El cálculo en Física con los Diagramas de Feynman

http://www.textoscientificos.com/fisica/articulos

por Alejandro R. Álvarez Silva.

Desde la mitad del siglo XX, los físicos teóricos han recurrido cada vez más a los diagramas de Feynman para abordar cálculos complicados, en los que se ha buscado la mayor exactitud. Dichos diagramas han llegado a revolucionar los más variados aspectos de la física.

Richard Feynman presentó sus diagramas a finales de los años cuarenta, ofreciéndolos como un artificio contable que simplificaba los farragosos y complicados cálculos de la Electrodinámica Cuántica (QED), pero pronto fueron empleados en física nuclear y de partículas, así como en la física del estado sólido. Y es que las expresiones integradas de Feynman acentuaban la "pictorialidad" espacio-temporal de los sucesos.

Realmente la aportación de Feynman es altamente original. Los procesos visualizados en los diagramas de Feynman se han hecho imprescindibles en casi todos los dominios de la física. Los propagadores, que llevan las partículas de choque en choque pasan de ser complicadas distribuciones en el espacio-tiempo (Schwinger) a sencillos denominadores racionales (propagadores de Feynman) en "espacio de momentos". Los complicados cálculos perturbativos de órdenes superiores se resumen en una reglas (de Feynman) que se leen directamente de los diagramas.

En la QED, los electrones y otras partículas fundamentales intercambian fotones "virtuales" que sirven de portadores de la fuerza. Estas partículas virtuales toman su energía de la del vacío, por el poco tiempo que les permite el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

Existían dos problemas fundamentales que frustraban los cálculos en la QED. El primero es que en cuanto se procedía más allá de los grados de aproximación más simples, dejaba de ofrecer respuestas finitas, y los infinitos, lógicamente, carecían de sentido físico. El segundo consistía en que el formalismo era muy incómodo, "una pesadilla algebraica con un sin fin de términos a tomar en cuenta y evaluar". Como los electrones podían intercambiar un número cualquiera de esos fotones virtuales, cuantos más fotones intervenían, más complicadas eran las ecuaciones correspondientes. En el cálculo había que tomar en cuenta cada situación y sumar todas las contribuciones. Pero, la realidad es que ese número infinito de contribuciones distintas en la práctica podían truncarse al cabo de poco términos, lo que constituía el llamado método de "cálculo de perturbaciones"; mas, este método aparentemente simple presentaba dificultades extraordinarias. Por ejemplo, se había afrontado un cálculo en e^4 a mitad de los años treinta, y en seguida aparecían cientos de términos distintos. Y cada contribución al cálculo total ocupaba más de cuatro o cinco líneas de símbolos matemáticos, por lo que era muy fácil que se omitieran términos. Resumiendo: divergencias sin resolver y cuentas inabordables.

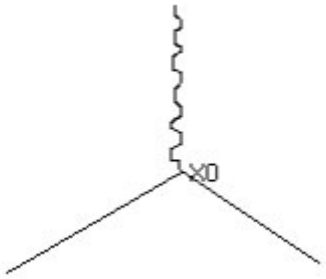
Como dije, los diagramas de Feynman son una herramienta muy potente para hacer cálculos en la teoría cuántica, que permiten superar los dos problemas anteriormente

expuestos. Como cualquier cálculo en cuántica, se trata de obtener un número complejo, o "amplitud", cuyo módulo al cuadrado dé una probabilidad.

Las amplitudes en la QED se componen de algunos ingredientes básicos, los cuales poseen su propia expresión matemática asociada, por ejemplo:

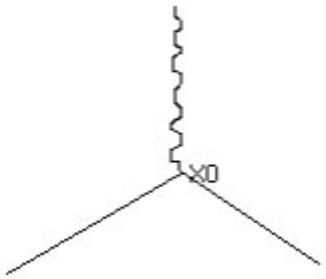
- la amplitud de que un electrón virtual viaje desde x a y. B(x, y);
- la amplitud de que un fotón virtual viaje de x a y. C(x, y); y
- la amplitud de que el electrón y el fotón choquen eD (siendo e la carga del electrón).

En la dispersión de un electrón por un campo electromagnético, el campo puede describirse como una colección de fotones. En el caso más simple el electrón colisionará sólo una vez con un único fotón



en un solo vértice X_0. Aquí parecen sólo partículas reales, de forma que la única contribución a la amplitud proviene del vértice: A(1)=eD.

Pero al electrón pueden acaecerle otros fenómenos complejos, como que el electrón entrante pueda desprender un fotón virtual antes de colisionar con el campo electromagnético y reabsorber el fotón virtual en un punto posterior



En este diagrama, las líneas del electrón y las líneas del fotón se encuentran en tres lugares y, por lo tanto, la amplitud para esta contribución es proporcional a e^3. Así que la amplitud será $A(2)=e^3 \int DB(1,0)\, DB(0,2)\, DC(1,2)$.

Y en el siguiente nivel de complejidad hay hasta siete diagramas de Feynman distintos.

La amplitud total de que un electrón interaccione con el campo electromagnético se escribiría entonces:

$$A=A(1)+A(2)+A(3)^a+A(3)^b+A(3)^c+\ldots\ldots$$

Y la probabilidad de la interacción $| A |^2$.

El conjunto de amplitudes para los diversos estados iniciales y finales posibles constituye un tipo de matriz cuyas "filas" y "columnas" corresponden a una base para estados finales e iniciales, respectivamente, matriz conocida como matriz de dispersión, o simplemente matriz S, y el cálculo de la matriz S se considera el objetivo principal de la QFT (Teoría Cuántica de Campos).

Cada elección de topología de diagramas de Feynman representa una integral ordinaria de dimensión finita, que puede tratarse mediante los potentes métodos de la integral de contorno compleja.

En la QED (Electrodinámica Cuántica) todas las partes divergentes de los diagramas de Feynman pueden reunirse en varios "paquetes", de modo que los infinitos proporcionan simplemente factores de "reescalamiento" que pueden ignorarse de acuerdo con el proceso conocido como renormalización (hay cancelaciones mutuas de acuerdo con ciertos principios de simetría del modelo estándar).

El punto de partida para los diagramas es un lagrangiano apropiado; los diagramas de Feynman representarían entonces un desarrollo perturbativo de la teoría cuántica asociada a dicho lagrangiano, que en esencia es tan sólo un desarrollo en serie de potencias de algún parámetro, o parámetros, que en este caso es la constante de acoplamiento. En la QED es la carga eléctrica e. En cada vértice de un diagrama de Feynman hay un factor e, de modo que los términos de la serie son diagramas con un número creciente de vértices, es decir, los diagramas de n vértices proporcionan en conjunto el coeficiente de e^n.

La QFT se construye partiendo de un lagrangiano, mediante la formulación en términos de integrales de camino de Feynman o suma de historias de Feynman, que por supuesto es también la base de los diagramas de Feynman. Y es que en el mundo cuántico, en lugar de existir solo una "realidad" clásica representada por una trayectoria (una historia), existe una gran superposición compleja de todas las "realidades alternativas". A cada historia se le asigna un factor de ponderación compleja, al que llamamos una amplitud, y el total se normaliza a módulo unidad.

El papel del lagrangiano es decirnos qué amplitud hay que asignar a cada una de estas historias.

Al conocer el Lagrangiano $\mathcal{L}$, puede obtenerse la acción S para dicha historia. La amplitud compleja viene entonces dada por la fórmula

$$\text{Amplitud} \propto e^{iS/\hbar}$$

Pero al existir un infinito continuo de alternativas clásicas, la amplitud debe ser considerada como una "densidad de amplitud".

Mas, las integrales de camino para partículas cuánticas individuales se ven matemáticamente mejor reflejadas al reemplazar la colección incontrolable de historias por lo que se denomina el propagador de Feynman.

En el caso de una partícula de Dirac (por ejemplo, un electrón) el propagador en el espacio de momentos toma la forma $i(P - M + i\varepsilon)$, donde $P = \gamma^a P_a$, siendo la cantidad P_a el 4-momento que tiene la partícula para el camino escogido. (ε se toma como un número real positivo muy pequeño, como artificio para garantizar los requisitos de frecuencia positiva/negativa del propagador de Feynman).

*Sabemos que en la dispersión de electrones la matriz de dispersión puede ser descrita por la expresión

$\langle f|s|i\rangle$ siendo f el estado final e i el estado inicial.

$|s\ f\ i\ |^2$ es la probabilidad de las transiciones en el desarrollo perturbativo de la matriz de dispersión S. Quiere decir que si antes de la colisión el sistema se encontraban en un estado Φ_i (cierto conjunto de partículas libres), la amplitud de probabilidad de su paso al estado Φ_f (otro conjunto de partículas libres) es el elemento de matriz $\underline{S_{fi}}$.

En dicha dispersión de electrones se obtiene al final para la amplitud de dispersión (al ser las ondas eléctricas ondas planas)

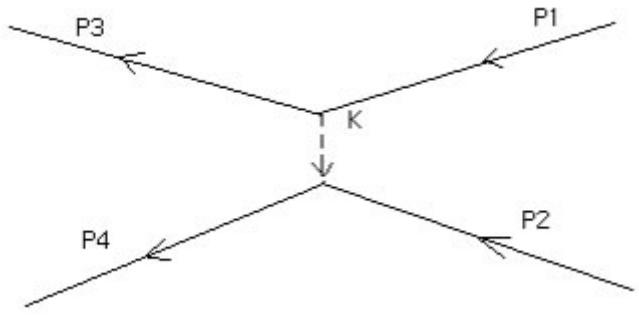
(i) $M_{fi} = e^2 [(\mathbf{u}_4 \gamma^m u_2) D_{mn} (p_4 - p_2) (\mathbf{u}_3 \gamma^n u_1) - (\mathbf{u}_4 \gamma^m u_1) D_{mn} (p_4 - p_1) (\mathbf{u}_3 \gamma^n u_2)]$

Se ha introducido aquí el <u>propagador del fotón</u> en la representación de impulsos

$$D_{mn}(k) = \int D_{mn}(\epsilon)\, e^{ik\epsilon}\, d^4\epsilon$$

Cada uno de los dos términos de la amplitud (i) puede representarse simbólicamente en la forma de los llamados <u>diagramas de Feynman</u>.

Estoy hablando de la dispersión representada en el siguiente diagrama



que corresponde al primer término de (i)

$e^2 (\mathbf{u}_4 \gamma^m u_2)\ D_{mn}(k)\ (\mathbf{u}_3 \gamma^n u_1)$

A cada vértice del diagrama (puntos de intersección) se asocia un factor γ.

Las líneas de trazo continuo “incidentes”, que se dirigen a un vértice corresponden a los electrones iniciales y se les asocian a los factores u –las amplitudes bispinoriales de los correspondientes estados electrónicos-. Las líneas que parten de los vértices o

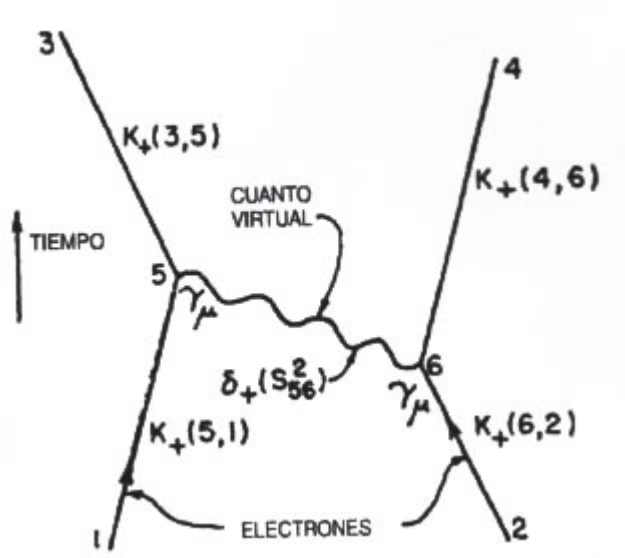
"emergentes", corresponden a los electrones finales, que se asocian con los factores **u**. Los factores indicados, al "leer" el diagrama se escriben de izquierda a derecha en el orden que corresponde al movimiento a lo largo de las líneas de trazo continuo y en sentido opuesto a las flechas. Los vértices se unen por una línea de trazos que corresponde a un fotón virtual (de intermediación), "emitido" en un vértice y "absorbido" en el otro; a esta línea se asocia el factor $i\,D_{mn}(k)$.

El impulso del fotón virtual k se determina por la conservación del impulso en el vértice. O sea $k= p_1-p_3= p_4-p_2$.

Además, al diagrama en conjunto se atribuye un factor común $(-ie)^2$, en donde el exponente es el número de vértices en el diagrama.

(Tomado de la obra "Teoría Cuántica Relativista" de Beresteiskii, Lifshitz y Pitaeuskii).

· Mucho mejor es acudir a la descripción realizada por el propio Feynman de la colisión electrón-electrón



En la figura, un electrón (línea continua de la parte inferior derecha) emite una partícula transmisora de la fuerza –un fotón virtual representado por la línea ondulada- que incide en el segundo electrón (línea continua de la parte inferior izquierda). El primer electrón retrocede y el segundo es desviado de su trayectoria original. Sería la versión mecánico cuántica de la repulsión entre partículas dotadas de la misma carga.

La emisión o absorción de un fotón por un electrón lleva asociado un factor $e\,\gamma_m$, donde e es la carga del electrón y γ_m un vector de matrices de Dirac (disposiciones de números ligados al espín del electrón). Al ceder parte de su energía y momento, el electrón de la derecha se mueve de x_6 a x_4, experimentando un cierto "retroceso" y cambio de dirección. El de la izquierda, tras absorber el fotón, ganando algo de energía y momento, se dispersa de x_5 a x_3.

Según Feynman, este diagrama representa la expresión matemática

(ii) $$e^2 \iint d^4x_5\, d^4x_6\, K_+(3,5)\, K_+(4,6)\, \gamma_m\, \delta_+(S_{56}^2)\, \gamma_m\, K_+(5,1)\, K_+(6,2)$$

expresada en factores de K_+ y δ_+.

Feynman llamó $K_+(5,1)$ a la probabilidad de moverse el electrón como partícula libre del punto x_1 al x_5. El otro electrón entrante se movía libremente –con probabilidad $K_+(6,2)$- del punto x_2 al x_6. Este segundo electrón podría entonces emitir un fotón virtual en x_6, que a su vez se movería –con probabilidad $\delta_+(S_{56}^2)$- hasta x_5, donde sería absorbido por el primer electrón.

Al elevar la expresión (ii) al cuadrado, se obtiene una estimación bastante buena de la probabilidad de que dos electrones colisionen, pero como los dos electrones pueden intercambiar cualquier número de fotones, (ii) representa sólo el principio del cálculo.

Feynman empleó sus nuevos diagramas para describir las diferentes posibilidades, por ejemplo, hay nueve formas diferentes de que los electrones pueden intercambiar dos fotones, cada uno con cuatro vértices (sus expresiones matemáticas, pues, contienen e^4 en vez de e^2). Se construye la contribución matemática de cada uno de estos diagramas introduciendo K_+ y δ_+ por cada línea de electrón y de fotón y conectándolos en los vértices con los factores $e\gamma_m$.

La carga del electrón (e) es pequeña: $e^2 \simeq 1/137$, en medidas apropiadas. Como la carga de los electrones gobierna la intensidad de su propia interacción con los fotones que transmiten la fuerza, siempre que el par de electrones intercambian un fotón más, estas ecuaciones que describen el intercambio ganan otro factor que multiplica por ese pequeño número e^2. O sea, la contribución del intercambio doble de fotones no es ni una centésima de la contribución del intercambio de un solo fotón. El término que corresponde al intercambio de tres fotones (con un factor e^6) es diez mil veces menor que el término correspondiente al intercambio de un fotón, y así en lo sucesivo. Por tanto, en la práctica el cálculo queda truncado al cabo de unos pocos términos para obtener una aproximación suficiente.

Feynman, también aplicó una "renormalización", o combinación de "trucos de cálculo" para eliminar los "infinitos" que aparecían en las integrales de los diagramas de dos y más fotones. El método de Feynman tenía muy en cuenta el orden de las operaciones; partía de los diagramas como ayuda mnemotécnica para escribir las pertinentes integrales, y luego modificaba éstas para quitarlas, una a una, los infinitos.

Realmente la extensión de los diagramas de Feynman de debe muy principalmente a Freeman Dyson desde el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. En un artículo de Physical Review comparó los métodos de Feynman, y las teorías de Schwinger y Tomonaga, demostrando la equivalencia matemática de los tres métodos.

Dyson dedujo reglas para el empleo de los diagramas, ofreciendo una guía de "uso" que incluía las instrucciones, paso a paso, de cómo dibujar los diagramas y traducirse en sus expresiones matemáticas asociadas. También generalizó los ejemplos analizados, demostrando que los problemas de la Electrodinámica Cuántica (QED) podían renormalizarse.

A partir de estos resultados puede extenderse el uso de los diagramas de Feynman a otros ámbitos, por ejemplo, a la electrodinámica escalar en la que intervienen mesones cargados y fotones.

Para el estudio de procesos asociados a esta última interacción se puede utilizar el desarrollo de la matriz de colisión

$S=\Sigma^{\infty}_{n=0}\, i^n/n!\, \int^{+\infty}_{-\infty} d^4x_1 \int^{+\infty}_{-\infty} d^4x_2 \ldots \int^{+\infty}_{-\infty} d^4x_n\, P\{\mathcal{L}_I(x_1)\, \mathcal{L}_I(x_2) \ldots \mathcal{L}_I(x_n)\}$

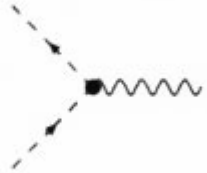
Aplicando este formulismo a sistemas de piones cargados, haciendo q= -e (e>0), $b^{\dagger}$ crearía un pión negativo p^- y $a^{\dagger}$ un pión positivo p^+.

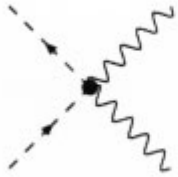
La densidad lagrangiana queda

$\mathcal{L}_i=-ie : (f^+\vartheta^m f - f\,\vartheta^m f^+)\, A_m : + e^2 : A^2 f^+ : \ .$

Siendo f la constante mesónica.

Se tendrían dos tipos de vértices

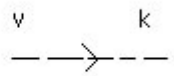
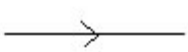
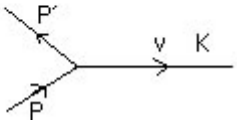




En uno confluyen dos líneas mesónicas (líneas discontinuas rectas) y una fotónica (línea ondulada) y es de orden e. En el otro afluyen dos líneas fotónicas en vez de una y es de orden e^2.

*Como los estados inicial y final de un determinado elemento de matriz se especifican, además de por el espín o estado de polarización, por sus momentos, hace que sea más simple el cálculo de tal elemento en el espacio de momentos.

Como ejemplo, se expone en el siguiente cuadro la correspondencia entre diagramas y elementos de la matriz S en el espacio de momentos (en este diagrama se representa n por v, l por k, m por u, γ por x y d por d).

Componente del diagrama		Factor en el elemento de matrices
Línea interna fotón		Grk 1/K2-iu función de propagación del fotón
Línea interna electrón		iP-u/P2+M2-iu función de propagación del electrón
Vértice		x d (p-p´-k)

Para terminar, decir que se han aplicado felizmente los diagramas de Feynman a la Cromodinámica Cuántica (QCD), a partir del descubrimiento en 1973 de la "libertad asintótica" por David Politzer, David Gross y Frank Wilczek.

Obras de Feynman

1. The Feynman Lectures on Physics, (3 vols. Addison-Wesley, 1962).
2. Quantum Electrodyamics. Lectures and reprints. Benjamín, 1961.
3. The theory of fundamental processes. Lectures and reprints. Benjamín, 1961.
4. Quantum Mehcanics and Path Integrals (con A. R. Hibbs). McGraw Hill 1965.
5. The character of Physical Law, BBC 1965.
6. Statistical mechanics. Lectures. Benjamín, 1972.
7. Photo-hadron interactions. Benjamín, 1972.
8. Q.E.D. Princeton, 1985.
9. Elementary Particles and the Laws of Physics (The 1986 Dirac memorial Lectures). Cambridge U. P. 1987.

Referencias

Teoría Cuántica Relativista (Beresteiskii, Lifshitz y Pitaeuskii). Ed. Reverté 1975.

Electrodinámica Cuántica (http://www.astrocosmo.cl/b_p-tiempo/b_p-tiempo-06.09.)

La física y los diagramas de Feynman. David Kaiser (Inves. Y Ciencia. Sept 2005)

Diagramas de Feynman en el espacio de momentos (http://www.cica.es/aliens/dfannus)

"Bosón de Higgs. Justificación física" y "Operadores de Creación y aniquilación", en "Simbiotica´s Blog" (http://simbiotica.wordpress.com/)

El camino de la Realidad. Roger Penrose. Ed. Debate (Mondadori) 2006.

General formalism of nucleon electroproduction with polarizations. Garrido, Ruiz Morales, Moya de Guerra. ANALES DE FÏSICA. Serie A. Vol. 87, 1991.

Richard Feynman ha muerto. Luis J. Boya. Revista Española de Física 2, 3. 1988.

‹ El Rayo Láser Dual arriba El por qué de las dimensiones "extra" ›

Jue, 16/04/2009 - 21:53