Fundación POLAR

## El mundo de la matemática

# Probabilidades


Fundación Polar, a través de su Programa de Actualización Matemática (PAM), ha contribuido con el mejoramiento de la calidad de la enseñanza de la matemática en Educación Preescolar y Básica. Mediante una alianza estratégica establecida con Fe y Alegría, se mantiene el programa de capacitación y seguimiento hasta cubrir la totalidad de las escuelas de esta organización en todo el país. Durante el período 2003-2004 fueron atendidas 36 nuevas escuelas, dándose capacitación a 11 equipos directivos ampliados y 356 docentes, beneficiándose 10.000 alumnos, aproximadamente.

**www.fpolar.org.ve**

Fotografía: Carlos Rivodó

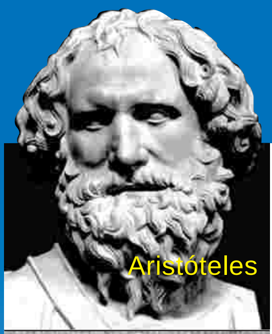
"...la información necesaria para la toma de decisiones o para la construcción de modelos que permitan predicciones futuras es usualmente incompleta...

La estadística ha emergido a través de la cuantificación de la incertidumbre, como la ciencia, la tecnología o en cierto grado el arte del descubrimiento de la verdad subyacente o de la generación de nuevo conocimiento.".

**Calyampudi R. Rao**
(India 1920- ).

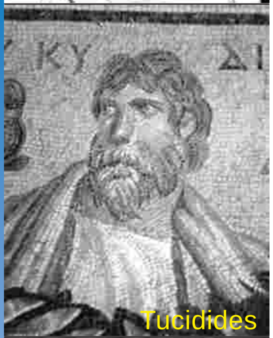
EMPRESAS POLAR

# Probabilidad en el tiempo


Aristóteles

Desde hace muchos siglos el ser humano ha venido reflexionando acerca de las experiencias cuyos resultados son inciertos. Se habla de azar (palabra de origen árabe al-zahr, que significa dados para jugar), fortuna que se asocia a la suerte, *chance* (que en francés significa oportunidad) y probabilidad. En muchas expresiones se utiliza el término probable asociado a todo aquello considerado incierto.

## Antes del siglo XVI


Tucidides

Tucidides, historiador griego (ca. 465-395 a.C.), señalaba: “Es imposible calcular con precisión los hechos que son fruto del azar”.
Para el filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) la probabilidad de un “acontecimiento” se manifiesta en “la frecuencia relativa del acontecimiento ...”.

## Siglo XVI


Cardano

La motivación para estudiar la probabilidad estaba vinculada estrechamente al éxito o al fracaso en los juegos de azar. El matemático Girolamo Cardano (Pavia, 1501-1576), fue pionero en el cálculo de probabilidades de juegos de azar, como lo demuestra su pequeño manual del jugador llamado el “Liber de Ludo Alae”. En su época Cardano exhibía una extraordinaria perspicacia para los problemas fundamentales de la probabilidad vinculados a los juegos de dados.

## Siglo XVII


JACOBI BERNOULLI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

En este siglo se encuentra el acta de nacimiento del concepto de probabilidad en la correspondencia que se cruzan Blaise Pascal (francés, 1623-1662) y Pierre Fermat (francés, 1601-1665). Por primera vez Fermat plantea la noción de probabilidad formulada un siglo más tarde por Laplace, en los términos de número de casos favorables entre el número de casos posibles.

## Siglo XVIII


De Moivre

En este siglo, considerado de oro de numerosas disciplinas, se producen avances que conducen a un tratamiento mas formal de la probabilidad. Jacques Bernoulli (suizo 1654-1705) destacó la importancia del enfoque probabilístico en lo social y demostró el llamado teorema de Bernoulli. Abraham De Moivre (francés 1667-1754) dió una formulación matemática de probabilidad.

## Siglo XIX

En este siglo se introdujeron importantes trabajos acerca de la probabilidad subjetiva y el teorema de Bayes.
Pierre Simón, marqués de Laplace (francés, 1749-1827), conjuntamente con Karl Friedrich Gauss (1777-1856), demostraron el valor práctico de la curva normal (curva de Gauss) como forma típica de distribuciones de frecuencia.

## Siglo XX


Finetti y Savage

En este siglo destacan muchos probabilistas de los que sólo mencionaremos a Émile Borel (francés, 1871-1956), Richard Von Misses (austríaco, 1883-1953), Harold Jeffreys (inglés 1891-1989) y Andreï Kolmogorov (ruso, 1903-1987). Mención especial merece William Feller (croata, 1906-1970) autor del reputado texto “Introduction to Probability Theory and its Applications”. También se continuaron los estudios sobre probabilidad subjetiva y el teorema de Bayes, especialmente por parte de los estadísticos y probabilistas Bruno de Finetti (austríaco, 1906-1985) y Leonard Savage (norteamericano, 1917-1971), entre otros. El desarrollo computacional acelera el avance en el campo probabilístico.

# Probabilidad

La denominación probabilidad tiene varios significados. En el habla cotidiana es usada en referencia al acontecer incierto de algún evento (¿lloverá o no en cierto día?) o al resultado inseguro de algún intento (¿ganaré el premio de lotería?).

Una definición que usualmente se presenta al inicio del estudio de la probabilidad, dice que ésta es el cociente de la división del número de casos probables entre el número de casos posibles. Por ejemplo, si se trata del lanzamiento de un dado y se pregunta por la probabilidad de que sea par el número de puntos que muestra el dado al ser lanzado, la respuesta será que esa probabilidad es el cociente de dividir el número 3 de casos favorables (los números pares 2, 4 o 6) entre el número 6 de casos posibles, resultando 0,5.

En el contexto de este fascículo se presta atención sólo a uno de los diversos conceptos de probabilidad que se denomina probabilidad frecuencial. También se presenta un breve comentario acerca del concepto denominado probabilidad subjetiva

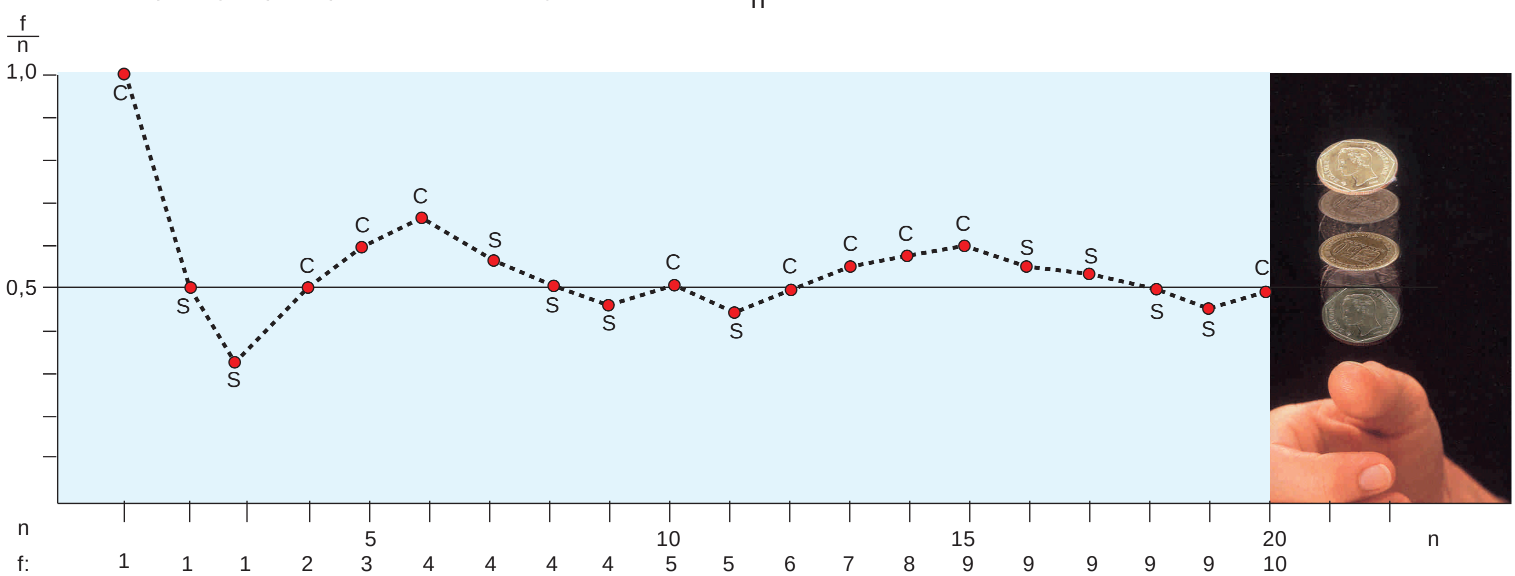
## Probabilidad frecuencial

Es la cantidad a la cual tiende la **frecuencia relativa** de un valor de una variable, que puede resultar al medirla repetidas veces en condiciones semejantes, en un objeto o suceso.

Para tratar la probabilidad frecuencial nos valdremos del ejemplo del lanzamiento de una moneda que tiene dos resultados: cara (C) y sello (S).

En el gráfico siguiente se puede apreciar como converge a 0,5 la frecuencia relativa del número de caras que salen, a medida que aumenta el número n de lanzamientos de la moneda en condiciones semejantes. El símbolo $\frac{f}{n}$ denota dicha frecuencia relativa.

Obsérvese, por ejemplo, que cuando n=12 y f=6 entonces $\frac{f}{n}$=0,5




Si con X se designa a la variable medida, la probabilidad de que X tome cierto valor x es a su vez designada por el símbolo P(X=x). Dado que $0 \leq \frac{f}{n} \leq 1$, entonces $0 \leq P(X=x) \leq 1$.

De una experiencia como la del ejemplo se dice que es un **experimento aleatorio** y de X que es una **variable aleatoria**. El conjunto de resultados de un experimento aleatorio es denominado **espacio muestral**. Todo subconjunto del espacio muestral es un **suceso** o **evento**. Un suceso que tiene probabilidad 0 lo denominamos **suceso imposible**. Un suceso que tiene probabilidad 1 lo denominamos **suceso o evento seguro**.

Si el espacio muestral consta de k resultados a los que corresponde los valores $x_1, x_2, ..., x_k$, entonces $P(X=x_1) + P(X=x_2) + ... + P(X=x_k) = 1$.

En la visión subjetiva, la probabilidad representa una relación entre una proposición y un cuerpo de evidencia, pero no es una relación puramente lógica. Es una relación cuasilógica y el valor numérico asociado a ella representa un grado de creencia.

Henry Kyburg , Universidad de Rochester, EE.UU.

En el cuadro siguiente se presentan los resultados posibles del experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de dos monedas, una de 100 Bs. y otra de 50 Bs.

| Moneda de 50 / Moneda de 100 |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | (1,1) | (0,1) |
|  | (1,0) | (0,0) |

Se ha asociado el número 1 al resultado "cara" y el número 0 al resultado "sello". En consecuencia el espacio muestral asociado a este experimento es {(1,1),(0,1),(1,0),(0,0)}. Por ejemplo el par (1,1) significa que ambas monedas mostraron cara al caer.

Teniendo por convenido que X es la variable correspondiente a la moneda de Bs. 50 e Y a la moneda de Bs. 100, las anotaciones en las celdas son pares $(x_i , y_j)$ de valores de esas variables. Supongamos que la repetición del experimento aleatorio en condiciones semejantes, numerosas veces, condujo a asociar a cada elemento del espacio muestral una probabilidad igual a 0,25. En el cuadro siguiente se indica la notación simbólica de las probabilidades de los resultados, del experimento aleatorio:

| | $X=x_1=1$ | $X=x_2=0$ |
| --- | --- | --- |
| $Y=y_1=1$ | P(X=1 , Y=1) | P(X=0 , Y=1) |
| $Y=y_2=0$ | P(X=1 , Y=0) | P(X=0 , Y=0) |

$P(X=x_1,Y=y_1) + P(X=x_2,Y=y_1) = 0,25 + 0,25 = 0,5 = P(Y=y_1)$

La probabilidad de que la moneda de Bs. 100 sea cara es 0,5 tal como fue verificado en el cálculo anterior.

$P(X=x_1,Y=y_2) + P(X=x_2,Y=y_2) = 0,25 + 0,25 = 0,5 = P(Y=y_2)$

La probabilidad de que la moneda de Bs. 100 sea sello es 0,5.

Las probabilidades $P(X=x_i)$ y $P(Y=y_j)$ se denominan **probabilidades marginales** y las probabilidades $P(X=x_i,Y=y_j)$ se denominan **probabilidades conjuntas**. En nuestro ejemplo, las probabilidades marginales son la probabilidad de que cada moneda por separado salga cara o sello y las probabilidades conjuntas son la probabilidad del par de resultados que se obtienen al lanzar las dos monedas.

## Probabilidad condicional

La probabilidad de ocurrencia de un suceso dada la ocurrencia de otro suceso, se dice que es la **probabilidad condicional** del primer suceso con respecto del segundo.

Para calcular la probabilidad condicional $P= P(X=x_i/Y=y_j)$ de ocurrencia de un valor $x_i$ de la variable X, dada a la ocurrencia del valor $y_j$ de la variable Y, se obtiene de la siguiente manera:

$$P= P(X=x_i/Y=y_j) = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \qquad i=1,2 \qquad j=1,2$$

En el experimento del lanzamiento de dos monedas, la probabilidad condicional $P(X=x_i/Y=y_j) = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{0,25}{0,50} = \frac{1}{2}$

Cuando $P(X=x_i/Y=y_j) = P(X=x_i)$, como ocurre en nuestro caso, decimos que X es independiente de Y.

**Reto:** Verifica que en el ejemplo del lanzamiento de las dos monedas $P(Y=y_j/X=x_i) = P(Y=y_j)$; i=1,2; j=1,2.

**Interesante:** Cuando la variable X es independiente de la variable Y, la información que se tenga acerca de la variable Y es irrelevante para el conocimiento del comportamiento de la variable X.

Thomas Bayes
Teólogo y matemático inglés
(1702-1761).

# Teorema de Bayes

En determinadas situaciones, la carencia de información necesaria para el cálculo de una probabilidad condicional se puede subsanar empleando el teorema de Bayes. Ilustramos su uso con el siguiente ejemplo:

En una institución educativa hay dos secciones (A y B) de noveno grado de Educación Básica, en las cuales se realizó una prueba cuyos resultados se presentan al lado:

| | Secciones | |
|---|---|---|
| | A | B |
| Nº de alumnos | n(A) | $n(B)=\frac{3}{4}n(A)$ |
| Nº de reprobados | $r(A)=\frac{n(A)}{5}$ | $r(B)=\frac{n(B)}{10}$ |

De un fichero donde se guardan 70 fichas (una de cada alumno), se saca por sorteo una de ellas y resulta que es de un alumno reprobado, pero no tiene anotado el nombre del alumno ni la sección a la cual pertenece ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno sea de la sección A? La respuesta se obtiene determinando la probabilidad de ser de dicha sección bajo la condición de ser reprobado. Si denotamos las probabilidades con los símbolos indicados a continuación:

| Resultados en la prueba | Secciones | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| Reprobados R | P (A y R) | P (B y R) | P(R) |
| No reprobados $\tilde{R}$ | P (A y $\tilde{R}$) | P (B y $\tilde{R}$) | P($\tilde{R}$) |
| | P (A) | P (B) | |

entonces, para responder la pregunta planteada necesitamos hallar la probabilidad condicional P(A/R). Para ello utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(A/R)=\frac{P(A \text{ y } R)}{P(R)}=\boxed{\frac{P(R/A)\bullet P(A)}{P(R/A)\bullet P(A)+P(R/B)\bullet P(B)}}$$

En nuestro ejemplo:

1. Calculamos el número de alumnos de las secciones A y B:

$$70 = n(A) + n(B) = n(A) + \frac{3}{4}n(A) = \frac{7}{4}n(A)$$

n(A)=40 y n(B)=30

2. Calculemos las probabilidades marginales:

$$P(A)=\frac{n(A)}{Total}=\frac{40}{70}=\frac{4}{7} \quad \text{y } P(B)=\frac{3}{7}$$

3. Calculamos las probabilidades condicionales:

$$P(R/A)=\frac{n(R)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A)}{5}}{n(A)}=\frac{1}{5} \quad \text{y} \quad P(R/B)=\frac{n(R)}{n(B)}=\frac{\frac{n(B)}{10}}{n(B)}=\frac{1}{10}$$

4. Aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(A/R)=\frac{P(R/A)\bullet P(A)}{P(R/A)\bullet P(A)+P(R/B)\bullet P(B)}=\frac{\frac{1}{5}\bullet\frac{4}{7}}{\frac{1}{5}\bullet\frac{4}{7}+\frac{1}{10}\bullet\frac{3}{7}}=\frac{8}{11}\approx 0{,}727$$

La probabilidad de que el alumno reprobado sea de la sección A es muy alta (72,7%).

Josiah Willard Gibbs
EE.UU. (1839-1903).

## ¿SABÍAS QUE...?

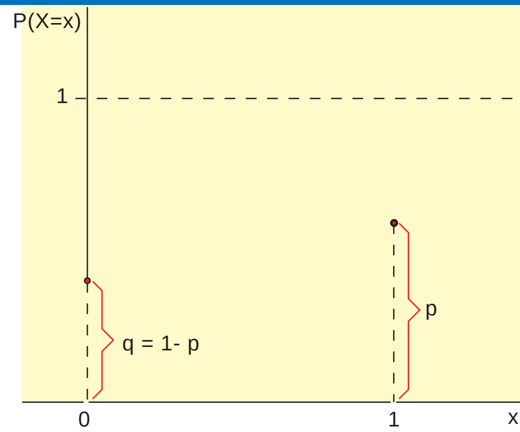
Las hipótesis formuladas por Gibbs y Boltzmann, a finales del siglo XIX, para aplicar las leyes estadísticas en la mecánica con la finalidad de explicar el movimiento de los gases a nivel molecular, sentaron las bases de la mecánica estadística.

Ludwig Boltzmann
Austria (1844-1906).

**Interesante:**

Los dos lados de la moneda de 1 *lats* de Letonia, titulada *moneda de la suerte*, simbolizan dos aspectos de la existencia humana: libertad y predestinación. La moneda que fue acuñada en el año 2001 es bimetálica, es decir, una cara está enchapada en oro y la otra es de plata.

# Modelos de Bernoulli y binomial




El ejemplo del lanzamiento de una moneda es un caso de una variable X que toma sólo dos valores $x_1$, $x_2$ con probabilidades mayores que 0. Este caso puede ser representado mediante la función y el gráfico siguiente

$$\begin{cases} P(X=x_1) = p>0 \\ P(X=x_2) = 1-p = q>0 \\ P(X=x) = 0 \text{ para todo otro valor de la variable X.} \end{cases}$$

A la variable X se le asocian la media E(X) (Valor esperado o esperanza matemática) y la varianza V(X) cuya obtención se indica a continuación:

$$E(X) = x_1\ P\ (X=x_1) + x_2\ P\ (X=x_2) = 1 \bullet p + 0 \bullet q = p$$

$$V\ (X) = [x_1\text{-}E(X)]^2 \bullet P\ (X=x_1) + [x_2\text{-}E(X)]^2 \bullet P\ (X=x_2) = [1 - p]^2 \bullet p + [o - p]^2 \bullet q = p \bullet q$$

La formulación, el gráfico, el valor esperado y la varianza de X corresponden al llamado modelo de Bernoulli. De p se dice que es el parámetro que caracteriza a dicho modelo. Obsérvese que la P(X=x)>0, E(X), V(X) se determinan en función de p. Según lo explicado en las páginas 179 y 180, en el caso del lanzamiento de una moneda p=0,5, y por tanto E(X)=0,5 y $V(X)=(0,5)^2=0,25$.

La **esperanza matemática** de la variable aleatoria es el valor medio de dicha variable.

La **varianza** es el valor medio de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada valor de la variable respecto a su esperanza matemática.

Otro ejemplo de una variable, representable mediante el modelo de Bernoulli, es el nacimiento de un ser humano en el cual se distinguen dos resultados: sexo femenino (F) y sexo masculino (M). Designando con la letra X la variable sexo, y con $x_1$ =1 el evento sexo femenino y $x_2$=0 sexo masculino, a semejanza del caso del lanzamiento de una moneda emplearemos los símbolos $P(X = x_1)=p$ y $P(X = x_2)=q$. Además también podemos considerar que p = q = 0,5.

## El modelo binomial

En el caso de una clínica de obstetricia, donde ocurren diariamente 10 nacimientos, los resultados de un día podrían ser los representados en el cuadro siguiente:

| Persona atendida | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª | 7ª | 8ª | 9ª | 10ª |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sexo | F | F | M | F | M | M | M | F | M | M |
| Valor de X ($x_i$) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| P (X = $x_i$) | p | p | q | p | q | q | q | p | q | q |

La suma de los valores que X tomó en el día en referencia es 4. Si los nacimientos, en ese día, hubiesen sido todos o ninguno del sexo femenino la suma hubiese sido igual a 10 o igual a 0, respectivamente. En general la suma toma valores entre 0 y 10. Se llega así a la conclusión que la suma de los valores de la variable X es un valor de otra variable aleatoria Y. Tomando en cuenta que el orden en que nazcan 4 niñas en el total de los 10 nacimientos puede ocurrir de 210 maneras diferentes, la probabilidad $P(Y=4) = \binom{10}{4}p^4\ q^6 = \frac{10!}{4!\ 6!}p^4\ q^6 = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}\ p^4\ q^6 = (210)\ p^4\ q^6$.

La probabilidad de que sea hembra o varón es de 0,5, entonces la probabilidad en nuestro ejemplo: es $P(Y=4) = 210 \bullet 0,5^4 \bullet 0,5^6 \approx 0,205$.


Bernoulli, Jakob
matemático suizo
(1654-1705).

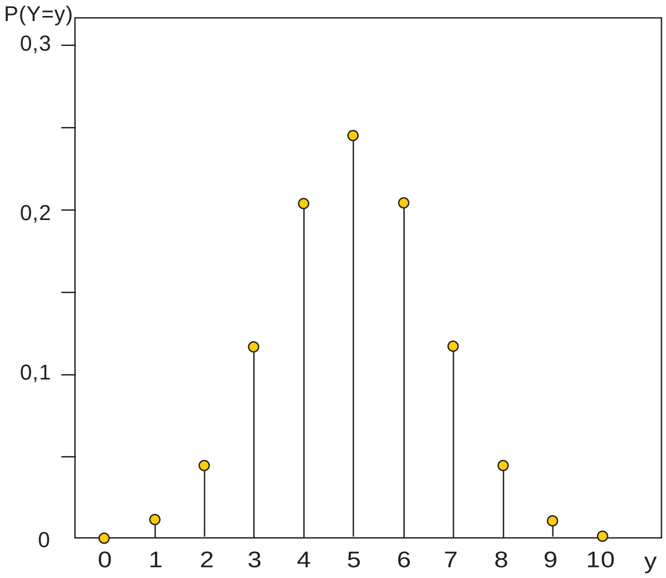
## ¿SABíAS QUE...?

Jakob Bernoulli (también conocido como Jacques I o James I) era hermano de otro célebre matemático Johann Bernoulli. Su obra *Ars conjectandi* (1713), publicada luego de su muerte, constituye el primer tratado sobre probabilidad.

# Modelo binomial

En general, el **modelo binomial** asigna probabilidades $P(Y=y)=\binom{n}{y}p^y q^{n-y}$ para y = 1, 2,... , n. Tomando el caso de la clínica de obstetricia, podemos calcular la probabilidad para cualquiera valor de nacimientos de niñas entre 0 y 10 reflejado en el cuadro y gráfico siguientes:

| y | P(Y=y) |
|---|---|
| 0 | 0,000977 |
| 1 | 0,009766 |
| 2 | 0,043945 |
| 3 | 0,117188 |
| 4 | 0,205078 |
| 5 | 0,246994 |
| 6 | 0,205078 |
| 7 | 0,117188 |
| 8 | 0,043945 |
| 9 | 0,009766 |
| 10 | 0,000977 |




El valor esperado E(Y) y la varianza V(Y) de una variable binomial Y son:

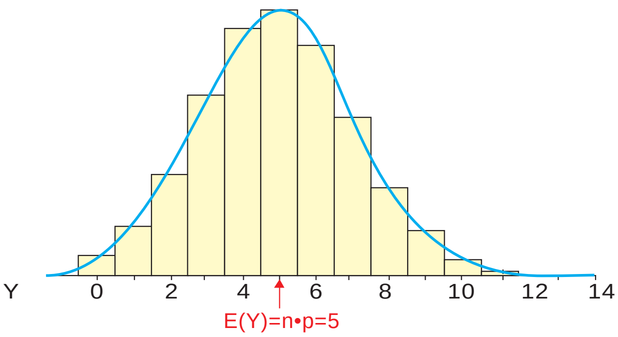
$$E(Y) = n \cdot p \quad y \quad V(Y)=n \cdot p \cdot q$$

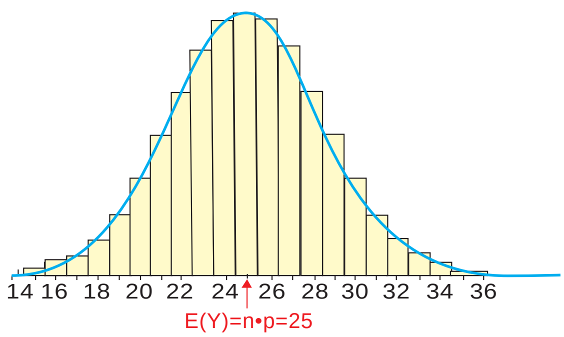
En el modelo binomial las probabilidades P(Y=y)>0, E(Y) y V(Y) se expresan en función de n y p. Por lo tanto n y p son los parámetros que caracterizan dicho modelo.

**Interesante:**

En algunos textos sobre probabilidades se incluyen tablas como la presentada al lado izquierdo, cuyo uso facilita el cálculo de probabilidades de la variable binomial Y. Por ejemplo $P(Y\geq 9) = P(Y=9) + P(Y=10) =$ 0,009766 + 0,000977 = 0,010743.

A continuación se presentan dos gráficos de variables binomiales de parámetros n=50; el de la izquierda corresponde al caso en que p=0,1 y el de la derecha al caso en que p=0,5.




En los dos histogramas a cada valor y de Y corresponde un rectángulo de área igual a P(Y=y) y se ha superpuesto una curva tal que entre ella y el eje de abscisas se encierra un área aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos de todos los valores de Y. Obsérvese que esa aproximación es mejor en el gráfico de la derecha, en el que la distribución de las probabilidades P(Y=y) es simétrica. La curva corresponde al **modelo probabilístico normal**.

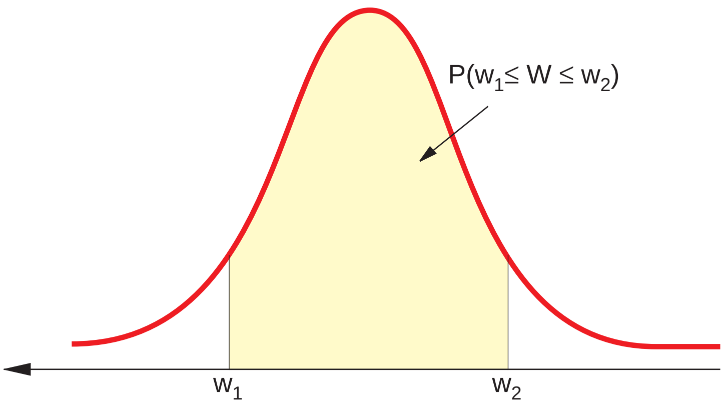
**Interesante:**

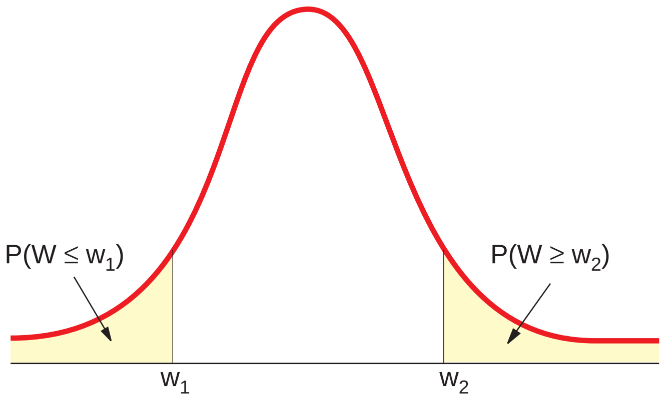
"Uno de los pasos en el desarrollo de un campo de conocimiento hacia la madurez científica, es la fabricación de modelos que permiten una predicción acertada en ese campo... La mera creación de modelos no es suficiente; los modelos tienen que sobrevivir a las pruebas... El progreso científico se basa en este constante juego entre los modelos y los datos...". Irwin D. J. Bross (EE.UU.).

# Modelo normal

Se sabe que existen muchas variables que en la práctica siguen una **distribución normal**, tal es el caso de los pesos y tallas de personas y de las calificaciones de estudiantes. También es el caso que la distribución de las medias de n datos corresponde aproximadamente al modelo normal. Tal aproximación mejora en la medida en que n es mayor. Las variables que siguen una distribución normal son continuas.

Si W es una variable que sigue el modelo normal, el conjunto de valores que puede tomar es infinito no numerable. Por lo tanto la probabilidad de que W tome un valor particular w es P(W=w)=0. No obstante también se pueden obtener probabilidades mayores que 0 correspondientes a conjuntos de valores de W como se indica en los gráficos siguientes:

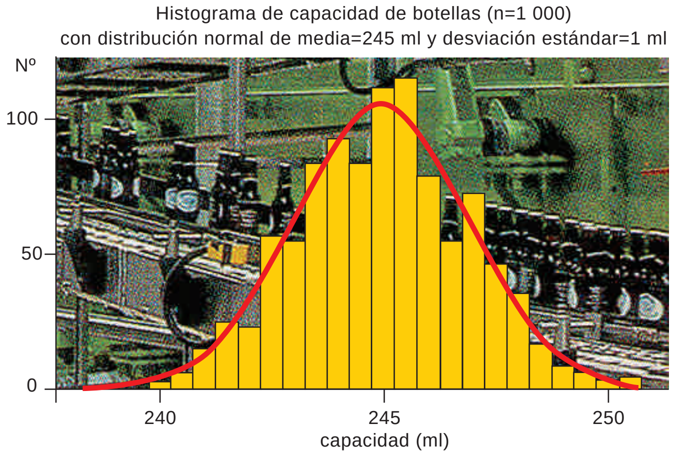



La distribución de una variable aleatoria normal W tiene como parámetros su valor esperado E(W) y la desviación estándar $\sqrt{V(W)}$. En la actualidad el uso de computadores y calculadoras facilita la obtención de las probabilidades antes indicadas.

Veamos un ejemplo de aplicación del modelo normal. Un productor de bebidas necesita para envasarlas, botellas cuya capacidad no sea mayor que 250 ml. Un fabricante de botellas sostiene, basándose en la medición de la capacidad de gran número de las que él produce, que el histograma de la distribución de frecuencias de esas mediciones es muy aproximado a la curva de una variable normal W, como la presentada al lado. La media y la desviación estándar de la distribución de frecuencia son 245 ml y 2 ml respectivamente.

Considerando que E(W)=245 y $\sqrt{V(W)}$=2 mediante el uso de una calculadora se obtuvo P(W>250)= 0,006 21. Por tanto podemos concluir que en 1 000 botellas, aproximadamente 6 podrían tener capacidad mayor que 250 ml.




## ¿SABÍAS QUE...?

Acerca de la formulación del modelo normal se han presentado versiones atribuidas a Gauss, a Laplace y a otros. La aproximación del modelo binomial al normal, usada en este fascículo, fue estudiada por Abraham de Moivre (matemático francés, 1667-1754).