

El método cartesiano y la geometría analítica

Andrés de la Torre Gómez

Recibido Feb. 25, 2005 Aceptado Mar. 24, 2006

Abstract

The Cartesian method of establishing true propositions in the sciences and rightly seeking for them is studied from a historical standpoint in relation to the predecessors of Descartes, particularly Lulio and de la Ramée, and its main characteristics are expounded. The contributions of Descartes to the invention of co-ordinate geometry and to algebra, which were shown in his *Géométrie*, are analyzed.

Key words: Cartesian method, universal mathematics, mathematical reasoning, analysis, synthesis, heuristics, analytic geometry.

AMSC(2000): Primary: 00A30, Secondary: 01A45.

Resumen

Se exponen las características del método creado por Descartes para la búsqueda de las proposiciones verdaderas en las ciencias y se le sitúa históricamente, en relación con sus antecedentes, particularmente Lulio y de la Ramée. Se analizan los aportes de Descartes a la invención de la geometría analítica y al álgebra, contenidos en el texto de la *Géométrie*.

Palabras y frases claves: Método cartesiano, matemática universal, razonamiento matemático, análisis, síntesis, heurística, geometría analítica.

1 Introducción

Cuando Descartes nació en 1596, ya Shakespeare había pasado de los 30 años y estaba en pleno furor erótico romántico escribiendo *Romeo y Julieta*; cuando Descartes murió en 1650, Newton –el más grande de sus herederos intelectuales– era apenas un niño.

Algunas de las concepciones de Descartes, como la del dualismo cuerpo-alma o la del mecanismo esencial de la naturaleza, se encuentran tan extendidas en el pensamiento moderno que han llegado casi a ser parte de nuestra manera de pensar. Tal vez hoy podríamos suscribir lo que escribió Hegel, hace cerca de doscientos años:

“Con Cartesio entramos... en una filosofía propia e independiente, que sabe que procede sustantivamente de la razón y que la conciencia de sí es un momento esencial de la verdad. Esta filosofía erigida sobre bases propias y peculiares abandona totalmente el terreno de la teología filosofante, por lo menos en cuanto al principio, para situarse del otro lado. Aquí, ya podemos sentirnos en nuestra casa y gritar, al fin... ¡tierra!” ([6], p. 7).

No es necesario detenerse en los detalles de su vida. Baste señalar que, a los 20 años, Descartes abandonó los claustros universitarios convencido de que lo único positivo que había derivado de sus estudios librescos era la conciencia de su propia ignorancia, y decidido a leer directamente en el gran libro del

mundo. Se alistó como voluntario en alguno de los ejércitos que asolaban a Europa en la guerra de los treinta años. Holanda era entonces un hervidero científico y fue allí, en la ciudad de Breda, donde Descartes inició su aventura intelectual, a los 22 años de edad. Era el 10 de noviembre de 1618, fecha de su encuentro con Isaac Beeckman, quien lo llevó a ocuparse de problemas de física matemática.

Fue tan importante esta fecha para Descartes que, exactamente un año después, el 10 de noviembre de 1619, tuvo una experiencia mística acompañada de revelaciones de lo alto. Él mismo habla del entusiasmo que sintió y dice que descubrió en esos momentos el fundamento de una ciencia admirable. Por la noche tuvo tres sueños, que describe e interpreta en detalle. Todo ello lo tomó Descartes como un mensaje de origen sobrenatural y, en señal de gratitud, planeó una peregrinación a la Virgen de Loretto en Italia.

Vivió estas experiencias, quizás herméticas, quizás religiosas ([9], p. 44), en una cabaña a orillas del Danubio; allí, dice Descartes, se había encerrado todo el día *dans un poêle* ([3], p. 23), literalmente “en la estufa” o “en el horno”. Es muy probable que este episodio de su vida tenga relación con las ceremonias rituales de alguna sociedad secreta, como la Hermandad de los Rosacruces, que eran herederos de Christian Rosenkratz y de la tradición alquímica de los árabes; no se trataba propiamente de transmutar los metales en oro sino de un proceso de reconstrucción del propio ser, que pasaba por varias etapas graduales y ascendentes, tomando como punto de partida la incineración y combustión simbólicas de sí mismo en el horno alquímico. Esta etapa inicial se llama *nigredo* y está descrita en la novela magistral de Marguerite Yourcenar *Opus Nigrum* y en la poesía mística española, como en *Noche oscura del alma*, de San Juan de la Cruz.

Descartes dice que en la segunda fecha descubrió el fundamento de una ciencia admirable. ¿A qué se refiere?

Los biógrafos, por lo general, interpretan estas palabras de Descartes como una referencia al descubrimiento de la geometría analítica, por un lado, y del método para la investigación filosófica, por el otro.

Hay en la vida de Descartes otro momento digno de destacar: A los 32 años conoció en París al Cardenal de Berulle, quien había introducido a los carmelitas descalzos en Francia y organizado la congregación del *Oratoire*, dedicada a la vida espiritual y devota y al estudio de los místicos. Este personaje acrecentó en Descartes la convicción del deber: debía dedicar su vida a la búsqueda de la verdad. Conforme con este dictamen, se trasladó a Holanda y vivió allí durante 20 años, dedicado a la filosofía y las matemáticas, al cabo de los cuales aceptó la invitación de la corte de la reina Cristina de Suecia, donde murió a los 54 años de edad.

2 El método cartesiano

El conocimiento humano, pensaba Descartes, puede compararse con un árbol: las raíces están constituidas por la metafísica; el tronco de dicho árbol es la física; tiene tres ramas principales, que se relacionan con las aplicaciones: al mundo externo (la mecánica), al cuerpo humano (la medicina) y a la conducta de la vida (la moral). En una comunicación dirigida a Picot, casi al final de su vida, aplica Descartes de manera explícita la imagen del árbol a la filosofía y añade: “Ahora bien, como los frutos no cuelgan de las raíces, ni del tronco de los árboles, sino de los extremos de sus ramas, tampoco la principal utilidad de la filosofía depende de aquellas partes suyas que sólo se pueden aprender en último lugar.” ([13], p. 314). El propósito de su actividad filosófica había sido el de llegar a la raíces, a los fundamentos mismos del conocimiento, de modo que se pudieran recoger posteriormente frutos maduros. Concibió el método, con sus preceptos y sus reglas, como el camino hacia las raíces de todo conocimiento, vía preñada de posibilidades de fertilización y creatividad.

En Holanda, compuso su primer tratado filosófico sobre el conocimiento universal, el cual fue publicado en 1637, en Francés, bajo el título *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*. Este texto estaba acompañado de tres apéndices, titulados:

- *La dioptrique*
- *Les météores*
- *La géométrie*

El propósito manifiesto de Descartes era habilitar a los hombres para que llegaran a ser poseedores y maestros de la naturaleza. Rápidamente comprendió que no bastaba con aumentar la suma de lo que entonces pasaba por conocimientos científicos, si se continuaban empleando los mismos métodos que habían producido esos conocimientos. Las fallas más grandes que encontraba Descartes en la ciencia escolástica que imperaba en su época eran dos: primero, los conceptos que esa ciencia usaba para plantear y resolver los problemas eran conceptos oscuros; segundo, no existía un método universal que se pudiera aplicar a la diversidad de los datos científicos. Debido a esas fallas de la escolástica, las conclusiones a que llegaba esa ciencia carecían de claridad y eran apenas tentativas y dispersas.

Descartes conocía bien las matemáticas puras de su tiempo –geometría, aritmética y álgebra– pues las había estudiado en el colegio de los jesuitas, en el texto reciente de Clavius y en los escritos clásicos de los matemáticos griegos. Admiraba el rigor de esos conocimientos, pero también los criticaba porque se referían a materias sumamente abstractas y que parecían carecer de utilidad. Le molestaba que la geometría permaneciese ligada a las figuras,

y que el álgebra adoleciese en tan alto grado de confusión y oscuridad que terminara sumiendo al espíritu en el desconcierto.

El gran defecto que les atribuía a esas matemáticas era la carencia de un método único, al cual se subordinaran los procedimientos empleados para la solución de los problemas.

Bajo la influencia de Beeckman, se interesó en las matemáticas aplicadas: ya en 1619, estudió la aceleración de la caída de los cuerpos, la presión de un líquido sobre el fondo de un vaso, los acordes musicales, y, posteriormente, la refracción de la luz. Buscaba, como lo hacían Kepler y Galileo en la misma época, una expresión matemática para las leyes de la naturaleza. Aquí también se le hizo patente la urgencia de poner en claro los fundamentos mismos de la construcción de ese saber, de modo que los problemas se pudieran abordar siguiendo siempre el mismo método. Criticó, por ejemplo, a Galileo porque éste “no examinó las cuestiones de una manera sistemática y, al no haber tomado en consideración las causas primeras de la naturaleza, sólo buscó las razones de determinados efectos particulares, con lo que su construcción carece de todo fundamento”. ([13], p. 314)

En su búsqueda de un método único, Descartes tuvo que romper con la orientación metodológica de los científicos medievales, quienes sostenían, apoyados en Aristóteles, que cada una de las ciencias debe tener un método propio que responda a las diferencias peculiares de los materiales que dicha ciencia investiga. Descartes, en cambio, sostuvo que, a pesar de las diferencias en los materiales y en los datos de las distintas ciencias, todas ellas avanzan mediante el razonamiento, el cual siempre tiene las mismas características fundamentales, independientemente de los términos. La razón que opera en todos los hombres es una y la misma, afirmaba Descartes, y, por lo tanto, no puede haber sino un método universal, que, al ser aplicado a cualquier clase de datos y problemas, lleve a conclusiones necesarias y que todos los hombres pueden verificar.

Los resultados obtenidos por la aplicación de dicho método estarán interconectados y constituirán un cuerpo unitario y comprehensivo, una ciencia universal única, y no una colección dispersa de curiosidades ni una pluralidad de ciencias distintas, aisladas una de otra, separadas en compartimentos estancos.

No habiendo encontrado el método universal que buscaba, ni en las matemáticas puras ni en las aplicadas, se dio Descartes a la tarea de crear una matemática universal, que no se ocupara de los objetos particulares estudiados por las matemáticas tradicionales –como números, figuras, astros y sonidos– sino que estudiara únicamente el orden y la medida. El orden, según el cual al conocimiento de un término le sigue necesariamente el conocimiento de otro término; la medida, según la cual los objetos están relacionados entre sí gracias a la misma unidad.

Pero el método de Descartes no es tampoco la matemática universal, sino

que está por encima de ella y la engendra. La matemática universal es, tan solo, una aplicación del método a los objetos más simples. Los hombres que vayan a dedicar su vida a la búsqueda de la verdad en cualquiera de las ciencias deben aprender la matemática universal, como una manera de habituar la mente a aquellas operaciones intelectuales que constituyen la razón, pero con algunas salvedades: (i) No se trata de aprender las matemáticas tradicionales sino aquella nueva matemática creada por Descartes, que él denominó “matemática universal”; (ii) el interés no es el de aprender esas matemáticas por sí mismas sino como un ejercicio en el método, para pasar después a estudiar objetos mucho más importantes.

En cuanto a las operaciones que se emplean en el razonamiento matemático, Descartes dice que son solamente de las tres clases siguientes: intuición, deducción y enumeración. La fundamental es la intuición, que es un acto de la inteligencia por el cual concebimos un cierto término, complejo o simple, como, por ejemplo, una esfera o la rectitud. El acto de aprehensión intuitiva es directo, singular, instantáneo e infalible, y no se presenta como el resultado de una inferencia.

El primer paso del razonamiento es el conocimiento intuitivo de algunas proposiciones, que se presentan a la mente por fuera de toda duda y cuya certeza se extenderá paso a paso a las proposiciones que de ella dependen. A través de la intuición, se conocen no solo las proposiciones verdaderas, a partir de las cuales se inicia el razonamiento, sino también el lazo que une a esas proposiciones y las que dependen de ella inmediatamente. Es así como la intuición, a la que Descartes llama “instinto intelectual” y “luz natural”, nos permite adquirir una gran cantidad de conocimientos, que bastan para demostrar innumerables proposiciones.

Esta demostración se lleva a cabo mediante la segunda operación intelectual, la deducción. La deducción, en Descartes, no es como la del silogismo, sino que es una operación consecuente con la intuición. Mediante la deducción salen a la luz, en una secuencia de términos sucesivamente intuidos, las relaciones de dependencia o de necesidad que hay entre ellos.

Se trata de un movimiento ininterrumpido a través de una especie de cadena de verdades; después de haber captado por intuición el lazo que une a cierta verdad con otra próxima a ella, se procede mediante la enumeración a reconocer rápidamente los distintos eslabones, buscando que se dé la impresión de que son captados al primer golpe de vista, casi sin el recurso de la memoria.

En la matemática universal el método es, ante todo, orden. La noción de orden, en Descartes, es fértil y tiene como ejemplo las progresiones matemáticas, en las cuales cuando se conocen los primeros términos, es fácil determinar los restantes. El orden permite determinar el valor de los términos desconocidos por el lugar que éstos tienen asignado en la progresión. Se trata de un orden que es inherente a la naturaleza de los términos que constituyen la

progresión y goza, en ese sentido, de una alta significación creadora.

En un pasaje de la *Géométrie* insiste en la fertilidad del orden:

“Si se quiere resolver un problema hay que considerarlo primero como ya resuelto y poner nombres a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las conocidas como a las desconocidas. Luego, sin hacer ninguna diferencia entre las conocidas y las desconocidas, se recorrerá la dificultad *según el orden* que muestre, con mas naturalidad, la dependencia mutua de unas y otras. . .” (subrayas nuestras). ([4], p. 8) ([5], p. 17)

En la segunda parte del *Discurso del método*, Descartes enuncia las cuatro reglas o preceptos cuya observancia rigurosa le permitirá al hombre llegar al conocimiento verdadero. “Hay que observar, le escribe a Mersenne, que no sigo el orden de las materias, sino sólo el de las razones” ([1], p. 685), es decir, el orden que justifique nuestras proposiciones acerca de las cosas. Los preceptos son los siguientes:

“Fue el primero no admitir como verdadera cosa alguna, como no supiese con evidencia que lo es; es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención, y no comprender en mis juicios nada mas que lo que se presentase tan clara y distintamente a mi espíritu, que no hubiese ninguna ocasión de ponerlo en duda.

El segundo, dividir cada una de las dificultades que examinare, en cuantas partes fuere posible y en cuantas requiriese su mejor solución.

El tercero, conducir ordenadamente mis pensamientos, empezando por los objetos mas simples y mas fáciles de conocer, para ir ascendiendo poco a poco, gradualmente, hasta el conocimiento de los mas compuestos, e incluso suponiendo un orden entre los que no se preceden naturalmente.

Y el último, hacer en todos unos recuentos tan integrales y unas revisiones tan generales, que llegase a estar seguro de no omitir nada.” ([5], p. 40)

Según el primer precepto, la única fuente de conocimiento es la luz natural de la inteligencia, es decir, la intuición, que es la que nos da las ideas claras y distintas.

3 Antecedentes del método cartesiano

Es necesario, cuando se mencionan los antecedentes de Descartes, llamar la atención sobre la preocupación manifestada por los filósofos anteriores a él

con respecto a la búsqueda de un método universal que permitiera encontrar la verdad.

Raimundo Lulio o Ramón Llull, mallorquí del siglo XIII ([8], p. 572), era un místico católico dedicado a un fin práctico: establecer sobre la tierra la religión católica, que él consideraba idéntica a la razón. El también, como Descartes 350 años después, se vio involucrado en la acción después de tener visiones y revelaciones místicas; también escribió en lengua vulgar, en su caso el Catalán, en el caso de Descartes el Francés, no el Latín –que era el idioma culto de la época–. Ambos buscaban un arte de razonar, un método de pensamiento universal.

A este propósito, Lulio escribió gran cantidad de textos, en Catalán, traducidos después al Latín. El más famoso se llama *Ars magna* o *Arte magna*, que pretende ser un método para descubrir la verdad y para unificar todas las ramas del conocimiento en un sistema universal, fundado en la idea de una *mathesis universalis*, desarrollada después por Descartes y Leibniz.

Lulio encuentra que cada ciencia tiene sus principios propios y diferentes de los de las demás ciencias, pero sostiene también que es un requisito del entendimiento que exista una ciencia general, con principios generales, en los que estén implícitos y contenidos los de las demás ciencias particulares, de manera análoga a como lo particular está en lo universal.

Lo que Lulio expone es un arte de clasificar y combinar conceptos dados, pero no de descubrir conceptos nuevos. Parece confundir el orden puramente formal con la invención; estrictamente hablando, permite saber lo que hay que preguntar sobre una cosa, buscar esa cosa bajo aspectos diversos, pero no conduce al descubrimiento de las respuestas. Su método consiste esencialmente en enumerar todas las proposiciones que tienen alguna posibilidad de ser verdaderas, acerca de un sujeto dado, y seleccionar, de entre ellas, la correcta.

Lulio introduce un simbolismo visual, con base en letras, figuras geométricas, colores, diagramas combinatorios y esquemas (como el del árbol de la ciencia), y con la ayuda de este simbolismo, empleado de manera sistemática, busca reemplazar la inseguridad habitual de las operaciones intelectuales por la seguridad de unas operaciones semi mecánicas, que se hacen de una vez para siempre. Se encuentran en él, aunque todavía en estado embrionario, las ideas de “característica” y de “cálculo”, que constituyen un antecedente a la obra de Leibniz y al desarrollo moderno de las máquinas lógicas y de la lógica simbólica.

Lulio descompone los conceptos compuestos en nociones simples, que son representadas mediante letras y símbolos, construyendo así un lenguaje artificial y una especie de máquina conceptual simbólica. Para encontrar los cimientos y las raíces de todos los conceptos bastaría descubrir los términos simples que los constituyen; pero también es necesario descubrir una regla que permita llevar a cabo todas las combinaciones posibles de términos. Al encontrar los términos simples y la regla para combinarlos se habrá reprodu-

cido la trama total del pensamiento divino, el cual, a su vez, se manifiesta, *per symbola*, a través de la gran máquina del universo.

En el siglo XVI, inmediatamente anterior al de Descartes, se extiende entre los intelectuales una exigencia de claridad, la cual es especialmente notable en Pierre de la Ramée. Indignado por la esterilidad de la enseñanza de las escuelas parisinas, se vio impulsado a abandonar la escolástica y a escribir en lengua vulgar, no en Latín, que era la lengua de los doctos. El método era, para de la Ramée, el orden que permite agrupar los argumentos con la mayor claridad, con lo cual se hace más efectiva la enseñanza.

Ya en el siglo XVII, que es el de Descartes, Francis Bacon preconizaba el método de la inducción sistemática y del ensayo y error como el único apropiado para descubrir empíricamente las leyes de la naturaleza. Descartes compartía con él y con sus antecesores, de la Ramée y Lulio, la convicción de que el empleo del método correcto le abriría a la humanidad períodos de progreso intelectual y material incomparable.

4 La geometría analítica

La *Géométrie*, el tercer apéndice del *Discurso del método*, se divide en tres partes o libros. Los dos primeros se refieren a lo que después se ha denominado geometría analítica, y el tercero contiene una exposición de las innovaciones aportadas por Descartes al simbolismo algebraico.

Se afirma, con frecuencia, que la geometría analítica consiste en una aplicación del álgebra a la geometría. Pero los antiguos griegos, particularmente Arquímedes, ya habían aplicado el álgebra al tratamiento de cuestiones geométricas, y este tipo de procedimiento era el habitualmente empleado por los matemáticos del siglo XVI, anteriores a Descartes.

La idea de las coordenadas, por otro lado, fue empleada por los egipcios antiguos y los romanos en la agrimensura, y por los griegos en el levantamiento de mapas. En el siglo XIV, Nicolás Oresme se anticipó a otro aspecto de la geometría analítica al representar ciertas leyes mediante el gráfico de una variable dependiente, llamada *latitudo*, contra una variable independiente, llamada *longitudo*, cuando a esta última se le permitía tomar incrementos pequeños.

Cabe preguntar: ¿Cuál fue el aporte verdadero que hizo Descartes en cuanto a la geometría?

El propósito específico del texto de Descartes es resolver problemas del tipo siguiente: ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto tal que se satisface una condición específica? Descartes busca una respuesta geométrica, y exige que, además de identificar la curva solución del problema, se muestre que ésta es construible mediante un artificio mecánico que permita dibujarla de acuerdo con ciertas reglas específicas. Todo lo que hace en el texto —incluidas las innovaciones que propone al simbolismo algebraico, sus hallazgos en teoría

de ecuaciones algebraicas, la clasificación de las curvas de acuerdo con sus grados—son medios orientados a la búsqueda de la curva solución del problema y a la discusión de su constructibilidad. ([11], p. 80) ([10], p. 84)

Descartes, por supuesto, se apoya en sus predecesores, entre los cuales se destacan, por un lado, los geómetras griegos y, por otro, el matemático francés Viète. Los griegos habían resuelto una multitud de problemas de lugares geométricos, empleando para ello el método de reducción o *apagoge* y el método del análisis ([2], pp. 35 - 41). La *apagoge* consistía en reducir un problema dado a otro problema, más fácil de manejar. Por ejemplo, Hipócrates de Quíos redujo el problema de la duplicación del cubo al de encontrar la intersección de una parábola y una hipérbola.

En el método del análisis asumimos que tenemos aquello que se busca en el problema y trabajamos hacia atrás, tomando como punto de partida este supuesto, hasta que llegamos a algo ya conocido o previamente demostrado. El análisis se complementa posteriormente con la síntesis, en la que se recorren hacia delante las distintas etapas establecidas en el análisis. En el siglo IV, Pappo de Alejandría compiló el *Tesoro del análisis*, conocido también como *El arte de resolver los problemas* y como *Heurística* ([12], p. 141), en el cual dio la definición clásica de análisis como solución hacia atrás y describió 33 trabajos -de Euclides, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes-, que contenían problemas sustanciales de la geometría resueltos por el método del análisis.

Un antecedente más directo del trabajo de Descartes fue la invención del álgebra simbólica, la cual fue reconocida desde su descubrimiento por Viète, en 1591, como una clase de análisis. En efecto, decir *sea $X = la\ incógnita$* , y después hacer cálculos con X , como si fuera conocido, es una especie de análisis, en el sentido que los griegos le habían dado a esta palabra. Por eso, Viète calificó el álgebra como un arte analítica; de ahí que después de Viète se usaran las palabras análisis y álgebra como sinónimos, hasta mediados del siglo XVIII, cuando empezó a usarse el término análisis, específicamente, para denotar el álgebra de los procesos infinitos.

El álgebra de Viète, sin embargo, estaba basada en la teoría de las magnitudes geométricas, creada por los griegos y expuesta por Euclides, 300 años antes de Cristo. En esta teoría, una variable correspondería a la longitud de algún segmento rectilíneo, el producto de dos variables al área de algún rectángulo, y el producto de tres variables al volumen de algún paralelepípedo rectangular. Estrictamente hablando, los griegos no tenían cómo seguir adelante, ni cómo darle significado al producto de cinco variables, o de seis, o de siete. Dicho de otra manera, si X representara la longitud de un segmento, X^2 representaría un área y X^3 un volumen, pero ¿qué sería representado por X^4 , X^5 , X^6 , etc.?

Pero, además, la teoría griega suponía el postulado de Arquímedes o propiedad arquimediana ([2], p. 56), según el cual dos magnitudes no se podían comparar a menos que un múltiplo de una de ellas pudiera exceder a la otra,

lo que no permitía sumar áreas con longitudes o con volúmenes. En esa teoría, por consiguiente, la expresión $X^2 + X$ no tenía sentido.

En este punto, Descartes rompió con el pasado, pues decidió interpretar el producto de dos líneas como una línea ([4], p. 5), no como un área, lo que le permitió interpretar cualquier potencia arbitraria de X como una longitud. Descartes introdujo un segmento de longitud unitaria; pudo así, dado un segmento de longitud X , encontrar la cuarta proporcional entre 1, X y X , y llamó X^2 a esta cuarta, es decir, estableció la proporción $1 : X = X : X^2$. Para ello, Descartes apeló a la proposición 12 del Libro VI de los *Elementos de Geometría*, de Euclides ([7], p. 813), la cual resuelve el problema de encontrar la cuarta línea proporcional a tres líneas dadas. De esta manera, Descartes aritmetizó la geometría al reducir todas las magnitudes geométricas a magnitudes lineales.

Enseguida, Descartes legitimó las operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división), dándoles interpretaciones geométricas como operaciones con segmentos rectilíneos, en el marco de la geometría euclidiana. Una vez aclarado el status de las operaciones algebraicas en el marco de la teoría de las magnitudes geométricas, Descartes avanzó en el simbolismo algebraico. Todo ello terminó abriéndoles el camino a los matemáticos posteriores para independizar el álgebra, al considerarla como una extensión del estudio de los números y no de las magnitudes geométricas.

Después de haber completado este proceso de algebrización de las magnitudes geométricas, Descartes –todavía en el primer libro de la *Géométrie*–, tomó un segmento de longitud X sobre un eje dado, y un segmento de longitud Y formando un ángulo fijo con dicho eje, y se ocupó entonces de la tarea de construir puntos cuyos X 's y Y 's satisficieran una relación dada. Por ejemplo, si la relación entre X y Y fuera la expresada por $Y = X^2$, entonces para cada valor de X podríamos construir el correspondiente Y como el cuarto término de la proporción $1 : X = X : X^2$. Descartes se interesó, de manera especial, en obtener tales relaciones entre X y Y para algunas curvas definidas cinéticamente.

Como una aplicación de su método, Descartes discutió el problema general de Pappo. Los casos más importantes de este problema piden encontrar el lugar de un punto tal que el producto de las distancias del punto a M rectas dadas esté en una razón constante con el producto de las distancias a otras N rectas dadas. Los griegos habían resuelto el problema por medios geométricos para $M = N = 1$, y para $M = 1, N = 2$.

Pappo había conjeturado que para $M = N = 2$, el lugar sería una sección cónica, pero no había dado la prueba de su aserto. Descartes tampoco aportó una prueba geométrica, pero mostró que el lugar es representado por una ecuación de 2º grado y, por tanto, es una cónica. Posteriormente, Newton resolvió el problema por procedimientos estrictamente geométricos.

Descartes estudió otro caso particular, $M = 3, N = 2$, encontrando que

el lugar buscado podía representarse por una ecuación algebraica en X y Y , de grado 3. Este lugar no era una cónica, sino la llamada parábola cúbica de Descartes. De manera natural surgió en Descartes la pregunta: ¿Puede dicha curva ser construida? Es decir, ¿dado X , podemos encontrar el correspondiente valor de Y , y construir así cualquier punto sobre la curva?

Descartes consideraba que, a menos que pudiera mostrar el procedimiento para construir geométricamente la curva, no tendría el problema resuelto. Para él, haber encontrado la ecuación algebraica era un camino hacia la solución, pero no era todavía la solución del problema.

Se ha dicho que fue el intento de Descartes de resolver el problema general de Pappo lo que lo llevó a inventar el método de la geometría analítica. Lo esencial en este método, cuando se aplica al plano, es el establecimiento de una correspondencia entre los pares ordenados de números reales y los puntos del plano, con lo cual se hace posible una correspondencia entre las curvas del plano y las ecuaciones en dos variables, de modo que a cada curva del plano le corresponde una ecuación definida, de la forma $f(X, Y) = 0$, y a cada ecuación algebraica en dos variables le corresponde una curva, o un conjunto de puntos del plano. Así, se establece también una correspondencia entre las propiedades analíticas y algebraicas de la ecuación $f(X, Y) = 0$, por un lado, y las propiedades geométricas de la curva conocida, por otro lado. Pero es bueno recalcar que, a los ojos de Descartes, el álgebra no era un fin en sí misma, sino un instrumento para resolver los problemas de la geometría; convencido de ello, sostuvo la idea de la reducibilidad última de todos los problemas geométricos a un tipo singular de problema, a saber, el de encontrar las raíces de una ecuación.

Conviene advertir, sin embargo, que la *Géométrie* no contiene ningún tratamiento sistemático del método de la geometría analítica, el cual debe ser elaborado por el lector a partir de algunos enunciados aislados. No vemos allí, en ninguna de las 32 figuras que aparecen en el texto de Descartes, las coordenadas cartesianas, tan mencionadas por los profesores en sus clases. De hecho, Descartes sólo empleaba un eje, el de las X , sin hacer ninguna referencia a la existencia de otro eje, para las Y : Simplemente, dado X , la ecuación de la curva le permitía computar el Y correspondiente, y así obtenía el par de números (X, Y) asociado a un punto dado, de los cuales sólo X era tomado sobre un eje. El uso de los dos ejes se impuso por comodidad, no por necesidad lógica. Términos como coordenadas, abscisa, ordenada, en el sentido que les damos hoy, fueron introducidos por Leibniz, en 1692, 55 años después de la publicación del opúsculo de Descartes.

El segundo libro de la *Géométrie* trae el método de Descartes para hallar la normal y la tangente a una curva en un punto dado e incluye una clasificación de las curvas planas en geométricas y mecánicas, la cual fue superada posteriormente, en 1704, por Newton, quien introdujo la clasificación hoy vigente, en curvas algebraicas y trascendentes.

El tercer libro trata de las ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 y establece, sin demostrarla, la conclusión de que el número de raíces de la ecuación de grado N en X es igual a N : Este resultado fue demostrado por primera vez por Gauss, 160 años después de Descartes, y se conoce como el teorema fundamental del álgebra. En este libro, Descartes fija la costumbre de emplear las primeras letras del alfabeto para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras para las incógnitas, así como el sistema de índices, hoy en boga, para denotar las potencias. Emplea allí, por primera vez, el método de los coeficientes indeterminados e introduce la regla de los signos, que permite acotar el número de raíces positivas y el de raíces negativas de una ecuación polinomial.

Descartes escribió este pequeño tratado en un estilo intencionadamente oscuro, que hace muy difícil su lectura. En 1649, apareció la traducción del Francés al Latín, con notas explicativas debidas a Van Schooten, las cuales tuvieron muy amplia acogida.

El hecho notorio es que los contemporáneos de Descartes no captaron el nuevo método en toda su profundidad y la geometría analítica sólo vino a imponerse después de la invención del cálculo infinitesimal. En 1704 —es decir, 67 años después de la publicación del *Discurso del método* de Descartes— utilizó Newton de manera sistemática la geometría analítica en su clasificación de las curvas planas cúbicas, la cual fue publicada como uno de los apéndices de su *Optica*. Allí se mostraba que existen 68 especies de estas curvas, las cuales no habían podido ser ni siquiera imaginadas por los métodos griegos de la geometría sintética, que imperaron hasta Descartes.

Más de cien años tardó el método enseñado por Descartes en la *Géométrie* en alcanzar, a manos de Euler, Monge, Lagrange y Lacroix, la forma sistemática de exposición que se encuentra todavía en los textos de matemáticas de hoy, incluida la extensión de dichos métodos al estudio de las superficies en el espacio tridimensional.

Aunque no es el objeto de este artículo analizar los detalles de la disputa entre Descartes y Fermat con respecto a la primacía en la invención de la geometría analítica, sí debe señalarse un hecho notable: cuando Descartes clasificó las curvas algebraicas según sus grados, estableció también que los puntos de intersección de dos curvas pueden encontrarse resolviendo simultáneamente sus ecuaciones, de donde se infiere que una infinidad de curvas distintas pueden estar referidas a un mismo sistema de coordenadas. Este resultado, que le abre la puerta a la más amplia generalidad, no fue vislumbrado por ninguno de los antecesores de Descartes en el uso de las coordenadas, y no hay nada en los trabajos de Fermat que muestre que este matemático lo hubiera alcanzado. Sin embargo, el enfoque que le dio Fermat a la geometría analítica era más completo y sistemático que el de Descartes, hasta el punto de haberle permitido a Fermat obtener las ecuaciones generales de la recta, el círculo con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola rectan-

gular referida a las asíntotas como ejes, desde 1629, es decir, 8 años antes de la publicación del *Discurso del método*.

Reconocimiento. Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”, **COLCIENCIAS 1115-11-12704**; fue presentado por el autor en el X Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas (ERM), Universidad de Medellín, 2004, con el título de “Descartes y la modernidad”.

Referencias

- [1] Bréhier, E.: Historia de la filosofía, Vol. 1, Tecnos, Madrid, 1988.
- [2] De la Torre, A.: Anotaciones a una lectura de Arquímedes, Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 1997.
- [3] Descartes, René: Discours de la méthode suivi de Méditations métaphysiques, Les éditions variétés, Montreal, Canada, 1950.
- [4] Descartes, René: The Geometry, Dover, New York, 1954.
- [5] Descartes, René: Discurso del método y Meditaciones metafísicas, Espasa-Calpe, Madrid, 1970.
- [6] Descartes, René: Reglas para la dirección del espíritu, Alianza editorial, Madrid, 1994.
- [7] Euclides: Elementos de geometría, en: Vera, F., Científicos griegos, Vol.1, Aguilar, Madrid, 1970.
- [8] Ferrater Mora, J.: Diccionario de filosofía, Sudamericana, Buenos Aires, 1951.
- [9] Garin, E.: Descartes Crítica, Barcelona, 1989.
- [10] Grabiner, J.: Descartes and problem-solving, Mathematics Magazine, Vol.68(2), 83-97, 1995.
- [11] Jullien, V.: Descartes La “Géométrie” de 1637, Presses Universitaires de France, Paris, 1996.
- [12] Polya, G.: How to Solve It, A New Aspect of Mathematical Method, Doubleday Anchor Books, New York, 1957.
- [13] Reale, G. y Antiseri, D.: Historia del pensamiento filosófico y científico, Vol.2, Herder, Barcelona, 1995.

Dirección del autor: Andrés de la Torre Gómez Universidad de Antioquia, adatorre@yahoo.com ■