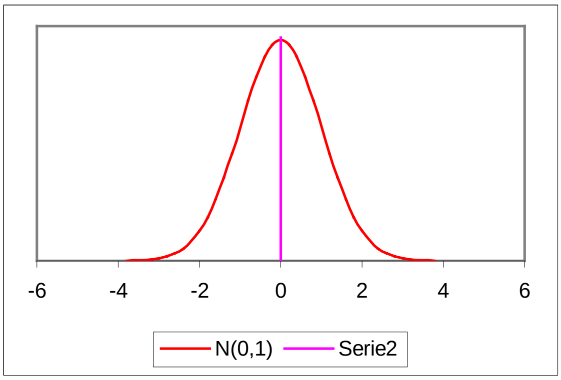
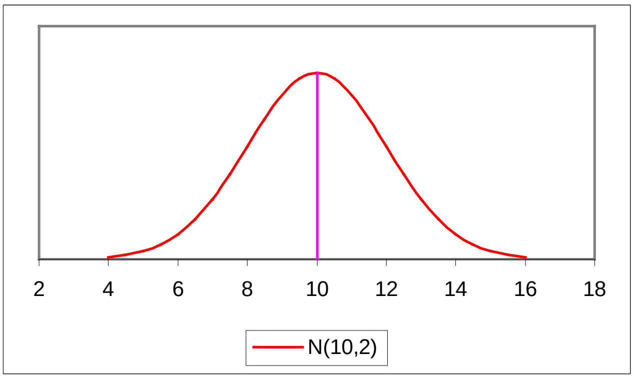
La Distribución Normal

Es una distribución continua que posee, entre otras, las propiedades siguientes:

Su representación gráfica tiene forma de campana (campana de Gauss)





- Su gráfica tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas. El dominio de la función es (- ∞, + ∞). El área total bajo la curva es igual a 1.
- Es simétrica con respecto a su media μ. Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
- Cuanto mayor sea **σ,** más aplanada será la curva
- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ (ver gráficos anteriores.).
- La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de **μ** la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal.
- La desviación típica **σ** determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de **σ**, más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana. Un valor pequeño de este parámetro indica que los datos están muy próximos al valor medio de la distribución.
- No existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas por los valores de su media y su varianza.
- De entre todas ellas, la más utilizada es la **distribución normal estándar N(0,1)**, que corresponde a una distribución de media **μ.= 0** y desviación típica **σ =1.**

En la distribución N(0,1) su variable se suele representar por **z .** Las diferentes áreas encerradas por esta curva, el eje de abscisas, desde 0 hasta un cierto valor k < 3´49 , de centésima en centésima, vienen recogidas en la siguiente tabla. La cifra entera y primer decimal de z se busca en la primera columna, y la cifra de las centenas en la primera fila

z	0.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.4878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

I.- Cálculo de probabilidades en la distribución N(0, 1)

A) La probabilidad **p** de encontrar un valor cualquiera $z \leq k$, siendo $k > 0$, es:

$$\mathbf{\Phi(k) = p[\, z \leq k]}$$

Su probabilidad aparece en la figura-1 y su valor se determina directamente en las tablas

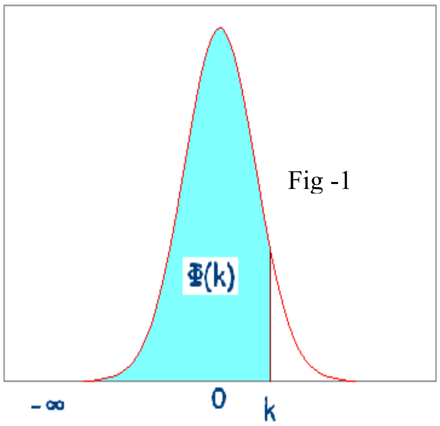


Fig -1

Ejemplos:

1º.- $P[\, z \leq 1{,}75\,] = \Phi(1{,}75) = 0{,}9599$

2º.- $P[\, z \leq 3{,}18\,] = \Phi(3{,}18) = 0{,}9993$

B) Para calcular $p[\, z > k]$ recordemos que $\Phi(k) + p(z>k) = 1$ de donde

$$\mathbf{p[\, z > k] = 1 - \Phi(k)}$$

Su probabilidad aparece en la figura-1 en color blanco

Ejemplos

1º.- $p[\, z >1{,}75] = 1\text{-}0.9599 = 0{,}041$

2º.- $P[z \geq 2{,}8] = 1 - P[z \leq 2{,}8] = 1 - \Phi(2{,}8) = 1\text{-} 0{,}9974 = 0{,}0026$

3º.- $P[z>0{,}12] = 1 - P[z<0{,}12] = 1 - \Phi(0{,}12) = 1 - 0{,}5478 = 0{,}4522$

Recíprocamente

Supongamos ahora que nos dan la probabilidad y necesitamos averiguar el valor $z = k$ correspondiente a una determinada probabilidad **p**. Tendremos que

$$\mathbf{\Phi(k) = p[\, z < k] = p}$$

El valor k lo encontraremos en las tablas, bien directamente o de una manera aproximada.

Ejemplos

Hallar el valor k que cumple las relaciones siguientes:

1º.- $P[z \leq k] = \Phi(k) = 0{,}5 \Rightarrow$ buscando directamente en la tabla $k = 0{,}00$

2º.- $P[z \leq k] = \Phi(k) = 0{,}8729 \Rightarrow$ buscando directamente en la tabla $k = 1{,}14$

3º.- $P[z \leq k] = \Phi(k) = 0{,}8500 \Rightarrow$ este valor no viene dado en las tablas pero esta comprendido entre $\Phi(1{,}03) = 0{,}8485$ y $\Phi(1{,}04) = 0{,}8508$. Tomaremos como respuesta el valor de k cuya probabilidad se aproxime más a 0,8500. En este caso será $k = 1{,}04$.

C) La probabilidad **p** de encontrar un valor cualquiera $z < 0$, es:

$$\mathbf{p[z < -k] = 1 - p[z < k] = 1 - \Phi(k)}$$

Observa que $p[z < -k] = p[z > k] = 1 - p[z < k]$

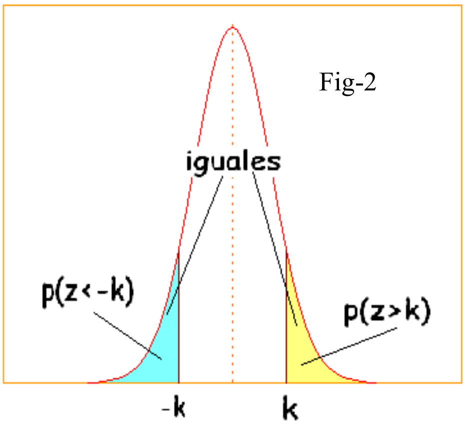


Fig-2

Ejemplos:

1º.- $p[z < -0,5] = p[z > 0,5] = 1 - p[z < 0,5] = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

2º.- $p[z \leq -1,8] = p[z \geq 1,8] = 1 - p[z \leq 1,8] = 1 - \Phi(1,8) = 1 - 0,9641 = 0,0359$

De pedirnos $p[z > -k]$ observemos en la figura 2 que :

$$\mathbf{p[z > -k] = p[z < k] = \Phi(k)}$$

Ejemplos:

1º.- $p[z > -1,8] = \Phi(1,8) = 0,9641$

2º.- $p[z > -0,3] = \Phi(0,3) = 0,6179$

Recíprocamente

Supongamos ahora que nos dan la probabilidad, p, y necesitamos averiguar el valor $z = -k$ para el que:

$$p[z < -k] = 1 - p[z < k] = 1 - \Phi(k) = p$$

De donde $\mathbf{\Phi(k) = 1 - p}$

El valor de k lo encontraremos en las tablas, bien directamente o de una manera aproximada.

Ejemplos

Hallar el valor de $-k$ que cumple las relaciones siguientes:

1º.- $p[z < -k] = 0,3085 \Rightarrow p[z < -k] = 1 - 0,3085 = 0,6915 \Rightarrow k = 0,50 \Rightarrow -k = -0,50$

2º.- $p[z \leq -k] = 0,0359 \Rightarrow p[z < -k] = 1 - 0,0359 = 0,9641 \Rightarrow k = 1,80 \Rightarrow -k = -1,80$

3º.- $p[z \leq -k] = 0,4932 \Rightarrow p[z < -k] = 1 - 0,4932 = 0,5068 \approx k = 0,02 \Rightarrow -k = -0,02$

4º.- $p[z > -k] = 0,6915 \Rightarrow p[z > -k] = p[z < k] = 0,6915 \Rightarrow k = 0,50 \Rightarrow -k = -0,50$

5º.- $p[z \geq -k] = 0,9429 \Rightarrow p[z \geq -k] = p[z \leq k] = 0,9429 \Rightarrow k = 1,58 \Rightarrow -k = -1,58$

6º.- $p[z \geq -k] = 0,9971 \Rightarrow p[z \geq -k] = p[z \leq k] = 0,9971 \Rightarrow k = 2,76 \Rightarrow -k_1 = -2,76$

C) La probabilidad **p** de encontrar un valor cualquiera $k < z < k'$

La probabilidad **p** de que un valor cualquiera z se encuentre en el intervalo $k < z < k'$ es

$$\mathbf{p[\, k < z < k'] = p[z < k'] - p[z < k]}$$

Determinándose $p[z < k']$ y $p[z < k]$, según los valores de k´ y k y restando los resultados obtenidos.

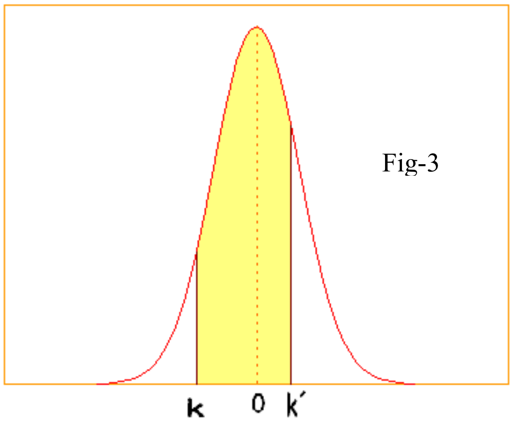


Fig-3

Ejemplos:

1º.- $p[\, 1 < z < 1{,}85] = p[z < 1{,}85] - p[z < 1] = 0.9678 - 0{,}8413 = 0{,}1265$

2º.- $p[1{,}62 \leq z < 2{,}3] = p[z<2{,}3] - p[z \leq 1{,}62\,] = \Phi(2{,}3) - \Phi(1{,}62) = 0{,}9893 – 0{,}9474 = 0{,}0419$

3º.- $p[-1 \leq z \leq 1{,}85] = p[\, z \leq 1{,}85] - p[\, z \leq -1] = 0.9678 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}8091$

4º.- $p[- 0{,}60 \leq z \leq 1{,}4] = p[z \leq 1{,}4] - p[z \leq - 0{,}60] = 0{,}9192 + 0{,}7257] – 1 = 0{,}6449$

5º.- $p[-1{,}85 \leq z \leq -1] = p[\, z \leq -1] - p[\, z \leq -1{,}85] = p[\, z \leq 1{,}85] - p[\, z \leq 1] = 0.9678 - 0{,}8413 = 0{,}1265$

6º.- $p[- 2{,}3 < z <-1{,}7] = p[z < -1{,}7] - p[z <-2{,}3\,] = p[z <2{,}3\,] - p[z <-1{,}7] = 0{,}9893 -0{,}9554] = 0{,}0339$

II.- Calculo de probabilidades en una distribución normal N(μ, σ). Tipificar una variable

Lo más frecuente es que tengamos que trabajar con distribuciones N(μ, σ) diferentes de la normal**.** Los valores recogidos en la página 2 sólo son válidos para la distribución N(0,1) y por ello es necesario habilitar un cambio de variable entre ambas distribuciones.

Si x es de **N(μ, σ)** y z es de **N(0,1)** cualquier valor de x de la distribución **N(μ, σ)** se corresponde con otro $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

Ejemplos

1º.- Dada la distribución normal N(18,4) determina las probabilidades siguientes:

a) $p[x \leq 20]$. El valor correspondiente a x = 20 es $z = \dfrac{20-18}{4} = 0{'}5$ de donde

$p[x \leq 20] = p[z \leq 0{,}5] = 0{,}6915$

b) p[x $\geq$ 16´5]. El valor correspondiente a x = 16´5 es z = $\frac{16'5-18}{4} = \frac{-1'5}{4}$ = -0´375 de donde

p[x $\geq$ 16´5] = p[z $\geq$ -0´375] = p[z $\leq$ 0´375] $\approx$ 0´6443 (valor más aproximado)

c) p[19 < x < 23] .

El valor correspondiente a x = 23 es z = $\frac{23-18}{4} = \frac{5}{4}$ = 1´25

El valor correspondiente a x = 19 es z = $\frac{19-18}{4} = \frac{1}{4}$ = 0´25

p[19 < x < 23] = p[0´25 < z < 1´25] = p[z < 1´25] - p[z < 0´25] = 0´8944 – 0´5987 = 0´2957

2º.- En una distribución N (6 ; 0´9) , calcula k para que se den las siguientes igualdades

a) p[x $\leq$ k] = 0´9772 $\Rightarrow$ Si p[z $\leq$ k´] = 0,9772 $\Rightarrow$ k´ = 2,00

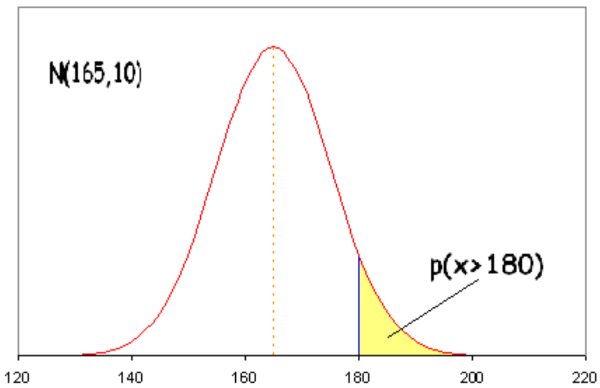
k´ = $\frac{k-\mu}{\sigma}$ $\Rightarrow$ 2 = $\frac{k-6}{0{,}9}$ $\Rightarrow$ k = 7,8

b) b) p[x $\leq$ k] = 0,3 $\Rightarrow$ Si p[z $\leq$ k´] = 0,3 $\Rightarrow$ se trata de un valor de k´ negativo, porque la probabilidad es menor que 0,5

p[z $\leq$- k´] = p[z $\geq$ k´] = 1 – p[z $\leq$ k´] = 0,3 de donde p[z $\leq$- k´] = 0,7 $\Rightarrow$k´ $\approx$ 0,52 $\Rightarrow$ - k´ $\approx$ - 0,52

k´ = $\frac{k-\mu}{\sigma}$ $\Rightarrow$ - 0,52 = $\frac{k-6}{0{,}9}$ $\Rightarrow$ k = - 0,52 . 0,9 + 6 = 5,53

3º.- La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm y desviación típica 10cm. Si las tallas siguen una distribución normal calculara la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm. ¿ Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm ?



Solución

P(x>180)=p(z>$\frac{180-165}{10}$)=p(z >1´5)=1–p(z<1´5)

= 0´0668

Se espera que 0´0668 . 200 = 13´36 . Se espera que a lo sumo 13 alumnos superen la altura de 180 cm.

4º.- El salario medio de los empleados de una empresa se distribuye según una distribución normal, con media 30 000 € y desviación típica 6 000 €. Calcular el porcentaje de empleados con un sueldo comprendido entre 25 000 y 32 000 €.

Solución

$P(25\,000 < x < 32\,000) = p\left(\frac{25000-30000}{6000} < z < \frac{32000-30000}{6000}\right) = p(-0{'}83 < z < 0{'}33) =$

$P(z<0{'}33) - p(z<-0{'}83) = 0{'}6293 - [1 - 0{'}7967] = 0{'}426$

El 42´6 % de los empleados tienen un sueldo comprendido entre 25 000 € y 32 000 €.

VI.-APROXIMACIÓN, DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL, A LA NORMAL.

En una distribución binomial B(n ; p), a medida que crece el valor de **n** se hace más difícil calcular la probabilidad de obtener un cierto número de aciertos **k**. Por ejemplo si lanzamos 50 veces una moneda y nos piden la probabilidad de obtener 30 caras sabiendo que p = 0,4 y q = 0,6. Deberíamos proceder a calcular $P(x=30) = \binom{50}{30} . 0{,}4^{30} . 0{,}6^{20}$ lo que es bastante pesado y más si nos piden la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 25 y 40.

En estos casos, y bajo ciertas condiciones podemos aproximar la distribución binomial **B(n,p)** por la distribución normal **N(np ,** $\sqrt{n.p.q}$ **).**

Una distribución Binomial B(n,p) se parece a una distribución normal tanto más cuanto mayor es el producto np (o nq si q < p, siendo q=1-p). Cuando n.p >5 y n.q > 5 y además n ≥ 30, la aproximación es casi perfecta

En estas condiciones:

$B(n, p) \approx \mathbf{N(np, \sqrt{n.p.q})} = N(\mu, \sigma)$

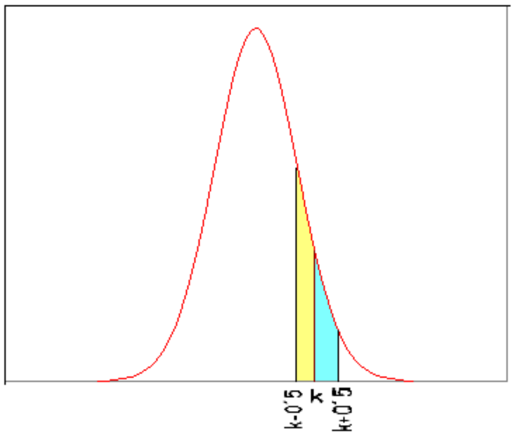
Se ha de tener en cuenta que estamos pasando de una distribución discreta: B(n;p) a otra continua N(np ; $\sqrt{n.p.q}$) por lo que es necesario realizar ciertos ajustes para que la aproximación sea la mejor posible.

CORRECIÓN POR CONTINUIDAD

La corrección por continuidad consiste en tomar un intervalo, de longitud 1, alrededor del punto k.

Si nos piden p(x = k) en una distribución B(n; p), y aproximamos su variable X por la variable X´ de la distribución normal N(np; $\sqrt{n.p.q}$**)**, no podemos calcular directamente p(x´ = k) porque, en las distribuciones continuas estas probabilidades valen 0

La corrección es p(x = k) = p(k-0´5 < x´< k +0´5)



Si nos piden p(x < k), la corrección es p(x < k) = p(x´< k-0´5) (no entra el valor k)

Si nos piden p(x ≤ k), la corrección es p(x ≤ k) = p(x´ ≤ k +0´5) (si entra el valor k)

Ejercicios

1º.- Un estudio realizado por una compañía de investigación de mercados mostró que 15% de las casas de una cierta ciudad poseen una cámara de video. Se obtuvo una muestra de 200 casas.

a) De las 200 casas en la muestra ¿cuántas se espera que tengan una cámara de video?

Solución

Tenemos que n = 200 ≥30 , p = 15% = 0,15 y q = 0,85

n.p = 200 . 0´15 = 30 > 5 y n .q = 200.0´85 = 170 > 5

Bajo estas condiciones la distribución B(200 ; 0´15) puede aproximarse por la distribución normal N(30; 5´0498)

Se espera que el número de casas que tengan video sea la media de la distribución μ = 200 . 0´15 = 30

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 40 casas de la muestra tengan cámara de video?

Se necesita P(X<40) = P(x´< 40-0´5) = p(z < $\frac{k-\mu}{\sigma}$) = p(z < $\frac{39'5-30}{5'05}$) = p(z < 1´88) = 0,9699

La probabilidad es del 96´99 %

2.- Tiramos un dado 100 veces, calcular la probabilidad de obtener entre 20 y 33 veces el 5 (ambos inclusive)

Solución

Probabilidad de obtener 5 en una tirada p(5) = $\frac{1}{6}$ = 0,166 y de no obtenerlo q = $\frac{5}{6}$ = 0,833

n.p = 100 . 0,166 = 16,6 > 5 y n.q = 100 . 0,833 = 83,3 > 5

La distribución binomial B(100 ; 0´166) pude aproximarse por la distribución N(16´6 ; 3´72)

$P(20 \leq X < \leq 33) = p\,(\,20-0{,}5 \leq x' < \leq 33+0{,}5\,) = p(\,19{,}5 \leq x' \leq 33{,}5) = p\left(\frac{19'5-16'6}{3'72} \leq \mathbf{z} < \leq \frac{33'5-16'6}{3'72}\right)$

$P(\,0'78 \leq z \leq 4'54) = p(z \leq 4'54\,) - p(z \leq 0'78\,) \approx 1 - 0'7823 = 0'2177$

La probabilidad es del 21´77 %

3º.- El 35% de una población está afectado por la gripe. Se eligen 30 personas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Haya exactamente 10 enfermos

Vemos que n.p = 30 . 0,35 = 10,5 > 5 y n . q = 30 . 0,65 = 19,5 superan el valor de 5, por lo que la distribución B(30 ; 0,35) se puede aproximar por N(30.0,35 , $\sqrt{30.0{,}35.0{,}65}$) = N(10,5 ; 2,6)

$P(x=10) = P(10-0'5 \leq x' \leq 10 + 0'5) = p\left(\frac{k-\mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{k'-\mu}{\sigma}\right) = p\left(\frac{9{,}5-10{,}5}{2{,}6} \leq z \leq \frac{10{,}5-10{,}5}{2{,}6}\right) =$

$= p(-0{,}3846 < z < 0\,) = p(z<0) - p(\,z<-0{,}3846\,) = p(z<0) - [\,1 - p(\,z< 0{,}3846\,)] = 0{,}5 + 0{,}6480 - 1 = 0{,}148$

b) Haya más de 5 y menos de 12 enfermos

$P(5<X<12) = P(5+0'5 < x' < 12 - 0'5\,) = p(\,5'5 < x' < 11'5\,) = p\left(\frac{5{,}5-10{,}5}{2{,}6} < z < \frac{5{,}5+10{,}5}{2{,}6}\right) =$

$P(\,-1'92 < z < 6'15\,) = \Phi(6'15) - [\,1 - p(\,z< 1'92\,)] \approx 1 + p(\,z< 1'92\,) - 1 = 0'9726$

4º.- En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9, y cada vez que hacemos la extracción de una bola la devolvemos al bombo.

a) Si sacamos tres bolas, calcula la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces

Solución

a) Se trata de una distribución binomial B(3, 0´1), donde n = 3 (nº de bolas extraídas) y p = 0´1 la probabilidad de obtener 0 en una extracción.

$P(x = 1) = \binom{3}{1} 0'1^1 . 0'9^2 = 0'2430$ resultado obtenido en las tablas de la distribución binomial.

b) Si ahora realizamos 100 extracciones la distribución binomial obtenida es B(100, 0´1) se hace necesaria la aproximación de esta distribución a la distribución normal B(100.0´1, $\sqrt{100.0'1.0'9}$) = B(10, 3).

$P(x > 12) = p(x' > 12 + 0'5) = p(z > \frac{12'5 - 12}{3}) = p(z>0'17) = 1 - p(z<0'17) = 0'4325$

La probabilidad es del 43´25 %