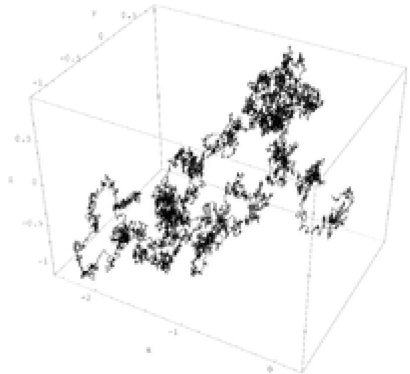
Movimiento browniano

http://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano



Movimiento browniano en tres dimensiones.

El **movimiento browniano** es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió este fenómeno en 1827 y observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente. En 1785, el mismo fenómeno había sido descrito por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol.

El movimiento estocástico de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas (átomos) del fluido sometidas a una agitación térmica.

Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así, la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo, y así se genera el movimiento observado.

Tanto la difusión como la ósmosis se basan en el movimiento browniano.

La descripción matemática del fenómeno fue elaborada por Albert Einstein y constituye el primero de sus artículos del que, en la obra de Einstein, se considera el *Annus*

Mirabilis ("año maravilloso", en latín), 1905. La teoría de Einstein demostraba la teoría atómica, todavía en disputa a principios del siglo XX, e iniciaba el campo de la física estadística.

Índice

Historia

El poema científico *Sobre la Naturaleza de las cosas*, del romano Lucrecio (60 a.C.), incluye la notable descripción de un movimiento browniano de partículas de polvo. El autor presentó este hecho como prueba de la existencia de los átomos:

Observa lo que acontece cuando rayos de sol son admitidos dentro de un edificio y cómo arroja la luz sobre los lugares oscuros. Puedes ver la multitud de pequeñas partículas moviéndose en un sinnúmero de caminos... su baile es un indicio de movimientos subyacentes de materia escondidos de nuestra vista... eso origina el movimiento de los átomos en sí mismos (p.e., espontáneamente). Entonces los pequeños organismos que son eliminados del impulso de los átomos son puestos en marcha por golpes invisibles y a su vez en contra de unos diminutos cañones. Así, el movimiento de los átomos emerge gradualmente de un nivel del sentido, que estos cuerpos están en movimiento como vemos en el rayo de sol, movidos por soplos que parecen invisibles.

Sobre la naturaleza de las cosas, Lucrecio

Jan Ingenhousz describió el movimiento irregular de partículas de carbón pulverizadas en la superficie del alcohol en 1785. No obstante, el descubrimiento del movimiento browniano se atribuye tradicionalmente al botánico Robert Brown en 1827. Se cree que Brown estuvo estudiando al microscopio partículas de polen flotando en el agua. Dentro de las vacuolas de los granos de polen observó diminutas partículas con movimientos nerviosos. Al repetir el experimento con partículas de polvo, concluyó que el movimiento no se debía a que las partículas de polen estaban "vivas", aunque no explicó el origen del movimiento.

El primero en describir matemáticamente el movimiento browniano fue Thorvald N. Thiele en 1880, en un documento sobre el método de los mínimos cuadrados. Fue seguido independientemente por Louis Bachelier en 1900, en su tesis doctoral *La teoría de la especulación*, en la que se presenta un análisis estocástico de acción y opción de mercados. Sin embargo, fue el estudio independiente de Albert Einstein en su artículo de 1905 (*Über die von der molekularischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* / *Sobre el movimiento postulado por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario*) en el que mostró la solución a los físicos, como una forma indirecta de confirmar la existencia de átomos y moléculas.

En esa época la naturaleza atómica de la materia aún era una idea controvertida. Einstein y Marian Smoluchowski dedujeron que, si la teoría cinética de los fluidos era correcta, entonces las moléculas de agua tendrían movimientos aleatorios. Por lo tanto, las partículas pequeñas podrían recibir un número aleatorio de impactos, de fuerza aleatoria y de direcciones aleatorias, en cortos períodos de tiempo. Este bombardeo aleatorio por las moléculas del fluido podría ser suficiente para que las partículas pequeñas se moviesen de la manera exacta que Brown había descrito. Theodor Svedberg hizo importantes demostraciones del movimiento browniano en coloides, así como Felix Ehrenhaft lo hizo con partículas de plata en la atmósfera terrestre. Jean Perrin también realizó experimentos para verificar los modelos matemáticos, y al publicar sus resultados finales se puso fin a dos mil años de disputa sobre la realidad de las moléculas y los átomos.

Metáfora intuitiva del movimiento browniano

Considere un gran balón de 10 metros de diámetro. Imagine este balón en un estadio de fútbol o cualquier otra área llena de gente. El balón es tan grande que permanece por encima de la muchedumbre. Las personas aciertan a golpear el balón en diferentes momentos y direcciones de manera completamente aleatoria. Por ello, el balón no sigue una trayectoria. Ahora, considere una fuerza ejercida durante un cierto tiempo; podemos imaginar 20 personas empujando para la derecha y 21 para la izquierda y que cada persona está ejerciendo cantidades de fuerza equivalentes. En este caso las fuerzas ejercidas por el lado izquierdo y por el lado derecho no están equilibradas, favoreciendo al lado izquierdo, por lo que el balón se moverá ligeramente hacia la izquierda. Esta desproporción siempre existe, y es lo que causa el movimiento aleatorio. Si observáramos la situación desde arriba, de modo que no pudiéramos ver a las personas, veríamos el gran balón como un objeto animado por movimientos erráticos.

Ahora volvamos a la partícula de polen de Brown nadando aleatoriamente en el agua. Una molécula de agua mide aproximadamente 1 nm, mientras una partícula de polen tiene aproximadamente 1 µm de diámetro, 1000 veces mayor que una de agua. Así pues, la partícula de polen puede ser considerada como un gran balón empujado constantemente por las moléculas de agua. El movimiento browniano de las partículas en un líquido se debe a las desproporcionalidades instantáneas en las fuerzas ejercidas por las pequeñas moléculas líquidas sobre la partícula.

Modelos matemáticos para la descripción del movimiento browniano

La exposición matemática de esta definición corresponde a la ecuación que gobierna la evolución temporal de la función probabilística de densidad asociada con la ecuación de difusión de una partícula browniana, y en definitiva es una ecuación diferencial parcial.

La evolución temporal de la posición de una partícula browniana en sí misma puede ser descrita aproximadamente por una ecuación de Langevin, la cual involucra un campo de fuerzas aleatorias que representan el efecto de fluctuaciones termales de una solución de partículas brownianas. En grandes escalas de tiempo, el movimiento browniano matemático se describe perfectamente con la ecuación de Langevin. A tiempos cortos, los efectos de la inercia prevalecen en esta ecuación. Sin embargo, se considera a esta ecuación, de otra manera la ecuación se vuelve singular, así que se debe eliminar el término de la inercia de esta ecuación para tener una descripción exacta, pero el comportamiento singular de estas partículas no se describe del todo.

Otras maneras de conseguir su modelo matemático consideran un *movimiento browniano* $B = (B_t)_{t \in [0,\infty]}$como un proceso de Gauss central con una función covariante $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$para toda $t, s \geq 0$. El resultado de un proceso estocástico se le atribuye a Norbert Wiener, quedó demostrado en la teoría de probabilidad, existente desde 1923, y se conoce con el nombre de proceso de Wiener. Muchos detalles importantes aparecen en sus publicaciones.

Hay muchas posibilidades de construir un movimiento browniano:

- La construcción abstracta por medio de esquemas de Kolmogórov, donde el problema viene con el aumento (o camino creciente).
- La costrucción de Lèvy-Ciesielski: se induce este movimiento con ayuda de un sistema de Haar de $C([0,1])$a una base de Schauder, y se construye como un proceso estocástico con curva creciente.
- Sea Z_0, Z_1, … independiente, distribuida idénticamente y con distribución normal $\sim \mathcal{N}(0,1)$. Luego:

  $$S(t) = Z_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sqrt{2}\sin(k\pi t)}{k\pi}$$

  es un movimiento browniano.

Este fenómeno está muy relacionado también con la simulación de la cotización de las acciones.

La caracterización de Lévy del movimiento browniano

El matemático francés Paul Lévy propuso el siguiente teorema, donde la condición necesaria y suficiente para un $\mathbf{R}^n$ continuo, evaluado en un proceso estocástico *X* para ser realmente *n*, dimensiona un movimiento browniano. Por lo tanto la condición de

Lévy puede utilizarse realmente como una definición alternativa de movimiento browniano.

Entonces, $X = (X_1, ..., X_n)$ sea un proceso estocástico continuo en un espacio probabilístico $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ tomando valores en $\mathbf{R}^n$. Tenemos la siguiente equivalencia:

1. X es un movimiento browniano con respecto a **P**, por ejemplo X con respecto a **P** es la misma que la n dimensional del movimiento browniano; por ejemplo, la medida de empuje $X_*(\mathbf{P})$ es una medida clásica de Wiener de $C_0([0, +\infty); \mathbf{R}^n)$.
2. tanto
    1. X es una martingala con respecto a **P** como
    2. para todo $1 \leq i, j \leq n$, $X_i(t)X_j(t) - \delta_{ij}t$ es una martingala con respecto a **P**, donde δ_{ij} denota una delta de Kronecker.

Movimiento browniano en una variedad de Riemann

El generador infinitesimal (y, por lo tanto, el generador característico) de un movimiento browniano en $\mathbf{R}^n$ puede calcularse fácilmente en ½Δ, donde Δ denota un operador laplaciano. Esta observación es útil al definir un movimiento browniano en una variedad de Riemann m-dimensional (M, g): un movimiento browniano M se define como una difusión en M cuyo operador característico $\mathcal{A}$ en coordenadas locales x_i, $1 \leq i \leq m$, está dado por $\tfrac{1}{2}\Delta_{\mathrm{LB}}$, donde Δ_{LB} es el operador de Laplace-Beltrami dado en las coordenadas por

$$\Delta_{\mathrm{LB}} = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g)} \sum_{j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

donde $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$ en el sentido de una matriz cuadrada inversa.

El movimiento browniano en la literatura

El siguiente fragmento es del capítulo 34 de la novela *Rayuela*, de Julio Cortázar:

Maga, vamos componiendo una figura absurda, dibujamos con nuestros movimientos una figura idéntica a la que dibujan las moscas cuando vuelan en una pieza, de aquí *para allá, bruscamente dan media vuelta, de allá para aquí, eso es lo que se llama movimiento brownoideo, ¿ahora entendés?, un ángulo recto, una línea que sube, de aquí para allá, del fondo al frente, hacia arriba, hacia abajo, espasmódicamente, frenando en seco y arrancando en el mismo instante en otra dirección, y todo eso va tejiendo un dibujo, una figura, algo inexistente como vos y como yo, como los dos puntos perdidos en París que van de aquí para allá, de allá para aquí, haciendo su dibujo, danzando para nadie, ni siquiera para ellos mismos, una interminable figura sin sentido.*

Otra novela en la que aparece el movimiento browniano es "Un viaje alucinante" de Isaac Asimov, novela en la que un equipo de científicos son miniaturizados a escala bacteriana y son introducidos en el torrente sanguíneo de un paciente en un submarino, detallándose los encuentros con distintos elementos como células, bacterias o virus, peripecia en la que sufren los efectos de dicho movimiento.

Véase también

- Ecuación de difusión
- Ecuación de Langevin
- Efecto Tyndall
- Fractales brownianos
- Ósmosis
- Energía cinética
- Teoría de las colisiones

Referencias

- Brown, R., "A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies." Phil. Mag. 4, 161-173, 1828. (versión PDF del artículo original de Robert Brown, "Breve explicación sobre las observaciones microscópicas realizadas en los meses de junio, julio y agosto de 1827 acerca de las partículas contenidas en el polen de las plantas y acerca de la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos") que incluye la defensa posterior acerca de sus observaciones originales, *Additional remarks on active molecules/Observaciones adicionales sobre las moléculas activas*.)

- Einstein, A. "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen." Ann. Phys. 17, 549, 1905. [1]
- Einstein, A. "Investigations on the Theory of Brownian Movement". New York: Dover, 1956. ISBN 0-486-60304-0 [2]
- Theile, T. N. Versión danesa: "Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en 'systematisk' Karakter". Versión francesa: "Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthodes de moindre carrés", publicada en la misma fecha también en *Vidensk. Selsk. Skr. 5. Rk., naturvid. og mat. Afd.*, 12:381–408, 1880.
- Nelson, E., *Dynamical Theories of Brownian Motion* (1967) (versión PDF del libro descatalogado, descargable desde la página personal del mismo autor)
- Ruben D. Cohen (1986) "Self Similarity in Brownian Motion and Other Ergodic Phenomena," *Journal of Chemical Education* 63, pp. 933-934 (descarga en PDF)
- J. Perrin, Ann. Chem. Phys. **18**, 1 (1909). Véase también el libro *Les Atomes* (1914).