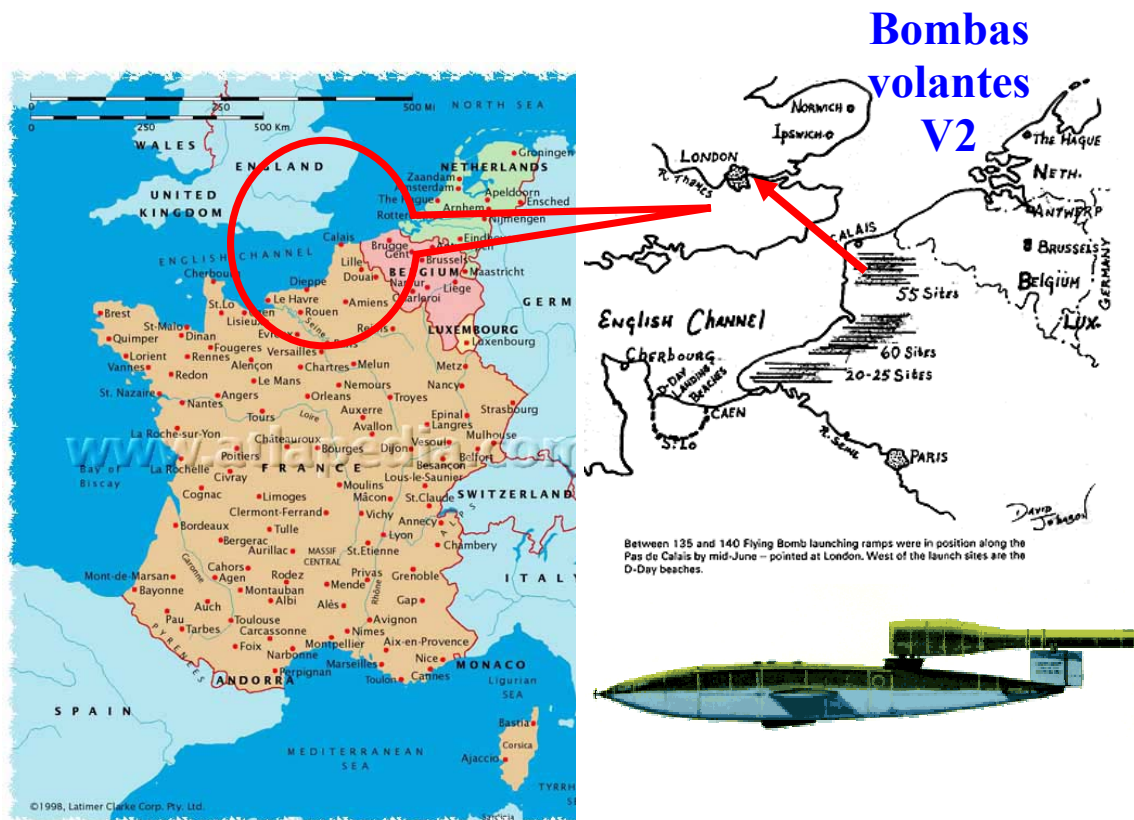


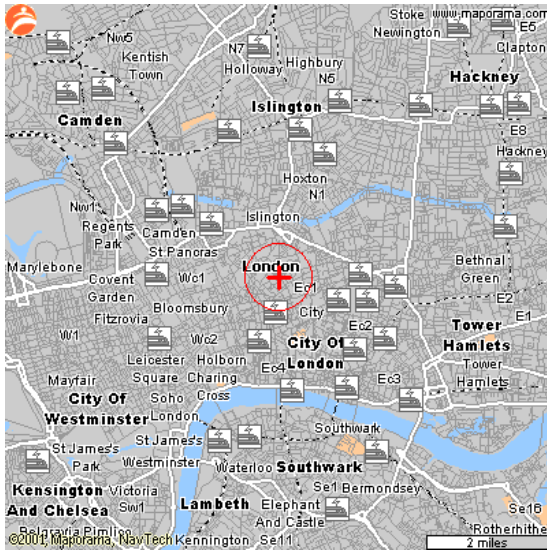
La distribución de Poisson

- Introducción
- La distribución de Poisson
- Propiedades
- Ejemplos
- Aproximación gaussiana



II Guerra Mundial: bombardeo de Londres desde Calais con bombas volantes V1 y V2

Los alemanes, ¿apuntaban o disparaban al azar?



Area de Londres de 144 Km² dividida en 576 cuadrados de 0.5 km² cada uno.

El número total de V2 que habían caído en esa área era de 537 bombas.

Número medio de bombas en

un cuadrado: $\mu = \frac{537}{576}$

$$P_{\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Numero de V2 en un cuadrado x	Cuadrados esperados (Poisson) con x impactos: $576P_{\mu}(x)$	Cuadrados reales (observados) con x impactos
0	226.7	229
1	211.4	211
2	98.5	93
3	30.6	35
4	7.1	7
5 o más	1.8	1
	576	576

Conclusión: ¡¡ Los alemanes no apuntaban ¡!

Introducción

Desintegraciones radiactivas

Se sabe que una fuente radiactiva emite partículas alfa a un ritmo de 1.5 por minuto. Si medimos el número de partículas alfa emitidas en dos minutos ¿Cuál es el resultado promedio esperado? ¿Cuál es la probabilidad de observar $x = 0, 1, 2, 3, 4$? ¿Y la probabilidad de que $x \geq 5$?

Experimentos de contar sucesos



Distribución de Poisson

$$P_{\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Si en promedio esperamos μ sucesos, la probabilidad de obtener x , viene dada por $P_{\mu}(x)$

μ = Número medio de sucesos esperados

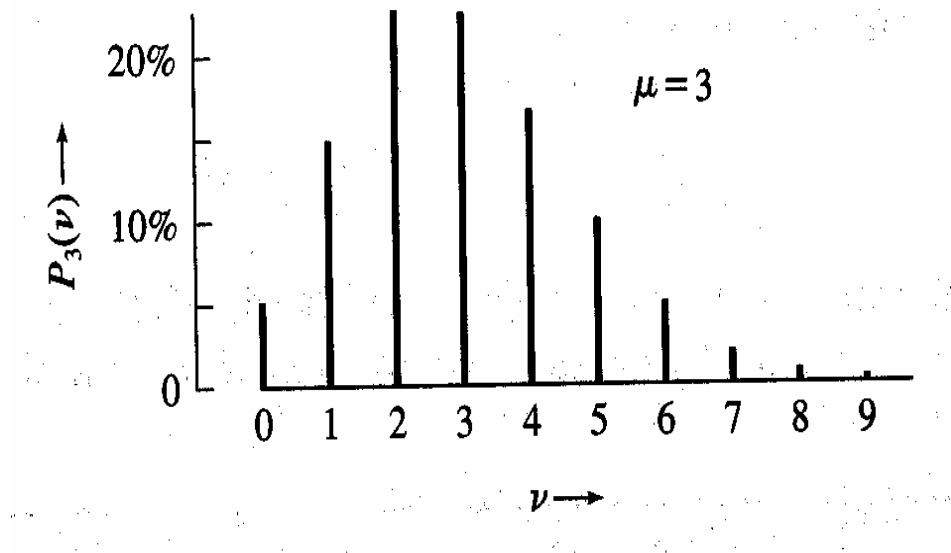
Probabilidad de observar x sucesos
cuando el promedio es

$$\mu = 1.5 \frac{\text{alfa}}{\text{min}} \times 2 \text{ min} = 3 \text{ alfa}$$

$$P_3(x) = \frac{3^x}{x!} e^{-3}$$

<u>Sucesos observados x</u>	0	1	2	3	4
<u>Probabilidad</u> $P_3(x)$	5%	14%	22%	22%	17%

$$\text{Prob}(x \geq 5) = 100\% - (5 + 14 + 22 + 22 + 17)\% = 19\%$$



Distribución de Poisson para un valor medio de $\mu = 3$

La distribución de Poisson

$$P_{\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

➤ Condición de normalización

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_{\mu}(x) = 1$$

➤ Valor medio

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x P_{\mu}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \mu$$

➤ Desviación típica

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 P_{\mu}(x) = \mu \rightarrow \sigma = \sqrt{\mu}$$

Cuando realizamos un experimento de contar sucesos y obtenemos un valor x , el resultado con su error es:

$$x \pm \sqrt{x}$$

Ejemplos

Más desintegraciones radiactivas

Un estudiante observa que una muestra de Torio emite 49 partículas en 30 minutos ¿Cuál es la tasa de emisión? ¿Cuál es la tasa en partículas por minuto?

$$(\text{Part. en 30 minutos}) = 49 \pm \sqrt{49} = 49 \pm 7$$

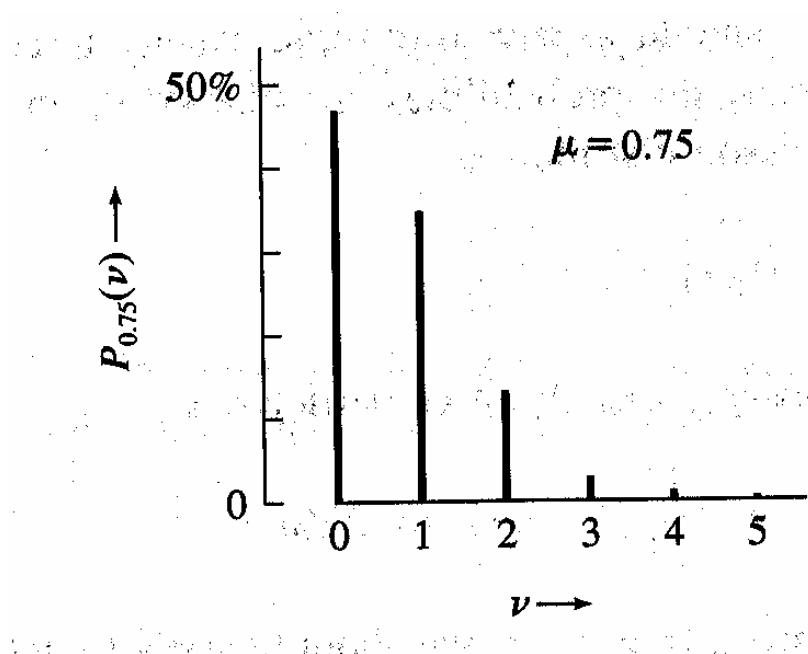
$$R = \frac{49 \pm 7}{30} = 1.6 \pm 0.2 \text{ part/min}$$

Ejemplo

En promedio, cada una de las 18 gallinas de un gallinero pone un huevo al día. Si se recogen los huevos cada hora ¿Cuál es el número medio de huevos que se recogen en cada visita? ¿Con qué probabilidad encontraremos x huevos para $x = 0, 1, 2, 3$? ¿y la probabilidad de que $x \geq 4$?

Promedio: $\mu = 1 \times 18 / 24 = 0.75$ huevos / hora

<u>Sucesos observados x</u>	0	1	2	3	$x \geq 4$
<u>Probabilidad (%) $P_{\mu=0.75}(x)$</u>	47.2	35.4	13.3	0.6	0.8



Distribución de Poisson para un valor medio de $\mu = 0.75$

Aproximación gaussiana

➤ Diferencias entre ambas distribuciones

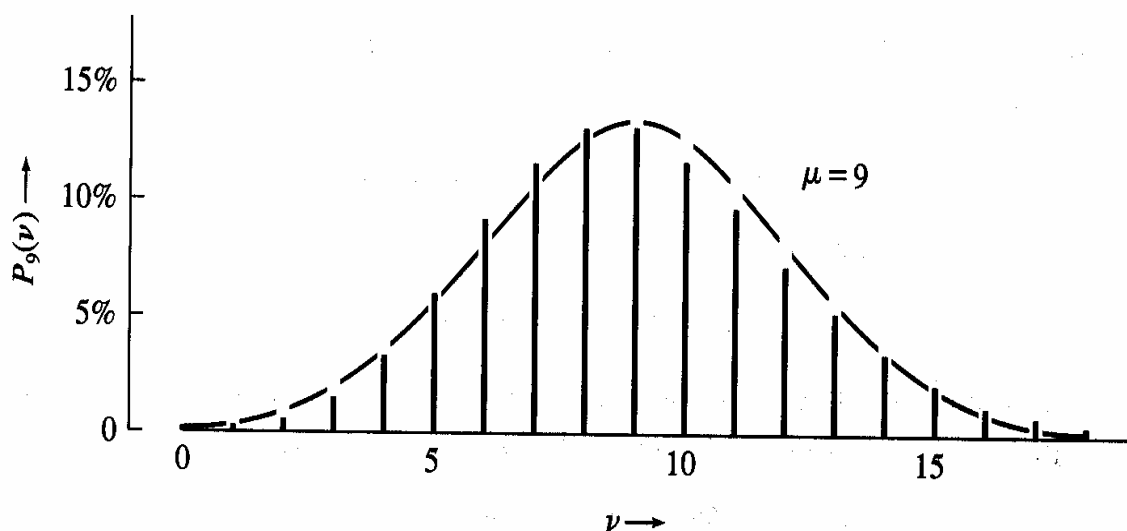
<u>Poisson</u>	<u>Gauss</u>
Variable discreta	Variable continua
No es simétrica	Simétrica
Un parámetro (μ)	Dos parámetros (X, σ)

➤ Sin embargo:

$P_{\mu}(x) \approx G_{X,\sigma}(x)$, cuando μ es grande

con

$$X = \mu \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$



Distribuciones de Gauss y de Poisson para un valor medio de $\mu = 9$

Ejemplo

Consideremos la distribución de Poisson para $\mu = 64$

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener 72 sucesos?

Según Poisson:

$$\text{Prob}(72) = P_{64}(72) = \frac{(64)^{72}}{72!} e^{-64} = 2.91 \%$$

Según Gauss:

$$\text{Prob}(72) = G_{64,8}(72) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(72-64)^2}{2 \times 8^2}} = 3.02 \%$$

➤ ¿Cuál es la probabilidad de obtener 72 o más sucesos?

Según Poisson:

$$\text{Prob}(x \geq 72) = P_{64}(72) + P_{64}(73) + \dots = 17.3 \%$$

Según Gauss:

$$\text{Prob}(x \geq 72) = P_G(x \geq 71.5) = P_G(x \geq X + t\sigma) = 17.4\%$$

$$\text{con } t = \frac{x - X}{\sigma} = \frac{71.5 - 64}{8} = 0.9375$$