conjunto de restricciones y maximicen o minimicen una función lineal de las variables.

Matemáticamente:
Sean $x_i >= 0 \quad i=1,n$ (variables no negativas) (1)

Sujeto a:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n \ \{<=>\}\ b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n \ \{<=>\}\ b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, x_n \ \{<=>\}\ b_m$$

que maximizan o minimizan la función objetivo

$$\begin{array}{c} \max \\ o \\ \min \end{array} \quad Z = C_1\ X_1 + C_2\ X_2 + \ldots\ldots + C_n\ X_n \qquad (3)$$

Notaciones: (1)= restricciones de no negatividad
(2)= sistema de restricciones
(3)= función objetivo
x_i = variable y (incógnitas del sistema)

aij = coeficientes tecnológicos (normas) de la restricción i-ésima y la variable j-ésima
Cj = coeficiente de la función objetivo o costes de xi.
bj = coeficientes o términos independientes.
{<=>}= signos de las restricciones que en cada caso debe ser <=, >= o = .

Se llama solución del problema de P.L. al conjunto de valores que tomen las variables xi de forma tal que se satisfaga el conjunto (2) o sistema de restricciones, es decir, que se satisfagan todas las inecuaciones del sistema.

Se llama solución factible del problema de P.L. que cumpla que todas sus variables son positivas. Es decir, una solución factible es cuando el conjunto de valores de las variables satisfacen a (1) y (2) simultáneamente.

Se llama solución factible óptima a toda solución que optimice la función objetivo (3).

2.3.- Supuestos de la Programación Lineal.

La programación lineal puede ser aplicada en una gran variedad de problemas, sin embargo tiene ciertas limitaciones que debilitan su aplicabilidad, entre otros éstos pueden ser :

- La proporcionalidad:

Una primera limitación de la programación lineal es el requerimiento de que la función objetivo y cada restricción deben ser lineales. Esto requiere que la medida de la efectividad y los recursos utilizados deben ser proporcionales al nivel de cada actividad (variable) conducida individualmente.

Los problemas de programación no lineal carecen de dicha proporcionalidad, aunque en ocasiones es posible resolver éstos con P.L. , esto se presenta en casos especiales no constituyendo una regularidad.

- Aditividad:

Suponer que la medida de efectividad y cada recurso son usados directamente proporcionales al nivel de cada actividad individualmente, no garantiza suficientemente la linealidad. Es necesario que la actividad sea aditiva con respecto a la medida de efectividad y cada recurso utilizado. En otras palabras la medida total de efectividad y cada recurso total se obtiene de la suma de las efectividades o de los recursos utilizados individualmente.

- Divisibilidad:

La solución óptima de un problema de P.L. debe tener valores reales de las variables, es decir, que si una variable de decisión debe tener un valor entero, entonces, la P.L. no garantiza esta solución , dado que al aproximar o truncar la solución real para hacerla entera la nueva solución puede no ser la óptima.

- Determinística:

Todos los coeficientes en el modelo de P.L. (a_{ij} , b_j y c_i) son asumidos constantes conocidas. Si el modelo de P.L. servirá para predecir condiciones futuras, los coeficientes utilizados deberán ser calculados sobre la base de predicciones futuras.

En términos generales la P.L. incluye los siguientes aspectos de interés para nuestro estudio:
a) el planteamiento del problema.
b) la solución gráfica (a modelos de 2 variables).
c) la solución analítica.
d) el análisis de post-optimalidad.

Analizaremos ahora el paso de la Construcción del Modelo para un problema de P.L.

Planteamiento de Problemas.-
Para construir un modelo de P.L. deben seguirse los siguientes pasos:

Paso 1: Definición de las variables.
Paso 2: Construcción del Sistema de Restricciones.
Paso 3: Construcción de la Función Objetivo.

- Definición de las Variables de Decisión:

Una variable de decisión es la representación de cada una de las actividades que conforman el problema.

Al definir una variable de decisión deben tenerse en cuenta dos definiciones:

- Definición Conceptual.

Con esta definición se determina la actividad (o variable) en el contexto del problema, logrando que esta actividad sea independiente. Para ello se deben tener en cuenta los principios de :

a-unicidad de origen.
b-unicidad de destino.
c-unicidad de estructura tecnológica.
d-unicidad de coeficiente de coste.

a,b,c y d se refieren a que cada actividad sea única en su orígen, su destino, su tecnología y el valor que se le asigne a la función objetivo.

- Definición Dimensional.

Esta definición se refiere al aspecto cuantitativo de la actividad, es decir, la selección de la unidad de medida que se va a representar en el modelo.

- Construcción del sistema de restricciones.

En cuanto al sistema de restricciones y a cada restricción en particular se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Determinar la limitación o restricción que presupone dicha restricción, analizando el signo de la misma {<,=,>} , la dimensión física y el valor del término independiente bi.

Paso 2: Determinar las variables que entran en la restricción.

Paso 3: Determinar el valor particular del coeficiente tecnológico de dicha restricción y en cada variable del problema (j=1,n) , esto es, aij.

- Construcción de la Función Objetivo:

La función objetivo es la expresión del propósito u objetivo final que deseamos alcanzar al resolver el problema.
En la función objetivo deben aparecer las variables del problema multiplicadas por su coeficiente de costos Cj, el cual debe estar determinado adecuadamente.

Algunos problemas que resuelve la P.L. son:

- Problemas análisis de la producción.
- Transportación de productos terminados.
- Asignación de recursos.
- Inversiones.
- Localización de plantas.
- Inventarios.
- Problemas relacionados con redes.
- Problemas de mezcla.
- Problemas de dieta.
- Problemas de corte de materiales.
- Ruta crítica.
- Otros.

Ejemplo: 1 Planteamiento de Problemas de P.L.
A finales del año 1955 el gobierno Francés se enfrentó ante un problema de selección de fuentes de energía para la producción de electricidad.

Se contaba en aquel momento con plantas para la producción de energía tales como:
1- plantas térmicas.
2- plantas de derivación.
3- plantas con presas de almacenamiento.
4- plantas con esclusas.
5- plantas con maremotriz.

La potencia máxima garantizada, medida por horas de consumo en horas hábiles, era de 1692 mega watts .

La potencia máxima, medida por hora de consumos en las 4 horas de máximo consumo diario, era de 2307 mega watts.

La energía anual 7200 macro-watts/hora.

Se quería investigar además el límite de las inversiones (fijar la política de inversiones). Para ello se contaba con la tabla de valores tecnológicos siguientes:

Plantas tipo.	Potencia Garantizada mega-watts	Potencia Máxima mega-watts	Energía anual macro-watts/hora.	Inversión necesaria. En millones de pesos.	Gastos En millones de pesos.
1	1	1.15	7.00	97	136
2	1	1.10	12.60	420	56
3	1	1.20	1.30	130	101
4	1	3.00	7.35	310	104
5	1	2.13	5.47	213	79

Solución del problema: Planteamiento

Variables del problema:
Sea Xi - número de instalaciones del tipo i a poner en funcionamiento.

$X_i >= 0 \quad (i=1,5)$

D - Límite de la inversión disponible. (D>= 0)

Restricciones:

Potencia garantizada	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 >= 1692$
Potencia Máxima	$1.15\,X_1 + 1.10\,X_2 + 1.20\,X_3 + 3.00\,X_4 + 2.13\,X_5 >= 2307$
Energía anual	$7\,X_1 + 12.6\,X_2 + 1.30\,X_3 + 7.35\,X_4 + 5.47\,X_5 >= 7200$
Inversión Disponible	$97X_1 + 420\,X_2 + 130\,X_3 + 310\,X_4 + 213\,X_5 >= D$

Valor de la Función Objetivo:

$$\text{Min } z = 136\,X_1 + 56\,X_2 + 101\,X_3 + 104\,X_4 + 79\,X_5$$

Al resolver este problema se podrá saber el número de plantas del tipo y a poner en funcionamiento (explotación) en el país, así como el monto de la inversión necesarias para que se cumplan con la potencia garantizada, la potencia máxima y la energía anual que se necesita, pero que ésto se haga de la forma más económica.

Debemos notar aquí que aunque este problema ilustra un planteamiento concreto de P.L. éste no lo es en si, dado que las variables Xi representan variables enteras (sin punto decimal) , siendo entonces una aplicación de lo que constituye la programación en Enteros.

2.3.- Métodos de Solución:

Para dar solución al modelo de programación lineal se han desarrollado varios procedimientos. La vía más simple consiste en la solución gráfica, para el caso de los problemas con dos variables de decisión, lo cual constituye al mismo tiempo su principal limitación. El algoritmo más conocido y probado a todas las instancias es el llamado método Simplex, basado en una rutina algebraica iterativa que permite ir determinando soluciones básicas factibles vecinas a partir de una solución inicial, hasta llegar a la solución óptima deseada. Se conocen algunas variantes de este método, tales como el Simplex mejorado y el Simplex revisado. El procedimiento más actual desarrollado para resolver el modelo de programación lineal es el conocido método del punto interior de Karmakar.

En este Texto estudiaremos solamente los dos Primeros Métodos mencionados, los cuales serán formalizados a continuación:

MÉTODO GRÁFICO

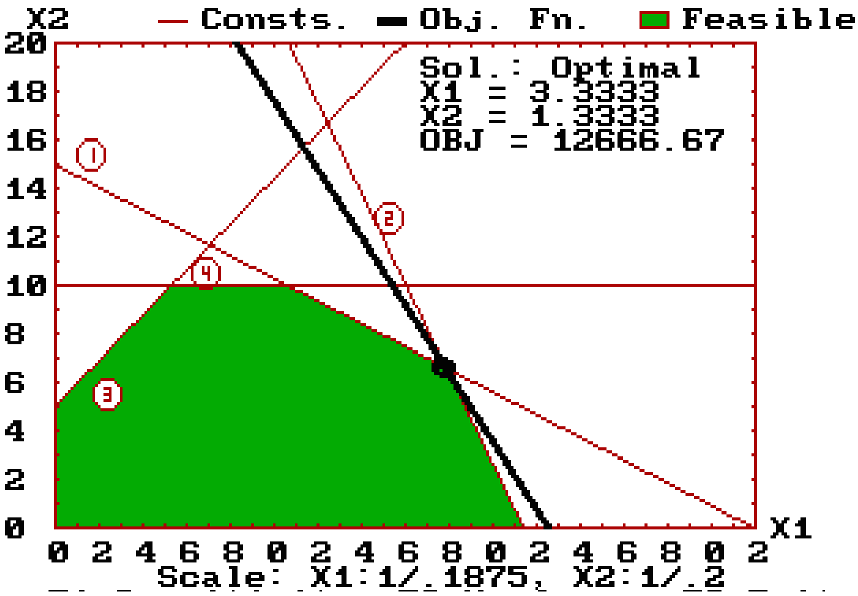
1. Representar en el plano de coordenadas los hiperplanos correspondientes a cada restricción del modelo.
2. Determinar la región factible o conjunto de soluciones factibles por la intercepción de todos los hiperplanos representados.
3. Representar el vector gradiente de la función objetivo.
4. La solución óptima del problema se encuentra en el (los) último(s) punto(s) donde se interceptan las líneas de nivel y la región factible en el sentido del gradiente para problemas de máximo y del antigradiente para problemas de mínimos.
5. De la solución del sistema de ecuaciones lineales que se obtiene con las ecuaciones de las restricciones activas (se cortan en el punto de solución óptima) se calculan las coordenadas del (de los) punto(s) y evaluando en la función objetivo se determina el valor extremo deseado.

Ejemplo:

Max $Z = 3000\,X1 + 2000\,X2$

Sujeto a:

$X1 + 2\,X2 \leq 6$
$2\,X1 + X2 \leq 8$
$X2 - X1 \leq 1$
$X2 \leq 2$
$X1 \geq 0\,,\; X2 \geq 0$



MÉTODO SIMPLEX

1. Llevar el modelo de programación lineal original a su forma normal.
2. Construir tabla simplex inicial.
3. Verificar condición de óptimalidad.
4. En caso afirmativo (FIN), de lo contrario ir al paso 5.
5. Determinar variable que entra en base.
6. Determinar variable que sale de la base.
7. Realizar transformaciones en la tabla simplex.
8. Ir al paso 3.

Con vistas a la solución del problema es mucho mejor trabajar con sistemas de igualdades (llamado forma normal) que con sistema de desigualdades, es aquí cuando se introduce el concepto de variable de holgura.

Toda restricción del tipo (≥) se puede convertir en una igualdad si le restamos al término de la izquierda una variable de holgura que significa el exceso al límite establecido por el término independiente.

ai1 X1 + ai2 X2 + ... + ain Xn - Xn + i = bi

Xn + i es la variable de holgura que se resta en la restricción i-ésima (Xn + i >=0)

Toda restricción del tipo (≤) se puede convertir en una igualdad si le sumamos al miembro de la izquierda una variable de holgura que signifique lo que nos faltó para llegar al límite establecido por el término independiente.(Ahorro u ociosidad.)

aj1 X1 + aj2 X2 + ... + ajn Xn + Xn+ j = bj

Xn + j es la variable de holgura que se suma a la restricción j-ésima

$X_{j+n} >= 0$

De esta forma cualquier problema con restricciones de desigualdad se pueden convertir entonces en problemas con restricciones de igualdad (llamado forma normal), el número de variables será entonces de m+n., con lo cual queda explicado como ejecutar el paso 1 del procedimiento.

El costo que se le asigna a las variables de holgura será CERO.

A las restricciones que sean ya una igualdad se les sumara una nueva variable, llamada variable artificial, como premisa para entrar soluciones iniciales al problema. Estas variables artificiales deben ser eliminadas en el proceso de solución, ya que si ellas aparecen en la solución final del problema significaran un error.

El objetivo de las variables artificiales es el de formar la matriz unitaria en la solución inicial del problema, cuando existen en el mismo restricciones de igualdad, o de mayor igual que harían que la variable de holgura respectiva se reste.

El costo de las variables artificiales será muy alto e ira en contra de la función objetivo.

El problema de P.L. cuenta entonces con m restricciones y n variables, con n > m y si se supone que las restricciones son no redundantes, es decir tal que ninguna restricción sea combinación lineal de las restantes o lo que es lo mismo que las restricciones sean independientes.

Habrá más de una soluciones al problema, descartando la solución nula que carece de interés. Para poder resolver este problema se tendrá que tomar entonces un número de m variables solamente diferentes de cero y el resto será igualado a cero. A dichas variables (m en total) diferentes de cero se les llamara, entonces, variables básicas.

Se llama solución básica a toda solución al problema de P.L. que posea al menos m variables diferentes de cero. En caso de haber menos de m variables diferentes de cero, se les llamará degeneradas a aquellas variables que siendo básicas tengan solución cero. Es decir, una solución básica esta en función de m variables diferentes de cero y el resto (n - m) igualadas a priori a cero.

El número total de bases (o de soluciones básicas diferentes) que puede tener el problema será:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Ejemplo, Si un problema tiene m = 10 ecuaciones con n = 20 variables, el número de soluciones básicas serian:

C^{10}_{20} = 250000, entre las cuales habrán soluciones no interesantes al tener valores negativos, o sistemas de ecuaciones particulares que al intentar resolverlos no tendrán solución.

El objetivo de la P.L. es el de encontrar dentro de un conjunto de enorme de soluciones básicas, una solución básica factible óptima

que satisfaga a (2) | que tenga m variables diferentes de uno | que las soluciones sean positivas satisfagan (1) | que las soluciones optimicen a (3)

Paso 2. Para construir la tabla simplex inicial se debe formar una tabla como la que se presenta a continuación.

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 0)

	Cj	X1	X2	…….	Xn	Xn+1	…….	Xn+m	
BASE	Cj-B	C1	C2	…….	Cn	0	…..	0	RHS
Xb1	Cb1	a11	a12	…….	a1n	±1	……..	0	b1
…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….
Xbm	Cbm	am1	am2	…….	amn	0	…….	±1	bm
Zj		Z1	Z2	…….	Zn	Zn+1	…..	Zn+m	
Cj-Zj		C1-Z1	C2-Z2		Cn-Zn	Cn+1-Zn+1		Cn+m-Zn+m	

Paso 3: Para verificar la optimalidad es necesario que se cumpla:

En caso de Máximo: Todos los Cj-Zj ≥ 0
En caso de Mínimo: Todos los Cj-Zj ≤ 0

Paso 5: Determinar la variable que entra en base:

Para elegir la variable que entra en base, Xk, esta se debe elegir tal que cumpla:
Para F.O de máximo Para F.O de mínimo

$$Z_k - C_k = \min_j \{ Z_j - C_j < 0 \} \qquad Z_k - C_k = \max_j \{ Z_j - C_j > 0 \}$$

debido a que

$$Z \text{ nuevo} = Z \text{ viejo} - \theta (Z_k - C_k) \qquad \theta > 0$$

Paso 6. determinar la variable que sale de base.
Del conjunto de variables básicas elegir aquella que debe salir para dar lugar a la que entro en el paso anterior. Esta variable debe garantizar que al salir la nueva solución básica sea positiva.

Saldrá de base la variable básica Xbr tal que:

$$\theta = \frac{X_{Br}}{p_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{X_{Bi}}{p_{ik}} \; ; \; p_{ik} > 0 \right\}$$

Pik son los valores del vector columna pk de la variable Xk que entra en la base.

$$p_k = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ - \\ p_{mk} \end{pmatrix}$$

Paso 7. Realizar transformaciones elementales en la tabla simples.
En la tabla correspondiente del Simplex debe garantizarse que una vez hechos los cambios pertinentes en la base la nueva matriz básica continua siendo unitaria, para ello se realizan las transformaciones elementales.

La fila r es la del vector que sale (semi pivote). La columna k es la del vector entrante (semi pivote). El elemento ($p_{vk} > 0$) se le llama elemento pivote.

Se escribe la nueva tabla con el cambio de la nueva variable básica y se dan los siguientes pasos:

paso 7.1) Dividir la (fila v) del vector saliente entre el elemento pivote Pvk, luego:

$$p_{rj} = p_{rj} / p_{rk} \qquad j = 0, n$$

paso 7.2) Para las restantes filas hacer las transformaciones.

$$p_{ij} = p_{ij} - p_{ik} * p_{vj} / p_v$$

Una vez calculada la tabla de la nueva iteración (nueva tabla), pasar al Paso 1.

Ejemplo 1
Reddy Mikks posee una pequeña fábrica de pinturas que produce colorantes para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B para su fabricación, de los cuales se dispone de 6 toneladas

diarias de A y 8 toneladas diarias de B como máximo. Los requisitos de fabricación de ambos colorantes se dan a continuación.

	Ton. De materia prima por Ton. De pintura		Disponibilidad en (Ton.)
	Exterior	Interior	
Materia Prima A	1	2	6
Materia Prima B	2	1	8

Un estudio del mercado establece que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de una tonelada. El estudio señala asimismo que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a 2 toneladas diarias. El precio al mayoreo por tonelada es de $ 3 000.00 para la pintura de exteriores y de $ 2 000.00 para pintura de interiores.
¿ Cuánta pintura de cada clase debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto total diario ?

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

1) Definición de las Variables

(¿Qué busca determinar el modelo?)

X1 $\rightarrow$ Toneladas de pintura para exteriores a producir diariamente.
X2 $\rightarrow$ Toneladas de pintura para interiores a producir diariamente.

2) Función Objetivo

(¿ Cuál es el objetivo o meta que se quiere alcanzar ?)

$\text{Max } Z = 3000\,X1 + 2000\,X2$ "Ingreso bruto total diario por la producción de pinturas"

3) Sistema de Restricciones

(¿ Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

$X1 + 2\,X2 \leq 6$ "Disponibilidad de materia prima A"
$2\,X1 + X2 \leq 8$ "Disponibilidad de materia prima B"
$X2 - X1 \leq 1$ "Exceso de pintura interior sobre pintura exterior"
$X2 \leq 2$ "Demanda máxima de pintura interior"
$X1 \geq 0,\ X2 \geq 0$ "Restricciones de no negatividad"

FORMA NORMAL DEL MODELO

$\text{Max } Z = 3000\,X1 + 2000\,X2 + 0\,S1 + 0\,S2 + 0\,S3 + 0\,S4$

S.a:

$$X1 + 2\,X2 + S1 = 6$$
$$2\,X1 + X2 + S_2 = 8$$
$$X2 - X1 + S3 = 1$$
$$X2 + S4 = 2$$

$$X1 \geq 0,\ X2 \geq 0,\ S1 \geq 0,\ S2 \geq 0,\ S3 \geq 0,\ S4 \geq 0$$

SIMPLEX TABLEU (ITERACIÓN 0)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0	RHS	Razón
S1	0	1	2	1	0	0	0	6	6
S2	0	2	1	0	1	0	0	8	4
S3	0	-1	1	0	0	1	0	1	X
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	X
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	3000	2000	0	0	0	0		

SOLUCIÓN INCIAL
X1=0 S1=6 Z= 0
X2=0 S2=8
S3=1
S4=2

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 1)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0	RHS	Razón
S1	0	0	1.5	1	-0.5	0	0	2	1.3333
X1	3000	1	0.5	0	0.5	0	0	4	8
S3	0	0	1.5	0	0.5	1	0	5	3.3333
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	2
	Zj	3000	1500	0	1500	0	0	12000	
	Cj-Zj	0	500	0	-1500	0	0		

NUEVA SOLUCIÓN
X1=4 S1=2 Z= 12000
X2=0 S2=0
S3=5
S4=2

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 2)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj-B	3000	2000	0	0	0	0	RHS	Razón

X2	2000	0	1	0.6666	-0.3333	0	0	1.3333	
X1	3000	1	0	-0.3333	0.6666	0	0	3.3333	
S3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
S4	0	0	0	-0.6666	0.3333	0	1	0.6666	
	Zj	3000	2000	333.333	1333.33	0	0	12666.67	
	Cj-Zj	0	0	-333.333	-1333.33	0	0		

SOLUCIÓN ÓPTIMA

X1=3.33 S1=0 Z= 12 666.67
X2=1.33 S2=0
S3=3
S4=0.66

INTERPRETACIÓN

Los valores de X1 y X2 indican, según la definición de las variables, que se deben producir 3.33 toneladas de pintura para exteriores y 1.33 toneladas de pintura para interiores, con lo cual se alcanzará un ingreso bruto diario máximo de $ 12 666.67 .
Además, las variables de holgura S1, S2, S3, S4 indican que se agotan las materias primas A y B (S1=0, S2=0), mientras que S3=3 implica que aun se pueden producir 3 toneladas más de pintura interior sin violar la relación entre ellos y finalmente S4=0.66 significa que aun se pueden producir 0.66 toneladas más de pintura interior, para alcanzar el tope de la demanda máxima esperada.

2.- Hay tres fábricas a lo largo del río Momiss (fábrica F-1, F-2 y F-3). Cada fábrica descarga dos tipos de contaminantes (Contaminantes C-1 y C-2) en el río. Se puede reducir la contaminación del río si se procesan los desechos de cada fábrica. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-1, cuesta 15 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-1 reducirá la cantidad de contaminantes C-1 en 0.10 toneladas y la cantidad de contaminantes C-2 en 0.45 toneladas. El procesamiento de 1 tonelada desechos de la fábrica F-2, cuesta 10 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-2 reducirá la cantidad de las contaminaciones C-1 en 0.20 toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0.25 ton. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-3, cuesta 20 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-3 reducirá la cantidad de contaminaciones C-1 en 0.40 toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0.30 toneladas. El estado quiere reducir la cantidad de contaminantes C-1 y C-2 en el río en por lo menos 40 (resp. 35) toneladas. Se desea minimizar el costo total de reducir la contaminación en las cantidades deseadas.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

1) Definición de las Variables

(¿Qué busca determinar el modelo?)

X1 __ Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-1
X2 __ Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-2

X3 __ Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-3

Función Objetivo

(¿ Cuál es el objetivo o meta que se quiere alcanzar ?)

Min Z = 15 X1 + 10 X2 + 20 X3 "Costo total por procesar los desechos en las fábricas"

3) Sistema de Restricciones

(¿ Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

$0.10\ X1 + 0.20\ X2 + 0.40\ X3 \geq 40$ "Reducción del C-1 exigida"
$0.45\ X1 + 0.25\ X2 + 0.30\ X3 \geq 35$ "Reducción del C-2 exigida"
$X1 \geq 0,\quad X2 \geq 0,\quad X3 \geq 0$ "Restricciones de no negatividad"

SOLUCIÓN ANALÍTICA
Método Simplex

FORMA NORMAL DEL MODELO
Min Z = 15 X1 + 10 X2 + 20 X3 + 0 S1+ 0 S2 + M A1 + M A2
S.a:
$0.10\ X1 + 0.20\ X2 + 0.40\ X3 - S1 + A1 = 40$
$0.45\ X1 + 0.25\ X2 + 0.30\ X3 - S2 + A2 = 35$
$X1 \geq 0,\quad X2 \geq 0,\quad X3 \geq 0,\quad S1 \geq 0,\quad S2 \geq 0,\quad A1 \geq 0,\quad A2 \geq 0$

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 0)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
A1	M	0.10	0.20	0.40	-1	1	0	0	40	100
A2	M	0.45	0.25	0.30	0	0	-1	1	40	133.33
	Zj	0.55M	0.45M	0.70M	-M	M	-M	M	80M	
	Cj-Zj	15-0.55M	10-0.45M	20-0.70M	M	0	M	0		

SOLUCIÓN INCIAL

X1=0	S1=0	Z= 80M
X2=0	S2=0	
X3=0	A1=40	
	A2=40	

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 1)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	0.25	0.50	1	-2.5	2.5	0	0	100	-
A2	M	0.375	0.09	0	0.75	-0.75	-1	1	9.99	13.33
	Zj	5+0.375M	10+0.9M	20	-50+0.75M	50-0.75M	-M	M	2000+9.99M	
	Cj-Zj	10-0.375M	-0.09M	0	50-0.75M	-50+1.75M	M	0		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=0 S1=0 Z= 2000+9.99M

X2=0 S2=0

X3=100 A1=0

A2=9.99

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 2)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	1.5	0.83	1	0	0	-3.33	3.33	133.33	88.88
S1	0	0.5	0.13	0	1	-1	-1.33	1.33	13.33	26.66
	Zj	30	16.66	20	0	0	-66.66	66.66	2666.66	
	Cj-Zj	-15	-6.66	0	0	M	66.66	M-66.66		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=0 S1=13.33 Z= 2666.66

X2=0 S2=0

X3=133.33 A1=0

A2=0

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 3)

Cj		X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2	RHS	Razón
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M		
X3	20	0	0.43	1	-3	3	0.66	-0.66	93.33	215.38
X1	15	1	0.26	0	2	-2	-2.66	2.66	26.66	100
	Zj	15	12.66	20	-30	30	-26.66	26.66	2266.66	
	Cj-Zj	0	-2.66	0	30	M-30	26.66	M-26.66		

NUEVA SOLUCIÓN

X1=26.66	S1=0	Z= 2266.66
X2=0	S2=0	
X3=93.33	A1=0	
	A2=0	

SIMPLEX TABLEAU (ITERACIÓN 4)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj-B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	Razón
X3	20	-1.625	0	1	-6.25	6.25	5	-5	50	
X2	10	3.75	1	0	7.5	-7.5	-10	10	100	
	Zj	5	10	20	-50	50	0	0	2000	
	Cj-Zj	10	0	0	50	M-50	0	M		

SOLUCIÓN ÓPTIMA

X1=0 S1=0 Z= 2000
X2=100 S2=0
X3=50 A1=0
A2=0

INTERPRETACIÓN

La solución óptima alcanzada indica que en la Fábrica-1 no se deben procesar desechos, mientras que se deben procesar 100 toneladas de desecho en la Fábrica-2, y 50 toneladas en la Fábrica-3, para minimizar el costo total que en este caso será de $2000. Las variables de holgura S1=0 y S2=0 indican que se cumplen las exigencias de disminuir

2.4.- La programación lineal y la multicriterialidad.

La programación lineal es un método matemático que sirve para optimizar una función llamada objetivo sujeta a una serie de restricciones, presentando las dos características fundamentales siguientes:

1. La relación entre las variables debe ser lineal.
2. La función objetivo a optimizar debe ser única.

Estas características se han convertido en los tiempos actuales en desventajas, por cuanto las relaciones que se establecen en los procesos es en raras ocasiones lineal y los objetivos que se persiguen son múltiples más que único.

La primera característica (desventaja) puede ser resuelta haciendo cambios de variables o pueden asumirse relaciones lineales con cierto grado aceptable de error.

Estudiaremos 5 formas para resolver la segunda característica (desventaja), la multicriterialidad.

Forma 1. Escoger el criterio más importante.

Se tienen p criterios Z1, Z2,....Z*p* y se toma Zm como él más relevante, los pasos a seguir serán:

- Incorporar al sistemas de restricciones los restantes criterios en la forma:

$Zi \ \{ > < \} \ Zi \qquad i=1,p; \qquad i=m$

cota superior o inferior del criterio investigado.

- Resolver el nuevo problema de P.L. (con las restricciones incorporadas) considerando como función objetivo la función o criterio Zm.

  es decir, max o min Zm

El problema se convierte a unicriterial.

Desventajas

- Resulta difícil poder escoger un criterio como el mayor de un conjunto de criterios.
- Es poco exacto poder escoger los valores Zi, como términos independientes.

Forma 2. Método de la Función Ponderada.

Formación de un criterio general en forma de función ponderada cuando hay la posibilidad de medir la significatividad de cada criterio.

Se tienen p criterios Z1, Z2...., Z*p*

- Con la ayuda de un experto se escogen los coeficientes de ponderación de cada criterio, sean estos α i;.......i=1,n
- Formar el criterio general $Z = \sum_{i=1}^{b} \alpha i \ Zi$ con $\sum_{i=1}^{b} \alpha i = 1$

- Resolver el problema unicriterial con la función Z antes mencionados.

Desventajas:

- La tarea se convierte en compleja cuando los p criterios no se expresan en una única unidad de medida, e incluso cuando se refieren a diferentes formas de optimizar (max o min).

- Es difícil la creación del sistema de coeficientes de ponderación para los diversos criterios.

Forma 3. Método de los pasos sucesivos.

- Organizar los p criterios en orden de importancia, Z1, Z2..., Z*p*

- Resolver el problema par el 1er. criterio Z1 (el de mayor importancia), sin tomar en cuenta los criterios restantes. Se obtiene así la solución optima Z, para el criterio 1.

- Analizar con un experto la posibilidad de disminución del criterio en una cantidad $\beta 1$ (caso de máximo)
  $Z1 < \beta 1$

- Incluir la restricción: $Z1 - \beta 1 < Z1 < Z1$
  en el sistema de restricciones

- Resolver el nuevo problema para el criterio Z2, incluyendo las restricciones c) obteniendo Z2. Aplicar b) y c) para el criterio 2)

- Repetir en pasos a), b) y c) para los restantes criterios, resolviendo en cada caso el modelo ampliado en las restricciones pertinentes. De esta forma al resolver el criterio *p* se tendrá la solución multicriterial del problema.

Desventajas:

- Es un método muy trabajoso y en cada criterio se debe resolver el sistema con una restricción adicional.
- Es necesaria la ayuda de un experto en el sistema para el cálculo de los βi.

Forma 4. Optimización de Pareto.

Deben hacerse todos los puntos extremos del conjunto de puntos extremos de cada solución obtenida según cada criterio y escoger aquellas soluciones, en las cuales ningún indicador técnico económico pueda ser mejorado sin el empeoramiento de otro indicador (óptimo de Pareto).

Estas soluciones se le presentan al experto que toma las decisiones el cual deberá tener la solución óptima más conveniente al sistema. En la literatura especializada este criterio se toma exclusivamente cuando no hay posibilidad alguna de aplicar los criterios anteriores, este es un criterio útil en el plano teórico.

Desventajas:

- Este método se torna extremadamente laborioso al tener que encontrar los puntos extremos de cada uno de los p criterios. En ocasiones es casi imposible el cálculo de los puntos extremos para algunos criterios complejos.

- La labor del experto que toma la solución se hace muy complejo.

Forma 5. Modelo de programación objetivo [Goal programming model] o por meta.

Se tiene el siguiente problema de P.L. multiobjetivo:

F.O.1

$$\begin{matrix}\min \\ \text{o} \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} {}^{1}\ Ci\,Xi$$

F.O.2

$$\begin{matrix}\min \\ o \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \; X_i$$

F.O.K

$$\begin{matrix}\min \\ o \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i^k \; X_i$$

$X_i > 0 \quad i=1,n$

Sujeto a las restricciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; X_i \; \{ <, =, > \} \; B_j \qquad j = 1, m$$

1) Se resuelve el problema de P.L. mono objetivo con cada una de las k funciones objetivas y se tiene la siguiente notación

b_j - valor óptimo del objetivo j ($j = \overline{1,k}$)
$-d_j$- sub-evaluación del objetivo j
$+d_j$- sobre evaluación del objetivo j
W_j- factor peso para $-d_j$ y $+d_j = b_j - L_j$

donde L_j = peor valor posible para el objetivo j

- mínimo valor (límite inferior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de maximización)
- máximo valor (límite superior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de minimización)

Es decir, se crea la tabla:

objetivo número	óptimo	valor peor	factor peso
j	bj	Lj	Wj

2) Se convierte el problema anterior (k problemas individuales de P.L.) en un problema mono objetivo como sigue:

Minimizar $\sum \bar{d}_j + \sum {}^{+}d_j \qquad (j = 1,k)$

Sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^1 \; X_i + W_1 \overset{-}{d_1} - W_1 \overset{+}{d_1} = b_1$$

Nuevas restricciones se incrementa una restricción

$$n \quad 2 \qquad - \qquad +$$

$$\sum_{i=1} Ci\,Xi + W2\,d2 - W2\,d2 = b2$$ por cada función objetivo del problema de multi - objetividad

$$\sum_{i=1}^{n} Ci\,Xi + Wk\,dk^{-} - Wk\,dk^{+} = bk$$

$$\sum_{i=1}^{n} aij\,Xi \ \{<, =, >,\}\ Bj \quad j = 1,m$$

Xi , $-dj$, $+dj > 0$

Ventajas:

- Es un método efectivo para lograr de una vez una gradual suavización de cada uno de los objetivos del problema.
- Con trabajar con los valores que da el análisis de sensibilidad para los Cj (peores valores de la f. o.) se puede hacer el análisis para él cálculo de Lj sin necesidad de expertos.

Desventajas:

- Es trabajoso al tener que resolverse por separado cada uno de los objetivos y conformar el nuevo problema global.

Forma 6. Programación Multiobjetivo. P M O .

Planteamiento del Problema:

1. Variables:

   - Variables de Decisión. Xi
   - Variables de Desviación. (dk-), (dk+) para cada objetivo.

dk- = desviación por exceso de la función objetivo k.
dk+ = desviación por defecto de la función objetivo k.

2. Restricciones:

   - Restricciones del Modelo. Estructuradas. Son las restricciones que no tienen que ver con las metas.

$$\sum_{i=1}^{n} aij\,Xj \ \{<, =, >,\}\ Bj \quad j = 1,m$$

   - Restricciones de Metas. Tienen relación con las Metas u objetivos propuestos. Para cada meta se añade una restricción del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} ci\,Xi + dk- + dk+ = b_K \qquad k = 1,K \text{ número de metas.}$$

La omisión de cualquier tipo de variables de desviación en las restricciones de Meta ACOTA la meta en la dirección omitida. Omitir dk- coloca una cuota superior a la meta. Omitir dk+ coloca una cuota inferior a la meta.

3. Función Objetivo: Minimizar las Desviaciones de las Metas.

- Min Z = $\sum$ dk- + dk+ Función Objetivo sin prioridad k = 1,K
- Min Z = $\sum$ Pk [wik (dk-) + wik (dk+) Función Objetivo con Prioridad Pk y preferencias Wik.

Ejercicios Propuestos

1.- Una familia campesina es propietaria de 125 acres y tiene fondos por $40000 para invertir. Sus miembros pueden producir un total de 3500 horas-hombre de mano de obra durante los meses de invierno (mediados de noviembre a mediados de mayo) y 4000 horas-hombre durante el verano. En caso de que se necesite una parte de estas horas hombre, los jóvenes de la familia las emplearán para trabajar en un campo vecino por $1.00 la hora durante los meses de invierno y por $2.00 la hora en el verano. Pueden obtener el ingreso en efectivo a partir de tres tipos de cosecha y dos tipos de animales de granja: vacas lecheras y gallinas ponedoras. Para las cosechas no se necesita inversión, pero cada vaca requerirá un desembolso de $1200 y cada gallina costará $9. Cada vaca necesita 1.5 acres, 100 horas-hombre durante el invierno y otras 50 horas-hombre en el verano; cada una producirá un ingreso anual neto de $1000 para la familia. Las cifras correspondientes para cada gallina son: nada de terreno, 0.6 horas-hombre en el invierno, 0.3 horas-hombre en el verano y un ingreso anual neto de $5. Caben 3000 gallinas en el gallinero y el corral limita el ganado a un máximo de 32 vacas. Las estimaciones de las horas-hombre y el ingreso por acre plantado con cada tipo de cosecha son:

	Soya	Maíz	Avena
Horas-hombre en invierno	20	35	10
Horas-hombre en verano	50	75	40
Ingreso neto anual [$]	600	900	450

La familia quiere determinar cuántos acres debe sembrar con cada tipo de cosecha y cuántas vacas y gallinas debe mantener para maximizar su ingreso neto. Formule y resuelva un modelo de programación lineal para este problema. Interprete los resultados obtenidos.

2.- as estimaciones anteriores del ingreso por acre plantado por cosecha se han hecho suponiendo buenas condiciones del clima. Las condiciones adversas dañarían las cosechas y reducirían mucho el valor resultante. Los escenarios que más teme la familia son: sequía, inundaciones, vientos, sequía y vientos (ambos a la vez) e inundaciones y vientos (ambos a la vez). A continuación se muestran los ingresos por cosecha estimados por la familia para un año bajo estas condiciones.

ESCENARIO	SOYA	MAÍZ	TRIGO
SEQUÍA	-100	-150	0
INUNDACIONES	150	200	400
VIENTOS	500	400	300
SEQUÍA Y VIENTOS	-150	-200	-100
INUNDACIONES Y VIENTOS	100	100	-50

Realice los ajustes necesarios al modelo anterior y determine la solución óptima para cada escenario. Interprete los resultados obtenidos.

3.- Con la solución óptima para cada escenario, incluyendo el de buen clima, calcule, usando el modelo de cada uno de ellos, el ingreso de la familia al final de cada año si en su lugar ocurriera cada uno de las demás escenarios.

A su juicio ¿qué solución proporciona el mejor equilibrio entre lograr un valor monetario grande con buenas condiciones y evitar un valor monetario demasiado pequeño bajo condiciones climatológicas adversas?

La familia tiene los datos del clima de varios años anteriores y ha concluido que los escenarios anteriores ocurren según la siguiente distribución estadística.

ESCENARIO	TRIGO
BUEN CLIMA	40 %
SEQUÍA	20 %
INUNDACIONES	10 %
VIENTOS	15 %
SEQUÍA Y VIENTOS	10 %
INUNDACIONES Y VIENTOS	5 %

Con los datos anteriores, determine cuál de las alternativas de decisión sobre siembra y cría anteriormente calculadas realiza el máximo valor esperado para el ingreso familiar.

4.- SEMICOND es una pequeña compañía que produce grabadoras y radios. En la siguiente tabla se dan los costos laborales, los costos de materia prima y el precio de venta de cada producto.

	GRABADORAS (pesos)	RADIOS (pesos)
Precio de venta	100	90
Costo del trabajo	50	35
Costo de Materia Prima	30	40

El 1 de diciembre de 1999, SEMICOND dispone de suficiente materia prima para producir 100 grabadoras y 100 radios. En la siguiente tabla se muestra el estado de cuentas de la compañía en la misma fecha, para lo que se tiene que la razón (Activo/Pasivo), llamada razón actual de SEMICOND es de (10000/10000)=2.

CUENTA	ACTIVOS (pesos)	PASIVOS (pesos)
Efectivo	10000	
Cuentas por cobrar	3000	
Inventario Pendiente	7000	
Préstamo bancario		10000

Se conoce que la demanda es suficientemente alta como para vender todos los artículos producidos. Sin embargo, todas las ventas se realizan a crédito y el pago por los productos fabricados en diciembre no se recibirá hasta el 1 de febrero del 2000. Durante el mes de diciembre se recibirán $2000 por concepto de cuentas por cobrar, pero se tienen que pagar $1000 al banco del préstamo pendiente y una renta mensual de $1000. El 1 de enero SEMICOND recibirá un cargamento de materia prima por un valor de $2000, que se pagará el 1 de febrero del 2000. La gerencia de SEMICOND decidió que el balance de cajas del 1 de enero del 2000 tiene que ser, por lo menos, $4000. El banco de SEMICOND exige también que la razón actual al inicio de año sea por lo menos igual a dos.
Para maximizar la contribución a la ganancia de la producción de diciembre (Ingresos por recibir)-(Costos variables de producción), SEMICOND ha de determinar qué cantidad de radios y grabadoras producir ese mes.

Formule y resuelva un modelo de programación lineal para este problema. Interprete los resultados obtenidos.

5.- Una empresa de arriendo de vehículos desea establecer la flota de automóviles, camionetas y jeeps para el presente año. Para tales efectos, estudia la adquisición de vehículos de los tres tipos. Todos los vehículos comprados son depreciados y pagados en un período de 2 años, después del cual son vendidos. La tabla siguiente muestra el precio de compra y los ingresos del período para los tres tipos de vehículos (los ingresos para el segundo año incluyen el valor de salvataje).

Vehículo	Costo [US$]	Ingresos primer año [US$]	Ingresos segundo año [US$]
Automóvil	7000	3000	5400
Camioneta	6500	2300	5300
Jeep	5800	2100	5000

Aún cuando la empresa puede pagar el costo de los vehículos inmediatamente, puede también decidir diferir parte del costo de los vehículos al final del primer o segundo año. El costo del crédito es de 14% anual. La empresa debe pagar por lo menos el 20% de la inversión inicial al recibir un vehículo y por lo menos el 50% de la inversión

inicial más los intereses del crédito deben haber sido pagado al final del primer año. La empresa dispone de US$2000000 para la compra de vehículos este año. La compañía usa una tasa de descuento del 15% para efectos de financiamiento (es decir, US$100 hoy valen US$85 dentro de un año). Todo excedente en cualquier año es invertido en otros rubros y, por lo tanto, no puede considerarse en pagos futuros.
Formule un modelo de programación lineal para el problema. Interprete los resultados obtenidos.

6.- La firma de cosultoría y auditoría SCOTT & WARNER ha recibido el pedido de tres nuevos clientes para que los asesore en la realización de auditorias internas. Tomando en cuenta que los contadores de la firma están muy cargados de trabajo, el gerente desea acomodar los nuevos clientes a los cuatro contadores que tienen la menor carga de trabajo en estos momentos. Como los cuatro contadores tienen otros trabajos que realizar, cada uno de ellos podría realizar la asesoría solo a uno de los clientes. La firma desea realizar la selección de forma eficiente, y para ello ha estimado el tiempo que cada uno de ellos tardaría en realizar la asesoría, para lo cual se ha basado en la experiencia y habilidades personales de cada uno de los cuatro contadores. En la tabla que sigue se muestran las estimaciones de tiempo (en horas) hechas por la compañía, para cada contador por asesorar a cada cliente.

CONTADOR	CINCINATI DRUG	PRUITT TRUCKING	STROM FOODS
Warrer	150	210	270
Kirkman	170	230	220
Howard	180	230	225
Phipps	160	240	230

La compañía desea asignar un contador a cada cliente, de forma tal que ellos terminen el trabajo en el menor tiempo posible.

Formule un modelo de programación lineal para el problema. Interprete los resultados obtenidos.

Capítulo 3.- Decisiones en Condiciones de Competencia o Conflicto.

Muchos autores consideran a los problemas de decisión con información perfecta como problemas en condiciones de certeza, cuando se tiene la información imperfecta o incompleta se les denomina en 2 categorías; decisiones con Riesgo y decisiones con incertidumbre de tal forma las situaciones extremales son la certeza y la incertidumbre y dejan al riesgo como una situación intermedia. Es de preguntarse y el conflicto donde lo dejan, el hecho es que muchos autores llevan las situaciones en conflicto a la llamada Teoría de juegos y lo excluyen de la decisión.

Dos o más individuos se encuentran en una situación de competitividad o conflicto si el logro de los objetivos de uno de ellos implica la reducción de las probabilidades de los demás para alcanzar los suyos. Existe una teoría matemática que describe el comportamiento de los participantes y esa es la Teoría de Juegos. Su objetivo consiste en elaborar recomendaciones sobre la forma razonable de las acciones de cada uno de los contrincantes en el curso de una situación de conflicto. La vida está llena de conflictos y competencia.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía —Equilibrio General, distribución de costes, etc.— se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

En el oligopolio, los resultados que obtiene cada empresa dependen no sólo de su decisión sino de las decisiones de las competidoras. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones cuyo resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes. La técnica para su análisis fue puesta a punto por un matemático, John Von Newmann en colaboración con el economista Oskar Morgenstern. El libro que publicaron en 1944, *"Theory of Games and Economic Behavior"*, abrió un insospechadamente amplio campo de estudio en el que actualmente trabajan miles de especialistas de todo el mundo.

John Von Newmann nació en Budapest, Hungría, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zurich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a los Estados Unidos donde trabajará en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Sus aportaciones a la ciencia económica se centran en dos campos:

Es el creador del campo de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre este tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica la *Theory of Games and Economic Behavior*. La teoría de juegos es un campo en el que trabajan actualmente miles de economistas y se publican a diario cientos de páginas. Pero además, las formulaciones matemáticas descritas en este libro han influido en muchos otros campos de la economía. Por ejemplo, Kenneth Arrow y Debreu se basaron en su axiomatización de la teoría de la utilidad para resolver problemas del Equilibrio General.

En 1937 publica *A Model of General Economic Equilibrium*", del que E. Roy Weintraub dijo en 1983 ser "el más importante artículo sobre economía matemática que haya sido escrito jamás". En él relaciona el tipo de interés con el crecimiento económico dando base a los desarrollos sobre el "crecimiento óptimo" llevado a cabo por Allais y otros.

Las situaciones de conflicto en la práctica son muy complicadas, por lo que para hacer posible un análisis de ellos es necesario construir un modelo simplificado y formalizado de la situación, denominados "JUEGO". El juego se realiza a base de reglas determinadas.

En el juego pueden chocar los intereses de dos o más contrincantes; en el primer caso es un juego de dos personas y el segundo de varias personas.
Existe el llamado juego de dos personas con suma cero, debido a que lo que gana un jugador es lo que pierde el otro, de manera que la suma neta de sus ganancias es cero

En todo juego de dos personas deben existir:

1. Las estrategias del jugador 1.
2. Las estrategias del jugador 2.
3. La matriz de pagos.

REGLAS DEL JUEGO: Es el sistema de condiciones que determinan las posibles variantes de acción de las dos partes, la cantidad de información de cada parte da la conducta de la otra, la sucesión de las alteraciones de las jugadas y el resultado o fin de juego. El resultado no siempre tiene una expresión cuantitativa, pero generalmente se establece una escala de medidas expresándose éste con un número definido.

Tomemos la convención siguiente: en juegos de dos personas, nosotros seremos A y trataremos siempre de ganar y el contrario será B que será el que trataremos de hacer perder.

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA: Es el conjunto de reglas que determinan de una manera única la elección de cada jugada personal del jugador dada la dependencia de la situación que se haya creado en el proceso de juego.

JUEGO M x N: Se denominará así a un juego en donde el jugador A tenga M estrategias posibles y el jugador B tenga N estrategias.

En la matriz de pagos se escribirá en cada caso como resultado la ganancia que recibirá el jugador A.
La matriz de pagos será la siguiente:

		jugador B			
	estrategias	B1	B2	....	Bn
	A1	R11	R12	....	R1n
jugador A	A2	R21	R22	....	R2n

:	:	:	....	:
Am	Rm1	Rm2	....	Rmm

DEFINICIÓN DE ESTRATEGIA ÓPTIMA.- Es aquella en que al repetirse el juego garantiza al jugador dado, la ganancia media máxima posible. Al elegir ésta estrategia, el razonamiento debe ser que el enemigo es tan razonable como nosotros y hace lo posible para evitar que consigamos nuestro objetivo. Este principio introduce en el juego un riesgo que notablemente está presente en cada estrategia. La teoría de juegos tiene la restricción de que la ganancia se reduce artificialmente a un sólo número.

A modo de conclusión preliminar la teoría de juego se divide en cuanto a:

a) JUGADORES.
- Juegos de 2 personas.
- Juegos de n personas.

b) NUMERO DE ESTRATEGIAS DISPONIBLES EN CADA DECISOR.
-Juegos finitos.
- Juegos infinitos.

c) OBJETIVOS DEL JUEGO.
- Juegos suma cero.
- Juegos suma diferente de cero o meta-juegos.

EJEMPLO DE TOMA DE DECISIÓN: 1
La compañía Telefónica Nacional debe delinear una estrategia para argumentar la revisión del contrato colectivo de trabajo con su sindicato.
La empresa supone por diversas razones históricas, que pueden ocurrir 4 situaciones con el sindicato.

E1: Negociación difícil.
E2: Demandas realistas.
E3: Demandas leves.
E4: Cambios extremos de postura por parte del sindicato durante las negociaciones.

Por su parte el sindicato considera también por razones históricas, promover alguna de las siguientes estrategias:

S1: Demandas extremadamente exageradas.
S2: Demandas exageradas.
S3: Demandas razonables.
S4: Demandas leves, favorables a la empresa, no al sindicato.

A través de un intermediario que comunica a la empresa y al sindicato, previa la negociación, se puede (en teoría) diseñar una tabla de consecuencias en donde aparezca el aumento probable en el salario de un obrero por hora según la combinación de estrategias, obteniéndose así la matriz de pagos.

matriz de pagos. estrategias de la empresa.

E1 E2 E3 E4

estrategias del	S1	25	14	15	32
sindicato.	S2	40	17	13	16
	S3	30	5	12	15
	S4	0	8	11	3

En este ejemplo la teoría de juegos define estrategias que maximice el objetivo del aumento en el salario.

Más adelante estudiaremos los métodos que dan solución a este problema.

3.1.- Determinación de la Estrategia Optima.

PRINCIPIOS DEL MIN-MAX.- Designemos por i el número de nuestra estrategia A_i y con j la estrategia B_j del adversario. Al elegir A_i, siempre tenemos que hacer el cálculo de que el adversario responderá con una de las estrategias B_j para lo cuál nuestra ganancia será la mínima.

Determinemos el valor de esta ganancia, es decir, el menor valor de R_{ij} en la línea (estratégica) i y llamémosle a_i.

$$a_i = \min_j \; [R_{ij} \quad \text{para } i = 1, m]$$

Para la estrategia j del adversario B_j se tendría que estará interesado en llevar nuestra ganancia al mínimo.

$$b_j = \max_i \; [R_{ij} \quad \text{para } j = 1, n]$$

Al elegir cualquier estrategia A_i debemos calcular que como resultado de las acciones razonadas del contrario no ganaremos nada más que a_i. Teniendo en cuenta que nuestro adversario es razonable también, tenemos que elegir la estrategia A_i a la que le corresponde el valor máximo de a_i.

$$a = \max_i \; [a_i].$$

luego $$a = \max_j \min_j \; [R_{ij}].$$

A la magnitud a se le llama <u>valor inferior del juego</u>, o ganancia <u>Max-Min</u>. Es evidente que si nos atenemos a la estrategia <u>Max-Min</u>, tendremos garantizado para cualquier conducta del adversario una ganancia que en cualquier caso será <u>no menor</u> que a, por lo que se le llama valor inferior del juego, o sea el mínimo garantizado que nos proponemos asegurar manteniéndonos con la estrategia más prudente.

Para nuestro adversario se obtiene de igual forma el valor b.

$$b = \min_j \max_i \; [R_{ij}].$$

A este valor b le llamamos el <u>valor superior del juego</u>. De esta forma el adversario se garantiza independientemente de lo que emprendamos contra él, la suma de su pérdida en cualquier caso será no mayor que b

Las estrategias Max-Min y Min-Max más prudentes de los jugadores, suelen denominarse c el término general de "ESTRATEGIAS Min- Max".

Existen juegos para los cuales las estrategias Min-Max son estables. Estos son los que tienen un valor inferior igual al superior.

$$a = b$$

Este elemento de la matriz de pagos es el menor de su fila y el mayor de su columna y se le llama el "punto de silla" Las estratégias asociadas a un punto de silla se denominan óptimas y su conjunto, la solución del juego. En el juego con punto de silla, el par de estrategias óptimas es algo semejante a una posición de equilibrio. Cualquier desviación de la estrategia óptima lleva al jugador que se desvía a consecuencias desfavorables que lo obligan a volver a la posición inicial.

Estas estrategias se caracterizan por:

- Si las dos partes se rigen por sus estrategias óptimas, la ganancia media será igual al valor del juego Rij, que es simultáneamente su valor inferior y superior.
- Si una de las partes mantienen su estrategia óptima y la otra se desvía de la suya, ello conducirá a que la parte que se desvía solo podía perder y en ninguno de los casos podía aumentar su ganancia

En la Teoría de Juegos se demuestra que cada juego con su información perfecta tiene punto de silla y en consecuencia tiene solución, o sea, que existe un par de estrategias óptimas de una y otra parte que den ganancia media igual al valor del juego.

EJEMPLO: 2

Existe una competencia fuerte entre dos hoteles de características similares, el primero llamémosle el hotel de la cadena A y el segundo de la cadena B .

En la cadena A se ha hecho un estudio del mercado basado en cuatro estrategias básicas para lograr ser mas competitivos, estas estrategias son:

A1: Mantener la actividad normal en el hotel.
A2: Fomentar una nueva imagen mediante la divulgación por la prensa y la radio.
A3: Hacer ofertas promocionales atrayentes a los turistas.
A4: Hacer una ligera reducción de la capacidad hotelera para lograr una mayor calidad en el servicio.

Un grupo de Expertos de la cadena A ha calculado los beneficios, en miles de pesos, que podrían obtener en el transcurso de una semana, suponiendo que la cadena B hará lo mismo.

La matriz de pagos obtenida es la siguiente:

(suponiéndose que 100 sea el máximo que pueda obtenerse en una semana)

Beneficios en	Estrategias de la cadena B			
miles de pesos	B1	B2	B3	B4

	A1	40	50	50	30
Estrategias de	A2	80	50	30	70
la cadena A	A3	70	60	80	90
	A4	50	20	40	60

Se quiere saber cuál será la mejor decisión para la cadena A en medio de la competencia.

S o l u c i ó n. Busquemos la estrategia Max-Min para la cadena A

Estrategias de A	Min	Max-Min.
A1: normal	40	
A2: divulgación	30	A = 60
A3: Ofertas	60	A3: Ofertas promocionales.
A4: Disminución	20	

Estratégias Min-Max para la cadena B

Estrategias de B	Max	Min-Max.
B1: Normal	80	
B2: Divulgación.	60	b = 60
B3: Ofertas:	80	B2: Divulgación.
B4: Disminución	90	

Obtenemos en este caso el punto de silla.

$$a = b = 60$$

Luego según este problema, la cadena A tiene su estrategia óptima en las ofertas promocionales, mientras que la cadena B debe hacer divulgaciones con la cuál A ganaría 60 mil pesos y B tendría que contentarse con 40 mil pesos.

3.2.- Estrategias Mixtas.

En este tipo de problemas se puede observar el hecho fundamental de que se puede predecir la estrategia de un jugador, por lo cual el oponente puede aprovechar esta información para mejorar su posición. Una característica esencial de un plan racional para jugar un juego como éste es, que ningún jugador pueda predecir que estrategia usará el otro. Entonces en lugar de aplicar algún criterio conocido para determinar una sola estrategia que se usara en forma definitiva, es necesario elegir entre las estrategias aceptables de alguna manera aleatoria. El hacer esto, ningún jugador conoce de antemano cuál de sus propias estrategias se usará, mucho menos las de su oponente.

Esto sugiere, en términos muy generales, el tipo de enfoque que se requiere para juegos sin punto de silla. Si cada jugador se ve obligado a elegir una estrategia pura única, entonces, no hay nada que hacer, hay que guiarse por el principio del Min-Max. Otra cosa es, si se pueden alterar nuestras estrategias de una manera aleatoria, con ciertas probabilidades.

Una Estrategia Mixta asigna probabilidades a cada estrategia básica de modo que, el conjunto de ellas equivalen a 1. La interpretación de un juego con Estrategias Mixtas es que el juego se repite muchas veces antes de cada partida, se confía su elección a la casualidad, se sortea y se escoge la estrategia que le tocó.

Las estrategias mixtas representan en la teoría de juegos un modelo de táctica favorable, flexible cuando ninguno de los jugadores sabe cómo se comportará el contrario. Sean las estrategias mixtas de ambos jugadores las siguientes:

$$S_a = \begin{matrix} A1 & A2 & \dots & An \\ p1 & p2 & \dots & pn \end{matrix}$$

$$S_b = \begin{matrix} B1 & B2 & \dots & Bm \\ q1 & q2 & \dots & qm \end{matrix}$$

Donde pi (i = 1,n) son las probabilidades de que el jugador A aplique las estrategias Ai) i = 1, n) y se tiene

$$p1 + p2 \dots + pn = 1$$

Análogamente qj (j = 1, m) son las probabilidades de que el jugador B aplique sus estrategias Bj (j = 1, m)

$$q1 + q2 + \dots + qm = 1.$$

Cualquier juego entre dos personas con suma cero, tiene por lo menos, una solución, o sea un par de estrategias óptimas que son en forma general mixtas (S*A , S*B) y un valor correspondiente al resultado R i j

El par de estrategias óptimas (S * A , S * B) que forman la solución del juego tienen la siguiente propiedad:

- Si uno de los jugadores sigue una estrategia óptima, entonces para el otro no puede ser ventajoso renunciar a la suya.
- Este par de estrategias forma en el juego cierta situación de equilibrio, un jugador tiende a maximizar la ganancia, el otro a minimizarla y en el caso de un comportamiento razonable, se establece un equilibrio y una ganancia estable V.

Si V > 0 el juego es ventajoso para nosotros.
V < 0 el juego es ventajoso para el adversario.
V = 0 El juego es justo y es igualmente ventajoso para cada participante.

3.3.- Aplicación de la Programación Lineal para la Obtención de Estrategias Optimas Mixtas.

Suponga la matriz de pagos para un juego de suma cero entre dos competidores:

Ganancias para A		estrategias para B			Probabilidades para A
		B1	B2 ...	Bn	
Estrategias	A1	R11	R12 ...	R1n	p1
para A	A2	R21	R22 ...	R2n	p2
	:	:	:	:	:
	Am	Rm1	Rm2 ...	Rmn	pm

probabilidades

para B q_1 q_2 .... q_n

Sea V el menor valor esperado de las ganancias obtenidas para el jugador A, cuando el jugador B toma sus estrategias B1, B2..... Bn respectivamente.

$E_1 = R_{11}\ p_1 + R_{21}\ p_2 + ... + R_{m1}\ p_m$ $E_2 = R_{12}\ p_1 + R_{22}\ p_2 + ... + R_{m2}\ p_m$

$\vdots$

$E_n = R_{1n}\ p_1 + R_{2n}\ p_n + ... + R_{mn}\ p_m$

$V = \min(E_1, E_2, \ldots E_n)$

El objetivo para A es obtener los valores de p_1, p_2 . . . p_m tales que hagan máximo a V

Como problema de P. L. será :

$X_1, X_2, ... X_m > 0$, $V > 0$

Función objetivo: Max V.
Restricciones:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + ... x_m = 1 \\
R_{11}\ x_1 + R_{21}\ x_2 .... + R_{m1}\ x_m > V \\
R_{12}\ x_1 + R_{22}\ x_2 .... + R_{m2}\ x_m > V \\
\quad \vdots \\
R_{1n}\ x_1 + R_{2n}\ x_2 ..... + R_{mn}\ x_m > V
\end{array}
$$

EJEMPLO: 3
En el plano de la competencia en el mercado internacional se tiene la empresa Cubana Suchel de perfumería y la firma Rexona de Inglaterra. Suchel tiene la elección de subir sus precios, dejarlos como están o disminuirlos. La firma Rexona tiene las mismas opciones. Las ventas brutas en miles de pesos de la Empresa Suchel para cada uno de los pares de elecciones posibles se muestran en la tabla:

Beneficios en miles de pesos.	R E X O N A.		
SUCHEL	aumento	invariante	disminución.
aumento.	90	100	110
invariante.	110	100	90
disminución	120	100	80

Se desea saber como debe actuar la empresa Suchel ante la competencia.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.
Variables.

Sean $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
$p_1 > 0$
$p_2 > 0$

$p3 > 0$

V - El menor valor esperado de las ventas brutas de la Empresa Suchel.

FUNCIÓN OBJETIVO:
Maximizar el menor valor esperado de las ventas para Suchel (Max-Min).
$\text{Max } Z = V$

RESTRICCIONES:
Para un aumento de la empresa Rexona (B1)
$90\,p1 + 110\,p2 + 120\,p3 >= V$

Para la empresa Rexona invariante: (B2)
$100\,p1 + 100\,p2 + 100\,p3 >= V$

Para una disminución de la Empresa Rexona: (B3)
$110\,p1 + 90\,p2 + 80\,p3 >= V$

Problema este de Programación Lineal que debemos resolver aplicando paquetes de programas.

La solución a éste problema nos dará el valor esperado máximo de las ventas brutas de Suchel (valor obtenido de V) y las probabilidades que tiene la Empresa para su trabajo futuro.

EJEMPLO: 4 Resuelva el ejemplo No. 1. y de una interpretación de sus resultados.

EJEMPLO: 5 Dos agencias Turísticas A y B muestran simultáneamente sin ponerse de acuerdo 1, 2, 3 giras turísticas. La ganancia la decide la cantidad total de giras, si el número es par gana A y recibe de B una suma igual a este número, si es impar, A paga a B una suma igual a este número.
¿ Cómo deberán proceder las agencias?

EJEMPLO: 6 Resuelva el problema de la competencia entre el sindicato y la administración de la Empresa y analice sus resultados.
3.4- Juegos de suma no constante. Dilema del prisionero

Dos sospechosos son detenidos en cercanías del lugar de un crimen y la policía comienza aplicar las técnicas de interrogatorio por separado.

Cada uno de ellos tiene la posibilidad de elegir entre confesar acusando a su compañero, o de no hacerlo.

Si ninguno de ellos confiesa, entonces ambos pasarán un año en prisión acusados de cargar un arma sin autorización. Si ambos confiesan y se acusan mutuamente, los dos irán a prisión por 5 años cada uno, pero si sólo uno confiesa y acusa a su compañero al implicado le caerán 20 años y el acusador saldrá libre por colaborar con la policía.

Las estrategias a definir en este caso son: Confesar o No Confesar.

¿Cómo se construiría la tabla de alternativas? y ¿Cuáles son las Estrategias Adecuadas para cada uno de ellos y para los dos en su conjunto?

		Preso Nº 1	
		Confiesa	No Confiesa
Preso Nº 2	Confiesa		
	No Confiesa		

En todos los juegos, dos partes deben tomar una decisión, donde los resultados dependen de las decisiones de ambas partes y bajo el supuesto que cada uno busca favorecer sus propios intereses.

No obstante, cada uno escoge en aislamiento del otro, tomando la otra decisión como dada. Como resultado, los dos tienen resultados relativamente malos (larga duración en prisión o cero ganancias).

El Dilema del Prisionero ha sido influyente a lo largo de las ciencias sociales, desde la segunda mitad del siglo XX, porque ilustra cómo quienes toman las decisiones de manera racional y buscando proteger sus intereses, *pero escogiendo sus estrategias en aislamiento*, actúan recíprocamente para obtener resultados malos.

¿Pero es realmente racional actuar así?

En el juego del Dilema del Prisionero, el aislamiento es impuesto por las reglas del juego --los Prisioneros han sido aislados por la Policía, y no tiene ninguna opción para comunicarse–. Pero los empresarios pudieron, en principio, ponerse de acuerdo en una estrategia común, y compartir las ganancias del mercado entre ellos. Así no estarían tomando la estrategia del otro como dada, sino que en cambio, estarían coordinando sus estrategias.

Por supuesto, se diseñan leyes antimonopolios para hacer que conductas semejantes sean ilegales, y que han sido promulgadas porque muchas personas creen que los hombres de negocios no deberían colaborar para establecer precios altos en los mercados. Sin embargo, en otro tipo de problemas la cooperación también puede ser la mejor solución para un juego.

En un juego de Dilema del Prisionero, la matriz se representa de la siguiente manera:

		Preso Nº 1	
		NC	C
Preso Nº 2	NC	(P,P)	(T,S)

	C	(S,T)	(R,R)

Donde NC: Acción sin cooperación

C: Acción con cooperación

T: Tentación de traicionar al cómplice

S: Pago a la persona que es traicionada

R: Pago por cooperar entre sí si ambos así lo hacen

P: Castigo por no cooperar

En un juego de Dilema del Prisionero debe cumplirse que T>R>P>S. El equilibrio se alcanza cuando ninguno de los dos jugadores puede mejorar sus ganancias actuando unilateralmente (Equilibrio de Nash)

Capítulo 4 PERT _ CPM

4.1.- Introducción

Los proyectos en gran escala han existido desde tiempos antiguos; este hecho lo atestigua la construcción de las pirámides de Egipto y los acueductos de Roma. Pero sólo desde hace poco se han analizado por parte de los investigadores operacionales los problemas gerenciales asociados con dichos proyectos.

El problema de la administración de proyectos, como problema de la investigación de operaciones, surgió con el proyecto de armamentos del Polaris, iniciado en 1958. Con tantas componentes y subcomponentes producidas por diversos fabricantes, se necesitaba una nueva herramienta para programar y controlar el proyecto. El PERT (Program Evaluation & Review Technic) fue desarrollado por científicos de la oficina Naval de Proyectos Especiales: Booz, Allen y Hamilton y la División de Sistemas de Armamentos de la Corporación Lockheed Aircraft. La técnica demostró tanta utilidad que ha ganado amplia aceptación tanto en las empresas del gobierno como en el sector privado.

Casi al mismo tiempo, la Compañía DuPont, junto con la División UNIVAC de la Remington Rand, desarrolló el método de la ruta crítica, conocido por las siglas CPM (Critical Path Method), para controlar el mantenimiento de proyectos de plantas químicas de DuPont. El CPM es idéntico al PERT en concepto y metodología. La diferencia principal entre ellos radica en el método por medio del cual se realizan los estimados de tiempo para las actividades del proyecto. Con CPM, los tiempos de las actividades son determinísticos, mientras que con PERT se permite que los tiempos de las actividades sean probabilísticos o estocásticos.

En la actualidad los métodos PERT y CPM comprenden realmente una solo técnica y las diferencias, si existe alguna, son básicamente de origen histórico.

Así el PERT/CPM está diseñado para proporcionar diversos elementos útiles de información para los administradores del proyecto. Primero, el PERT/CPM expone la "ruta crítica" de un proyecto. Estas son las actividades que limitan la duración del proyecto. En otras palabras, para lograr que el proyecto se realice pronto, las actividades de la ruta crítica deben realizarse pronto. Por otra parte, si una actividad de la ruta crítica se retarda, el proyecto como un todo se retarda en la misma cantidad. Las actividades que no están en la ruta crítica tienen una cierta cantidad de holgura; o sea, pueden iniciarse más tarde, sin que esto afecte el programa de ejecución del proyecto como un todo. El PERT/CPM identifica estas actividades y la cantidad de tiempo disponible para retardos.

El PERT/CPM también considera los recursos necesarios para completar las actividades. En muchos proyectos, las limitaciones en mano de obra y equipos hacen que la programación sea difícil. El PERT/CPM identifica los instantes del proyecto en que estas restricciones causarán problemas y de acuerdo a la flexibilidad permitida por los tiempos de holgura de las actividades no críticas, permite que el gerente manipule ciertas actividades para aliviar estos problemas.

Finalmente, el PERT/CPM proporciona una herramienta para controlar y monitorear el progreso del proyecto. Cada actividad tiene su propio papel en éste y su importancia en la terminación del proyecto se manifiesta inmediatamente para el director del mismo. Las actividades de la ruta crítica, permiten por consiguiente, recibir la mayor parte de la atención, debido a que la terminación del proyecto depende fuertemente de ellas. Las actividades no críticas se manipularan y remplazaran en dependencia de la disponibilidad de recursos.

Definición #1 : Un proyecto define una combinación de actividades interrelacionadas que deben ejecutarse en cierto orden antes que el trabajo completo pueda terminarse.

Definición #2 : El método PERT/CPM es un proceso administrativo de planeación, programación, ejecución y control de todas y cada una de las actividades que componen un proyecto, del cual se desea se realice dentro de un tiempo dado y a un costo mínimo.

El campo de acción de este método es muy amplio, dada su gran flexibilidad y adaptabilidad a cualquier proyecto grande o pequeño. Para obtener los mejores resultados debe aplicarse a los proyectos que posean las siguientes características:

a) Que el proyecto sea único, no repetitivo, en algunas partes o en su totalidad.
b) Que se deba ejecutar todo el proyecto o parte de el, en un tiempo mínimo, sin variaciones, es decir, en tiempo crítico.
c) Que se desee el costo de operación más bajo posible dentro de un tiempo disponible.

Dentro del ámbito de aplicación, el método se ha estado usando para la planeación y control de diversas actividades, tales como construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, operaciones de guerra, estudios económicos regionales, auditorías, planeación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planeación de itinerarios para cobranzas, planes de venta, censos de población, etc., etc.

En base a la definición de PERT/CPM dada, la programación de proyectos consiste de tres fases: Planeación, Programación y Ejecución y Control de proyectos. A continuación se tratarán, por separado, cada una de estas etapas, describiéndose en cada una de ellas sus características y analizando los procedimientos a utilizar en cada paso.

4.2.- Planeación

La fase de planeación, a su vez, debe ser ejecutada a través del cumplimiento de un grupo de pasos: Primero se debe definir el proyecto como tal, luego se pasa a la descomposición del proyecto en actividades, la definición de las matrices de secuencia, de tiempo y de información, y por último, y con toda esta información, se debe construir la red del proyecto, con lo cual concluye esta fase y deja todo listo para la aplicación de la fase de programación.

Definición del Proyecto

En toda actividad a realizar se requieren conocimientos precisos y claros de lo que se va a ejecutar, de su finalidad, viabilidad, elementos disponibles, capacidad financiera, etc. Esta etapa aunque esencial para la ejecución del proyecto, en la mayoría de los textos clásicos que se conocen sobre el tema forma parte del método. Sin embargo, estimamos que este paso puede resultar de gran ayuda y en el se debe realizar una investigación de objetivos, métodos y elementos viables y disponibles para la consecución del proyecto. Entre las técnicas que se recomiendan utilizar en este paso se cuentan la división del proyecto en partes o etapas y subetapas, de forma que resulte más cómodo de organizar, algo así como la organización de la información en computadoras, que se realiza en torres, carpetas y subcarpetas o directorios. Al concluir esta etapa se debe tener claro la los objetivos que se persiguen con el proyecto, el personal que intervendrá en la ejecución del mismo, incluyendo su grado de responsabilidad dentro de este, donde buscar la información necesaria, con quién consultar para esclarecer las situaciones de conflicto que puedan surgir durante las sesiones de trabajo.

Lista de Actividades

Una vez definido el proyecto, con seguridad se conoce el conjunto de actividades que componen el mismo. Entonces corresponde en este momento realizar la definición clara de las actividades físicas o mentales que forman los procesos interrelacionados del proyecto total. En general esta información es obtenida de las personas que intervendrán en la ejecución del proyecto, de acuerdo con la asignación de responsabilidades y nombramientos realizados en la Definición del Proyecto.

Las actividades pueden ser físicas o mentales, como construcciones, tramites, estudios, inspecciones, dibujos, etc. En términos generales, se considera Actividad a la serie de operaciones realizadas por una persona, grupo de personas o equipos en forma continua, sin interrupciones, con tiempos determinables de iniciación y terminación. Esta lista de actividades sirve de base a las personas responsables de cada proceso para que elaboren sus presupuestos de ejecución.

Ejemplo:
Cuando una Empresa de Auditoria verifica la contabilidad de una corporación, la primera fase de la auditoria es la obtención del "Conocimiento del Negocio". En esta fase de la auditoria se requiere de las actividades que se enumeran en la siguiente tabla.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN
A	Determinar los términos del contrato.
B	Estimación del riesgo de la revisión de cuentas e importancia.
C	Identificación de los tipos de transacciones y errores posibles.
D	Descripción de los sistemas.
E	Verificación de la descripción de los sistemas.
F	Evaluación de los controles internos.
G	Diseño del enfoque de la revisión de cuentas

Matriz de Secuencias

Una vez definida la lista de actividades del proyecto, se procede a determinar el nivel de precedencia y las interrelaciones que existen entre las mismas dentro del proyecto. Existen dos procedimientos para conocer la secuencia de las actividades:
a.- Por antecedentes

b.- Por secuencias o sucesores.

Por antecedentes, se les preguntará a los responsables de los procesos cuales actividades deben quedar terminadas inmediatamente antes de que se pueda ejecutar cada una de las actividades que aparecen en la lista. Debe tenerse especial cuidado que todas y cada una de las actividades tenga por lo menos una antecedente. El único caso en el cual no existe actividad antecedente es en el de las actividades iniciales. A continuación se ofrece un ejemplo de lista de actividades descritas arriba ordenadas por antecedentes.

ACTIVIDAD	**DESCRIPCIÓN**	**ANTECESOR INMEDIATO**
A	Determinar los términos del contrato.	-
B	Estimación del riesgo de la revisión de cuentas e importancia.	A
C	Identificación de los tipos de transacciones y errores posibles.	A
D	Descripción de los sistemas.	C
E	Verificación de la descripción de los sistemas.	D
F	Evaluación de los controles internos.	B , E
G	Diseño del enfoque de la revisión de cuentas	F

En el segundo procedimiento se preguntara a los responsables de la ejecución, cuales actividades deben hacerse inmediatamente después de terminar cada una de las que aparecen en la lista. Para esta información deben tomarse una por una todas las actividades listadas, sin pasar por alto ninguna de ellas.

Si se hace una matriz de antecedentes es necesario hacer después una matriz de secuencias, pues es ésta última la que se utiliza para dibujar la red. Esta matriz no es definitiva, porque generalmente se hacen ajustes posteriores en relación con la existencia y disponibilidades de materiales, mano de obra y otras limitaciones de ejecución.

En la tabla que sigue se muestra un ejemplo de matriz de secuencias o sucesores.

ACTIVIDAD	**DESCRIPCIÓN**	**SUCESORES INMEDIATO**
A	Determinar los términos del contrato.	B , C

B	Estimación del riesgo de la revisión de cuentas e importancia.	F
C	Identificación de los tipos de transacciones y errores posibles.	D
D	Descripción de los sistemas.	E
E	Verificación de la descripción de los sistemas.	F
F	Evaluación de los controles internos.	G
G	Diseño del enfoque de la revisión de cuentas	FINAL

Matriz de Tiempo

Una vez establecido el orden y las relaciones de precedencia entre las actividades del proyecto, corresponde el turno a la asignación de los tiempos de duración de cada una de las actividades. En la realización del estudio de tiempos se debe identificar si el tiempo para la realización de las actividades se puede tomar como determinístico (esto es no existen grandes variaciones en su ejecución) en cuyo caso solo se toma el tiempo esperado o más probable para su realización, o si el mismo se debe tratar como aleatorio, en cuyo caso se requieren tres cantidades estimadas por los responsables de los procesos: El tiempo medio (M), el tiempo optimista (o) y el tiempo pesimista (p).

El tiempo medio (M) es el tiempo normal que se necesita para la ejecución de las actividades, basado en la experiencia personal del informador. El tiempo optimista (o) es el que representa el tiempo mínimo posible sin importar el costo o cuantía de elementos materiales y humanos que se requieran; es simplemente la posibilidad física de realizar la actividad en el menor tiempo. El tiempo pesimista (p) es un tiempo excepcionalmente grande que pudiera presentarse ocasionalmente como consecuencia de accidentes, falta de suministros, retardos involuntarios, causas no previstas, etc. Debe contarse sólo el tiempo en que se ponga remedio al problema presentado y no debe contar el tiempo ocioso.

Se puede medir el tiempo en segundos, minutos, horas, días, semanas, meses, trimestres y años, con la condición de que se tenga la misma medida para todo el proyecto. Los tiempos anteriores servirán para promediarlos mediante la fórmula PERT obteniendo un tiempo resultante llamado estándar (t) que recibe la influencia del optimista y del pesimista a la vez.

$$t = \frac{o + 4M + p}{6}$$

Esto es, tiempo estándar igual al tiempo optimista, más cuatro veces el tiempo medio, más el tiempo pesimista, y esta suma dividida entre seis(6). Esta fórmula está calculada para darle al tiempo medio una proporción mayor que los tiempos optimista y pesimista que influyen. Esta proporción es de cuatro(4) a seis(6).

Supongamos que en el ejemplo descrito arriba se puede asumir tiempo de ejecución determinístico para las actividades, en cuyo caso se da el tiempo estimado para cada una de ellas e la siguiente tabla o matriz.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	DURACIÓN (días)
A	Determinar los términos del contrato.	3
B	Estimación del riesgo de la revisión de cuentas e importancia.	6
C	Identificación de los tipos de transacciones y errores posibles.	14
D	Descripción de los sistemas.	8
E	Verificación de la descripción de los sistemas.	4
F	Evaluación de los controles internos.	8
G	Diseño del enfoque de la revisión de cuentas	9

Matriz de Información

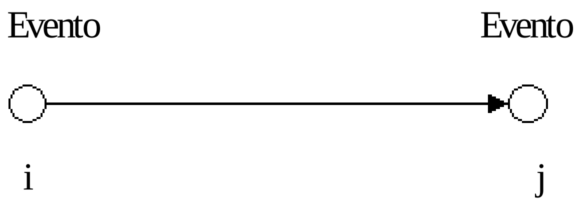
Tanto la matriz de secuencias como la matriz de tiempos se reúnen en una sola llamada matriz de información, que sirve de base para construir la red del proyecto.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	ANTECESOR INMEDIATO	DURACIÓN (días)
A	Determinar los términos del contrato.	-	3
B	Estimación del riesgo de la revisión de cuentas e importancia.	A	6
C	Identificación de los tipos de transacciones y errores posibles.	A	14
D	Descripción de los sistemas.	C	8
E	Verificación de la descripción de los sistemas.	D	4
F	Evaluación de los controles internos.	B , E	8
G	Diseño del enfoque de la revisión de cuentas	F	9

Red de Actividades

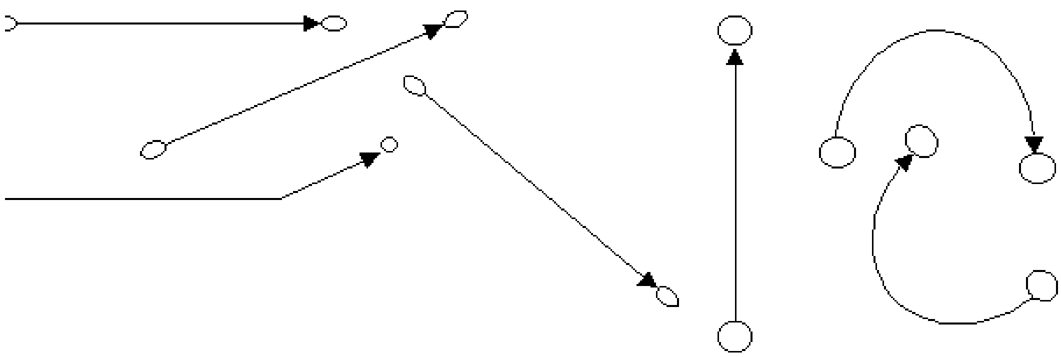
Se llama red a la representación gráfica de las actividades que muestran sus eventos, secuencias e interrelaciones. Cada una de las actividades del proyecto se representa por una flecha que empieza en un evento y termina en otro.

Se llama evento al momento de iniciación o terminación de una actividad. Se determina en un tiempo variable entre el más temprano y el más tardío posible, de iniciación o de terminación para cada actividad. A los eventos se les conoce también con los nombres de nodos de la red.

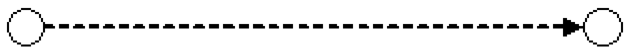


En el ejemplo anterior se ha llamado (i) al evento inicial y (j) al evento final. El evento final de una actividad será el evento inicial de la actividad que le sigue.

Las flechas no son vectores, escalares, ni representan medida alguna. No interesa la forma de las flechas, ya que se dibujarán de acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, quebradas, etc.

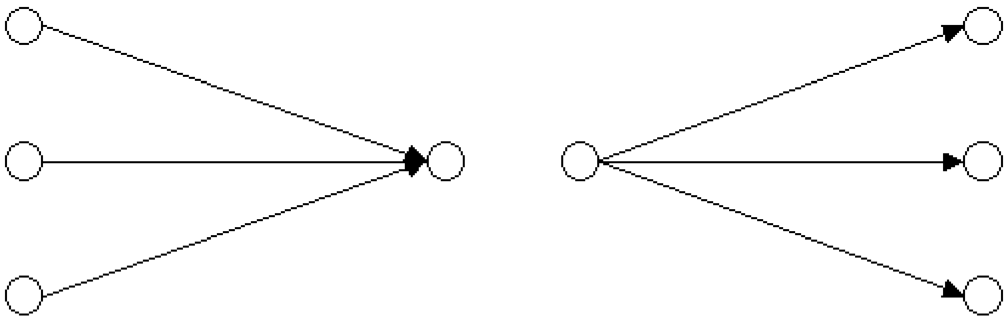


En los casos en que haya necesidad de indicar que una actividad tiene una interrelación o continuación con otra se dibujará entre ambas una línea punteada, llamada liga o actividad ficticia, que tiene una duración de cero.



La liga puede representar en algunas ocasiones un tiempo de espera para poder iniciar la actividad siguiente.

Aclaremos que varias actividades pueden terminar en un evento o partir de un mismo evento, como se muestra a continuación.

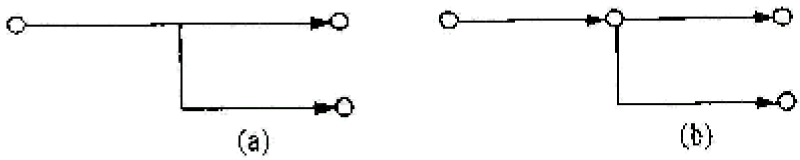


Al construir la red, debe tenerse en cuenta que:

1. Dos actividades distintas no pueden partir de un mismo evento y llegar a un mismo evento. Esto produce confusión de tiempo y de continuidad. Debe abrirse el evento inicial o el evento final en dos eventos y unirlos con una liga.

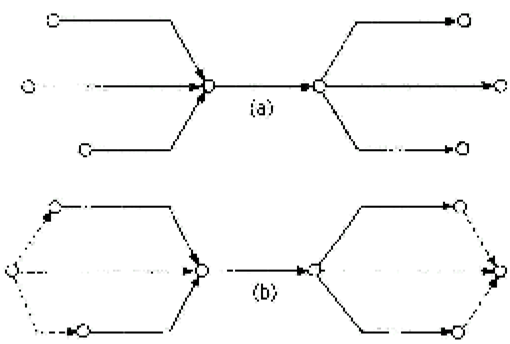
(a) Incorrecto (b) Correcto.

2. No se permite iniciar una actividad desde una parte intermedia de otra actividad. Toda actividad debe comenzar invariablemente en un evento y terminar en otro. Cuando se presenta este caso, a la actividad base u original se le divide dos actividades, con sus respectivos eventos inicial y final, por ejemplo basándose en porcentajes u otros criterios, y se derivan de ellos las actividades correspondientes.

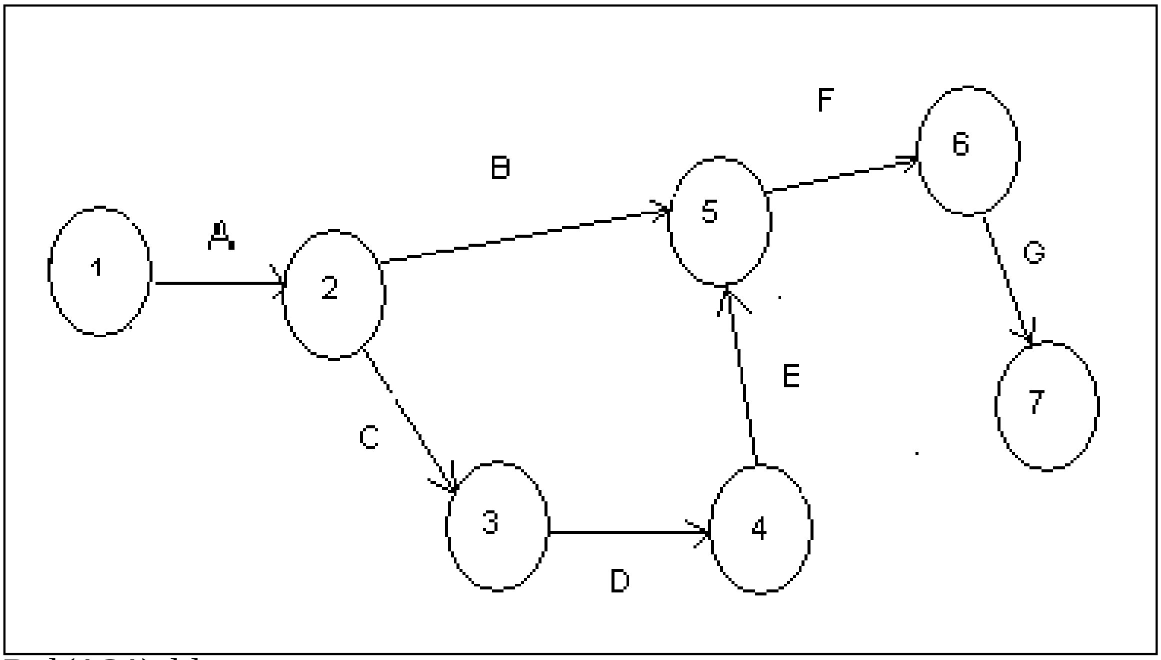


(a) Incorrecto (b) Correcto.

3. No deben dejarse eventos sueltos al terminar la red. Todos ellos deben relacionarse con el evento inicial o con el evento final.



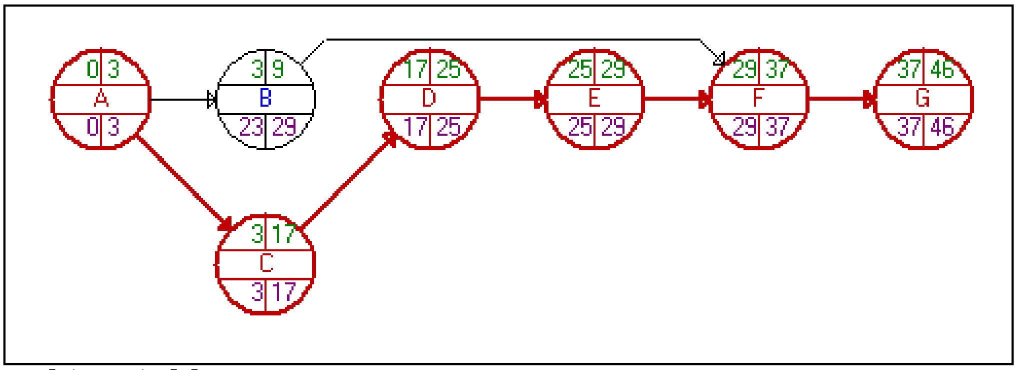
Con todo lo explicado hasta aquí se puede conformar la red del proyecto, la cual se puede observar en la figura que sigue, según la representación (AOA), y en la que se puede comprobar que las actividades mantienen el orden de consecución descrito en las matrices y respetan las relaciones dictadas anteriormente.



Red (AOA) del proyecto

Otra forma de construir la red del proyecto es asignando un nodo a cada actividad, y conectando estos con flechas, según el orden en que deben ser ejecutadas. A este tipo de representación se le conoce como (Red con Actividades en los Nodos, conocida por las siglas AON, de su nominación en inglés Activities On Nodes)

La red del proyecto según la representación AON queda como sigue:



Red (AON) del proyecto

4.3.- Programación

La aplicación del método PERT/CPM deberá proporcionar un programa, especificando el tiempo de inicio y terminación de cada una de las actividades. El diagrama de flechas o red del proyecto constituye el paso preliminar y necesario para el logro de tal meta. Debido a la interrelación de las actividades, el cálculo de los tiempos de inicio y terminación por actividad requiere cálculos especiales. Estos cálculos se pueden ejecutar directamente en el diagrama de flechas o en una tabla auxiliar conocida como *tabla frontera*. El resultado final es clasificar las actividades en *críticas* y *no-críticas*. Se dice que una actividad es crítica si una demora en su comienzo o ejecución, causará una demora en la terminación del proyecto total.
De esta forma se conoce como *ruta crítica* a una cadena de actividades crítica, las cuales conectan los eventos inicial y final del proyecto. El procedimiento para el cálculo de la ruta crítica consta de dos etapas: *cálculos hacia adelante* y *cálculos hacia atrás*.
En el primer caso los cálculos comienzan en el nodo de inicio se mueven hacia el nodo final, mientras que en el segundo, ocurre todo lo contrario, se inician en el nodo final y se mueven hasta el nodo inicial. Para realizar estos cálculos se utilizará la siguiente nomenclatura. (Entre paréntesis se ha escrito la nomenclatura en inglés, para identificar los mismos en los resultados que ofrece el software utilizado en los cálculos, que en este caso es el WinQSB).

TIP(k) : Tiempo de Inicio más Próximo para el nodo k.(Earliest Start)

TIT(k) : Tiempo de Inicio más Tardío para el nodo k. (Latest Start)

TTP(i,k): Tiempo de Terminación más Próximo para la actividad que inicia en i y termina en k. (Earliest Finish)

TTT(i,k): Tiempo de Terminación más Tardío para la actividad que inicia en i y termina en k. (Latest Finish)

D(i,k) : Duración de la actividad que inicia en el nodo i y termina en el nodo k. (Activity Time)

Fórmulas para el cálculos hacia adelante:

TIP(0) = 0

TIP(k) = max { TIP(i) + D(i,k) }

TTP(i,k) = TIP(i) + D(i,k)

Fórmulas para el cálculos hacia atrás:

TTT(Nodo Final) = TIP(Nodo Final)

TTT(k) = Min { TTT(i) - D(i,k) }

TIT(,i,k) = TTT(k) - D(i,k)

La realización de los cálculos, hacia delante primero, y luego hacia atrás, se hacían de forma manual, lo cual constituía una de las principales limitaciones de estas técnicas, al tener que ejecutarse grandes cantidades de cálculos corriendo el peligro de cometer errores de cálculo o de secuencia. Sin embargo con el avance de la computación y el surgimiento de softwares especializados en la solución de este tipo de problemas este problema queda resuelto, presentando estos softwares no solo los resultados de los cálculos para los tiempos límites de cada actividad, sino también representaciones gráficas y otros análisis relacionados con los costos y la asignación eficiente de los recursos a las actividades que compiten por estos. Entre los softwares más conocidos y potentes especializados en este tema se cuentan el Microsoft Project y el Superproject, existiendo además otros paquetes de programas de la Investigación de Operaciones como el WinQSB, el Strom y otros que también contienen múltiples opciones para el tratamiento de los problemas de programación de proyectos.

En tabla que sigue (tomada de los resultados del WinQSB) se ofrecen los valores resultantes para cada una de las magnitudes descritas arriba. A esta tabla se le conoce con el nombre de tabla frontera, pues en ella aparecen los tiempos límites (fronteras) entre los cuales debe ser realizada cada actividad para que el proyecto se realice en el tiempo crítico determinado.

11-26-2003 00:05:55	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	Yes	3	0	3	0	3	0
2	B	no	6	3	9	23	29	20
3	C	Yes	14	3	17	3	17	0
4	D	Yes	8	17	25	17	25	0
5	E	Yes	4	25	29	25	29	0
6	F	Yes	8	29	37	29	37	0
7	G	Yes	9	37	46	37	46	0
	Project	Completion	Time	=	46	dias		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

El resultado de la tabla muestra que las actividades A-C-D-E-F-G conforman la ruta crítica del proyecto y determinan el tiempo de ejecución del mismo, el cual se estima sea de 46 días. Cada una de las actividades críticas del proyecto debe ejecutarse en el tiempo programado, que va desde el TIP (Earliest Start) hasta el TTT (Latest Finish) para que el proyecto se pueda terminar en el tiempo programado. En el caso de las actividades no críticas (Actividad B en nuestro ejemplo), estas disponen de cierta holgura o tiempo libre para decidir en que momento ejecutarse, siempre guardando la condición de que las mismas se realicen entre los tiempos señalados arriba. Naturalmente, una actividad crítica debe tener holgura cero.

Determinación de las holguras

A continuación de la determinación de la ruta crítica deben calcularse las holguras de las actividades no críticas. Existen dos tipos de holguras, *la holgura total* (HT) y *la holgura libre* (HL), las cuales se explican como sigue. Si la holgura total es mayor que la holgura libre, el inicio de la actividad no crítica se puede demorar en relación con su TIP cuando más en el monto de la HL, de lo contrario se afecta la programación de las actividades que le continúan. En caso contrario, HT=HL, la no crítica se puede programar en cualquier momento entre su TIP y su TTT. Los resultados del WinQSB muestran en la última columna la holgura total de la actividad B, y como solo existe una sola actividad no crítica, se tiene que HT=HL.

Programas de tiempo y costo

En la práctica los gerentes de proyectos están tan preocupados por los costos como por el tiempo de terminación de un proyecto. Es por ello que se han desarrollado los modelos de tiempo y costo, los cuales son una extensión del PERT/CPM tratan de obtener un programa de costo mínimo para todo el proyecto y así poder controlar los gastos de presupuestos durante su ejecución.

La suposición básica en estos programas es que existe una relación directa entre el tiempo de terminación de cada actividad y el costo de un proyecto. Por una parte, cuesta terminar más rápido de lo previsto una actividad, y por la otra, cuesta sostener o alargar la terminación de un proyecto. Se denominan *costos directos de actividades* a los costos relacionados con hacer más expeditas las actividades, y se añaden al costo directo del proyecto. Algunos de estos costos tienen que ver con los trabajadores – pago de horas extras, contratación de más trabajadores y su transferencia desde otros lugares – mientras que otros de estos costos se relacionan con los recursos – compra o alquiler de equipos adicionales o más eficientes, exigencias de apoyo adicional a las instalaciones, etc - .

Los costos relacionados con sostener o alargar la terminación del proyecto se denominan *costos indirectos de proyecto*: gastos generales, instalaciones y costos de oportunidad de recursos, costos por multas o pagos de incentivos, etc. Puesto que los costos directos de actividad y los costos indirectos de proyectos son opuestos, dependientes del tiempo, el problema de programación se reduce a encontrar la duración que minimice su suma. El procedimiento para determinar este tiempo consiste de cinco pasos.

Paso 1: Preparar una tabla con la siguiente información para cada actividad: tiempo normal de ejecución (TN), costo normal asociado al tiempo normal (CN), tiempo mínimo de ejecución (TM), costo asociado a cada tiempo mínimo de ejecución (CM).

Paso 2: Determinar el costo por unidad de tiempo para acelerar cada actividad. Esto es $CUT = \dfrac{CM - CN}{TN - TM}$.

Paso 3: Calcular la ruta crítica, primero en el tiempo normal y luego para el tiempo mínimo.

Paso 4: Determinar la ruta crítica de mínimo costo para cada uno de los tiempos de terminación del proyecto que van entre el tiempo mínimo y el tiempo de conclusión normal.

Paso 5: Hacer el gráfico de las curvas de costo total, incluyendo en el los de costo directo e indirecto, y encontrar en él el programa de costo mínimo.

Veamos como ejecutar este procedimiento en el ejemplo que hemos trabajado.

Tabla con los valores estimados de la duración normal y mínima por actividad y sus costos asociados, a partir de los cuales, y según el paso 2, se ha calculado el costo por unidad de tiempo (CUT).

ACTIVIDAD	DURACIÓN NORMAL (días)	COSTO NORMAL ($)	DURACIÓN MÍNIMA (días)	COSTO ASOCIADO POR DURACION MÍNMA ($)	COSTO POR UNIDAD DE TIEMPO (CUT) ($)
A	3	90	2	130	40
B	6	60	4	70	5
C	14	112	10	160	12
D	8	80	5	140	20
E	4	60	3	300	240
F	8	64	6	100	18
G	9	81	8	115	34

Partiendo de que se conoce la duración del proyecto en tiempo normal (46 días) se calculó la duración del proyacto para los tiempos mínimos permisibles, resultando que este es 34 días (paso 3). Luego se resuelve el problema para 45 días, 44 días, …. , hasta 35 días, y se calcula el incremento del costo que esta contracción del proyecto implica. Ejemplo: Para reducir la duración del proyecto a 45 días se debe reducir la actividad crítica C en un día, que es la de menor CUT, con lo cual el incremento del costo será de $12.oo. No se reduce la actividad B porque no es crítica, por lo cual ella no incide en la duración total del proyecto. Los resultados resumidos (paso-4) para cada uno de los posibles tiempos de duración del proyecto (entre 34 y 46 días) se ofrece el la tabla siguiente.

Tiempo de Duración	Ruta Crítica	Actividades a reducir	Costo total del proyecto
46 días	A-C-D-E-F-G	-	$547.oo
45 días	A-C-D-E-F-G	C (un día) + $12.oo	$559.oo

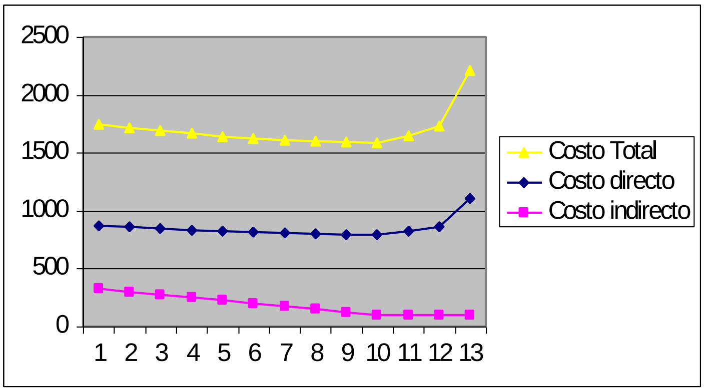
44 días	A-C-D-E-F-G	C (un día) + $12.oo	$571.oo
43 días	A-C-D-E-F-G	C (un día) + $12.oo	$583.oo
42 días	A-C-D-E-F-G	C (un día) + $12.oo	$595.oo
41 días	A-C-D-E-F-G	F (un día) + $18.oo	$613.oo
40 días	A-C-D-E-F-G	F (un día) + $18.oo	$631.oo
39 días	A-C-D-E-F-G	D (un día) + $20.oo	$651.oo
38 días	A-C-D-E-F-G	D (un día) + $20.oo	$671.oo
37 días	A-C-D-E-F-G	D (un día) + $20.oo	$691.oo
36 días	A-C-D-E-F-G	G (un día) + $34.oo	$725.oo
35 días	A-C-D-E-F-G	A (un día) + $40.oo	$765.oo
34 días	A-C-D-E-F-G	D (un día)+$240.oo	$1005.oo

A partir de los costos calculados y suponiendo además que los costos indirectos del proyecto se mantiene constantes en $100.oo durante los 38 primeros días, experimentando luego un incremento de $25.oo por cada día, se obtiene el siguiente gráfico (según paso-5) de los costos para cada uno de las posibles duraciones del proyecto.

En el gráfico, los valores del eje X (días) indican cuantos días se va ha contraer el proyecto.

Como resultado del análisis se concluye que el costo total mínimo para la conclusión del proyecto es de $791.oo y este se alcanza con una duración de 37 días, por lo tanto sería aconsejable trabajr en la reducción de las actividades C, F y D , según resultados del paso-4.

.



Finalmente se debe comentar que sólo se ha tenido en cuenta el análisis de relaciones temporales entre las actividades del proyecto. Sin embargo, hay que tener en cuenta además los **recursos**, su consumo y sus limitaciones. El proceso, por lo tanto, ante la programación sería el siguiente:

- Programación de duración con costo mínimo sin tener en cuenta los recursos.
- Se estudia si moviendo las actividades no críticas dentro del margen que representan sus holguras, se puede conseguir el objetivo perseguido en relación con los recursos.
- Si no es posible, aplicar alguna técnicas para programar bajo limitación de recursos. Por ejemplo la programación lineal.

4.4.- Ejecución y Control del Proyecto

Representa el conjunto de tareas y actividades que suponen la realización propiamente dicha del proyecto, la ejecución de la obra de que se trate. Responde, ante todo, a las características técnicas específicas de cada tipo de proyecto y supone poner en juego y gestionar los recursos en la forma adecuada para desarrollar la obra en cuestión. Cada tipo de proyecto responde en este punto a su tecnología propia, que es generalmente bien conocida por los técnicos en la materia.

En la práctica ocurre que raras veces se cumple el cronograma de trabajo tal y como queda diseñado en el programa PERT/CPM, pues muy a menudo los trabajos se demoran o se aceleran fuera de lo previsto. Esto naturalmente depende de las condiciones reales de trabajo. Tan pronto como ocurren tales disturbios en el plan original, puede hacerse necesario desarrollar un nuevo programa de tiempo para la porción restante del proyecto. Es importante seguir la ejecución del proyecto sobre el diagrama de flechas y sobre los gráficos construidos. También resulta importante consultar en cada momento el programa de tiempo, para verificar si cada actividad se está ejecutando en el tiempo programado.

Aprobación del proyecto

Cuando las personas que intervienen en la ejecución del proyecto están plenamente satisfechas con los tiempos, secuencias, costos y distribución de los recursos humanos y materiales, debe aprobarse el mismo. En este momento debe quedar terminado el programa de trabajo con lo siguiente:

a) La lista de actividades
b) El presupuesto general
c) Las especificaciones de actividad
d) El señalamiento de puestos y responsabilidades y organización de mando
e) La red de actividades
f) Las condiciones limitantes de trabajo
g) Los procedimientos de trabajo
h) El equipo necesario
i) Los planos y esquema de itinerario y de horario
j) Las matrices de información

Órdenes de trabajo

Las órdenes de trabajo se elaboran con base a las especificaciones de actividad, condiciones limitantes, procedimientos de trabajo, equipo necesario y esquemas de proceso, itinerario y horario, así como ayuda de las matrices de información.

En ellas deben darse las indicaciones precisas para que la actividad se realice por la persona o grupo de personas responsables, de acuerdo con los planos generales, en el tiempo, en la cantidad y de la calidad deseada.

EJECUCIÓN Y CONTROL DEL PROYECTO

Proyecto ____________ Proceso ____________

Actividad ____________ Responsable ____________

Iniciación { Temprana ____________
Tardía ____________

Terminación { Temprana ____________
Tardía ____________

Tiempo de duración ______ % avance por día ______

Holguras; { Total ______ Libre ______ Independiente ______
% ______ % ______ % ______

Compresión: días ______ % ______

Instrucciones:

Presupuesto:

Mano de obra: (P) (R)

(P) (R)

P ___ R ____________ $ P ______ $ R ______

___ ☐ ____________ $ ______ $ ______

Materiales:

___ ☐ ____________ ______ ______

___ ☐ ____________ ______ ______

Otros gastos:

___ ☐ ____________ ______ ______

___ ☐ ____________ ______ ______

Total programado $ ______

Total realizado $ ______

Lugar: ____________

Fecha: ____________

Preparado por ______ Revisado por ______ Autorizado por ______

Gráficas de control

En el control del proyecto es necesario determinar con precisión tanto el avance de cada una de las actividades como el que corresponde al proyecto total. Una forma efectiva de control es el uso de gráficas que permiten vigilar visualmente el desarrollo de las actividades, y al efecto se utilizarán dos clases de gráficas (la gráfica de avance y la gráfica de rendimiento), con las cuales se puede ir controlando día a día como avanza el proyecto, en cuanto al porciento de ejecución real contra el programado, y permite tener una media de cuán atrasado o adelantado se comporta el cumplimiento del programa o plan calendario.

EJECUCIÓN Y CONTROL DE LOS PROCESOS

En virtud de que cada uno de los procesos componentes del proyecto es conducido por distintas personas que tienen la responsabilidad de iniciar y terminar sus actividades a tiempo, es necesario que tengan su gráfica de control en donde puedan observar tanto el avance de su proceso como su rendimiento. Esta gráfica es similar a la de rendimiento usada en el proyecto, pero reducida a los procesos con los cuales cada uno tiene responsabilidad.

Se puede agregar en la parte superior un esquema de las secuencias de las actividades mostrando en dónde se encuentran las holguras totales, para que el responsable del proceso tenga una idea precisa de sus disponibilidades de tiempo.

PROCEDIMIENTO DE EVALUACIÓN

Cuando las actividades se adelantan en su ejecución a las fechas programadas, generalmente no modifican sus costos directos y en cambio sí disminuyen los costos indirectos. En términos generales podemos decir que benefician los resultados de los presupuestos al terminar las actividades antes de la fecha programada. También es sencilla la decisión para adelantar la actividad siguiente a aquella terminada con anticipación y sólo debe investigarse la posibilidad de hacerlo en cuanto a tener en ese momento los recursos humanos y materiales que se requieren.

Tratándose de retardos, la evaluación y la decisión no son tan sencillas porque, por regla general, se modifican los costos, se trastornan las secuencias y se pierde la disponibilidad del tiempo, por lo que hay necesidad de tener un procedimiento de evaluación que permita determinar todas las consecuencias de un retraso en una actividad del proyecto.

Los retrasos deben ser absorbidos por las holguras y en el caso de que no existan éstas, aquellos deben neutralizarse por medio de compresiones en las actividades.

ABSORCIÓN POR HOLGURA

Multiplicar el tiempo programado de ejecución e por el tanto por uno de la cantidad de trabajo que falte por realizar. El resultado es el tiempo que se requiere para terminar normalmente con la actividad. Al tiempo anterior se le resta el tiempo disponible y la diferencia representa el retraso, el cual debe ser absorbido por la holgura total. Si no es posible esto, debe procederse como sigue:

ABSORCIÓN POR COMPRESIÓN

Se multiplica el tiempo óptimo o por lo tanto por uno del volumen del trabajo pendiente de ejecutar. El producto representa el tiempo que se requiere para terminar la actividad en condiciones óptimas es decir, con la máxima aceleración. Si este tiempo es menor que el tiempo disponible, significa que no se retrasará el proyecto, pero si es mayor, la diferencia será la cantidad de tiempo que retrasará el proyecto, excepto que se pueda comprimir una actividad posterior a la actividad retrasada dentro del proceso.

4.5.- Problemas Resueltos

Problema #1

A continuación se ofrece la lista de actividades que componen un proyecto de diseño de una computadora.

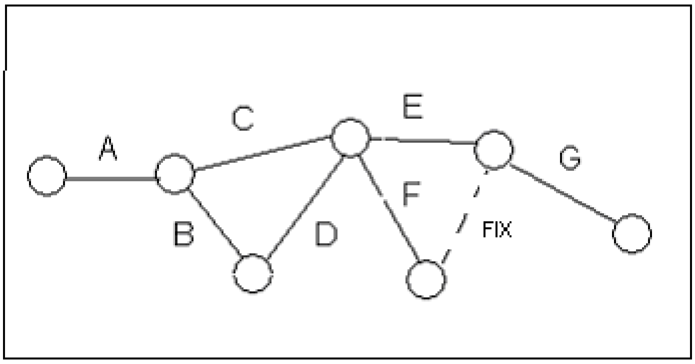
Actividad	Designación	Antecesor Inmediato	Tiempo Estimado (en semanas)
Diseño	A	-	21
Construcción del prototipo	B	A	5
Evaluación de equipos	C	A	7
Prueba del prototipo	D	B	2
Elaboración del informe de equipo	E	C , D	5
Elaboración del informe de métodos	F	C , D	8
Elaboración del informe final	G	E , F	2

Realice un análisis detallado del proyecto anterior siguiendo para ello la metodología dada en este capítulo.

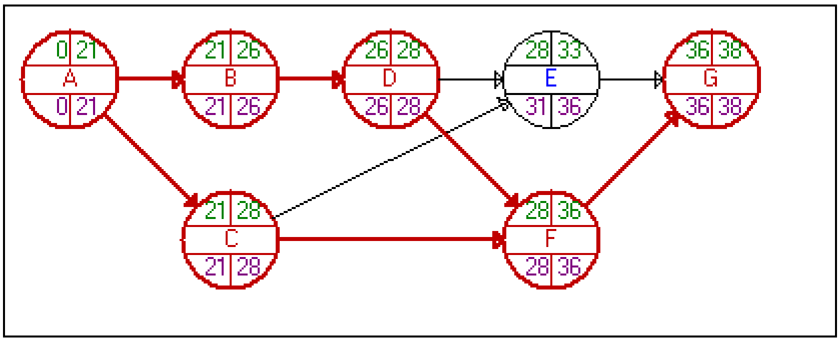
SOLUCIÓN

Según la metodología indicada en este capítulo, el estudio de todo proyecto se inicia por la fase de planeación. En la formulación del problema anterior ya están cumplidas las etapas de construcción del listado de actividades, matriz de precedencia, matriz de tiempo y matriz de información, restando solo la construcción de la red del proyecto para concluir la primera fase.

Para ello nos auxiliamos de la matriz de información que nos brinda el problema. En el gráfico (AOA) la actividad nombrada FIX es un arco ficticio, que no tiene duración y solo se introduce para hacer cumplir la precedencia, respetando las reglas de construcción de la red expuestas en el epígrafe de planeación. De esta forma se evita que las actividades E y F tengan el mismo nodo de inicio y el mismo nodo final.



Red (AOA) del Proyecto



Red (AON) del Proyecto

Para completar la fase de programación se ha utilizado el programa WinQSB, con ayuda del cual se han obtenido los siguientes resultados.

Tabla Frontera

12-09-2003 21:30:01	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0
5	E	no	5	28	33	31	36	3
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0
	Project	Completion	Time	=	38	weeks		
	Number of	Critical	Path(s)	=	2			

Con lo cual quedan determinadas dos rutas críticas. La primera formada por las actividades A-B-D-F-G y la segunda por A-C-F-G. Solo la actividad E no resulta crítica, la cual posee una holgura de 3 semanas y el tiempo estimado para el completamiento del proyecto es de 38 semanas.

Problema # 2

Suponga que en el proyecto anterior la duración de las actividades no es conocida, sino que se dispone solo de tres estimaciones de tiempo para cada una de ellas: Estas son la duración optimista o más corta posible, la duración pesimista o más demorada y la más esperada.

SOLUCIÖN

En ese caso estamos en presencia de un problema con tiempos aleatorios, con lo cual se hace necesario determinar el tiempo esperado y la desviación esperada para cada actividad según las fórmulas:

$$T_e(Z)=\frac{a+4m+b}{6}$$

$$\sigma(Z)=\frac{b-a}{6}$$

Con lo cual tenemos la siguiente matriz de información.

Actividad	Antecesor Inmediato	Tiempo Optimista (a)	Tiempo más Esperado (m)	Tiempo Pesimista (b)	Tiempo Estimado (t)	Varianza σ^2
A	-	10	22	28	21	9
B	A	4	4	10	5	1
C	A	4	6	14	7	2.77
D	B	1	2	3	2	0.11
E	C, D	1	5	9	5	1.77
F	C, D	7	8	9	8	0.11
G	E, F	2	2	2	2	0

Con ayuda de esta matriz de información se construye la red del proyecto, que es la misma del caso anterior, pues no ha cambiado el orden de precedencia, y se resuelve el problema con ayuda del WinQSB.

12-09-2003 22:00:31	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project	Completion	Time	=	38	weeks				
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

Con lo cual queda aparentemente el mismo resultado que en el problema anterior. Sin embargo, aquí 38 semanas es solo el tiempo esperado para completamiento del proyecto.

Una característica importante de usar las tres estimaciones de tiempo es que permite al analizador evaluar el efecto de la incertidumbre del tiempo de terminación del proyecto. Con este fin se debe calcular la suma de las varianzas de todas las actividades críticas ($\sum\sigma^2$), calcule el valor de Z en la siguiente fórmula de transformación $Z=\dfrac{D-Te}{\sqrt{\sum\sigma^2}}$,que es el número de desviaciones estándar de la fecha deseada del proyecto con respecto a la fecha de terminación esperada, y donde (D) es la fecha de terminación deseada para el proyecto y (Te) Fecha de terminación mínima esperada para el proyecto. Con este valor calcule la probabilidad de cumplir con la fecha deseada de culminación del proyecto.

En este caso, suponga que la gerencia ha solicitado la probabilidad de terminar el proyecto en 35 semanas.

Así los cálculos indican:

$$Z = \frac{35 - 38}{\sqrt{11.89}} = -0.87$$

Y al consultar en una tabla de la distribución normal estándar resulta que este valor Z = -0.87 indica una probabilidad de 0.19, lo cual significa que el proyecto solo tiene una probabilidad de 0.19 de terminarse en 35 semanas.

4.6.- Problemas Propuestos

Problema #1
Para la construcción de una casa se ha determinado una lista de actividades a cumplimentarse para dar terminación completa a la vivienda, estimándose además el número de días que cada una de ellas debe tardar en completarse y la relación de precedencia entre ellas como se muestra en la siguiente tabla.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	PRECEDENTES INMEDIATOS	DURACIÓN (días)
A	Limpieza del lugar	-	1
B	Realizar excavaciones	A	2
C	Llevar materiales al lugar	-	3
D	Colocación de cimientos	B , C	2
E	Plomería exterior	B , C	3
F	Estructura metálica y paredes	D	10
G	Colocar techo	F	8
H	Cableado eléctrico	G	1
I	Plomería interior	E , F	3
J	Instalar puertas y ventanas	G	4
K	Recubrimiento de paredes	H , I , J	5
L	Colocar piso	K	6
M	Pintura	L	2
N	Retirar materiales sobrantes	L	1
O	Jardines y exteriores	N	2
P	Limpieza de la casa	M	1

A partir de la información facilitada construya la red del proyecto, determine los tiempos de inicio más próximo y de terminación más tardíos para cada actividad, la holgura de cada un de ellas e identifique la ruta crítica.

Problema #2
La preparación técnica y la fabricación de un producto corresponde a una nueva tecnología requiere de un alto nivel de seguridad. A continuación se muestra la información correspondiente a la tarea objeto de estudio.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	ANTECESOR	DURACIÓN (días)
A	Hacer lista de piezas	--	2
B	Prepara hoja de mov. de materiales	A	3
C	Pedido y acopio de materiales	A	4
D	Confeccionar el programa	A	3
E	Confeccionar las piezas del S.E·#1	C	3
F	Fabricar las piezas del S.E·#2	C	2
G	Armar subensamble S.E#1	E	2
H	Armar subensamble S.E#2	F	4
I	Ensamblaje final	G,H	1

Construya la red del proyecto y determine la ruta crítica.

¿Cuál es la fecha más tardía permisible de actividad G que no afecta el ensamblaje final?

Interprete los elementos comprendidos en la solución del problema.

Problema #3
A continuación se muestra un parte del proyecto de preparación de la producción y fabricación de un nuevo artículo en una empresa.

ACTIVIDAD	ANTECESOR	DURACIÓN (días)
A	--	4
B	--	4
C	--	3
D	A	4
E	A,B	5
F	A,B	5
G	C,E	3
H	D,F	3

Construya la red del proyecto y determine la ruta crítica.
¿Cuál es la fecha más tardía permisible de actividad D que no afecta el ensamblaje final?
Interprete los elementos comprendidos en la solución del problema.

Problema #4
La preparación técnica y la fabricación de un producto corresponde a una nueva tecnología requiere de un alto nivel de seguridad. A continuación se muestra la información correspondiente a la tarea objeto de estudio.

ACTIVIDAD	ANTECESOR	DURACIÓN NORMAL (DÍAS)	COSTO NORMAL ($)	DURACIÓN MÍNIMA (DÍAS)	COSTO MÁXIMO ($)
A	--	2	80	2	80
B	--	3	100	2	150
C	--	4	90	2	200
D	A,B	3	120	2	180
E	B	3	280	3	280
F	B	2	220	1	300
G	B,C	2	160	2	160
H	D,E	4	190	3	250

Construya la red del proyecto, determine la ruta crítica y la duración del proyecto.

¿Cuál es la fecha más tardía permisible de actividad G que no afecta el ensamblaje final?
Determine qué actividades deben ser realizadas en menor tiempo, y en cuánto tiempo deben realizarse estas para recortar la duración del proyecto en 2 días a un costo mínimo adicional. Interprete los elementos comprendidos en la solución del problema.

Problema #5
A continuación se muestra un parte del proyecto de preparación de la producción y fabricación de un nuevo artículo en una empresa.

ACTIVIDAD	ANTECESOR	DURACIÓN NORMAL (días)	COSTO NORMAL ($)	DURACIÓN MÍNIMA (días)	COSTO MÁXIMO ($)
A	--	2	30	2	30
B	--	3	45	2	90
C	B	2	50	1	80
D	A,B	6	35	4	100
E	A,B	5	90	4	130
F	C	2	20	2	20
G	A,B	2	40	1	80
H	D,E	3	60	2	120

Construya la red del proyecto y determine la ruta crítica.

¿Cuál es la fecha más tardía permisible de actividad G que no afecta el ensamblaje final?

Realice el análisis correspondiente para contraer el proyecto de forma tal que la terminación del mismo se adelante en dos días a la fecha calculada y realizando este adelanto a un costo mínimo. Interprete los elementos comprendidos en la solución del problema.

Problema #6

A continuación se muestra un parte del proyecto de preparación de la producción y fabricación de un nuevo artículo en una empresa. Se ha solicitado a los proyectistas analizar la culminación del proyecto en 35 días.

ACTIVIDAD	ANTECESOR	DURACIÓN (días)		
		Mínimo	Máximo	Moda
A	--	3	7	5
B	A	3	9	5
C	A	0	4	2
D	B	2	6	5
E	B	0	2	1
F	C,D	2	5	3
G	C,E	6	10	7
H	D,E	2	3	2
I	E,F	1	5	2

Construya la red del proyecto y determine la ruta crítica.

Interprete los elementos comprendidos en la solución del problema.

Estime de forma puntual y por intervalo la duración esperada del proyecto.

¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto termine en el tiempo previsto?

Capítulo 5. Administración y Control de Inventarios.

5.1 Conceptos básicos de la Teoría de Inventarios:

La tarea de los inventarios surge, cuando es necesario crear reservas de recursos materiales o bienes de consumo con el objetivo de cumplir las demandas en el período establecido. Entre otros aspectos los más allegados a los problemas de inventario son, la demanda y las restricciones:

La demanda puede ser:

Determinística: Previsible con cierta precisión. Aleatorio, pero estadísticamente estables.

Aleatoria: Pero estadísticamente inestable. Ejemplo: Varía con las estaciones del año.

Desconocida

Las restricciones en los inventarios pueden ser:

De interacciones entre los diversos productos.

De limitaciones de los medios (volumen, peso, tiempo de operación, disponibilidades financieras, etc.).

Tipos de Modelos de Inventario

Los modelos de inventarios van desde aquellos cuyo aparato matemático va desde simples modelos de cálculo de diferencias hasta complejos algoritmos y otros de programación matemática.

El carácter de estos modelos depende del carácter de la demanda tal y como vimos anteriormente.

Demanda:

Determinística: Estática y Dinámica: Modelos simples y modelos complejos.

Probabilística: Estacionaria y no estacionaria: Modelos simples y modelos complejos.

Estática: La intensidad del consumo se mantiene invariante temporalmente.

Dinámica: Cuando la demanda es conocida pero cambia en dependencia del tiempo.

Estacionaria: Cuando la función de densidad probabilística de la demanda no cambia con el tiempo.

No estacionaria: Cuando la función de densidad probabilística de la demanda cambia con el tiempo.

Los problemas de inventarios se presentan bajo la forma de fenómenos de espera de una naturaleza particular. Cualquier problema de inventarios incluye:

- Una ***demanda*** de ciertos artículos que, en general, es aleatoria siendo una función del tiempo, pero que también puede conocerse y determinarse.
- La ***existencia de un inventario*** de esos artículos para satisfacer la demanda; este inventario se agota y debe ser reaprovisionado o renovado. El reaprovisionamiento puede ser continuo, periódico o inclusive realizarse a intervalos cualesquiera.

- ***Costos*** asociados a estas operaciones, inversiones, depreciaciones, seguros, riesgos diversos y almacenamiento.
- ***Objetivos*** a alcanzar o ***restricciones*** que intervienen en razón de la naturaleza misma del problema.

Para cumplir a tiempo con la demanda, las empresas mantienen con frecuencia existencias a la espera de su venta.

El objeto de la teoría de inventarios es determinar reglas que pueda aplicar la gerencia para reducir al mínimo los costos relacionados con el mantenimiento de existencias y cumplir con la demanda del consumidor. Los modelos de inventario responden a las siguientes preguntas:

¿Cuándo se debe pedir un producto?
¿Cuánto se debe pedir del producto?

Función escalonada. S_i existencia en el tiempo T_i . Dicha función puede ser modelada mediante una recta (mediante la regresión lineal) o una curva que dará una descripción mas adecuada (regresión no lineal).

Desde el punto de vista del cliente, un inventario debe contener tantas unidades como puedan demandarse, y nunca debería quedar fuera de existencia. Los inventarios cuestan dinero, representan el capital inútil. No obstante, existen razones para llevar inventarios. Estas son:

1. Independizar las etapas en producción.
2. Aprovechar los descuentos al comprar grandes cantidades.
3. Atender oportunamente al cliente cuando requiera el producto.

Costos del Modelo de Inventario.

Costos de Orden o Emisión: Estos no dependen del tamaño del pedido o el volumen de la corrida de producción. Son los costos relacionados con la colocación de un pedido o la producción interna de un bien. Comprende, por ejemplo, los costos de preparar la orden, o si el producto se fabrica internamente incluye el costo de la mano de obra y tiempo muerto necesarias para poner a trabajar una máquina para tener una corrida de producción.

Costo Unitario de Compra: Es el costo variable relacionado con la compra de una unidad. Este costo comprende el costo variable de mano de obra, costo variable indirecto y costo de materia prima relacionado con la compra o producción de una unidad.

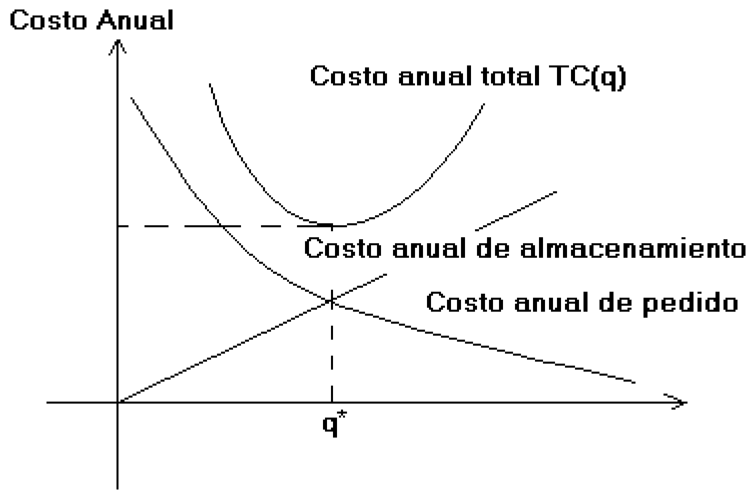
Si los artículos se compran a una unidad externa incluye el costo de transportación.

Costo de Almacenamiento: Es el costo de tener una unidad en inventario durante un lapso unitario (costo/ unidad x tiempo).

Incluye costo de almacenaje, el de seguro, impuestos sobre existencias y el costo debido a la posibilidad de degradación, robo u obsolescencia. También incluye el costo de oportunidad incurrido por sujetar el capital al inventario. Cuando las tasas de interés son altas, la mayor parte de las empresas supone que el costo anual de almacenamiento es de 20 a 40 % del costo inventario de compra. En los modelos clásicos se tiene un costo unitario de almacenamiento, actualmente se toma un % del costo de producción.

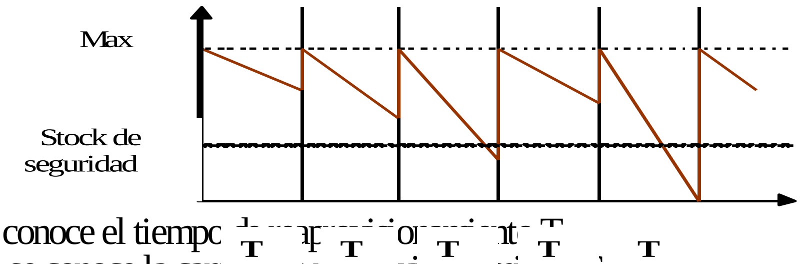
Costo de Agotamiento o Escasez: Cuando se solicita un producto y la demanda no se cumple a tiempo se dice que hay escasez. En algunos casos se permite entregar con fecha posterior. Aquí decimos que las demandas pueden volver a pedirse o que es una demanda acumulada. Si los clientes no aceptan entregas atrasadas se tiene el caso de pérdida de ventas.

Si se permite volver a hacer el pedido, esto provoca en general, un costo adicional, porque en ocasiones hay que recurrir a fuentes no tradicionales de compra aumentándose los costos.



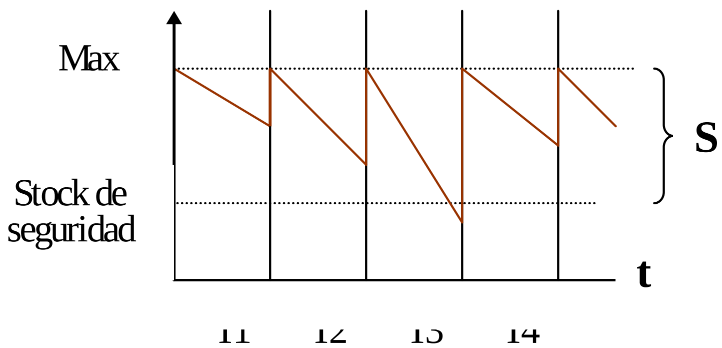
Suponiendo ahora un reaprovisionamiento al inventario se tendrán los siguientes métodos:

Método de los períodos: Suponiendo la demanda aleatoria y el reaprovisionamiento se produce al final de un período constante T. Método cómodo de administrar por su automaticidad, pero presenta el inconveniente de ser costoso al presentar la posibilidad de ruptura.



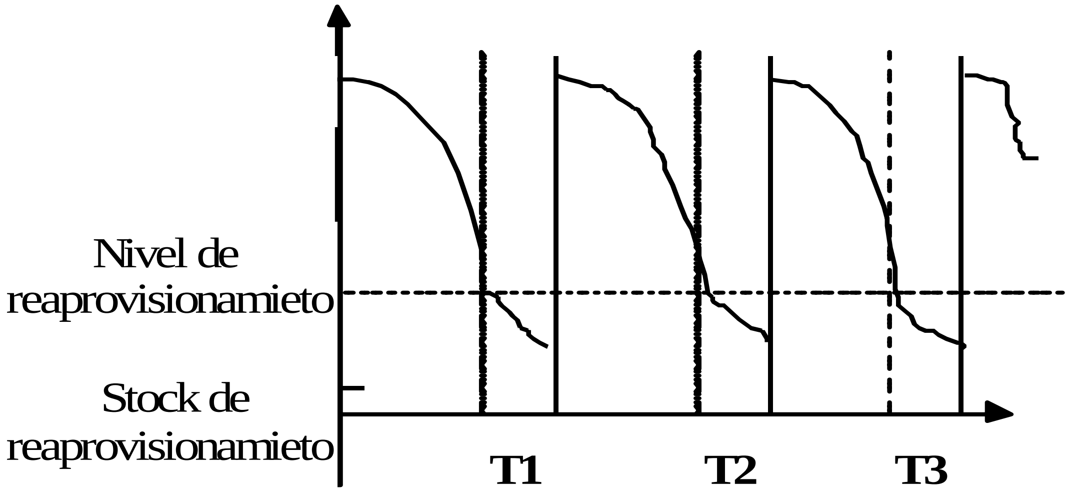
Se conoce el tiempo de reaprovisionamiento T.
No se conoce la cantidad de reaprovisionamiento S.

Método de la relajación: La cantidad a reaprovisionar es constante, pero el tiempo de hacer el reaprovisionamiento es cuando se llegue al **stock** de emergencia.



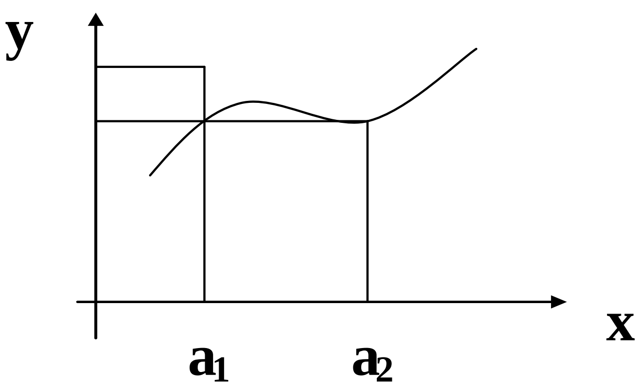
El método es menos costoso por la no ocurrencia de rupturas, pero no se puede sistematizar.
Se conoce la cantidad reaprovisionamiento S.
No se conoce el tiempo de hacer el reaprovisionamiento.
Suponiendo ahora que existan retrasos en los reaprovisionamientos y que este sea constante e igual a T, qué sucederá entonces en cada método.

Método de los períodos: Se conocerá el tiempo de hacer el reaprovisionamiento (T-t) pero no se conocerá la cantidad a pedir en ese tiempo (T-t), se recomendaría hacer una extrapolación para determinar la cantidad S_{T-t}
Método de relajación: Se reconocerá la cantidad a pedir en cada reaprovisionamiento S, pero no se conocerá el tiempo en que deba hacerse este. Se deberá hacer una extrapolación para encontrar T_{i-t}
Existe un tercer método llamado **Método del Nivel de reaprovisionamiento** este consiste en emitir una cantidad constante cuando la existencia llegue a un valor crítico.



Inventario cómodo pero costoso pues no siempre se garantiza la no ruptura.

NOTA: Interpolación y extrapolación son dos aspectos del mismo tipo de procedimiento aunque la extrapolación es inherente a mayor inexactitud y debe tenerse con ella extremas precauciones.



5.2 Modelos de cantidad económica de pedido o modelos EOQ:

$$f(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} f(a_1) + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} f(a_2)$$

Para que esté vigente el EOQ es necesario que: (en un año).

1. La demanda D sea **determinística** y se presente a frecuencia o velocidad constante.
2. Si se hace un pedido de cualquier tamaño (por ejemplo q unidades) se incurre en un costo de pedido y organización K.
3. El tiempo de entrega L para cada pedido es cero.
4. No se permite la escasez.
5. El costo unitario por año de mantener una existencia es h.

Estas consideraciones pueden observarse en el gráfico que sigue posteriormente, donde el intervalo de tiempo t que transcurre entre desde que se hace el pedido hasta que llega es constante en cada período y el tiempo de reaprovisionamiento es igual a cero.

Se denomina ciclo a cualquier intervalo de tiempo que comienza con la llegada de un pedido y que termina en el instante inmediato anterior de hacer el siguiente pedido.

Así, la cantidad a pedir es $q^* = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ generalmente encontrada por el método de optimización del área bajo la curva.

El costo total anual del inventario es

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

donde:

$\frac{KD}{q}$: *costo de orden al año*

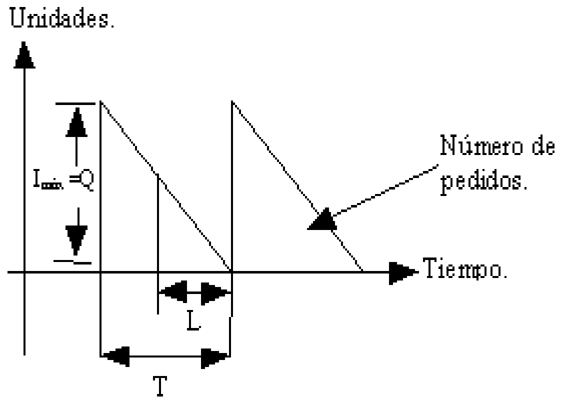
pD : *costo de compra al año*

$\frac{hq}{2}$: *costo de almacenamiento al año*

y q^* minimiza el costo total anual

Cuando el costo de almacenamiento se expresa en términos del valor en dólares del inventario, la fórmula es: $q^* = \left(\frac{2KD}{ph_d}\right)^{1/2}$ donde ph_d es el costo de almacenar una unidad de existencias durante un año.

Si el tiempo de entrega es distinto de cero, debemos considerar el punto de reorden que no es más que "el nivel de inventario al que se hace un pedido" Cuando la demanda durante el tiempo de entrega no es mayor que la cantidad económica de pedido EOQ, el punto de reorden se tiene cuando el nivel de inventario es igual a LD. Entonces el pedido llegará L unidades de tiempo después y al llegar ese pedido, el nivel de existencias será igual a cero.



El modelo EOQ cuando no existe déficit permite determinar valores óptimos para el tamaño del lote y calcula el tiempo óptimo para hacer un nuevo pedido de manera que se minimicen los costos asociados a estas operaciones. Sin embargo, la premisa de demanda determinística acorta significativamente su aplicabilidad a la práctica. Por otra parte, resulta extremadamente complejo calcular el costo unitario de almacenamiento de cada artículo en el almacén, así como el costo por ordenar, es decir, hacer la orden, gastos administrativos, etc, por lo que solo puede establecerse una estimación para tales efectos.

Si se trata de un ***modelo de tasa continua de producción***, se supone que existe una tasa de producción r y la demanda se presenta a una tasa de D unidades por año, aumentando la existencia a una tasa de r-D unidades por año.

Luego:

Tamaño óptimo de la corrida : $\left(\dfrac{2K\ Dr}{h(r-D)}\right)^{1/2}$

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{h(r-D)q}{2r}$$

donde:

$\dfrac{KD}{q}$: costo de orden al año

pD : costo de producción al año

$\dfrac{h(r-D)q}{2r}$: costo de almacenamiento al año

En este modelo, al existir producción, resulta irreal suponer que el reaprovisionamiento sea instantáneo; pero al igual que en el modelo anterior la demanda es determinística.

5.3 Modelos de cantidad económica de pedido con déficit.

En muchos casos de la vida real no se cumple con la demanda a tiempo y se presenta déficit. Supongamos que en este caso, la demanda se acumula y puede satisfacerse en pedido posteriores, así como que el tiempo de entrega es cero. Sea s el costo por la falta de una unidad durante un año, entonces:

q*: Cantidad óptima de pedido.

M*: Nivel máximo de inventario bajo una política óptima de pedidos.

q* - M* : Escasez máxima que se presenta bajo una política óptima de pedidos.

$$q^* = \left(\frac{2KD(h+s)}{hs}\right)^{1/2}$$

$$TC(q, M) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

$\frac{M^2 h}{2q}$: costo de almacenamiento al año

$\frac{(q-M)^2}{2q}$: (déficit)

El modelo EOQ con déficit *contempla la posibilidad de que la demanda no se satisfaga a tiempo, en cuyo caso se incurre en un costo unitario por faltante o déficit y aunque en la práctica resulta muy difícil este en los modelos determinísticos, se ofrece una solución al problema en el caso de los modelos probabilísticos como se verá más adelante.*

Cuando el ***modelo es de tasa continua y se permite escasez***

$$q^* = \left(\frac{2KDr(h+s)}{h(r-D)s}\right)$$

El agotamiento máximo que se presentará en este caso, al que llamaremos S^* viene dado por

$$S^* = \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)}\right)^{1/2}$$

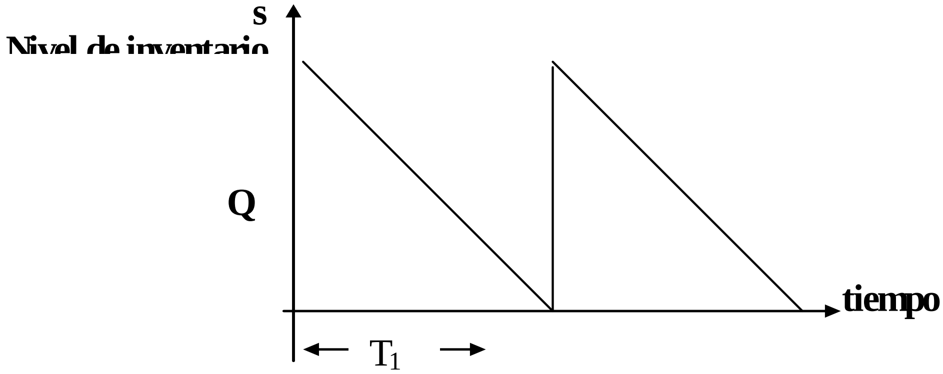
Ejemplo 1

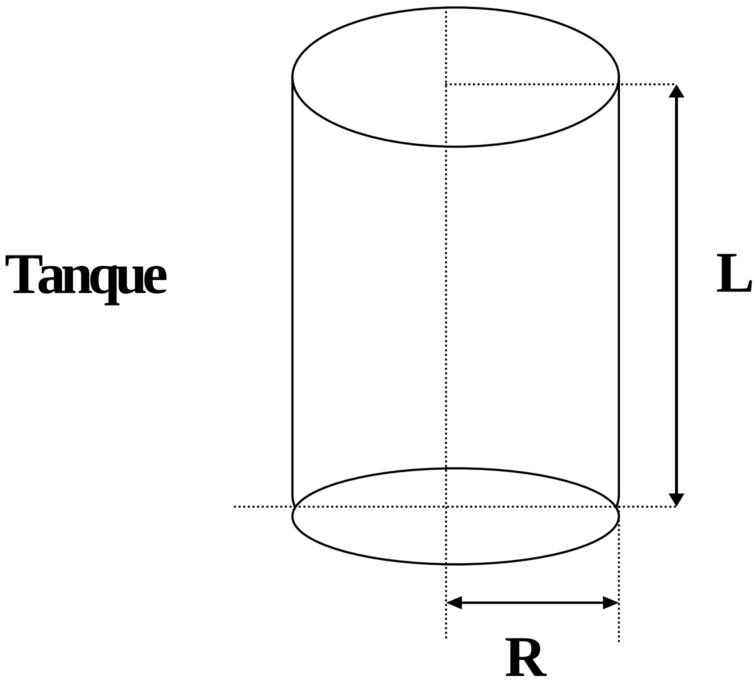
Se quiere estudiar teóricamente el problema relacionado con el almacenamiento de un líquido volátil en una empresa de La Química. El almacén es un tanque vertical de L metros de altura y R metros de radio. El consumo es a razón de D metros cúbicos diarios y se pierde por evaporación una cantidad proporcional a la superficie libre del líquido a razón de S metros cúbicos por metros cuadrados del líquido.

Se quiere encontrar el vapor óptimo del lote, la frecuencia de las órdenes, sí se conoce que Z es el costo de hacer el pedido (pesos) y W es el costo de mantener el líquido en el tanque (pesos) son metros cúbicos pro día, además por la importancia del líquido en la industria no puede haber escasez.

Calcule el costo total por día:

Solución:





$$Demanda =$$
$$a = Consumo + evaporación$$
$$a = D(m^3/d) + \pi R^2 (m^2)\ S\ (m^3/m^2)/d$$
$$a = D + \pi R^2\ S\ (m^3/d)$$

$$C_3 = Z\ pesos$$
$$C_1 = W\ Pesos/m^3/d$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a\,C_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\,(D+\pi R^2 S)Z}{W}} = S^*$$

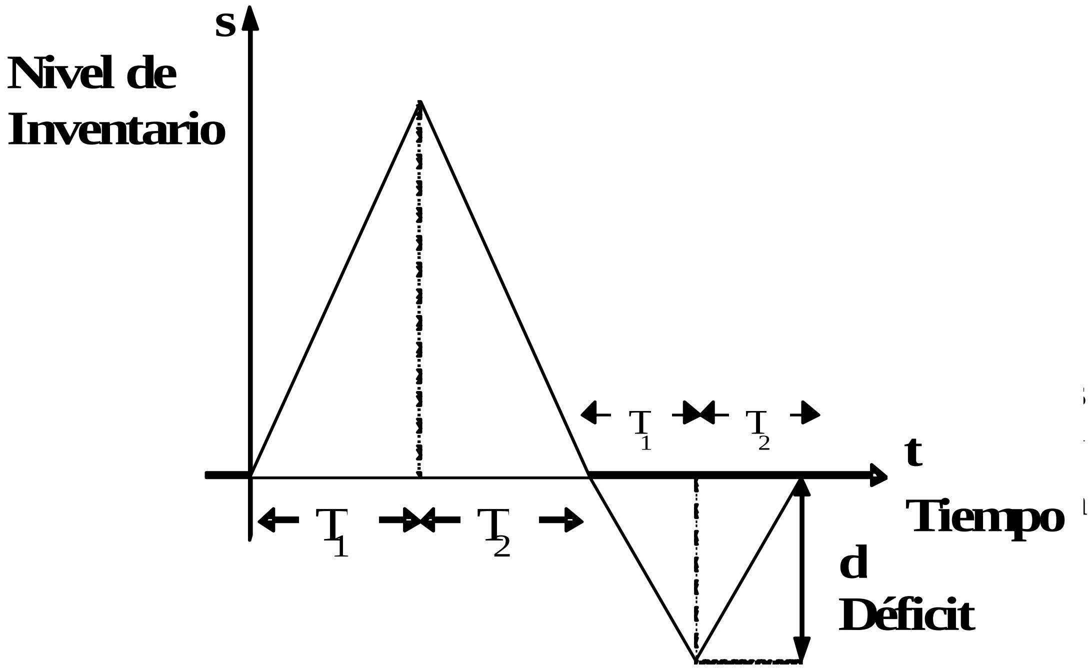
$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,(D+\pi R^2 S)Z}{W}}\ (m^3) \qquad \textit{Tamaño del lote óptimo}$$

$$T_1^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{\sqrt{\frac{2\,(D+\pi R^2 S)Z}{W}}}{D+\pi R^2 S} = \sqrt{\frac{2\,Z}{(D+\pi R^2 Z)W}} \qquad \textit{días tiempo entre dos corrida}$$

$$C_{tot\ unit} = \frac{W\ Q^*\ T_1^* + Z}{T_1^*} \qquad \textit{Costo total unitario}\ (\$)$$

$$N^* = \frac{a}{Q^*} \qquad Frecuencia\ de\ las\ corridas (\#/d)$$

5.4 Modelo Determinístico General de Inventario



de producción constante v. Habrá una demanda o razón de consumo del producto restante a. Donde v>a durante T_1 deteniéndose la producción el costo del período T_1.
Durante un período T_2 (inmediato) habrá sólo demanda razón a, hasta llegar al fin del período T_2 en que la existencia se haya agotado.
Luego viene un período T_3 en que hay déficit al haber demanda, pero no existencia.
Se inicia un nuevo período T_4, en donde se reinicia la producción con tasa v hasta llegar a cubrir el déficit.
El proceso puede repetirse continuamente.

Notación:

r. Tasa de producción [unidades de producción / unidad de tiempo]
a. Tasa de demanda [unidades de producción / unidad de tiempo]
S. Nivel máximo del inventario [unidades]
d. Nivel máximo de ruptura (déficit) [unidades]
q. Cantidad de unidades a producir o tamaño del lote [unidades]
T_1, T_2, T_3, T_4: Tiempos
C, C_1, C_2, C_3: Costos.

El costo aquí estará dado por el área del triángulo en cuestión, recursos por intervalos de tiempo.

T_1 Incluye:
Costo de almacenamiento.
Costo de producción.

Costo de emisión.

T_2 Incluye:
Costo de almacenamiento.

T_3 Incluye:
Costo de ruptura.

T_4 Incluye:
Costo de producción.
Costo de ruptura.
Costo de emisión.

Calculemos dichos costos totales.
Costo de producción más costo de emisión: [Total]
Cp = QC + K

Costo de almacenamiento: [Total]

$$C_{alm} = C_1 \frac{h(T_1 + T_2)}{2}$$

Costo de ruptura: [Total]

$$C_{rup} = C_2 \frac{s(T_3 + T_4)}{2}$$

$$C_{tot} \quad \frac{C_1 \quad h(T_1 + T_2)}{2} + \frac{C_2 \quad s \quad (T_3 + T_4)}{2} + CQ + K$$

Costo total del inventario para el período $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$:

Costo total por unidad de tiempo, en función de las variables T_1, T_2, T_3, T_4, Q, S, Y, D:

$$C_{tot \quad unit} = \frac{C_{tot}}{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}$$

Relaciones entre variables:
En el triángulo que comprende al tiempo T_1

$$r - a = \frac{S}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{S}{r-a}$$

En el triángulo que comprende al tiempo T_2

$$a = \frac{S}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{S}{a} \quad \text{luego} \quad S = T_2 a$$

En el triángulo que comprende al tiempo T_3

$$a = \frac{d}{T_3} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{d}{a} \qquad d = T_3 a$$

En el triángulo que comprende al tiempo T_4

$$r - a = \frac{d}{T_4} \qquad T_4 = \frac{d}{r-a}$$

Por la relación de balance, la producción debe cubrir toda la demanda al cabo de $\mathbf{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}$.

$$\mathbf{Q = a\,(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}$$

Producción : **Q**
Demanda **:** *a*

$$Q = a\left[\frac{s}{r-a} + T_2 + T_3 + \frac{d}{r-a}\right]$$

Sustituyendo

$$Q = a\left[\frac{a\,T_2}{r-a} + T_2 + T_3 + \frac{a T_3}{r-a}\right]$$

$$Q = a\,\frac{r\,(T_2 + T_3)}{(r-a)}$$

Encontramos la ecuación del costo total / unidad de tiempo.
Tendremos entonces que encontrar el valor mínimo de esta expresión.

$$C_{tot\ unit} = \frac{\dfrac{h\,T_2\,a\left(\dfrac{s}{r-a} + T_2\right)}{2} + s\,\dfrac{T_3\,a\left[T_3 + \dfrac{T_3\,a}{r-a}\right]}{2} + \dfrac{ar\quad (T_2 + T_3)}{r-a} + K}{T_2\,a / r - a + T_2 + T_3 + \dfrac{T_3 a}{r-a}}$$

NOTA: Cálculo de un extremo local en función de dos variables:

Sea $C_{TOT\ UNIT}$ una función con derivada parcial de primero y segundo orden continuo.

$$\frac{\partial C_{tot\ unit}}{\partial T_2} = 0$$

$$\frac{\partial C_{tot\ unit}}{\partial T_3} = 0$$

Se resuelve el sistema. Sean T_2 y T_3 **las soluciones obtenidas**

$$A = \frac{\partial^2 C_{totunit}}{(\partial T_2)^2} \qquad C = \frac{\partial^2 C_{totunit}}{(\partial T_3)^2} \qquad B = \frac{\partial^2 C_{totunit}}{\partial T_2 \partial T_3}$$

Se resuelve el sistema sea T_2 y T_3 la solución:

$$A = \frac{d^2\ C_{tot\ unit}}{(dT_2)^2}$$

$$B = \frac{d^2\ C_{tot\ unit}}{dT_2\ dT_3}$$

$$C = \frac{d^2\ C_{tot\ unit}}{(d^2\ T_3)}$$

Se tiene entonces la condición suficiente:

a) Si $AC - B^2 > 0$ y $A > 0$ f tiene un mínimo local en (T_2, T_3).

b) Si $AC - B^2 > 0$ y $A < 0$ f tiene un máximo local en (T_2, T_3).

c) Si $AC - B^2 < 0$ f no tiene ni máximo ni mínimo local en (T_2, T_3).

Si $AC - B^2 = 0$ el criterio no decide
Se deja como trabajo independiente el cálculo de T_2, T_3 .

$$T_2 = \sqrt{\frac{2 \quad sK \quad (1 - a/r)}{a \quad (h+s)\, h}}$$

$$T_3 = \sqrt{\frac{2 \quad h\, K \quad (1 - a/r)}{as(h+s)}}$$

Sustituyendo en la ecuación de Q.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a\,K}{h}\left(\frac{1}{1-a/r}\right)\left(\frac{h+s}{s}\right)}$$

Tamaño óptimo del lote de producción.

$$d^* = \sqrt{\frac{2asK(1-a/r)}{(h+s)h}}$$

Tamaño óptimo del número de unidades en déficit.

$$S^* = \sqrt{\frac{2\,sKa(1-a/r)}{(h+s)\,h}}$$

Nivel máximo de inventario.

$$T_1^* = \frac{S}{r-a} = \frac{a\,T_2}{r-a}$$

$$T_4^* = \frac{d}{r-a}$$

$$n^* = \frac{1}{\sum\limits_{i=1} T_i}$$

No óptimo de reaprovisionamiento.

$$n^* = \frac{a}{Q}$$

Basta constituir estos valores óptimos en las funciones de costos para encontrar las expresiones de:

Costo total óptimo de inventario.

$$C_{alm} = \frac{S^*h \quad (T_1+T_2)}{2}$$

Costo total óptimo de ruptura.

$$C_{rup} = \frac{d^* \quad s(T_3+T_4)}{2}$$

Costo total óptimo de producción.

$$C_P = CQ^* + K$$

Ejemplo 2

Una empresa del SIME posee un taller de producción de ciertas piezas importantes en la industria mecánica, la capacidad de producción del taller es de 10.000 piezas

mensualmente. Existe otro taller de reparaciones de equipos, al que está asociado un almacén de piezas, este taller tiene un consumo de aprox. 4.000 piezas al mes. El costo de almacenamiento en dicho taller es de $4 /mes y en caso de no existir la pieza demandada se incurre en un costo de $2 /mes.
En la producción el costo de cada pieza es de $5 y el de preparar la orden para la producción el traslado, este cuesta como promedio $100 al mes.

Encuentre los parámetros óptimos para cada empresa.

SOLUCIÓN:
a = 4.000 p/ mes.
r = 10.000 p/mes.
c = $5 p.
K = $100
h = $4 p/mes
s = $2 p/mes

Para el taller de producción: Q según la fórmula

Q = 1.000 piezas

Cantidad óptima de piezas suministradas al taller de reparaciones mensualmente.

$$n^* = \frac{a}{Q^*} = \frac{4.000}{1.000} = 4$$

Veces / mes debe suministrarse Q^*.

Para el taller de reparaciones:

$S^* = a\, T_2^*$
T_2^* = según fórmula = 0.05 mes 1,5 días tiempo en que se alcanzaría el nivel cero.

S^* = 200 piezas nivel máximo que se tendría en inventario.

$$T_1^* = \frac{s^*}{r-a} = 0.033$$

. 0,99 días este nivel máximo se alcanza aproximadamente en un día-

$T_1^* + T_2^*$ = 2,49 días momento en que se produce la ruptura del inventario.

d^* = 400 pieza déficit máximo que puede permitirse.

Calcular además T_3, T_4 y los costos asociados como trabajos independientes.

$$C_{tot\ unit} = \frac{C^*_{alm} + C^*_{rup} + C^*_p}{T_1^* + T_2^* + T_3^* + T_4^*}$$

5.5 Modelos de Decisión de Período Único.

En estos casos la decisión se toma sólo una vez (el vendedor de periódicos), por eso se llama modelo de decisión de período único.
Las empresas se presentan con frecuencia a problemas en los que:

1. La empresa decide cuántas unidades pedir: Sea q el número de unidades pedidas.
2. Con una probabilidad p(d), se tiene una demanda de d unidades. Sea d $\geq$ 0 entero. Sea D la variable aleatoria que representa la demanda.
3. Dependiendo de d y de q se incurre en un costo c(d,q).
   $C(d,q) = C_o q +$ (términos sin q) $\quad$ d $\leq$ q
   $C(d,q) = -C_u +$ (términos sin q) $\quad$ d $\geq$ q + 1
   C_o: costo unitario de comprar demasiado (Co es el costo debido a tener 1 unidad de excedente).
   C_o: costo de sobreabastecimiento.

Sí d $\geq$ q + 1 y aumentamos en 1 el tamaño del pedido, nuestro faltante será una unidad menor. El costo se reduce en Cu.
   C_u: Costo unitario de tener faltantes (costo de subabastecimiento).

Debemos determinar el valor mínimo de q para el cual E(q + 1) – E(q) $\geq$ 0. Para calcular E(q + 1) – E(q) debemos tener en cuenta dos posibilidades. (Si se piden q + 1 unidades tenemos sobrantes).

1. Caso 1: d $\leq$ q. La probabilidad de que se tenga este caso es P (D $\leq$ q) donde D es la variable aleatoria de la demanda.
2. Caso 2: d $\geq$ q + 1. En este caso si se piden q + 1 unidades en lugar de q hace que tengamos escasez de una unidad menos. Esto disminuirá Cu nuestro costo. La probabilidad de tener este caso es P(D$\geq$ q + 1) = 1 – P(D $\leq$ q).

En resumen, una fracción P (D $\leq$ q) de las veces, pedir q + 1 unidades costará C_o más que si se piden q unidades y una fracción 1 – P (D $\leq$ q) de las veces, pedir q + 1 unidades costará C_u menos que si se piden q unidades. Así, en promedio, pedir q + 1 unidades cuesta:

Co P (D $\leq$ q) – Cu [1 – P (D $\leq$ q)] más que si se piden q unidades .

Luego:

$$E(q+1) - E(q) = Co\,P(D \leq q) - Cu\,(1 - P(D \leq q)$$

$$= Co\,P(D \leq q) - Cu + Cu\,P(D \leq q)$$

$$= (Co + Cu)\;P(D \leq q) - Cu$$

Entonces E(q + 1) – E(q) $\geq$ 0 será válida sí:

$$(Co + Cu)\,P(D \leq q) - Cu \geq 0$$

$$P(D \leq q) \geq \frac{Cu}{Co + Cu}$$

Sea F(q) = P(D $\leq$ q) la función de distribución de la función de demanda. E(q) será reducida al mínimo por el valor mínimo de q (sea q*) que satisface a:

$$F(q^*) \geq \frac{Cu}{Co + Cu}$$

Si D es una variable aleatoria continua que tiene una función de densidad f(d).

Ya vimos que para una variable aleatoria discreta P(D ≤ q*) ≥ $\frac{Cu}{Co+Cu}$

Para la variable continua podemos determinar un número q* para el cual la expresión anterior sea válida como igualdad.

Luego la cantidad óptima a pedir se puede obtener al determinar el valor de q* que satisfaga:

$$P(D \leq q^*) = \frac{Cu}{Co+Cu}$$

$$P(D \geq q^*) = \frac{Cu}{Co+Cu}$$

Según esta ecuación, vemos que lo óptimo es pedir unidades hasta el punto en el que la última que se pida tenga una probabilidad $\frac{Cu}{Co+Cu}$ de venderse.

Ejemplo 3

La demanda en un almacén dado es aleatoria y se expresa en la tabla 1 su distribución probabilística discreta. Si la pérdida por unidades sobrantes al final del período es de $50 y la pérdida de las unidades en déficit es 20 veces mayor que la de los sobrantes. Encuentre la existencia óptima y el costo asociado a ella.

Tabla 1

Demanda a (ton)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**más de 5**
Probabilidad p(a)	**0.9**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.01**	**0.01**	**0**

Datos:

C_1 = $50
C_2 = 20.C_1 = $ 1.000

$$\frac{C_2}{C_1+C_2} = \frac{1.000}{1.000+50} = 0.954$$

Tabla de prob. Acumulada:

Existencia a	*(Demanda)*	*P(a) prob*	*P(a ≤ s) Prob. acumulada*
0	**0**	**0.9**	**0.9**
1	**1**	**0.05**	**0.95**
2	**2**	**0.02**	**0.97**
3	**3**	**0.01**	**0.98**
4	**4**	**0.01**	**0.99**
5	**5**	**0.01**	**1**
6 o más	**6**	**0**	**1**

$$p(a<1) \leq \frac{C_2}{C_1+C_2} < p(a<2)$$

La existencia óptima So = 2 toneladas.

Costo Mínimo.

$$C(So) = C(2) = C_1 \sum_{a=0}^{2} (Z-a)\ p(a) + C_2 \sum_{a=3}^{\infty} (a-2)\ p(a)$$

C(2) = 50[2(0.9) + 1 (0.05)] + 1.000 [1 (0.01) + 2 (0.01) + 3 (0.01)]

C(2) = $ 152.5

Suponga ahora que se ha producido una explosión de la demanda y se sabe que ahora So = 3 tonelas, pero se quiere investigar el valor de la ruptura C_2 (en el ejemplo anterior).

Se tiene que:

$$p(S \leq 2) \leq \frac{C_2}{C_1+C_2} < p(S \leq 3)$$

Sustituyendo:

$$0.97 < \frac{C_2}{50+C_2} < 0.98$$

De aquí:

$$\frac{p(a \leq So)}{1-p(a \leq So-1)} < C_2 < \frac{p(r \leq So)}{1-p(r \leq So)}$$

$1.620 < C_2 < $2.450

Intervalo para el costo pérdida por faltantes.

5.6.- Modelos (r,q) y (s,S) de cantidad económica con demanda incierta.

Una política de revisión continua es aquella en la que se pide una cantidad q siempre que el nivel de inventario alcanza el punto de reorden r y se llama, con frecuencia, política (r,q) o política de dos apartados o dos lugares y es posible llevarla a cabo con facilidad mediante el uso de dos lugares para almacenar un artículo. Cuando la demanda es de tamaño mayor que una unidad en determinado momento, el modelo (r,q) puede no dar una política que minimice el costo anual esperado. En tales casos, se ha demostrado que es óptima una política (s,S). Para llevarla a cabo, colocamos un pedido siempre que el nivel de inventario sea menor o igual a s. El tamaño del pedido es suficiente para elevar el nivel de inventario a S, suponiendo que el tiempo de entrega es cero, o sea q=S-s, luego s:=r y por último S=r + q.

Ambos modelos se emplean cuando el tiempo de entrega es distinto de cero y la demanda es aleatoria en cualquier período.

K : costo de pedido.

h : costo de almacenamiento/unidad/año.

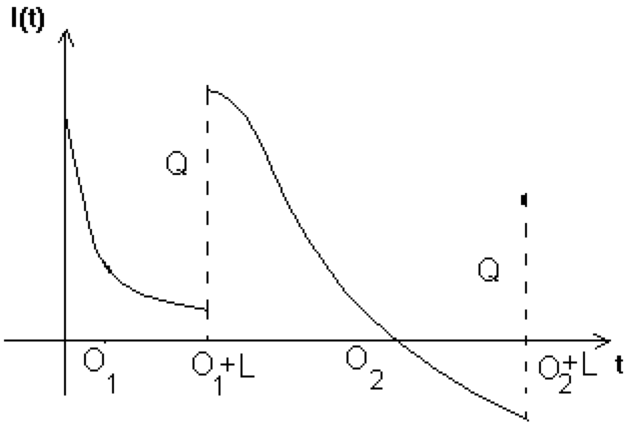
L : tiempo de entrega para cada orden que se supone se conoce con certeza.

q : cantidad pedida cada vez que se hace un pedido.

D: variable aleatoria, se supone continua y que representa la demanda anual con promedio E(D), varianza var D y desviación estándar τ_D.

C_B: costo incurrido por cada unidad faltante, el cual no depende del tiempo que se tarda en reponer los faltantes.

OHI (t) : existencias o inventario a la mano en el tiempo t.



Sea X: variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de entrega.

Supongamos que el tiempo de entrega L sea una variable aleatoria con promedio E(L), varianza var (L) y desviación estándar σ_L

Se desea escoger a q y r que minimice el costo total esperado sin tener en cuenta al costo de compra. Toda la demanda se satisface posteriormente.

Como costo de almacenamiento = h (valor esperado del nivel de inventario disponible) y valor esperado de I (t) durante un ciclo = ½ [(valor esperado de I (t) al principio del ciclo)+(valor esperado de I(t) al final del ciclo)] entonces:

Valor esperado de I (t) durante el ciclo = ½ (r- E(X) + r – E(X) + q)

$$= \tfrac{1}{2} q + r - E(X)$$

Luego, el costo anual esperado de almacenamiento $\cong$ h (q/2 + r – E(X). Nótese que r-E(X) es la cantidad en exceso que se pide para protegerse, se llama reserva de seguridad.

Para determinar el costo anual esperado debido a agotamientos o pedidos atrasados, se considera que B_r es la variable aleatoria que representa el número de agotamiento o pedidos atrasados durante un ciclo cuando el punto de reorden es r.

Como se satisface toda la demanda, se coloca un promedio de $\frac{E(D)}{q}$ cada año.

Entonces:

$$\frac{\text{costo esperado por carencias}}{año} = \frac{C_B \; E(Br) \; . E(D)}{q}$$

Por último:

$$\cos to\ anual\ esperado\ de\ pedido = K \left(\frac{pedidos\ esperados}{año} \right) = \frac{K\ E(D)}{q}$$

Luego:

$$TC(q,r) = h\left(\frac{q}{2} + r - E(X)\right) + \frac{C_B\ E(B_r)\ E(D)}{q} + \frac{K\ E(D)}{q}$$

Aplicando las herramientas matemáticas adecuadas se pueden hallar los valores de q y r que minimicen a la ecuación anterior al determinar los valores q* y r* de q y r que satisfagan a:

$$\frac{\partial\ TC(q^*, r^*)}{\partial q} = \frac{\partial\ TC(q^*, r^*)}{\partial r} = 0$$

Para determinar el punto de reorden r^* que minimice al $TC(q, r)$ se aplica también el análisis marginal y realizando una diferenciación de casos para cuando:

1) $r < r^*$(si aumenta el punto de reorden de r a r^*, se ahorran más los costos por déficit)
2) $r > r^*$ (si se reduce el punto de reorden se ahorran más los costos por almacenamiento)
3) Luego, r^* alcanza el equilibrio óptimo entre los costos de déficit y de almacenamiento,

entonces el punto de reorden r^* y la cantidad pedida q^* para el caso de pedidos atrasados son:

$$q^* = \left(\frac{2kE(D)}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{y} \qquad P(X \geq r^*) = \frac{hq^*}{c_B E(D)}$$

Si $\frac{hq^*}{c_B E(D)} > 1$ entonces las ecuaciones anteriores no tienen solución y el costo de almacenamiento es demasiado alto en relación al costo de agotamiento, en cuyo caso, la gerencia debe ajustar el punto de reorden en el mínimo nivel aceptable.

Si las ecuaciones anteriores dan un resultado negativo para r^*, también debe cambiarse el punto de reorden al nivel mínimo aceptable.

En muchas ocasiones la escasez, déficit o agotamiento ocasiona pérdida de ventas y se incurre en un costo C_{LS} por cada venta perdida. Además de las multas por pérdida de futura clientela C_{LS} debe incluir la ganancia perdida debido a la venta perdida.

En el caso de pérdida de ventas durante cada ciclo, unos cuantos pedidos (carencias esperadas por ciclo) se surten del inventario, se eleva así el nivel promedio de inventario en una cantidad igual a la escasez esperada por ciclo, luego se obtiene la ecuación

$$P(X \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)}$$

$P(X \geq r^*)$ es la probabilidad de que se tenga carencia durante el tiempo de entrega.

Como $\dfrac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)} < \dfrac{hq^*}{c_B E(D)}$ entonces, la pérdida de ventas conduce a una probabilidad menor de escasez y a un nivel mayor en punto de reorden y existencia de seguridad en el caso de la hipótesis de pedidos atrasados.

5.7.- Modelos de Revisión Periódica o Modelos (R,S)

La política (R,S) funciona así:

Cada R unidades de tiempo revisamos el nivel de inventario a la mano o disponible y hacemos un pedido para llevar el nivel de inventario hasta S. Se denomina nivel de inventario en pedido a la suma del inventario a la mano y el inventario en pedido.

Supongamos que el intervalo de revisión es R . El asunto es determinar S tal que minimice los costos anuales esperados.

Se supone además que todas las carencias se acumulan y que la demanda es variable aleatoria continua cuya distribución no cambia en el tiempo. Supongamos, además que el precio de compra por unidad es constante.

R: tiempo, en años, entre revisiones.

D: demanda, aleatoria, durante un período de un año.

E(D): demanda promedio durante un período de un año.

K: costo de colocación de un pedido.

J: costo de revisión del nivel de inventario.

h: costo de mantener un artículo de inventario durante un año.

C_B : costo por unidad de escasez en el caso acumulado, que se supone independiente del tiempo que pasa hasta cuando se ejecuta el pedido.

L: tiempo de entrega para cada pedido Se supone constante.

D_{L+R}: demanda, aleatoria, durante un intervalo de tiempo de longitud L+R.

$E(D_{L+R})$: promedio de D_{L+R}.

$\sigma_{D_{L+R}}$: desviación estándar de D_{L+R}.

Dado un valor de R podemos ahora determinar uno de S que minimice los costos anuales esperados.

Como se llevan a cabo $\frac{1}{R}$ revisiones por año, los costos anuales de revisión son $\frac{J}{R}$.

Nótese también que siempre que se coloca un pedido, el nivel de inventario en orden será S. El único modo en que no se hace un pedido en el siguiente punto de revisión es si $D_{L+R} = 0$. Como D_{L+R} es una variable aleatoria continua D_{L+R} se presentará con probabilidad cero. Así, es seguro que se haga un pedido en el punto siguiente de repaso, o en cualquier punto de revisión. Esto significa que el costo anual de pedido es $K(\frac{1}{R}) = \frac{K}{R}$ (El costo anual de pedido y el costo anual de revisión son independientes de S. Así, el valor de S que reduce al mínimo los costos anuales esperados será aquel que minimice (costos anuales esperados de almacenamiento) + (costos anuales esperados de escasez).

Para determinar el costo anual esperado de almacenamiento para una política (R,S) dada, primero definimos un ciclo como intervalo de tiempo entre la llegada de pedidos.

Si podemos determinar el valor esperado del nivel promedio de inventario en un ciclo, entonces el costo anual esperado de almacenamiento es tan solo h (valor esperado del nivel de inventario a mano durante un ciclo). Supondremos que el número promedio de pedidos atrasados es pequeño en comparación con el nivel esperado de inventario a mano. Entonces:

Valor esperado de I(t) $\cong$ valor esperado de OHI(t).

Justo antes de que llegue un pedido, nuestro nivel de inventario máximo (S) de inventario en pedido, se ha reducido en una cantidad promedio $E(D_{L+R})$. Así, el valor esperado de I(t) justo antes de que llegue el pedido es igual $S-E(D_{L+R})$.

Como se hacen $\frac{1}{R}$ pedidos al año y se deben pedir un promedio E(D) unidades, también cada año, el tamaño promedio del pedido es E(D)R. Entonces:

Valor esperado de I(t) inmediatamente después que llega un pedido = $S- E(D_{L+R}) + E(D).R$

Entonces:

Valor esperado de I(t) durante un ciclo = $S - E(D_{L+R}) + \frac{E(D)R}{2}$ Así,

Costo anual esperado de almacenamiento = $h \left[S - E(D_{L+R}) + \frac{E(D)R}{2} \right]$

En esta ecuación se ve que si se aumenta S, de S a S + Δ se aumentarán los costos anuales esperados de almacenamiento en h y se observa cómo afecta un aumento en S, los costos anuales de escasez. Luego se usa el análisis marginal para determinar el valor de S que minimice la suma de los costos anuales esperados de almacenamiento y escasez. Se define la escasez "asociada" con cada pedido como la que se presenta en el intervalo de tiempo entre la llegada de un pedido y la llegada del siguiente. Está claro que la suma de las veces que haya escasez será igual a la suma de las veces que haya escasez asociada con todos los pedidos.

Aplicando el análisis marginal para determinar (para una R dada) el valor de S que minimice la suma de los costos anuales esperados de almacenamiento y escasez, se observa que si aumentamos a S, de S a S + Δ, los costos anuales esperados de almacenamiento aumentan a h Δ. El aumentar a S, de S a S + Δ disminuye los agotamientos asociados con un pedido si $D_{L+R} \geq S$. Así, para una fracción $P(D_{L+R} \geq S)$ de todos los pedidos, si se aumenta S, de S a S + Δ se ahorrará $C_B \Delta$ en costos de escasez. Como se colocan $\frac{1}{R}$ pedidos cada año, si se hace el aumento mencionado se reducirán los costos anuales de escasez en la cantidad $(\frac{1}{R})C_B \Delta P(D_{L+R} \geq S)$.

Aplicando el análisis marginal se obtiene entonces que el valor de S que minimice la suma de los costos anuales esperados de almacenamiento y escasez se presentará en el valor de S que satisfaga a h $\Delta = (\frac{1}{R})C_B \Delta P(D_{L+R} \geq S)$ o sea $P(D_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{C_B}$

Si todas las veces que hay escasez, ocasionan pérdidas de ventas y se incurre en un costo C_{LS}, incluyendo costo de escasez y pérdida de ganancia, en cada venta perdida, entonces el valor de S que hace mínima la suma de costos anuales esperados de almacenamiento y escasez está dado por: $P(D_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{Rh + C_{LS}}$

Ejemplo: 4

Una ferretería quiere analizar el problema de su inventario de productos más importantes, los datos se muestran en la tabla:

Artículo	*Demanda en el período (Semana)*	*Valor unitario*	*Desviación stándar de la demanda en el período (Semana)*	*Tiempo aproximado en que se aprovisiona el almacén*
Cuchillos	**4 unidades**	**$ 0.80**	**14**	**2**
Conectores	**19**	**1.50**	**29**	**3**
Platos	**8**	**0.70**	**40**	**1**
Juntos en U	**10**	**1.00**	**25**	**1**
Codos	**8**	**0.60**	**35**	**1**
Cerrojos	**192**	**0.50**	**181**	**2**
Válvulas	**2**	**2.00**	**8**	**6**
Cables	**2**	**12.00**	**5**	**7**
Tuercas	**12**	**0.20**	**60**	**1**
Tornillos	**192**	**0.08**	**563**	**3**

El costo de hacer y emitir una orden (para reaprovisionamiento) es de $ 5.00 y se supone que el 25% del costo del producto es aproximadamente su costo del almacenamiento y en este establecimiento se desea mantener el nivel de servicio en una 95%. La empresa está interesado en estudiar el comportamiento de 1 año del inventario con vistos a conocer:

- Los indicadores económicos de su inventario.
- Las cantidades óptimas a reaprovisionar.
- Las rupturas esperadas.
- Los inventarios de trabajo y seguridad.
- Análisis ABC de sus productos.

Cálculo de la desviación estándar en un período teniendo conocimiento de la desviación estándar de otro período.

$$\sigma\,(Período) = \sqrt{\frac{Período}{Otro\ Período}}\quad \sigma\,(Otro\ Período)$$

Ejemplo: 5

Un productor de componentes electrónicos desea tener en consideración tanto de tasa de producción cono el ritmo de la demanda para decidir los tamaños de lote. Un componente en particular de $50 se puede producir a un ritmo de 1.000 unidades al mes y la tasa de demanda es de 200 unidades al mes. La compañía utiliza un cargo de llevar en inventario de 24 por ciento al año y los costos de colocación son de $ 200 cada vez que se fabrica ese componente.

a) ¿Cuál es el tamaño del lote que se debe producir?
b) Si se ignora la tasa de producción. ¿Cuál sería el tamaño del lote?. ¿Cuánto le costaría ese tamaño de lote más pequeño a la compañía, sobre una base anual?
c) Dibuje una gráfica del inventario disponible versus el tiempo.

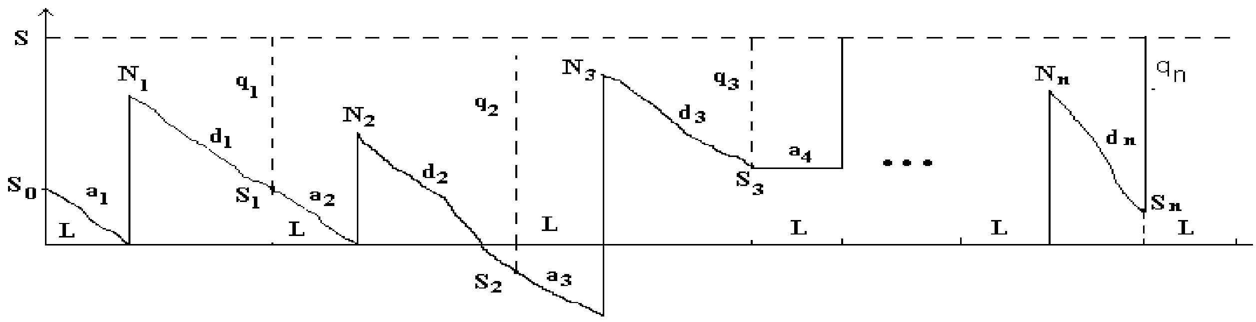
La tienda Grinel Machine fabrica una línea de planchas metálicas para sus clientes, algunas de estas planchas se llevan en el inventario de producto terminado. Una plancha en particular tiene las siguientes características:
Ventas = 200 al año.
Costo de colocación de orden = $ 1.200 por colocación (este incluye la preparación de la máquina para todas las diferentes partes de la plancha.
Costo de llevarlo en inventario = 20 % al año
Costo del artículo = $25
Suponga que la tienda ahora produce sus planchas a un ritmo de 2 por día (250 días de trabajo al año)

a) ¿Cuál es el tamaño óptimo del lote?
b) Dibuje un gráfico inventario / tiempo.
c) ¿Cuál es el valor máximo del inventario?.

5.8 Un modelo alternativo para la determinación del tamaño del lote.

La Programación Lineal como modelo.

Ya se ha visto anteriormente que, muchos de los procedimientos que se estudian pueden ser aplicados para resolver problemas de naturaleza totalmente diversa. Pero también un mismo problema puede ser atacado empleando varias técnicas correspondientes a distintos modelos, bajo la condición del cumplimiento de sus supuestos teóricos.
Hasta aquí hemos visto la aplicación de modelos matemáticos estándares para la administración de inventarios. Mas, si en un problema real como este, las relaciones que se dan son lineales, se garantiza la aditividad, la proporcionalidad, el determinismo y la divisibilidad entonces puede proponerse el empleo de la Programación Lineal o en su defecto de la Programación Lineal Entera para resolverlo, dado que se cumplen los supuestos teóricos para ello, lo que responde la pregunta sobre si es posible aplicar la Programación Lineal para la administración de inventarios correspondiente al modelo (R,S). Y a continuación conviene asegurarnos sobre si es también posible obtener algunas leyes que nos permita representar el sistema de inventario bajo una política como esta.
Una aproximación al problema se ilustra en el siguiente gráfico, donde se han representado todas las situaciones posibles a presentarse, a saber,
Primer Período:
S_0 representa el inventario inicial al principio del primer período y la demanda durante el tiempo de entrega es a_1
Segundo Período: La demanda durante el tiempo de entrega hace que el nivel de inventario baje a cero cuando llega el nuevo pedido.
Tercer Período:
En el momento de la revisión del inventario hay déficit y como la demanda durante el tiempo de reaprovisionamiento es mayor que cero, el nivel de inventario baja aún más.
Cuarto Período:
No existe demanda durante el tiempo de entrega, por lo que se alcanza el nivel S con el nuevo pedido.
Período n-ésimo: Culmina en el momento que se realiza la revisión, que marca el principio de un nuevo período $\theta = nT$, donde θ representa la longitud de un ciclo o etapa a estudiar, dividida en n períodos de tiempos iguales T.
Como la política es (R,S), cada R unidades de tiempo se revisa el nivel de inventario disponible y se hace un pedido que eleve el nivel de inventario hasta S.



Sean S el nivel de inventario con el cual debe compararse el nivel de existencias S_i en el momento de la revisión en cada período i $(i = 1,2,\ldots,n)$ y q_i las cantidades a pedir.

Luego: $q_i = S - S_i$ para todo i (1)

En cada período hay un nivel de existencias N_i que es modificado a partir del nivel de existencias del período anterior, la demanda a_i+d_i y las cantidades q_i a pedir.

Sea N_i el nivel de inventario máximo en cada período i, se tiene entonces:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= S_0 - a_1 + q_0 \\
N_2 &= S_1 - a_2 + q_1 \\
N_3 &= S_2 - a_3 + q_2 \\
&\vdots \\
N_k &= S_{k-1} - a_k + q_{k-1} \\
&\vdots \\
N_n &= S_{n-1} - a_n + q_{n-1}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
S_1 &= N_1 - d_1 \\
S_2 &= N_2 - d_2 \\
&\vdots \\
S_{k-1} &= N_{k-1} - d_{k-1} \\
&\vdots \\
S_n &= N_n - d_n \,(2)
\end{aligned}
$$

Y como $q_k = S - S_k$ para i=k en virtud de (1)

$q_k = N_k + a_k - (N_k - d_k)$ por (2) y (3)

entonces $q_k = a_k + d_k$ (4)

Con esta ecuación se arriba a la conclusión de que la cantidad a pedir en cada período i (que satisface la demanda del siguiente período) debe ser igual ala cantidad demandada en le período i.

Por otra parte, si consideramos que:

$$S = N_1 + a_1$$
$$S = N_2 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S = N_n + a_n \qquad \text{por } (3)$$

entonces:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (N_i + a_i) \qquad (5)$$

Con esta ecuación el nivel óptimo de inventario queda explícitamente determinado en función de los niveles de existencia en cada período y de la demanda en le período de entrega o reaprovisionamiento.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) a (5) se formula el modelo de Programación Lineal para la política de inventarios (R,S) , considerando las tres fases o etapas imprescindibles en la construcción del modelo.

1. Definición de variables esenciales o de decisión
2. Formulación de la Función Objetivo
3. Construcción del Sistema de Restricciones

Definición de variables:

q_i : Unidades a pedir en el período "i"

d_i : Demanda del producto en el intervalo de tiempo desde la llegada del pedido hasta la revisión del inventario

a_i : Demanda del producto en el tiempo de entrega

N_i : Nivel máximo de inventario en el período "i"

S : Nivel de comparación de inventario óptimo

Función Objetivo:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

// Minimizar el déficit en cada período, representado este por la posible demanda que no puede acumularse para el próximo período

Sistema de Restricciones:

$q_1, q_2, \ldots, q_n \geq 0$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$

$d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 0$ Restricciones de no negatividad

$S \geq 0$

$N_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ sin restricción de signo

- Restricciones sobre la demanda

$a_i + d_i = D_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$

donde D_i son cantidades conocidas

- Restricciones sobre la cantidad a pedir

$q_i \geq a_i + d_i \quad i = 1,2,\ldots,n$

- Restricciones sobre los niveles de inventario en cada período donde A representa el stock inicial del producto en el tiempo T=0

$$N_i \geq A + \sum_{j=1}^{i-1} (q_j - d_j - a_{j+1}) \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,n$$

- Restricciones sobre el nivel de inventario de comparación

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (N_i + a_i) \quad \text{con } i = 1,2,\ldots,n$$

El modelo de Programación Lineal descrito permite determinar el nivel de inventario en pedido o nivel de inventario de comparación S, posibilitando calcular la diferencia con lo que se tiene disponible y hacer un pedido cuyo tamaño sea la diferencia, de manera que se minimice el déficit que está representado por la demanda que no puede satisfacerse en pedidos posteriores.

El modelo contempla las restricciones impuestas por la realidad como son las demandas del producto en cada período que son conocidas, sobre la cantidad a pedir para satisfacer la demanda, así como las restantes leyes que se obtuvieron por deducción anteriormente.

Este modelo puede ser aplicado para estudiar cualquier período de tiempo, subdividido a la vez en n períodos iguales que se determina por el lapso de tiempo (que se desee) entre una y otra revisión del inventario, donde las demandas son conocidas como en este caso o donde puedan pronosticarse estas, algo que es factible realizar en cualquier empresa a partir de una base de datos y las tablas de salida nos ofrecerán información detallada sobre lo que sucede en cada uno de los períodos.

De fácil implementación por la sencillez de las relaciones que se dan en él, sin necesidad de calcular los costos asociados a estas operaciones, este modelo permite administrar con mayor comodidad las necesarias existencias que permiten satisfacer la demanda.

La empresa moderna necesita cada vez con más urgencia emplear métodos que le permitan planear, organizar y controlar mejor sus operaciones. Es por ello que, en la actualidad, el empleo de modelos matemáticos o técnicas cuantitativas ha cobrado mayor auge.

La aplicación de los modelos estándares de inventario permite responder, generalmente, dos preguntas esenciales, ¿cuánto se debe pedir? y ¿ cuándo se debe pedir? que resultan vitales para administrar inventarios; pero complicaciones adicionales sobre cómo determinar los costos asociados a estas operaciones impiden que estos modelos sean tácitamente aceptados.

Dado que un mismo problema puede ser atacado mediante técnicas diferentes, el modelo de Programación Lineal puede ser empleado como modelo alternativo para resolver problemas de inventario relacionados con la política (R,S), cuando se cumplen los supuestos teóricos necesarios, eliminándose así las barreras inherentes a los modelos estándares y donde los resultados a obtener implican una mejor aproximación al modelo real.

Capitulo 6 Teoría de la Reposición y el Mantenimiento

6.1 Introducción

Seleccionar una política de reemplazo de equipos o asegurar su mantenimiento es, en general una cuestión muy delicada. En ocasiones solo basta con la experiencia para obtener resultados aceptables, pero a veces la intuición puede conducir a estimaciones incorrectas.

Las matemáticas y en particular las nociones de probabilidad, permiten realizar estimaciones muy correctas y fácilmente calculables.

La teoría de la reposición y el mantenimiento de los equipos tiene que ver muy directamente con la predicción del tiempo de reemplazo, el costo del mismo, las características técnicas y la determinación de la política más económica.

La predicción del costo para un grupo de artículos con un momento de vida probabilístico por ejemplo: los focos incandescentes, las baterías de un carro, un motor de combustión interna, etc, envuelve la distribución de los momentos de vida probables y el cálculo del número predicho de fallos como una función de la edad del grupo de artículos.

En el caso de los artículos cuya eficiencia declina con su momento de vida por ejemplo: máquinas herramientas, vehículos, etc las predicciones del costo envuelven la determinación de aquellos factores que contribuyen al incremento del costo de operación, al incremento de las reparaciones, etc.

La alternativa al incremento del costo de operación de los equipos es el costo de reemplazar a un equipo viejo por uno nuevo. Existen determinados períodos de tiempo en los cuales reemplazar a un equipo viejo es más económico que continuar incrementando los costos de operación del equipo viejo. En estos períodos de tiempo el aseguramiento de un equipo nuevo resulta en extremo mucho más rentable.

¿Qué problemas pueden presentarse en virtud de lo esclarecido aquí?

Primero: Equipos que se deterioran con el tiempo y se les asocian tiempos y costos de operación y el problema se reduce a investigar hasta donde será mejor reemplazar que mantener.

Segundo: Equipos que fallan de súbito y el problema consiste en determinar cuál es la política de reemplazo a seguir.

El problema siempre se reduce a determinar el momento preciso para realizar el reemplazo.

Teniendo en cuenta la explicación hecha hasta aquí este reemplazo puede ser identificado con funciones continuas y con funciones discretas. Centraremos nuestra atención primeramente en el reemplazo con funciones continuas.

6.2 "El reemplazo con funciones continuas"

Consideremos a las funciones continuas $\varphi(t)$ y $\phi(t)$ respectivamente.

Para $\varphi(t)$ se tiene que:

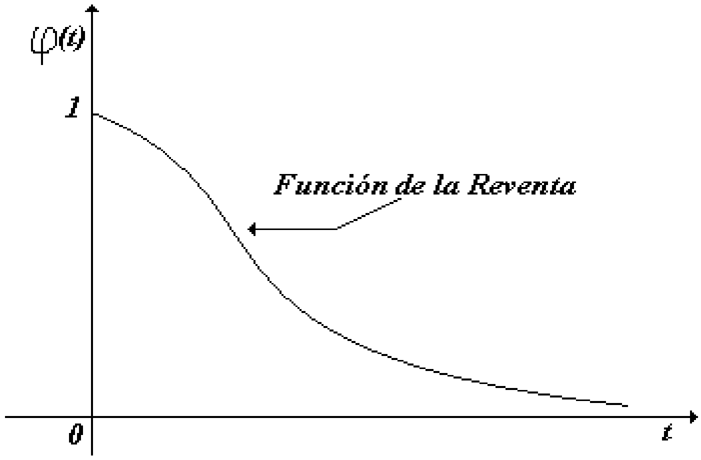
A_0 el precio de compra de un cierto equipo.

$A_0\varphi(t)$ el precio de la reventa después de un cierto tiempo t, en el cual:

La función $\varphi(t)$ es monótona decreciente.

$\varphi(0) = 1$.

Gráficamente se tiene que:

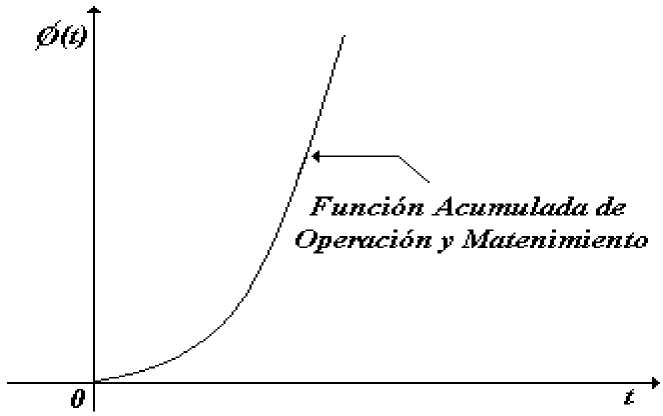


Para $\phi(t)$ se tiene que:

$\phi(t)$ es el costo de las reparaciones y del mantenimiento (costo acumulado), donde:

$\phi(t)$ es una función monótona creciente.

Para $t = 0$ $\quad \phi(0) = 0$



El costo de un equipo para un período de tiempo t puede expresarse por medio de la siguiente ecuación:

$\Gamma(t) = A_0 - A_0\varphi(t) + \phi(t)$ (I) donde Γ es la función de costo $\phi(t)$, a partir de este modelo podemos definir también el costo promedio de utilización de este equipo al que nos estamos refiriendo. Denotemos a esta función por γ, luego:

$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}$ (II). Ahora bien si quisiéramos determinar el óptimo, basta con determinar la primera derivada de la función definida en II. Derivando resulta:

$\gamma'(t) = \frac{\Gamma'(t)\,t - \Gamma(t)}{t^2}$. Hagamos $\gamma'(t) = 0$

$\frac{\Gamma'(t)\,t - \Gamma(t)}{t^2} = 0$ (III) de aquí resulta que:

$$\Gamma'(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}.$$

El resultado obtenido en (III) lo podemos expresar de otra forma al sustituir la función de costos total:

$$\frac{\left[A_0 - A_0\varphi(t) + \phi(t)\right]' t - \left(A_0 - A_0\varphi(t) + \phi(t)\right)}{t^2} = 0$$

$$\frac{t\left[-A_0\varphi'(t) + \phi'(t)\right] - \left[A_0 - A_0\varphi(t) + \phi(t)\right]}{t^2} = 0$$

$$t\phi'(t) - tA_0\varphi'(t) - A_0 + A_0\varphi(t) - \phi(t) = 0$$

$$A_0 + tA_0\varphi'(t) - A_0\varphi(t) - t\phi'(t) + \phi(t) = 0.$$

Generalmente las funciones $\varphi(t)$ y $\phi(t)$ están dadas mediante valores numéricos por lo que la búsqueda del valor óptimo de $\Gamma(t)$ se realiza directamente mediante cálculo numérico, resulta interesante por tanto el estudio analítico de estos. Analicemos qué ocurre cuando la función de la reventa $\varphi(t)$ y la función acumulada de operaciones y mantenimiento $\phi(t)$ tienen un comportamiento lineal.

En ambos casos las funciones vienen dadas por los siguientes modelos:

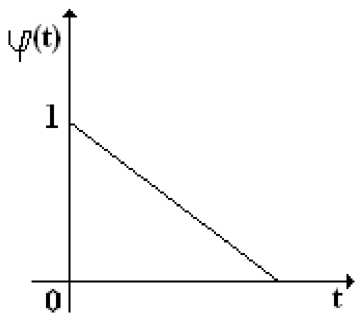
$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{\theta}t \quad \text{y} \quad \phi(t) = kt.$$

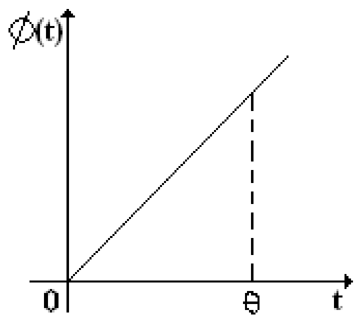
En ambos casos es bueno que aclaremos que t toma valores en el intervalo $0 < t < \theta$.

En este caso el costo promedio del empleo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[A_0 - A_0\left(1 - \frac{1}{\theta}t\right) + kt\right] = \frac{1}{t}\left[A_0\frac{t}{\theta} + kt\right] = \frac{A_0}{\theta} + k$$

De lo obtenido aquí podemos deducir que el costo promedio es constante si las funciones antes citadas son lineales.





¿Qué significa para nosotros lo anteriormente expresado en la ecuación del costo promedio del empleo?

Si deseamos que el tiempo de reemplazo sea casi indiferente basta con que las curvas características $\varphi(t)$ y $\phi(t)$ sean casi rectas.

Teniendo en cuenta lo planteado por Kaufmann lo ideal es mantener al equipo, pero estos colapsan en el tiempo y los costos por el mantenimiento se sobregiran lo que daría pérdidas a la empresa.

¿Qué sucede si la función de la reventa $\varphi(t)$ tiene un comportamiento exponencial y la función acumulada de operaciones y mantenimiento $\phi(t)$ tienen un comportamiento lineal?

En este caso la función de la reventa viene dada por el siguiente modelo: $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$ y la función acumulada de operaciones y mantenimiento continúa siendo $\phi(t) = kt.$
El costo promedio de empleo en este caso será la expresión:

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[A_0 - A_0 e^{-\lambda t} + kt\right]$$

Cabe en este momento que nos preguntemos ¿será posible en este caso hablar de un óptimo?
Calculemos para ello la primera derivada de la función costo promedio obtenida anteriormente y veamos lo que ocurre.

$\gamma'(t) = \dfrac{\lambda\, tA_0 e^{-\lambda t} + A_0 e^{-\lambda t} - A_0}{t^2}$, *pero* $\dfrac{\lambda\, tA_0 e^{-\lambda t} + A_0 e^{-\lambda t} - A_0}{t^2} \neq 0$ *para cualquier valor positivo de* t . *¿A qué conclusión se arriba entonces?*
En el caso que nos ocupa no hay mínimo y por tanto en estas condiciones es posible mantener en servicio el equipo el mayor tiempo posible.
A nuestro juicio pensamos que Kaufmann debió considerar un gráfico que ilustrara mejor el problema, pues el resultado matemático obtenido conduce al planteamiento anteriormente referido. La representación gráfica indicaría el momento de la reposición o del mantenimiento, porque los equipos colapsan con el paso del tiempo.
¿Qué sucederá si las funciones que hemos analizado hasta aquí tienen ambas un comportamiento exponencial?
En el caso que nos ocupa las funciones $\varphi(t)$ y $\phi(t)$ están dadas por las siguientes expresiones: $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$ y $\phi(t) = k_0\left(e^{\mu t} - 1\right)$.
Investiguemos bajo estas condiciones si existe el óptimo, es decir, el momento en el cual decidiremos si es necesario el reemplazo o el mantenimiento del equipo.
En este caso la función costo promedio del empleo viene dada por la siguiente expresión:

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[A_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + k_0\left(e^{\mu t} - 1\right)\right].$$

Esta función posee un valor mínimo en el intervalo de 0 al infinito.

Ilustremos lo aquí dicho.

$$\gamma'(t) = \left[\frac{1}{t}\left[A_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + k_0\left(e^{\mu t} - 1\right)\right]\right]'$$

Si hacemos $\gamma'(t) = 0$ podemos comprobar que la primera derivada se anula cuando:

$$A_0\left(\lambda te^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}-1\right)=k_0\left(-\mu te^{\mu t}+e^{\mu t}-1\right)$$

$$\frac{k_0}{A_0}=\frac{\left(\lambda te^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}-1\right)}{\left(-\mu te^{\mu t}+e^{\mu t}-1\right)}$$

$$\frac{k_0}{A_0}=\frac{1-e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t\right)}{1-e^{\mu t}\left(1-\mu t\right)}$$

A partir de aquí Kaufmann introduce un nueva función $\Phi(x)=1-e^{-x}(1+x)$ y entonces expresa la relación anterior como:

$$\frac{k_0}{A_0}=\frac{\Phi\left(\lambda t\right)}{\Phi\left(-\mu t\right)}$$

A continuación, por un problema cómodo trabaja con la relación inversa para construir una tabla de doble entrada para calcular a $\gamma(t)=\frac{\Gamma(t)}{t}$ y determinar de esta manera el costo mínimo.

6.3 - El reemplazo en funciones discretas

6.3.1- Reemplazo de un equipo con funciones discretas en las que no se considera la actualización de los costos

Sean:
r: el número de reemplazos que se le darán al equipo.
n: el número de períodos de vida útil del equipo antes del reemplazo.
A_i : precio de compra del equipo en el reemplazo *i*.
C_{ij} : costo del mantenimiento del equipo en el reemplazo *i* al cabo de *j* períodos de tiempo.
Γ : costo total del equipo luego de *r* reemplazos con *n* períodos de vida útil.
De esta forma la función costo total del equipo estará dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{r}\left[A_i+\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\right]$$

Además el costo unitario por períodos del equipo será:

$$\gamma=\frac{1}{nr}\Gamma=\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{r}\left[A_i+\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\right]$$

6.3.2- Reemplazo de un equipo con funciones discretas en las que se considera la actualización de los costos

Comencemos diciendo que estos modelos incluyen un parámetro adicional "El valor actual del costo".

Consideremos que:

a_i *es la tasa de interés del dinero.*

$\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *es el factor de actualización que a su vez es función de la tasa de interés para n períodos* $(n > 1)$.

A la expresión $\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *se le denomina valor presente de una unidad monetaria que se gasta al cabo de n años.*

Luego una unidad monetaria al cabo de n años es equivalente a $\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *unidades hoy.*

Se tienen entonces r reemplazos, con n períodos de vida útil y una tasa de interés del dinero a.

La ecuación del costo total en este caso viene expresada por la siguiente ecuación:

$$\Gamma_n = \left(A + C_1 + \frac{C_2}{1+a} + \cdots + \frac{C_n}{(1+a)^{n-1}}\right)_{1^{er}\ año} + \left(\frac{A+C_1}{(1+a)^n} + \frac{C_2}{(1+a)^{n+1}} + \cdots + \frac{C_n}{(1+a)^{2n-1}}\right)_{2^{do}\ año} + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{A+C_1}{(1+a)^{2n}} + \frac{C_2}{(1+a)^{2n+1}} + \cdots + \frac{C_n}{(1+a)^{3n-1}}\right)_{3^{er}\ año} + \cdots$$

Pero

$$\Gamma_n = \left(A + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}\right) + \frac{1}{(1+a)^n}\left(A + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}\right) + \frac{1}{(1+a)^{2n}}\left(A + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}\right) + \cdots$$

$$\Gamma_n = \left(A + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}\right)\left[1 + \frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+a)^{2n}} + \cdots\right]$$

Pero:

$\left[1 + \frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+a)^{2n}} + \cdots\right]$ *es una serie geométrica con razón* $r = \frac{1}{(1+a)^n} < 1$ *que converge a:*

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+a)^n}}$$ *, luego:*

$$\Gamma_n = \frac{A + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+a)^{i-1}}}{1 - \left[\frac{1}{1+a}\right]^n}$$

Esta última expresión es precisamente la cantidad de dinero que se requiere hoy para pagar todos los costos futuros a adquirir y operar el equipo durante reemplazos realizados cada n años.
Ahora estamos en condiciones de encontrar el valor del período óptimo para hacer el reemplazo de forma tal que el costo total sea mínimo.

Sea n el período óptimo, luego: $\Gamma_{n-1} > \Gamma_n < \Gamma_{n+1}$.

Tomemos entonces que:

$\Gamma_n < \Gamma_{n+1}$ de aquí resulta que:

$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n > 0$

Pero:

$$\Gamma_{n+1} = \frac{A + \sum_{i=1}^{n+1} C_i r^{i-1}}{1-r^{n+1}} = \frac{A + \sum_{i=1}^{n} C_i r^{i-1} + C_{n+1} r^n}{1-r^{n+1}} = \frac{(1-r^n)\Gamma_n + r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}} =$$

$$= \frac{(1-r^n)\Gamma_n}{1-r^{n+1}} + \frac{r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}}$$

Luego

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n = \frac{(1-r^n)\Gamma_n}{1-r^{n+1}} + \frac{r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}} - \Gamma_n = \Gamma_n\left(\frac{(1-r^n)}{1-r^{n+1}} - 1\right) + \frac{r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}} = \frac{\Gamma_n (r^{n+1} - r^n) + r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}}$$

Y como $\Gamma_{n+1} - \Gamma_n > 0$ entonces:

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n = \frac{\Gamma_n (r^{n+1} - r^n) + r^n C_{n+1}}{1-r^{n+1}} > 0$$

Si multiplicamos y dividimos por r^n que es siempre positivo resultará:
$\Gamma_n (r-1) + C_{n+1} > 0$ de donde se obtiene:

$$\frac{C_{n+1}}{1-r} > \Gamma_n \quad (I)$$

De manera análoga se puede proceder si $\Gamma_{n-1} > \Gamma_n$, luego haciendo un análisis similar al anterior resulta que:

$$\frac{C_n}{1-r} < \Gamma_{n-1} \quad (II)$$

De ( ) se obtiene:

$$C_{n+1} > \frac{A + c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}} = \frac{A + \sum_{i=1}^{n} C_i r^{n-1}}{\sum_{i=1}^{n} r^{n-1}}$$

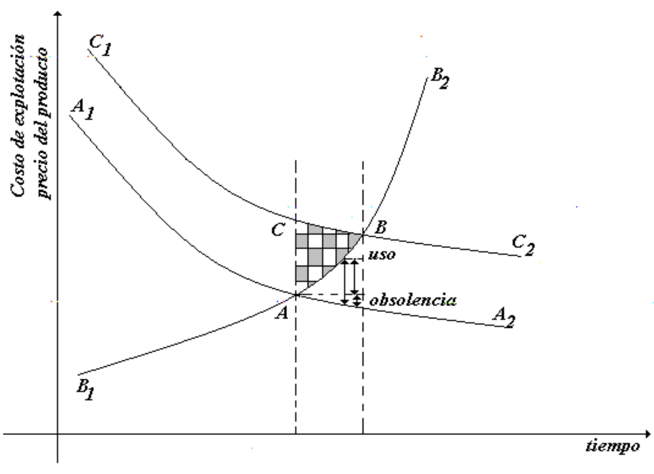
De (I) se obtiene:

$$C_n < \frac{A + c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-2}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2}} = \frac{A + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1} r^{n-2}}{\sum_{i=1}^{n} r^{n-2}} \quad \text{donde } x = \frac{1}{1+a}$$

Como resultado del trabajo realizado se llega a la siguiente regla para minimizar el costo, es decir, para obtener el valor óptimo del período n en que se debe hacer el reemplazo:
No reemplazar si el costo del próximo período es menor que el promedio de los costos ponderados en el período anterior.
Reemplazar si el costo del período próximo es mayor que el promedio de los costos ponderados en el período anterior.
Resumidamente pudiéramos escribir:
No reemplazar el equipo hasta que el costo del período que sigue sea mayor que la suma ponderada de los gastos ya efectuados. *En este caso coincidimos plenamente con lo planteado por Kaufmann.*
El doctor Jaime Gil Aluja en un artículo titulado "Le Renouvellement du Equipements" aborda lo relativo a las causas de la reposición.
Él ve la reposición en dos direcciones:

Reposición: *Causas de la reposición.*
Técnicas para el tratamiento óptimo de la reposición.

El problema se ilustra en el siguiente gráfico, en el cual:
C_1C_2: Precio de venta.
B_1B_2: Costo de explotación con el equipamiento adquirido.
A_1A_2: Costo de explotación con la utilización del equipamiento nuevo en cualquier tiempo t.
ABC: Beneficio bruto.

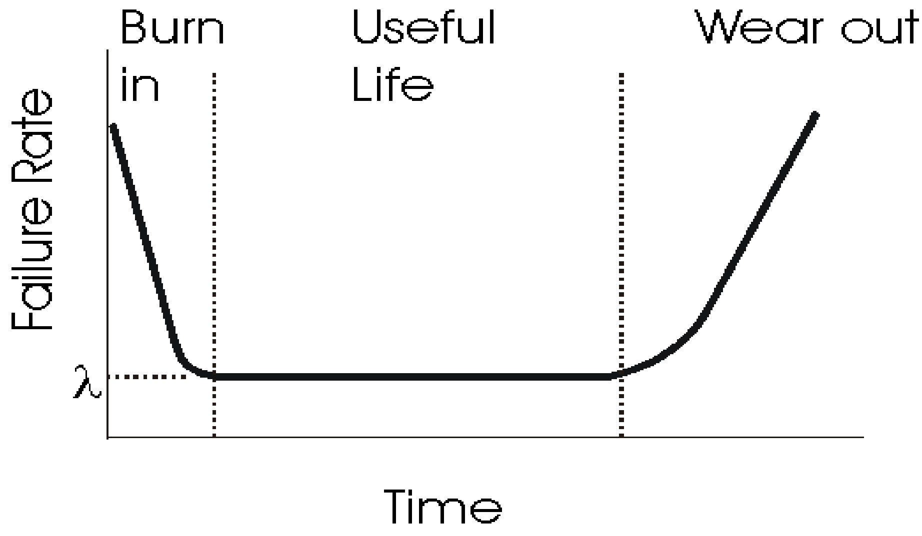


El problema que abordamos aquí es analizado también por George Terbourgh (1946), él analiza el asunto aplicando el método del <u>mínimo adverso</u> *en Teoría Difusa.*
Para él la función costo total del equipo estará dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \left[M + \sum_{j=1}^{t} \frac{d_j}{(1+i)^j} \right] \frac{(1+i)^t i}{(1+i)^t - 1}$$

Donde:
$x(t)$: *Función costo total.*
M : *Costo inicial.*
d_j : *Costo en el período j.*

Nótese que a diferencia de los autores anteriores George Terbourgh añade el interés del dinero.
Los cálculos de mortalidad constituyen una parte importante para el ciclo de vida de un producto. Idealmente un ingeniero puede conocer cuan larga puede ser la vida útil de un sistema y la empresa puede saber cada qué tiempo puede dar mantenimiento a los servicios de este sistema.
Desde la perspectiva de los usuarios resulta muy importe estimar o calcular la vida útil de los servicios; por tanto los sistemas pueden ser reemplazados antes o después de su vida útil. Los usuarios generalmente lo pueden hacer por multitud de razones. Aunque hay circunstancias en las que después de estimado el tiempo de vida útil de un sistema, este puede continuar operándose.
La curva de la bañadera ilustra las proporciones de fracaso esperadas por los sistemas. Como podemos ver, los sistemas comienzan fuera con una corta proporción de fracaso alta (el período de mortalidad), entonces después se establece una vida de funcionamiento bastante estable, sin embargo, como los alcances del sistema en el extremo de su vida útil, su proporción de fracaso aumenta, como aumentan los fracasos físicos: los lubricantes van secos, el metal se oxida, el caucho se pone quebradizo, todos los procesos de desgaste son la causa para que un sistema falle, independientemente de qué bien él se diseñe.
En el extremo derecho de la curva se muestra cómo se comporta el sistema una vez que él alcanza dicho extremo.

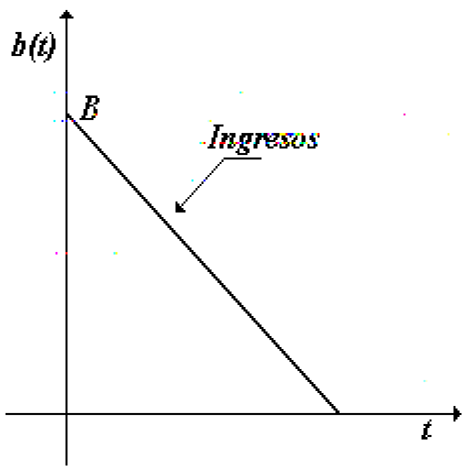


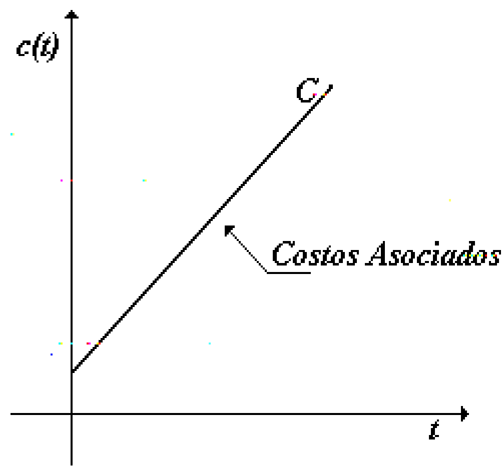
6.4- Nuevas concepciones de la teoría de la reposición y el mantenimiento

En este capítulo realizaremos un análisis de diferentes situaciones, en las cuales, es posible determinar el momento óptimo para realizar la reposición o el mantenimiento de diferentes equipos. La reposición y el mantenimiento son vistos ahora desde otro ángulo, es decir, se trata en nuestro caso de la obtención de utilidades (ganancias) máximas, conociendo el comportamiento de los ingresos y de los costos asociados.
Es conveniente para una mayor comprensión dejar claro lo que se entiende como "*PUNTO DE EQUILIBRIO*" desde el punto de vista económico. Se denomina punto de equilibrio a aquel nivel en el cual los "ingresos son iguales a los costos y gastos, y por ende no existe utilidad", también puede decirse que es el nivel en el cual desaparecen las pérdidas y comienzan las utilidades o viceversa.
En la determinación de las ganancias o beneficios de una organización, expresada como la diferencia entre ingresos totales y costos totales, adquiere gran importancia el concepto de punto de equilibrio, es decir el punto de beneficio 0 (cero) en donde los costos totales coinciden con los ingresos. Cualquier cambio en esta igualdad genera déficit o superávit, ganancia o pérdida.

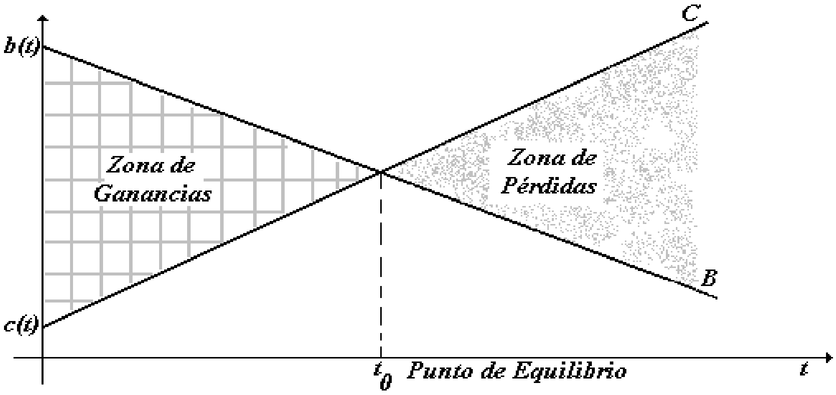
6.5 -Modelos de reposición y mantenimiento con ganancia en funciones continuas.

En general las utilidades o las ganancias, los ingresos y los costos asociados son funciones que dependen del tiempo. En lo adelante para referirnos a las utilidades siempre en su lugar utilizaremos el término <u>ganancia</u>.
Teniendo en cuenta la consideración hecha podemos definir a la función ganancia de la siguiente forma: $g(t) = b(t) - c(t)$ donde:
g : es la función ganancia.
b : es la función ingreso.
c : es la función costos asociados.
Supongamos que las funciones ingreso y costos asociados se comportan linealmente como se ilustra en el siguiente gráfico:





Representemos en el mismo sistema de coordenadas a ambas funciones para ver cuál es la zona de ganancia en este caso.



Como se ilustra en la figura en t_o hay un punto de equilibrio. ¿Qué forma tiene este punto de equilibrio? ¿Cómo determinarlo?

La función ingreso está definida de manera general por la ecuación: $b(t) = b_1 - b_2 t$, donde $b_1, b_2 \in IR \wedge b_2 > 0$ por ser una función decreciente y la función costos asociados está definida por la ecuación: $c(t) = c_1 + c_2 t$, donde $c_1, c_2 \in IR \wedge c_2 > 0$. Es claro que la zona de ganancias estará formada por aquellos puntos que satisfagan la condición: $b_1 - b_2 t > c_1 + c_2 t$ como se ha ilustrado en el gráfico. El punto de equilibrio al cual hemos hecho referencia se alcanza cuando ocurra que: $b_1 - b_2 t_o = c_1 + c_2 t_o$.

Despejando a t_o resulta que: $t_o = \dfrac{b_1 - c_1}{b_2 + c_2}$, donde $b_2 > 0 \quad y \quad c_2 > 0$

De donde resulta que:

Si $0 < t < t_o$, entonces hay ganancias.

Si $t > t_o$, entonces hay pérdidas.

Supongamos ahora que la función costos asociados y la función ingresos se comportan exponencialmente. Tales funciones estarán definidas por las siguientes ecuaciones:

$b(t) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{kt+c}$ Ecuación que define a la función ingreso, donde $c < 0$ y $k > 0$.

$c(t) = e^{mt+d}$ Ecuación que define a la función costos asociados, donde $d < 0$ y $m > 0$.

El problema será en este caso analizar si es posible maximizar la ganancia a partir de estas funciones, en nuestro caso la función ganancia está definida por la siguiente ecuación:

$$g(t) = \left(\frac{1}{e}\right)^{(kt+c)} - e^{mt+d}$$

Investiguemos si es posible determinar el óptimo para maximizar la ganancia.

Calculando la primera derivada de la función g.

$$g'(t) = \left(\left[\frac{1}{e}\right]^{kt+c}\right)' - \left(e^{mt+d}\right)' = k\left(\frac{1}{e}\right)^{kt+c} - me^{mt+d} \quad .$$

(I)

Haciendo $g'(t) = 0$ resulta que:

$$\frac{k}{e^{kt+c}} - me^{mt+d} = 0 \Rightarrow \frac{k - me^{(mt+d)+(kt+c)}}{e^{kt+c}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k - me^{t(m+k)+(c+d)} = 0 \qquad (\text{porque } \ e^{kt+c} > 0 \forall t \in IR)$$

$$\Rightarrow e^{t(m+k)+(c+d)} = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow t(m+k) + (c+d) = \ln\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(k) - \ln(m) - (c+d)}{k+m}$$

El valor de t obtenido tiene sentido matemático por las condiciones que hemos impuesto inicialmente.
Pero, ¿bajo qué condiciones tiene sentido real?
El valor de t obtenido tendrá sentido real cuando ocurra que:

$$\frac{\ln(k) - \ln(m) - (c+d)}{k+m} \geq 0 \Rightarrow \ln(k) - \ln(m) - (c+d) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(k) - \ln(m) \geq (c+d) \Rightarrow \ln\left(\frac{k}{m}\right) \geq (c+d) \Rightarrow \ln\left(\frac{k}{m}\right) \geq \ln e^{(c+d)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} \geq e^{(c+d)} \Rightarrow k \geq me^{(c+d)}$$

Con el análisis efectuado hasta aquí, estamos en condiciones de investigar si el valor de t encontrado es un máximo o un mínimo, aplicaremos para ello el criterio de la segunda derivada. Derivando a (I) resulta que:

$$g''(t) = k^2\left(\frac{1}{e}\right)^{kt+c} - m^2 e^{mt+d}$$

Pero t será un máximo si $g''(t) < 0$. Analizando resulta que:

$\left(\frac{1}{e}\right)^{k\left(\frac{\ln(k)-\ln(m)-(c+d)}{k+m}\right)+c} > 0 \wedge e^{m\left(\frac{\ln(k)-\ln(m)-(c+d)}{k+m}\right)+d} > 0$ por definición de potencia, luego el asunto se reduce a analizar a k^2 y a m^2 que son siempre positivos para todo valor de k y m respectivamente, pero como $k \geq me^{mt+d}$, entonces $g''(t) > 0$ para el valor de t encontrado lo cual significa que él es un valor mínimo y no máximo como se quería, esto nos permite plantear que:

Las funciones anteriormente citadas (costos asociados e ingresos) no pueden tener simultáneamente un comportamiento exponencial, ya que se obtendrán utilidades mínimas y no es lo que se quiere.

Supongamos que las funciones costos asociados e ingresos están definidas por las siguientes ecuaciones:

$c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ con $c_1, c_2, c_3 \in IR$, donde la función costo es creciente para todo $t_v > -\frac{c_2}{2c_3}$ y $c_3 > 0$.

$b(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2$ con $b_1, b_2, b_3 \in IR$, donde la función ingreso es decreciente para todo $t_v > -\frac{b_2}{2b_3}$ y $b_3 < 0$, pero en nuestro caso se cumple que $b_1 = c_1 = A_0$ (A_0 es el precio de compra) para $t = 0$.

En este caso la función ganancia estará definida por la ecuación:

$$g(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2 - (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$$

De forma análoga realicemos los análisis correspondientes para determinar el momento donde se deben obtener ganancias máximas.

Calculemos la primera derivada de la función ganancia.

$$g'(t) = (b_1 + b_2 t + b_3 t^2)' - (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)' = b_2 + 2b_3 t - c_2 - 2c_3 t$$

Haciendo $g'(t) = 0$ resulta que:

$$b_2 + 2b_3 t - c_2 - 2c_3 t = 0 \Rightarrow b_2 - c_2 + 2t(b_3 - c_3) = 0 \Rightarrow t = \frac{c_2 - b_2}{2(b_3 - c_3)}$$

En este caso t es un punto estacionario, es decir, t puede ser un punto de máximo o un punto de mínimo. Apliquemos el criterio de la segunda derivada, para verificar si t es un máximo o un mínimo.

$$g''(t) = 2b_3 - 2c_3 = 2(b_3 - c_3)$$

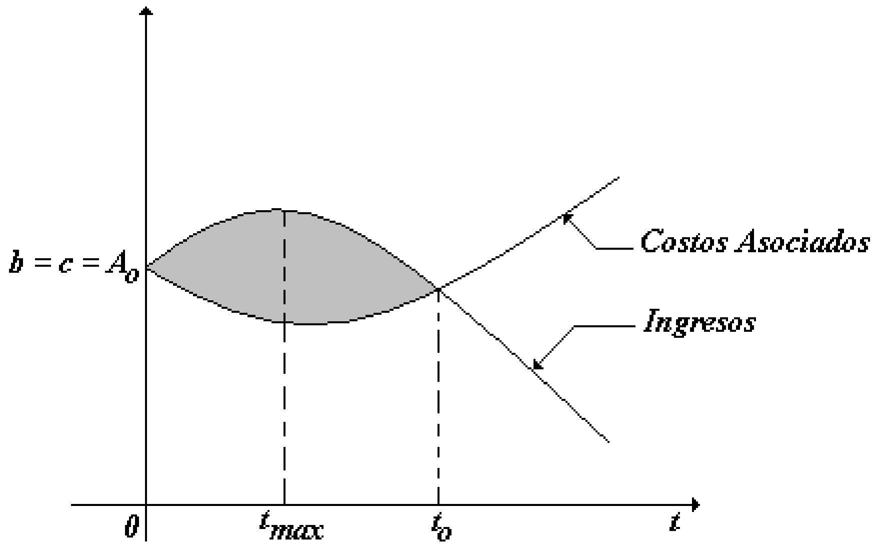
Analicemos el resultado obtenido al determinar la segunda derivada.

Como hemos realizado inicialmente la consideración de que $c_3 > 0$ y $b_3 < 0$, entonces podemos garantizar que:

$g''(t) < 0$ siempre.

Estas consideraciones nos permiten garantizar que el t aquí determinado es un punto de máximo.

Representemos gráficamente los resultados obtenidos.



Como fue ya esclarecido estamos observando aquí que $b_1 = c_1 = A_0$, los ingresos decrecen ($b_3 < 0$) en el tiempo y los costos crecen ($c_3 > 0$), t_o es el punto de equilibrio y t_{max} es el punto de máxima ganancia, pero para que esto último suceda debe cumplirse que: $c_2 - b_2 < 0$ y $c_3 > 0$ y esto está garantizado como condición previa. Entonces:
En el intervalo $[0, t_0]$ se encuentra el umbral de las utilidades, de manera que a partir de t_{max} el equipo puede ser reemplazado, pues a partir de él las utilidades comienzan a decrecer, a partir de t_o se hace necesario reemplazar el equipo, puesto que los costos asociados superarán a los ingresos.

Consideremos que la función ingreso se comporta linealmente y la función costos asociados se comporta exponencialmente.
La función ingreso en general estará definida por la ecuación: $b(t) = b_1 + b_2 t, \quad b_2 < 0$ la función costos asociados estará definida por la ecuación: $c(t) = e^{mt}$, donde $m > 0$ luego la función ganancia estará definida por la ecuación: $g(t) = (b_1 + b_2 t) - e^{mt}$.
Determinemos la primera derivada de la función ganancia e investiguemos si t existe.
Derivando resulta:

$$g'(t) = b_2 - me^{mt}$$

Haciendo $g'(t) = 0$ resulta que:

$$b_2 - me^{mt} = 0 \Rightarrow -me^{mt} = b_2 \Rightarrow e^{mt} = -\frac{b_2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(-\frac{b_2}{m}\right)}{m} \Rightarrow t = \frac{\ln(-b_2) - \ln(m)}{m}$$

Pero esto tiene sentido matemático pues hemos considerado que $b_2 < 0 \wedge m > 0$, además tendrá sentido real siempre que $\frac{\ln(-b_2)-\ln(m)}{m} \geq 0$. Analicemos.

$$\frac{\ln(-b_2)-\ln(m)}{m} \geq 0 \Rightarrow \ln(-b_2)-\ln(m) \geq 0 \Rightarrow \ln(-b_2) \geq \ln(m) \Rightarrow -b_2 \geq m$$

.

Hasta aquí podemos garantizar que t es un punto estacionario, apliquemos el criterio de la segunda derivada para determinar si t es un punto de máximo o mínimo.

Determinando la segunda derivada de g resulta:

$$g''(t) = -m^2 e^{mt}$$

Evaluando el valor de t en $g''(t)$ resulta:

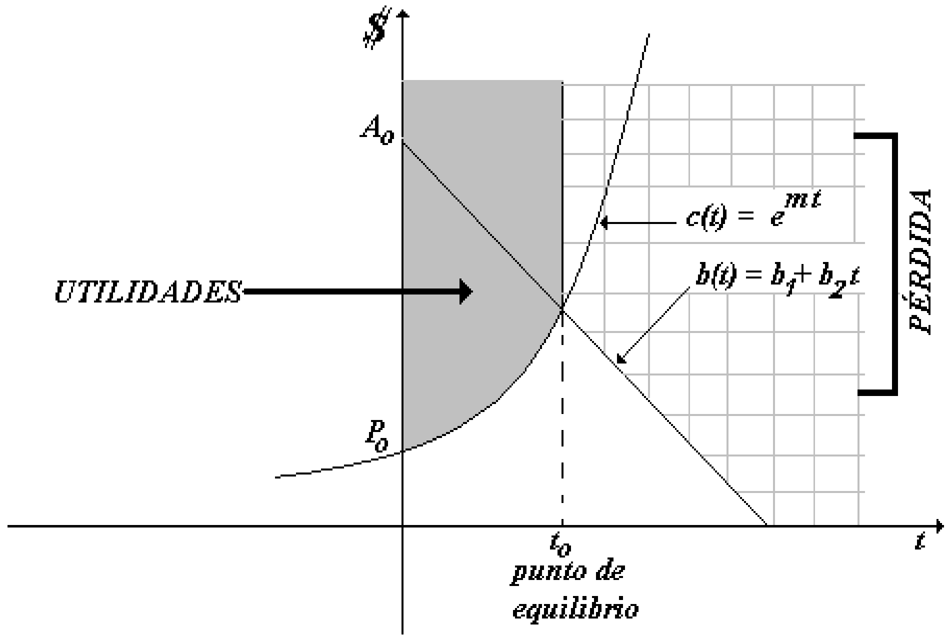
$$g\left(\frac{\ln(-b_2)-\ln(m)}{m}\right) = -m^2 e^{m\left(\frac{\ln(-b_2)-\ln(m)}{m}\right)} = -m^2 e^{\ln(-b_2)-\ln(m)}$$

El asunto se reduce a investigar bajo qué condiciones $g''(t) < 0$, es decir, $-m^2 e^{\ln(-b_2)-\ln(m)} < 0$.

Primeramente podemos decir que la expresión: $e^{\ln(-b_2)-\ln(m)} > 0.$

Pero resulta que $g''(t)$ siempre es negativa, para todo valor de m lo cual corrobora que t es un punto de máximo y por tanto se obtendrán siempre ganancias máximas.

Gráficamente resultaría:



En el gráfico P_o indica lo que se tiene que desembolsar en el primer período y A_o representa el precio de compra.
Con el resultado obtenido aquí podemos plantear la siguiente conclusión:
Los resultados matemáticos obtenidos no son siempre posibles, puesto que no tiene sentido que los equipos se mantengan funcionando ilimitadamente en el tiempo, el gráfico indica claramente el momento en el cual se obtienen ganancias y el momento a partir del cual los equipos deben ser reemplazados, es decir a partir de t_o.

Supóngase ahora lo contrario, es decir, la función ingreso tiene un comportamiento exponencial y la función costos asociados tiene un comportamiento lineal.

En el caso que nos ocupa la función ingreso está definida por la ecuación: $b(t)=\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}$, donde $k>0$, puesto que en el tiempo los ingresos son decrecientes y la función costos asociados está definida por la ecuación: $c(t)=c_1+c_2t$, donde $c_1, c_2 \in IR$ siendo $c_2>0$, pues los costos se incrementan en el tiempo.
Teniendo en cuenta esto, la función ganancia estará definida por la siguiente ecuación:
$g(t)=\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}-(c_1+c_2t)$. Determinemos la primera derivada de la función g e investiguemos si existe el punto estacionario que necesitamos.

Derivando resulta:

$$g'(t)=k\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}-c_2$$

Haciendo $g'(t)=0$ resulta que:

$$k\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}=c_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{kt}=\frac{c_2}{k} \Rightarrow t=\frac{\ln(k)-\ln(c_2)}{k}$$

El valor de t encontrado tiene sentido matemático pues hemos considerado que $c_2>0$ y $k>0$.
Hasta aquí podemos garantizar que t es un punto estacionario, apliquemos el criterio de la segunda derivada para determinar si t es un punto de máximo o mínimo.
Determinando la segunda derivada de g resulta:

$$g''(t)=k^2\left(\frac{1}{e}\right)^{kt}$$

Evaluando el valor de t en $g''(t)$ resulta:

$$g''\left(\frac{\ln(k)-\ln(c_2)}{k}\right)=k^2\left(\frac{1}{e}\right)^{k\left(\frac{\ln(k)-\ln(c_2)}{k}\right)}=k^2\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln(k)-\ln(c_2)}$$

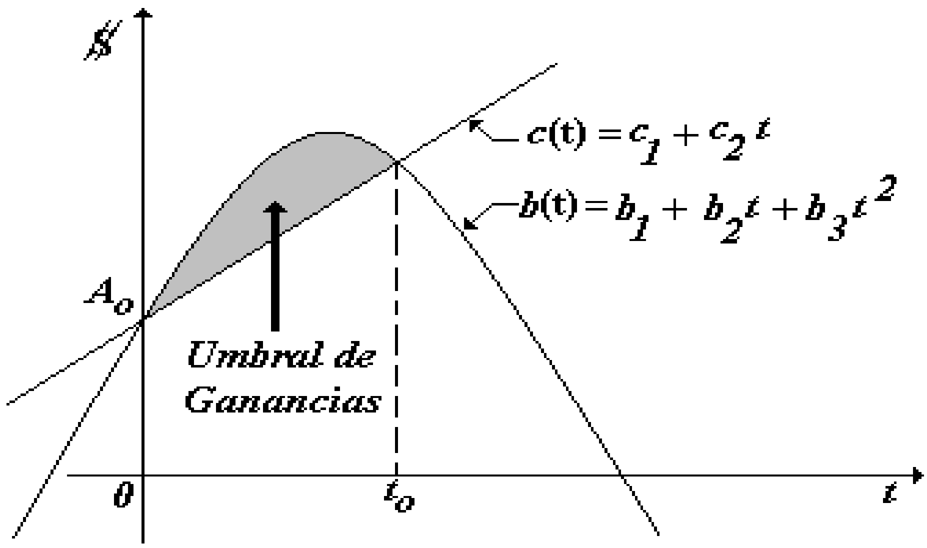
El resultado obtenido aquí conduce a plantear que el valor de t es un mínimo ya que k^2 siempre es positivo para cualquier valor de k y $\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln(k)-\ln(c_2)}$ siempre es positivo por definición de potencia. Esto nos permite arribar a la siguiente conclusión:
Los ingresos no pueden comportarse de forma exponencial y los costos asociados de forma lineal ya que se obtendrán de esta forma ganancias mínimas y no es lo que se quiere.
Supóngase ahora que la función ingreso y la función costos asociados están definidas por las ecuaciones siguientes:
$b(t)=b_1+b_2t+b_3t^2$ con $b_1,b_2,b_3\in IR$, $b_3<0, b_2>0$. La función ingresos es decreciente para todo $t_v>-\frac{b_2}{2b_3}$.
$c(t)=c_1+c_2t$ con $c_1,c_2\in IR$, $c_2>0$ ya que la función costo es creciente.

Teniendo en cuenta esto, la función ganancia estará definida por la siguiente ecuación:
$$g(t)=b_1+b_2t+b_3t^2-(c_1+c_2t).$$

Determinemos la primera derivada de la función g e investiguemos si existe el punto estacionario que necesitamos.
$$g'(t)=b_2+2b_3t-c_2=2b_3t+(b_2-c_2)$$
Haciendo $g'(t)=0$ resulta que:
$$2b_3t+(b_2-c_2)=0\Rightarrow 2b_3t=b_2-c_2\Rightarrow t=\frac{b_2-c_2}{2b_3}$$

El valor de t tiene sentido matemático por las condiciones que hemos impuesto inicialmente, pero tiene sentido real cuando se cumpla que:
$\frac{b_2-c_2}{2b_3}>0\Rightarrow b_2<c_2$, también por las consideraciones que se realizaron inicialmente.

Investiguemos si t es un valor máximo o mínimo. Apliquemos el criterio de la segunda derivada.
$g''(t)=2b_3<0$ ya que $b_3<0$, luego el valor de t es un punto de máximo, que es precisamente lo que se necesita. Por tanto se obtendrán siempre ganancias máximas.
Representemos gráficamente los resultados obtenidos.



En el gráfico A_o representa el precio de compra.
Con el resultado obtenido aquí podemos plantear la siguiente conclusión:
Los resultados matemáticos obtenidos no son siempre posibles, puesto que no tiene sentido que los equipos se mantengan funcionando ilimitadamente en el tiempo, el gráfico indica claramente el momento en el cual se obtienen ganancias y el momento a partir del cual los equipos deben ser reemplazados, es decir a partir de t_o.
Supóngase ahora que la función ingreso y la función costos asociados están definidas por las ecuaciones siguientes:

$b(t) = b_1 + b_2 t$ con $b_1, b_2 \in IR$, $b_2 < 0$. La función ingresos es decreciente.
$c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ con $c_1, c_2, c_3 \in IR$, $c_2 < 0, c_3 > 0$ Esta función costo es creciente para todo $t_v > -\dfrac{c_2}{2c_3}$.

Luego la función ganancia está definida por la siguiente ecuación:

$$g(t) = b_1 + b_2 t - (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$$

Determinemos la primera derivada de la función g e investiguemos si existe el punto estacionario que necesitamos.

$$g'(t) = b_2 - c_2 - 2c_3 t = (b_2 - c_2) - 2c_3 t$$

Haciendo $g'(t) = 0$ resulta que:

$$2c_3 t = b_2 - c_2 \Rightarrow t = \frac{b_2 - c_2}{2c_3}$$

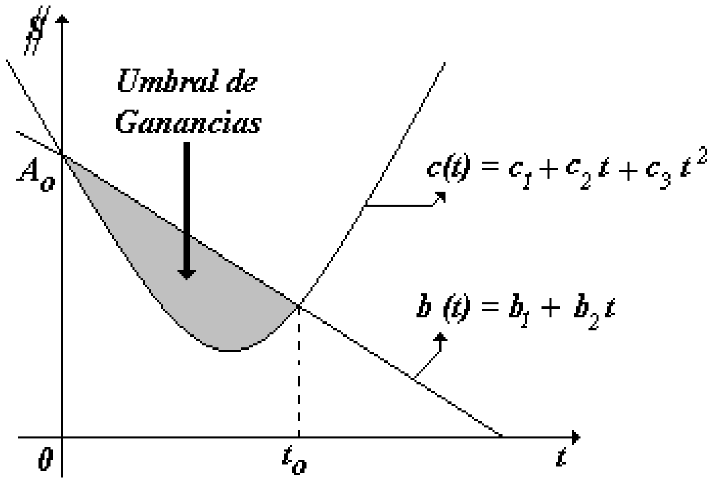
Este valor de t tiene sentido matemático, por las consideraciones que hemos impuestos, pero tendrá sentido real si:

$$\frac{b_2 - c_2}{2c_3} > 0 \Rightarrow b_2 < -c_2$$

Investiguemos si t es un valor máximo o mínimo. Apliquemos el criterio de la segunda derivada.

$g''(t) = -2c_3 < 0$ ya que $c_3 > 0$, luego el valor de t es un punto de máximo, que es precisamente lo que se necesita. Por tanto se obtendrán siempre ganancias máximas.

Representemos gráficamente los resultados obtenidos.



En el gráfico A_o representa el precio de compra, además $c_1 = b_1$.

Con el resultado obtenido aquí podemos plantear la siguiente conclusión:

Los resultados matemáticos obtenidos no son siempre posibles, puesto que no tiene sentido que los equipos se mantengan funcionando ilimitadamente en el tiempo, el gráfico indica claramente el momento en el cual se obtienen ganancias y el momento a partir del cual los equipos deben ser reemplazados, es decir a partir de t_o.

6.6 -Modelos de reemplazo y mantenimiento, con ganancia en funciones discretas sin interés del dinero.

Primeramente analizaremos modelos en los que *no se realiza reemplazo* en un equipo en *n* años, para ello necesitamos precisar cómo están definidos los ingresos y los costos asociados, para posteriormente definir a las utilidades del sistema.

Los <u>costos asociados</u> se definen mediante la expresión: $-\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i\right)$, donde C_i representa los costos asociados en el período i, A_0 es el precio de compra del equipo, esta expresión es negativa pues los costos aumentan en el transcurso del tiempo.

Los <u>ingresos</u> se definen mediante la expresión: $\sum_{i=1}^{n} I_i$, donde I_i representa a los ingresos en el período i, los cuales son positivos.

Sea P_i el precio de la reventa de un equipo en el período i, donde $i = \overline{1,n}$, pero cuando ocurre que $i = 0$ entonces $A_0 = P_0$.

Estamos en condiciones de definir ahora a las utilidades.
Las utilidades estarán dadas por la expresión:

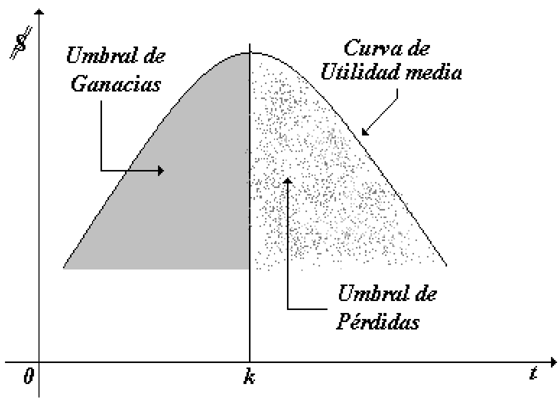
$$U = -nA_o + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(P_i + I_i \right) - C_i \right]$$

Definamos ahora la utilidad media. Esta está definida por la expresión:

$$U_m = \frac{-nA_o + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(P_i + I_i \right) - C_i \right]}{n}$$

Inicialmente sucede que los ingresos y el precio de la reventa prevalecen sobre los costos, posteriormente el asunto se revierte, es decir, los costos sobrepasan a los ingresos y al precio de la reventa.

Gráficamente se tiene que:



A partir de lo que se observa podemos concluir:
Primeramente (Ingresos + Precio de la reventa) sobrepasan a los costos donde $i = 1,2,3,\cdots,k$, cuando $i = k$, ocurre que (Ingresos + Precio de la reventa) = Costos y por tanto k representará un punto de equilibrio, es decir, comienza el umbral de las pérdidas.
Para $i > k$, sucede que los (Ingresos + Precio de la reventa) son menores que los costos.
Analicemos ahora los modelos en los que se *realizan r reemplazos* en un equipo en n años.
En este caso la utilidad media está definida por la expresión:

$$U_{\substack{media\ con \\ reemplazo}} = \frac{-rA_o + \sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(P_{ij} + I_{ij} \right) - C_{ij} \right]}{nr}$$

donde:

C_{ij} - costo de mantenimiento del equipo *j* en el período *i*.

P_{ij} - precio de la reventa del equipo *j* en el período *i*.

I_{ij} - Ingreso del equipo *j* en el período *i*.
Pero si realizamos el reemplazo en el mismo equipo entonces ocurre que:

$C_{ij} \approx C_i$

$P_{ij} \approx P_i$

$I_{ij} \approx I_i$

En este caso la utilidad media estará definida mediante la expresión:

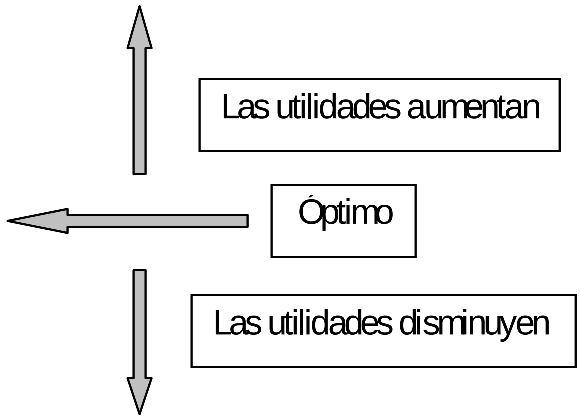
$$U_{\substack{media\ con\\ reemplazo}} = \frac{-rA_o + r\sum_{i=1}^{n}\left[(P_i + I_i) - C_i\right]}{nr} =$$

$$= \frac{r\left(-A_o + \sum_{i=1}^{n}\left[(P_i + I_i) - C_i\right]\right)}{nr} =$$

$$= \frac{-A_o + \sum_{i=1}^{n}\left[(P_i + I_i) - C_i\right]}{n}$$

Finalmente podemos llegar a la conclusión siguiente:
La fórmula obtenida representa la utilidad media de un equipo que se reemplaza r veces con una vida útil de n períodos, donde no interesa la cantidad de veces que este se reemplace.
En este caso, al igual que en el anterior (cuando no hay reemplazo) se cumple que:
Primeramente (Ingresos + Precio de la reventa) sobrepasan a los costos donde $i = 1,2,3,\cdots,k$, cuando $i = k$, ocurre que (Ingresos + Precio de la reventa) = Costos y por tanto k representará un punto de equilibrio, es decir, comienza el umbral de las pérdidas.
Para $i > k$, sucede que los (Ingresos + Precio de la reventa) son menores que los costos.
¿ Cómo determinar entonces la utilidad máxima?
Sucede que en *r* reemplazos se cumple que:
$U_1 < U_2 < \cdots < U_r > U_{r+1} > U_{r+2} \cdots$
La tabla de la función tabulada ilustrará mejor el resultado.

PERÍODO n	UTILIDAD MEDIA
1	U_1
2	U_2
3	U_3
4	U_r
5	U_5
.	.
.	.
.	.



6.7- Modelos de reemplazo y mantenimiento, con ganancia en funciones discretas con interés del dinero.

Primeramente consideremos que:
a_i *es la tasa de interés del dinero.*
$\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *es el factor de actualización que a su vez es función de la tasa de interés para* n *períodos* $\left(a > 1\right)$.
A la expresión $\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *se le denomina valor presente de una unidad monetaria que se gasta al cabo de* n *años.*
Luego una unidad monetaria al cabo de n *años es equivalente a* $\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ *unidades hoy.*
Sean:
P_i *: Precio de la reventa.*
I_i *: Ingresos.*
C_i *: Costos asociados.*
En todos los casos $i = \overline{1,n}$.
Se tienen entonces m *reemplazos, con* n *períodos de vida útil y una tasa de interés del dinero* a.
Obtengamos la ecuación del ingreso total.
¿Qué sucede en el primer reemplazo?
De esta manera se tiene que:

Primer reemplazo.
La utilidad total está dada por la expresión siguiente:

$$-A_o + \sum_{i=1}^{n} \left[P_i + I_i - C_i\right]\left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}$$

Segundo reemplazo.
La utilidad total está dada por la expresión siguiente:

$$-A_o\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n}+\sum_{i=1}^{n}\left[(P_i+I_i)-C_i\right]\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}$$

Tercer reemplazo.
La utilidad total está dada por la expresión siguiente:

$$-A_o\left(\frac{1}{1+a}\right)^{2n}+\sum_{i=1}^{n}\left[(P_i+I_i)-C_i\right]\left(\frac{1}{1+a}\right)^{2n}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}$$

De lo obtenido aquí podemos inferir que:

$$U_T=\sum_{j=1}^{m}-A_o\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(P_i+I_i)-C_i\right]\left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}\right]$$

o también:

$$U_T=-A_o\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(P_i+I_i)-C_i\right]\left(\frac{1}{1+a}\right)^{i-1}\right]$$

Pero de aquí resulta que:

$$U_T=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}\left[-A_o+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[(P_i+I_i)-C_i\right]}{(1+a)^{i-1}}\right]$$

Analicemos a la suma parcial obtenida, es decir:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(j-1)}=1+\frac{1}{1+a}+\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n}+\left(\frac{1}{1+a}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{1+a}\right)^{3n}+\cdots+\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(m-1)}$$

En este caso podemos decir que se trata de una serie geométrica (suma parcial) finita, decreciente con razón $p=\frac{1}{1+a}<1$.

Determinemos el término general de la suma parcial.
Como estamos en presencia de una serie geométrica (suma parcial) finita, el término general de esta es de la forma: $\frac{u-u^{k}}{1-p}$, donde u es el primer término de la suma, u^{k} es el último y r la razón. Luego:

$$\frac{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)}}{1-\frac{1}{1+a}}=\frac{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)}}{\frac{a}{1+a}}=\frac{1}{\frac{a}{1+a}}-\frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)}}{\frac{a}{1+a}}=\frac{1+a}{a}-\frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)}}{a\left(\frac{1}{1+a}\right)}=$$

$$=\frac{1+a}{a}-\frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)-1}}{a}=\frac{1}{a}\left[(1+a)-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n(n-1)-1}\right]$$

Con lo obtenido hasta aquí podemos concluir que la utilidad está dada por la expresión siguiente:

$$U_{nr}=K_o\left[-A_o+\sum_{i=1}^{n}\frac{(P_i+I_i)-C_i}{(1+a)^{i-1}}\right] \text{donde } K_o=\frac{1}{a}\left[(1+a)-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{nm-n-1}\right]$$

Ahora estamos en condiciones de encontrar el valor del período óptimo para realizar el reemplazo de forma que la utilidad sea máxima.

Como n es el período óptimo, entonces se cumple que:

$U_{n-1}<U_n>U_{n+1}$

De donde resulta que:

$$U_{n-1}=U_n-K_o\left[-A_o+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(P_{n-1}+I_{n-1})-C_{n-1}}{(1+a)^{n-2}}\right] \text{(*)}$$

$$U_{n+1}=U_n+K_o\left[-A_o+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(P_{n+1}+I_{n+1})-C_{n+1}}{(1+a)^{n}}\right] \text{(**)}$$

Y como ya se dijo que n es el período óptimo, entonces se cumple que:

$U_n>U_{n-1}$ (I) y $U_n>U_{n+1}$ (II)

Sustituyamos (*) y (**) en (I) y (II) respectivamente y analicemos.

$$U_n>U_n+K_o\left(-A_o+\frac{(P_{n+1}+I_{n+1})-C_{n+1}}{(1+a)^{n}}\right)$$

$$K_oA_o>K_o\frac{(P_{n+1}+I_{n+1})-C_{n+1}}{(1+a)^{n}}$$

De donde resulta que:

$$A_o>\frac{(P_{n+1}+I_{n+1})-C_{n+1}}{(1+a)^{n}} \text{(III)}$$

Analicemos ahora la otra situación.

$$U_n > U_n - K_o\left[-A_o + \frac{\left(P_{n-1}+I_{n-1}\right)-C_{n-1}}{\left(1+a\right)^{n-2}}\right]$$

$$-K_o A_o > -K_o \frac{\left(P_{n-1}+I_{n-1}\right)-C_{n-1}}{\left(1+a\right)^{n-2}}$$

De aquí resulta que:

$$A_o < \frac{\left(P_{n-1}+I_{n-1}\right)-C_{n-1}}{\left(1+a\right)^{n-2}} \quad \text{(IV)}$$

De (III) y (IV) resulta que:

$$\frac{\left(P_{n-1}+I_{n-1}\right)-C_{n-1}}{\left(1+a\right)^{n-2}} > A_o > \frac{\left(P_{n+1}+I_{n+1}\right)-C_{n+1}}{\left(1+a\right)^{n}}$$

Como resultado del análisis realizado podemos llegar a la siguiente conclusión:
No reemplazar el equipo si la utilidad máxima del período anterior es mayor que el precio de compra.
Reemplazar el equipo si la utilidad máxima del próximo período es menor que el precio de compra.
Resumidamente podemos decir que:
Reemplazar el equipo cuando en el próximo período la utilidad actual sea inferior al precio de compra del mismo.

6.8- Problemas de Reemplazo y Mantenimiento que se resuelven mediante la Programación Lineal .

En el presente epígrafe mostraremos modelos de Programación Lineal mediante los cuales es posible resolver problemas relacionados con la reposición y el mantenimiento. Estos modelos a los cuales nos hemos referido son inéditos, fueron creados en el proceso de la investigación. Ellos llenan el vacío que existe en la literatura con relación a los problemas que tienen que ver directamente con la reposición y el mantenimiento.

Ventajas de un modelo de Programación Lineal en problemas relacionados con la Reposición y el Mantenimiento.
Facilidades en la realización del trabajo.
Reducción de cálculos tediosos (trabajo con las series, los gráficos, etc).
Posibilidades de incluir nuevas restricciones (presupuesto, metas de planificación, etc).
Uso de las nuevas tecnologías (paquetes de programas de la Investigación de Operaciones).
Facilidad de modificaciones de la información (entiéndase parámetros).
Permite realizar análisis técnico – económicos más profundos de los resultados.
Permite profundizar el problema.

- Modelo general de Programación Lineal. [1]*

- Variables

b_i : Variables Booleanas del período i donde:

$b_i = 0$ si no se reemplaza en el período i.

$b_i = 1$ si se realiza reemplazo en el período i.

- Restricciones

Variable Booleana excluyente $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$.

Donde n representa los períodos de vida útil del equipo.
Utilidades por período.

$$u_i \leq \left[p_{i_r} + \sum_{j=1}^{i} i_j - A_o - \sum_{j=1}^{i} m_j \right] \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

Donde $i = \overline{1,n}$

p_i: es el precio de la reventa en el período i.

A_0: es el precio de compra del equipo.

Presupuesto para los costos = P_{costo}

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1} \leq P_{costo} \qquad k \leq n$$

Planificación de los ingresos = P_{ingre}

$$\sum_{i=1}^{k} i_i \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1} \geq P_{ingre} \qquad k \leq n$$

- Función Objetivo: Maximizar Utilidades.

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \left(\frac{1}{1+a} \right)^{i-1}$$

En general el modelo teórico es el siguiente:

Sea un equipo con una duración de n años de vida útil, donde A_o es el precio de la compra y las siguientes tablas de valores:

Tabla de los costos de Mantenimiento (1)

Período	1	2	3	4	5
Costo	m_1	m_2	m_3	...	m_n

Tabla de los Ingresos (2)

Período	1	2	3	4	5
Ingresos	i_1	i_2	i_3	...	i_n

Tabla del precio de la Reventa (3)

Período	1	2	3	4	5
Precio de la Reventa	p_1^r	p_2^r	p_3^r	...	p_n^r

Este primer modelo de Programación Lineal mediante el cual es posible maximizar las utilidades del sistema tiene todas las ventajas de un modelo general de Programación Lineal, además pueden ser añadidas otras restricciones propias de las empresas donde sea aplicado, lo que lo hace a su vez más general.

Su desventaja principal está en el cálculo de las u_i (utilidades en el período *i*), siendo este muy engorroso.

6.8.1- Modelo de Programación Lineal para la Reposición y el Mantenimiento mediante una Red de Reposición y Mantenimiento.

En este subepígrafe presentaremos dos modelos de Programación Lineal que se apoyan en la *Teoría de las Redes*.
Una red consta de un conjunto de nodos unidos por arcos (o ramas). La notación para describir una red es (N,A), donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Con cada red siempre hay un flujo asociado, por ejemplo, los productos del petróleo fluyen por ductos y el tráfico de automóviles fluye por una red de carreteras. En general, el flujo en una red está limitado por la capacidad de sus arcos, que pueden ser finitos o infinitos. Se dice que un arco está dirigido u orientado si permite un flujo positivo en una dirección y un flujo cero en la dirección opuesta. Una red dirigida tiene todas las ramas dirigidas. Una meta es una secuencia de ramas distintas que unen a dos nodos, sin importar la dirección del flujo de cada rama. Una ruta forma un lazo o ciclo que se conecta a un nodo consigo mismo. Un lazo dirigido (o un circuito) es un círculo en el cual todas las ramas están orientadas en la misma dirección. Una red conectada es aquella en la cual cada dos nodos distintos están unidos por lo menos por una ruta. Un árbol es una red conectada que puede incluir solo un subconjunto de todos los nodos de la red, mientras que un árbol de expansión une todos los nodos de la red, sin permitir ningún lazo.

⌗ Modelo general de Programación Lineal para minimizar los costos. [2]*

► Definición de Variables

x_{ij} : Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en *i* con reposición en *j*.

Donde:

$i = I$: "período inicial"

$i = F$: "período final del año n"

i : "cualquier otro período intermedio"

x_o : "precio de la compra del equipo"

► Restricciones

Etapa inicial = I

Etapa final = F

$$\sum_{j=1}^{l} x_{jF} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_{I\,j} = 1$$

Etapas intermedias

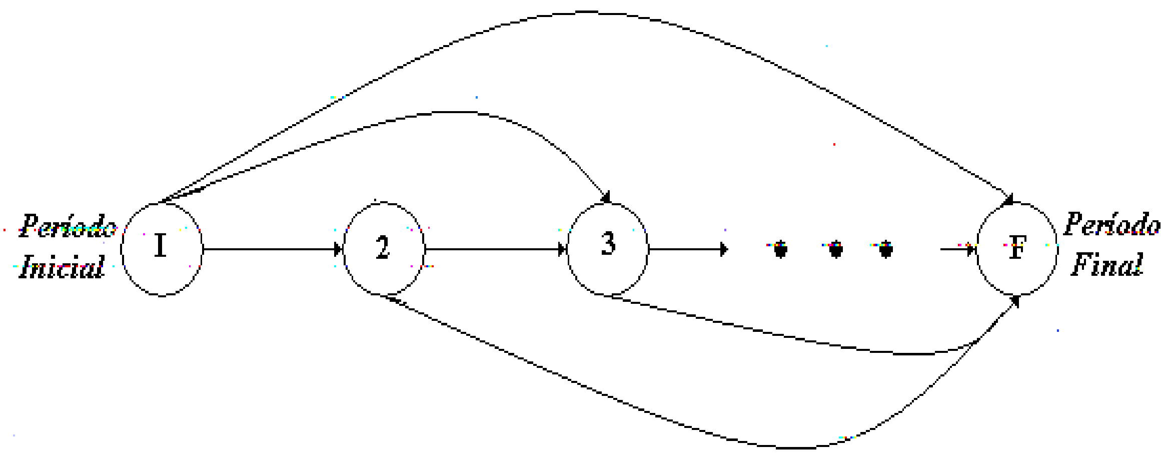
Para todo i que representa etapas intermedias donde:
$i \neq I \wedge i \neq F$
Se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{h} x_{j\,i} - \sum_{j=1}^{k} x_{i\,j} = 0$$

- Función Objetivo: Minimizar los costos

$$Min\,Z(Costos) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{i\,j} \left[\sum_{k=1}^{j-i} m_k - p_{j-i} + x_o \right]$$

Gráficamente el sistema tiene la siguiente forma:



En la función objetivo:
m_k : Representa los costos de mantenimiento en el período k.
p_{j-i} : Es el precio de la reventa.
x_o : Es el precio de la compra del equipo.
En el modelo general que presentamos se dan además tablas de valores [(1) y (3)] similares a las dadas en el primer modelo ([1]*).

Como han podido apreciar en este modelo el problema es concebido desde la Teoría de Redes, confeccionándose para ello la red de reposición y mantenimiento.

Presenta todas las ventajas de un problema de Programación Lineal que sea resuelto en forma de redes con un nodo inicial (período 0 de la vida útil del equipo) y un nodo final (período máximo de vida útil del equipo) y nodos intermedios que representan los diferentes períodos por donde transita el equipo en su vida útil.
El modelo fue concebido como un modelo tradicional que minimiza los costos, por lo que no tiene en cuenta las utilidades. En el mismo, se dificultan las restricciones adicionales que no tengan que ver directamente con el cálculo del período en el cual se debe reponer y no seguir manteniendo.

- Modelo general de Programación Lineal para maximizar las utilidades. [3]*

  - Definición de Variables

x_{ij} : Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en *i* con reposición en *j*.
Donde:
$i = I$: "período inicial"
$i = F$: "período final del año *n*"
i : "cualquier otro período intermedio"
x_o : "precio de la compra del equipo"

  - Restricciones

Etapa inicial = I

$$\sum_{j=1}^{r} x_{Ij} = 1$$

Etapa final = F

$$\sum_{j=1}^{l} x_{jF} = 1$$

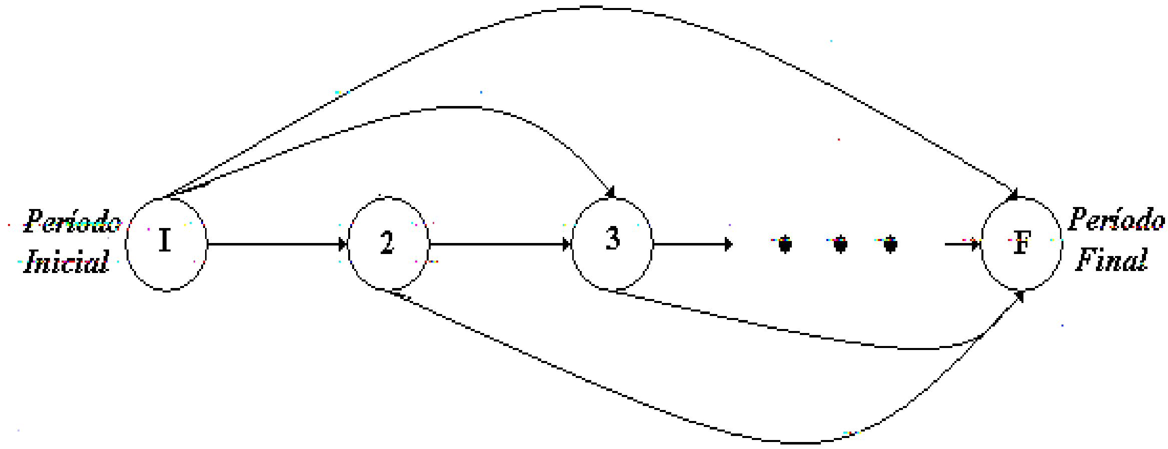
Etapas intermedias
Para todo *i* que representa etapas intermedias donde:
$i \neq I \wedge i \neq F$
Se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{h} x_{ji} - \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 0$$

- Función Objetivo: Maximizar las utilidades

$$MaxZ(utilidades) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} \left[\sum_{k=1}^{j-i} \left({}_k - m_k \right) + p_{j-i} - x_o \right]$$

La red de reposición y mantenimiento es como se ilustra a continuación:



En la función objetivo:

i_k : Representa los ingresos en el período k.

m_k : Representa los costos de mantenimiento en el período k.

p_{j-i} : Es el precio de la reventa.

x_o : Es el precio de la compra del equipo.

En el modelo general que presentamos se dan además tablas de valores [(1), (2), (3)] similares a las dadas en el primer modelo [1]*.

Este modelo, no tradicional, concebido en nuestra investigación, abarca la reposición y el mantenimiento desde la óptica de la maximización de las utilidades del sistema, aspecto este no tratado en la literatura actual.
En esencia, calcula el período en el cual debemos realizar la reposición y además nos da la utilidad máxima a obtener en dicho período, por lo que se convierte en un modelo de Programación Lineal de Reposición y Mantenimiento muy poderoso, útil y moderno.

6.9- Aplicaciones sobre las nuevas concepciones de la Teoría de la Reposición y el Mantenimiento

En este capítulo resolveremos problemas de reposición y mantenimiento aplicando los modelos matemáticos teóricos obtenidos en el capítulo anterior. Realizamos, en la medida de lo posible, una comparación con los métodos existentes, pues presentamos un modelo que trabaja de forma tradicional.
Comenzaremos aplicando el modelo correspondiente a la reposición y el mantenimiento con ganancia en funciones discretas con interés del dinero.

- Consideremos que:

$A_0 = 1000000$ es el precio en dólares de la compra de un cierto equipo.

$a = 6\%$.

$$p = \frac{1}{1+0{,}06} = 0.943$$

En la tabla aparecen C_i, P_i, I_i, siendo estos, los costos asociados, el precio de la reventa, y los ingresos en el período i.

Año	C_i	P_i	I_i	p^n	p^{n-2}	$p^n\left[(P_{n+1}+I_{n+1})-C_{n+1}\right]$	$p^{n-2}\left[(P_{n-1}+I_{n-1})-C_{n-1}\right]$
1	50000	990000	1500000	0.943	1.060	2065170	
2	60000	950000	1300000	0.889	1	1724660	2586400

3	70000	910000	1100000	0.839	0.943	1616340	2190000
4	90000	860000	1090000	0.791	0.889	1400070	1829420
5	120000	810000	1080000	0.746	0.839	1238360	1653540
6	150000	760000	1050000	0.703	0.791	1061530	1485030
7	180000	680000	1010000	0.663	0.746	921570	1313060
8	210000	600000	1000000	0.625	0.703	← 793750	→ 1126460
9	240000	520000	990000	0.590	0.663	631300	977170
10	300000	420000	950000	0.556	0.625	344720	842010
11	400000	320000	700000	0.524	0.590	-52400	668750
12	600000	200000	300000	0.494	0.556		365800

Nótese que en nuestro caso se tiene en el año ocho (8) la siguiente situación:
Para $n = 8$ sucede que:
$p^n \left[P_{n+1} + I_{n+1} - C_{n+1}\right] = 793750$, $p^{n-2} \left[P_{n-1} + I_{n-1} - C_{n-1}\right] = 1126460$ y $A_o = 1000000$, luego:
$793750 < 1000000 < 1126460$, es decir, con este resultado podemos garantizar que el reemplazo debe realizarse en el año 8 como lo indican los cálculos realizados. De esta forma se obtendrá una utilidad máxima de 1126460 pesos.

En el texto "Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos" de Wayne L Winston, 1994, aparece en la página 1032 el siguiente ejercicio:

Acabo de comprar un automóvil nuevo en 12000 dólares. El costo del mantenimiento anual de un automóvil depende de la edad del automóvil al inicio del año como se da en la siguiente tabla:

Costo de Mantenimiento

Edad en Años	1	2	3	4	5
Costo Anual	2000	4000	5000	9000	12000

Para evitar los altos costos de mantenimiento de un automóvil más viejo puedo dar como adelanto mi automóvil y comprar un automóvil nuevo . El precio que recibo al dar como adelanto mi auto depende de su edad al momento de la transacción como se ilustra en la siguiente tabla:
Precio de la Reventa

Edad en Años	1	2	3	4	5
Precio Anual	7000	6000	2000	1000	0

Para planificar los cálculos, suponemos que en cualquier momento, me cuesta 12000 dólares comprar un automóvil nuevo. Mi meta es minimizar el costo neto (costo de compra + costo de mantenimiento – precio de la reventa) incurrido durante los próximos cinco años.
Resuelva el problema.
Resolviendo el problema utilizando el método de redes arroja como solución óptima que el costo mínimo es de 31 000 dólares.
Resolvamos ahora el problema aplicando nuestro segundo modelo de Programación Lineal para comparar los resultados.
En nuestro caso $n = 6$
Definición de las variables
$x_{i\ j}$: Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en i con reposición en j.

Donde:

$i = \overline{1,5}$

$j = \overline{2,6}$

Para determinar la cantidad de variables se empleó la siguiente fórmula:

$C_2^m = \dfrac{m!}{2!\,(m-2)!}$ donde m es el número de nodos.

La función objetivo es:

$$Min\,Z = \begin{cases} 70x_{12} + 120x_{13} + 210x_{14} + 310x_{15} + 440x_{16} + 70x_{23} + 120x_{24} + 210x_{25} + \\ + 310x_{26} + 70x_{34} + 120x_{35} + 210x_{36} + 70x_{45} + 120x_{46} + 70x_{56} \end{cases}$$

Restricciones

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1$ (Período Inicial)

$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1$ (Período Final)

$x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} = 0$ (Período 2)

$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0$ (Período 3)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0$ (Período 4)

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0$ (Período 5)

$x_0 = 12000$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	x_{12}	1.0000	70.0000
7	x_{24}	1.0000	120.0000
14	x_{46}	1.0000	12000.0000
16	x_0	12000.0000	0.0000

Objective Function Value = 310

De aquí se infiere que lo ideal es comprar en el año uno y reemplazar al siguiente, comprar en el segundo año y reemplazar en el cuarto y por último comprar en el cuarto año y reemplazar en el sexto año. El costo mínimo asciende a 31000 pesos.

A pesar de que los resultados son los mismos, desde este punto de vista resulta provechoso aplicar nuestro modelo ya que resulta fácil su implementación, pueden usarse paquetes de programas de la Investigación de Operaciones, ya sea el STORM o el QSB y por último resulta viable el análisis de la solución una vez aplicados los paquetes de programas.

Resolvamos este ejercicio aplicando nuestro tercer modelo, para ello necesitamos la tabla de los ingresos, esta es la que mostramos a continuación:

Tabla de Ingresos

Año	1	2	3	4	5
Ingresos	9000	8000	7000	5000	4000

Observación: En este caso, en lugar de minimizar los costos ahora se trata de maximizar las utilidades, con lo que cambia la esencia del problema.

Solución:

En el caso que nos ocupa se mantienen las mismas restricciones y solo cambia la función objetivo, siendo esta:

$$MaxZ = \begin{cases} 20x_{12} + 50x_{13} + 30x_{14} - 20x_{15} - 110x_{16} + 20x_{23} + 70x_{24} - 10x_{25} - 100x_{26} \\ + 20x_{34} + 50x_{35} + 30x_{36} + 20x_{45} + 50x_{46} + 20x_{56} \end{cases}$$

Restricciones

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1$ (Período Inicial)

$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1$ (Período Final)

$x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} = 0$ (Período 2)

$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0$ (Período 3)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0$ (Período 4)

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0$ (Período 5)

$x_0 = 12000$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	x_{12}	1.0000	20.0000
7	x_{24}	1.0000	70.0000
14	x_{46}	1.0000	50.0000
16	x_0	12000.0000	0.0000

Objective Function Value = 140

De aquí se infiere que lo ideal es comprar en el año uno y reemplazar al siguiente, comprar en el segundo año y reemplazar en el cuarto y por último comprar en el cuarto año y reemplazar en el sexto año. La utilidad máxima a obtener asciende a 140000 pesos.

El siguiente ejercicio lo hemos tomado de Modelos Económicos II de Mercedes Álvarez.

- Una empresa de transporte utiliza un tipo de camión cuyo costo inicial es de 6000.00 pesos, se conoce por datos históricos, la información sobre el costo de operación anual como lo muestra la siguiente tabla:

Años	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
Costo de Mantenimiento	1000	1200	1400	1800	2300	2800	3400	4000

A continuación se presentan las tablas de los ingresos y del precio de la reventa

Tabla de los ingresos

Años	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8
Ingresos	5000	3330	2350	1575	900	400	-200	-800

Tabla del precio de la reventa

Años	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
Precio de Reventa	4000	3500	2000	1500	1000	500	250	100

Además se conoce que la utilidad anual esperada es de 3000 pesos y los costos deben estar por debajo de los 4000 pesos.
De acuerdo con esta situación, determine cada qué tiempo la empresa debe reemplazar a este tipo de camión.
Explicación necesaria
En este caso fue necesario añadir al problema original los ingresos, el precio de la reventa, una meta para los costos y una meta para las utilidades, para poder de esta forma aplicar nuestro modelo (1) de Programación Lineal.
(El problema será resuelto por nuestros tres modelos, donde el primero y el tercero maximizan las utilidades y el segundo minimiza los costos).
Solución
El problema será resuelto primeramente sin considerar el interés del dinero
Definición de variables.
En nuestro caso $b_i, i=\overline{1,8}$ es una variable $(0-1)$ donde $b_i=0$ indicará no reemplazar en el período *i* y $b_i=1$ indicará reemplazar en el período *i*.
La función objetivo es:

$$MaxZ = 2000b_1 + 3630b_2 + 3080b_3 + 2355b_4 + 455b_5 - 2445b_6 - 6295b_7 - 11245b_8$$

Sujeto a las siguientes restricciones:
Meta para los costos.

$$1000b_1 + 1200b_2 + 1400b_3 + 1800b_4 + 2300b_5 + 2800b_6 + 3400b_7 + 4000b_8 \leq 4000$$

Meta para los ingresos.

$$5000b_1 + 3300b_2 + 2350b_3 + 1550b_4 + 900b_5 + 400b_6 - 200b_7 - 800b_8 \geq 3000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:
OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
2	b_2	3.3333	3630.0000

Slack Variables
10 Constr 2 8000.0000 0.0000
Objective Function Value = 12100
De aquí podemos inferir que lo recomendable es reemplazar al camión cada dos años y que la máxima utilidad es de 12100 pesos.
Resolvamos el problema ahora teniendo en cuenta el interés del dinero.
Consideremos que la tasa de interés es del 10%, luego $\frac{1}{1+0,10} = 0,90$
Definición de variables.
En nuestro caso $b_i, i=\overline{1,8}$ es una variable $(0-1)$ donde $b_i=0$ indicará no reemplazar en el período *i* y $b_i=1$ indicará reemplazar en el período *i*.
En este caso la función objetivo es:

$$MaxZ = \begin{cases} 2000b_1 + 3267b_2 + 2494.8b_3 + 1716.795b_4 + 298.525b_5 - 1443.748b_6 - \\ -3345.421b_7 - 5378.449b_8 \end{cases}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:
Meta para los costos.

$$1000b_1 + 1080b_2 + 1134b_3 + 1312.2b_4 + 1509.0b_5 + 1653.4b_6 + 1806.9b_7 + 1913.2b_8 \leq 4000$$

Meta para los ingresos.

$$5000b_1 + 2970b_2 + 1903.5b_3 + 1129.9b_4 + 590.5b_5 + 236.2b_6 - 106.3b_7 - 382.6b_8 \geq 3000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:
OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
2	b_2	3.7037	3240.0000

10 Constr 2 8000.0000 0.0000
Objective Function Value = 12100
De aquí podemos inferir que lo recomendable es reemplazar al camión cada dos años y que la máxima utilidad es de 12100 pesos.
Como puede apreciarse el problema ha arrojado la misma solución, esto sucede por tratarse de una problema docente, en la práctica esto no debe suceder.
Resolvamos el problema ahora utilizando para ello, nuestro segundo modelo de PL, en el cual se minimizan los costos, y comparemos con la solución dada por Mercedes en su modelo.
En nuestro caso $n = 9$ es la cantidad de nodos que se necesitan.
Definición de las variables
$x_{i\ j}$: Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en i con reposición en j.

$i = \overline{1,8}$

$j = \overline{2,9}$

En este caso la función objetivo es:

$$MinZ = \begin{cases} 3000x_{12} + 4700x_{13} + 7600x_{14} + 9900x_{15} + 12700x_{16} + 16000x_{17} + 19650x_{18} + \\ + 23800x_{19} + 3000x_{23} + 4700x_{24} + 7600x_{25} + 9900x_{26} + 12700x_{27} + 16000x_{28} + \\ + 19650x_{29} + 3000x_{34} + 4700x_{35} + 7600x_{36} + 9900x_{37} + 12700x_{38} + 16000x_{39} + \\ + 3000x_{45} + 4700x_{46} + 7600x_{47} + 9900x_{48} + 12700x_{49} + 3000x_{56} + 4700x_{57} + \\ + 7600x_{58} + 9900x_{59} + 3000x_{67} + 4700x_{68} + 7600x_{69} + 3000x_{78} + 4700x_{79} + \\ + 3000x_{89} \end{cases}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1$$
$$x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{79} = 1$$
$$x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} - x_{27} - x_{28} - x_{29} = 0$$
$$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} - x_{37} - x_{38} - x_{39} = 0$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} - x_{48} - x_{49} = 0$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} - x_{57} - x_{58} - x_{59} = 0$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} - x_{67} - x_{68} - x_{69} = 0$$
$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{78} - x_{79} = 0$$
$$x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} - x_{89} = 0$$
$$x_0 = 6000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:
OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
2	x_{13}	1.0000	4700.0000
17	x_{35}	1.0000	4700.0000

28	x_{57}	1.0000	4700.0000
35	x_{79}	1.0000	4700.0000
37	x_0	6000.0000	0.0000

Objective Function Value = 18800

De aquí podemos inferir que lo recomendable es comprar en el año uno y reemplazarlo al tercer año, comprar en el tercero año y reemplazarlo en el quinto año, comprar en el quinto y reemplazar en el séptimo año y por último comprar en el séptimo año y reemplazar en el noveno año, para de esta forma obtener un costo mínimo de 18800 pesos.

Mercedes propone según su método que el camión debe reemplazarse cada cinco años y se incurre en un costo promedio por año de 2700 pesos, lo que representa 13500 pesos en los cinco años. A esto debe añadirse los costos en los que se incurre en los tres años siguientes, ya que analizamos un total de 8 años, en este sentido la empresa incurre en un costo total de 21600 pasos.

Nuestro modelo arroja mejores resultados en este período de tiempo.

Resolvamos ahora el problema aplicando nuestro tercer modelo, es decir, maximizando la utilidad.

En este caso solo cambia la función objetivo, pues las restricciones se mantienen. La función objetivo es:

$$MaxZ = \begin{cases} -6000x_{12} + 3630x_{13} + 3080x_{14} + 2355x_{15} + 455x_{16} - 2445x_{17} - 6295x_{18} - \\ -11245x_{19} - 6000x_{23} + 3630x_{24} + 3080x_{25} + 2355x_{26} + 455x_{27} - 2445x_{28} - \\ -6295x_{29} - 6000x_{34} + 3630x_{35} + 3080x_{36} + 2355x_{37} + 455x_{38} - 2445x_{39} - \\ -6000x_{45} + 3630x_{46} + 3080x_{47} + 2355x_{48} + 455x_{49} - 6000x_{56} + 3630x_{57} + \\ +3080x_{58} + 2355x_{59} - 6000x_{67} + 3630x_{68} 2355x_{69} - 6000x_{78} + 3639x_{79} - \\ -6000x_{89} \end{cases}$$

Las restricciones son las mismas:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1$$
$$x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{79} = 1$$
$$x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} - x_{27} - x_{28} - x_{29} = 0$$
$$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} - x_{37} - x_{38} - x_{39} = 0$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} - x_{48} - x_{49} = 0$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} - x_{57} - x_{58} - x_{59} = 0$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} - x_{67} - x_{68} - x_{69} = 0$$
$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{78} - x_{79} = 0$$
$$x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} - x_{89} = 0$$
$$x_0 = 6000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
2	x_{13}	1.0000	3630.0000
17	x_{35}	1.0000	3630.0000
28	x_{57}	1.0000	3630.0000
35	x_{79}	1.0000	3630.0000

29	x_0	6000.0000	0.0000

Objective Function Value = 14520

De aquí podemos inferir que lo recomendable es comprar en el año uno y reemplazarlo al tercer año, comprar en el año tres y reemplazar en el año cinco, comprar en el año cinco y reemplazarlo en el año siete, por último comprar en el año siete y reemplazar en el año nueve, para de esta forma obtener una utilidad máxima ascendente a 14520 pesos. Si se compara este resultado con el de nuestro primer modelo ambos coinciden en que es necesario reemplazar cada dos años, pero en el primer caso la utilidad asciende a 12100 pesos, mientras que el tercer modelo de máximo las utilidades ascienden a 14520 pesos, esto indica como ya ha sido aclarado que el tercer modelo es el más aconsejable de los dos obtenidos para maximizar las utilidades.

El ejercicio que presentamos a continuación fue tomado de Winston, Wayne L. Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos. -- México: Ed. Iberoamericana, 1994. -- 1337p.

- Un taller para automóviles debe tener siempre un analizador de motor disponible. Un analizador nuevo cuesta 1000 dólares. El costo m_i para el mantenimiento de un analizador durante su i-ésimo año de funcionamiento es como se muestra a continuación:

Costo de Mantenimiento

Años	m_1	m_2	m_3
Costo de Mantenimiento	60	80	120

Un analizador se podrá tener durante 1, 2 o 3 años y después de usarlo *i* años $\left(i = 1,2,3\right)$ se podría vender y realizar un pago inicial de uno nuevo. Si se compra un analizador nuevo y se vende el de *i* años de antigüedad, el precio de la reventa es el siguiente:

Precio de Reventa

Años	p_1	p_2	p_3
Precio de Reventa	800	600	500

El taller desea determinar una política de reemplazo que minimice los costos netos, donde:

Costos netos = costo de mantenimiento + costos compra – precio de la reventa, durante los siguientes tres años.

Este problema se resuelve en el texto antes mencionado aplicando la programación dinámica. En el mismo aparecen varias alternativas que están en dependencia del tiempo en el cual se compra la máquina, para a partir de aquí decidir una política de reemplazo. En él se presentan las siguientes situaciones:

Si se vende en el primer año se incurre en un costo de 260 pesos.

Si se vende en el segundo año se incurre en un costo de540 pesos.

Si se vende en el tercer año se incurre en un costo de 760 pesos.

Resolvamos el problema aplicando nuestro segundo modelo de PL donde se minimizan los costos.

Solución

En este caso $n = 4$ es la cantidad de nodos que se necesitan.

Definición de las variables

$x_{i\,j}$: Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en *i* con reposición en *j*.

Donde:

$i = \overline{1,3}$

$j = \overline{2,4}$

En este caso la función objetivo es:

$$MinZ = 260x_{12} + 540x_{13} + 660x_{14} + 260x_{23} + 540x_{24} + 260x_{34}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

$$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$$

$$x_{13} + x_{23} - x_{34} = 0$$

$$x_0 = 1000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
3	x_{14}	1.000	660.0000
7	x_0	1000.000	0.0000

Objective Function Value = 660

De aquí se infiere que lo óptimo es reemplazar al tercer año obteniéndose un costo mínimo de 660 pesos.

Con este resultado mostramos que la aplicación de nuestro problema es más factible ya que vender después de tres años de explotación implica un costo mínimo de 660 pesos, mientras que solucionado por el método de programación dinámica al cabo de tres años se incurre en un costo de 760 pesos.

Resolvamos el problema aplicando el tercer modelo de PL para maximizar las utilidades. Para ello es necesario que agreguemos la tabla de los ingresos.

Tabla de Ingresos

Años	i_1	i_2	i_3
Ingresos	1000	800	500

El problema cambia su esencia pues ahora se trata de maximizar las utilidades, por lo que la función objetivo es otra y se mantienen las mismas restricciones.

La función objetivo es la siguiente:

$$MaxZ = 740x_{12} + 1260x_{13} + 1540x_{14} + 740x_{23} + 1260x_{24} + 740x_{34}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

$$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$$

$$x_{13} + x_{23} - x_{34} = 0$$

$$x_0 = 1000$$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	x_{12}	1.000	740.0000
4	x_{23}	1.000	740.0000

6	x_{34}	1.000	740.0000
7	x_0	1000.0000	0.0000

Objective Function Value = 2220

De aquí podemos inferir que lo recomendable es comprar en el año uno y reemplazarlo al año siguiente, comprar en el año dos y reemplazar en el año tres y comprar en el año tres y reemplazarlo en el año siguiente, para de esta forma obtener una utilidad máxima ascendente a 2220 pesos.

El siguiente ejercicio lo hemos tomado de Modelos Económicos II de Mercedes Álvarez.

- Una empresa agrícola ha adquirido un camión especializado para el transporte de sus productos a los centros recolectores a un costo de 12 000,00 pesos. Se conoce que después de transcurrido un año de recolección el costo de reparación y mantenimiento del camión es de 1500,00 pesos y en los años siguientes aumenta cada vez en 3000,00 pesos. Los costos que resultan de la diferencia entre el costo inicial del equipo y su valor de desecho son los que se muestran a continuación:

Tabla de los costos

Años	1	2	3	4	5
Costos $	3000	6600	8720	10055	11300

Dadas estas condiciones se desea determinar cuál es el período óptimo de reemplazo y el gasto total que debe hacer la empresa para garantizar esta política.

Observación

Según el Método propuesto por Mercedes el camión debe reemplazarse cada tres años y el costo medio mínimo asciende a 8500.00 pesos por año, así como que el gasto total que debe hacer la empresa es de 255000.00 pesos.

La solución del problema según nuestros modelos es como se muestra a continuación.

Solución

Para solucionar este problema agregaremos la tabla del precio de la reventa, siendo esta la que se muestra a continuación:

Tabla del precio de la reventa

Años	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Precio de Reventa	10000	900	650	450	200

La tabla de los costos de mantenimiento es la que mostramos a continuación:

Años	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
Costo de Mantenimiento	1500	4500	7500	10500	13500

Aplicaremos primeramente nuestro modelo de Programación Lineal 2 en el cual se minimizan los costos.

En este caso $n = 6$ es la cantidad de nodos que se necesitan.

Definición de las variables.

$x_{i\ j}$: Variable $0-1$ que denota la adquisición de un equipo en i con reposición en j.

Donde:

$$i = \overline{1,5}$$

$$j = \overline{2,6}$$

En este caso la función objetivo es:

$$MinZ = \begin{cases} 3500x_{12} + 17100x_{13} + 24850x_{14} + 35550x_{15} + 49300x_{16} + 3500x_{23} + \\ + 17100x_{24} + 24850x_{25} + 35550x_{26} + 3500x_{34} + 17100x_{35} + 24850x_{36} + \\ + 3500x_{45} + 17100x_{46} + 3500x_{56} \end{cases}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1$ (Período Inicial)

$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1$ (Período Final)

$x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} = 0$ (Período 2)

$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0$ (Período 3)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0$ (Período 4)

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0$ (Período 5)

$x_0 = 12000$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	x_{12}	1.000	3500.0000
6	x_{23}	1.000	3500.0000
10	x_{34}	1.000	3500.0000
13	x_{45}	1.000	3500.0000
15	x_{56}	1.000	3500.0000
16	x_0	12000.000	0.0000

Objective Function Value = 17500

De aquí podemos inferir que lo recomendable es comprar en el año uno y reemplazarlo al año siguiente, comprar en el año dos y reemplazar en el año tres, comprar en el año tres y reemplazarlo en el año cuatro, comprar en el año cuatro y reemplazarlo en el año cinco y por último comprar en el año cinco y reemplazar en el sexto, para de esta forma obtener un costo mínimo ascendente a 17500 pesos.

Estos resultados muestran que nuestro modelo es más factible ya que el gasto total en el que incurre la empresa al aplicar esta política de reemplazo es menor ($17500.00) que el obtenido por Mercedes al aplicar su método.

Resolvamos el problema aplicando el tercer modelo de PL para maximizar las utilidades. Para ello es necesario que agreguemos la tabla de los ingresos.

Tabla de Ingresos

Años	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
Ingresos	10000	8500	6500	900	650

El problema cambia su esencia pues ahora se trata de maximizar las utilidades, por lo que la función objetivo es otra y se mantienen las mismas restricciones.

La función objetivo es la siguiente:

$$MaxZ = \begin{cases} 6500x_{12} + 1400x_{13} + 150x_{14} - 9650x_{15} - 22750x_{16} + \\ + 6500x_{23} + 1400x_{24} + 150x_{25} - 9650x_{26} + 6500x_{34} + \\ + 1400x_{35} + 150x_{36} + 6500x_{45} + 1400x_{46} + 6500x_{56} \end{cases}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1$ (Período Inicial)

$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}=1$ (Período Final)
$x_{12}-x_{23}-x_{24}-x_{25}-x_{26}=0$ (Período 2)
$x_{13}+x_{23}-x_{34}-x_{35}-x_{36}=0$ (Período 3)
$x_{14}+x_{24}+x_{34}-x_{45}-x_{46}=0$ (Período 4)
$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}-x_{56}=0$ (Período 5)
$x_0=12000$

Los resultados del problema según el STORM son los siguientes:
OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	x_{12}	1.000	6500.0000
6	x_{23}	1.000	6500.0000
10	x_{34}	1.000	6500.0000
13	x_{45}	1.000	6500.0000
15	x_{56}	1.000	6500.0000
16	x_0	12000.000	0.0000

Objective Function Value = 32500
De aquí podemos inferir que lo recomendable es comprar en el año uno y reemplazarlo al año siguiente, comprar en el año dos y reemplazar en el año tres, comprar en el año tres y reemplazarlo en el año cuatro, comprar en el año cuatro y reemplazarlo en el año cinco y por último comprar en el año cinco y reemplazar en el sexto, para de esta forma obtener una utilidad máxima ascendente a 32500 pesos.

BIBLIOGRAFÍA.

AQUILANO C. Dirección y Administración de la producción y las operaciones. -- México : Ed. Mac Graw Hill, 1995.

ÁLVAREZ, MERCEDES. Modelos Económicos Matemáticos II. -- La Habana : Ed. ISPAE, 1987.-- t II.

BOSSEL, HARTMUT. Modeling and Simulation. -- Estados Unidos : Ed. Sales and Customen Service Office, 1990.

CORTÉS CORTÉS, MANUEL E. Introducción a la Investigación de Operaciones. – Guayaquil : Ed. Universidad de Guayaquil, 1999. – 187p.

CHIANG, ALPHA C. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. – Madrid : Mc Graw Hill, 1987.

EPPEN, G. D. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. -- México : Ed. Prentice Hall, 2000.

FELIPE, PILAR. Programación Matemática I. -- La Habana: Ed. Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo, 1988. -- 352p.

_____________. Programación Matemática II. -- La Habana: Ed. Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo, 1988. -- 281p.

Gestión y Calidad del Mantenimiento. – La Habana : Ed. ISPJAE, 1996. -- 111p.

HEIZER, J Dirección de la Producción / J. Heizer, Barry Render. -- México : Ed. Prentice may, 1998.

HILLIER, FREDERICK S. Operations Research / Frederick Hillier y Gerald S. Lieberman. -- San Francisco : Ed Holden-Day, 1974. – 582p.

KAUFMANN, ARNOLD. Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones. – La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1981. -- 570p.

KOHLOR, H. Statistics for Business and Economics. -- New York : Ed. Harper Collins Publishers, 1994.

MCKEOWN, D. Modelos Cuantitativos para la Administración. -- México : Ed. Iberoamericana, S.A, 1986.

MATHUR, K. Investigación de Operaciones : El arte de la toma de decisiones / K. Mathur, D. Solow. -- México : Ed. Prentice – Hall Hispanoamericana, SA, 1996.

MONKS, JOSEPH G. Operations Management. Shaum's Outline Series : Ed. McGraw Hill, 1985.

NEWMAN, G. DONALD. Engineering economic analysis. -- San José : Editorial McGraw Hill, 1983.

PORTELA SILVA, MANUEL. Modelos Matemáticos I / Manuel Portela Silva, Vladimir Kuznich Artemenko. -- La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1998.

________________________. Modelos Matemáticos II / Manuel Portela Silva, Vladimir Kuznich Artemenko. -- La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1998.

PORTUONDO PICHARDO, FERNANDO M. Economía de Empresas Industriales. – Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1985.– t II.

RÍOS - INSUA, MARÍA JESÚS. Procesos de Decisión Multicriterios / María Jesús Ríos–Insua, Sixto Ríos-Insua. – España : Ed. EUDENA. 1989.

SADASCHIV ADIGA. Object – Oriented Simulation to Support reseach in Manufacturing Systems. Int. J. Prod. Res. (California) Vol 29: (No, 12): 2529-25422, Feb, 1991.

SCHROEDER, ROGER G. Administración de Operaciones. – México : Ed. Mcgraw Hill, 1990.

_____________________. Operations Management. Decision marking in the operations function. – Minnesota : Ed. Mcgraw Hill, 1985.

SCHWEVER, H. Process engineering economics. -- La Habana : Ed. Revolución, 1966.

SEPÚLVEDA, J. Ingeniería económica : Serie Schaum / J. Sepúlveda, W. Souder, B. Gottfried. – México : Ed. Mcgraw Hill, 1985.

TAHA, HANDY. Investigación de Operaciones. – México : Ed. Alfaomega,1991. – 989p.

THIERAUF, R. Toma de Decisiones por medio de la Investigación de Operaciones / R. Thierauf, R. A. Grosse. – México : Ed. Linusa Noriega, 1993.

THUESEN, G. J. Engineering economy / G. J. Thuesen, W. J. Fabrycky. -- USA : Ed. Prentice Hall int, 1984.

TRUJILLO, JOSÉ M. Métodos Económico - Matemáticos I / José M. Trujillo, José A. Díaz. -- La Habana : Ed. ENPES,1988. -- 339p.

_________________________. Métodos Económico - Matemáticos II. / José M. Trujillo, José A. Díaz. -- La Habana : Ed. ENPES,1988. -- 395p.

WATSON, GALLAGHER. Métodos Cuantitativos para la toma de decisiones en Administración. – México : Ed. Mc Graw-Hill, 1982. – 612p.

WINSTON, WAYNE L. Investigación de Operaciones : Aplicaciones y Algoritmos. – México : Ed. Iberoamericana, 1994. – 1337p.

Sitios Web de Internet

http://www.jalonso.com/programación.htm#multiobjetivo.

Título: Programación Multicriterio: Un instrumento para el diseño de sistemas de producción.
http://gente.pue.uplap.mx/~absalon/papers/perfiles 96.html
Título: Aplicaciones de la Investigación de Operaciones.
http://www.sio-ams.com
Título: Teorías y metodologías principales de la Investigación de Operaciones.
http://www.unirioja.es/Informacion/Asignaturas/Empresas/207180.html
Título: Matemáticas para Economistas.
http://www.home.coqui.net/maan/empresa.htm
Título: Métodos de Optimización.
http://www.geocities.com/Silicon Vallery/Pines/7894/dual.html
Título: El dual de la Programación Lineal.
http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/optas/dantzig.html
Título: Profesor George Dantzig: Linear Programming Fourder Turns 80.
http://www.sio-ams.com/progmate.htm
Título: Programación Lineal.
http://www.ee.uwa.edu.au/~croft/eom446/lecd.html
Título: Linear Programming.
http://www.altavista.lineal.com
Título: Programación Lineal.
http://www-2.cs.cmu.edu/~koopman/des_s99
Título: Profits and Business Models.
http://www-2.cs.cmu.edu/~koopman/des_s99
Título: End Of Life Wearout & Replacement
http://www.monografías.com/punto de equilibrio.html
Título: La relevancia del punto de equilibrio en la toma de decisiones en las empresas de arrendamiento financiero.

INDICE

Título del Libro:

Modelos Matemáticos Aplicados a la Administración y la Economía.

Autores:

Dr. Manuel E. Cortés Cortés

Msc. Ridelio Miranda Pérez

Msc. Teresita M. Sánchez Navarro

Msc. Domingo Curbeira Hernández

Facultad de Informática.
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad de Cienfuegos. Cuba.