Capítulo 7. Mecánica de los Fluidos

7.1 Conceptos Básicos

Densidad de un Fluido

Un fluido es cualquier sustancia capaz de fluir, de chorrear, de derramarse, de adaptarse a la forma del recipiente que la contiene. Usualmente comprende líquidos y gases. Los sólidos no fluyen, pero existen algunos semi-sólidos como las resinas que pueden fluir, pero muy lentamente. En lo que sigue este tipo de sólidos no se consideran.

Si m es la masa de un cuerpo o de una porción cualquiera de sustancia y V es el volumen que ocupa, la densidad absoluta ρ del cuerpo se define por la relación

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

En lo que sigue se consideran los fluidos como *homogéneos*. Significa que su densidad (y también su composición) tiene el mismo valor en todos los puntos.

Los líquidos y los gases se diferencian en que los gases son apreciablemente *compresibles*, y su densidad depende apreciablemente de la temperatura y la presión; es decir, $\rho = \rho(T, p)$. Los líquidos, por su parte, dependen muy poco de T y de p, y son prácticamente *incompresibles*. Por tanto, en lo que sigue supondremos que para los líquidos la densidad se mantiene constante, siempre que no se especifique lo contrario. En la tabla siguiente aparecen algunos valores típicos de la densidad en sólidos y líquidos.

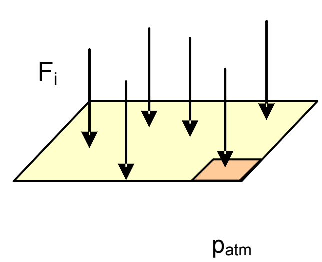
Sustancia	**ρ (g/cm^3)**
etanol	0.81
agua destilada	1.00
agua de mar	1.03
mercurio (Hg)	13.6
hielo	0.92
hierro	7.6
oro	19.3
corcho	0.24

La flotabilidad de un cuerpo está asociada a su densidad. El hierro flota en el mercurio; no así el oro, etc.

Presión

Considere una superficie S cualquiera, de área A, sobre la cual actúan componentes F_i en dirección perpendicular. La presión promedio actuando sobre la superficie S se define por la expresión:

$$p_m = \frac{\sum F_i}{A}$$



La presión en un punto se define tomando el límite para una porción ΔA que tiende a cero:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{F_i}{\Delta A}$$

Unidades

p] = [F]/[S] = N/m^2 = Pascal (Pa)

Principio de Pascal

El principio de Pascal es producto de la evidencia experimental. Fue enunciado en el siglo XVII, y dice lo siguiente:

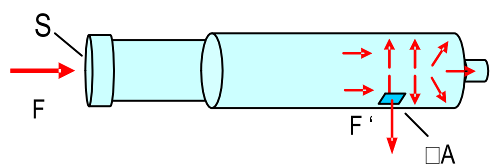
La presión aplicada a cualquier región de un fluido se transmite íntegramente a todos los puntos del mismo y a las paredes del recipiente que lo contiene.

Blaise Pascal (1623-1662), filósofo, matemático y físico francés. En 1642 inventó la primera máquina de calcular mecánica. En 1648, demostró experimentalmente que el nivel de la columna de mercurio de un barómetro lo determina el aumento o disminución de la presión atmosférica circundante.

Junto con el matemático francés Pierre de Fermat, formuló la teoría matemática de la probabilidad, que ha llegado a ser de gran importancia en estadísticas financieras, matemáticas y sociales, así como un elemento fundamental en los cálculos de la física teórica moderna.

A modo de ejemplo considere el émbolo de una jeringuilla de inyecciones a la que se la tapa la salida del líquido. Si F es la fuerza aplicada sobre el pistón de sección transversal S, entonces

$$p = F/S .$$



Esa presión se transmite a todos los puntos donde el fluido está en contacto. Para cada segmento de área ΔA habrá una componente perpendicular actuando, de valor $F' = p\Delta A$.

Prensa hidráulica

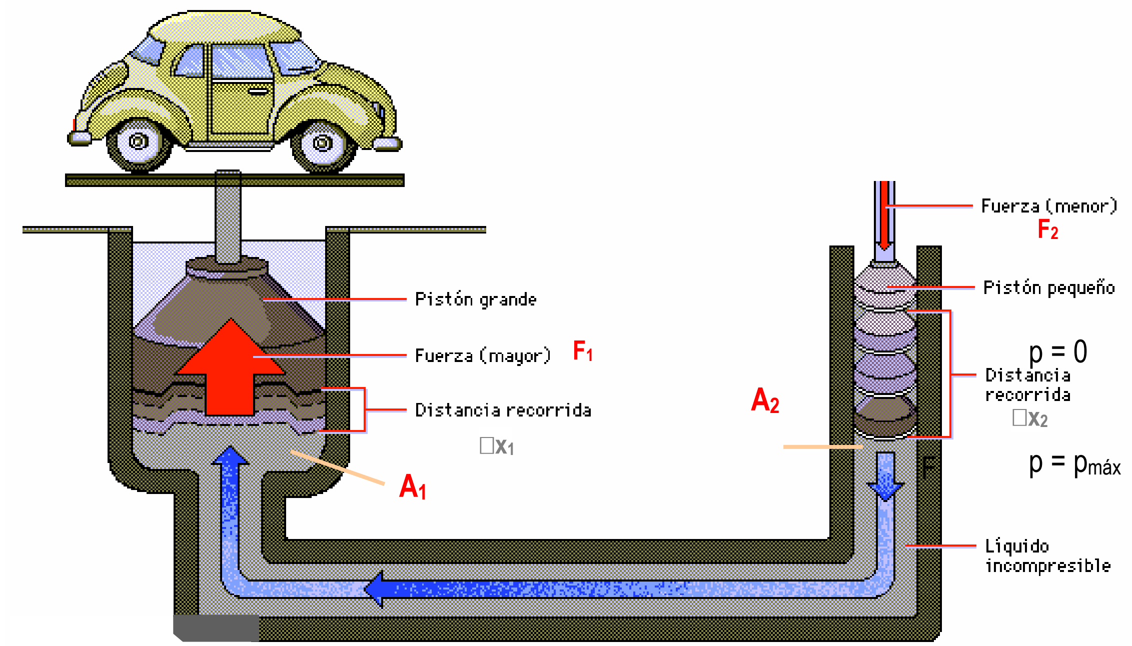
Su funcionamiento se basa en el principio de Pascal. Un esquema de su funcionamiento aparece en la figura siguiente.

Si p es la presión sobre el líquido, supuesto incompresible, como la presión es la misma en todos los puntos; $p_1 = p_2$.

Por tanto: $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$, y agrupando términos: $\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}}$

Si $A_1 >> A_2$ como se ve en la figura, entonces $F_1 >> F_2$.

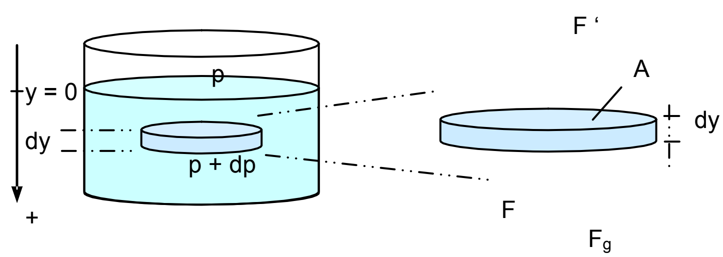
Note que el principio de conservación de la energía no se infringe. El trabajo realizado es el mismo en ambos casos: $F_1\Delta x_1 = F_2\Delta x_2$, donde Δx es lo que avanza cada pistón. En la práctica, los sistemas de presión tienen válvulas que permiten ir añadiendo líquido al sistema e impiden su retorno al pistón de menor área.



7.2 Ecuación Fundamental de la Hidrostática

Al igual que en los sólidos, sobre los gases y los líquidos también actúa la atracción gravitatoria, y por tanto también tienen peso. Cuando un líquido se encuentra en equilibrio en un recipiente, cada capa de líquido debe soportar el peso de todas las que están por encima de ella. Esa fuerza aumenta a medida que se gana en profundidad y el número de capas aumenta, de manera que en la superficie la fuerza (y la presión) es prácticamente nula, mientras que en el fondo del recipiente la presión es máxima.

Para calcular la forma en que varía la presión desde la superficie del líquido hasta el fondo del recipiente, considere una porción de líquido en forma de disco a cierta profundidad por debajo de la superficie, de espesor infinitesimal. Las fuerzas que actúan sobre esa porción de líquido a lo largo del eje **y** son las siguientes.



$F_g = mg = \rho Vg = \rho Agdy$ (atracción gravitatoria)
$F = pA$ (peso de las capas líquidas superiores)
$F' = (p + dp)A$ (fuerza equilibrante ejercida por las capas inferiores de líquido)

Cuando el sistema está en equilibrio, se debe cumplir:

$$F' - F - F_g = ma_y = 0$$
$$(p + dp)A - pA - \rho Agdy = 0$$

Simplificando y ordenando esta expresión se llega a:

$$dp = \rho gdy .$$

Para hallar la diferencia de presión entre dos puntos ubicados a diferentes profundidades y_1, y_2 debemos integrar a ambos lados de la expresión anterior:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

$$\Delta p = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \qquad (7.2.1)$$

Esta expresión es válida para líquidos y gases. En los gases hay que tomar en cuenta la dependencia de la densidad ρ con la altura; $\rho = \rho(y)$. Como los líquidos son prácticamente incompresibles, la densidad ρ se puede considerar constante y extraerla fuera de la integral.

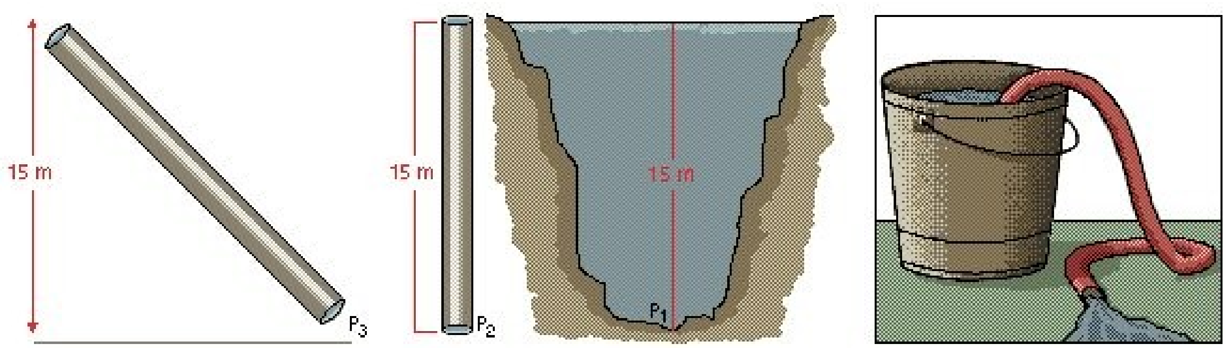
Líquidos

Considerando ρ = constante en (7.2.1): $\Delta p = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy = -\rho g (y_2 - y_1)$

Tomando $y_2 - y_1 = h$ (profundidad a partir del punto 1) y $\Delta p = p_2 - p_1$, sustituyendo y arreglando términos en esta expresión, se llega a:

$$p_2 = p_1 + \rho g h \qquad (7.2.2)$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación fundamental de la hidrostática.* En particular, si el punto 1 se toma en la superficie del líquido, p_1 representa la presión en la superficie, y h la profundidad a partir de la superficie.



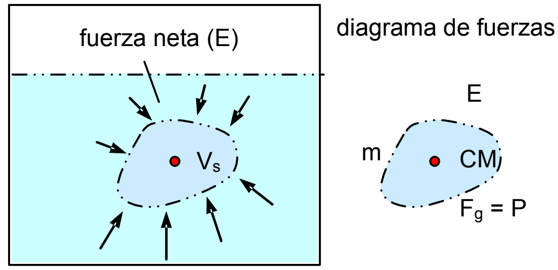
$P_1 = P_2 = P_3$

Las leyes de la mecánica de fluidos pueden observarse en muchas situaciones cotidianas. Por ejemplo, la presión ejercida por el agua en el fondo de un estanque es igual que la ejercida por el agua en el fondo de un tubo estrecho, siempre que la profundidad sea la misma. Si se inclina un tubo más largo lleno de agua de forma que su altura máxima sea de 15 m, la presión en el fondo será la misma que en los otros casos de la figura (*izquierda*). En un sifón (*derecha*), la fuerza hidrostática hace que el agua fluya hacia arriba por encima del borde hasta que se vacíe el cubo o se interrumpa la succión.

7.3 Principio de Arquímedes

Considere una porción cualquiera de líquido en el seno de un fluido, de volumen V_s (volumen sumergido).

La ecuación fundamental de la hidrostática, ec. (7.2.2), nos dice que la presión aumenta con la profundidad, por lo que las componentes verticales de las fuerzas ejercidas sobre la parte inferior del volumen considerado serán superiores a las ejercidas sobre la parte superior.



La diferencia de presiones origina una fuerza neta E actuando hacia la superficie que se conoce como "*empuje de Arquímedes*". En la figura, la porción de líquido analizada se comporta como si todas las fuerzas externas estuvieran actuando sobre su CM. En el equilibrio las componentes horizontales se compensan, mientras que en la vertical, $E = F_g$.

Si el sistema no está acelerado, F_g es también igual al peso del volumen de líquido considerado. Por tanto, el empuje de Arquímedes será igual al peso del volumen de líquido considerado. Como $F_g = mg$ $= {}_L V g$, es posible expresar el empuje como

$$= \quad {}_s \qquad (7.3.1)$$

Suponga ahora que el volumen de líquido V_s se sustituye por otro idéntico de algún material sólido de diferente densidad ρ_s, por ej., por madera. La fuerza F_g no será la misma, ya que la densidad de la madera diferirá, en general, de la del líquido, $\rho_{sólido} \neq \rho_{líquido}$, y

$$F_g' = m'g = \quad g \quad \rho_L$$

$$_s \qquad .$$

Sin embargo, *el empuje calculado en (7.3.1) no variará*, puesto que depende de las fuerzas ejercidas por el resto del líquido y no de la porción de líquido sustituida por el sólido. *Note que si el sólido se sumergiera en el líquido, desplazaría de su lugar un volumen de líquido exactamente igual al suyo, y el resultado del análisis sería completamente similar al que acabamos de realizar.* Es posible resumir estos resultados de la forma siguiente:

Todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido recibe un empuje
Ascendente igual al peso del fluido desalojado

El enunciado anterior se conoce como "principio de Arquímedes" y es conocido desde la antigüedad.

Arquímedes (287-212 a.C.), matemático e inventor griego. Escribió importantes obras sobre geometría plana y del espacio, aritmética y mecánica. Nació en Siracusa, Sicilia, y se educó en Alejandría, Egipto. En el campo de las matemáticas se anticipó a muchos de los descubrimientos de la ciencia moderna, como el cálculo integral, con sus estudios de áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas. En mecánica, Arquímedes definió la ley de la palanca y se le reconoce como el inventor de la polea compuesta. También inventó el "'tornillo sin fin" para elevar el agua de nivel. Se dice que descubrió el principio que lleva su nombre mientras se bañaba, al comprobar cómo el agua se desplazaba y se desbordaba cuando se sumergía.

7.4 Presión Atmosférica

De manera similar a como ocurre en los líquidos, la atmósfera puede considerarse formada por capas sucesivas de aire que descansan unas sobre otras. Por tanto, el análisis de la sección 2 también es válido en este caso, y la ecuación (7.2.1), que expresa la diferencia de presiones a diferentes alturas, también es válida:

$$\Box = {}^{y_2}_{y_1}\ g\,dy$$

Pero ahora no es posible considerar la densidad del aire constante, pues varía apreciablemente con la altura. Para grandes alturas también habría que tomar en cuenta la variación de g. Las determinaciones experimentales de la presión muestran que la presión atmosférica varía con la altura según la siguiente expresión:

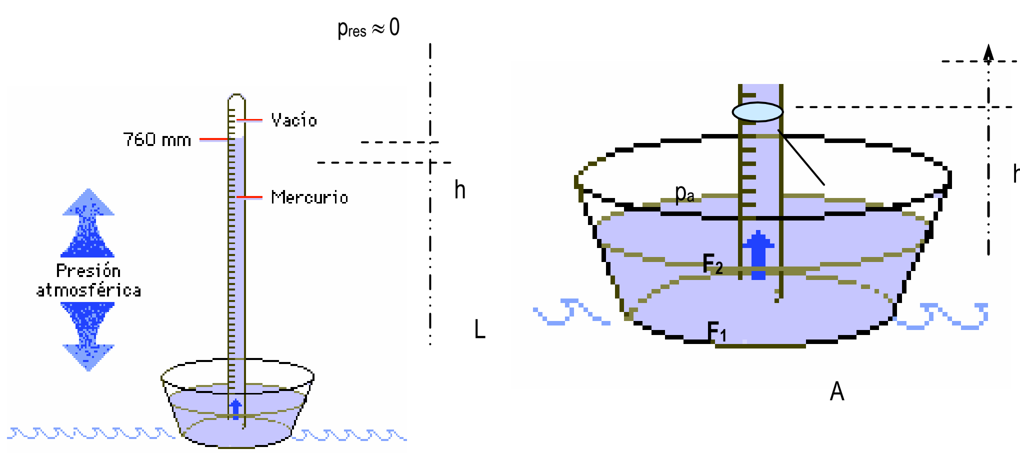
$$p \quad p\ e^{\alpha\, y}$$

Esta es la *ecuación barométrica*, donde ***y*** representa la altura sobre el nivel del mar, p_o la presión en $\boldsymbol{y_o}$ y la constante α es igual a 0.116 km^{-1}.

Barómetro

La presión atmosférica se mide utilizando el *barómetro de mercurio*, inventado por Torricelli en 1643. El principio de funcionamiento de un barómetro es el siguiente. Si un tubo de vidrio se llena totalmente de mercurio, se invierte sin dejar que penetre aire y se sumerge en una cubeta parcialmente llena con el mismo líquido, se encuentra que la altura de la columna se estabiliza alrededor de los 760 mm.

La presión residual dentro del tubo (p_{res}) está originada esencialmente por vapores de mercurio y tiene un valor extremadamente pequeño. Al estabilizarse la columna de mercurio, la fuerza ejercida por la presión atmosférica sobre la superficie del mercurio en la cubeta se equilibra con la fuerza ejercida por la columna en el fondo del recipiente.



En la figura, las fuerzas ejercidas por encima y por debajo de la sección transversal del tubo, de área A, deben ser iguales en el equilibrio. Si ρ_{Hg} es la densidad del mercurio, aplicando la condición de equilibrio y la ecuación fundamental de la hidrostática,

$$F_1 = F_2$$
$$p_1A = p_2A$$
$$p_{res} + \rho_{Hg}g(h + L) = p_a + \rho_{Hg}gL$$

Simplificando términos, considerando $p_{res} = 0$ e invirtiendo la ecuación, se llega a

Hg

De manera que el valor de la presión atmosférica en pascal puede obtenerse midiendo la altura h de la columna a partir de la superficie del mercurio en el recipiente.

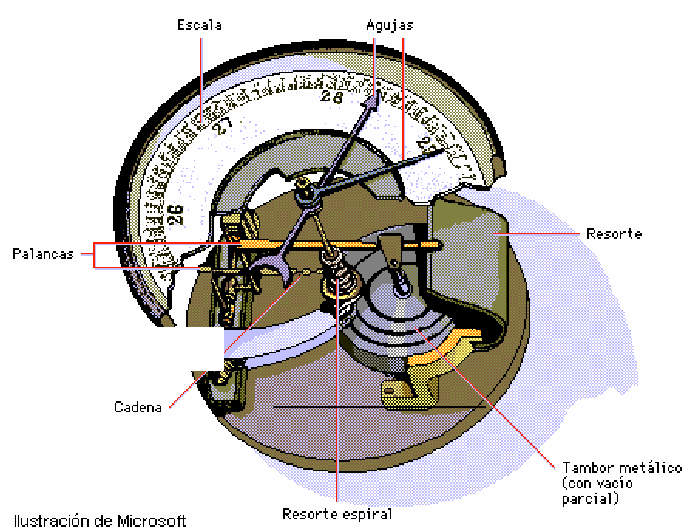
Unidades

1 atmósfera normal = 760 mm de Hg = 760 Torr

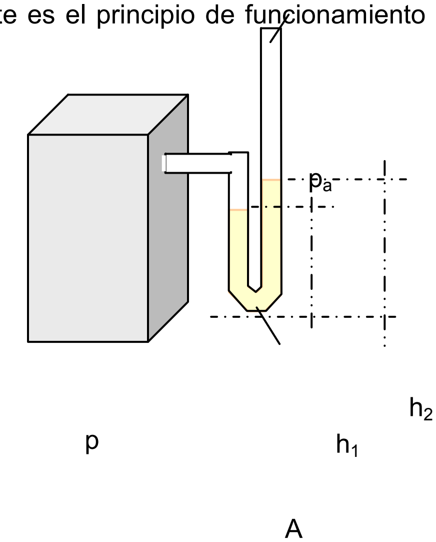
En muchos textos se utiliza el *bar* : 1 bar = 750 mm de Hg
En el SI de unidades: 1 atmósfera normal = 101 325 Pa
También se acostumbra utilizar el hectopascal (hPa). 1 atm = 1013.25 hPa.

Barómetro Aneroide

Mediante un barómetro de mercurio es posible calibrar la deformación de una membrana metálica hueca a la que se le ha hecho vacío previamente. Cuando ésta membrana se acopla mecánicamente a una aguja que indica variaciones en una escala, indicará los cambios de la presión atmosférica, pues la membrana se dilata o contrae con los cambios de la presión. Este es el principio de funcionamiento de los barómetros *aneroides* (sin líquido).



Barómetro aneroide



Manómetro

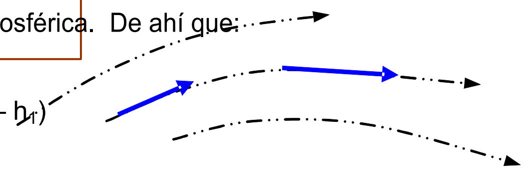
7.5 Manómetro

El manómetro es un instrumento utilizado para medir la presión en recipientes cerrados. Hay manómetros cerrados y abiertos. También los hay de aguja, similares en su funcionamiento al barómetro aneroide. A título de ejemplo consideraremos el funcionamiento del manómetro abierto, que se utiliza en el laboratorio para medir presiones cercanas a la presión atmosférica. Consiste en un tubo en forma de U, abierto por ambos extremos y relleno parcialmente de un líquido adecuado que puede ser agua, aceite, mercurio o alguna otra sustancia. Uno de los extremos del tubo se conecta al recipiente cuya presión se desea medir, mientras que el otro extremo queda abierto a la atmósfera (ver figura).

En el punto A, en el equilibrio, $F_1 = F_2$ y, por tanto,

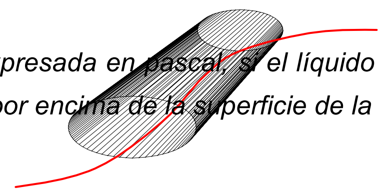
$$p_1 = p_2$$
$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$

pero p_1 es la presión en el recipiente p, y p_2 la presión atmosférica. De ahí que:



$$p - p_a = \rho g(h_2 - h_1)$$

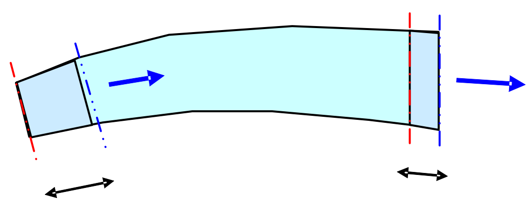
El término $p - p_a$ es *la presión manométrica*. Para obtener la presión absoluta a partir de la medición de las alturas, siempre hay que sumar o restar el valor $\rho g\Delta h$ a la presión atmosférica. Note que en el ejemplo considerado $p > p_a$. En el caso contrario sería $h_1 > h_2$, y el término $\rho g\Delta h$ en la expresión anterior sería negativo.



Ejemplo. *¿Cuál será la presión absoluta en el recipiente de la figura, expresada en pascal, si el líquido es mercurio, y la superficie del líquido en la rama 2 se encuentra 10 mm por encima de la superficie de la rama 1 del manómetro?*

$$p = p_a + \rho g(h_2 - h_1)$$
$$p = 760 + 10 = 770 \text{ mm Hg} = 770 \text{ Torr}$$
$$760 = 101\,325$$
$$770 \qquad x$$
$$x = 101\,325 \times 770/760 = 102658 \text{ Pa}$$

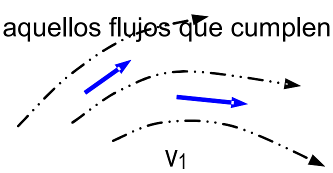
$$x = 1026.58 \text{ hPa}$$



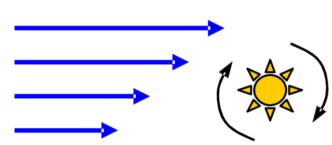
7.6 Fluidos en Movimiento

Conceptos Básicos

Para analizar los fluidos en movimiento, por el momento consideraremos sólo aquellos flujos que cumplen las condiciones de ser *estables, irrotacionales, no viscoso e incompresibles*.



Estable. Significa que la velocidad de las partículas es constante en cada punto del fluido (aunque la velocidad varíe de un punto a otro). En la figura, $v_1 \neq v_2$ pero ni una ni otra varían con el transcurso del tiempo y el régimen es estable. Cuando la velocidad en cada punto varía con el transcurso del tiempo, el flujo es de *régimen variable.*



Irrotacional. Un flujo es irrotacional cuando no es posible encontrar en las partículas que lo componen alguna componente de velocidad angular neta. Un ejemplo de flujo *rotacional* es el representado en la figura, donde los vectores representan las velocidades en diferentes puntos del fluido. Note que un cilindro con paletas colocado bajo la acción del flujo tendería a rotar en la dirección indicada, señalando claramente la componente rotacional.

No viscoso. No hay fricción entre las diferentes capas del líquido ni tampoco del líquido contra las paredes del recipiente. No hay disipación de energía mecánica.

Incompresible. Significa que la densidad ρ es constante. Esta condición es válida para los líquidos, pero no para los gases. De aquí que en lo que sigue se consideren sólo líquidos mientras no se especifique lo contrario.

Línea de Corriente y Tubo de Flujo

La trayectoria de una partícula en el seno de un fluido se denomina *línea de corriente*. Las líneas de corriente tienen la particularidad de que no se cortan jamás.

La velocidad siempre es tangente a la trayectoria. Si dos lineas de corriente se cortasen, en el punto de cruce la velocidad de la partícula tendría que tener dos direcciones diferentes a la vez, lo cual es absurdo.

v_2
v_1

Como las líneas de corriente no se pueden cortar, es posible imaginar la existencia de *un tubo de flujo* en el seno del líquido, formado de líneas de corriente. El tubo de flujo se comporta a todos los efectos como un tubo real, ya que las líneas de corriente que entran por un extremo tienen que salir por el otro, pues no pueden cortar las líneas que forman la "pared" del tubo.

En la figura, la partícula que entre por A, debe salir por B necesariamente. El concepto de tubo de flujo permite extender el análisis no sólo al flujo de líquidos por tuberías, sino también al movimiento de una porción de líquido dentro de otra mayor; por ejemplo, una corriente en un río.

B
A
tubo de flujo

7.7 Ecuación de Continuidad

En la figura aparece un tubo de flujo de sección transversal variable, donde hay un flujo establecido de izquierda a derecha que cumple las condiciones de estabilidad, no rotacional, no viscoso e incompresible. Considere un pequeño intervalo de tiempo Δt.

Cuando el líquido comprendido entre las superficies transversales aa' avanza hasta la posición bb', la sección transversal del líquido A_1 avanza desde a hasta b, y en el otro extremo del tubo la sección A_2 avanza desde la posición a' hasta la b'.

Como el líquido es incompresible, el volumen de liquido V_1 que desaparece en (1) debe ser el mismo que aparece en (2).

Igualando los volúmenes y sustituyendo en función de las áreas y de la velocidad:

Δm a b 1 A_1 1 $x_1 = v_1\Delta t$
Δm a' b' 2 v_2 A_2 $x_2 = v_2\Delta t$

$$V_1 = V_2$$
$$A_1x_1 = A_2x_2$$
$$A_1v_1\Delta t = A_2v_2\Delta t$$

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

Como los puntos 1 y 2 son arbitrarios, significa que en cualquier punto del tubo de flujo el producto Av se debe mantener constante. Esta ecuación se denomina *ecuación de continuidad*, y es válida solamente bajo las condiciones establecidas anteriormente para el fluido. También se acostumbra expresar la ecuación de continuidad por su expresión equivalente:

$$\boxed{Av = \text{constante}}$$

El *gasto* (G) en una tubería se define como el volumen que sale por la tubería en la unidad de tiempo:

$$G = \frac{V}{t}$$

Note que expresando el volumen que sale en un intervalo de tiempo t como V = Ax y considerando que x/t = v, el gasto también puede expresarse como

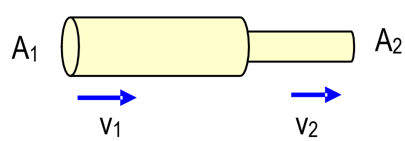
$$G = Av$$

Unidades

En el SI de unidades, $[G] = [V]/[t] = m^3/s$.

Ejemplo. *Estrechamiento en una tubería*. Según la ecuación de continuidad, $A_1v_1 = A_2v_2$, por tanto: $v_2 = (A_1/A_2)v_1$, y como según la figura $A_1/A_2 > 1$, se llega a la conclusión de que $v_2 > v_1$.

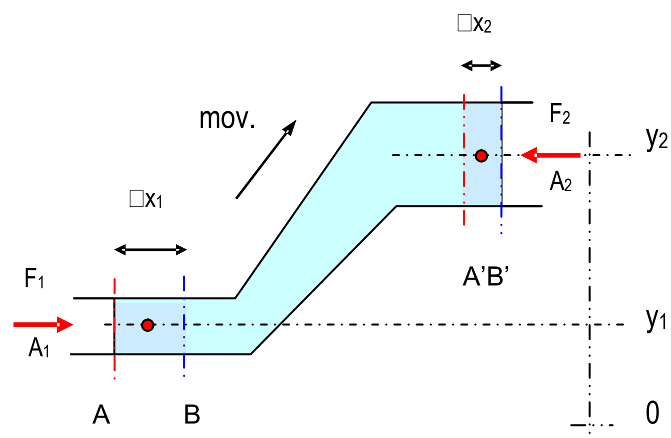
La velocidad del flujo *aumenta* en el estrechamiento.



7. 8 Ecuación de Bernoullí

En la figura, la porción de líquido comprendida entre A y A' avanza de izquierda a derecha. La fuerza F_1 sobre la sección transversal A_1 la ejerce el líquido que viene detrás. La fuerza F_2 es ejercida por el líquido que va delante. Se desea analizar la variación de energía de esa porción de líquido cuando avanza hasta BB'.

Cuando la sección transversal A avance hasta B, la sección transversal A' lo hará hasta B'. La porción de líquido que se encuentra entre B y A' no varía su energía durante el movimiento, y el resultado neto que se obtiene durante este proceso es similar al que se obtendría sí el volumen de líquido comprendido entre las secciones A y B se trasladara íntegramente hasta A'B'.



Ya que el CM se comporta como si todas las fuerzas obraran sobre él, sólo será necesario analizar la variación de energía del CM de la porción de líquido trasladada. Aplicando el teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas a esa porción:

$$W_{Rext} = \Delta E_c$$

$$F_1\Delta x_1 - F_2\Delta x_2 + W_{Fg} = \tfrac{1}{2} mv_2^2 - \tfrac{1}{2} mv_1^2 \qquad (7.8.1)$$

$$W_{Fg} = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}) = -mgy_2 + mgy_1$$

$$F\Delta x = pA\Delta x = pV = p(m/\rho)$$

Sustituyendo estas dos ultimas expresiones en (7.8.1) se obtiene:

$$p_1(m/\rho) - p_2(m/\rho) - mgy_2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2} mv_2^2 - \tfrac{1}{2} mv_1^2$$

tras simplificar y agrupar términos se llega a:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Como los puntos 1 y 2 son puntos arbitrarios en la tubería, se llega finalmente a la conclusión de que, en todos los puntos de la tubería,

$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}}$$

Esta ecuación se denomina "ecuación de Bernoulli". Fue formulada en 1738 por el matemático y físico suizo Daniel Bernoulli. El parámetro p se denomina *presión absoluta.* La suma $p + \rho g y$ es la *presión estática* (también hidráulica, en algunos textos) y el término $\tfrac{1}{2}\rho v^2$ es la *presión dinámica*.

7.9 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli

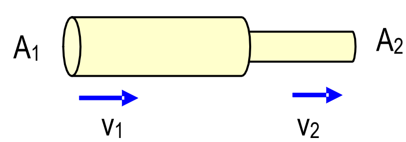
Relación Entre la Presión y la Velocidad de un Fluido

Al analizar la ecuación de continuidad, se vio que la velocidad aumenta en la parte más estrecha de la tubería. Por tanto, en la figura $v_2 > v_1$. Haciendo $y_1 = y_2$ en la ecuación de Bernoullí, se obtiene:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) > 0 \qquad (7.9.1)$$

$$p_1 > p_2$$



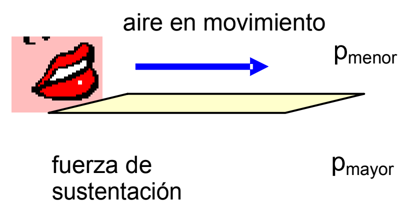
y la presión es menor en la sección más estrecha de la tubería. Este resultado es completamente general, y significa que en cualquier región donde el fluido tiene mayor velocidad la presión será menor.

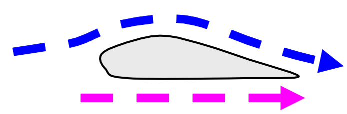
Ejemplo. *Fuerza de Sustentación*

Soplando horizontalmente una tira de papel asida por el extremo más cercano a los labios, es posible lograr que ésta se levante. La diferencia de presiones Δp encima y debajo de la hoja hace aparecer una fuerza de sustentación F = Δp x A, donde A es el área de la superficie en contacto con el aire que se mueve a mayor velocidad.

Este mismo principio es el que hace que los aviones puedan volar. El perfil del ala de un avión se construye de forma tal que el aire debe recorrer una distancia mayor en igual tiempo cuando pasa por encima de la misma. En este caso quien se mueve es el avión, pero la velocidad relativa del aire con relación a la superficie del ala es mayor por la parte superior del ala que por la inferior, y por tanto la presión es menor.

El resultado es el mismo que el del ejemplo anterior; aparece una fuerza neta de sustentación que empuja el avión hacia arriba.





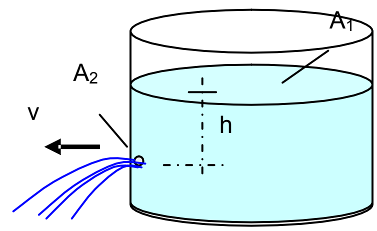
Ala de un avión.
Sección transversal

Teorema de Torricelli

Este teorema se refiere a la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio. Establece que, en las condiciones de la figura, donde $A_1 >> A_2$, la velocidad de salida del líquido es la misma que la de un cuerpo que cae libremente desde una altura h: $v = \sqrt{2gh}$.

Demostración. Aplicando la ecuación de Bernoullí

$$p_1 + ½\,\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + ½\,\rho v_2^2 + \rho g y_2$$



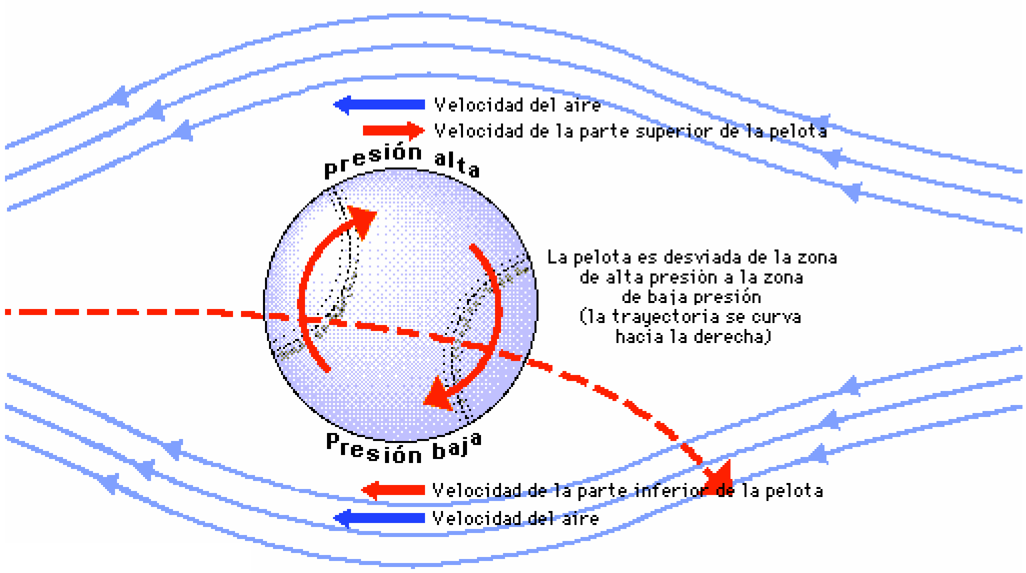
$p_1 = p_2 = p_{atm}$, pues ambas, la superficie del líquido y la del orificio, están en contacto con la atmósfera. Como $A_1 >> A_2$, la velocidad de descenso del nivel del líquido será muy pequeña, y con excelente aproximación puede considerarse que $v_1 = 0$.

Sustituyendo y simplificando en la expresión anterior, se obtiene:

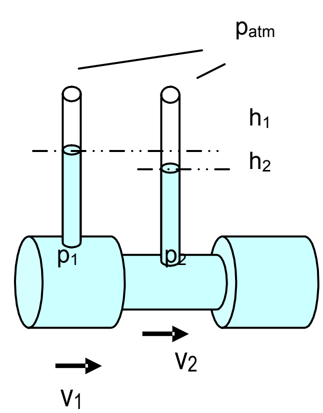
$$\rho g(y_1 – y_2) = ½\,\rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\rho}$$

Pelota con efecto. Cuando una pelota se tira con efecto, su trayectoria se curva debido a las fuerzas que surgen al girar sobre sí misma. La superficie rugosa arrastra el aire adyacente y lo hace girar. Esto crea una zona de alta presión en un lado y de baja presión en el otro; la diferencia de presiones hace que su trayectoria se curve.



Medidor de Venturi



Es un instrumento que se utiliza para medir el gasto en una tubería. Está formado por una sección de tubería con un estrechamiento y dos manómetros, como muestra la figura. En la sección 9 se vio que, para una tubería con estrechamiento, ec. (7.9.1)

$$p_1 – p_2 = ½\,\rho\,(v_2^2 – v_1^2)$$

Por otra parte, considerando la altura de las columnas de líquido,

$$p_1 = p_a + \rho g h_1 \quad ; \quad p_2 = p_a + \rho g h_2 \qquad (7.9.2)$$

Además, a partir de la ecuación de continuidad $A_1v_1 = A_2v_2$ es posible escribir:

$$v_2^2 = (A_1/A_2)^2 v_1^2 \qquad (7.9.3)$$

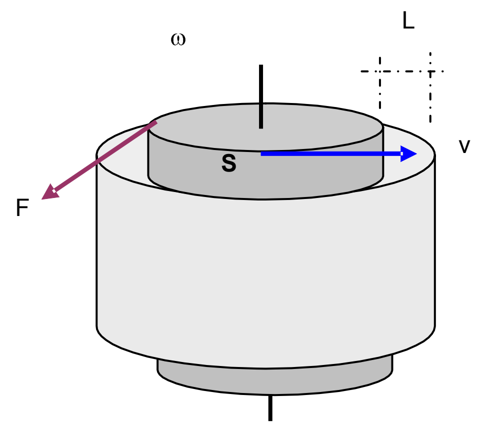
Sustituyendo (7.9.2) y (7.9.3) en (7.9.1), agrupando términos y simplificando con G = Av, se llega a:

$$G = \left(\frac{2g(h_1 - h_2)}{\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}}\right)^{1/2}$$

Si se conocen las áreas A_1 y A_2, midiendo la diferencia de alturas es posible conocer el gasto en la tubería.

7.10 Viscosidad

Conceptos Básicos



Resulta útil definir la viscosidad de un fluido a partir del análisis del siguiente experimento.

Suponga que el dispositivo de la figura está compuesto por dos cilindros concéntricos. El externo es hueco y el interno es sólido. Ambos están sumergidos totalmente en el seno de un fluido, y el cilindro interno, de superficie S, rota con velocidad angular ω, mientras que el cilindro externo, situado a distancia L del interno, se mantiene fijo.

Es posible entonces verificar los siguientes resultados experimentales:

1. Para que el cilindro interior gire con velocidad constante v, es necesario aplicar una fuerza F sobre él. De ahí se deduce que debe haber una fuerza de fricción f ejercida por el líquido, con un valor tal que

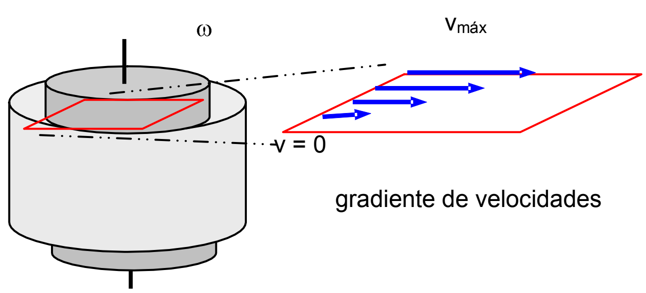
$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} = 0$$

por lo que $\vec{f} = -\vec{F}$ en todo momento. La fuerza $\vec{f}$ se conoce como *fricción por viscosidad*.

2. El módulo de f cumple la siguiente propiedad:

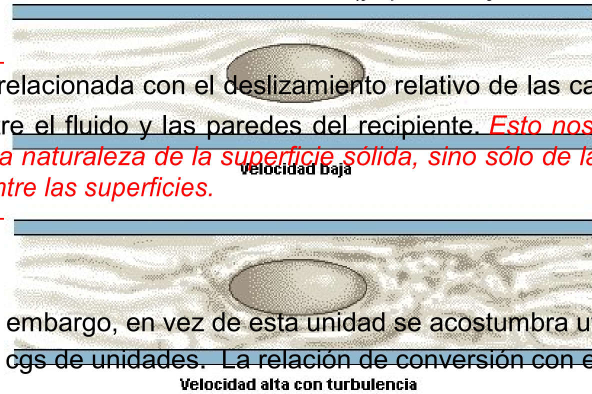
$$\boxed{\frac{f}{S} = \eta \frac{v}{L}}$$

donde f, S, v y L están definidos en la figura, y η es el *coeficiente de viscosidad*, que depende de la naturaleza del fluido considerado y de la temperatura. Este resultado es válido solamente cuando L es pequeño y el flujo sigue un régimen laminar, donde las capas de fluido no se mezclan.



Cuando se analiza la velocidad de las partículas microscópicas que componen el fluido, se encuentra que las moléculas de líquido cercanas a las superficies se adhieren a las mismas y viajan junto con ellas. Las moléculas adyacentes al cilindro móvil tendrán velocidad máxima (la velocidad tangencial del cilindro) mientras que las que están junto al cilindro externo estarán en reposo.

De ahí que exista un gradiente de velocidades desde el cilindro interno al externo (y que el flujo laminar no sea irrotacional).



Se concluye de lo anterior que la viscosidad está relacionada con el deslizamiento relativo de las capas de fluido entre sí, y no con la interacción entre el fluido y las paredes del recipiente. *Esto nos permite afirmar que la viscosidad no depende de la naturaleza de la superficie sólida, sino sólo de las características del líquido o gas que se encuentra entre las superficies.*

Unidades

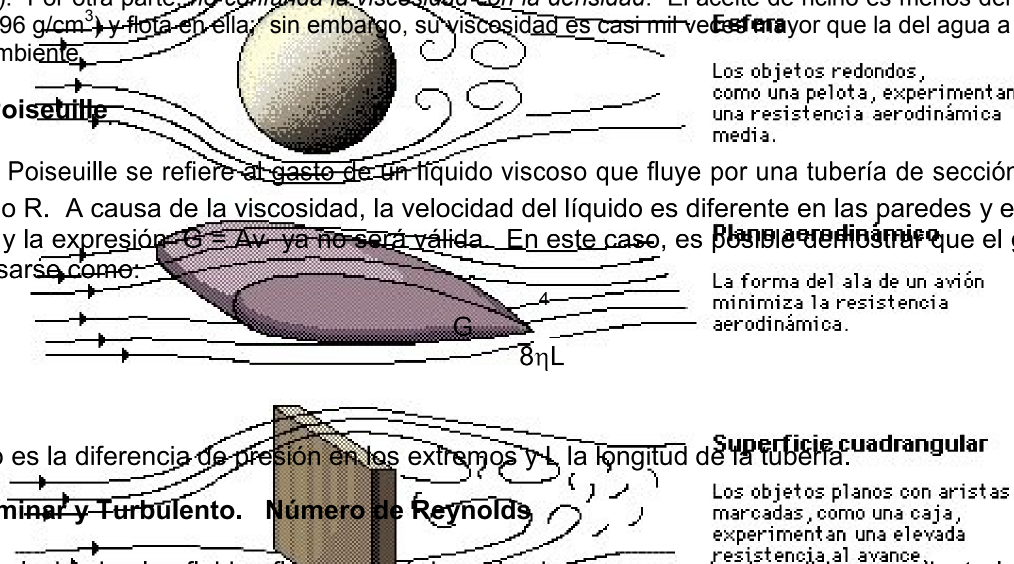
En el SI de unidades: [η] = [F][L]/[S][v] = Ns/m^2. Sin embargo, en vez de esta unidad se acostumbra utilizar el *poise* (ps), definido sobre la base del sistema cgs de unidades. La relación de conversión con el SI de unidades es:

$$1 \text{ ps} = 0.1 \text{ Ns/m}^2$$

En la tabla siguiente aparecen algunos valores típicos del coeficiente de viscosidad.

Sustancia	η (20°C)	η (60°C)
aire	181 …ps	200 …ps
agua	1.0 cps	0.47 cps
aceite de ricino	9.86 ps	0.30 ps

Para tener una idea del significado de los diferentes valores de η, recuerde que la fricción por viscosidad es proporcional a la *velocidad*. Por ejemplo, es fácil aplaudir en el aire (181 …ps) pero muy difícil hacerlo en el agua (1.0 cps). Por otra parte, *no confunda la viscosidad con la densidad*. El aceite de ricino es menos denso que el agua (0.96 g/cm^3) y flota en ella; sin embargo, su viscosidad es casi mil veces mayor que la del agua a la temperatura ambiente.



Ley de Poiseuille

La ley de Poiseuille se refiere al gasto de un líquido viscoso que fluye por una tubería de sección uniforme y radio R. A causa de la viscosidad, la velocidad del líquido es diferente en las paredes y en el centro del tubo, y la expresión G = Av ya no será válida. En este caso, es posible demostrar que el gasto puede expresarse como:

$$G \qquad {}^{4} \qquad 8\eta L$$

donde □p es la diferencia de presión en los extremos y L la longitud de la tubería.

Flujo Laminar y Turbulento. Número de Reynolds

A bajas velocidades los fluidos fluyen en régimen laminar, que puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, deducidas a mediados del siglo XIX. A velocidades altas, el movimiento de los fluidos se hace turbulento. En los fluidos que fluyen por tubos, la transición del movimiento laminar al turbulento depende del diámetro del tubo D, de su velocidad media v_m, de la densidad ρ y de la viscosidad η del fluido.

Cuanto mayores son el *diámetro* D, la *velocidad media* v_m y la *densidad* ρ, y cuanto menor es la *viscosidad* η, más probable es que el flujo sea turbulento. La combinación empírica de estos 4 parámetros da origen al número adimensional de Reynolds:

$$N_R = \frac{\rho v_m D}{\eta}$$

Cuando $N_R < 2000$ el flujo es laminar. Si $N_R > 3000$ el flujo será turbulento. Cuando $2000 < N_R < 3000$, el flujo es inestable. Puede variar de uno a otro tipo de régimen.

Ejemplo. ¿Cuál es la máxima velocidad media con que puede circular agua en un tubo de 1 cm de diámetro en régimen laminar, a 20 ^oC?

Para que haya régimen laminar, $N_R = \frac{\rho v_m D}{\eta} < 2000$

$v_m < 2000\eta/\rho D = 0.2$ m/s

Resistencia Aerodinámica. La forma de los objetos que se desplazan a gran velocidad afecta enormemente la resistencia del aire. Por ejemplo, una esfera (*arriba*), y sobre todo una superficie cuadrangular (*abajo*), obligan al aire a cambiar de dirección, causando turbulencias y una fuerza de frenado notable. Por otra parte, el ala de un avión, a pesar de ser el origen de un empuje ascendente (*centro*), apenas perturba el aire, por lo que sufre poca resistencia al avance. Las formas aerodinámicas son importantes no sólo en los aviones, sino también en vehículos terrestres o marítimos que se mueven a gran velocidad o que tienen gran tamaño (autos de carrera, trenes, rastras).